

Kvantno mašinsko učenje

Milan Bojić

Kvantno računarstvo

- Kubit
- Kvantna kapija
- Kvantna spletenost
- Kvantna memorija, Kvantni registri

Kubit

- Najmanja jedinica informacije u kvantnom računarstvu
- Opšta formula za kubit $|\gamma\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$
- Kompleksne amplitude α i β sa ograničenjem

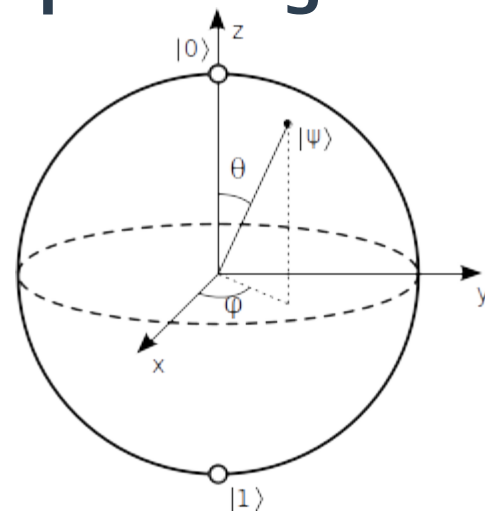
$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

- Stanje kubita ima dva stepena slobode, amplitude mozemo da zapisemo kao

$$\alpha = \cos \frac{\Theta}{2} \quad \beta = e^{i\phi} \sin \frac{\Theta}{2}$$

Kubit

- Na površini Blohove sfere kubit se prikazuje preko uglova Θ i ϕ
- Na polovima sfere se nalaze bazna stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$
- Merenjem kubita dobija se ili 0 ili 1
- Fizički kao polarizovan foton



Kvanta kapija

- Transformišu kubite
- Logički predstavljene kao unitarne matrice dimenzija

$$2^n \times 2^n$$

- Hademardovo kolo $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

- Rotaciono kolo $\begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix}$

Kvantna spletenost

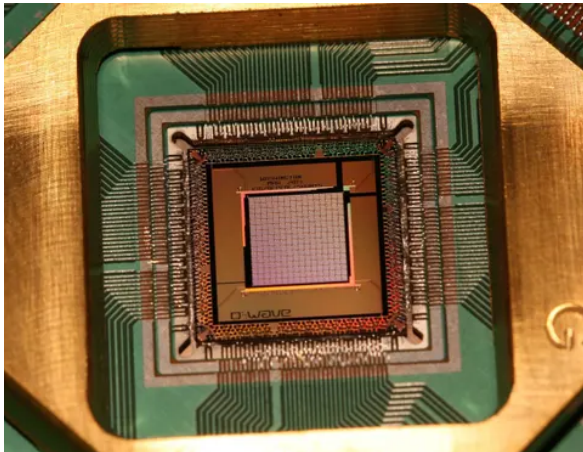
- Dva, ili više, kubita povezana prave novo kvantno stanje
- Razdvojiva stanja na osnovne kubite
- Nerazdvojiva kvantana stanja

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$$

- Deljenje informacije između kubita

Kvantno računarstvo

- Vrsta računarstva koristi osobine kvantne mehanike
- Kvantni računari
- Simulacija fizičkih sistema



Kvantna informacija

- Kvantna teorija informacija
- Fon Nojmanova entropija $S(\varrho) = H(X)$
- Merenje validnosti između dva kvantna stanja
- Kvantna informacija
 - kodirana u kvantnim sistemima
 - ne može se kopirati
 - pri procesu merenja menja se

Kvantna teorija informacije

- **Oblasti istraživanje:**
 - **Prenošenjem klasičnih informacija preko kvantnih kanala**
 - **Prenošenjem kvantnih informacija preko kvantnih kanala**
 - **Efektima kvantne spletenosti na prenošenje informacija**
 - **Informacionim aspektima kvantnog merenja, odnosa između distribucije kvantnog stanja i preciznog merenja**

