ESPACIOS VECTORIALES

2

SEA K CUERPO. UN ESPACIO VECTORIAL SOBRE K O UN K-ESPACIO VECTORIAL CONSISTE DE UN CONJUNTO V NO VACÍO, CUYOS ELEMENTOS SON LLAMADOS VECTORES JUNTO A "+" Y "·" TAL QUE (12)

① $\lambda \cdot 0 = 0$; ② $0 \cdot v = 0$; ③ $v \neq 0$, $\lambda v = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ④ $(-1) \cdot v = -v$

(12) $+ : V \times V \to V$ (ADICIÓN) $\cdot : K \times V \to V$ (PROD. POR ESCALARES)

SUBESPACIOS VECTORIALES

(11) CONMUT. - ASOCIAT. - VECTOR 0 - OPUESTO
A.VEV. - ASOC Y DIST. PRODUCTO

SEA V UN ESPACIO VECTORIAL SOBRE K, DIREMOS QUE $W \subset V$ ES SUBESPACIO SI:

1- $W \neq \emptyset$ (TIENE EL VECTOR 0) 2- $w_1, w_2 \in W$, $w_1 + w_2 \in W$ 3- $\lambda \in K$ y $w \in W \Rightarrow \lambda w \in W$

Combinación Lineal

SEA V ESPACIO VECTORIAL SOBRE K Y $v_1, \dots, v_m$ VECTORES EN V. DADO $v \in V$, DIREMOS QUE V ES COMBINACIÓN LINEAL DE LOS $v_1, \dots, v_m$ SI EXISTEN ESCALARES $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ EN K TAL QUE. $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$

$W = W_1 + \dots + W_k$ ES UN SUBESPACIO DE V

LA SUMA DE SUBESPACIOS ES UN SUBESPACIO ($W_1, \dots, W_k$ SUBESPACIOS DE V ESPACIO K-VECTORIAL)

$V = v_1 + \dots + v_k$ Y $W = w_1 + \dots + w_k$

a) $v + w = (v_1 + w_1) + \dots + (v_k + w_k) \in W_1 + \dots + W_k$ PUES COMO W_i ES SUBESPACIO DE V, $v_i + w_i \in W_i$

b) $\lambda v = \lambda(v_1 + \dots + v_k) = \lambda v_1 + \dots + \lambda v_k \in W_1 + \dots + W_k$ W_i ES SUBESP. DE V $\lambda v_i \in W_i$

TEOREMA → SEA V UN ESPACIO VECTORIAL SOBRE K Y SEAN $v_1, \dots, v_k \in V$

$W = \{\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in K\}$ ES UN SUBESPACIO VECTORIAL, ES DECIR: EL CONJ. DE LAS COMB. LINEALES DE $v_1, \dots, v_k$ ES SUBESPACIO VECTORIAL.

SUBESPACIOS REPRESENTACIONES

* SISTEMA GENERADOR → $S = \{(1,0,1,0), (1,0,0,1)\}$ (CONJ. VECT. Q' GENERAN UN SUBESPACIO)
* BASE → SIST. GEN. DONDE TODOS LOS VECTORES SON LI
* EC PARAMETRICAS * EC IMPLICITAS

Nº EC. IMPLICITAS = DIM ESPACIO - DIM SUBESPACIO | nº PARAM = nº DE INCOG. - rango (α, β, etc.)

Nº [illegible] DEL SIST. GEN ≥ Nº VECTORES DE LA BASE - DIMENSIÓN

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

SE DICE QUE UN CONJUNTO DE VECTORES $S = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ SON Linealmente Independiente SI EL SISTEMA $\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \alpha_3 \vec{v_3} + \dots = 0$

SI NO ES LI SE DICE QUE ES LINEALMENTE DEPENDIENTE.

• Lo mejor es hacerlo por gauss y rango de una matriz. COMO EL RANGO DE LA MATRIZ ES = AL NUM. DE VECTORES DEL CONJ.

OBTENER EL RANGO

$S = \{(1,1,0), (0,1,0)\}$

• Reducir a merf
• Contar filas no nulas.

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} \Rightarrow rg = 2$$ => LOS VECTORES SON LI

DIMENSIÓN:

* LA DIMENSIÓN ES LA CANT. (VEF) DE VECTORES DE LA BASE

FORMULA DE GRASSMANN

$\dim(B_1 \cap B_2) = \dim B_1 + \dim B_2 - \dim(B_1 + B_2)$

ISOMORFISMOS DE ESPACIOS VECTORIALES

10

SEAN V, W ESPACIOS VECTORIALES SOBRE UN CUERPO K Y SEA $T: V \to W$ (TRANSFO)

① T ES MONOMORFISMO → SI T ES INYECTIVA ($\dim Nu(T) = 0$) $Nu(T) = \{0_V\}$ ($T(v_1) = T(v_2) \Leftrightarrow v_1 = v_2$; $Nu(T) = 0$)

② T ES EPIMORFISMO → SI T ES SOBREYECTIVA ($\dim W = \dim Img(T)$) $Im(T) = W$

③ T ES ISOMORFISMO → SI T ES BIYECTIVA → LA TRANSFORMACIÓN TIENE INVERSA

①' T ES ENDOMORFISMO → V = W ($\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (ej)) ②' T ES AUTOMORFISMO → • ENDOMORFISMO • ISOMORFISMO

EJEMPLO $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \mid T(x_1, x_2) = (-x_1 + x_2; x_1 + 3x_2; x_1 - x_2)$

Buscamos el núcleo

$$\begin{bmatrix}-1&1\\1&3\\1&-1\end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{cc|c}-1&1&0\\0&4&0\\0&0&0\end{array}\right]$$

$Nu(T) = \{(0,0)\}$ → T ES MONOMORFISMO => $\dim Nu(T) = 0$ (núcleo vacío)

$\dim Im(T) + \dim Nu(T) = \dim \mathbb{R}^2$

$\dim Im(T) + 0 = 2 \Rightarrow \dim Im(T) = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3$ => NO EPIMORFISMO

COROLARIO.

SEAN V Y W DOS K-ESPACIOS VECTORIALES DE DIM. FINITA TAL QUE V ES ISOMORFO A W => $\dim(V) = \dim(W)$ => * T ES UN ISOMORFISMO * $\{v_1, \dots, v_n\}$ BASE DE V => $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ BASE DE W

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

$B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ B ES UNA BASE DEL ESPACIO DE PARTIDA (V)

$T: V \to W$ Y CONOZCO LAS IMÁGENES $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2, \dots, f(v_m) = w_m$

∃! TRANSFORMACIÓN LINEAL (EXISTE UNA ÚNICA TRANSFO LINEAL)

EJEMPLO ¿EXISTE UNA ÚNICA TRANSFORMACIÓN LINEAL?

