Capitolo 9

Calcolo delle probabilità

OBIETTIVI

Conoscenze

- Concetto di evento e di probabilità.
- Rapporto tra probabilità e frequenza di un evento.
- Teoremi sulla probabilità e concetto di probabilità condizionata.

Abilità

- Calcolare la probabilità di un evento utilizzando la definizione e i teoremi sulla probabilità.

COMPETENZE

- Individuare le strategie appropriate per la soluzione dei problemi.
- Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.

La lotteria della MAT Cola

FIGURA 1

FIGURA 2

L'ufficio marketing della MAT Cola, la famosa bevanda per gli scienziati, ha deciso di lanciare un'iniziativa promozionale. Sotto il tappo di ogni bottiglietta viene stampata una delle seguenti lettere: una M, una A o una T; i tre tappi vengono prodotti in quantità uguali. Le bottigliette sono vendute in confezioni da tre: chi riesce a formare la parola MAT con i tappi di un'unica confezione vince un premio. (Per evitare che un consumatore possa prendere i tappi da confezioni diverse, per le tre bottigliette di una medesima confezione viene stampato lo stesso codice numerico sul bordo esterno del tappo; ovviamente il codice è diverso per ciascuna confezione.)

Qual è la probabilità di vincere? Quale può essere un premio ragionevole secondo gli ideatori dell'iniziativa?

Soluzione a pag. 490

Concetti fondamentali

1. Introduzione

Se hai studiato la logica hai incontrato il concetto di *enunciato* (o *proposizione*): è un'espressione linguistica per la quale si può stabilire con certezza se è vera o falsa.
Nella vita di tutti i giorni si incontrano spesso affermazioni la cui verità non si può stabilire con certezza; ad esempio:

- domani pioverà;
- quest'anno sarò promosso;
- se lancio questo dado uscirà 6.

Tali affermazioni sono relative a eventi che potrebbero accadere oppure no; per questo, spesso si usano locuzioni che esprimono un «grado di fiducia» rispetto alla possibilità che essi si verifichino:

- *difficilmente* domani pioverà;
- *quasi sicuramente* quest'anno sarò promosso;
- *è possibile che*, lanciando questo dado, esca 6.

Tali espressioni sono soddisfacenti nel linguaggio comune, ma la matematica richiede un modo «più preciso» per misurare il grado di fiducia nel verificarsi di un evento: il calcolo delle probabilità nasce per rispondere a questa esigenza.

2. Definizioni

DEFINIZIONE SPAZIO DEI RISULTATI

Si dice *spazio dei risultati* o *spazio campione* l'insieme di tutti i possibili esiti di un'osservazione o di un esperimento.

DEFINIZIONE EVENTO

Si dice *evento* ogni sottoinsieme dello spazio dei risultati.
Se il risultato dell'osservazione o esperimento è un elemento dell'evento E, si dice che *l'evento E si è verificato* o anche che è *realizzato*. In caso contrario si dice che *l'evento E non si è verificato*.

Nel seguito chiameremo **prova** l'esecuzione dell'esperimento o dell'osservazione. In riferimento a un prefissato evento E diremo *successo* l'esecuzione di una prova in cui si verifica tale evento e *insuccesso* l'esecuzione di una prova in cui esso non si verifica.

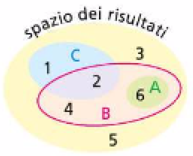


FIGURA 3

ESEMPI

1 Consideriamo, come **esperimento**, il lancio di un dado a sei facce, numerate da 1 a 6. Assumiamo come **esito** dell'esperimento il numero riportato sulla faccia rivolta verso l'alto. Lo **spazio dei risultati** (FIGURA 3) è l'insieme $S = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$. Sono eventi, per esempio, i seguenti sottoinsiemi di S:

- $A = \{6\}$, ossia l'uscita del numero 6;
- $B = \{2\,;\,4\,;\,6\}$, ossia l'uscita di un numero pari;
- $C = \{1\,;\,2\}$, ossia l'uscita di un numero minore di 3.

Se, lanciando il dado, esce il numero 1 (ossia se l'esito dell'esperimento è 1), si è verificato l'evento C, perché $1 \in C$, mentre non si sono verificati gli eventi A e B, perché $1 \notin A$ e $1 \notin B$.
Analogamente, se esce il numero 2, si sono verificati gli eventi B e C, mentre non si è verificato l'evento A.

2 Consideriamo l'**osservazione** di un pezzo meccanico, prodotto da una fabbrica di ricambi, effettuata da un addetto al controllo qualità, il quale deve stabilire se il pezzo non ha difetti, oppure se ha lievi difetti che non ne pregiudicano la vendibilità, oppure se ha gravi difetti che lo rendono invendibile. L'**esito** dell'osservazione è la formulazione di uno dei tre giudizi precedenti. Lo spazio dei risultati, costituito da tre elementi, è

$$S = \{\text{non difettoso; lievemente difettoso; gravemente difettoso}\}$$

Sono eventi, ad esempio,
«Il pezzo è vendibile», che corrisponde al sottoinsieme

$$\{\text{non difettoso; lievemente difettoso}\} \subseteq S$$

«Il pezzo è invendibile», che corrisponde al sottoinsieme

$$\{\text{gravemente difettoso}\} \subseteq S$$

3 Immagina l'**esperimento** che consiste nel lanciare ripetutamente una moneta, fino a quando non esce testa. I possibili **esiti**, ossia gli elementi dello spazio dei risultati, sono

- esce testa al primo lancio;
- esce testa per la prima volta al secondo lancio;
- esce testa per la prima volta al terzo lancio;

...

Osserva che in questo caso lo spazio dei risultati ha infiniti elementi. Nel seguito di questo capitolo ci limiteremo a considerare casi in cui lo spazio dei risultati ha un numero finito di elementi.

3. Evento elementare, evento certo, evento impossibile, evento aleatorio

È importante ricordare che *gli eventi sono insiemi*; più precisamente, ciascun evento è un sottoinsieme dello spazio dei risultati, che è l'insieme universo nel quale si opera.

- Si dice **evento elementare** qualunque sottoinsieme dello spazio dei risultati S costituito da un solo elemento.
  A ogni singolo risultato della prova corrisponde un evento elementare.
- Si dice **evento certo** l'insieme S stesso, cioè lo spazio dei risultati.
  L'evento certo si verifica qualunque sia l'esito della prova.
- Si dice **evento impossibile** l'insieme vuoto $\emptyset$.
  L'evento impossibile non si verifica qualunque sia l'esito della prova.
- Si dice **evento aleatorio** o anche **evento casuale** qualunque evento diverso dall'evento certo e dall'evento impossibile.
  Di un evento aleatorio non è possibile affermare a priori che si verifichi o meno: ciò dipende dall'esito della prova, ossia dal caso.

ESEMPIO

Consideriamo ancora il lancio di un dado a sei facce, numerate da 1 a 6.

- L'evento «esce il numero 6» è un evento elementare perché corrisponde all'insieme $A = \{6\}$, che ha un solo elemento. L'evento «esce un numero pari» non è un evento elementare perché corrisponde all'insieme $B = \{2; 4; 6\}$, che ha tre elementi.
- L'evento certo è $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ e potrebbe essere descritto come «uscita di un numero intero compreso tra 1 e 6», oppure come «uscita di un numero minore di 10», o anche come «uscita di un numero pari o dispari» o in altri modi ancora. Evidentemente, qualunque sia l'esito dell'esperimento, ossia qualunque numero esca, l'evento S si verifica.
- L'evento impossibile è $\varnothing$ e potrebbe essere descritto come «uscita di un numero maggiore di 6» oppure come «uscita di un numero negativo» o in altri modi. Evidentemente, qualunque sia l'esito dell'esperimento, ossia qualunque numero esca, l'evento $\varnothing$ non si verifica.
- L'evento «esce un numero pari» è un evento aleatorio, perché corrisponde all'insieme $B = \{2; 4; 6\}$ ed è $B \neq S$ e $B \neq \varnothing$. Non è possibile sapere a priori se tale evento si verifica o meno: ciò dipende dall'esito dell'esperimento, ossia dal numero che esce quando si lancia il dado.

PASSATO E FUTURO

Spesso, quando si pensa a un evento casuale, si pensa a un evento futuro. La casualità è allora dovuta al fatto che non essendo ancora stato eseguito l'esperimento o l'osservazione, non se ne conosce l'esito e non si può quindi sapere se l'evento considerato si verificherà o no. Ma in realtà la casualità di un evento non è determinata tanto dal suo collocarsi nel futuro, quanto dalla mancanza o incompletezza di informazioni sull'esito della prova.
Anche un evento come «ieri a Stoccolma è piovuto», pur ponendosi nel passato, può essere considerato un evento aleatorio, perlomeno finché manchi una completa informazione sulle condizioni meteorologiche di Stoccolma nella giornata di ieri. Ha senso effettuare una scommessa su tale evento, come ha senso effettuare una scommessa sul numero che uscirà lanciando un dado. Si potrà conoscere l'esito della scommessa dopo aver raccolto le informazioni necessarie: ossia dopo essersi informati sul tempo di ieri a Stoccolma o, rispettivamente, dopo aver lanciato il dado.

4. Eventi unici ed eventi ripetibili. Frequenza

Un evento si dice *unico* o anche *singolo* se l'esperimento o l'osservazione cui si riferisce può essere eseguito una sola volta. Se invece tale esperimento o osservazione può essere eseguito un numero indefinito di volte, l'evento si dice *ripetibile*.

ESEMPIO

L'evento «l'Italia vincerà il campionato mondiale di calcio del 2026» è un evento unico: l'esperimento che può verificare tale evento infatti è lo svolgimento, nel 2026, del campionato mondiale di calcio e, come è evidente, tale prova non può essere ripetuta.
Invece l'evento «lanciando un dado esce 6» è ripetibile, perché l'esperimento in questione, ossia il lancio di un dado, può essere ripetuto quante volte si vuole.

DEFINIZIONE FREQUENZA DI UN EVENTO RIPETIBILE

La frequenza di un evento ripetibile è il rapporto tra il numero di successi e il numero di prove.

Quindi, se su n prove l'evento ripetibile E si verifica m volte, la sua frequenza è

$$\boxed{f = \frac{m}{n}}$$

Il numero m di successi è un intero non negativo e minore o uguale al numero di prove n: $0 \leq m \leq n$; dividendo tutti i termini di tale relazione per n si ottiene

$$\frac{0}{n} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{n}{n} \quad \longrightarrow \quad 0 \leq f \leq 1$$

Perciò **la frequenza è un numero non negativo minore o uguale a 1**. In particolare, la frequenza è zero se l'evento non si è mai verificato in alcuna prova, mentre è 1 se si è verificato in tutte le prove.
Se un evento è certo, esso si verifica in tutte le prove: in tal caso il numero di successi è uguale al numero di prove: $m = n$; pertanto la frequenza di un evento certo è 1. Analogamente, se un evento è impossibile, esso non si verifica in alcuna prova, e quindi $m = 0$; dunque la frequenza di un evento impossibile è 0.

MA NON VICEVERSA

Fai attenzione: se la frequenza di un evento è 0, non significa che l'evento sia impossibile. Ad esempio, lanciando un dado 10 volte potrebbe non uscire mai il 6: la frequenza di questo evento in tal caso sarebbe 0, ma ciò non basta certo ad affermare che l'uscita del 6 sia impossibile. Analogamente, se la frequenza di un evento è 1, non significa che l'evento sia certo.

Eventi e probabilità

5. Definizione di probabilità

Le facce di un dado sono tutte uguali tra loro tranne che, ovviamente, per il numero che vi appare. Quindi, se lanciamo un dado, non c'è nessuna ragione di supporre che una faccia abbia più possibilità di uscire rispetto a un'altra. Per tale motivo il grado di fiducia che ragionevolmente si può attribuire all'evento «uscita del 5» non è diverso da quello che si può attribuire all'uscita di uno qualunque degli altri cinque numeri. Si dice perciò che il 5 ha una possibilità su sei, ossia $\frac{1}{6}$, di uscire.

Anche le 40 carte di uno stesso mazzo sono uguali, eccetto che per la figura stampata su un lato di esse. Perciò, se mescoliamo le carte e ne scegliamo una, non c'è motivo di pensare che una carta abbia più possibilità di un'altra di essere estratta. Poiché nel mazzo ci sono 10 carte di cuori, diremo che le possibilità che si verifichi l'evento «estrazione di una carta di cuori» sono 10 su 40, ossia $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$.

SpiegaMatica: probabilità

DEFINIZIONE PROBABILITÀ DI UN EVENTO

La probabilità di un evento è il rapporto tra il numero di esiti che verificano l'evento e il numero totale di esiti possibili, supposto che essi abbiano tutti la stessa possibilità di verificarsi.