Priprema podataka

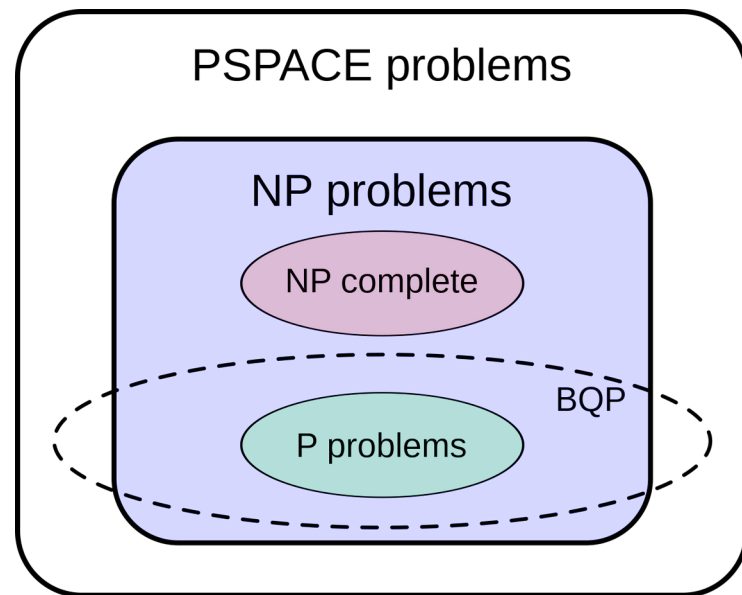
- Kvantno stanje sa komponentama $v_j = |v'_j|e^{i\varphi_j}$
- Čuvanje parove $\{|v'_j|, \varphi_j\}$ u QRAM-u
- Kreira se $\log_2 N$ stanja u $\log_2 N$ koraka
- Pred procesiranje

Linearna algebra za kvantno mašinsko učenje

- Osnovni kvantni podprogrami linearne algebre
 - HHL algoritam
 - Kvantna Furijeova transformacija
 - Kvantna procena faze
- Teška implementacija u realnom svetu

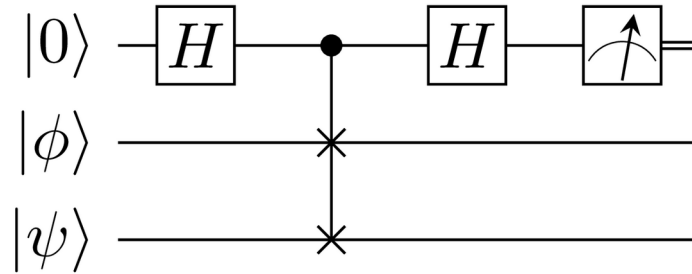
Kvantna teorija kompleksnosti

- Klasične klase kompleksnosti
 - P, NP, PSPACE, PP, BPP
- Klasa kompleksnosti BQP
 - Liči na klasu BPP
- $BPP \subseteq BQP$ i $BQP \subseteq PP$
- Šorov algoritam



SWAP test

- Skalarni proizvod za dva kvantna stanja



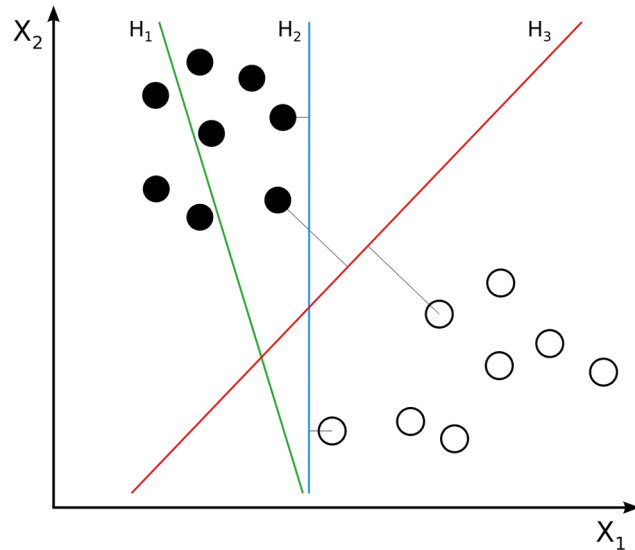
- Dobija se $P(|0\rangle) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(|a\rangle, |b\rangle)$
 - Funkcija $F()$ meri validnost