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid T(1,-1) = (3,0)$
$T(2,-2) = (0,-2)$

¿Es una base? $\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}$ $rg = 1 \Rightarrow$ NO ES BASE DE $\mathbb{R}^2$ PORQUE LD

NO SE PUEDE DEFINIR UNA ÚNICA TRANSFO LINEAL

EJEMPLO 2 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \mid T(1,1,0), T(1,0,1), T(0,1,1)$

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 - f_1} \begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{bmatrix} \to \dots$$ $rg = 3$ SON LI => SON BASE DE $\mathbb{R}^3$

$(x,y,z) = \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,1,1)$

$x = \alpha + \beta \to x = \alpha + z - \gamma = y + z - 2\gamma$ (**)

$y = \alpha + \gamma \to \alpha = y - \gamma$

$z = \beta + \gamma \to \beta = z - \gamma$

$x - y - z = -2\gamma$

$\boxed{-\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = \gamma}$

$\beta = z - \left(-\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{z}{2}}$

$\boxed{\alpha = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2}}$

$T(x,y,z) = \alpha T(1,1,0) + \beta T(1,0,1) + \gamma T(0,1,1)$

$T(x,y,z) = \alpha(2,1) + \beta(1,1) + \gamma(0,0)$

$T(x,y,z) = \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2}\right)(2,1) + \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right)(1,1) + \left(-\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right)(0,0)$

$T(x,y,z) = \left(x + \frac{x}{2} + y - \frac{y}{2} - z + \frac{z}{2}, \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{y}{2} - \frac{z}{2} + \frac{z}{2}\right)$

$T(x,y,z) = \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z, x\right)$

SISTEMA GENERADOR A BASE

3

$S_1 = \{(1,0,1), (0,1,0)\} = B_{S_1} = \{(1,0,1), (0,1,0)\}$ → YA QUE LA BASE ES UN SIST. GENERA. CON LOS VECTORES LI

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} \to rg = 2 \Rightarrow \text{SON LI}$$

BASE A EC. PARAMETRICAS

$B_{S_1} = \{(1,0,1), (0,1,0)\}$

$$\begin{cases} x_1 = 1\alpha + 0\beta \to x_1 = \alpha \\ x_2 = 0\alpha + 1\beta \to x_2 = \beta \\ x_3 = \underbrace{1\alpha + 0\beta}_{\text{Vect. colum de la base}} \to x_3 = \alpha \end{cases}$$ ECUACIONES PARAMETRICAS

PARAMETRICA E IMPLICITA

$x_1 = \alpha$ $x_1 = x_3 = \alpha \Rightarrow x_1 - x_3 = 0$
$x_2 = \beta$ Nº EC. IMP = dim esp. - dim sub
$x_3 = \alpha$ Nº EC. IM. = 3 - 2 = 1 ✓

CALCULAR LA INVERSA (MÉTODO DE GAUSS JORDAN)

BASE A IMPLICITA:

Poner los vectores como fila y los que se hacen nulo al hacer la merf son las ec. implicitas

EC. IMPLICITA A EC PARAMETRICAS

$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$ $(1\ 1\ 1 | 0) \to rg = 1$

$x_2 = \alpha$ $x_1 + \alpha + \beta = 0$
$x_3 = \beta$ $x_1 = -\alpha - \beta$

$x_1 = -\alpha - \beta$
$x_2 = \alpha$
$x_3 = \beta$

nº Param = nº de incognitas - rango
nº Param = 3 - 1
nº Param = 2 → α, β

EC. PARAMETRICA A UNA BASE

$x_1 = -\alpha - \beta$
$x_2 = \alpha$
$x_3 = \beta$

$B_A = \{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$ Son las columnas de mi ec. param.

INTERSECCIÓN DE 2 SUBESPACIOS

$B_1 = \{(0,1,0), (1,0,0)\}$ $B_2 = \{(2,0,0), (0,1,1)\}$

① $B_1 \cap B_2$ SIEMPRE HACER LA SUMA DE LOS SUBESPACIOS PRIMERO.

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\2&0&0\\0&1&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&0\\0&1&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&1&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$ (2,0,0) (x1)

$\dim(B_1 \cap B_2) = \dim B_1 + \dim B_2 - \dim(B_1 + B_2)$
$\dim(B_1 \cap B_2) = 2 + 2 - 3$
$\dim(B_1 \cap B_2) = 4 - 3 = 1$ → VOY A OBTENER 1 SOLO VECTOR
$B_1 + B_2 = \{(0,1,0), (1,0,0), (0,1,1)\}$

SUMA DE DOS SUBESPACIOS

$B_1 = \{(0,1,0), (1,0,0)\}$ $B_2 = \{(2,0,0), (0,1,1)\}$

① $B_1 + B_2$ SE PUEDE VER COMO LA UNIÓN DE LOS SUBESPACIOS.

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\2&0&0\\0&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&0\\0&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow{f_3 - 2f_1} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow{f_4 - f_2} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Base $B_1 + B_2 = \{(0,1,0), (1,0,0), (0,1,1)\}$ vectores no nulos.

* HACEMOS UNA MATRIZ CON LOS VECTORES DE LAS BASES
* LA LLEVAMOS A UNA MERF
* LOS VECTORES NO NULOS SON LOS VECT. BASE DE LA ⊕

BASE ORDENADA

SEA V ESP. VECTOR. DE DIM. FINITA, UNA B. ORDENADA DE V ES UNA SUCESIÓN FINITA DE VECTORES LI Y GENERA V. LA DIFERENCIA CON LA BASE ES QUE EN LA B. ORDENADA IMPORTA EL ORDEN DE LOS VECTORES DE LA BASE

① $[v+w]_\beta = [v]_\beta + [w]_\beta$ PARA $v, w \in V$

② $[\lambda v]_\beta = \lambda [v]_\beta$

$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \in K \Rightarrow \lambda v = (\lambda x_1) \cdot v_1 + \dots + (\lambda x_n) v_n$

$[\lambda v]_\beta = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda(x_1, \dots, x_n) = \lambda [v]_\beta$

SUMA DIRECTA DE DOS SUBESPACIOS

* SI AL SUMAR Y HACER GAUSS NO HAY FILAS NULAS
* SI LA DIM DE LA INTERSECCIÓN ES 0.
→ $B_1 \cap B_2 = \vec{0}$ EL VECT. 0 ES LA ÚNIC. A INTERSEC.

