Kvantno mašinsko učenje

Milan Bojić

Uvod

- Klasično mašinsko učenje: usporavanje inovacija i dostignuta granica računarskih resursa
- Sledeće veliko remećenje tehnološkog poretka
  - Kvantna nadmoć
- Obrada kvantnih sistema, brže prepoznavanje obrazaca, otkrivanje osobina klasičnog mašinskog učenja

Kvantno računarstvo

- Kubit
- Kvantna kapija
- Kvantna spletenost
- Kvantna memorija, Kvantni registri

Kubit

- **Najmanja jedinica informacije u kvantnom računarstvu**
- **Opšta formula za kubit** $|\gamma\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$
- **Kompleksne amplitude α i β sa ograničenjem**

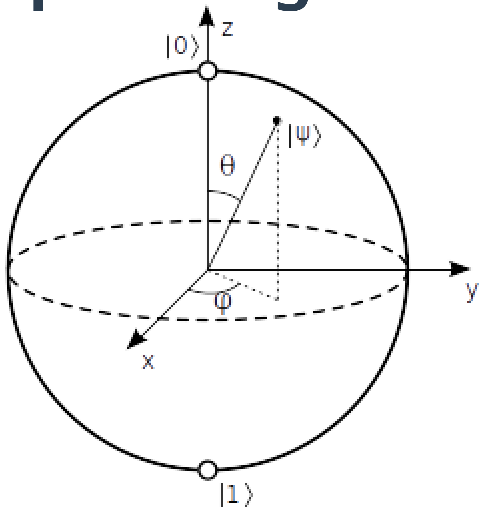
$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

- **Stanje kubita ima dva stepena slobode, amplitude možemo da zapišemo kao**

$$\alpha = \cos\frac{\Theta}{2} \qquad \beta = e^{i\phi}\sin\frac{\Theta}{2}$$

Kubit

- **Na površini Blohove sfere kubit se prikazuje preko uglova Θ i ϕ**
- **Na polovima sfere se nalaze bazna stanja |0> i |1>**
- **Merenjem kubita dobija se ili 0 ili 1**
- **Fizički kao polarizovan foton**



Kvantna kapija

- **Transformiše kubite**
- **Logički predstavljena kao unitarna matrica dimenzija**

$$2^n \times 2^n$$

- **Hademardovo kolo** $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
- **Rotaciono kolo** $\begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix}$

Kvantna spletenost

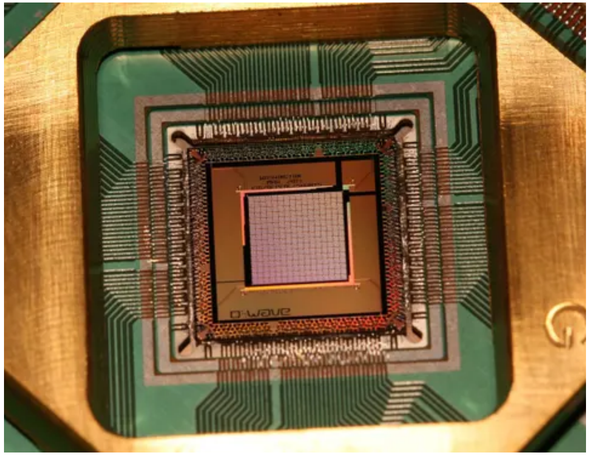
- Dva, ili više, kubita povezana prave novo kvantno stanje
- Razdvojiva stanja na osnovne kubite
- Nerazdvojiva kvantna stanja

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|00\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|11\right\rangle$$

- Deljenje informacija između kubita

Kvantno računarstvo

- Vrsta računarstva koja koristi osobine kvantne mehanike
- Kvantni računari
- Simulacija fizičkih sistema