Si usa anche dire che la probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei *casi favorevoli* all'evento e il numero dei *casi possibili*.
Osserva che il numero di esiti che verificano E è il numero m di elementi dell'insieme E, sottoinsieme dello spazio dei risultati S, mentre il numero totale di esiti possibili è il numero n di elementi dello spazio dei risultati. Perciò, se indichiamo con $p(E)$ la probabilità dell'evento E, si ha

$$\boxed{p(E) = \frac{m}{n}}$$

- **Se E è l'evento impossibile**, si ha $m = 0$, perché per definizione l'evento impossibile è l'insieme vuoto, e dunque risulta $\mathbf{p(E) = 0}$.
- **Se E è l'evento certo**, si ha $m = n$, perché per definizione l'evento certo è lo spazio dei risultati, per cui risulta $\mathbf{p(E) = 1}$.
- **Se E è un evento aleatorio**, si ha $0 < m < n$, perché E è un sottoinsieme proprio dello spazio dei risultati che contiene n elementi, per cui risulta $\mathbf{0 < p(E) < 1}$.

La probabilità dell'evento impossibile è 0, la probabilità dell'evento certo è 1, la probabilità di un evento aleatorio è un numero positivo minore di 1.
In generale, la probabilità di un evento E è un numero appartenente all'intervallo $[0\,;\,1]$:

$$\boxed{\mathbf{0 \leq p(E) \leq 1}}$$

ESEMPI

1 Calcoliamo la probabilità che, lanciando un dado, esca un numero pari.

- Lo **spazio dei risultati** è l'insieme $S = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$ e **contiene 6 elementi**; in altre parole, *i casi possibili sono 6*. Dunque si ha $\mathbf{n = 6}$.
- L'**evento** considerato è $E = \{2\,;\,4\,;\,6\}$ e **contiene 3 elementi**; in altre parole, *vi sono 3 casi favorevoli* al verificarsi dell'evento considerato. Dunque si ha $\mathbf{m = 3}$.
- Se il dado non è truccato, non vi è alcuna ragione per pensare che una faccia possa uscire più facilmente di un'altra, dunque **tutti gli esiti sono ugualmente possibili**.

Possiamo dunque concludere che la probabilità richiesta è

$$p(E) = \frac{3}{6} \longrightarrow p(E) = \frac{1}{2}$$

2 Da un mazzo di 40 carte da gioco se ne estrae una. Calcoliamo la probabilità degli eventi:

A: «estrazione di una figura»
B: «estrazione di un asso rosso»

Per entrambi gli eventi i casi possibili sono 40, ossia uno per ogni carta del mazzo, ed essi si possono considerare tutti ugualmente possibili.
Per l'evento A i casi favorevoli sono 12, ossia tanti quante sono le figure nel mazzo, mentre per l'evento B sono 2, corrispondenti ai due assi rossi (cuori e quadri). Dunque si ha

$$p(A) = \frac{12}{40} \longrightarrow p(A) = \frac{3}{10}$$
$$p(B) = \frac{2}{40} \longrightarrow p(B) = \frac{1}{20}$$

6. Probabilità e frequenza

La frequenza di un evento ripetibile ha alcune proprietà simili a quelle della probabilità. Frequenza e probabilità sono entrambe numeri maggiori o uguali a zero e minori o uguali a 1, frequenza e probabilità dell'evento certo sono entrambe uguali a 1, così come frequenza e probabilità di un evento impossibile sono entrambe uguali a 0.
Tali analogie hanno ispirato alcuni storici esperimenti. **Georges-Louis Leclerc** (1707-1788), conte di Buffon, lanciò per 4040 volte una moneta, ottenendo testa per 2048 volte, con una frequenza quindi pari a 0,50693...; l'esperimento fu ripetuto due volte da **Karl Pearson** (1857-1936), con due serie, la prima di 12 000 e la seconda di 24 000 lanci, ottenendo rispettivamente 6019 e 12 012 volte testa, con frequenze quindi pari a 0,50158... e 0,5005. Questi esperimenti e altri simili portarono a formulare la seguente legge.

LEGGE EMPIRICA DEL CASO

Se si esegue un grande numero di prove, tutte nelle stesse condizioni, la frequenza di un evento assume valori prossimi alla sua probabilità, e l'approssimazione cresce all'aumentare del numero di prove.

Questa legge è di carattere empirico; essa mette in relazione due concetti appartenenti a sfere diverse e non può essere dimostrata ma solo verificata sperimentalmente. La sua importanza è duplice: da un lato essa permette di prevedere, almeno approssimativamente, la frequenza con cui si presenterà un evento di cui si conosce la probabilità; dall'altro essa permette di stimare, mediante la frequenza, la probabilità di un evento nel caso in cui non si sia in grado di determinarla applicando la definizione.

SIMILI MA DIVERSE

Nonostante le evidenti analogie, i concetti di probabilità e frequenza non coincidono: per esempio, se la probabilità di un evento è 0, l'evento è impossibile, ma, come abbiamo già osservato, non si può affermare la stessa cosa se è 0 la sua frequenza.
In realtà probabilità e frequenza sono concetti eterogenei; in base alla definizione, la probabilità di un evento è un concetto astratto, e può essere determinata a priori, mentre la frequenza è un concetto empirico: per calcolarla occorre effettuare concretamente le prove.

ESEMPI

1 Una casa automobilistica vuole offrire ai suoi clienti una speciale garanzia contro i guasti di qualunque tipo di un certo modello di automobile nei primi tre anni dall'acquisto. Allo scopo di valutare il costo di una tale garanzia si deve conoscere la probabilità dell'evento «guasto entro i primi tre anni». Viene commissionata perciò un'apposita indagine statistica, da cui risulta che, su 12 512 auto, 431 hanno avuto almeno un guasto nei primi tre anni di vita. In base a tali risultati si può affermare che la probabilità che quel modello di automobile abbia un guasto nei primi tre anni di vita è circa

$$\frac{431}{12\,512} = 0{,}03444\ldots$$

2 Un gruppo di ricercatori deve valutare il numero di trote presenti in un lago. A tale scopo vengono pescate 187 trote che, dopo essere state marcate, vengono reimmesse nel lago. Alcuni giorni dopo vengono pescate 1215 trote e, di queste, 27 risultano marcate. Quante sono le trote nel lago?
Poiché le trote marcate sono 27 sulle 1215 pescate, si può supporre che la probabilità di pescare una trota marcata sia

$$p = \frac{27}{1215}$$

D'altra parte la probabilità di pescare una trota marcata è il rapporto tra il numero m di trote marcate e il numero n di trote presenti nel lago ossia, essendo $m = 187$,

$$p = \frac{m}{n} \quad \longrightarrow \quad p = \frac{187}{n}$$

Uguagliando questa espressione di p con il valore prima trovato possiamo determinare approssimativamente il numero n di trote nel lago:

$$\frac{187}{n} \simeq \frac{27}{1215} \quad \longrightarrow \quad n \simeq \frac{187 \cdot 1215}{27} = 8415$$

Possiamo perciò affermare che nel lago sono presenti circa 8400 trote.

CIRCA

In questo esempio abbiamo considerato la probabilità dell'evento «pesca di una trota marcata» uguagliando il valore della probabilità basata sulla frequenza dell'evento con l'espressione della probabilità basata sulla definizione. Ma per la **LEGGE EMPIRICA DEL CASO** la frequenza di un evento è uguale solo *approssimativamente* alla sua probabilità. Perciò il risultato ottenuto non può essere considerato esatto, ma solo approssimato.

3 Un'urna contiene 3000 gettoni, in parte bianchi e in parte neri. Se ne estraggono 120, reinserendo ogni volta nell'urna il gettone estratto, e di questi 85 risultano neri e 35 bianchi. Stimare la composizione dell'urna.
Le frequenze degli eventi «estrazione di un gettone nero» e «estrazione di un gettone bianco» sono rispettivamente

$$\frac{85}{120} = \frac{17}{24} \qquad \text{e} \qquad \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$$

Tali frequenze possono essere considerate approssimazioni delle probabilità dei due eventi. In base alla definizione di probabilità, tali probabilità sono rispettivamente

$$\frac{n}{3000} \qquad \text{e} \qquad \frac{b}{3000}$$

essendo n e b rispettivamente il numero di gettoni neri e bianchi contenuti nell'urna. Dunque si deve avere

$$\frac{n}{3000} \simeq \frac{17}{24} \quad \longrightarrow \quad n \simeq \frac{17}{24} \cdot 3000 = 2125$$
$$\frac{b}{3000} \simeq \frac{7}{24} \quad \longrightarrow \quad b \simeq \frac{7}{24} \cdot 3000 = 875$$

Si può quindi concludere che nell'urna vi sono circa 2125 gettoni neri e 875 gettoni bianchi.

7. Operazioni con gli eventi

Come abbiamo già detto, gli eventi sono sottoinsiemi dello spazio dei risultati, pertanto si possono estendere agli eventi le operazioni insiemistiche che già conosci; lo spazio dei risultati costituisce l'insieme universo in cui si opera.

DEFINIZIONE UNIONE DI DUE EVENTI

Si definisce unione di due eventi quell'evento che si verifica se e solo se si verifica almeno uno dei due eventi dati.

Osserva che dire che «si verifica almeno uno dei due eventi A o B» significa affermare che l'esito r della prova appartiene ad almeno uno dei due insiemi A o B; ciò significa che $r \in A \cup B$, ossia che si verifica l'evento $A \cup B$. Perciò la definizione di unione di due eventi è in realtà una riformulazione della già nota definizione di unione di due insiemi.
L'unione di due eventi A e B si indica con $A \cup B$.

DEFINIZIONE INTERSEZIONE DI DUE EVENTI

Si definisce intersezione di due eventi quell'evento che si verifica se e solo se si verificano entrambi gli eventi dati.

Dire che «si verificano entrambi gli eventi A e B» significa affermare che l'esito r della prova appartiene sia all'insieme A sia all'insieme B; ciò significa che $r \in A \cap B$, ossia che si verifica l'evento $A \cap B$.
L'intersezione di due eventi A e B si indica con $A \cap B$.

DEFINIZIONE EVENTO CONTRARIO

Si definisce evento contrario o evento complementare di un dato evento quell'evento che si verifica se e solo se non si verifica l'evento dato.

Osserva che dire che «non si verifica l'evento A» significa affermare che l'esito r della prova non appartiene all'insieme A; ciò significa che r appartiene all'insieme $\overline{A}$, complementare di A rispetto all'insieme universo costituito dallo spazio dei risultati.
L'evento contrario di un evento A si indica con $\overline{A}$.

DEFINIZIONE EVENTI COMPATIBILI ED EVENTI INCOMPATIBILI

Due eventi si dicono compatibili se si possono verificare contemporaneamente, si dicono incompatibili se non si possono verificare contemporaneamente.

Dire che due eventi A e B si possono verificare contemporaneamente significa che *possono verificarsi entrambi in una medesima prova*. Se ciò accade, l'esito r della prova appartiene sia all'insieme A sia all'insieme B e quindi $r \in A \cap B$; dunque **se due eventi A e B sono compatibili è $A \cap B \neq \varnothing$**, perché la loro intersezione contiene almeno l'elemento r (**FIGURA 4**).
Viceversa, **se due eventi A e B sono incompatibili è $A \cap B = \varnothing$**, perché la loro intersezione è priva di elementi (**FIGURA 5**).

eventi compatibili

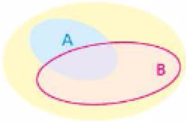


FIGURA 4

eventi incompatibili

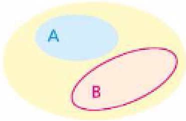


FIGURA 5

ESEMPIO

Immagina di lanciare un dado e considera i seguenti eventi:

$A = \{4\,;\,5\,;\,6\}$: uscita di un numero maggiore di 3
$B = \{2\,;\,4\,;\,6\}$: uscita di un numero pari
$C = \{1\,;\,2\}$: uscita di un numero minore di 3

Si ha $A \cup B = \{2\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$. L'unione degli eventi A e B è l'evento «uscita di un numero pari o maggiore di 3».

Si ha $A \cap B = \{4\,;\,6\}$. L'intersezione degli eventi A e B è l'evento «uscita di un numero pari e maggiore di 3».
Si ha $\overline{C} = \{3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$. L'evento complementare dell'evento C è l'evento «uscita di un numero maggiore o uguale a 3».
Si ha poi $A \cap C = \varnothing$, ossia l'intersezione degli eventi A e C è l'evento impossibile «uscita di un numero minore di 3 e maggiore di 3». Gli eventi A e C sono perciò incompatibili.

Teoremi sulla probabilità

8. Probabilità totale

DEFINIZIONE **PROBABILITÀ TOTALE**

Si dice probabilità totale di due o più eventi la probabilità della loro unione.