BASES Y DIMENSIÓN

4

SEA V UN ESPACIO VECTORIAL. UNA BASE V ES UN CONJUNTO $B \subseteq V$ TAL QUE ① → B GENERA A V, Y ② → B ES LIN. INDEPENDIENTE.

TODO SUBCONJUNTO DE UN CONJUNTO LINEALMENTE IND. ES LINEAL. INDEP.

COROLARIO: TODO CONJUNTO QUE CONTENGA AL VECTOR $\vec{0}$ ES LINEAL. DEPEND. PUES $1 \cdot 0 = 0$

SEA V UN ESPACIO VECTORIAL DE DIMENSIÓN FINITA Y SEA $n = \dim V$

1 → CUALQUIER SUBCONJUNTO DE V CON MÁS DE n VECTORES ES LD

2 → NINGÚN SUBCONJUNTO DE V CON MENOS DE n VECTORES PUEDE GENERAR V

DIMENSIONES DE SUBESPACIOS

DADA $A \in M_{m \times n}(K)$. SEA R LA MERF EQUIV. POR FILAS A A Y r LA CANT. FILAS NO NULAS. CADA FILA NO NULA ESTÁ ASOCIADA A UNA VARIABLE PRINCIPAL. LAS n-r VARIABLES RESTANTES SON VARIABLES LIBRES Q' GENERAN TODAS LAS SOLUCIONES. HAY n-r VECTORES LI QUE GENERAN W => $\dim W = n - r$

$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R} \mid x - y - 3z + w = 0,\ y + 5z + 3w = 0\}$ $\begin{bmatrix}1&-1&-3&1\\0&1&5&3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&2&4\\0&1&5&3\end{bmatrix}$

$x + 2z + 4w = 0$
$y + 5z + 3w = 0$

(**) TAMBIÉN LAS FILAS DE LA MERF QUE NO SE HICIERON NULAS EN EL EJEMPLO $\{(1,0,2,4), (0,1,5,3)\}$ SON UNA BASE

(**) $x = -2z - 4w$
$y = -5z - 3w$
→ $W = \{(-2z - 4w), (-5z - 3w)\}, z, w \mid z, w \in \mathbb{R}\}$
$= \{(-2,-5,1,0)z + (-4,-3,0,1)w \mid z, w \in \mathbb{R}\}$

$(-2,-5,1,0), (-4,-3,0,1)$ ES UNA BASE DE W Y POR LO TANTO SU DIMENSIÓN ES 2

ESPACIO FILA:

$$A = \begin{bmatrix}1&2&0&5&0\\0&0&1&4&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 5}$$

ES EL SUBESPACIO GENER. POR LAS FILAS DE LA MATRIZ

$W = \{(1,2,0,5,0), (0,0,1,4,0), (0,0,0,0,1)\}$

MATRIZ INVERTIBLE

A ES INVERTIBLE ⟷
• LAS FILAS DE A SON LI
• LAS COLUMN. DE A SON LI
SI LAS FILAS DE A SON UNA BASE DE K^n

$W = \{(1,0,1), (1,-1,0), (0,-1,2)\}$ $\begin{bmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&-1&2\end{bmatrix}$ → ENCONTRAR UNA BASE DE 1 SUBESP. → MERF (VECT. NO NULOS SON LA BASE)

COROLARIO

SEAN A MATRIZ $m \times n$ Y R LA MERF EQUIV. POR FILAS A A. EL ESPACIO FILA DE A ES IGUAL AL ESPACIO FILA DE R Y LAS FILAS NO NULAS DE R FORMAN UNA BASE DEL ESPACIO FILA DE A.

MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFO. LINEAL

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $T(x,y) = (2x - y, x + 2y, 3x)$ $M_{BC}(T)$ $B = \{(1,-1), (1,1)\}$

$C = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$M_{BC}(T) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ ① Hacer el transfo de 1° ② Buscar las coord

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$: 2 columnas, 3 filas

$T(1,-1) = (3,-1,3)$
$T(1,1) = (1,3,3)$

$M_{BC}(T) = [\ \ \ ]$ → $T(1,-1)$ $T(1,1)$

$$M_{BC}(T) = \begin{bmatrix}3&1\\-4&2\\3&3\end{bmatrix}$$

(**) HAY QUE TRATAR DE QUE $\alpha, \beta, \gamma \dots$ QUEDEN EN FUNCIÓN DE x, y, z

PARA ASEGURARNOS QUE LO HICIMOS BIEN HAY QUE VERIFICAR.

Busquemos las coordenadas de la transfo respecto de C

① $(3,-1,3) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)$
resolviendo esto me queda
$\alpha = 3$, $\beta = -4$, $\gamma = 3$

$[(3,-1,3)]_C = \begin{bmatrix}3\\-4\\3\end{bmatrix}$ → Coordenadas

② $(1,3,3) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)$
$\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$
$[(1,3,3)]_C = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ → Coordenadas

COORDENADAS

$B = \{(1,1), (-1,2)\}$ → BASE $[w]_B = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$W = 3(1,1) + 1(-1,2)$
$W = (3,3) + (-1,2) = (2,5)$

Si tengo P_{BC} y quiero P_{CB} => $(P_{BC})^{-1} = P_{CB}$

TRANSFORMACIONES LINEALES

SEAN V Y W DOS ESPACIOS VECTORIALES SOBRE EL CUERPO K

UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL DE V EN W ES UNA FUNCIÓN $T: V \to W$ TAL QUE:

① $T(u+v) = Tu + Tv$, PARA $u, v \in V$

② $T(\lambda v) = \lambda T(v)$, PARA $v \in V$, $\lambda \in K$

SI SE CUMPLE $T(\lambda v + v') = \lambda T(v) + T(v')$ CON ESTO ES LINEAL

NÚCLEO DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

$Nu(T) = \{\bar{x} \in V \mid T(\bar{x}) = \bar{0}_w\}$ TODOS LOS VECTORES QUE PERTENECEN AL CONJUNTO DE PARTIDA, TAL QUE EL TRANSFORMADO ES EL VECT. NULO.