Kvantna informacija

- Kvantna teorija informacija
- Fon Nojmanova entropija $S(\varrho) = H(X)$
- Merenje validnosti između dva kvantna stanja
- Kvantna informacija
  - kodirana u kvantnim sistemima
  - ne može se kopirati
  - pri procesu merenja menja se

Kvantna teorija informacija

- **Oblasti istraživanja:**
  - **Prenošenje klasičnih informacija preko kvantnih kanala**
  - **Prenošenje kvantnih informacija preko kvantnih kanala**
  - **Efekti kvantne spletenosti na prenošenje informacija**
  - **Informacioni aspekti kvantnog merenja, odnosa između raspodele kvantnog stanja i preciznog merenja**

Priprema podataka

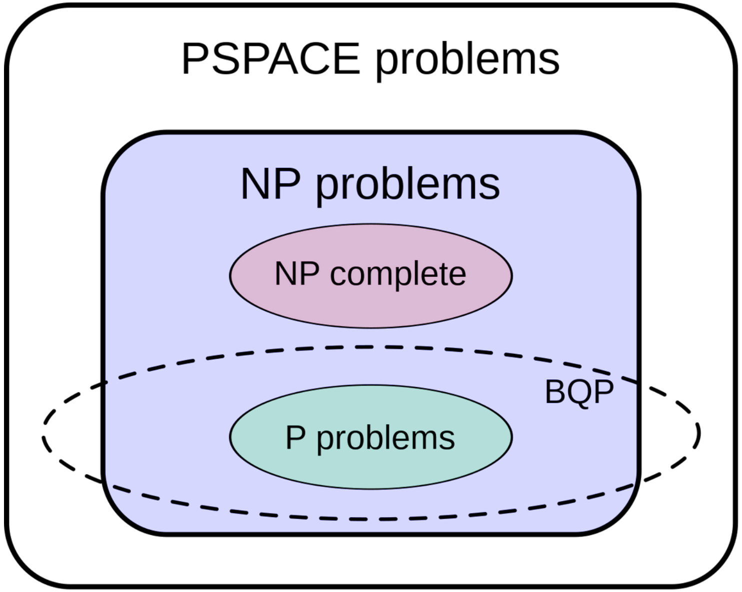
- **Kvantno stanje sa komponentama** $v_j = |v'_j| e^{i\varphi_j}$
- **Čuvanje parova** $\{|v'_j|, \varphi_j\}$ **u QRAM-u**
- **Kreira se** $\log_2 N$ **stanja u** $\log_2 N$ **koraka**
- **Predprocesiranje**

Linearna algebra za kvantno mašinsko učenje

- Osnovni kvantni podprogrami linearne algebre
  - HHL algoritam
  - Kvantna Furijeova transformacija
  - Kvantna procena faze
- Teška implementacija u realnom svetu

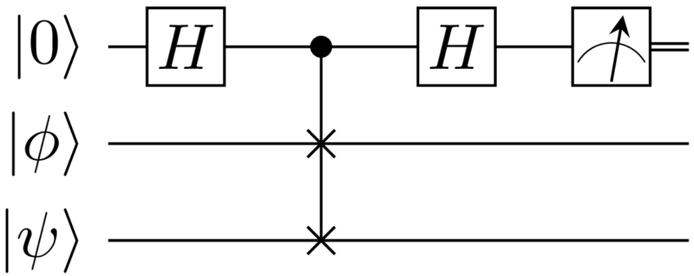
Kvantna teorija kompleksnosti

- **Klasične klase kompleksnosti**
  - **P, NP, PSPACE, PP, BPP**
- **Klasa kompleksnosti BQP**
  - **Liči na klasu BPP**
- $\mathbf{BPP} \subseteq \mathbf{BQP}$ **i** $\mathbf{BQP} \subseteq \mathbf{PP}$
- **Šorov algoritam**



