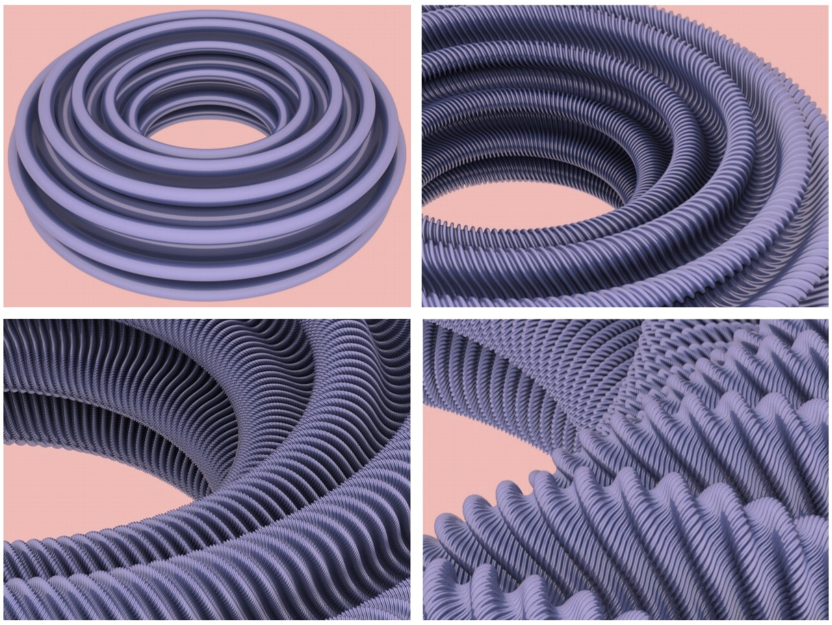
Universität Augsburg University

SPP 2026 GEOMETRY AT INFINITY

Universität Potsdam

Blockseminar 2022
Konvexe Integration

Christian Bär und Bernhard Hanke



Project Hévéa

V. Borrelli, S. Jabrane, F. Lazarus, D. Rohmer, B. Thibert

Wann:

Anreise ist am Sonntag, dem 1. Mai, zum Abendessen um 18:00 Uhr. Im Anschluss findet der Einführungsvortrag statt. Die Abreise ist am Freitag, dem 6. Mai, nach dem Mittagessen. Die Teilnahme ist nur für den gesamten Zeitraum des Seminars möglich.

Wo:

Das Blockseminar wird im Kloster Frauenwörth auf der Fraueninsel im Chiemsee veranstaltet.

Public domain
User _anaposa_ on pixabay.com

Was:

Jede längenkontrahierende Immersion einer riemannschen Mannigfaltigkeit in einen euklidischen Raum höherer Dimension kann in der C^0-Topologie beliebig genau durch eine *isometrische* C^1-Immersion approximiert werden. Für Kurven ist das leicht zu sehen, für allgemeine riemannsche Mannigfaltigkeiten ein berühmtes Resultat von Nash und Kuiper, das unsere geometrische Vorstellung herausfordert. Insbesondere kann im allgemeinen Fall die Regularität der approximierenden Immersion nicht zu C^2 verbessert werden.

Gromov beschrieb in seiner einflussreichen Monographie [8] einen systematischen Mittelungsprozess, die *konvexe Integration*, der diesem und ähnlich gelagerten Flexibilitätsaussagen in der Geometrie zu Grunde liegt.

Nach einer Einführung in die Sprache der Jet-Bündel erarbeiten wir die Methode der konvexen Integration und beweisen das h-Prinzip für offene ample Differentialrelationen. Anschließend besprechen wir einige beispielhafte Anwendungen in der Differentialtopologie, der riemannschen und symplektischen Geometrie sowie der Fluiddynamik. Dies schließt einen Beweis des Nash-Kuiper-Satzes ein.

Wie:

Die Vorträge sollten eine Dauer von 60 Minuten (plus Zeit für Diskussion) nicht überschreiten. Diese Zeitvorgabe bitte einhalten und bei der Planung der Vorträge berücksichtigen. Für den Notfall sollte man schon bei der Planung Passagen vorsehen, die wegfallen können, ohne dass der restliche Vortrag darunter allzu sehr leidet.

Aus Ermangelung einer Tafel werden die Vorträge mit zwei Dokumentenkameras und angeschlossenen Beamern gehalten. Wichtig ist dabei, dass die Blätter nicht vorbereitet mitgebracht werden, sondern - wie an einer Tafel - während des Vortrags live beschrieben werden.

Wer:

Um sinnvoll teilnehmen zu können, muss man über Kenntnisse der Differentialgeometrie und der Topologie verfügen.

Die Finanzierung erfolgt durch das Schwerpunktprogramm „Geometrie im Unendlichen".

Vortragsprogramm:

(0.) Einführung *(Bernhard Hanke)*: Darstellung des Themas und Überblick

(1.) Jet-Bündel und Holonomie *(Christian Bär)*:

[7, Abschnitte 1.1–1.6].

