Hoofdstuk 2: Getallen tellen

2.1 Inductie

Oefening 2.1. Bewijs dat voor alle $n \geq 1$, de volgende gelijkheid geldt:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

Oefening 2.2. Zij $a(\neq 1) > 0$ een reëel getal en zij k een natuurlijk getal. Bewijs per inductie dat voor alle natuurlijke getallen $n \geq k$

$$\sum_{i=k}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - a^k}{a - 1}.$$

Oefening 2.2 ken je wellicht al uit het secundair onderwijs – als dat niet zo is, dan onthou je deze formule best. Ze heet "meetkundige reeks" en zal je tijdens je bacheloropleiding nog herhaaldelijk van pas komen.

Oefening 2.3. Gebruik het sterk inductieprincipe om aan te tonen dat u_n, recursief gedefinieerd als $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, en $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ voor $n \geq 3$, gelijk is aan $2^n + 1$ voor elke $n \in \mathbb{N}^*$.

Oefening 2.4. Noteer met D_n het aantal mogelijke manieren om een rechthoekig spelbord van $2 \times n$ te bedekken met n dominostenen (die elk 1×2 groot zijn). Men kan gemakkelijk inzien dat $D_1 = 1$, $D_2 = 2$ en $D_3 = 3$. Bepaal een uitdrukking voor de algemene waarde van D_n en bewijs die door sterke inductie.

Oefening 2.5. Waar zit de fout in volgend (uiteraard foutief) bewijs van de (eveneens foutieve) bewering dat $5n+3$ altijd deelbaar is door 5? *"Als er een positief geheel getal k bestaat, zodat $5k + 3$ deelbaar is door 5, dan bestaat er een $p \in \mathbb{N}^*$ met $5k + 3 = 5p$. Dus geldt er dat*

$$5(k + 1) + 3 = (5k + 5) + 3 = (5k + 3) + 5 = 5p + 5 = 5(p + 1),$$

dat is deelbaar door 5, dus is $5(k + 1) + 3$ deelbaar door 5 en zegt het inductieprincipe dat $5n + 3$ deelbaar is door 5 voor alle $n \in \mathbb{N}^*$."

Oefening 2.6. Waar zit de fout in volgend (uiteraard foutief) inductiebewijs van de (eveneens foutieve) bewering dat in een willekeurige verzameling van n personen, iedereen dezelfde leeftijd heeft? *"Voor $n = 1$ is de bewering duidelijk waar. Veronderstel dat in elke verzameling bestaande uit k personen, iedereen dezelfde leeftijd heeft. We bewijzen nu dat in elke willekeurige verzameling met $k + 1$ mensen (die we noteren als $S = \{x_1, x_2, ..., x_{k+1}\}$) dat ook geldt. Wegens de inductiehypothese zal iedereen in $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ en $\{x_2, x_3, ..., x_{k+1}\}$ dezelfde leeftijd hebben. Dan hebben $x_1, x_2, ..., x_k$ allen dezelfde leeftijd, wat ook geldt voor $x_2, x_3, ..., x_{k+1}$. Hieruit volgt dat $x_1, x_2, ..., x_{k+1}$ allen dezelfde leeftijd hebben. Het inductieprincipe zegt ons dan dat voor elk positief geheel getal n, iedereen in een willekeurige verzameling bestaande uit n personen, dezelfde leeftijd heeft."*

Oefening 2.7. Waar zit de fout in volgend (uiteraard foutief) inductiebewijs van de (eveneens foutieve) bewering dat voor een willekeurig reëel getal $a \neq 0$ en voor elk natuurlijk getal n, geldt dat $a^n = 1$? *"Aangezien bij definitie $a^0 = 1$, is het gestelde geldig voor $n = 0$. Veronderstel nu dat er een geheel getal k bestaat, zodat $a^m = 1$ voor $0 \leq m \leq k$. Dan geldt*

$$a^{k+1} = \frac{a^k a^k}{a^{k-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$

Het sterk inductieprincipe geeft ons dat $a^n = 1$ voor elk niet-negatief geheel getal n."

Oefening 2.8. Leid uit $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$ de waarde af van $\sum_{k=1}^{n} k$.