SWAP test

- **Skalarni proizvod za dva kvantna stanja**



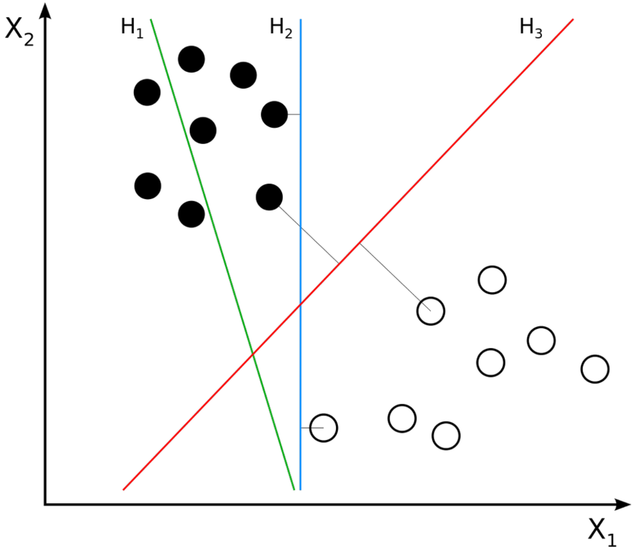
- **Dobija se** $P(|0\rangle) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} F(|a\rangle, |b\rangle)$
  - **Funkcija F() meri validnost**

Kvantno mašinsko učenje

- Spoj kvantnih računara i mašinskog učenja
- Koristi kvantne algoritme
  - qBLAS, SWAP test ...
- Dve podoblasti
  - Obrada klasičnih podataka na kvantnim mašinama
  - Obrada kvantnih podataka na kvantnim mašinama

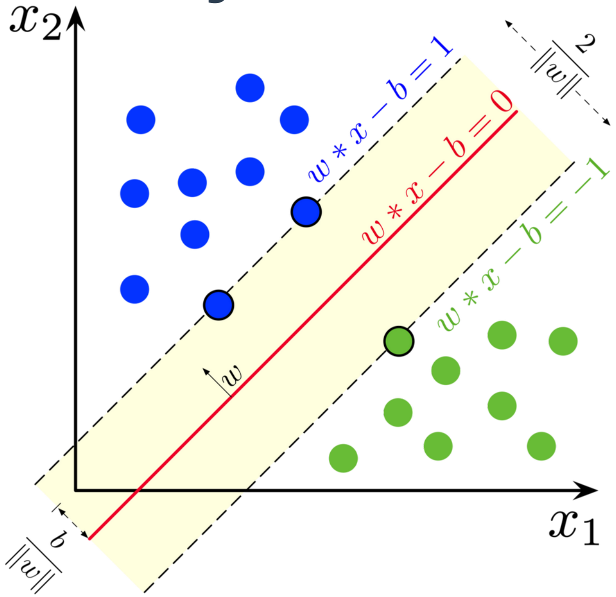
Kvantna metoda potpornih vektora

- **Primer algoritma učenja sa nadgledanjem**
- **Podela hiper-ravni između dva skupa podataka**



Klasičan algoritam

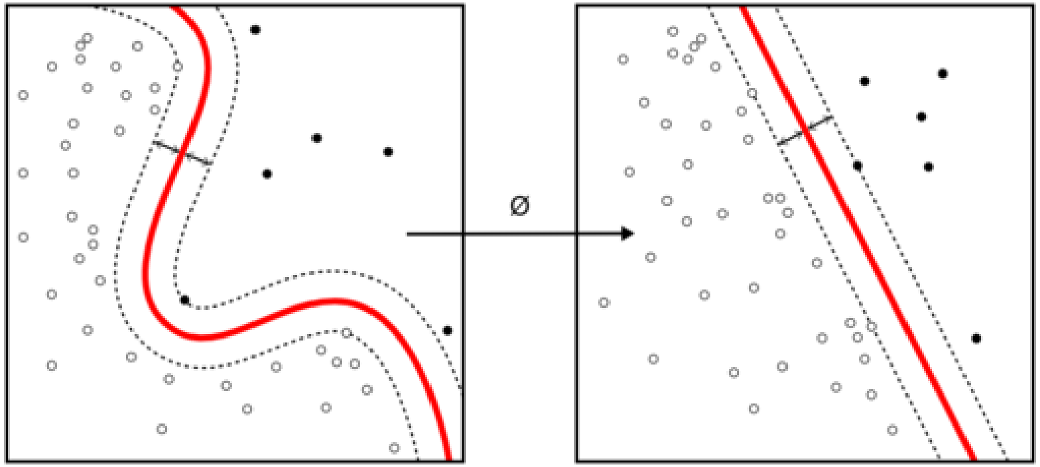
- Koristi se linearna funkcija $w^T x + b$
  - Predviđena klasa zavisi od znaka funkcije
- Minimizacija $|w|^2/2$
- Potporni vektor



