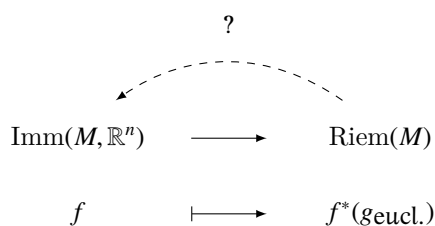


# Blockseminar 2023 Der Nash-Moser-Umkehrsatz

Christian Bär und Bernhard Hanke



## Wann:

Anreise ist am Sonntag, dem 18. Juni 2023, zum Abendessen um 18:00 Uhr. Im Anschluss findet der Einführungsvortrag statt. Die Abreise ist am Freitag, dem 23. Juni 2023, nach dem Mittagessen.

## Wo:

Das Blockseminar wird im Hotel Bollmannsruh im Havelland veranstaltet. Für Details siehe <http://www.hotel-bollmannsruh.de>.

## Was:

Der Umkehrsatz dürfte das wichtigste Hilfsmittel der nichtlinearen Analysis sein. Sein Beweis überträgt sich problemlos vom Endlichdimensionalen auf Banachräume. Diese Version ist für viele analytische Probleme aber nicht ausreichend, da in den typischen Funktionenräumen, die Banachräume sind, ein Regularitätsgrad fixiert werden muss. Das Phänomen des „Verlusts von Ableitungen“ führt dann oft dazu, dass der Umkehrsatz nicht anwendbar ist. Eine schöne Erläuterung dieses Problems findet sich im Wikipedia-Artikel [2].

Der Nash-Moser-Umkehrsatz funktioniert in der allgemeineren Kategorie von zahmen Frécheträumen und kann diese Einschränkung in vielen interessanten Beispielen umgehen. In dem Blockseminar wird eine sorgfältige Einführung in diesen Umkehrsatz gegeben und die Theorie durch zahlreiche Beispiele illustriert.

## Wie:

Die Vorträge sollten eine Dauer von 50 Minuten (plus Zeit für Diskussion) nicht überschreiten. Diese Zeitvorgabe bitte einhalten und bei der Planung der Vorträge berücksichtigen. Für den Notfall sollte man schon bei der Planung Passagen vorsehen, die wegfallen können, ohne dass der restliche Vortrag darunter allzu sehr leidet.

Aus Ermangelung einer Tafel werden die Vorträge mit zwei Dokumentenkameras und angeschlossenen Beamern gehalten. Wichtig ist dabei, dass die Blätter nicht vorbereitet mitgebracht werden, sondern - wie an einer Tafel - während des Vortrags live beschrieben werden.

## Wer:

Um sinnvoll teilnehmen zu können, muss man über Kenntnisse der Funktionalanalysis und der Differentialgeometrie verfügen. **Wichtig:** als Vorbereitung sind vor dem Seminar die Abschnitte I.1. bis I.4. aus [1], in denen einige Grundlagen entwickelt werden, selbstständig zu erarbeiten.

Die Finanzierung erfolgt durch das [Schwerpunktprogramm „Geometrie im Unendlichen“](#). Die Teilnahme ist nur für den gesamten Zeitraum des Seminars möglich.

## Vortragsprogramm:

(0.) Einführung (*Christian Bär*): Darstellung des Themas und Überblick

(1.) Der Umkehrsatz in Banachräumen (*Rebecca Roero*):

Diskutiere Normabschätzungen von stetigen Abbildungen zwischen Fréchet-Räumen und beweise den Umkehrsatz in Banachräumen. Diskutiere Inverse von Familien linearer Abbildungen zwischen Banach- und Fréchet-Räumen und illustriere die Unterschiede in beiden Fällen anhand von Beispielen. [1, I.5.1–I.5.3]

(2.) Anwendungen I (*Matthias Böhl*):