Oefening 2.9. (Torens van Hanoi). Beschouw het volgende spel. Je hebt een toren die bestaat uit een aantal schijven van verschillende diameter die van groot naar klein over een paal geschoven zijn. Er zijn drie palen (één paal met de toren en nog twee lege palen). Het doel is de volledige toren naar een andere paal te verplaatsen, twee regels respecterend:

- Je mag maar 1 schijf per keer verplaatsen, dus van een paal halen en op een andere paal schuiven.
- Je mag nooit een grotere schijf op een kleinere schijf leggen.

Om een toren van n schijven te verplaatsen op een optimale manier, hoeveel handelingen verricht je?

Oefening 2.10. Bewijs door middel van inductie dat

$$\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

2.2 Duivenhokken (ladenprincipe van Dirichlet)

Oefening 2.11. Zij $f : A \to A$ een afbeelding, met A een eindige verzameling. Toon aan dat f injectief is als en slechts als f surjectief is.

Oefening 2.11 is een courant lemma in de informatica, waarbij men A de verzameling van mogelijke toestanden van een processor/machine neemt, en f de overgangsafbeelding zoals die processor ze uitvoert. Probeer (na de oefening) gerust om de opgave in die informatica-context te interpreteren. Dergelijke vertalingen en toepassingen zijn echter niet het hoofddoel van deze cursus; quasi alle oefeningen zullen dan ook in hun wiskundige gedaante geformuleerd zijn. Enerzijds draagt dit bij tot het algemeen karakter van het vak, anderzijds is het ook essentieel om vlot wetenschappelijk te communiceren, zonder nood aan het schetsen van de praktische context.

Oefening 2.12. Paulien heeft twaalf roze kousen, zes appelblauwzeegroene en tien gele, allemaal door elkaar in haar lade. Het is pikdonker in de kamer. Hoeveel enkele kousen moet Paulien meenemen om er zeker van te zijn dat ze één paar bij elkaar horende kousen heeft? En hoeveel moet ze er nemen als er ook één oranje kous tussenzit?

Oefening 2.13. Zijn volgende beweringen waar of vals? Bewijs of geef een (tegen)voorbeeld.

(a) Er bestaat een afbeelding van $\mathbb{R}^3$ naar $\{rood, groen, blauw\}$ zodanig dat er nooit twee punten op afstand π hetzelfde kleur kunnen hebben.

(b) Kleur ieder punt in het vlak rood of blauw. Voor elke reële $r > 0$ bestaan er 2012 verschillende punten $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_{1006}, B_{1006}$ die allemaal in dezelfde kleur gekleurd zijn en waarvoor

$$|A_1B_1| = |A_2B_2| = \ldots = |A_nB_n| = r.$$

Oefening 2.14. Bewijs dat een willekeurige verzameling van 12 gehele getallen ten minste 2 elementen bezit waarvan het verschil deelbaar is door 11.

Oefening 2.15. Zij S de verzameling van (eindige) binaire strings. Noteer met $|x|$ het aantal bits in de bitstring x. Een *sterk compressie-algoritme* is een afbeelding $f : S \to S$ met de eigenschap dat geen enkele bitstring langer wordt onder compressie ($\forall x \in S : |f(x)| \leq |x|$) en er zelfs minstens één strikt korter wordt ($\exists x \in S : |f(x)| < |x|$). Toon aan een sterk compressie-algoritme altijd data-verlies geeft (i.e. f kan niet injectief zijn).

Oefening 2.16. Bewijs dat in een groep van 6 personen er steeds drie mensen gevonden kunnen worden die ofwel elkaar ooit eens ontmoet hebben, ofwel elkaar nooit ontmoet hebben.

Oefening 2.17. Hoeveel vakjes van een 4×4 bord moet men minimaal men kiezen, als men de eigenschap wil dat er bij schrapping van twee willekeurige rijen en kolommen steeds minstens één geselecteerd vak overblijft?

2.3 Aftelbaarheid

Oefening 2.18. Zijn volgende beweringen waar of vals? Bewijs of geef een (tegen)voorbeeld.

(a) De unie van twee aftelbare verzamelingen A, B is steeds aftelbaar.

(b) De doorsnede van twee overaftelbare verzamelingen A, B is steeds overaftelbaar.

(c) Het verschil $(A \setminus B)$ van twee overaftelbare verzamelingen A, B is opnieuw overaftelbaar.

(d) De verzameling van alle mogelijke Java-programma's is aftelbaar.

(e) Het aantal eindige binaire strings is aftelbaar.

(f) Het aantal oneindige binaire strings is aftelbaar.