Kernel

- **Transformiše podatke u prostor gde su klase linearno odvojive**
- **Kernel funkcija** $k(x, x_i) = \phi(x) * \phi(x_i)$
- **Dobijena funkcija**

$$w^T x + b = b + \sum_i \alpha_i k(x, x_i)$$



Kvantni algoritam

- **Metoda za obučavanja**
- **Ulazna stanja**

$$|x_j\rangle = \frac{1}{|x_j|}\sum_{k=1}^{N}(x_j)_k\,|k\rangle$$

- **Glavno unapređenje jeste u pripremi kernel matrice**

$$F\begin{bmatrix} b \\ \vec{\alpha} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \vec{1}^T \\ \vec{1} & K+\gamma^{-1}\vec{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ \vec{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{y} \end{bmatrix}$$

Kvantni algoritam

- **Generisanje stanja $|b, \overrightarrow{\alpha}\rangle$ koje opisuje hiper-ravan**
- **Rešavanje jednačine**
  - **SWAP test između $|b, \overrightarrow{\alpha}\rangle$ i $|x\rangle$**
- **Razdvajanje matrice** $\hat{F} = (J + K + \gamma^{-1}1)/trF$
- **Procena faze i aporoksimacija sopstvene vrednosti**

$$|b, \overrightarrow{\alpha}\rangle = \frac{1}{\sqrt{C}}(b\,|0\rangle + \sum_{k=1}^{M} \alpha_k\,|k\rangle)$$

Klasifikacija

- **Ulazno stanje $|x\rangle$ i stanje $|b, \vec{\alpha}\rangle$ generišu**

$$|\tilde{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_x}}\left(|0\rangle|0\rangle + \sum_{k=1}^{M}|x||k\rangle|x\rangle\right) \qquad |\tilde{u}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_u}}\left(b|0\rangle|0\rangle + \sum_{k=1}^{M}\alpha_k|x_k||k\rangle|x_k\rangle\right)$$

- **Dva nova stanja**

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|\tilde{u}\rangle + |1\rangle|\tilde{x}\rangle\right) \qquad |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right)$$

- **Nad novim stanjima radimo SWAP test**

Kvantna analiza glavnih komponenti

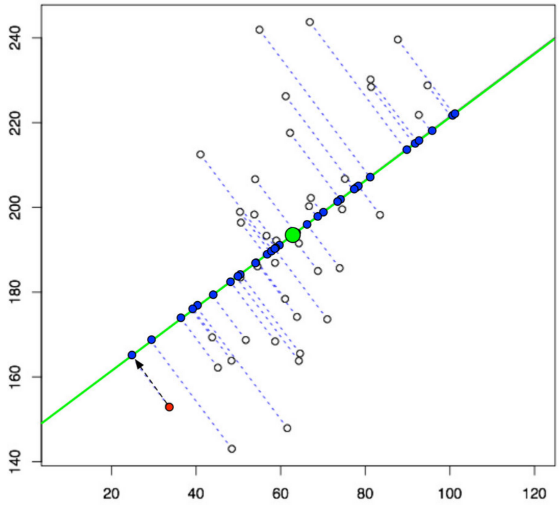
- **Primer algoritma učenja bez nadgledanja**
- **Smanjivanje dimenzije vektora podataka**