Behandle erste Beispiele zum Umkehrsatz. Neben einigen elementaren Beispielen in endlichdimensionalen Räumen interessieren uns besonders die Anwendungen auf Wurzeln von beschränkten linearen Abbildungen zwischen Banachräumen und auf die Lösungstheorie von gewöhnlichen Differentialgleichungen. [1, I.5.4–I.5.4.10]

- (3.) **Anwendungen II** (*Marten Steuer*):  
Diskutiere Anwendungen des Umkehrsatzes auf die Lösungstheorie partieller Differentialgleichungen, die Existenz von Geodäten in riemannschen Mannigfaltigkeiten und Lösungen des Plateau-Problems. [1, I.5.4.11–I.5.4.13]
- (4.) **Gegenbeispiele in Frécheträumen I** (*Marius Nietschmann*):  
Zeige anhand von Beispielen, dass sich der Umkehrsatz in Banachräumen nicht in einfacher Weise auf Frécheträume verallgemeinert: Differentialoperatoren, Diffeomorphismen von Mannigfaltigkeiten, Exponentialabbildung auf dem Raum der ganzen Funktionen auf der komplexen Ebene. [1, I.5.5.1–I.5.5.3]
- (5.) **Gegenbeispiele in Frécheträumen II, Differentialgleichungen in Frécheträumen** (*Thorsten Hertl*):  
Diskutiere Beispiel 1.5.5.4 von Abbildungen zwischen Banach- und Frécheträumen mit unterschiedlichem Invertierbarkeitsverhalten sowie die Lösbarkeit von Differentialgleichungen in Frécheträumen. [1, I.5.5.4–I.5.6.6]
- (6.) **Graduierte und zahme Frécheträume** (*Lukas Schönlinner*):  
Der Umkehrsatz für Frécheträume erfordert ein zusätzliches Strukturelement für Familien von Seminormen, sogenannte *Graduierungen*. Führe dieses Konzept ein, diskutiere zahme lineare Abbildungen zwischen graduierten Frécheträumen und definiere zahme Frécheträume. [1, II.1.1.1–II.1.3.5]
- (7.) **Beispiele für zahme Frécheträume, zahme Abbildungen** (*Milan Zerbin*):  
Diskutiere Schnitte von Vektorbündeln über kompakten Mannigfaltigkeiten, ganze holomorphe Funktionen und schnell abfallende Funktionen als Beispiele zahmer Frécheträume. Führe zahme Abbildungen zwischen Frécheträumen ein und diskutiere einige Beispiele. [1, II.1.3.6–II.2.1.4]
- (8.) **Zahme Abbildungen II** (*Helge Frerichs*):  
Zeige einige grundlegende Resultate zu zahmen Abbildungen. Differentialoperatoren auf Schnitten von Vektorbündeln bilden eine wichtige Klasse zahmer Abbildungen. [1, II.2.1.5–II.2.2.7]
- (9.) **Zahme Fréchetmannigfaltigkeiten** (*Christopher Wulff*):  
Führe zahme Fréchetmannigfaltigkeiten und zahme Liegruppen ein und diskutiere einige Beispiele. [1, II.2.3]
- (10.) **Glatte zahme Inverse, gewöhnliche Differentialgleichungen** (*Markus Upmeyer*):  
Theorem II.3.1.1 gibt ein nützliches Kriterium, wann Familien von Inversen glatter zahmer Familien linearer Isomorphismen wieder glatte zahme Familien bilden. Zeige die zahme Abhängigkeit der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen von Parametern. [1, II.3.1–II.3.2]