In altre parole la probabilità totale di due eventi A e B è $p(A \cup B)$, ossia è la probabilità che si verifichi almeno uno dei due eventi.
Immagina di estrarre una carta da un mazzo che ne contiene 40. Qual è la probabilità che esca un asso o una figura?
Se indichiamo con A l'evento «estrazione di un asso» e con F l'evento «estrazione di una figura», l'evento E_1 «estrazione di un asso o di una figura» può essere pensato come l'unione $A \cup F$ (**FIGURA 6**). Poiché nel mazzo vi sono 4 assi e 12 figure, le probabilità di ciascuno di questi due eventi sono, rispettivamente (volutamente non semplifichiamo le frazioni),

$$p(A) = \frac{4}{40} \qquad \text{e} \qquad p(F) = \frac{12}{40}$$

I casi favorevoli all'evento $E_1 = A \cup F$ sono $4 + 12 = 16$ perché i due insiemi A e F sono disgiunti (ossia i due eventi sono incompatibili), e perciò il numero degli elementi dell'unione di A e F è la somma del numero di elementi di A e del numero di elementi di F (**FIGURA 6**). Si ha pertanto

$$p(A \cup F) = \frac{4+12}{40} = \frac{4}{40} + \frac{12}{40} \quad \longrightarrow \quad p(A \cup F) = p(A) + p(F)$$

Consideriamo ora l'evento E_2 «estrazione di una figura o di una carta di cuori». Se indichiamo con C l'evento «estrazione di una carta di cuori» si ha $E_2 = F \cup C$ (**FIGURA 7**). Poiché nel mazzo vi sono 12 figure e 10 carte di cuori si ha

$$p(F) = \frac{12}{40} \qquad \text{e} \qquad p(C) = \frac{10}{40}$$

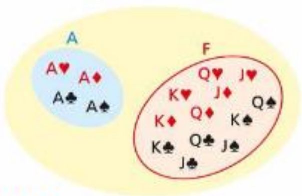


FIGURA 6

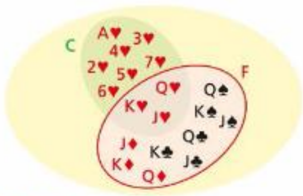


FIGURA 7

In questo caso però il numero di casi favorevoli all'evento $F \cup C$, ossia il numero di elementi di tale insieme, non è la somma del numero di elementi dei due insiemi F e C. Infatti i due insiemi F e C non sono disgiunti (ossia i due eventi sono compatibili) perché hanno in comune le tre figure di cuori. Nella somma $12 + 10$ tali carte sarebbero contate due volte: una volta come figure e una come carte di cuori. Per ottenere il numero corretto degli elementi di $F \cup C$ occorre quindi sottrarre a tale somma il numero degli elementi di $F \cap C$. Pertanto i casi favorevoli all'evento $F \cup C$ sono $12 + 10 - 3 = 19$, e si ha

$$p(F \cup C) = \frac{12+10-3}{40} = \frac{12}{40} + \frac{10}{40} - \frac{3}{40}$$

Osserva che $\frac{3}{40}$ è la probabilità dell'evento $F \cap C$ «estrazione di una figura di cuori». L'ultima uguaglianza perciò si può scrivere:

$$p(F \cup C) = p(F) + p(C) - p(F \cap C)$$

I ragionamenti che abbiamo svolto si possono generalizzare, giustificando così i seguenti teoremi.

TEOREMA DELLA PROBABILITÀ TOTALE DI EVENTI INCOMPATIBILI

Se due eventi sono incompatibili, la probabilità della loro unione è la somma delle loro probabilità.

In simboli si ha quindi

$$\boxed{A \cap B = \varnothing \quad \longrightarrow \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$$

TEOREMA DELLA PROBABILITÀ TOTALE DI EVENTI COMPATIBILI

Se due eventi sono compatibili, la probabilità della loro unione è la somma delle loro probabilità diminuita della probabilità della loro intersezione.

In simboli si ha quindi

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$

PER APPROFONDIRE

L'ultima formula, che consente di calcolare la probabilità totale di eventi compatibili, si può considerare la formula generale della probabilità totale, in quanto essa consente di calcolare anche la probabilità totale di eventi incompatibili. Infatti in questo caso si ha $p(A \cap B) = 0$:

$$A \cap B = \varnothing \quad \longrightarrow \quad p(A \cap B) = 0 \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - \underbrace{p(A \cap B)}_{p(A \cap B) = 0} = p(A) + p(B)$$

ESEMPIO

Nel gioco del Lotto si estraggono, per ogni «ruota», cinque numeri da un'urna contenente 90 sfere numerate da 1 a 90. Calcoliamo la probabilità che il primo numero del Lotto estratto sulla ruota di Napoli sia:

a. A: un numero dispari o un multiplo di 18

b. B: un numero pari o un multiplo di 9

a. L'evento A è l'unione dei due eventi seguenti:

C: il primo estratto è un numero dispari

D: il primo estratto è un multiplo di 18

I due eventi sono incompatibili, in quanto i multipli di 18 sono pari, quindi se il primo estratto è un multiplo di 18, esso non può essere dispari e viceversa. Dovremo quindi applicare la formula della probabilità totale di eventi *incompatibili*:

$$p(A) = p(C \cup D) = p(C) + p(D)$$

Per entrambi gli eventi i casi possibili sono 90.
Per l'evento C i casi favorevoli corrispondono ai 45 numeri dispari compresi tra 1 e 90.
Per l'evento D i casi favorevoli corrispondono ai 5 multipli di 18 compresi tra 1 e 90, ossia 18, 36, 54, 72, 90.
Quindi si ha

$$p(C) = \frac{45}{90} = \frac{1}{2} \qquad p(D) = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

e perciò

$$p(A) = p(C \cup D) = p(C) + p(D) = \frac{1}{2} + \frac{1}{18} \longrightarrow p(A) = \frac{5}{9}$$

b. L'evento B è l'unione dei due eventi seguenti:

E: il primo estratto è un numero pari

F: il primo estratto è un multiplo di 9

I due eventi sono compatibili perché vi sono multipli di 9 che sono numeri pari: essi sono i multipli di 18, ossia, in questo caso, 18, 36, 54, 72, 90. L'estrazione di uno di essi verificherebbe sia l'evento E sia l'evento F. Applicheremo perciò la formula della probabilità totale di eventi *compatibili*:

$$p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F)$$

Per l'evento E i casi favorevoli corrispondono ai 45 numeri pari compresi tra 1 e 90.
Per l'evento F i casi favorevoli corrispondono ai 10 multipli di 9 compresi tra 1 e 90, ossia 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90.
Per l'evento $E \cap F$ i casi favorevoli corrispondono, come già detto, ai 5 multipli di 18.
Quindi si ha

$$p(E) = \frac{45}{90} = \frac{1}{2} \qquad p(F) = \frac{10}{90} = \frac{1}{9} \qquad p(E \cap F) = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

e dunque

$$p(B) = p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{18} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow p(B) = \frac{5}{9}$$

9. Probabilità contraria

DEFINIZIONE **PROBABILITÀ CONTRARIA**

La probabilità contraria di un evento è la probabilità dell'evento contrario.

In altre parole, la probabilità contraria di un evento A è la probabilità $P(\overline{A})$ che l'evento A non si verifichi.
Consideriamo un esempio. Qual è la probabilità che lanciando un dado non esca un numero multiplo di 3? Se indichiamo con A l'evento «esce un numero multiplo di 3», l'evento di cui si vuole calcolare la probabilità è $\overline{A}$, ossia l'evento contrario di A.
Si ha

$$A = \{3\,;6\} \qquad \text{e} \qquad \overline{A} = \{1\,;2\,;4\,;5\}$$

Pertanto, considerato che i casi possibili sono 6, risulta

$$p(A) = \frac{2}{6} \qquad \text{e} \qquad p(\overline{A}) = \frac{4}{6}$$

Osserva che si ha:

$$p(A) + p(\overline{A}) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = \frac{2+4}{6} \longrightarrow p(A) + p(\overline{A}) = 1$$

Che la somma delle due probabilità sia 1 non è un caso. Infatti i numeratori delle due frazioni (che volutamente non abbiamo semplificato) rappresentano i casi favorevoli di ciascuno dei due eventi. Poiché stiamo considerando un evento e il suo contrario, ogni elemento dello spazio dei risultati appartiene a uno e uno solo di questi due insiemi. Perciò la somma dei due numeratori è uguale al numero di casi possibili, ossia 6, che è proprio il numero che figura al denominatore delle due frazioni (**FIGURA 8**).
I ragionamenti svolti si potrebbero generalizzare, giustificando il seguente teorema.

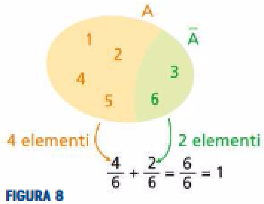


FIGURA 8

TEOREMA DELLA PROBABILITÀ CONTRARIA

La somma delle probabilità di un evento e del suo contrario è 1.

In simboli si ha

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1$$

da cui si ottiene

$$\boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$$

ossia, come si usa dire, la probabilità dell'evento $\overline{A}$, contrario di A, è il *complemento a* 1 della probabilità di A.

ESEMPIO

Calcoliamo la probabilità che estraendo una carta da un mazzo di 40, questa non sia una figura rossa.

Se indichiamo con A l'evento «estrazione di una figura rossa», l'evento di cui si richiede la probabilità è l'evento contrario $\overline{A}$. Cercheremo perciò di determinare la probabilità dell'evento A e poi applicheremo l'ultima formula.

- I risultati possibili sono 40, ciascuno dei quali corrisponde a una carta del mazzo.
- Le figure rosse del mazzo sono sei, tre di cuori e tre di quadri; quindi i casi favorevoli all'evento A sono 6, ciascuno dei quali corrisponde all'estrazione di una figura rossa.

Si ha perciò

$$p(A) = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$$

Si ottiene quindi

$$p(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{20} \longrightarrow p(\overline{A}) = \frac{17}{20}$$

10. Probabilità condizionata

Matematica e modelli: acquisto di tablet

Immaginiamo di lanciare due dadi. Qual è la probabilità che la somma dei punti usciti sia 9? Per rispondere a questa domanda bisogna analizzare lo spazio dei risultati, ossia l'insieme dei casi possibili. I possibili esiti del lancio di ciascuno dei due dadi sono 6: vi sono quindi $6 \cdot 6 = 36$ combinazioni possibili. Nella **TABELLA 1**, in corrispondenza di ciascuna combinazione è riportata la somma dei punti.

TABELLA 1

dado 2 \ dado 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

TABELLA 2

dado 2 \ dado 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Come si vede i risultati possibili sono 36, e di questi 4 verificano l'evento A «la somma dei numeri usciti è 9». Si ha quindi

$$p(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Supponiamo ora di lanciare un dado per volta e, dopo aver visto che sul primo dado è uscito il numero 3, ripetiamoci la domanda: qual è la probabilità che la somma dei numeri usciti sia 9? Ora abbiamo un'informazione che prima ci mancava e che potrebbe dunque cambiare la valutazione della probabilità. In effetti l'insieme dei risultati possibili non contiene più 36 elementi, ma solo i 6 elementi della colonna evidenziata in **TABELLA 2**, corrispondente all'uscita del numero 3 sul primo dado; di questi 6 possibili risultati, uno solo verifica l'evento A, la cui probabilità è quindi $\frac{1}{6}$.

DEFINIZIONE **PROBABILITÀ CONDIZIONATA**

Si chiama probabilità dell'evento A condizionata o *subordinata* all'evento aleatorio B, e si indica con $p(A/B)$, la probabilità che si verifichi l'evento A nell'ipotesi che si verifichi l'evento B.

PROBABILITÀ INCONDIZIONATA

A volte, per evitare possibilità di confusione, $p(A)$ è detta **probabilità incondizionata** dell'evento A, per distinguerla dalla probabilità condizionata $p(A/B)$.

Riprendendo l'esempio precedente, se indichiamo con B l'evento «sul primo dado esce 3», la probabilità dell'evento A «la somma dei numeri usciti è 9», condizionata all'evento B, si indica con $p(A/B)$ e si ha

$$p(A/B) = \frac{1}{6}$$

In pratica, per calcolare $p(A/B)$ si considerano un «nuovo» spazio dei risultati, che consiste nell'insieme B (nel nostro esempio gli elementi della colonna evidenziata in **TABELLA 2**), e un nuovo evento, costituito dagli elementi di A che appartengono a B, ossia $A \cap B$. Se indichiamo con n_B e $n_{A \cap B}$ rispettivamente il numero degli elementi di B e di $A \cap B$ si ha allora

$$p(A/B) = \frac{n_{A \cap B}}{n_B}$$

Dividendo numeratore e denominatore per il numero n degli elementi dello spazio degli eventi «originale» si ha

$$p(A/B) = \frac{\frac{n_{A \cap B}}{n}}{\frac{n_B}{n}}$$

Come puoi osservare, in questa frazione il numeratore $\frac{n_{A \cap B}}{n}$ rappresenta la probabilità dell'evento $A \cap B$, mentre il denominatore $\frac{n_B}{n}$ è la probabilità dell'evento B. Vale perciò il seguente teorema.

TEOREMA DELLA PROBABILITÀ CONDIZIONATA

La probabilità condizionata $p(A/B)$ è uguale al rapporto tra $p(A \cap B)$ e $p(B)$.

In simboli si ha

$$\boxed{p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}}$$

ESEMPIO

Calcoliamo la probabilità che estraendo una carta da un mazzo di 40, questa sia una figura, sapendo che la carta estratta è rossa.