Kvantno mašinsko učenje

- Spoj kvantnih računara i mašinskog učenja
- Koristi kvantne algoritme
 - qBLAS, SWAP test ...
- Dve podoblasti
 - Obrada klasičnih podataka na kvantnim mašinama
 - Obrada kvantnih podataka na kvantnim mašinama

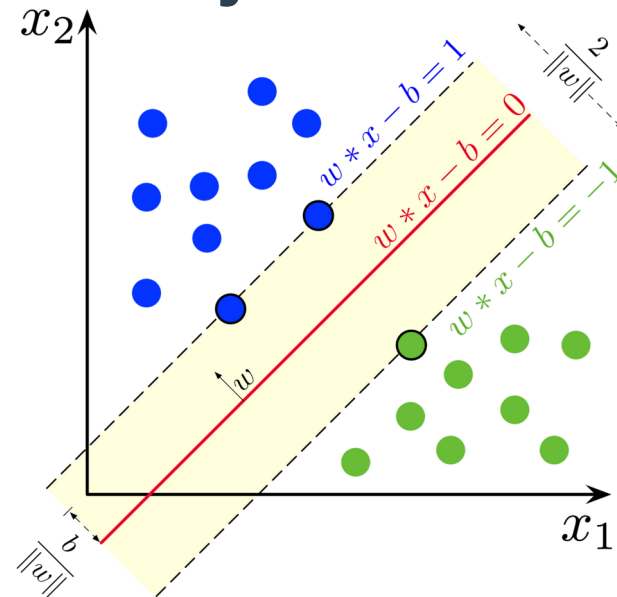
Kvantna metoda potpornih vektora

- Primer algoritma učenja sa nadgledanjem
- Podela hiper-ravni između dva skupa podataka



Klasičan algoritam

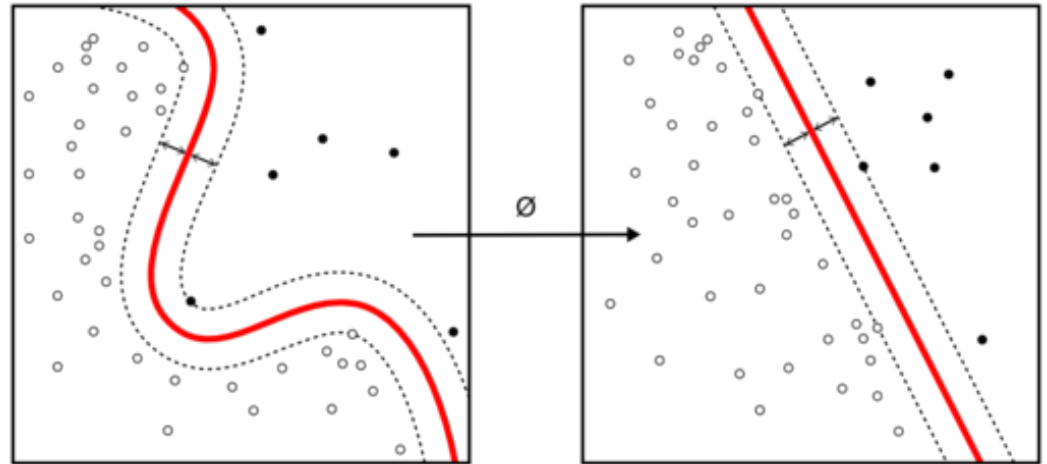
- Koristi se linearna funkcija $w^T x + b$
 - Predviđena klasa zavisi od znaka funkcije
- Minimizacija $|w|^2/2$
- Potporni vektor



