DOI :10.15880/j.cnki.zsjj.2009.09.029

概率在生日问题上的应用

刘 彦 秦登鹏

(黄淮学院 463000)

案 例

有一位老师接了一个新的班级,有 60 个人,在不了解班里人情况的前提下,说班里至少有两个人同一天生日。有些人可能会认为这位老师说话毫无根据。其实不然,他的说法完全可以用数学中的随机事件的概率来说明此问题。这是玻尔兹曼统计学中问题,也是古典概型中的一个典型的问题。

知识储备

一、随机现象的定义

定义:一定条件下具有多种可能发生的结果现象称为随机现象。如,将要出生的婴儿可能是男孩也可能是女孩。这类现象的一个共同特点是事先不能预知多种可能结果中究竟出现哪一种。

随机试验的三个特征:(1)可重复性(2)试验的所有可能结果是明确的,出现其中一个结果的必然性和唯一性(3)每次试验结果的不确定性和不可预知性

二、样本空间和样本点

在随机试验中,每一个可能出现的不再分解的最简单的结果称为随机试验的基本事件或样本点,用 ω 表示,而由全体基本事件或样本点构成的的集合称为基本事件空间或样本空间,记作 Ω。如,设 E_4 为某地铁站每隔 5min 有一列车通过,乘客对于列车通过该站的时间完全不知道,观察乘客候车的时间。记乘客的候车时间为 ω,显然有 $\omega\in[0,5)$,即 $\Omega=[0,5)$

三、随机事件的关系

所谓随机事件是指样本空间的一个子集。这不仅对研究事件的关系和运算是方便的,而且对研究随机发生的可能性大小的数量指标——概率的运算也是非常有益的。我们要用到的有其中两个关系:事件的交和事件的逆。

三、概率统计定义

1 频率

在一组不变条件 S 下独立的重复 N 次试验 E,如果事件 A 在 N 次试验中出现 μ 次,则称比值 $\frac{\mu}{N}$ 为 N 次试验中事件 A 出现的频率,记为(A),即 $(A)=f_n(A)=\frac{\mu}{N}$

2 概率

在一组不变条件 S 下独立重复 N 次试验 E,如果事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 总在区间 $[0,1]$ 上的一个确定常数 P 附近做微小摆动,一般来说,随着 N 的增加,这种摆动幅度越来越小,则称常数 P 为事件 A 发生的概率,记为 P(A),即 $P(A)=P$

注:(1)大量重复实验

该定义提供了估算概率的方法,即只要试验次数足够大,可以用事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 近似代替概率 P(A)。

(2)少量重复实验

2.1 实验具有“破坏性”,不可能进行大量重复试验时,就限制了它的应用。

2.2 对某些特殊类型的随机试验,并不需要做重复试验,而是根据人类长期积累的关于“对称性”的实际经验,提出数学模型,直接计算出来,又称等可能概率试验。

四、概率的定义

根据样本空间 Ω 是有限集还是无限集,可将相应的数学模型分为古典概型和几何概型。

(Ⅰ)古典型试验的定义

等可能试验:若试验的结果为有限 n 个且每个结果出现的可能性是相同的,即 $P(\omega_i)=P(\omega_j)=\frac{1}{n}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则称此试验为古典型随机试验。

(Ⅱ)古典概型的定义及古典概型随机事件的概率的计算

设古典型试验 E 的样本空间 Ω 有 n 个样本点,如果事件 A 是由其中的 m 个样本点组成,则事件 A 发生的概率 P(A)为 $P(A)=\frac{m}{n}$,并把利用上述关系式来讨论事件的概率的数学模型称为古典概型。

根据概率的古典定义可以计算出古典型随机试验中事件的概率。在古典概型中确定事件 A 的概率时,只需求出基本事件的总数 n 以及事件 A 包含的基本事件的个数 m,为此弄清随机试验的全部基本事件是什么以及所讨论的事件 A 包含了哪些基本事件是非常重要的。

例:从 10 个球(其中有 6 个红球和 4 个白球)中每次取 1 个观测后不在放回,共取 3 此(以后简称为无放回地取 3 个,也可称任取 3 个),求这 3 个球中

(1)都是红球的概率 (2)恰有 1 个是白球的概率

解 从 10 个不同的球中任意取 3 个球,共有 $n=C_{10}^3$ 不同的取法,每种取法都对应一个样本点,所以,该实验的样本点总数为 $n=C_{10}^3$

(1)设 A={取出的 3 个球都是红球},而事件 A 包含了 $m=C_6^3$ 个样本点,则 $P(A)=\frac{m}{n}=C_6^3/C_{10}^3=\frac{1}{6}$

(2)设 B={取出的 3 个球中恰有 1 个是白球},而事件 B 包含的样本点数 $m=C_4^1C_6^2$,则 $P(A)=\frac{m}{n}=C_6^1C_6^2/C_{10}^3=\frac{1}{2}$

五、问题的解决

有了上述的基础知识,我们就可以来解决这个生日问题了。为了计算的方便,我们先计算其对立事件,即没有两个人生日相同的概率。此生日问题实际上是如下的放球问题:将 n 个不同编号的球随机放入 $N(N\geqslant n)$ 个盒中,每个球以相同的概率的被放入盒中,每盒容纳的球数不限,求 A= 恰有 n 个盒中又有一个球。当 N =365 时,两个问题完全就是一个问题,放球问题也是古典概型中基本问题之一,也是应用最广泛的问题之一。

