

ex1

## Série 6 Structure

Soit  $\varphi: N^* \rightarrow P(N \times N)$ 

$$n \mapsto \varphi(n) = \{(x, y) \in N \times N : x + y = n-1\}$$

Soit  $N \in N^*$ 

§ Nous voulons construire l'ensemble des arbres plats distincts à  $N$  noeuds internes

Nous allons écrire un programme récursif

Pour  $N=0$ , l'arbre n'a pas de noeuds internes, donc l'ensemble des arbres plats distincts est qu'une seule feuille

Pour  $N \neq 0$ , puisque l'arbre binaire est plein, la racine a deux enfants (celle de gauche et celle de droite), donc nous pouvons considérer  $\varphi(N)$

à partir de l'enfant de gauche et l'enfant de droite nous pouvons extraire deux arbres (gauche et droite) tq les enfants sont respectivement les racines de ces arbres,

$\varphi(N)$  représente l'ensemble des couples possibles tq les coordonnées soient respect. le nombre de noeuds internes de l'arbre de gauche, et le nombre de noeuds internes pour l'arbre de droite.

En effet, en retirant la racine, on doit avoir que la somme des noeuds internes vaut  $N-1$

$$\begin{aligned} \text{Notons que } \varphi(N) &= \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x+y = N-1\} \\ &= \{(x, N-1-x) \in \mathbb{N}^2 : x \in [0, N-1] \cap \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } (N_1, N-1-N_1) \in \varphi(N)$$

alors par notre programme, nous allons obtenir "gauche" l'ensemble des arbres binaires pleins à  $N-1$  noeuds internes et de manière analogue : "droite" qui est l'ensemble des arbres binaires pleins à  $N-1-N_1$  noeuds internes

Il suffit plus qu'à  $\text{A}(g, d)$  de "gauche" x "droite"

de former un arbre en ajoutant une racine dont l'enfant de gauche sera la racine de  $g$  fixé et l'enfant de droite sera la racine de  $d$  fixé

Ainsi on aura l'ensemble des arbres binaires pleins à  $N$  noeuds internes.

On peut facilier faire cette opération avec une itération sur "gauche" et une itération sur "droite"

## Série 6

ex 2

1) Premièrement nous allons calculer en terme de temps. Puisque c'est un programme récursif, il faut s'intéresser au nombre d'appel récursif.

Notre algorithme parcourt tous les arbres binaires pleins, donc asymptotiquement ça se correspode comme le nombre de catalan.  $C_N := \frac{1}{N+1} \binom{2N}{N} = \frac{(2N)!}{(N+1)! \cdot N!}$

on a  $\approx N! \approx \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N$  par stirling

$$\text{donc } C_N = \frac{(2N)!}{(N+1)! \cdot N!} \approx \frac{1}{N+1} \cdot \left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}$$

$$\text{on a } (2N)! = \sqrt{2\pi(2N)} \left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}$$

$$\text{par } \frac{1}{N+1} \cdot \frac{\sqrt{2\pi(2N)} \left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}}{\sqrt{2\pi(N+1)} \left(\frac{N+1}{e}\right)^{N+1} \cdot \sqrt{2\pi \cdot N} \cdot \left(\frac{N}{e}\right)^N}$$

$$\text{on a } \frac{\frac{2N}{e^{2N}}^{2N}}{\frac{(N+1)^{N+1} \cdot (N)^N}{e^{2N+1}}} = \frac{(2N)^{2N}}{e^{2N}} \cdot \frac{e^{2N+1}}{(N+1)^{N+1} \cdot (N)^N}$$

$$= \frac{(2N)^{2N}}{(N+1)^{N+1} \cdot (N)^N} \cdot e$$

puisqu'on cherche le comportement asymptotique, à un facteur d'une cst près, on peut négliger la cst  $e$

Suite 2

De plus  $\frac{\sqrt{2\pi \cdot 2N}}{\sqrt{2\pi(N+1)} \cdot \sqrt{2\pi \cdot N}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2\pi N}}{\sqrt{2\pi(N+1)} \cdot \sqrt{2\pi \cdot N}}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \sqrt{\pi(N+1)}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (N+1)^{1/2}$$

on a aussi

$$\begin{aligned} \frac{(2N)^{2N}}{(N+1)^{N+1} \cdot N^N} &= \frac{4^N \cdot N^{2N}}{N^N \cdot (N+1)^{N+1}} = \frac{4^N \cdot N^N}{(N+1)^{N+1}} \\ &= \frac{4^N}{(N+1)} \cdot \left(\frac{N}{N+1}\right)^N = \left(\frac{4}{N+1}\right) \left(\frac{N+1}{N}\right)^{-N} \\ &= \left(\frac{4}{N+1}\right) \frac{1}{\frac{N+1}{N}} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \frac{4^N}{N+1} \cdot \frac{1}{e} \text{ par CDE 1} \\ &\quad \left(\frac{1}{N} + 1\right)^N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} e \end{aligned}$$

donc  $c_N \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} e \frac{(2N)^{2N}}{(N+1)^N \cdot N^N} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi(N+1)}^{1/2}}$

et

$$T_N \in \Theta\left(\frac{4^N}{(N+1)} \cdot \frac{1}{(N+1)^{1/2}}\right) = \Theta\left(\frac{4^N}{(N+1)^{3/2}}\right)$$

ex 2 Suite

On peut s'intéresser à l'espace donc il faut stocker les arbres et pour stocker en ordre c'est dans l'ordre de grandeur de  $N$ ; son nombre de noeuds intérieurs.

donc l'espace en fait de  $N$  se comporte asymptotiquement comme  $N \cdot \frac{4^N}{(N+1)^{3/2}}$