Besonders wichtig für uns ist die 1-Jet-Faserung $X^{(1)} \to X$ für verschiedene Arten (beliebig, linear, trivial) von Faserbündeln $X \to V$ (mit affiner, linearer und trivialer Strukturgruppe).

(2.–3.) Differentialrelationen und das h-Prinizip (2 Vorträge) *(Ariane Beier, Alberto Richtsfeld)*:

[7, Kapitel 5 und 6].

Interpretiere an Hand von [1] und [2] klassische geometrische Sätze im Lichte des h-Prinzips: Whitney-Graustein, Sphärenumstülpung nach Hirsch-Smale, isometrische Einbettungssätze von Nash-Kuiper, Existenz symplektischer Strukturen, Lohkamps Sätze über Metriken mit oberen Skalar- und Ricci-Krümmungsschranken.

(4.) Konvexe Integration: Einführende Beispiele und Beweisidee *(Milan Zerbin)*:

[7, Abschnitte 17.1–17.2], [3, Abschnitt 1] und [8, Beispiel (A) aus Abschnitt 2.4.1] mit Beweis. Diese Beweisidee der letzten Aussage wird im Rahmen des *Reparametrisierungslemmas* in einem späteren Vortrag wieder aufgegriffen. Erläutere warum die Voraussetzung des Wegzusammenhangs an A_0 im letzten Beispiel notwendig ist.

(5.–6.) Strikt umrundende Schleifen (2 Vorträge) *(Helge Frerichs, Andreas Huber)*:

Wir arbeiten im folgenden Kontext, vergleiche [9, Seite 22]: Seien $\mathbb{R}^q \to E \to B$ ein topologisches, affines Bündel, $\mathscr{R} \subset E$ eine Teilmenge (genannt *Relation* in E) und $f, \beta \colon B \to E$ stetige Schnitte mit

- ▹ $\mathrm{Bild}(\beta) \subset \mathscr{R}$,
- ▹ $f(b) \in \mathrm{Int}\Big(\mathrm{Conv}\,(\mathscr{R}_b, \beta(b))\Big)$ für $b \in B$.

Hier bezeichnet $\mathrm{Conv}(\mathscr{R}_b, \beta(b))$ die konvexe Hülle in $E_b = p^{-1}(b)$ der $\beta(b)$ enthaltenden Wegekomponente von $\mathscr{R}_b := \mathscr{R} \cap E_b$.

Eine *C-Struktur* auf $E \to B$ für (f, β) ist ein Paar (g, G) stetiger Schnitte $g \colon [0,1] \times B \to \mathscr{R} \subset E$ und $G \colon [0,1] \times [0,1] \times B \to \mathscr{R} \subset E$ mit

- ▹ $G(u, 0, b) = G(u, 1, b) = G(0, s, b) = \beta(b)$,
- ▹ $G(1, s, b) = g(s, b)$,
- ▹ $f(b) \in \mathrm{Int}\Big(\mathrm{Conv}\,(g([0,1] \times b))\Big)$, das heißt, die Schleife $g(\cdot, b)$ *umrundet* $f(b)$ *strikt*.

Vergleiche [9, Seite 23].

Beweise mit dem Argument aus [9, Proposition 2.3] die Existenz von C-Strukturen für (f, β), falls $\mathscr{R}$ offen und *ampel* ist, siehe [9, Seite 23], wobei wir uns auf den Fall $\rho \colon \mathscr{R} \subset E$ beschränken. Eine Illustration der Kompatibilät auf sich überlappenden, das Bündel E trivialisierenden Teilmengen von B findet sich auf [3, Seite 9 Mitte].

Formuliere die relative, glatte und parametrisierte Version, [9, Complement 2.6–2.9] und folgere die Existenz von C-Strukturen für offene, ample Relationen [9, Corollary 2.10].

(7.) Integrale Darstellungen *(Thorsten Hertl, Moritz Meisel)*:

Zeige mit Hilfe des Reparametrisierungslemmas [9, Proposition 2.11] (vgl. auch [8, Beispiel (A) aus Abschnitt 2.4.1], das in Vortrag (4.) besprochen wurde) die Existenz von integralen Darstellungen [9, Theorem 2.12].

Formuliere die relative, glatte und parametrisierte Version [9, Complement 2.1.3–2.1.5] und folgere die Existenz von integralen Darstellungen für offene, ample Relationen [9, Corollary 2.16].

(8.) Eindimensionale konvexe Integration *(Christopher Wulff)*:

Beweise [9, Theorem 3.4].

Anleitung: Anstatt mit [9, Formel (3.22) auf Seite 40] ist es für die Rechnung günstiger, die Funktionen h und H zu 1-periodischen Funktionen $h \colon \mathbb{R} \times B \to \mathscr{R}$ und $H \colon [0,1] \times \mathbb{R} \times B \to \mathscr{R}$ bezüglich der s-Variable fortzusetzen und mit dem Ansatz

$$f_\varepsilon(c, t) = f_0(c, 0) + \int_0^t h(Ns, (c, s))ds$$

für $N \to \infty$ zu arbeiten.