L'esperimento che dobbiamo esaminare è l'estrazione di una carta da un mazzo di 40. Lo spazio dei risultati contiene quindi 40 elementi, ciascuno dei quali corrisponde a una carta del mazzo. Consideriamo gli eventi

- A: «la carta estratta è una figura»
- B: «la carta estratta è rossa»

Dobbiamo calcolare $p(A/B)$. L'insieme $A \cap B$ è costituito dalle figure rosse e contiene quindi 6 elementi, perciò $p(A \cap B) = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$, mentre l'insieme B è costituito dalle carte rosse e contiene 20 elementi, dunque $p(B) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$. Si ha quindi

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \longrightarrow p(A/B) = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{2}} \longrightarrow p(A/B) = \frac{3}{10}$$

PER APPROFONDIRE

Nella definizione di probabilità condizionata abbiamo supposto che B sia un evento aleatorio, cioè diverso dall'evento impossibile e dall'evento certo. Vediamo il perché.

- Se B è l'evento impossibile, non ha senso chiedersi qual è la probabilità che si verifichi l'evento A nell'ipotesi che si verifichi l'evento B, perché tale ipotesi non si può realizzare.
- Nel caso che B sia l'evento certo, la probabilità che si verifichi A nell'ipotesi del verificarsi di B è la probabilità incondizionata di A:

$$p(A/B) = p(A)$$

11. Eventi dipendenti, eventi indipendenti

Abbiamo visto che se si lanciano due dadi, la probabilità dell'evento A «la somma dei numeri usciti è 9», nel caso che si sia verificato l'evento B «sul primo dado esce 3», è $p(A/B) = \frac{1}{6}$.

Domandiamoci ora: qual è la probabilità che la somma dei numeri usciti sia 9 nel caso che sul primo dado **non** sia uscito 3? Si tratta di calcolare $p(A/\overline{B})$: ripetendo i ragionamenti che abbiamo fatto osservando la **TABELLA 2**, puoi renderti conto che $p(A/\overline{B}) = \frac{1}{10}$; pertanto si ha

$$p(A/B) \neq p(A/\overline{B})$$

ossia la probabilità dell'evento A dipende dal verificarsi o no dell'evento B.
Invece, estraendo una carta da un mazzo di 40, la probabilità che sia una figura è $\frac{3}{10}$ sia nel caso che sia stata estratta una carta rossa sia nel caso che non sia stata estratta una carta rossa; pertanto in questo caso si ha

$$p(A/B) = p(A/\overline{B})$$

ossia in questo caso la probabilità dell'evento A non dipende dal verificarsi o no dell'evento B.

DEFINIZIONE EVENTI INDIPENDENTI

Si dice che l'evento A è stocasticamente indipendente (o semplicemente *indipendente*) dall'evento B se la probabilità dell'evento A non dipende dal verificarsi o no dell'evento B.

In altri termini l'evento A è indipendente dall'evento B se risulta

$$p(A/B) = p(A/\overline{B})$$

Invece, nel caso che la probabilità di A dipenda dal verificarsi dell'evento B, ossia se $p(A/B) \neq p(A/\overline{B})$, si dice che l'evento A è **dipendente** dall'evento B.
Si può dimostrare che

- **l'evento A è indipendente dall'evento B se e solo se l'evento B è indipendente dall'evento A.**

Per tale motivo si parla solitamente di *eventi indipendenti*, senza specificare quale dei due eventi sia indipendente dall'altro. Analogamente si parla di *eventi dipendenti*.
Inoltre, si può dimostrare che

- **A e B sono eventi indipendenti se e solo se si ha $p(A) = p(A/B)$.**

Quindi se i due eventi sono indipendenti non è necessario ricorrere al concetto di probabilità condizionata, perché questa è uguale alla probabilità incondizionata.

ESEMPIO

Si estrae una carta da un mazzo di 40; quale dei seguenti eventi è indipendente dall'evento A «la carta estratta è un Re»?

a. B: «la carta estratta è rossa»
b. C: «la carta estratta è una figura»

a. In un mazzo di 40 carte, 20 sono rosse e 20 sono nere. Perciò la probabilità incondizionata di B, ossia la probabilità di estrarre una carta rossa, è

$$p(B) = \frac{1}{2}$$

Supponiamo che la carta estratta sia un Re: possiamo calcolare $p(B/A)$ applicando la formula della probabilità condizionata, ma è più semplice considerare che i Re presenti nel mazzo sono quattro, di cui due rossi e due neri, e perciò $p(B/A)$, ossia la probabilità che estraendo un Re, questo sia rosso, è

$$p(B/A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Si ha perciò $p(B/A) = p(B)$ e quindi gli eventi A e B sono indipendenti.

b. In un mazzo di 40 carte vi sono 12 figure. Perciò la probabilità incondizionata di C è

$$p(C) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

Se è noto che la carta estratta è un Re, è certamente vero che la carta estratta è una figura. Perciò la probabilità che, estraendo un Re, questo sia una figura è

$$p(C/A) = 1$$

Essendo $p(C/A) \neq p(C)$ si può affermare che gli eventi A e C non sono indipendenti.

12. Probabilità composta

DEFINIZIONE PROBABILITÀ COMPOSTA

Si dice probabilità composta di due o più eventi la probabilità della loro intersezione.

In altre parole la probabilità composta di due eventi A e B è $p(A \cap B)$, ossia è la probabilità che si verifichino entrambi gli eventi.
Per ottenere una formula che consenta di calcolare la probabilità composta, riscriviamo la formula della probabilità condizionata, scambiando A e B:

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Moltiplicando entrambi i membri per $p(A)$ si ottiene

$$\boxed{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)}$$

Vale perciò il seguente teorema.

TEOREMA DELLA PROBABILITÀ COMPOSTA

La probabilità composta di due eventi è il prodotto della probabilità del primo per la probabilità del secondo evento condizionata al verificarsi del primo.

Osserva che se i due eventi considerati sono indipendenti, si ha $p(B/A) = p(B)$, e perciò la formula appena vista assume una forma più semplice:

$$\boxed{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \qquad (A \text{ e } B \text{ indipendenti})}$$

TEOREMA DELLA PROBABILITÀ COMPOSTA DI EVENTI INDIPENDENTI

La probabilità composta di due eventi indipendenti è il prodotto delle loro probabilità.

Le due formule viste si possono generalizzare all'intersezione di tre o più eventi. Nel caso della probabilità di tre eventi, si ha

$$p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B/A) \cdot p(C/(A \cap B))$$

Il terzo fattore che figura in questa formula, $p(C/(A \cap B))$, rappresenta la probabilità dell'evento C nel caso che si verifichino sia A sia B.
In particolare, se A, B, C sono eventi a due a due indipendenti si ha

$$p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C)$$

OSSERVAZIONE

Per stabilire se due eventi sono dipendenti o indipendenti non è in genere necessario verificare una delle relazioni viste nel precedente paragrafo, in quanto solitamente la dipendenza o indipendenza dei due eventi può essere stabilita sulla base di semplici considerazioni sulla natura degli eventi considerati.

ESEMPIO

Da un'urna che contiene otto palline, di cui tre rosse e cinque blu, se ne estraggono due. Calcoliamo la probabilità di estrarre due palline blu nei casi seguenti:

a. la prima pallina viene reinserita nell'urna prima di procedere alla seconda estrazione;

b. la prima pallina non viene reinserita nell'urna prima di procedere alla seconda estrazione.

I due eventi da considerare sono

A: la prima pallina estratta è blu

B: la seconda pallina estratta è blu

e l'evento di cui dobbiamo calcolare la probabilità è $A \cap B$.

a. Se la prima pallina estratta viene reinserita nell'urna, le composizioni dell'urna alla prima e alla seconda estrazione sono identiche e quindi il colore della prima pallina estratta non influisce sull'esito della seconda estrazione. I due eventi sono indipendenti; considerando che vi sono otto esiti ugualmente possibili, uno per ciascuna pallina contenuta nell'urna, e di questi otto, cinque sono favorevoli sia all'evento A sia all'evento B, si ha $p(A) = p(B) = \frac{5}{8}$; si ottiene

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \longrightarrow p(A \cap B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow p(A \cap B) = \frac{25}{64} \simeq 0{,}391$$

b. Se la prima pallina estratta non viene reinserita nell'urna, la composizione dell'urna nella seconda estrazione è diversa da quella che era nella prima estrazione; quindi il colore della prima pallina estratta influisce sull'esito della seconda estrazione. I due eventi sono dipendenti, quindi la probabilità da calcolare è $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$.
Per calcolare $p(A)$ consideriamo che nella prima estrazione vi sono otto esiti ugualmente possibili, uno per ciascuna pallina contenuta nell'urna, e di questi, cinque sono favorevoli all'evento A: si ha $p(A) = \frac{5}{8}$.

Per calcolare $p(B/A)$ dobbiamo supporre che si sia verificato l'evento A. Quindi, alla seconda estrazione, nell'urna sono rimaste 7 palline, di cui 4 sono blu. Si ha perciò $p(B/A) = \frac{4}{7}$ e si ottiene

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \longrightarrow p(A \cap B) = \frac{5}{14} \simeq 0{,}357$$

13. Applicazione dei teoremi sulla probabilità

I teoremi esposti nei paragrafi precedenti consentono di calcolare la probabilità di eventi complessi composti da eventi più semplici di cui sia nota la probabilità.
A tale scopo, per sapere quale teorema utilizzare, è utile analizzare la proposizione che descrive l'evento, ricordando che al connettivo logico di disgiunzione (*vel*, ossia «oppure») corrisponde l'unione tra eventi, mentre al connettivo logico di congiunzione (*et*) corrisponde l'intersezione tra eventi. Dunque in presenza di una disgiunzione occorrerà applicare il **TEOREMA DELLA PROBABILITÀ TOTALE**, facendo attenzione a distinguere il caso di eventi compatibili da quello di eventi incompatibili, mentre in presenza di una congiunzione si applicherà il **TEOREMA DELLA PROBABILITÀ COMPOSTA**, distinguendo il caso di eventi dipendenti da quello di eventi indipendenti.

Talvolta si rivela utile l'utilizzo del **TEOREMA DELLA PROBABILITÀ CONTRARIA**, in quanto in alcuni casi risulta più semplice calcolare la probabilità dell'evento contrario piuttosto che quella dell'evento considerato.

ESEMPI

1 Si lanciano cinque dadi. Calcoliamo la probabilità che, su almeno uno di essi, esca il 6.

L'evento di cui si deve calcolare la probabilità è

E: esce il 6 su almeno un dado

In questo caso è più semplice calcolare la probabilità dell'evento contrario:

$\overline{E}$: il 6 non esce su alcun dado

e quindi applicare il **TEOREMA DELLA PROBABILITÀ CONTRARIA** determinando $p(E) = 1 - p(\overline{E})$.

L'evento $\overline{E}$ è l'intersezione di 5 eventi:

- E_1: il 6 non esce sul primo dado
- E_2: il 6 non esce sul secondo dado

...

Questi eventi sono ovviamente indipendenti tra loro, perché l'esito del lancio di un dado non può influenzare l'esito del lancio degli altri, e la probabilità di ciascuno di essi è $\frac{5}{6}$.

Si ha quindi

$$p(\overline{E}) = p(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5) = p(E_1) \cdot p(E_2) \cdot p(E_3) \cdot p(E_4) \cdot p(E_5) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow p(\overline{E}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

Per il **TEOREMA DELLA PROBABILITÀ CONTRARIA** si ha perciò

$$p(E) = 1 - p(\overline{E}) \longrightarrow p(E) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 \simeq 0{,}6$$

Possiamo perciò affermare che, lanciando cinque dadi, la probabilità che su almeno uno di essi esca il 6 è circa 0,6.

2 In una fabbrica meccanica vi sono due macchinari che producono viti dello stesso tipo. Il primo macchinario produce il 5% di viti difettose, il secondo produce il 3% di viti difettose. I due macchinari contribuiscono rispettivamente per il 60% e per il 40% alla produzione complessiva. Calcoliamo la probabilità che una vite sia difettosa.