EL NÚCLEO ES UN SUBESPACIO VECTORIAL (PODEMOS ENCONTRAR UNA BASE Y UNA DIMENSIÓN)

EJEMPLO

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid T(x_1, x_2, x_3)$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$

EL NÚCLEO ES SUBESPACIO, DEMOSTRACIÓN:

① $Nu(T) \neq \emptyset$, $T(0) = 0 \in Nu(T)$

② $v, w \in V \mid T(v) = 0 \wedge T(w) = 0$, $T(v+w) = T(v) + T(w) = 0$, $v + w \in Nu(T)$

IMÁGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

$Im_g(T) = \{\bar{y} \in W \mid T(\bar{x}) = \bar{y}\}$ UN VECTOR $\bar{y}$ QUE PERTENECE A W (CONJ. DE LLEGADA) EL TRANSFORMADO DE CUALQUIER VECTOR $\bar{x}$ ME DA 1 VECTOR $\bar{y}$

LA IMÁGEN ES UN SUBESPACIO (PODEMOS ENCONTRAR UNA BASE Y UNA DIMENSIÓN)

EJEMPLO

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid T(x_1, x_2, x_3)$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

HACERLO CON LA AMPLIADA

SEAN V, W ESPACIOS VECTORIALES SOBRE UN CUERPO K Y SEA $T: V \to W$

RANGO DE T → DIMENSIÓN DE LA IMÁGEN DE T

NULIDAD DE T → DIMENSIÓN DEL NÚCLEO DE T.

SI A ES UNA MATRÍZ $m \times n$ ⇒ RANGO FILA (A) = RANGO COLUMNA (A) LA DIM DEL SUB. GEN. X LAS FILAS, LA DIM. DEL ESPACIO FILA

TEOREMA DE LAS DIMENSIONES

SEAN V, W ESP. VECTORIALES Y SEA $T: V \to W$ UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

$\dim(Im\,T) + \dim(Nu\,T) = \dim V$

ALGUNAS IGUALDADES

EL RANGO DE A ES EL RANGO FILA DE A (QUE ES IGUAL AL RANGO COLUMNA)

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

SI A ES UNA MATRÍZ $m \times m$ Y v ES UNA MATRIZ $m \times 1$.

$A \cdot V$ ES UNA MATRÍZ $m \times 1$.

$A \cdot V = \lambda \cdot V$ CON $\lambda \in K$ V ES AUTOVECTOR ASOCIADO A λ

Puede ser cero. ← λ ES UN AUTOVALOR.

AUTOESPACIO

SEA $A \in K^{m \times m}$ Y $\lambda \in K$ ES UN AUTOVALOR DE A

EL AUTOESPACIO ASOCIADO A λ ES:

$V_\lambda = \{v \in K^{m \times m} \mid A \cdot V = \lambda \cdot V\}$ (CONTIENE AL VECTOR NULO)

ES DECIR V_λ ES EL CONJUNTO FORMADO POR TODOS LOS AUTOVECTORES ASOCIADOS A λ

• LOS MÚLTIPLOS DE UN AUTOVECTOR, SON AUTOVECTORES CON EL MISMO AUTOVALOR

TEOREMA → SEA A UNA MATRÍZ $m \times m$. Y $\lambda \in K$. Y $V, W \in V_\lambda$ ⇒ $v + tw \in V_\lambda$ $\forall t \in K$

• AUTOVECTORES CON AUTOVALORES DISTINTOS SON DISTINTOS.

• $\lambda \in K$ ES UN AUTOVALOR DE A $\iff \det(\lambda \cdot Id - A) = 0$

POLINOMIO CARACTERÍSTICO

SEA $A \in K^{m \times m}$ EL POLINOMIO CARACTERÍSTICO ES. $X_A(x) = \det(x \cdot Id - A)$

Recordamos la def. del determinante.

① $m = 1$, $\det([a]) = a$

② $m > 1$, $\det(A) = a_{11} \cdot \det A(1|1) - a_{21} \det A(2|1) + \ldots + (-1)^{1+m} a_{m1} \det(m|1)$

PROPOSICIÓN → SEA $A \in K^{m \times m}$ ⇒ $\lambda \in K$ ES AUTOVALOR $\iff \lambda$ ES RAÍZ DEL P. CARACT.

Método para encontrar autovalores y autovectores de A.

1 - CALCULAR $X_A(x) = \det(x \cdot Id - A)$

2 - ENCONTRAR LAS RAÍCES $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ DE $X_A(x)$

3 - PARA CADA λ RESOLVER EL SISTEMA → $(\lambda_i Id - A)x = 0$

LAS SOLUCIONES DEL SISTEMA SON LOS AUTOVECT. CON AUTOVALOR λ_i

SI V ES UN ESPACIO VECTORIAL DE DIMENSIÓN FINITA, ENTONCES, DOS BASES CUALESQUIERA DE V TIENEN EL MISMO NUM. DE ELEMENTOS

$|B| = m$ Y $|B| \leq m$ Y $|B'| = m$ ⇒ $m \leq m$, PERO B' ES BASE Y POR LO TANTO GENERA V Y B ES LI ⇒ $m \leq m$ POR LO TANTO $m = m$

$T, S: V \to W$ ⇒ $T + S$ ES UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

$(T+S)(\lambda v + v') = T(\lambda v + v') + S(\lambda v + v') = \lambda T(v) + T(v') + \lambda S(v) + S(v')$

$= \lambda(T(v) + S(v)) + T(v') + S(v') = \lambda((T+S)(v)) + (T+S)(v') =$

$\lambda(T+S)(v) + (T+S)(v')$ DEF. T+S, T Y S LINEALES ④ DEF T+S, DEF $\lambda(T+S)$, $v, v' \in V$

$T: V \to W$, $U: W \to X$, $V \to X$

$(T \circ U)(\lambda v + v') = T(U(\lambda v + v')) = T(\lambda U(v) + U(v')) = \lambda T(U(v)) + T(U(v'))$

$= \lambda(T \circ U)(v) + (T \circ U)(v')$ CON $v, v' \in V$ Y $\lambda \in K$

$T \circ U$ ES TRANSF. LINEAL

UT ES UNA TRANSF. LINEAL, CON $U \in K$ (LA MISMA DEF. QUE LA SUMA)

$(UT)(\lambda v + v') = UT(\lambda v + v') = U\lambda T(v) + UT(v') = \lambda UT(v) + UT(v') = \lambda(UT)(v) + (UT)(v')$

SEA V ESP. VECTORIAL SOBRE EL CUERPO K; SEAN U, T Y S OPER. LINEALES SOBRE V Y SEA λ UN ELEMENTO DE K.