2.4 Dubbele telling (productprincipe)

Oefening 2.19. Op een grootouderfeest op een lagere school komen voor elk kind gemiddeld 2 grootouders kijken. Elke grootouder heeft gemiddeld drie kleinkinderen op deze school. Hoeveel kinderen zitten op deze school als er 66 grootouders naar het feest komen?

Oefening 2.20. Beschouw volgende definitie: de hoekpunten van een ruimtefiguur zijn de geordende drietallen (a_1, a_2, a_3) waarbij $a_1, a_2, a_3 \in \{0, 1\}$. Twee hoekpunten worden verbonden door een ribbe als ze slechts in één positie een verschillend element hebben. Bijvoorbeeld $(0, 0, 0)$ wordt verbonden met $(0, 0, 1)$ maar niet met $(1, 1, 0)$.

1. Hoeveel hoekpunten heeft deze figuur?
2. Heeft deze figuur driehoeken?
3. Heeft deze figuur vierhoeken?
4. Tot hoeveel ribben behoort elk hoekpunt?
5. Bepaal hoeveel ribben deze figuur heeft aan de hand van een dubbele telling.
6. Bepaal hoeveel vierhoeken deze figuur heeft aan de hand van een dubbele telling.
7. Welk ruimtelichaam stelt deze figuur voor?

Oefening 2.21. De vierdimensionale kubus kan als volgt geconstrueerd worden: de hoekpunten zijn de geordende viertallen (a_1, a_2, a_3, a_4) waarbij $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{0, 1\}$. Twee hoekpunten worden verbonden door een ribbe als ze slechts in één positie een verschillend element hebben.

1. Tel het aantal hoekpunten van de vierdimensionale kubus.
2. Bepaal door een dubbele telling het aantal ribben en vierhoeken van de vierdimensionale kubus.
3. Tot hoeveel kubussen behoort elke vierhoek van de vierdimensionale kubus?
4. Maak gebruik van dubbele telling om te bepalen hoeveel kubussen er in de vierdimensionale kubus zitten.
5. Maak gebruik van dubbele telling om te bepalen tot hoeveel kubussen van de vierdimensionale kubus elke ribbe behoort.

Oefening 2.22. Is het mogelijk om een verzameling M van deelverzamelingen van $\{1, \ldots, 8\}$ te vinden, zodanig dat elke deelverzameling 3 elementen bevat en zodanig dat elk element van $\{1, \ldots, 8\}$ tot 5 deelverzamelingen behoort?

Oefening 2.23. Als A een verzameling van 100 elementen is, hoeveel viertallen verzamelingen (A, B, C, D) met $A \supseteq B \supseteq C \supseteq D$ zijn er dan?

Oefening 2.24. In een opleiding zijn er zeven vakken waarvan elke student er exact vier moet volgen.

- De administratie laat weten dat er in deze lessen respectievelijk 10, 5, 6, 7, 14, 17 en 8 studenten ingeschreven zijn. Bewijs dat de administratie fout is.
- De fout blijkt in het vijfde vak te zitten. Bereken hoeveel studenten er in deze opleiding zitten en hoeveel studenten het vijfde vak volgen.

2.5 Telproblemen (combinatieleer)

Oefening 2.25. Op hoeveel manieren kunnen de zes zijvlakken van een kubus gekleurd worden in zes verschillende kleuren?

Oefening 2.26 (1ste zit, 2010-2011)**.** Hoeveel permutaties van de 26 letters van het alfabet bevatten geen enkele van de vier woorden: *left, right, top, bottom*? Hierbij bevat een permutatie een woord als de letters van het woord elkaar rechtstreeks opvolgen, dus bijvoorbeeld 'abcwiskundeghfojlmpqrtvxyz' is een permutatie die wel 'wiskunde' bevat, maar niet 'info' bevat en niet 'yzab' bevat.

Oefening 2.27 (2de zit, 2010-2011)**.** Op een 5×7 elektrisch schakelbord worden chips geïmplementeerd, telkens op horizontale en verticale afstand van 1 mm. Je krijgt nu 10 identieke brugjes (van 1 mm lang) om, in horizontale en verticale stappen, een verbinding te maken van de chip linksboven naar de chip rechtsonder. Hoeveel verschillende paden kun je zo maken?

Oefening 2.28. Een grote balk wordt opgebouwd uit $3 \times 4 \times 5$ eenheidskubusjes. Hoeveel balken, met zijvlakken evenwijdig aan die van de kubus, kun je hier maximaal in herkennen?