L'evento di cui si chiede la probabilità può essere così descritto: la vite è stata prodotta dal primo macchinario ed è difettosa oppure è stata prodotta dal secondo macchinario ed è difettosa. In simboli, posto

M_1: la vite è stata prodotta dal primo macchinario
M_2: la vite è stata prodotta dal secondo macchinario
D: la vite è difettosa

l'evento di cui si chiede la probabilità è quindi

$$E = (M_1 \cap D) \cup (M_2 \cap D)$$

Ed è l'unione dei due eventi $M_1 \cap D$ e $M_2 \cap D$, ossia

$M_1 \cap D$: la vite è stata prodotta dal primo macchinario ed è difettosa
$M_2 \cap D$: la vite è stata prodotta dal secondo macchinario ed è difettosa

Questi eventi sono incompatibili, perché la vite non può essere stata prodotta da entrambi i macchinari. Dunque applicheremo il **TEOREMA DELLA PROBABILITÀ TOTALE DI EVENTI INCOMPATIBILI**:

$$p(E) = p(M_1 \cap D) + p(M_2 \cap D)$$

Per calcolare la probabilità di $M_1 \cap D$ e di $M_2 \cap D$ applicheremo il **TEOREMA DELLA PROBABILITÀ COMPOSTA** tenendo presente che la probabilità che la vite sia difettosa dipende dal macchinario che l'ha prodotta, e quindi ci troviamo in presenza di eventi dipendenti:

$$p(M_1 \cap D) = p(M_1) \cdot p(D/M_1) \qquad p(M_2 \cap D) = p(M_2) \cdot p(D/M_2)$$

Quindi è

$$p(E) = p(M_1 \cap D) + p(M_2 \cap D) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow p(E) = p(M_1) \cdot p(D/M_1) + p(M_2) \cdot p(D/M_2)$$

In base ai dati si ha

$$p(M_1) = 60\% = \frac{60}{100} \qquad p(M_2) = 40\% = \frac{40}{100}$$

$p(D/M_1) = 5\% = \frac{5}{100}$ (probabilità che una vite prodotta dalla prima macchina sia difettosa)

$p(D/M_2) = 3\% = \frac{3}{100}$ (probabilità che una vite prodotta dalla seconda macchina sia difettosa)

Possiamo infine calcolare la probabilità richiesta:

$$p(E) = p(M_1) \cdot p(D/M_1) + p(M_2) \cdot p(D/M_2) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow p(E) = \frac{60}{100} \cdot \frac{5}{100} + \frac{40}{100} \cdot \frac{3}{100} \longrightarrow p(E) = \frac{21}{500} = 4{,}2\%$$

PER COMPRENDERE MEGLIO

Per determinare rapidamente la formula con cui calcolare la probabilità di un evento complesso, come quello esaminato nell'ultimo esempio, possiamo procedere così:

a. Scriviamo l'evento facendo uso dei simboli delle operazioni insiemistiche. In questo caso, come abbiamo visto:

$$E = (M_1 \cap D) \cup (M_2 \cap D)$$

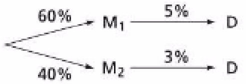
b. All'unione di due eventi incompatibili facciamo corrispondere la somma delle loro probabilità; all'intersezione di due eventi facciamo corrispondere il prodotto delle loro probabilità. Schematicamente:

$$E = (M_1 \cap D) \cup (M_2 \cap D)$$

$$p(E) = p(M_1 \cap D) + p(M_2 \cap D)$$

$$p(E) = p(M_1) \cdot p(D/M_1) + p(M_2) \cdot p(D/M_2)$$

È possibile anche schematizzare l'evento mediante un diagramma ad albero come quello a lato.



Su ogni ramo si riporta la sua probabilità di «essere percorso», quindi il 60% è la probabilità che porta a M_1, ossia che la vite sia prodotta da M_1, il 5% è la probabilità che la vite sia difettosa se è stata prodotta da M_1, e così via.

Matematica nella storia: le origini del calcolo delle probabilità

Per ogni «cammino», la probabilità che la vite sia difettosa se è stata prodotta da una certa macchina è data dal prodotto delle probabilità relative a ciascun ramo di quel «cammino».
Per calcolare la probabilità richiesta basta sommare i prodotti delle probabilità di ciascuno dei «cammini» che portano al realizzarsi dell'evento «vite difettosa».

La lotteria della MAT Cola

Soluzione del problema di pag. 469

Qual è la probabilità di vincere un premio comprando una MAT Cola? Quale può essere un premio ragionevole secondo gli ideatori dell'iniziativa?

All'inizio del capitolo ci siamo chiesti qual è la probabilità di vincere un premio comprando una confezione da tre bottiglie di MAT Cola in cui sotto ogni tappo ci siano rispettivamente una M, una A e una T.
Per rispondere, innanzitutto è necessario sapere quali sono le possibili combinazioni di lettere in una confezione, cioè bisogna conoscere quali sono i casi possibili, e poi occorre contare, tra questi, quelli in cui sono presenti una M, una A e una T, cioè bisogna contare i casi favorevoli. Possiamo valutare questi casi costruendo un diagramma, in cui a ogni riga corrisponde l'apertura di una bottiglietta.

FIGURA 9

FIGURA 10

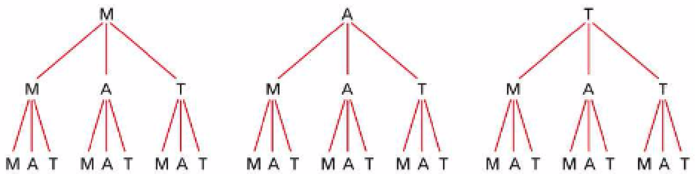


FIGURA 11

Dallo schema possiamo osservare che le possibili combinazioni sono 27:

MMM	MMA	MMT	MAM	MAA	**MAT**	MTM	**MTA**	MTT
AMM	AMA	**AMT**	AAM	AAA	AAT	**ATM**	ATA	ATT
TMM	**TMA**	TMT	**TAM**	TAA	TAT	TTM	TTA	TTT

In rosso abbiamo evidenziato le triplette vincenti, cioè quelle che contengono le tre lettere.
Dunque i casi favorevoli sono sei, mentre quelli totali sono ventisette. Questo ci permette di calcolare la probabilità di vincere:

$$p_{MAT} = \frac{6}{27} = 0,22$$

Si tratta di una probabilità piuttosto alta per un concorso a premi, visto che corrisponde a più di una vittoria ogni cinque tentativi!
All'inizio del capitolo ci siamo chiesti anche quale possa essere un premio ragionevole secondo gli ideatori della promozione.

Con i dati che hai a disposizione finora non puoi rispondere.
Aggiungiamo perciò due informazioni: una confezione di MAT Cola costa 4 euro, di cui è stato deciso che 0,50 euro debbano servire per coprire il costo del premio.

Poiché un acquirente vince ogni $\frac{1}{0,22} = 4,54$ volte, non è ragionevole offrire un premio che vada oltre il valore di € $(4,54 \cdot 0,50) =$ € $2,27$, altrimenti la MAT Cola rischierebbe di andare in perdita e l'iniziativa promozionale sarebbe un fallimento. Premi opportuni potrebbero essere, ad esempio, una o due bottigliette omaggio, un portachiavi...
Se volessimo offrire un premio di valore maggiore dovremmo rendere la vittoria più difficile, e quindi diminuire la probabilità di trovare una M, una A e una T. Ad esempio, potremmo mettere sotto i tappi tutte le lettere dell'alfabeto.
In questo caso, come potrai verificare svolgendo l'**ESERCIZIO 1**, il premio può essere ben più consistente: ci sarebbero abbastanza soldi a disposizione per mettere in palio, ad esempio, un tablet e uno smartphone di ultimissima generazione.
Indubbiamente, in sé questa è una prospettiva di vincita ben più allettante, ma... qualsiasi consumatore si rende conto perfettamente che se un concorso mette in palio due lattine oppure un'accoppiata tablet + smartphone, le possibilità di vincita non possono essere le stesse.
Dunque si fa strada un'importante domanda per il responsabile marketing della MAT Cola: qual è l'iniziativa promozionale più efficace? Mettere in palio un premio economico, ma facile da vincere, oppure un premio prestigioso, che però è molto più improbabile conquistare?
La risposta non è affatto scontata ed esige un'analisi accurata. Ma il responsabile marketing della MAT Cola è un manager in gamba e anche stavolta non sbaglierà il colpo...

ESERCIZI

1 Utilizzando le 26 lettere dell'alfabeto latino, quale sarebbe la probabilità di trovare una M, una A e una T? Che valore potrebbe avere il premio? [0,00034; 1460 euro]

2 Un'altra possibilità per rendere più difficile vincere è quella di inserire le diverse lettere in proporzioni diverse. Quale sarebbe la probabilità di vittoria se venissero inserite ogni cinque bottigliette una M, due A e due T? [0,19]

Teoria.zip — Calcolo delle probabilità

Concetti fondamentali

- **Spazio dei risultati**: insieme di tutti i possibili esiti di una prova (ossia di un esperimento o di un'osservazione).
- **Evento**: ogni sottoinsieme dello spazio dei risultati S. L'**evento certo** è lo stesso spazio dei risultati S, l'**evento impossibile** è l'insieme vuoto $\varnothing$; ogni altro evento si dice **aleatorio**. Ogni sottoinsieme di S contenente un solo elemento è un **evento elementare**.
- **Evento ripetibile**: evento che si riferisce a un esperimento o osservazione che può essere eseguito un numero indefinito di volte.
- **Frequenza** di un evento ripetibile: rapporto tra il numero di prove in cui si verifica l'evento e il numero di prove eseguite.

Eventi e probabilità

- **Probabilità di un evento**: rapporto tra il numero di casi favorevoli all'evento e il numero di casi possibili.
- **Unione di eventi**: evento che si verifica se e solo se si verifica almeno uno degli eventi dati. L'unione di due eventi A e B si indica con $A \cup B$.
- **Intersezione di eventi**: evento che si verifica se e solo se si verificano tutti gli eventi dati. L'intersezione di due eventi A e B si indica con $A \cap B$.
- **Evento contrario**: evento che si verifica se e solo se non si verifica l'evento dato. L'evento contrario di un evento A si indica con $\overline{A}$.
- **Eventi compatibili**: due eventi che si possono verificare contemporaneamente, ossia in una stessa prova. Se due eventi non si possono verificare contemporaneamente si dicono **incompatibili**.

SpiegaMatica: probabilità

Teoremi sulla probabilità

- **Probabilità totale**
  La probabilità dell'unione di due eventi A e B è

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) \text{ se i due eventi sono incompatibili}$$
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \text{ se i due eventi sono compatibili}$$

- **Probabilità contraria**
  La probabilità dell'evento $\overline{A}$, contrario dell'evento A, è $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
- **Probabilità condizionata**
  È la probabilità che si verifichi l'evento A nell'ipotesi che si verifichi l'evento B: $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.
- **Eventi dipendenti e indipendenti**
  Se la probabilità di un evento non dipende dal verificarsi di un altro evento si dice che i due eventi sono **indipendenti**. Se ciò non accade i due eventi si dicono **dipendenti**.
- **Probabilità composta**
  La probabilità dell'intersezione di due eventi A e B è $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$. Nel caso che i due eventi siano indipendenti è $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

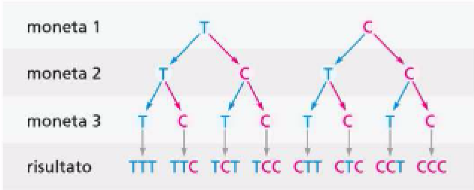
Capitolo 9 — Esercizi

Concetti fondamentali

Spazio dei risultati, eventi

ESERCIZIO SVOLTO

1 Si lanciano tre monete. Elenca gli elementi dello spazio dei risultati.



Osserva la figura a fianco: sulla prima moneta può uscire testa o croce (che indicheremo rispettivamente con T e C).
In corrispondenza di ciascuna di queste due possibilità vi sono due possibilità per la seconda moneta, per un totale di $2 \cdot 2 = 4$ possibilità.
In corrispondenza di ciascuna di queste quattro possibilità vi sono due possibilità per la terza moneta, per un totale di 8 possibilità.
Per elencare ciascuna di queste possibilità usiamo tre lettere, ognuna delle quali rappresenta l'esito del lancio di una moneta; per esempio TCT indica l'uscita di testa sulla prima moneta, croce sulla seconda e testa sulla terza.
Constatiamo dunque che lo spazio dei risultati S contiene 8 elementi:

$$S = \{TTT\,;\ TTC\,;\ TCT\,;\ TCC\,;\ CTT\,;\ CTC\,;\ CCT\,;\ CCC\}$$

2 Si lanciano quattro monete. Elenca gli elementi dello spazio dei risultati.

3 Si lanciano due dadi, ciascuno numerato da 1 a 6. Quanti elementi ha lo spazio dei risultati? [36]

4 Si lanciano due dadi a sei facce, contrassegnati in modo che, su ciascuno, due facce riportino il numero 1, due facce il numero 2 e due facce il numero 3. Elenca gli elementi dello spazio dei risultati.

5 Da un mazzo di carte si tolgono i quattro assi e, dopo averli mescolati, se ne estraggono due. Quanti elementi ha lo spazio dei risultati? [6]

6 In un'urna sono contenute 90 palline numerate; quelle con i numeri da 1 a 45 sono bianche, quelle con i numeri da 46 a 90 sono rosse. Stabilisci quali tra i seguenti eventi sono impossibili, aleatori o certi.

a. Si estrae una pallina rossa con un numero dispari.
b. Si estrae una pallina rossa con un numero minore di 10.
c. Si estrae una pallina bianca o con un numero maggiore di 10.
d. Si estrae una pallina bianca con un numero minore di 10.