① $U(T+S) = UT + US$, $(T+S)U = TU + SU$

$U(T+S)(v) = U((T+S)(v)) = U(T(v) + S(v)) = U(T(v)) + U(S(v))$

② $U = Id_V$ U LA DEMOSTRACIÓN ES BASTANTE TRIVIAL, ENTONCES, DEBEMOS PROBAR QUE PARA CUALQUIER VECTOR V EN V LA APP DE U ES IGUAL A LA APP DE $Id_V U$, DONDE Id_V ES EL OP. IDENTIDAD

$Id_V(v) = v$ ⇒ $(Id_V \circ U)(v) = Id_V(U(v)) = U(v)$

HALLAR NÚCLEO DE UNA TRANSFO. POLINÓMICA Y LA IMÁGEN

$T(at + b) = at^2 + (a-b)t$

$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = t^2 + t$

$T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -t$

$at^2 + (a-b)t = 0t^2 + 0t + 0$

$a = 0$

$a - b = 0 \to a = b = 0$

$Im\,g(T) = (t^2 + t, -t)$

$Nu(T) = (0, 0) = (0t + 0)$

$\dim(Nu(T)) = 0$

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Y

$Nu(T) = \langle -2, 1, 0 \rangle$ Y

$Im(T) = x + 2y - 3z = 0$

SEA $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$ NÚCLEO

$T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 2a - 3bx + 4cx^2$

$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in Nu(T)$ $\quad T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0 + 0x + 0x^2$

$2a - 3bx + 4cx^2 = 0 + 0x + 0x^2$

$a = 0$

$-3b = 0 \to b = 0$

$4c = 0 \to c = 0$

$Nu(T) = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$P(x) \in P_2 \to P(x) = P_0 + P_1(x) + P_2(x)$

$2a = P_0 \to a = \frac{P_0}{2}$

$-3b = P_1 \to b = \frac{-P_1}{3}$

$4c = P_2 \to c = \frac{P_2}{4}$

⇒ $T\begin{pmatrix}P_0/2\\ -P_1/3\\ P_2/4\end{pmatrix} = P(x)$

$Im(P) = P_2$

EXPRESE EL POLINOMIO $P(x) = 1 + 2x - x^2$ EN P_2 EN TÉRMINO DE LA BASE: $\{-1 + x + x^2, 2 - 3x + 2x^2, 3 - x^2\}$

① VER SI UNA BASE $\dim P_2 = 3$ VER LOS COEF. LINEAL, CUADRÁTICO Y TERMINO 0

$C_1(-1 + x + x^2) + C_2(2 - 3x + 2x^2) + C_3(3 - x^2)$

SUP. QUE P ESTÁ DADO EN LA BASE CANÓNICA $\{1, x, x^2\}$

$(-1 + x + x^2)_{B_C} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$(2 - 3x + 2x^2)_{B_C} = \begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$

$(3 - x^2)_{B_C} = \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ → MATRIZ CAMBIO DE BASE DE B A CANÓN. SI NECESITAMOS DE CANÓNICA A BASE, HACEMOS LA INVERSA

HALLAR LA EXP. ANALÍTICA DE

LO QUE VAMOS HACER ES BUSCAR UNA BASE DE LA IMG.

$x = 3z - 2y$, $(x, y, z) = (3z - 2y, y, z) \Rightarrow (3z, 0, z) + (-2y, y, 0)$

$T(-2, 1, 0) = (0, 0, 0)$ → Por el núcleo

$T(0, 1, 0) = (3, 0, 1)$ → Por la imágen

$T(0, 0, 1) = (-2, 1, 0)$

Ver que es base.

$T: \mathbb{R}^3 \to M_{2 \times 2}$

$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - 2y & y + z \\ y + z & x - y + z \end{pmatrix}$

$x - 2y = 0$

$y + z = 0$

$y + z = 0$

$x - y + z = 0 \to x - y - y = 0$

$N(T) = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2y\\y\\-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL ES NULA SI SU NÚCLEO ES IGUAL AL ESPACIO COMPLETO DEL DOMINIO $T(v) = 0$ LA DIMENSIÓN DE LA IMÁGEN ES 0 YA QUE SOLO EL VECTOR NULO PERTENECE A LA IMG.

LA MATRIZ ASOCIADA SERÁ LA NULA, TENDRÁ TODOS EL 0. Y NO ES INVERTIBLE YA QUE LA DIMENSIÓN DE LA IMG ES 0. LA TRANSFO NO ES SOBREYECTIVA Y POR LO TANTO NO INYECTIVA

SI LA TRANSFOR. ES NO NULA. LA IMG. ES NO NULA LA DIM (img) ≠ 0 SUP $T: V \to W$ Y $T(v) = \{0\}$ COMO ES NO NULA $\exists\, u \in V$ $T(u) \neq 0$

SI LA TRANSFO ES NO NULA HAY AL MENOS ALGÚN VECTOR NO NULO EN EL NÚCLEO, LO QUE SIGNIFICA QUE HAY AL MENOS UN VECTOR EN EL DOMINIO QUE SE MAPEA AL VECTOR NULO EN LA IMAGEN

LA DIM DE LA IMAGEN NO ES 0 → ∃ UN VECTOR ≠ DEL NULO EN LA IMAGEN QUE ES EL RESULTADO DE LA TRANSFO DE ALGÚN VECTOR EN EL DOMINIO

$T: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \to P_2[x]$ OBTENER $[T]^{B_2}_{B_1}$

$T\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = (a + b) + 2cx + dx^2$

$B_1 = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ BASE $M_2(\mathbb{R})$

$B_2 = \{1, x, x^2\}$ BASE DE $P_2[x]$

① $T\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = 1$ ③ $T\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = 2x$

② $T\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = 1$ ④ $T\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = x^2$

① $1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

② $1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

③ $0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$

④ $0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2$

$[T]^{B_2}_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$T: P_2[x] \to \mathbb{R}^3$

$T(P(x)) = (P(0), P(1), P(2))$

$B = \{1, x, x^2\}$ BASE DE P_2

DETERMINAR $[T]_B$ BASE CANÓNICA DE $\mathbb{R}^3$

$T(1) = (1, 1, 1) = 1(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1)$

$T(x) = (0, 1, 2) = 0(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 2(0, 0, 1)$

$T(x^2) = (0, 1, 4) = 0(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 4(0, 0, 1)$

$[T]^{C_{\mathbb{R}^3}}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

HALLAR AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&1&-1\\0&0&2\end{bmatrix}$ ① CALCULAR $\chi_A(x)=\det(x\,Id-A)$

$\chi_A(x)=(x-2)^2\cdot(x-1)$

$\lambda_1=2,\ \lambda_2=1$

② RESOLVER EL SIST: $(\lambda_i\cdot Id-A)\cdot X=0$

LAS SOLUCIONES SON LOS AUTOVECTORES CON AUTOVALOR λ_i: $x_1+x_2+x_3=0$

$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$

MATRÍZ $A\in M_n(\mathbb{K})$ ES INVERTIBLE $\leftrightarrow$ 0 NO ES AUTOVALOR.