Oefening 2.29. Bij een variant op het pokerspel krijgt iedere speler vijf kaarten. Er wordt gespeeld met 52 kaarten en er zijn 13 soorten kaarten, namelijk de nummers $1, \ldots, 10$, *heer, dame* en *boer*, en binnen elke soort zijn er 4 kleuren, namelijk *harten, klaveren, ruiten* en *schoppen*. Van de $\binom{52}{5}$ mogelijke handen van 5 kaarten, hoeveel geven er er een...

(a) *full house*: drie van eenzelfde soort + twee van eenzelfde soort. (vb: drie achten en twee zessen);

(b) *three of a kind*: drie van eenzelfde soort + een vierde kaart van een andere soort + een vijfde kaart van nog een andere soort. (vb: drie heren + één tien + één vijf);

(c) *two pair*: twee van eenzelfde soort + twee van een andere soort + één van nog een andere soort. (vb: twee zessen + twee achten + één negen);

(d) *one pair*: van de vijf kaarten zijn er slechts twee van dezelfde soort. (vb: twee negens + één heer + één vijf + één twee).

Oefening 2.30. Beschouw het woord 'ONGEWOON'. Van de $\binom{8}{3,2,1,1,1}$ woorden die je met deze letters kan vormen,

(a) in hoeveel staan de drie O's na elkaar?

(b) in hoeveel staan er twee maar geen drie O's na elkaar?

Oefening 2.31. Hoeveel strings van 11 letters kunnen we maken met de letters uit het woord MISSISSIPPI?

Oefening 2.32. Op hoeveel manieren kan je 12 mensen aan 2 ronde tafels voor 6 personen zetten? We beschouwen twee schikkingen als dezelfde als je de ene kan bekomen uit de andere door de tafels rond te draaien. Merk op dat we de tafels niet nummeren, dus een tafelschikking bekomen uit een andere door de twee tafels om te wisselen als geheel, beschouwen we ook als equivalent.

Oefening 2.33. Hoeveel anagrammen bestaan er van het woord *aardappelpuree*? Hoeveel daarvan beginnen ook met (minstens) twee a's? Hoeveel beginnen met precies twee a's?

Oefening 2.34. Op hoeveel manieren kan men mn voorwerpen verdelen over m dozen zodanig dat elke doos juist n elementen bevat?

Oefening 2.35. Een kolom bestaat uit 4 punten onder elkaar. Een punt kan wit, zwart of oranje zijn. We noemen een kolom *overheersend zwart* als hij minstens 2 zwarte punten bevat, en analoog voor de andere kleuren.

a. Op hoeveel manieren kan een kolom gekleurd zijn?

b. Hoeveel kolommen zijn overheersend wit?

c. Hoeveel kolommen zijn tegelijk overheersend wit en overheersend oranje?

d. Hoeveel kolommen bevatten alledrie de kleuren?

e. We zetten 19 kolommen in een cirkel, zodat we een cilinder van 4 punten hoog krijgen. Toon aan dat er altijd een rechthoek met gelijk gekleurde hoekpunten kan gevonden worden.

Oefening 2.36. Beschouw volgend fragment pseudocode, waarbij A een verzameling met 100 natuurlijk getallen is. Hoeveel keer wordt de operatie $verwerk(.,.)$ uitgevoerd?

```
for a ∈ A do
  for b ∈ A do
    for c ∈ A do
      if b > a then
        verwerk(a, b)
      else if c < a then
        verwerk(b, c)
      end if
    end for
  end for
end for
```

Oefening 2.37. Gegeven 400 personen waarvan 333 een diploma hebben. 60% zijn mannen, 40% zijn vrouwen. Van de mannen zijn er dubbel zoveel zonder rijbewijs als met rijbewijs, van de vrouwen heeft slechts 3/8 geen rijbewijs (de rest wel). Bovendien heeft 20% van de personen zonder rijbewijs geen diploma. Als x het aantal vrouwen met rijbewijs maar zonder diploma is, kunnen we dan met zekerheid zeggen of x kleiner of groter is dan 25? Of kan dit niet bepaald worden uit deze gegevens?

Oefening 2.38. Een boodschap die bestaat uit 12 verschillende symbolen moet worden doorgeseind. Naast deze 12 symbolen, zal de transmittor 45 blanco ruimten tussen de symbolen doorzenden, met tussen elke 2 verschillende symbolen minstens 3 blanco ruimten. Op hoeveel manieren kan de boodschap doorgeseind worden?