▷▶ **7** Si lanciano due dadi, ciascuno numerato da 1 a 6. Stabilisci quali tra i seguenti eventi sono impossibili, aleatori o certi.

a. Escono due numeri dispari la cui somma è pari.

b. Escono due numeri pari la cui somma è dispari.

c. Escono un numero pari e un numero dispari.

d. Escono due numeri pari o almeno un numero dispari.

Eventi unici ed eventi ripetibili. Frequenza

VERO O FALSO?

▷▶ **8**

a. La frequenza dell'evento certo è 1. V F

b. Se la frequenza di un evento è 0, l'evento è impossibile. V F

c. La frequenza dell'evento impossibile è 0. V F

d. Se la frequenza di un evento è 1, l'evento è certo. V F

▷▶ **9** Quali tra i seguenti eventi sono unici e quali sono ripetibili?

	unico	ripetibile
a. L'esito del lancio di un dado.	☐	☐
b. L'esito dell'estrazione di una carta da un mazzo.	☐	☐
c. L'esito della finale dei 100 metri piani alle Olimpiadi.	☐	☐
d. L'esito dell'estrazione del Superenalotto.	☐	☐
e. La tua promozione agli scrutini finali.	☐	☐

▷▶ **10** Lancia un dado per 50 volte e riassumi gli esiti dei lanci nella seguente tabella.

esito	1	2	3	4	5	6
numero di successi						
frequenza						

▷▶ **11** Lancia una coppia di dadi per 50 volte, calcolando la somma dei punti mostrati dalle facce, e riassumi gli esiti dei lanci nella seguente tabella.

esito	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
numero di successi											
frequenza											

▷▶ **12** Calcola la frequenza dell'uscita del numero 47 sulla ruota di Napoli nelle ultime 30 estrazioni del Lotto (cerca i dati in Internet).

Eventi e probabilità

Probabilità di un evento

▷▶ **13** Calcola la probabilità che lanciando un dado esca un numero multiplo di 3. $\left[\frac{1}{3}\right]$

▷▶ **14** In un'urna sono contenute 90 palline numerate da 1 a 90. Calcola la probabilità di estrarre

a. un numero dispari $\left[\frac{1}{2}\right]$ **b.** un multiplo di 3 $\left[\frac{1}{3}\right]$

c. un multiplo di 25 $\left[\frac{1}{30}\right]$ **d.** un numero con le due cifre uguali $\left[\frac{4}{45}\right]$

▷▶ **15** Calcola la probabilità che estraendo una carta da un mazzo di 40, questa sia nera con un numero da 2 a 7. $\left[\frac{3}{10}\right]$

▷▶ **16** Calcola la probabilità che estraendo una carta da un mazzo di 40, su questa sia rappresentato un numero dispari (considera gli assi come carte con il numero 1 e ricorda che sulle figure non sono riportati numeri). $\left[\frac{2}{5}\right]$

▷▶ **17** Calcola la probabilità che estraendo una carta da un mazzo di 52, su questa sia rappresentato un numero pari (sulle figure non sono riportati numeri). $\left[\frac{5}{13}\right]$

▷▶ **18** In un'urna sono contenute 90 palline numerate; quelle con i numeri da 1 a 45 sono bianche, quelle con i numeri da 46 a 90 sono rosse. Calcola la probabilità che estraendo una pallina, questa sia rossa e con un numero dispari. $\left[\frac{11}{45}\right]$

ESERCIZIO SVOLTO

▷▶ **19** Si lanciano tre monete. Calcola la probabilità che escano due teste e una croce.

Nell'**ESERCIZIO SVOLTO 1** abbiamo elencato gli 8 elementi dello spazio dei risultati, ossia gli 8 esiti possibili. Tra questi, quelli che verificano l'evento E «uscita di due teste e una croce» sono tre, e precisamente TTC, TCT, CTT.

Dunque la probabilità richiesta è $\frac{3}{8}$.

▷▶ **20** Si lanciano tre monete. Calcola la probabilità che escano almeno due teste. $\left[\frac{1}{2}\right]$

▷▶ **21** Si lanciano tre monete. Calcola la probabilità che escano tre croci. $\left[\frac{1}{8}\right]$

▷▶ **22** Si lanciano quattro monete. Calcola la probabilità che escano due teste e due croci. $\left[\frac{3}{8}\right]$

▷▶ **23** Si lanciano quattro monete. Calcola la probabilità che escano almeno due teste. $\left[\frac{11}{16}\right]$

▷▶ **24** Si lanciano due dadi. Calcola la probabilità che la somma dei punti sia 4. $\left[\frac{1}{12}\right]$

▷▶ **25** Si lanciano due dadi. Calcola la probabilità che la somma dei punti sia minore di 5. $\left[\frac{1}{6}\right]$

▷▶ **26** Si lanciano due dadi. Calcola la probabilità che 1 non esca su alcun dado. $\left[\frac{25}{36}\right]$

▷▶ **27** Si lanciano due dadi. Calcola la probabilità che escano due numeri pari. $\left[\frac{1}{4}\right]$

▷▶ **28** Il professore di matematica sceglie a caso uno studente da interrogare con questo sistema: apre a caso un libro di 300 pagine e somma le cifre del numero della pagina trovata, quindi chiama lo studente il cui numero sul registro corrisponde al numero così determinato. Qual è la probabilità che sia interrogato lo studente a cui è associato il numero 1? $\left[\frac{1}{100}\right]$

▷▶ **29** Alberto e Beatrice sono nati in un anno non bisestile. Qual è la probabilità che i loro compleanni cadano nello stesso giorno? $\left[\frac{1}{365}\right]$

LA ROULETTE

Nel gioco della roulette una pallina viene lanciata in una sorta di scodella contenente un disco in rotazione. Il disco è suddiviso in 37 settori numerati da 0 a 36; lo zero è colorato in verde mentre gli altri numeri sono colorati in rosso o in nero. Il settore in cui si ferma la pallina determina il numero vincente.

Vi sono diversi modi di giocare, puntando su un apposito tabellone.

- *Plein*: si punta su un singolo numero.
- *Cheval*: si punta su una coppia di numeri adiacenti nel tabellone.
- *Transversale*: si punta sui tre numeri di una riga del tabellone.
- *Carré*: si punta su quattro numeri adiacenti nel tabellone.
- *Douzaine*: si punta sui numeri di una stessa dozzina (da 1 a 12 oppure da 13 a 24 oppure da 25 a 36).
- *Colonne*: si punta sui numeri di una stessa colonna del tabellone.
- *Pair/Impair*: si punta sui numeri pari o sui numeri dispari.
- *Manque/Passe*: si punta sui numeri da 1 a 18 (*manque*) o su quelli da 19 a 36 (*passe*).
- *Rouge/Noir*: si punta sui numeri rossi o su quelli neri.

30 Calcola la probabilità di vincere un *plein*, un *cheval*, un *transversale*. $\left[\frac{1}{37}; \frac{2}{37}; \frac{3}{37}\right]$

31 Calcola la probabilità di vincere un *carré*, una *douzaine*, una *colonne*. $\left[\frac{4}{37}; \frac{12}{37}; \frac{12}{37}\right]$

32 Calcola la probabilità di vincere un *pair*, un *manque*, un *rouge*. $\left[\frac{18}{37}; \frac{18}{37}; \frac{18}{37}\right]$

Probabilità e frequenza

33 Un'urna contiene 1200 palline, in parte rosse e in parte verdi. Se ne estraggono 60, di cui 36 risultano rosse e 24 verdi. Quante palline rosse e quante palline verdi ci sono nell'urna? [circa 720 rosse e 480 verdi]

34 Mario possiede un dado a 6 facce irregolare, a forma di tronco di piramide a basi quadrate, sulle cui facce sono scritti i numeri da 1 a 6. Lanciando il dado 600 volte ha annotato i risultati riportati in tabella.

faccia	1	2	3	4	5	6	totale
n. uscite	222	88	90	92	84	24	600

a. Qual è la probabilità che lanciando il dado esca 6? [4%]
b. Qual è la probabilità che esca un numero dispari? [66%]

35 Si lanciano due dadi e si calcola la somma dei punteggi usciti su ciascun dado. Calcola la probabilità di ciascuno degli esiti possibili. Verifica quindi la legge empirica del caso: lancia per cento volte una coppia di dadi e calcola la frequenza, assoluta e relativa, di ciascun esito, confrontando la frequenza relativa di ciascun esito con la rispettiva probabilità. **Simulazione del lancio di due dadi con il foglio elettronico**

Operazioni con gli eventi. Eventi compatibili

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

36 Individua l'affermazione vera fra le seguenti.
- **a** Se A è un evento e $\overline{A}$ il suo contrario, A e $\overline{A}$ sono incompatibili
- **b** Se A è un evento e $\overline{A}$ il suo contrario, $A \cup \overline{A}$ è l'evento impossibile
- **c** Se A è un evento e $\overline{A}$ il suo contrario, $A \cap \overline{A}$ è l'evento certo
- **d** Se A è un evento elementare, A e $\overline{A}$ sono compatibili

37 Si estraggono due palline da un'urna che ne contiene 10, di cui 5 verdi e 5 rosse.
a. Descrivi l'evento contrario di ciascuno dei seguenti eventi:
A: si estraggono due palline dello stesso colore; [si estraggono due palline di colori diversi]
B: si estraggono due palline rosse;
C: si estraggono due palline verdi.
b. Descrivi gli eventi $A \cup B$ e $A \cap C$. [$A \cup B$: si estraggono due palline dello stesso colore; $A \cap C = ...$]
c. Tra gli eventi $A \cup B$, $A \cup C$ e $B \cup C$ c'è l'evento certo? Se sì, qual è?
d. Tra gli eventi $A \cap B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ c'è l'evento impossibile? Se sì, qual è?

38 Si estrae una carta da un mazzo di 40. Considera i seguenti eventi:
A: si estrae una carta rossa B: si estrae una carta di fiori C: si estrae una figura
a. Descrivi i seguenti eventi: $B \cap C$, $B \cup C$, $(A \cup B) \cap C$, $\overline{A} \cap C$.
b. Tra i seguenti eventi c'è l'evento impossibile? Se sì, qual è?
$(A \cap C) \cup B$ $(B \cap C) \cup A$ $(A \cup B) \cap C$ $(A \cap B) \cup C$

Si lancia una coppia di dadi; considera i seguenti eventi:
A: escono due numeri uguali **B: la somma dei numeri usciti è 7**
C: escono due numeri dispari **D: escono due numeri diversi**

39 Quali tra i seguenti eventi sono aleatori, quali impossibili, quali certi?

	aleatorio	impossibile	certo
a. $A \cap B$	☐	☐	☐
b. $A \cap C$	☐	☐	☐
c. $D \cap \overline{C}$	☐	☐	☐
d. $A \cup D$	☐	☐	☐

40 Quali tra le seguenti coppie sono formate da eventi compatibili? Quali sono formate da eventi incompatibili?

	compatibili	incompatibili
a. A, C	☐	☐
b. B, C	☐	☐
c. C, D	☐	☐
d. B, D	☐	☐

I seguenti esercizi si riferiscono al gioco della roulette (pag. 496).

41 R è l'evento «vince un numero rosso». Qual è l'evento contrario? [vince un numero nero o lo zero]

42 D_3 è l'evento «vince un numero della terza dozzina». Qual è l'evento contrario? [vince un numero da 0 a 24]

43 Considera gli eventi R «vince un numero rosso» e N «vince un numero nero». Qual è l'evento $R \cup N$? E qual è l'evento contrario di $R \cup N$? [vince un numero diverso da zero; vince lo zero]

▷▶ **44** Considera gli eventi C_3 «vince un numero della terza colonna» e P «vince un numero pari». Qual è l'evento $C_3 \cap P$? [vince un numero multiplo di 6]

▷▶ **45** Considera gli eventi D_1 «vince un numero della prima dozzina» e M «vince un numero *manque*». Qual è l'evento $D_1 \cup M$? Qual è l'evento $D_1 \cap M$? [M; D_1]

▷▶ **46** Considera gli eventi D_1 «vince un numero della prima dozzina» e P «vince un numero *passe*». Qual è l'evento $D_1 \cap P$? [$\emptyset$]

Teoremi sulla probabilità

Probabilità totale

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

▷▶ **47** La probabilità che si verifichi almeno uno di due eventi dati è

- **a** minore della somma delle loro probabilità
- **b** minore o uguale alla somma delle loro probabilità
- **c** uguale alla somma delle loro probabilità
- **d** maggiore o uguale alla somma delle loro probabilità
- **e** maggiore della somma delle loro probabilità

ESERCIZIO SVOLTO

▷▶ **48** Si estrae una carta da un mazzo di 40. Calcolare la probabilità che sia un asso o una carta di cuori.

L'evento di cui si chiede la probabilità è l'unione dei due eventi seguenti:

A: viene estratto un asso

B: viene estratta una carta di cuori

Questi due eventi sono compatibili: infatti essi si verificano contemporaneamente se viene estratto l'asso di cuori. Dovremo perciò utilizzare la formula

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Per calcolare la probabilità dei vari eventi consideriamo che i casi possibili sono 40, uno per ciascuna carta del mazzo.