LOS AUTOVALORES, SON LAS RAICES DEL POLINOMIO CARACTERISTICO DE A

$\chi_A(x)=\det(x\,Id-A) \Rightarrow$ A ES INVERTIBLE $\leftrightarrow \det(A)\neq 0 \leftrightarrow \det(0\,Id-A)\neq 0$

$\leftrightarrow$ 0 NO ES AUTOVALOR.

SEA A UNA MATRÍZ INVERTIBLE

SI λ ES UN AUTOVALOR DE A DE AUTOVECTOR $v \Rightarrow 1/\lambda$ ES AUTOVALOR DE A^{-1} CON AUTOVECTOR v

COMO A ES INVERTIBLE $\Rightarrow$ EL AUTOVALOR $\neq 0$ $(\lambda\neq 0) \to Av=\lambda v$

$\frac{1}{\lambda}\cdot Av=\frac{1}{\lambda}\lambda v \equiv 1/\lambda\, A^{-1}Av=v\cdot A^{-1}$

$1/\lambda\, v=A^{-1}v$

A, B MATRICES. A ES SEMEJANTE A B $\Rightarrow$ A Y B TIENEN LOS MISMOS AUTOVALORES

A ES SEMEJ. A B $\leftrightarrow \exists$ MAT. INVERT. P TAL

$A=PBP^{-1}$ PARA ALGUNA MATRÍZ P INVER

(VAMOS A USAR $P\,x\,Id\,P^{-1}=PP^{-1}x\,Id$ (EL Id CONMUTA CON CUALQ. MATRÍZ)

$\chi_A(x)=\det(x\,Id-PBP^{-1})$

$=\det(P\,x\,Id\,P^{-1}-PBP^{-1})$ $=\det P\cdot\det(x\,Id-B)\cdot\det P^{-1}=\det(x\,Id-B)$

$=\det(P(x\,Id-B)\cdot P^{-1})$ $=\det P\cdot\det P^{-1}\cdot\det(x\,Id-B)=\chi_B(x)$

POR LO TANTO A Y B TIENEN EL MISMO POLINOMIO CARACTERISTICO Y POR LO TANTO LOS MISMOS AUTOVALORES

¿ES SUBESPACIO VECTORIAL? $\{(x_1\ldots x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1+\ldots+x_n=0\}$

DEBE CUMPLIR 3 CONDICIONES ① $\bar{0}\in$ SUB. ② $(u+v)$ ES

① $\bar{0}=(0,\ldots,0)\Rightarrow 0+\ldots+0=0$ ✓

② $w_1=(x_1,\ldots,x_n),\ w_2=(y_1,\ldots,y_n)$ ✓ $w_1+w_2=(x_1+\ldots+x_n)+(y_1+\ldots+y_n)$

$=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$ $(x_1+\ldots x_n=0)$

[POR CONM. ES IGUAL A CERO] $\to x_1+y_1+\ldots+x_n+y_n=0$ ✓

③ $\lambda w_1=\lambda(x_1\ldots x_n)=(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)\to \lambda x_1+\ldots+\lambda x_n=0\equiv\lambda\underbrace{(x_1+\ldots+x_n)}_{=0}=0$

$T:\mathbb{Q}^3\to\mathbb{Q}^3$ ES UNA TRANSFO LINEAL $\det(T)=0\Rightarrow 0$ ES AUTOVALOR

SI EL $\det(T)=0\Rightarrow Nu(T)\neq 0\Rightarrow$

$\exists v\in\mathbb{Q}^3$ NO NULO $\mid Tv=0\Rightarrow Tv=0_{\mathbb{Q}}v$

Y COMO $v\neq 0\,\mathbb{Q}^3$ DEDUCIMOS Q' 0 ES UN AUTOVALOR

PROVIENE DEL HECHO DE Q' UN ESP. VECTORIAL DE DIM N, CUALQUIER CONJ. LI DE DIM N FORMA UNA BASE, EN ESTE CASO V ES SUBES DE $\mathbb{R}^4$ CON DIM 3 $\exists$ BASE PARA V XXX

$A\in\mathbb{C}^{3\times3}$ UNA MATRÍZ TAL QUE $P_A=(x-2)(x^2+2)\Rightarrow$ A ES DIAGONALIZABLE.

EL POLINOMIO P_A TIENE 3 RAICES COMPLEJAS DISTINTAS Y POR LO TANTO A TIENE 3 AUTOVALORES DISTINTOS. COMO $A\in\mathbb{C}^{3\times3}$ A ES DIAGONALIZABLE.

SEA V UN SUBESPACIO DE $\mathbb{R}^4$ DE DIM 3 PROBAR QUE $\exists$ $v\in V, v\neq 0$, TAL QUE $T(v)=0$.

SABEMOS QUE PARA CUALQU TRANSFO $T:V\to W$ $\exists v\in V$ TAL QUE $T(v)=0\leftrightarrow Nu(T)\neq 0$ DADO QUE V ES SUBESP. DE $\mathbb{R}^4$ DE DIM $3\Rightarrow Nu(T)$ NO PUEDE SER 0

¿ES UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL?

