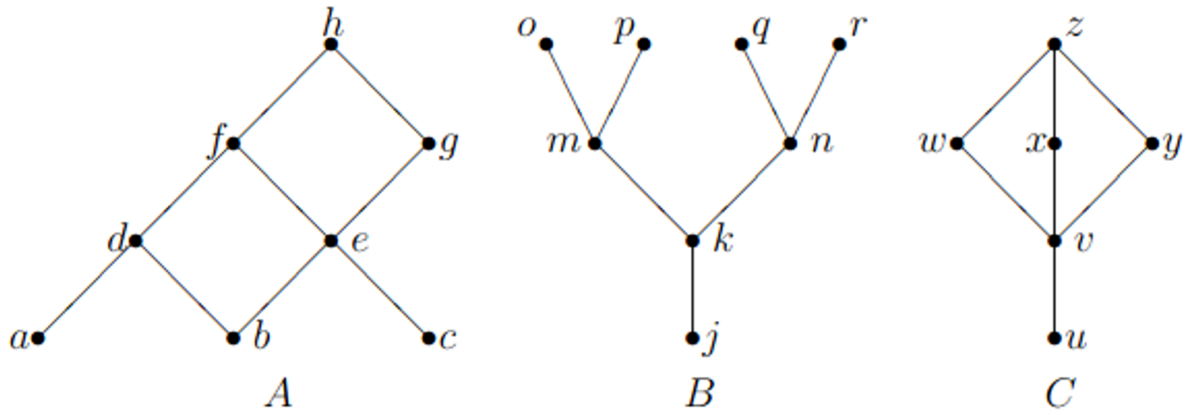
Práctico 2 - Posets

Ejercicio (1)

Considere los siguientes diagramas de Hasse.



a)

¿Cuáles son los elementos maximales y minimales de estos conjuntos?

- **Conjunto “A”**
  - Maximales → {h}
  - Minimales → {a, b, c}
- **Conjunto “B”**
  - Maximales → {o, p, q, r}
  - Minimales → { j }
- **Conjunto “C”**
  - Maximales → {z}
  - Minimales → {u}

b)

¿Cuáles de estos conjuntos tienen mínimo, cuáles máximo?

- **Conjunto “A”**
  - Máximo → {h}
  - Mínimo → No tiene, ya que no hay un nodo menor a todos.
- **Conjunto “B”**

- Máximo → No tiene, no hay un nodo mayor a todos
- Mínimo → {j}

- **Conjunto "C"**
  - Máximo →{z}
  - Mínimo → {u}

c)

En el diagrama A, ¿qué elementos cubren a e?

Los elementos que cubren a "e" son: {f, g, h}

d)

Para cada uno de los siguientes conjuntos determine el conjunto de cotas superiores y, de existir, determine el supremo.

$\{\mathrm{d}, \mathrm{c}\}\ \{\mathrm{w}, \mathrm{y}, \mathrm{v}\}\ \{\mathrm{p}, \mathrm{m}\}\ \{\mathrm{m}, \mathrm{n}\}\ \{\mathrm{z}\}$

- {d, c}
  - Cotas superiores → {f, g, h}
  - Supremo → {f}
- {w, y, v}
  - Cotas superiores → {z}
  - Supremo → {z}
- {p, m}
  - Cotas superiores → {e, f, g, h}
  - Supremo → {}
- {m, n}
  - Cotas superiores → {e, f, g, h}
  - Supremo → {}
- {z}
  - Cotas superiores → {e, f, g, h}
  - Supremo → {}

e)

Para cada uno de los siguientes conjuntos determine el conjunto de cotas inferiores y,
de existir, determine el ínfimo.

$\{a, g\}$ $\{g, a, f\}$ $\{z\}$

- {a, g}
  - Cotas superiores → {f, g, h}
  - Supremo → {f}
- {g, a, f}
  - Cotas superiores → {z}
  - Supremo → {z}
- {z}
  - Cotas superiores → {e, f, g, h}
  - Supremo → {}

Ejercicio (2)

Determine y justifique si son V o F las siguientes afirmaciones para un poset (P, ≤):

a)

Si P tiene elemento máximo x, entonces x es el único elemento maximal.

Volviendo a la definición un elemento x es el máximo, si es el más grande, y a su vez si tiene máximo es único ya que domina a todos los otros.

Por otro lado, un elemento x es maximal, si no es menor que ningún otro.

Entonces en un poset si x es el elemento máximo, x es mayor o igual que todos los elementos del conjunto, por lo tanto no puede haber ningún otro elemento que sea mayor que x, lo que implica que no puede haber otro elemento maximal diferente, ya que cualquier otro elemento sería menor o igual a x, lo que no cumpliría con la definición de maximal.

b)

Si P es finito y tiene un único elemento maximal x, entonces x es el máximo.

Recordemos la diferencia entre maximal y máximo:

- Un elemento es maximal si no existe ningún otro elemento que lo supere en el orden del poset, es decir, no existe y∈P tal que x<y.
    - O sea no tiene nada arriba
- Un elemento es máximo si es mayor o igual a todos los elementos del poset, es decir, para todo y∈P, se cumple que y≤x.
    - Es el estrictamente mas grande que todos

Si x es el único maximal, entonces debe ser mayor o igual a todos los demás elementos de P, porque si existiera otro elemento no comparable con x, entonces ese elemento también sería maximal, lo que contradice la unicidad de x. Por lo tanto, x es el máximo.

