Serie convergente

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = S, \quad S \in \mathbb{R}$$

Serie divergente

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty \text{ positiv.}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = -\infty \text{ negativ.}$$

Serie indeterminata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n = -1, 1, -1, 1, \ldots$$

Serie numeriche notevoli

+ Serie telescopica o di Mengoli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

-> convergente

-> $S = 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})$$

-> b_n converge

-> $S = b_n - \lim_{n \to +\infty} b_{n+1}$

+ Serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

-> se $q \geq 1$ -> diverge a $+\infty$

-> se $-1 \leq q \leq 1$ -> converge $S = \frac{1}{1-q}$

-> se $q \leq -1$ -> indeterminata

+ Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

-> a termini positivi

-> diverge a $+\infty$

+ Serie armonica alternata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

-> termini di segno alterno

-> convergente

+ Serie armonica di ordine α o armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

-> a termini positivi

-> se $\alpha \leq 1$ -> diverge a $+\infty$

-> se $\alpha > 1$ -> converge

+ Proprietà distributiva

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} c \cdot a_n$$

↓

stesso CARATTERE

$$c \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \to c \cdot S$$

↓

Somma

+ Proprietà associativa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-q_n)^n \quad \to S$$

$= (a_1 - a_2) \ldots (-q^n)$

$= k_1 (a_1 - a_2 \ldots)$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} k_1 \cdot (-q)^n \to S_1$$

$S = S_1$

+ Proprietà commutativa

~~Non~~

Valida per le serie

Condizione necessaria di convergenza

$\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0$ non converge (se a termini pos. $\to$ diverge a $+\infty$)

$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ potrebbe convergere

Criteri di convergenza

+ Criterio del confronto

1. b_n magg. o minor. di a_n

$\to$ se $0 \leq a_n \leq b_n$ con b_n convergente $\to$ la serie converge

$\to$ se $a_n \geq b_n \geq 0$ con b_n divergente $\to$ la serie diverge

---

+ Criterio del confronto asintotico

1. b_n tale che $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$

$\to$ se ℓ è finito e b_n converge $\to$ la serie converge

$\to$ se $\ell \neq 0$ o $\ell = +\infty$ e b_n diverge $\to$ la serie diverge

---

+ Criterio del rapporto

1. calcolo $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$

$\to$ se $\ell < 1$ $\to$ la serie converge

$\to$ se $\ell > 1$ $\to$ la serie diverge

$\to$ se $\ell = 1$ $\to$ il criterio è inconcludente

+ Criterio della radice

1. calcolo $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

$\to$ se $\ell < 1$ $\to$ la serie converge

$\to$ se $\ell > 1$ $\to$ la serie diverge

$\to$ se $\ell = 1$ $\to$ il criterio è inconcludente

+ Criterio generale di convergenza

$S = \frac{1}{1-q}$ (se geometrica) $\quad S = b_n - \lim_{n \to +\infty} b_{n+1}$ (se telescopica)

$S = 1$ (se di mengoli) $\quad S = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1-q}$

resto K-esimo $= a_{1+K}, a_{2+K}, a_{3+K} \dots$

Se converge a S, allora $r_K = S - S_n$ e $\lim_{n \to +\infty} r_K = 0$

+ Limiti notevoli

→ $\lim_{n \to \infty} \frac{\log n}{n} = 0$

→ $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ → $\lim_{n \to \infty} \left(1 \pm \frac{K}{n}\right) = e^{\pm K}$

→ $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

→ $\lim_{n \to \infty} (n - \sqrt{n}) = +\infty$

Cose importanti

→ serie con $n!$ → criterio rapporto → $(n+1)! = (n+1)n!$

→ serie K^n → criterio confronto

→ $\lim_{n \to +\infty} a^n \to +\infty$ se $a > 1$

$\to 0$ se $0 < a < 1$

→ $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$