Kernel

- Transformiše podatke u prostor gde su klase linearno odvojive
- **Kernel funkcija** $k(x, x_i) = \phi(x) \cdot \phi(x_i)$
- **Dobijena funkcija**

$$w^T x + b = b + \sum_i \alpha_i k(x, x_i)$$



Kvantni algoritam

- Metoda za treniranje
- Ulazna stanja $|x_j\rangle = \frac{1}{|x_j|} \sum_{k=1}^N (x_j)_k |k\rangle$
- Glavno unapređenje jeste u pripremi kernel matrice

$$F \begin{bmatrix} b \\ \vec{\alpha} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \vec{1}^T \\ \vec{1} & K + \gamma^{-1} \vec{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \vec{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{y} \end{bmatrix}$$

Kvantni algoritam

- Generisanje stanja $|b, \vec{\alpha}\rangle$ koji opisuje hiper-ravan
- Rešavanje jednačine
 - SWAP test između $|b, \vec{\alpha}\rangle$ i $|x\rangle$
- Razdvajanje matrice $\hat{F} = (J + K + \gamma^{-1}1)/tr F$
- Procena faze i aproksimacija sopstvene vrednosti

$$|b, \vec{\alpha}\rangle = \frac{1}{\sqrt{C}}(b|0\rangle + \sum_{k=1}^M \alpha_k |k\rangle)$$

Klasifikacije

- **Ulazno stanje $|x\rangle$ i stanje $|b, \vec{\alpha}\rangle$ generišu**

$$|\tilde{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_x}}(|0\rangle|0\rangle + \sum_{k=1}^M |x\rangle|k\rangle|x\rangle) \quad |\tilde{u}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_u}}(b|0\rangle|0\rangle + \sum_{k=1}^M \alpha_k |x_k\rangle|k\rangle|x_k\rangle)$$

- **Dva nova stanja**

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\tilde{u}\rangle + |1\rangle|\tilde{x}\rangle) \quad |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

- **Nad novim stanjima radimo SWAP test**

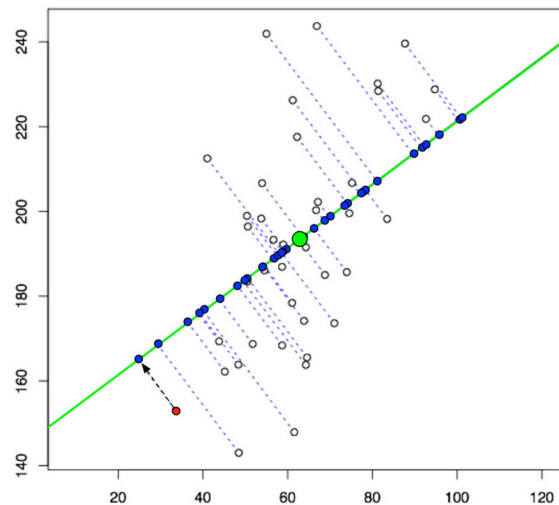
Kvantna analiza glavnih komponenti

- Primer algoritma učenja bez nadgledanja
- Smanjivanje dimenzije vektora podataka
- Nalaženje funkcije koja kodira vektor u prostor manjih dimenzija

$$f(x) = c$$

- Nalaženje funkcije dekodiranja

$$g(f(x)) \approx x$$



Klasičan algoritam

- Funkcija dekodiranja kao množenje matrice $g(c) = Dc$
- Nalaženje najmanje L2 distance između x i $g(c)$
- Optimalno funkcija kodiranja $f(x) = D^T x$
- Jednačina za optimalnu matricu

$$D^* = \operatorname{argmin}_D \operatorname{Tr}(D^T X^T X D)$$

Kvantni algoritam

- Pronalaženje sopstvene vekore i vrednosti za ulaz
- Oslanja na algoritam estimacije faza i SWAP test
- Za kvantno stanje $|v_j\rangle$ kreira se matrica gustine

$$\rho = (1/N) \sum_j |v\rangle \langle v|$$

- Primenujemo algoritam procene faze stanja

$$|v_j\rangle |0\rangle \rightarrow \sum_i \psi_i |\chi_i\rangle |\tilde{r}_i\rangle$$