▶ Per l'evento A i casi possibili sono 4, quanti sono gli assi:

$$p(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

▶ Per l'evento B i casi possibili sono 10, quante sono le carte di cuori:

$$p(A) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

▶ Per l'evento $A \cap B$ che, come abbiamo detto, è «viene estratto l'asso di cuori», vi è un solo caso favorevole:

$$p(A \cap B) = \frac{1}{40}$$

Perciò si ha

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{10} + \frac{1}{4} - \frac{1}{40} \quad \longrightarrow \quad p(A \cup B) = \frac{13}{40}$$

▷▶ **49** Da un mazzo di 40 carte ne viene estratta una. Calcola la probabilità dei seguenti eventi:

la carta è nera   la carta è una figura   la carta è un asso
la carta non è un fante   la carta non è di quadri

Calcola quindi le probabilità dei seguenti eventi applicando l'opportuno teorema della probabilità totale:

a. la carta è nera o è una figura $\left[\frac{13}{20}\right]$ **b.** la carta è una figura o un asso $\left[\frac{2}{5}\right]$

c. la carta è una figura o non è un fante [1]   **d.** la carta è un asso o non è di quadri $\left[\frac{31}{40}\right]$

e. la carta è nera o non è un fante $\left[\frac{19}{20}\right]$

▷▶ **50** Da un'urna contenente 30 palline numerate da 1 a 30 ne viene estratta una. Calcola la probabilità dei seguenti eventi:

il numero estratto è pari   il numero estratto è multiplo di 3   il numero estratto è dispari
il numero estratto è multiplo di 9   il numero estratto è maggiore di 25

Applicando l'opportuno teorema della probabilità totale calcola poi le probabilità dei seguenti eventi:

a. il numero estratto è pari o multiplo di 3 $\left[\frac{2}{3}\right]$

b. il numero estratto è dispari o multiplo di 9 $\left[\frac{8}{15}\right]$

c. il numero estratto è dispari o maggiore di 25 $\left[\frac{3}{5}\right]$

d. il numero estratto è multiplo di 3 o multiplo di 9 $\left[\frac{1}{3}\right]$

e. il numero estratto è pari o maggiore di 25 $\left[\frac{17}{30}\right]$

▷▶ **51** Nel gioco della tombola si estrae un numero da 1 a 90. Calcola la probabilità che sia un numero pari o multiplo di 10. $\left[\frac{1}{2}\right]$

▷▶ **52** In una scatola ci sono 20 gettoni; 12 gettoni sono quadrati, di cui 8 rossi e 4 blu, e 8 gettoni sono rotondi, di cui 3 rossi e 5 verdi. Si estrae un gettone.

a. Qual è la probabilità di estrarre un gettone quadrato oppure verde? $\left[\frac{17}{20}\right]$

b. Qual è la probabilità di estrarre un gettone rotondo oppure rosso? $\left[\frac{4}{5}\right]$

c. Qual è la probabilità di estrarre un gettone blu o verde? $\left[\frac{9}{20}\right]$

▷▶ **53** Calcola la probabilità che nel gioco della roulette vinca un numero pari o dispari. $\left[\frac{36}{37}\right]$

▷▶ **54** Calcola la probabilità che nel gioco della roulette vinca lo zero o un numero rosso. $\left[\frac{19}{37}\right]$

▷▶ **55** Calcola la probabilità che nel gioco della roulette vinca un numero della prima dozzina o della prima colonna. $\left[\frac{20}{37}\right]$

Probabilità contraria

▷▶ **56** Calcola la probabilità che estraendo una carta da un mazzo di 40, questa non sia un asso nero (calcola la probabilità di estrarre un asso nero e quindi applica il teorema della probabilità contraria). $\left[\frac{19}{20}\right]$

▷▶ **57** Si lancia un dado; considera l'evento E: esce una faccia minore di 4. Qual è l'evento contrario? Applicando la definizione di probabilità calcola la probabilità di E e dell'evento contrario e verifica che la loro somma è 1. $\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

58 Da un mazzo di 40 carte se ne estrae una. Considera l'evento E: esce una carta di fiori; qual è l'evento contrario? Applicando la definizione di probabilità calcola la probabilità di E e dell'evento contrario e verifica che la loro somma è 1. $\left[\frac{1}{4};\ \frac{3}{4}\right]$

59 Un'urna contiene 30 palline numerate da 1 a 30; ne viene estratta una. Considera l'evento «il numero estratto è pari e multiplo di 5». Qual è l'evento contrario? Qual è la probabilità di entrambi? [0,1; 0,9]

60 Si lanciano tre monete. Dopo aver calcolato la probabilità che escano tre teste, applicando il teorema della probabilità contraria calcola la probabilità che esca almeno una croce. [0,875]

61 Si lanciano due dadi. Dopo aver calcolato la probabilità che la somma dei punteggi sia 2, applicando il teorema della probabilità contraria calcola la probabilità che la somma dei punteggi sia maggiore di 2. $\left[\frac{35}{36}\right]$

62 Si lanciano due dadi. Dopo aver calcolato la probabilità che nessuna delle due facce presenti il numero 1, applicando il teorema della probabilità contraria calcola la probabilità che almeno una faccia presenti il numero 1. $\left[\frac{11}{36}\right]$

Probabilità condizionata

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

63 La probabilità condizionata $p(A/B)$ è uguale a

a $\frac{p(A)}{p(B)}$ **b** $\frac{p(B)}{p(A \cap B)}$ **c** $\frac{p(A)}{p(A \cap B)}$ **d** $\frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ **e** $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

64 Si lancia un dado; sapendo che è uscito un numero dispari, qual è la probabilità che questo sia 3?

a 0 **b** $\frac{1}{6}$ **c** $\frac{1}{3}$ **d** $\frac{1}{2}$ **e** 1

ESERCIZIO SVOLTO

65 Si lanciano due dadi. Calcola la probabilità che la somma dei punti delle due facce uscite sia 7, sapendo che su una di esse è uscito 3.

Consideriamo gli eventi

A: la somma dei punti è 7 $\qquad$ B: in un dado è uscito 3

Dobbiamo calcolare

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

dado 2 \ dado 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Dalla tabella si vede che, su 36 casi ugualmente possibili, 11 verificano l'evento B (uscita del 3 in un dado) e 2 l'evento $A \cap B$ (uscita del 3 in un dado e somma dei punti uguale a 7). Si ha dunque

$$p(B) = \frac{11}{36} \quad \text{e} \quad p(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

La probabilità richiesta pertanto è

$$p(A/B) = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}} \longrightarrow p(A/B) = \frac{2}{11}$$

66 Si lanciano due dadi. Calcola la probabilità che su almeno una faccia sia uscito 3, sapendo che la somma dei punti delle due facce uscite è 7. $\left[\frac{1}{3}\right]$

67 Calcola la probabilità che estraendo una carta da un mazzo da 40, questa sia un asso, sapendo che non è una figura. (Se A è l'evento «si estrae un asso» e B è «non si estrae una figura», la probabilità richiesta è la probabilità condizionata $p(A/B)$.) $\left[\frac{1}{7}\right]$

68 Calcola la probabilità che estraendo una carta da un mazzo da 40, questa sia un asso, sapendo che non è una carta di fiori. $\left[\frac{1}{10}\right]$

69 Calcola la probabilità che lanciando due volte una moneta si abbiano due teste, sapendo che la prima volta è uscita testa. $\left[\frac{1}{2}\right]$

70 Si estraggono consecutivamente due carte da un mazzo di 40. Calcola la probabilità che la seconda carta estratta sia un asso, sapendo che la prima estratta è un 2. $\left[\frac{4}{39}\right]$

Eventi dipendenti, eventi indipendenti

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

ATTENZIONE! I seguenti quesiti possono avere più di una risposta corretta.

71 Da un mazzo di 40 carte ne viene estratta una. Dei seguenti eventi, quale è indipendente dall'evento «la carta è un re»?

a La carta è nera
b La carta è una figura (l'asso non si considera figura)
c La carta è un asso
d La carta non è un fante

72 Da un mazzo di 40 carte ne viene estratta una. Dei seguenti eventi, quali sono indipendenti dall'evento «la carta è di fiori»?

a La carta è nera
b La carta è una figura
c La carta è un asso
d La carta non è di cuori

73 Un'urna contiene 30 palline numerate da 1 a 30; le palline con un numero pari sono rosse, quelle con un numero dispari sono verdi. Dei seguenti eventi, quale è indipendente dall'evento «la pallina è rossa»?

a Il numero estratto è pari
b Il numero estratto è multiplo di 3
c Il numero estratto è dispari
d La pallina è verde
e Il numero estratto è maggiore di 25

74 Si lancia un dado. Dei seguenti eventi, quali sono indipendenti dall'evento «esce un numero minore o uguale a 4»?

a Esce un numero pari
b Esce un numero dispari
c Esce il 6
d Esce un numero minore o uguale a 3

75 Nel gioco della tombola si estrae un numero da 1 a 90. Dei seguenti eventi, quali sono indipendenti dall'evento «esce un numero pari»?

a Esce un multiplo di 10
b Esce un multiplo di 3
c Esce il 90
d Esce un numero minore o uguale a 50

Probabilità composta

ESERCIZI SVOLTI

76 Calcola la probabilità che lanciando quattro dadi non esca 3 su alcuno di essi.

L'evento E di cui si richiede la probabilità è intersezione di quattro eventi:

E_1: non esce 3 sul primo dado — E_2: non esce 3 sul secondo dado

E_3: non esce 3 sul terzo dado — E_4: non esce 3 sul quarto dado

Per ciascuno di questi eventi vi sono sei casi possibili di cui cinque favorevoli, corrispondenti alle cinque facce su cui è riportato un numero diverso da 3:

$$p(E_1) = p(E_2) = p(E_3) = p(E_4) = \frac{5}{6}$$

I quattro eventi sono indipendenti, perché l'esito del lancio di uno dei dadi non può modificare le probabilità degli esiti dei lanci degli altri tre dadi. Si ha perciò:

$$p(E) = p(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) = p(E_1) \cdot p(E_2) \cdot p(E_3) \cdot p(E_4) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \longrightarrow p(E) = 0{,}482\ldots$$

77 Calcola la probabilità che lanciando quattro dadi esca almeno un 3.

Conviene considerare l'evento contrario di quello di cui si chiede la probabilità; esso è l'evento E «non esce 3 su alcun dado», che abbiamo considerato nel precedente **ESERCIZIO SVOLTO 76**. Per il teorema della probabilità contraria si ha perciò:

$$p(\overline{E}) = 1 - p(E) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \longrightarrow p(\overline{E}) = 0{,}517\ldots$$

78 Calcola la probabilità che lanciando cinque dadi escano cinque 6. $\left[\frac{1}{7776}\right]$

79 Calcola la probabilità che lanciando cinque dadi non esca alcun 6; quindi, applicando il teorema della probabilità contraria, calcola la probabilità che esca almeno un 6. $\left[\frac{3125}{7776}; \frac{4651}{7776}\right]$

80 Calcola la probabilità che lanciando cinque monete escano cinque teste. $\left[\frac{1}{32}\right]$

81 Calcola la probabilità che lanciando cinque monete non esca alcuna testa; quindi, applicando il teorema della probabilità contraria, calcola la probabilità che esca almeno una testa. $\left[\frac{1}{32}; \frac{31}{32}\right]$

DIVERSI MODI DI ESTRARRE

Per risolvere l'esercizio seguente e molti altri dei successivi occorre sapere se, dopo ogni estrazione di una carta da un mazzo, si reinserisce nel mazzo la carta estratta prima di procedere all'estrazione successiva (*estrazione con reinserimento*) oppure non la si reinserisce (*estrazione senza reinserimento*).
Noi supporremo, salvo diverso avviso, che le estrazioni siano eseguite senza reinserimento, come del resto avviene in quasi tutti i giochi di carte e in altri giochi, come la tombola e il Lotto.

ESERCIZIO SVOLTO

82 Da un mazzo di 40 carte se ne estraggono 3. Calcola la probabilità che siano tutte e tre carte di fiori.

L'evento indicato è costituito dall'intersezione di tre eventi:

A: la prima carta estratta è di fiori — B: la seconda carta estratta è di fiori — C: la terza carta estratta è di fiori

Tali eventi sono dipendenti perché dopo un'estrazione la composizione del mazzo cambia, e dunque cambia la probabilità di estrarre una carta di fiori. Si ha perciò

$$p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B/A) \cdot p(C/(A \cap B))$$

Calcoliamo le probabilità dei tre eventi.