因为每个球有 N 种放法, n 个球有 N^n 种放法, 即样本点总数为 N^n。N 个盒中有 n 个盒各有 1 个球, 是哪 n 个盒子? 共有 C_N^n 种不同的情形。对于某个指定的情形(如, 前 n 个盒中各有 1 个球), 第一个球有 n 种放法, 第二个球有 $n-1$ 种放法, 依此类推, 第 n 个球有 1 种放法, 再有排列组合的乘法原理知 A 中有 C_N^n。$n!$ 个样本点, 从而 $P(A)=(n!)/(C_N^n \circ n!)/(N^n)$, 当 $N=365$　$n=60$ 时, 由司特林公式 $n! \approx \sqrt{2\Pi n}(\frac{n}{e})^n$ 得 $P(A)=\frac{N!}{(N-n)}! N^n=\frac{365!}{305!\,365^{60}} \approx 0.00591 < 0.006$ 这个概率很小, 小于千分之六, 这说明 60 个人的生日都不相同几乎是不可能的。而事件 $\bar{A}$, 即至少有两名同学同一天生日的概率 $P(\bar{A})=1-P(A)$ 很大的。

结束语

表面上看这位老师好像很有才, 其实他是运用了概率统计中的随机事件的概率来判断的。是的, 概率统计中的随机事件在生活应用是及其广泛的。比如计算, 几次试开能打开大门, 分赌注问题, 抽签是否有先后, 三个孩子都是女孩的概率, 以及一些生活中比较实际的问题, 如, 抽奖是否公平公正, 是否接受这批货, 人寿保险问题, 系统可靠性问题, 等等等等, 所以学习这方面的知识是非常有必要的。

【参考文献】

[1] 盛骤　谢式千　潘承毅;《概率论与数理统计》(第 3 版), 高等教育出版社, 2001 年 12 月

[2] 杨德保;《工科概率统计》; 北京理工大学出版社; 1994 年

[3] 王安文; 概率中 5 个比较著名的问题[J]; 数学通讯; 2004 年 03 期; 18—19

(下接第 120 页)

程, 而忽视结果。只有从"参与式开放"走向"反思式开放", 才是真正意义上的开放。反思式开放是教师以向自身挑战为起点, 基于职业自觉而对真实的教育教学情境、事件、问题及其价值的自我理解与发现的过程, 也是教师通过反面与反向的多元思考方式不断建构自己新的教育教学生活的过程, 更是教师不断寻求改善与改进教学的各种可能性的过程。在这个过程中, 教师不仅要触及问题, 更要发现意义; 不仅要改善现状, 更要拓展新域; 不仅要追问不足, 更要获得信心。

反思式开放具有以下特点: 第一是探究。反思式开放本身是一种探究, 它是指学校教师采取质疑问难等方式, 进入问题情境, 探讨问题所在, 研究解决问题的途径, 寻求改善实践的策略。探究意味着教师自觉自愿地进行研究活动, 把自己的实践变成批判、反思、分析性实践。第二是合作。合作的标志是教师之间建立起一个团体反思的共同体, 它意味着教师经常共同研究和讨论教育教学中的困惑和问题, 在交流中相互启发, 意味着教师乐意以主人翁的态势为学校的发展出谋划策, 乐意以诚恳的方式和态度主动地指出他人教育教学中的优点和不足, 同时也乐意听取他人提供的教育教学建议, 意味着每位教师都愿意向全校开放自己的课堂, 开放自己的想法。第三是自由对话。自由对话包含宽容、平等、民主和尊重等要义。

为实现更深层次的反思性开放, 可以从学校领导、教师转变观念和共同重建相应的制度这两个层面进行建构, 可以做到以下两点: 第一观念建构。校长带头反思, 榜样示人。校长带头反思对全校师生具有榜样作用, 可激励教师检视自己的学生观、教学观、考试观、作业观、管理观等, 使校长、教师和学生共同处于反思式管理中的良性建构中。第二制度建构。建立鼓励教师反思的管理制度和反思实践者共同体的行动准则和行动程序。行动准则应包括: 每位成员都以反思者的身份平等地参与探究、合作和自由对话; 每位成员视共同体为自己专业成长的"圣地"; 每次反思前必须作充分准备; 每位成员都有发言机会; 连续发言时间不能超过或少于规定限度; 不得随意打断他人发言; 批判他人时遵从起码的人际交往的道德底线; 共同体出现的矛盾只能内部消化等。行动程序应包括: 发现反思的主题; 回顾反思过去的相关经历; 形成问题解决方案。

五、学习型学校实施开放式管理应注意的问题

开放并不等于放纵, 决策者注重开放管理的目的在于提高决策领导部门的管理效能。如果过于强调群众组织的开放作用就会制约决策领导部门作用的正常发挥。此外, 开放管理的学校领导还要切防感情主义。在将真正的开放管理引入学校管理时, 要特别注意通常以团体行动为特征的损耗效率的现象, 无论何时, 学校的利益都不能受制于情感"分享"或者"轮流坐庄"和"论资排辈"等错误想法。另外, 实施开放式管理也不是一帆风顺的, 诸如教师的习惯方式、缺乏应有的热情、尊重校长地位、理论与实践脱节、惧怕变革、不愿承担责任等等, 都可能成为学校迈向成功的障碍。针对这些问题, 学校领导不能着急, 要从简单问题入手, 注意人际关系, 使决策过程愉快, 信任教师, 避免在基本观点上的争论, 放下架子, 身体力行, 鼓励批评等。

总之, 通过开放管理凝聚人心, 借助开放集思广益。开放的学习型学校管理模式的运行有效地利用了权力制衡, 减少了摩擦阻力, 化解了矛盾争议, 赢得了信任理解, 增强了团结协作, 同时更重要的是提高了决策权威, 促进了学习型学校的全面和谐地开展。师生精神必为之振奋, 学校面貌也会焕然一新。

【参考文献】

[1] [美] 彼得°圣吉　《第五项修炼——学习型组织的艺术与实务》

[2] 上海三联书店　1998 年 7 月