

ex1 Série 6 Structure

Soit $\varphi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$

$$n \mapsto \varphi(n) := \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + y = n - 1\}$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$

§ Nous voulons construire l'ensemble des arbres pleins distincts à N nœuds internes

Nous allons écrire un programme récursif

Pour $N=0$, l'arbre n'a pas de nœuds internes, donc l'ensemble des arbres pleins distincts est qu'une seule feuille

Pour $N \neq 0$, puisque l'arbre binaire est plein, la racine a deux enfants (celle de gauche et celle de droite), donc nous pouvons considérer $\varphi(N)$

à partir de l'enfant de gauche et l'enfant de droite nous pouvons extraire deux arbres (gauche et droite) tq les enfants sont respectivement les racines de ces arbres,

$\varphi(N)$ représente l'ensemble des couples possibles tq les coordonnées soient respect. le nombre de nœuds internes de l'arbre de gauche, et le nombre de nœuds internes pour l'arbre de droite.

En effet, en retirant la racine, on doit avoir que la somme des nœuds internes vaut $N-1$

Notons que $\varphi(N) = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x + y = N - 1\}$
 $= \{(x, N - 1 - x) \in \mathbb{N}^2 : x \in [0, N - 1] \cap \mathbb{N}\}$

Soit $(N_1, N - 1 - N_1) \in \varphi(N)$

alors par notre programme, nous allons obtenir "gauche"
 l'ensemble des arbres binaires pleins à $N - 1$ nœuds internes
 et de manière analogue : "droite" qui est l'ensemble
 des arbres binaires pleins à $N - 1 - N_1$ nœuds internes

Il suffit ^{plus qu'à} $\forall (g, d) \in \text{"gauche"} \times \text{"droite"}$
 de former un arbre en ajoutant une racine dont le
 l'enfant de gauche sera la racine de g fixé
 et l'enfant de droite sera la racine de d fixé

Ainsi on aura l'ensemble des arbres binaires pleins
 à N nœuds internes.

On peut faciliter faire cette opération avec une itération
 sur "gauche" et une itération sur "droite"

Serie 6

ex 2

1) Premièrement nous allons calculer en terme de temps. Puisque c'est un programme récursif, il faut s'intéresser au nombre d'appel récursif.

Notre algorithme parcourt tous les arbres binaires pleins, donc asymptotiquement ça se comporte comme le nombre de catalan. $C_N := \frac{1}{(N+1)} \binom{2N}{N} = \frac{(2N)!}{(N+1)! \cdot N!}$

on a $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ par Stirling

$$\text{donc } C_N = \frac{(2N)!}{(N+1)! \cdot N!} \approx \frac{(2N)!}{(N+1)! \cdot N!}$$

$$\text{on a } (2N)! = \sqrt{2\pi(2N)} \left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}$$

par

$$\text{donc } C_N = \frac{\sqrt{2\pi(2N)} \left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}}{\sqrt{2\pi(N+1)} \left(\frac{N+1}{e}\right)^{N+1} \cdot \sqrt{2\pi \cdot N} \cdot \left(\frac{N}{e}\right)^N}$$

$$\text{on a } \frac{\frac{2N}{e^{2N}}}{\frac{(N+1)^{N+1} \cdot (N)^N}{e^{2N+1}}} = \frac{(2N)^{2N}}{e^{2N}} \cdot \frac{e^{2N+1}}{(N+1)^{N+1} (N)^N}$$

$$= \frac{(2N)^{2N}}{(N+1)^{N+1} (N)^N} \cdot e$$

Puisqu'on cherche le comportement asymptotique, à un facteur d'une cste près, on peut négliger la cste e

Seite 2

$$\text{De plus } \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2N}}{\sqrt{2\pi(N+1)} \cdot \sqrt{2\pi \cdot N}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2\pi N}}{\sqrt{2\pi(N+1)} \cdot \sqrt{2\pi \cdot N}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \sqrt{\pi(N+1)}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} (N+1)^{1/2}}$$

on a aussi

$$\begin{aligned} \frac{(2N)^{2N}}{(N+1)^{N+1} \cdot N^N} &= \frac{4^N \cdot N^{2N}}{N^N \cdot (N+1)^{N+1}} = \frac{4^N \cdot N^N}{(N+1)^{N+1}} \\ &= \frac{4^N}{(N+1)} \cdot \left(\frac{N}{N+1}\right)^N = \left(\frac{4N}{N+1}\right) \left(\frac{N+1}{N}\right)^{-N} \\ &= \left(\frac{4N}{N+1}\right) \frac{1}{\frac{(N+1)^N}{N^N}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{4N}{N+1} \cdot \frac{1}{e} \quad \text{par CDI 1} \\ &\quad \left(\frac{1}{N} + 1\right)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e \end{aligned}$$

$$\text{donc } c_N \approx e \frac{(2N)^{2N}}{(N+1)^N \cdot N^N} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi} (N+1)^{1/2}}$$

et

$$T_N \in \Theta\left(\frac{4^N}{(N+1)} \cdot \frac{1}{(N+1)^{1/2}}\right) = \Theta\left(\frac{4^N}{(N+1)^{3/2}}\right)$$

Série 6

ex 2 suite

On peut s'intéresser à l'espace
donc il faut stocker les arbres
et pour stocker un arbre c'est dans l'ordre de
grandeur de N ; son nombre de Nœuds intérieurs.

donc l'espace en fct de N se comporte
asymptotiquement comme $N \cdot \frac{4^N}{(N+1)^{3/2}}$