- **Nalaženje funkcije koja kodira vektor u prostor manjih dimenzija**

$$f(x) = c$$

- **Nalaženje funkcije dekodiranja**

$$g(f(x)) \approx x$$



Klasičan algoritam

- **Funkcija dekodiranja kao množenje matrice** $g(c) = Dc$
- **Nalaženje najmanje L2 distance između x i g(c)**
- **Optimalna funkcija kodiranja** $f(x) = D^T x$
- **Jednačina za optimalnu matricu**

$$D^* = \underset{D}{\operatorname{argmin}} Tr(D^T X^T X D)$$

Kvantni algoritam

- Pronalaženje sopstvenih vekora i vrednosti za ulaz
- Oslanja se na algoritam estimacije faza i SWAP test
- Za kvantno stanje $|v_j\rangle$ kreira se matrica gustine

$$\rho = (1/N) \sum_j |v\rangle \langle v|$$

- Primenjujemo algoritam procene faze stanja

$$|v_j\rangle |0\rangle \rightarrow \sum_i \psi_i |\chi_i\rangle |\widetilde{r_i}\rangle$$

Kvantna neuralna mreža

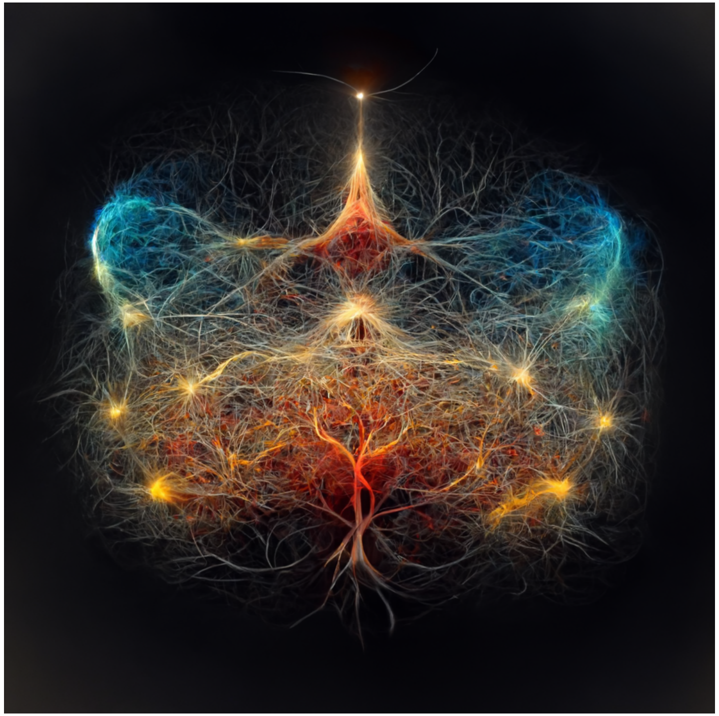
- **Osnova Dubokog učenja**
- **Klasifikacija binarnih stringova**
- **Niz unitarnih transformacija**

$$\mathbf{U}(\overrightarrow{\theta}) = U_L(\theta_L)U_{L-1}(\theta_{L-1})\ldots U_1(\theta_1)$$

- **Ulazni string se transformiše u stanje** $|z,1\rangle$
- **Dodatni kubit za merenje na izlazu**
- **Prosečna vrednost merenja** $\langle z,1|\, U^T(\overrightarrow{\theta})Y_{n+1}U(\overrightarrow{\theta})\,|z,1\rangle$

