Hoofdstuk 1: Verzamelingen en relaties

1.1 Relaties

Oefening 1.1. Definieer de relatie $\approx$ op $\{(a,b)|a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ met $(a,b) \approx (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$. Bewijs dat deze relatie een equivalentierelatie is.

Oefening 1.2. Zij A een willekeurige verzameling. Hoeveel relaties op A zijn er die zowel equivalentierelaties als partiële orderelaties (=reflexief, anti-symmetrisch en transtief) zijn? Vind ze allemaal.

Oefening 1.3. Bestaat er een reflexieve, transitieve relatie die noch symmetrisch, noch anti-symmetrisch is?

Oefening 1.4. Wat is er fout aan volgende redenering, die probeert te bewijzen dat elke symmetrische transitieve relatie $\Re$ over een verzameling A, reflexief is? *"Beschouw $(x,y) \in R$. Aangezien R symmetrisch is, is ook $(y,x) \in R$. Daar $(x,y),(y,x) \in R$ volgt uit de transitiviteit dat $(x,x) \in R$. Dit toont aan dat de relatie ook reflexief is."*

Oefening 1.5. Geef voor elk van de volgende relaties aan welke eigenschappen (reflexief, antireflexief, transitief, symmetrisch, anti-symmetrisch) voldaan zijn en welke niet. Welke relaties zijn orderelaties (definitie p14), welke equivalentierelaties? Zij A een willekeurige verzameling en $\mathcal{P}(A)$ de verzameling van alle deelverzamelingen van A.

(a) De delingsrelatie op $\mathbb{N}$

(b) $<$ op $\mathbb{Z}$

(c) $=$ op A

(d) $\subseteq$ op $\mathcal{P}(A)$

(e) Disjunctheid op $\mathcal{P}(A)$

(f) De relatie $\mathcal{R}$ op $\mathbb{N}$ gedefinieerd door $m\mathcal{R}n \Leftrightarrow m < 10n$

(g) De relatie $\mathcal{R}$ op $\mathbb{Z}$ gedefinieerd door $m\mathcal{R}n \Leftrightarrow m + n$ is even

(h) De relatie $\mathcal{R}$ op $\mathbb{R}$ gedefinieerd door $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = e^x$

(i) De relatie $\mathcal{R}$ op $\mathbb{R}$ gedefinieerd door $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy \geq 0$

(j) De gelijkvormigheidsrelatie op de verzameling van alle driehoeken in het vlak

(k) De loodrechtheidsrelatie $\perp$ op alle rechten in het vlak

(l) De relatie *is een ouder van* op de verzameling van alle mensen

1.2 Functies en afbeeldingen

De bedoeling van deze deelreeks is om je beter vertrouwd te maken met de begrippen injectief, surjectief en bijectief.

Oefening 1.6. Zijn volgende beweringen waar of vals? Bewijs of geef een (tegen)voorbeeld.

(a) Er bestaat een injectieve afbeelding van $\mathbb{Z}$ naar $\mathbb{N}$.

(b) Als A, B eindige verzamelingen zijn en er een surjectieve (resp. injectieve) afbeelding tussen A en B bestaat, dan is $|A| \geq |B|$ (resp. $|A| \leq |B|$).

(c) Als $f : A \to B$ en $g : B \to C$ injectieve (resp. surjectieve) afbeeldingen zijn, dan is $g \circ f$ een injectieve (resp. surjectieve) afbeelding $A \to C$.

(d) (2de zit, 2010-2011) Er bestaat een bijectie van $2\mathbb{N}$ (de verzameling van even natuurlijke getallen) op $\mathbb{N}$.

Oefening 1.7. Toon aan dat de relatie "er bestaat een bijectie van ... op ..." een equivalentierelatie is op de verzamelingen.

Oefening 1.8. (Tweede zit 2014-2015) Jan speelt een spel op 7 schakelaars, die binair aan of uit staan (dus er zijn $2^7 = 128$ mogelijke toestanden) en verbonden zijn met een computer, die aangeeft of de huidige toestant goed of slecht is. Als je weet dat

- elke goede toestand altijd slecht zal worden als je één schakelaar omslaat;
- elke slechte toestand altijd op een unieke manier kan omgezet worden in een goede toestand door één schakelaar om te slaan;

hoeveel goede toestanden zijn er dan?

Oefening 1.9. Is de afbeelding $f : \mathbb{N} \to \{0, 1, \ldots, p-1\} : x \mapsto$ de rest van $2x$ bij deling door p (met p oneven), injectief en/of surjectief op haar eindverzameling?