$p(A) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ perché i casi possibili sono 40, uno per ogni carta del mazzo, e i casi favorevoli sono 10, corrispondenti alle 10 carte di fiori

$p(B/A) = \frac{9}{39} = \frac{3}{13}$ perché se si è verificato A, nel mazzo sono rimaste 39 carte, di cui 9 sono di fiori

$p(C/(A \cap B)) = \frac{8}{38} = \frac{4}{19}$ perché se si sono verificati sia A sia B, nel mazzo sono rimaste 38 carte, di cui 8 sono di fiori

Si ha pertanto

$$p(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{4}{19} \longrightarrow p(A \cap B \cap C) = \frac{3}{243}$$

83 Calcola la probabilità che estraendo due carte da un mazzo di 40, queste siano due assi. $\left[\frac{1}{130}\right]$

84 Calcola la probabilità che estraendo due carte da un mazzo di 40, queste siano due carte di cuori. $\left[\frac{3}{52}\right]$

85 Calcola la probabilità che, estraendo cinque carte da un mazzo di 40, queste siano tutte carte di cuori. $[0{,}00038\ldots]$

86 Vi sono tre mazzi di 40 carte; si estrae una carta da ciascuno di essi. Calcola la probabilità di estrarre tre figure. $\left[\frac{27}{1000}\right]$

87 In una scatola vi sono 16 caramelle, di cui 5 sono alla menta. Tizio mangia 4 caramelle, estraendole a caso. Calcola la probabilità che le caramelle mangiate siano

a. tutte alla menta; $\left[\frac{1}{364}\right]$ **b.** nessuna alla menta; $\left[\frac{33}{182}\right]$

c. almeno una alla menta. $\left[\frac{149}{182}\right]$

88 Si lanciano tre monete. Calcola la probabilità di avere

a. tre teste; $[0{,}125]$

b. tre croci, sapendo che la prima è croce; $[0{,}25]$

c. almeno due teste sapendo che la prima è testa. $[0{,}75]$

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

89 Si estraggono due carte da un mazzo di 40, *senza reinserire* la carta estratta prima di procedere alla seconda estrazione. La probabilità che escano due re è

a 0 **b** $\frac{1}{9}$ **c** $\frac{1}{10}$ **d** $\frac{1}{100}$ **e** $\frac{1}{130}$

90 Si estraggono due carte da un mazzo di 40, *reinserendo* la carta estratta prima di procedere alla seconda estrazione. La probabilità che escano due re è

a 0 **b** $\frac{1}{9}$ **c** $\frac{1}{10}$ **d** $\frac{1}{100}$ **e** $\frac{1}{130}$

91 Un'urna contiene 24 palline di cui 6 rosse e 18 bianche. Si estraggono due palline *reinserendo* la prima pallina estratta prima di procedere alla seconda estrazione. Calcola la probabilità di estrarre

a. due palline rosse; $\left[\frac{1}{16}=0{,}0625\right]$ **b.** due palline bianche. $\left[\frac{9}{16}=0{,}5625\right]$

92 Un'urna contiene 24 palline di cui 6 rosse e 18 bianche. Si estraggono due palline *senza reinserire* la prima pallina estratta prima di procedere alla seconda estrazione. Calcola la probabilità di estrarre

a. due palline rosse; $\left[\frac{5}{92}=0{,}054...\right]$ **b.** due palline bianche. $\left[\frac{51}{92}=0{,}55...\right]$

Applicazione dei teoremi sulla probabilità

93 Calcola la probabilità che estraendo due carte da un mazzo di 40, tra queste vi sia almeno una carta di fiori. (*Suggerimento*: calcola prima la probabilità che nessuna delle due carte sia di fiori e quindi applica il teorema della probabilità contraria.) $\left[\frac{23}{52}\right]$

94 Un'urna contiene 10 palline, di cui 4 rosse e 6 verdi. Calcola la probabilità che, estraendone due, almeno una di esse sia verde. $\left[\frac{13}{15}\right]$

95 Calcola la probabilità che estraendo quattro carte da un mazzo di 40, tra queste vi sia almeno un asso. $\left[\frac{6497}{18\,278}\simeq 0{,}355\right]$

ESERCIZIO SVOLTO

96 Si lanciano tre dadi. Calcola la probabilità di ottenere 6 su uno e un solo dado.

Siano A_1, A_2, A_3 rispettivamente gli eventi «esce 6 sul primo dado», «esce 6 sul secondo dado», «esce 6 sul terzo dado». L'evento E di cui si chiede la probabilità si può così descrivere:

> «esce 6 sul primo dado e non esce 6 sul secondo dado e non esce 6 sul terzo dado, oppure non esce 6 sul primo dado ed esce 6 sul secondo dado e non esce 6 sul terzo dado, oppure non esce 6 sul primo dado e non esce 6 sul secondo dado ed esce 6 sul terzo dado»

In simboli:

$$E=(A_1\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}\cap A_2\cap\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap A_3)$$

I tre eventi A_1, A_2, A_3 sono evidentemente indipendenti: l'esito del lancio di uno dei tre dadi non può modificare le probabilità degli esiti del lancio degli altri; inoltre i tre eventi $A_1\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$, $\overline{A_1}\cap A_2\cap\overline{A_3}$ e $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap A_3$ sono incompatibili: se esce 6 solo sul primo dado (ossia se si verifica $A_1\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$) non è possibile che esca 6 solo sul secondo dado (ossia che si verifichi $\overline{A_1}\cap A_2\cap\overline{A_3}$) ecc.
Pertanto per calcolare la probabilità di E dobbiamo applicare i teoremi della probabilità composta per eventi indipendenti e della probabilità totale per eventi incompatibili, seguendo il seguente schema:

$$E=(A_1\cap\ \overline{A_2}\ \cap\ \overline{A_3})\ \cup\ (\overline{A_1}\ \cap\ A_2\ \cap\ \overline{A_3})\ \cup\ (\overline{A_1}\ \cap\ \overline{A_2}\ \cap\ A_3)$$
$$\downarrow$$
$$p(E)=p(A_1)\cdot p(\overline{A_2})\cdot p(\overline{A_3})+p(\overline{A_1})\cdot p(A_2)\cdot p(\overline{A_3})+p(\overline{A_1})\cdot p(\overline{A_2})\cdot p(A_3)$$

Si ha

$$p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=\frac{1}{6}\qquad\text{e}\qquad p(\overline{A_1})=p(\overline{A_2})=p(\overline{A_3})=\frac{5}{6}$$

e dunque è

$$p(E)=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\longrightarrow p(E)=\frac{25}{72}$$

Si può notare che i tre prodotti da sommare sono uguali tra loro, infatti i denominatori sono uguali e i numeratori si scambiano di posto. Per calcolare $p(E)$ basta allora moltiplicare il primo prodotto per 3.

Il primo prodotto rappresenta la probabilità di ottenere 6 sul primo dado e un risultato diverso da 6 sugli altri due. Il risultato 6 può aversi sul primo, sul secondo o sul terzo dado, cioè in tre modi diversi. Quindi per calcolare la probabilità richiesta basta calcolare la probabilità di ottenere 6 sul primo dado e un risultato diverso da 6 sugli altri due, e infine moltiplicare per 3 il prodotto ottenuto, perché il 6 ha tre modi possibili di comparire (1°, 2°, 3° dado).
Se i dadi fossero cinque la probabilità di ottenere 6 su uno e un solo dado sarebbe $p(E)=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot 5$ perché in questo caso il 6 ha cinque modi possibili di comparire (1°, 2°, 3°, 4°, 5° dado).

97 Si lanciano quattro dadi. Calcola la probabilità di ottenere 6 su uno e un solo dado. $\left[\frac{125}{324}\right]$

98 Si lanciano tre dadi. Calcola la probabilità di ottenere 6 esattamente su due dadi. $\left[\frac{5}{72}\right]$

99 Si estraggono due carte da un mazzo di 40. Calcola la probabilità che una e una sola sia una carta di quadri. $\left[\frac{5}{13}\right]$

100 Si estraggono tre carte da un mazzo di 40. Calcola la probabilità che una e una sola sia un asso. $\left[\frac{63}{247}\right]$

101 Si estraggono due carte da un mazzo di 40. Calcola la probabilità che almeno una sia un asso. $\left[\frac{5}{26}\right]$

Il gioco del Lotto è basato su estrazioni che vengono effettuate contemporaneamente in dieci città italiane. A ciascuna delle città corrisponde una «ruota» che prende il nome della città stessa, tranne Roma che ha due ruote: la ruota di Roma e la ruota Nazionale. Per ogni ruota vengono estratti 5 numeri tra 1 e 90.

102 Calcola la probabilità che su tutte le undici ruote il primo numero estratto sia 37. $[\simeq 3{,}2\cdot 10^{-22}]$

103 Calcola la probabilità che su tutte le ruote il primo numero estratto non sia 37. $[\simeq 0{,}894]$

104 Calcola la probabilità che su almeno una ruota il primo numero estratto sia 37. $[\simeq 0{,}106]$

105 Calcola la probabilità che tra i cinque numeri estratti sulla ruota di Napoli non vi sia il numero 37. $\left[\frac{17}{18}\right]$

106 Calcola la probabilità che tra i cinque numeri estratti sulla ruota di Napoli vi sia il numero 37. $\left[\frac{1}{18}\right]$

107 Un'urna contiene 30 palline, di cui 12 rosse, 10 bianche, 8 nere. Se ne estraggono due. Calcola la probabilità che siano dello stesso colore nei due casi seguenti.

a. La prima pallina viene reinserita nell'urna prima di procedere alla seconda estrazione. $\left[\frac{77}{225}\right]$

b. La prima pallina non viene reinserita nell'urna prima di procedere alla seconda estrazione. $\left[\frac{139}{435}\right]$

ESERCIZIO SVOLTO

108 Alice, Bruno, Carla e Davide sono quattro amici; nessuno di essi conosce la data del compleanno degli altri. Prima di rivelare le loro date di compleanno, gli amici decidono di calcolare la probabilità che almeno due di essi compiano gli anni lo stesso giorno. Qual è questa probabilità?

Calcoleremo prima la probabilità dell'evento contrario, ossia la probabilità che i compleanni dei quattro amici cadano in quattro giorni diversi, e quindi utilizzeremo il teorema della probabilità contraria.
L'evento E «i compleanni cadono in giorni diversi» può essere considerato l'intersezione di tre eventi:

E_1: Il compleanno di Bruno è in un giorno diverso da quello di Alice

E_2: Il compleanno di Carla è in un giorno diverso da quelli di Alice e Bruno

E_3: Il compleanno di Davide è in un giorno diverso da quelli di Alice, Bruno e Carla

Si ha

$$p(E) = p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = p(E_1) \cdot p(E_2/E_1) \cdot p(E_3/(E_2 \cap E_1)) \qquad \boxed{1}$$

Per calcolare le probabilità dei singoli eventi faremo l'ipotesi che nessuno dei quattro sia nato in un anno bisestile.

- $p(E_1)$: qualunque sia la data di nascita di Alice, l'evento si verifica se Bruno è nato in un diverso giorno dell'anno: su 365 casi possibili, 364 sono favorevoli. Quindi è

$$p(E_1) = \frac{364}{365}$$

- $p(E_2/E_1)$: dobbiamo calcolare una probabilità condizionata. Faremo perciò l'ipotesi che si sia verificato E_1, ossia che Alice e Bruno siano nati in giorni dell'anno diversi. In tale ipotesi E_2 si verifica se il compleanno di Carlo cade in un giorno diverso sia dal compleanno di Alice sia da quello di Bruno. Su 365 casi possibili, i casi favorevoli sono $365 - 2 = 363$. Si ha

$$p(E_2/E_1) = \frac{363}{365}$$

- $p(E_3/(E_2 \cap E_1))$: dobbiamo fare l'ipotesi che si siano verificati sia E_1 sia E_2, cioè che i compleanni di Alice, Bruno e Carla siano in tre giorni diversi. L'evento E_3 si verifica se il compleanno di Davide cade in un giorno diverso da questi tre. I casi favorevoli sono $365 - 3 = 362$ su 365 casi possibili. Otteniamo

$$p(E_3/(E_1 \cap E_2)) = \frac{362}{365}$$

Possiamo ora applicare la $\boxed{1}$:

$$p(E) = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \simeq 0{,}984$$

La probabilità richiesta è la probabilità dell'evento contrario $\overline{E}$:

$$p(\overline{E}) \simeq 1 - 0{,}984 \quad \longrightarrow \quad p(\overline{E}) \simeq 0{,}016$$

109 Calcola la probabilità che in una classe di 25 studenti ve ne siano almeno due il cui compleanno cade lo stesso giorno. [$\simeq 0{,}567$]

110 Calcola la probabilità che lanciando quattro dadi, su almeno due di essi esca lo stesso numero. $\left[\frac{13}{18}\right]$

111 Si estraggono quattro carte da un mazzo di 40. Calcola la probabilità che siano di quattro semi diversi. $\left[\frac{1000}{9139}\right]$

112 Si estraggono cinque carte da un mazzo di 40. Calcola la probabilità che tra di esse ve ne siano almeno due dello stesso valore. [$\simeq 0{,}5$]

113 Calcola la probabilità che lanciando otto dadi, su almeno due di essi esca lo stesso numero. [1]

114 Calcola la probabilità che a Bologna ci siano almeno due persone con lo stesso numero di capelli in testa. (Considera che Bologna ha circa 375 000 abitanti e che nessuno può avere in testa più di 200 000 capelli.) [1]