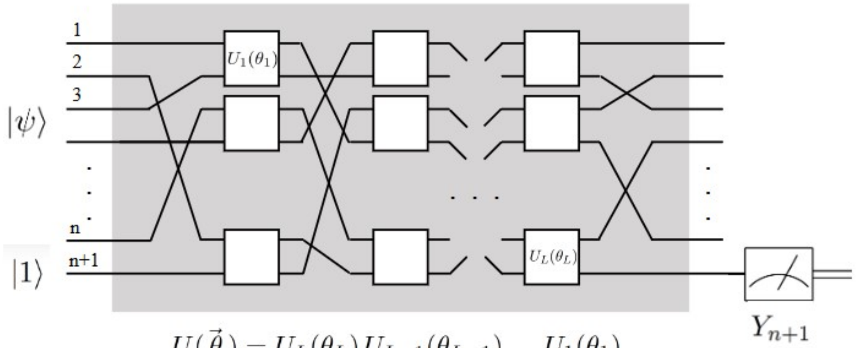
Kvantna neuralna mreža

- Linearna funkcija troška
  - Postoji minimum u 0
- Obučavanje mreže
- Ne postoji nelinearna transformacija



Reprezentacija modela

- Operator nad baznim stanjima $U_l\,|z, z_{n+1}\rangle = e^{i\frac{\pi}{4}l(z)X_{n+1}}\,|z, z_{n+1}\rangle$
- *Reed-Muller* zapisivanje *boolean* funkcije
- Novo zapisivanje operatora $U_l = e^{i\frac{\pi}{4}X_{n+1}}e^{-1\frac{\pi}{2}BX_{n+1}}$
- Eksponencijalno velika *boolean* funkcija



$U(\vec{\theta}) = U_L(\theta_L)U_{L-1}(\theta_{L-1})\ldots U_1(\theta_1)$

Reprezentacija parnosti podskupa

- **Parnost podskupa bitova ulaznog stringa**

$$P_{\mathbb{S}}(z) = \sum_j \oplus a_j b_j$$

- **Unitarni operator**

$$U_{P_{\mathbb{S}}} = e^{i\frac{\pi}{4}X_{n+1}} e^{-i\frac{\pi}{2}\sum_j a_j B_j X_{n+1}}$$

Učenje modela

- Procena vrednosti funkcije troška
- Promena parametara $\overrightarrow{\theta}$
  - Jedan po jedan parametar
  - Promena promenljive gradijenta $\overrightarrow{g}$
- Stepen učenja

$$\overrightarrow{\theta} \to \overrightarrow{\theta} - r\left(\frac{loss(\overrightarrow{\theta}, z)}{\overrightarrow{g}^2}\right)\overrightarrow{g}$$

Učenje parnosti modela

- **Operator** $U(\overrightarrow{\theta}) = e^{i\frac{\pi}{4}X_{n+1}} e^{-i\sum_j^n \theta_j B_j X_{n+1}}$
  - **Optimalna rešenja u** $\frac{\pi}{2}$ **i 0**
- **Učenje postaje nemoguće sa povećavanjem veličine**

Učenje osobina kvantnih stanja

- **Ne postoji klasična neuralna mreža**
- **Ubacivanje stanja sa dodatim kubitom**

$$U(\overrightarrow{\theta})\left|\psi, 1\right\rangle$$

- **Za Hamiltonov operator, otkriti znak sopstvene vrednosti**

$$l(\left|\psi\right\rangle) = sign(\left\langle\psi\right| H \left|\psi\right\rangle)$$

- **Za operator** $U_H(\beta) = e^{i\beta H X_{n+1}}$ **prosečna vrednost merenje**

$$\left\langle\psi, 1\right| U_H^T(\beta) Y_{n+1} U_H(\beta) \left|\psi, 1\right\rangle = \left\langle\psi\right| sin(2\beta H) \left|\psi\right\rangle$$

Zaključak

- Izazov praktične primene
  - Razvoj kvantnih računara
- Trenutak dokazivanja kvantne nadmoći
  - Veće zainteresovanje
- Dalji razvoj oblasti