Ademas de que es obvio imaginarlo.

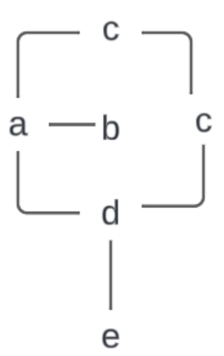
Ejercicio (3)

Sea P = {a, b, c, d, e}. Para cada ítem de un diagrama de Hasse que satisfaga las condiciones.

a)

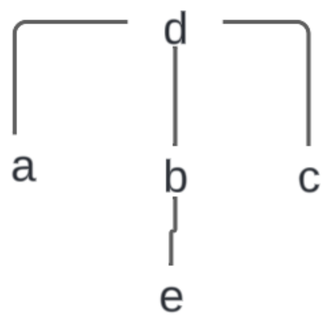
El supremo de {a, b} es c, y el ínfimo es d.

Ademas el ínfimo de P es e.



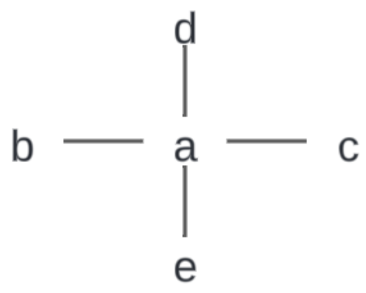
b)

El supremo de {a, b}, el supremo de {a, c} y el supremo de {b, c} coinciden, y son todos el elemento d.



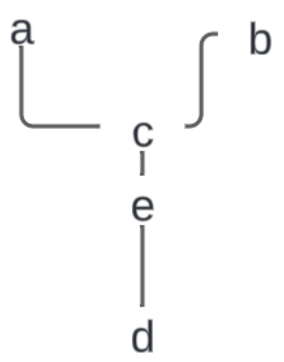
c)

P no tiene supremo ni ínfimo.



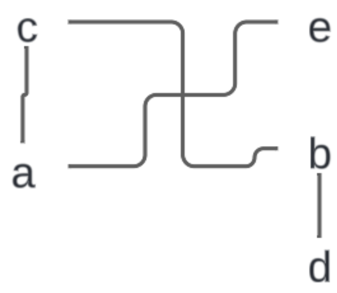
d)

El supremo de {a, b} no existe puesto que {a, b} no tienen cotas superiores.



e)

Aunque {a, b} tiene cotas superiores, el supremo de {a, b} no existe.



Ejercicio (4) (no completado)

Sea P := [0, 1) ∪ [2, 3) el subconjunto de R con el orden heredado. Decidir y justificar si son V o F las siguientes afirmaciones:

a)

Para todo a, b ∈ P , existe sup{a, b}.

b)

Existe sup [2, 3).

c)

sup [0, 1) = 1.

Ejercicio (5)

Sea (P, ≤) un poset reticulado. Pruebe que sup(S) y ınf(S) existen para cualquier S ⊆ P finito y no vacío.

Si (P, ≤) es un poset reticulado, entonces para todo a y b en P existe el supremo y el infimo.

O sea para cualquier a,b∈P existen:

- sup{a, b}: El menor elemento en P que es mayor o igual que a y b.
- inf{a, b}: EL mayor elemento en P que es menor o igual que a y b

Primero demostraremos que existe el sup(S):

Sea S={a1,a2,...,an}⊆P un conjunto finito y no vacío de elementos en P.

Sabemos que en un poset reticulado:

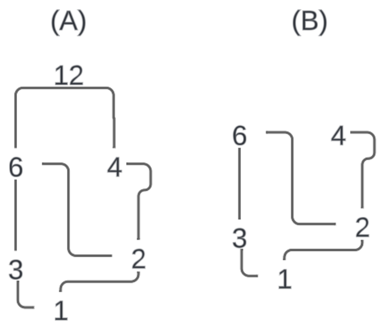
- Para cualquier par a1, a2∈P, existe sup{a1,a2}, porque P es un poset reticulado.
- Definamos z = sup{a1,a2}.
- Ahora podemos hacer lo mismo para el siguiente elemento del conjunto:
  - z y a3, como es un poset reticulado, tambien existe sup{z, a3} que le llamamos z2
- Asi podemos continuar con todos los elementos de S, construyendo el supremo de todos los elementos paso a paso

Para demostrar que existe el infimo, es totalmente la misma idea.

Ejercicio (6)

a)

Dibuje los diagramas de Hasse de A = ({1, 2, 3, 4, 6, 12}, |) y B = ({1, 2, 3, 4, 6}, |).



b)

¿Cuales de esos posets son reticulados?

El, (A) es reticulado ya que existe un supremo y un ínfimo para todo (a, b).

En cambio el (B) no es reticulado, por por ejemplo, no existe el supremo de {3, 4} o de {4, 6}.

c)

Calcular 4 ∧ (2 ∨ 3) en ambos posets.

Recordemos que:

- (a ∨ b) = sup{a, b}
- (a ∧b) = inf{a, b}

Entonces calculemos:

- **Poset A:**
  - 4 ∧ (2 ∨ 3)
  - 4 ∧6
  - 2
- **Poset B:**
  - 4 ∧ (2 ∨ 3)
  - 4 ∧ 6
  - 2

d)

Determinar un subconjunto de (P({a, b, c}), ⊆) cuyo diagrama de Hasse sea B