- (11.) Elliptische Gleichungen I (*Felix Physiker & Matti Lyko*):  
 Ziel dieses und des nächsten Vortrags ist es zu zeigen, dass gewisse elliptische Randwertprobleme eindeutig lösbar sind und die Lösungen glatt und zahm von allen Daten abhängen, d.h. von der Quelle, den Randdaten sowie den Koeffizienten der Operatoren. Die Sprecher dieses und des kommenden Vortrags sollten sich bei der Vorbereitung gut abstimmen. [1, II.3.3.1–Ende des Beweises von Lemma II.3.3.4]
- (12.) Elliptische Gleichungen II (*Felix Physiker & Matti Lyko*):  
 [1, Rest des Abschnittes II.3.3]
- (13.) Symmetrische Systeme I (*Rubens Longhi & Alberto Richtsfeld*):  
 Wir wechseln von der elliptischen in die hyperbolische Welt. Dieser und der nächste Vortrag stellen den Abschnitt über symmetrische Systeme dar, in dem unter geeigneten Voraussetzungen wieder die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen und ihre glatte Abhängigkeit von den Daten hergeleitet wird. Die genaue Stoffaufteilung wird den Sprechern überlassen, was natürlich wiederum eine enge Abstimmung erfordert. [1, II.3.4]
- (14.) Symmetrische Systeme II (*Rubens Longhi & Alberto Richtsfeld*):  
 [1, II.3.4]
- (15.) Formulierung des Umkehrsatzes, Vorbereitungen und lokale Injektivität (*Alexander Engel*):  
 Das zentrale Resultat des Seminars wird formuliert. Dieser und die kommenden drei Vorträge widmen sich dem Beweis. Hier wird nach einigen Vorbereitungen zunächst die lokale Injektivität bewiesen. [1, III.1.1–II.1.3]
- (16.) Glättungsoperatoren und lokale Surjektivität (*Samuel Antz*):  
 Glättungsoperatoren werden als technisches Hilfsmittel eingeführt. Die lokale Surjektivität wird mittels eines Algorithmus bewiesen, der Lösungen findet. [1, III.1.4–II.1.5]
- (17.) A-Priori-Abschätzungen (*Onirban Islam & Florian Hanisch*):  
 Um zu zeigen, dass der Algorithmus wirklich tut, was er soll, sind einige A-Priori-Abschätzungen nötig. [1, III.1.6]
- (18.) Abschluss des Beweises und eine erste Anwendung auf Flachwasserwellen (*Onirban Islam & Florian Hanisch*):  
 Der Beweis des Nash-Moser-Umkkehrsatzes wird zum Abschluss gebracht. Es folgt eine erste Anwendung auf die Flachwasserwellen-Gleichung. [1, III.1.7 und III.2.2]
- (19.) Einbettungen von Flächen positiver Krümmung (*Thomas Schick*):  
 Als zweite Anwendung beweisen wir den klassischen Satz von Nirenberg. Er besagt, dass kompakte orientierbare Flächen mit positiver Gau-Krümmung isometrisch als konvexe Flächen in den  $\mathbb{R}^3$  eingebettet werden können. [1, III.2.1]

- (20.) Untermannigfaltigkeiten von konstantem Volumen sowie symplektische und Kontaktstrukturen (*Georg Frenck*):

Ist  $S$  eine Untermannigfaltigkeit einer riemannschen Mannigfaltigkeit, deren mittlere Krümmung nicht identisch verschwindet, dann ist die Menge aller Untermannigfaltigkeiten mit demselben Volumen wie  $S$  nahe  $S$  eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1 in der Mannigfaltigkeit aller Untermannigfaltigkeiten. Ferner werden Starrheitsaussagen für symplektische Formen und für Kontaktstrukturen (modulo Diffeomorphismen) bewiesen. [1, III.2.3–III.2.4]

- (21.) Volumenerhaltende Diffeomorphismen (*Christoph Stephan*):

Zunächst werden Kriterien abgeleitet, wann eine Gruppenwirkung ein Hauptfaserbündel definiert. Dann wird bewiesen, dass die Diffeomorphismengruppe transitiv auf den glatten positiven Wahrscheinlichkeitsmaßen wirkt. [1, III.2.5]

## Literatur:

- [1] Hamilton, R. S.: [The inverse function theorem of Nash and Moser](#). *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **7** (1982), 65–222.
- [2] Verschiedene Autoren: [Nash-Moser theorem](#), Wikipedia.