Kvantna neuralna mreža

- Osnova Dubokog učenja
- Klasifikacija binarnih stringova
- Niz unitarnih transformacija

$$U(\vec{\theta}) = U_L(\theta_L)U_{L-1}(\theta_{L-1}) \dots U_1(\theta_1)$$

- Ulazni string se transformiše u stanje $|z, 1\rangle$
- Dodatni kubit za merenje na izlazu
- Prosečna vrednost merenja $\langle z, 1 | U^T(\vec{\theta}) Y_{n+1} U(\vec{\theta}) | z, 1 \rangle$

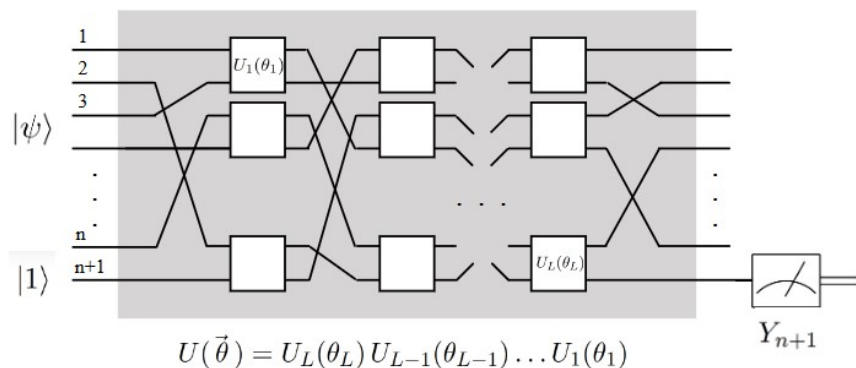
Kvantna neuralna mreža

- Linearna funkcija troška
 - Postoji minimum u 0
- Treniranje mreže
- Ne postoji nelinearnih transformacija



Reprezentacija modela

- Operator nad baznim stanjem $U_l |z, z_{n+1}\rangle = e^{i\frac{\pi}{4}l(z)X_{n+1}} |z, z_{n+1}\rangle$
- Reed-Muller zapisivanje *boolean* funkcije
- Novo zapisivanje operatora $U_l = e^{i\frac{\pi}{4}X_{n+1}} e^{-1\frac{\pi}{2}BX_{n+1}}$
- Ekponencijalno velika *boolean* funkcija



Reprezentacija parnosti podskupa

- **Parnost podskupa bitova ulaznog stringa**

$$P_{\mathbb{S}}(z) = \sum_j \oplus a_j b_j$$

- **Unitarni operator**

$$U_{P_{\mathbb{S}}} = e^{i\frac{\pi}{4} X_{n+1}} e^{-i\frac{\pi}{2} \sum_j a_j B_j X_{n+1}}$$

Učenje modela

- Procena vrednosti funkcije troška
- Promena parametara $\vec{\theta}$
 - Jedan po jedan parametar
 - Promena promenljive gradijenta \vec{g}
- Stepen učenja

$$\vec{\theta} \rightarrow \vec{\theta} - r \left(\frac{\text{loss}(\vec{\theta}, z)}{\vec{g}^2} \right) \vec{g}$$

Učenje parnosti modela

- **Operator** $U(\vec{\theta}) = e^{i\frac{\pi}{4}X_{n+1}} e^{-i\sum_j^n \theta_j B_j X_{n+1}}$
 - Optimalna rešenja u $\frac{\pi}{2}$ i 0
- Učenje postaje nemoguće sa povećavanjem veličine

Učenje osobina kvantnih stanja

- Ne postoji klasična neuralna mreža
- Ubacivanje stanja sa dodatim kubitom

$$U(\vec{\theta}) |\psi, 1\rangle$$

- Za Hamiltonov operator, otkriti znak sopstvene vrednosti

$$l(|\psi\rangle) = \text{sign}(\langle\psi| H |\psi\rangle)$$

- Za operator $U_H(\beta) = e^{i\beta H X_{n+1}}$ prosečna vrednost merenje

$$\langle\psi, 1| U_H^T(\beta) Y_{n+1} U_H(\beta) |\psi, 1\rangle = \langle\psi| \sin(2\beta H) |\psi\rangle$$