$T(x,y)=(y,x,x-2y)$ ① $T(u+v)=T(v)+T(u)$ ② $T(\lambda v)=\lambda T(v)$

$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}=(y_1,x_1,x_1-2y_1)+(y_2,x_2,x_2-2y_2)$

$(y_1+y_2,\ x_1+x_2,\ (x_1+x_2)-2(y_1+y_2))=(y_1+y_2,\ x_1+x_2,\ x_1-2y_1+2)$

XXX QUE CONSISTE EN 3 VECTORES LI UNO DE ESOS PUEDE SER V Y T(V) SEA EL VECT. NULO LO Q' DEMUESTRA Q' $\exists$ V ✓

ENCONTRAR UNA BASE DEL NÚCLEO

$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \mid T(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3,\ x_1-x_2,\ 2x_2+x_3)$

$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{MENF}}\begin{bmatrix}1&0&1/2\\0&1&1/2\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+\frac{1}{2}x_3\\x_2+\frac{1}{2}x_3\\0\end{bmatrix}$

$\left.\begin{array}{l}x_1+\frac{1}{2}x_3=0\\x_2+\frac{1}{2}x_3=0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}x_1=-\frac{1}{2}x_3\\x_2=-\frac{1}{2}x_3\end{array}\right]\to x_1=x_2$ $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)$ $\bar{x}=(x_2,x_2,-2x_2)$

$x(1,1,-2)\Rightarrow Nu(T)=(1,1,-2)$

SEA V UN K-ESP. VECTORIAL NO NULO Y $T:V\to K$ UNA TRANSF. LINEAL PROPIA T=0 Ó T ES EPIMORFISMO

SI T NO ES LA TRANSFO NULA LA IMAGEN DE T TIENE DIM ≥ 1 COMO $\dim(K)=1\Rightarrow \dim(Im(T))=K$

LUEGO T ES EPIMORFISMO

SEA $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ Y $T(x,y,z)=(5x-y+5z,\ 2y,\ 2y-6x-6z)$ CALCULAR LOS AUTOVALORES Y SUS CORRESP. AUTOESPAC.

PARA ESTO ES CONVENIENTE EXPRESAR A T COMO MATRÍZ EN LA BASE CANÓNICA C. APLICAMOS T A DICHA BASE Y COLOCAMOS EL RESULTADO COMO COLUMNA DE UNA MATRÍZ

$[T]_C=\begin{pmatrix}5&-1&5\\0&2&0\\-6&2&-6\end{pmatrix}$ HACIENDO EL POLINOMIO CARAC. TENEMOS Q' $\lambda(\lambda+1)(\lambda-2)\Rightarrow$ LOS AUTOVALORES SON: $\{0,-1,2\}$

AHORA CALCULEMOS LOS AUTOESPACIOS $V_\lambda=Nu(\lambda Id-T)$

$V_2=Nu\begin{pmatrix}-3&1&-5\\0&0&0\\6&-2&8\end{pmatrix}=\langle(1,3,0)\rangle$ BASE DEL NUCLEO

② DECIDIR SI T ES DIAGONAL EN CASO QUE LO SEA, DAR UNA BASE $\mathcal{B}$ DE $\mathbb{R}^3$ TAL QUE LA MATRÍZ DE T EN DICHA BASE SEA DIAGONAL

EL CONJUNTO $\mathcal{B}=\{(-1,0,1),(-5,0,6),(1,3,0)\}$ DE LOS NUCLEOS ES LIN. INDEP. PUES CONSISTE EN AUTOVECTORES ASOC. A AUTOVAL DIFERENTES

COMO $|\mathcal{B}|=3=\dim\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ ES UNA BASE DE AUTOVECT. PARA T

LUEGO T ES DIAGONALIZABLE Y $[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ B ES LA BASE DONDE LA MAT. DE T ES DIAGONALIZAB.

SEA $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^{2\times2}$ LA TRANSFO. LINEAL DADA POR

$B_1=\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ $T(x,y,z)=\begin{pmatrix}x+y+z&2x-z\\x-y+z&z-3y-2x\end{pmatrix}$

$B_2=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\right\}$ CALCULAR $[T]_{B_1B_2}$

POR DEFINICION DE $[T]_{B_1B_2}$ DEBEMOS APLICAR T A LOS ELEMENTOS DE B_1 Y EXPRESARLOS COMO COMB. LINEAL DE LOS DE B_2. ES CONVENIENTE CONSIDERAR LA BASE INTERMEDIA

$C=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ PUES $[T]_{B_1B_2}=C(C,B_2)[T]_{B_1C}$ DONDE $C(C,B_2)$ DENOTA LA MATRÍZ DE CAMBIO DE BASE DE C A B_2

TENEMOS QUE:

$T(1,1,0)=\begin{pmatrix}2&2\\0&-5\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+(-5)\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

$T(0,1,1)=\begin{pmatrix}2&-1\\0&-2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+(-2)\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

$T(1,0,1)=\begin{pmatrix}2&1\\2&-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

LUEGO $[T]_{B_1C}$ SE OBTIENE DE PONER ESTAS COORD. COMO COLUMNA DE UNA MATRÍZ $[T]_{B_1C}=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&-1&1\\0&0&2\\-5&-2&-1\end{pmatrix}$

POR OTRO LADO, $C(C,B_2)$

$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

POR ENDE: $C(B_2,C)=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\\-1&0&0&4\end{pmatrix}\to$ VECTORES COLUMNAS

$C(C,B_2)=C(B_2,C)^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&0&0&-1\\-2&1&0&-2\\-3&0&1&-3\\1&0&0&1\end{pmatrix}$ MATRIZ CAMBIO DE BASE CON CANONICA.

FINALMENTE $[T]_{B_1B_2}=C(C,B_2)[T]_{B_1C}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}13&10&9\\8&-1&-1\\4&0&-1\\-3&0&1\end{bmatrix}$

TENGO $[w]_B=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ QUIERO SABER SU COORDENADAS EN LA BASE CANONICA $B=\{(1,1),(-1,2)\}$

$P_{BC}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}}_{\text{LAS COLUM. DE LA BASE B}}$ $P_{BC}\cdot[w]_B=[w]_C$ PODEMOS VERIFICAR ESTO ACORDANDONOS

$\begin{bmatrix}1&-1\\1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-1\\3+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ QUE SIGNIFICA QUE SEAN LAS COORDENADAS

AHORA ALREVES QUIERO SABER LAS COORD. DE $[w]_C=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

$P_{CB}\cdot[w]_C=[w]_B$ YO CONOZCO P_{BC} Y NECESITO P_{CB}

$P_{CB}=(P_{BC})^{-1}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&0\\1&2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{GAUSS}}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2/3&1/3\\0&1&-1/3&1/3\end{array}\right)=P_{CB}$ ✡

$\begin{pmatrix}2/3&1/3\\-1/3&1/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2-4\\-1-4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$

PARA PASAR DE UNA BASE B A UNA B' PODEMOS HACER UN PASO INTERMEDIO HACIENDO: $P_{BB'}=P_{CB'}\cdot P_{BC}$

① PONER b_1 Y b_2 EN COLUM (P_{BC}) ② b_1' Y b_2' EN COLUM Y CALCULA INVERSA $P_{CB'}$

DAR UNA BASE DE UN SUBESPACIO.