Die wesenliche Abschätzung erfolgt im Beweis von [3, Proposition (C^0-densitiy) auf Seite 11].

Beweise [9, Complement 3.7] mit $s = 1$ und $P = \{*\}$.

(9.–10.) Das h-Prinzip für offene, ample Differentialrelationen (2 Vorträge) *(Florian Hanisch, Onirban Islam)*:

Definiere *koordinatenweise ample* Differentialrelationen $\mathscr{R} \subset J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ und zeige das h-Prinzip für offene, koordinatenweise ample Differentialrelationen $\mathscr{R} \subset J^1([0,1]^n, \mathbb{R}^q)$ relativ zu (beliebigen) abgeschlossenen Teilmengen $A \subset [0,1]^n$ durch induktive Anwendung der eindimensionalen konvexen Integration wie in [7, Abschnitt 18.2]. Verwende hierzu [9, Complement 3.7] anstatt [7, Lemma 17.5.1].

Definiere *ample Differentialrelationen* in $X^{(1)}$ für beliebige glatte Faserbündel $X \to V$ (siehe [9, Seite 51 Mitte] und [7, Seite 171 oben]) und diskutiere die Immersionsrelation wie in [9, Example 4.1] (siehe auch [7, Examples auf S. 171 Mitte].

Beweise das h-Prinzip für offene, ample Differentialrelationen für beliebige Faserungen $X \to V$ [7, 18.4.1].

Ein ausführlicher Beweis kann [9, S. 52 ff] entnommen werden und soll unter Benutzung der bisherigen Ergebnisse des Vortrags (die im wesentlichen [9, Lemma 4.4] abdecken) geeignet zusammengefasst werden.

Eine grobe Übersicht des Themas findet sich auch in [4, Abschnitt 1–2].

Folgere die Hirsch-Smale-Umstülpung der Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ durch Immersionen.

(11.) Anwendung I: Differentialformen *(Daniel Räde)*:

Zeige McDuffs h-Prinzip für geschlossene 2-Formen von maximalem Rang auf Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension [7, Theorem 10.4.1], [7, Abschnitt 20.5].

(12.) Anwendung II: Gerichtete Immersionen *(Georg Frenck)*:

Diskutiere gerichtete Immersionen [7, Abschnitt 19] und das h-Prinzip für reelle Immersionen in fast-komplexe Mannigfaltigkeiten [7, Theorem 19.4.5].

(13.–14.) Anwendung III: Der Approximationssatz von Nash-Kuiper (2 Vorträge) *(Penelope Gehring, Rubens Longhi)*:

Fasse die Diskussion in [7, Abschnitt 21] zusammen (siehe auch [4, Abschnitt 3]). Anstatt [7, 17.5.1] kann [9, Complement 3.7] verwendet werden, das in einem früheren Vortrag bewiesen wurde.

(15.–16.) Anwendung IV: Fluiddynamik (2 Vorträge) *(Volker Branding, Jonas Hirsch)*:

Die Euler-Gleichungen beschreiben die Evolution reibungsfreier inkompressibler Flüssigkeiten. Hinreichend reguläre Lösungen erfüllen die physikalisch erwartete Energieerhaltung. In [5] werden mittels konvexer Integration stetige Lösungen auf T^3 konstruiert, die die Energieerhaltung verletzen und daher unphysikalisch sind. Die Existenz solcher Lösungen war bereits 1949 vom Physikochemiker Lars Onsager vermutet worden.

Im Vortrag soll das Iterationsschema sorgfältig erklärt werden. Aus Zeitgründen können nicht alle Abschätzungen im Detail vorgeführt werden, z.B. von den Lemmas 7.1–7.5 könnte eines exemplarisch vorgeführt werden.

Für einen Überblick und eine Einordnung in die Gesamtthematik siehe auch [6].

Literatur:

[1] Borrelli, V.: Le h-principle: préquelle, lecture notes (2012).

[2] ______: H-principes en pagaille, lecture notes (2012).

[3] ______: One dimensional convex integration, lecture notes (2012).

[4] ______: The h-principle for ample relations, lecture notes (2012).

[5] De Lellis, C.; Székelyhidi, L.: Dissipative continuous Euler flows. *Invent. Math.* **193** (2013), 377–407.

[6] ______: On turbulence and geometry: from Nash to Onsager. *Notices Amer. Math. Soc.* **66** (2019), 677–685.

[7] Eliashberg, Y.; Mishachev, N.: *Introduction to the h-principle*. Graduate Studies in Mathematics, vol. 48. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[8] Gromov, M.: *Partial differential relations*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 9. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[9] Spring, D.: *Convex integration theory*. Monographs in Mathematics, vol. 92. Birkhäuser Verlag, Basel, Solutions to the *h*-principle in geometry and topology, 1998.