TOPIC IA, Milena Loreto DATE Jeudi 20.03.25

Série 5

Exercice 1:

1. $p_1 = 1/2 \cdot 1/3 = 1/6$
   $p_2 = 7/10 \cdot 1/3 = 7/30$
   $p_3 = 1/20 \cdot 1/3 = 1/60$

2. $P(R) = 1/3 \cdot (1/2 + 7/10 + 1/10) = 5/12$
   $P(A_1 | R) = P(A_1 \cap R)/ P(R) = 1/6 \cdot 12/5 = 2/5$
   $P(A_2 | R) = P(A_2 \cap R)/ P(R) = 7/30 \cdot 12/5 = 28/50 = 14/25$
   $P(A_3 | R) = P(A_3 \cap R)/ P(R) = 1/60 \cdot 12/5 = 1/25$

3. Formule utilisée: $P((A_i | R_1)|R_2) = P(R_2|A_i) \cdot P(A_i|R_1)$
   $P((A_1 | R_1) | R_2) = 2/5 \cdot 3/10 = 1/25$
   $P((A_2 | R_1) | R_2) = 14/25 \cdot 1/5 = 14/125$
   $P((A_3 | R_1) | R_2) = 1/25 \cdot 1/5 = 1/125$

Exercice 2:

Partie A: discrete prior

1. $\theta \in \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$
   Comme c'est une probabilité uniforme et qu'il y a 5 possibilités pour θ, on a que $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 1/5 = 0,2$

2. • $P(\text{Données} | \theta_i) = \theta_i^7 (1-\theta_i)^3$
   $b_1 \cdot P(\text{Données} | 0) = b_1 \cdot \theta_1^7 \cdot (1-\theta_1)^3 = 1/5 \cdot 0 \cdot 1 = 0$
   $b_2 \cdot P(\text{Données} | 1/4) = b_2 \cdot \theta_2^7 (1-\theta_2)^3 = 1/5 \cdot (1/4)^7 \cdot (3/4)^3$
   $b_3 \cdot P(\text{Données} | 1/2) = b_3 \cdot \theta_3^7 (1-\theta_3)^3 = 1/5 \cdot (1/2)^7 \cdot (1/2)^3$
   $b_4 \cdot P(\text{Données} | 3/4) = b_4 \cdot \theta_4^7 (1-\theta_4)^3 = 1/5 \cdot (3/4)^7 \cdot (1/4)^3$
   $b_5 \cdot P(\text{Données} | 1) = b_5 \cdot \theta_5^7 (1-\theta_5)^3 = 1/5 \cdot 1 \cdot 0 = 0$
   • $\sum_{i=1}^{5} P(\text{Données} | \theta_i) b_i \cong 6,2 \cdot 10^{-4}$
   • $P(\theta_i | D) = b_i P(\text{Données} | \theta_i) / 6,2 \cdot 10^{-4}$
   $P(\theta_1) = P(\theta_5) = 0$, $P(\theta_2) \cong 8 \cdot 10^{-3}$, $P(\theta_3) \cong 0,3$, $P(\theta_4) \cong 0,67$

3. $E[\theta] = 0,25 \cdot 8 \cdot 10^{-3} + 0,5 \cdot 0,3 + 0,75 \cdot 0,67 \cong 0,66$

TOPIC DATE . .

L'estimation du née de pile observé est de 66%, ce qui a du sens car au point 2 l'estimation était à 70%

Partie B: Beta-Bernouilli Conjugate Prior

1. $\alpha = \beta = 1$
2. $\theta \mid data \sim Beta(2+7, 2+3) = Beta(9,5)$
3. $E[\theta] = 9/14$

Partie C: implementations

1.

```python
class DiscretePrior:

    def __init__(self, num_values):
        self.num_values = num_values
        self.belief = np.ones(num_values) / num_values
        self.bias_values = np.linspace(0, 1, num_values)

    def update(self, success):
        toss = success + (self.num_values - success)
        score_theta = (self.bias_values ** success)* ((1-self.bias_values)**(toss-success))
        scaled_belief = score_theta * self.belief
        self.belief = scaled_belief / scaled_belief.sum()

    def mean(self):
        return np.sum(self.bias_values * self.belief)
        pass
        return 0
```

2.

```python
class BetaConjugatePrior:

    def __init__(self, alpha, beta):
        self.alpha = alpha
        self.beta = beta

    def update(self, success):
        self.alpha += success
        self.beta += 1 - success
        pass

    def mean(self):
        return self.alpha/(self.alpha + self.beta)
        pass
        return 0
```

3. BetaConjugatePrior est plus adapté pour cet exercice car il est plus précis. DiscretePrior est moins précis pour de petites valeurs n.