$W_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1-x_2+3x_4=0\ \wedge\ x_1+2x_2+3x_3+6x_4=0\}$

PONEMOS COMO MATRIZ:

$\begin{bmatrix}1&-1&0&3\\1&2&3&6\end{bmatrix}\xrightarrow{F_2-F_1}\begin{bmatrix}1&-1&0&3\\0&3&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{3}F_2}\begin{bmatrix}1&-1&0&3\\0&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&4\\0&1&1&1\end{bmatrix}$ $\begin{array}{l}x_1+x_3+4x_4\\x_2+x_3+x_4\end{array}$

$x_3=-4x_4-x_1\Rightarrow x_1=-4x_4-x_3$

$x_4=-x_2-x_3\Rightarrow(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-4x_4-x_3,\ x_2,\ -4x_4-x_1,\ x_2-x_3)$

$=x_2(0,1,0,1)+x_4(-4,0,-4,0)$

$B(W_1)=\{(0,1,0,1),(-4,0,-4,0)\}$

LA DIMENSIÓN DE P_3 (POLINOMIOS DE GRADO 3)

SEA V ESPACIO VECT. DE DIM. FINITA Y $V\neq\{0\}\Rightarrow\dim(V)>0$ (**) $\lambda v=0\Rightarrow\lambda=0$

COMO $V\neq\{0\}$ $\exists v\in V$ CON $v\neq\{0\}\Rightarrow S_0=\{v\}$ ES LI PUES (**). S_0 SE EXTIENDE A UNA BASE $|B|\geq|S_0|=1$, TENEMOS QUE $\dim V>0$

CALCULAR LAS COORDENADAS RESPECTO DE $\mathcal{B}=\{(1,-2,1),(2,-3,3),(-2,2,-3)\}$

$(1,0,1)=\alpha(1,-2,1)+\beta(2,-3,3)+\gamma(-2,2,-3)$

$(1,0,1)=(\alpha+2\beta-2\gamma,\ -2\alpha-3\beta+2\gamma,\ \alpha+3\beta-3\gamma)$

$1=\alpha+2\beta-2\gamma$
$0=-2\alpha-3\beta+2\gamma$
$1=\alpha+3\beta-3\gamma$

LOS VALORES QUE ME DAN α,β,γ SON LAS COORD. CON RESP. A $\mathcal{B}$

DADO EL CONJUNTO $B=\{Kx^2+K,\ x^2-Kx,\ x^2+Kx+1\}\subset P_2$ (POLINOMIO DE GRADO 2)

HALLAR LOS VALORES DE K PARA QUE B SEA UNA BASE DE P_2

$B(P_2)=3$. NECESITAMOS VER SI SON LI

$\alpha(Kx^2+K)+\beta(x^2-Kx)+\gamma(x^2+Kx+1)=0$

ESE 0 ES EL ELEM. NEUTRO $(0x^2+0x+0)$

$\left.\begin{array}{l}\alpha K+\beta+\gamma=0\\-\beta K+\gamma K=0\\\alpha K+\gamma=0\end{array}\right\}\left[\begin{array}{ccc|c}K&1&1&0\\0&-K&K&0\\K&0&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{MENF}}\begin{bmatrix}K&1&1\\0&-K&K\\0&0&-K\end{bmatrix}$

Si quiero que sea COMPAT. det. $K\neq 0\Rightarrow$ K PUEDE TOMAR CUALQUIER VALOR EXCEPTO 0

HALLE LAS COORD. DE LOS VECT. DE LA BASE CANON. EN LA BASE B. LA BASE CANON. DE $P_2=\{x^2,x,1\}$

$x^2=\alpha(x^2+1)+\beta(x^2-x)+\gamma(x^2+x+1)$

$\left.\begin{array}{l}1=\alpha+\beta+\gamma\\0=-\beta+\gamma\end{array}\right\}$ Buscar estos valores

DETERMINAR SI SON BASES MATRICES:

LA CANTIDAD DE VECTORES QUE SE NECESITAN SON FILAS * COLUMNAS (PARA 2X2 ES 4)

$\alpha_1\begin{pmatrix}0&2\\-3&3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0&-1\\2&0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2&1\\-2&1\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}4&-2\\2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$

$\begin{pmatrix}0&2\alpha_1\\-3\alpha_1&3\alpha_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-\alpha_2\\2\alpha_2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\alpha_3&\alpha_3\\-2\alpha_3&\alpha_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\alpha_4&-2\alpha_4\\2\alpha_4&-3\alpha_4\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2\alpha_3+4\alpha_4&2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_4\\-3\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3+2\alpha_4&3\alpha_1+\alpha_3-3\alpha_4\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

Tengo que probar que $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$

EL CONJUNTO DE COMB. LINEALES DE UN CONJ. DE VECT. ES UN SUBESPACIO VECTORIAL.

$S=\{\lambda_1v_1+\ldots+\lambda_kv_k\}$ YA QUE 0 SE PUEDE EXPRESAR

① $\bar{0}$ ES ES FACIL VER COMO COMB. LINEAL DE CUALQ CONJUNTO VACIO DE VECTORES. $\bar{0}\in S$.

② SUP. QUE U Y $V\in S$ $U=c_1v_1+\ldots+c_kv_k$ V_1 Y W_1 SON VECT EN S.

$U+V=(c_1v_1+\ldots+c_kv_k)+(d_1w_1+\ldots+d_kw_k)$ DE VECTORES

COMO CADA TERMINO ES UNA COMB. LINEAL EN S, $U+V$ ES UNA COMB. LINEAL DE VECTORES EN S $\Rightarrow U+V\in S$

③ $U\in S$ Y C ES ESCALAR

UNA TRANSFORMACION LINEAL NO POSEE AUTOVAL

SI TODOS LOS VECTORES EN EL ESPACIO SON LLEVADOS A VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTE EN LA IMAGEN, SI LA TRANSFO. LINEAL NO EXTIENDE UN SUBESPACIO.