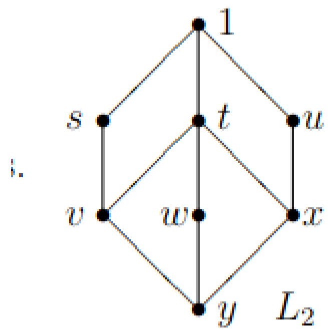
Práctico 4 - Complementos, distributividad, álgebras de Boole, átomos e irreducibles

Ejercicio 1

Considere el reticulado L2 de la siguiente figura.



(a)

¿Es L2 un reticulado complementado?

- y → El complemento de 1
- x → El complemento es s
- w → El complemento es s
- v → El complemento es u
- s → El complemento es x
- u → El complemento es v
- t → No tiene complemento

Como t no tiene complemento, L2 no es complementado.

(b)

Encuentre un elemento con dos complementos.

Visto anteriormente, s tiene dos complementos, x y w. También podemos ver que tiene 3 complementos, ya que u también es complemento de s.

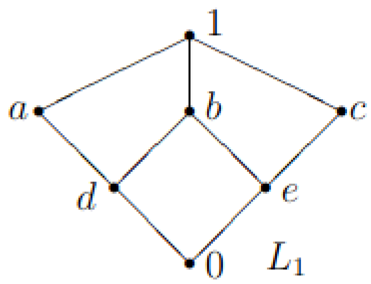
(c)

¿Es L2 un reticulado distributivo?

NO es distributivo, ya que se encuentra incrustado M3.

Ejercicio 2

Considere el reticulado L1



a)

De todos los complementos, si es que hay, de los siguientes elementos: a, b, d, 0.

- **a**
  - c
  - e
- **b**
  - no tiene
- **d**
  - c
- **0**
  - 1

b)

¿Es L1 un reticulado complementado?

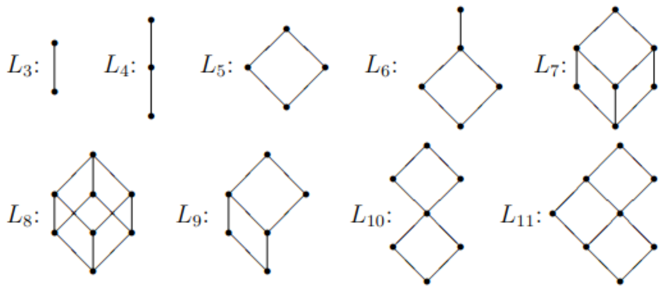
No. Ya que b no tiene complemento.

c)
(no completado)

¿Es L1 un reticulado distributivo?

Ejercicio 3

Considere los siguientes diagramas.



a)

Decidir si L9 o L10 se incrustan en L11.

L9 si. L10 También.

b)

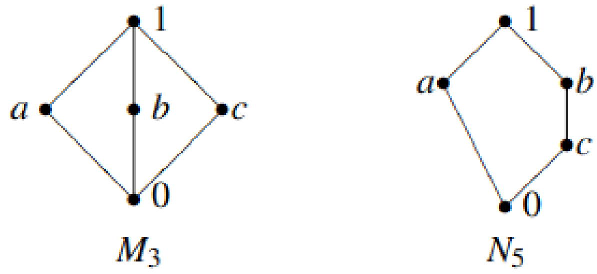
¿De cuantas maneras distintas puede incrustarse L5 en L10?

De 2.

c)

¿Se incrusta N5 en L8? ¿Se incrusta M3 en L10?

Recordemos a N5 y M3:



Si. Se incrusta N5 en L8.

M3 en LA10 no se incrusta.

d)

Determine cuales son isomorfos a algún Dn.

- **L3** → Es isomorfo a cualquier n primo.
- **L4** →Es isomorfos a n = p * p, con p primo.
- **L5** → Es isomorfo a n = p * q, con p y q primos diferentes
- **L6** → No es isomorfo a ningún Dn
- **L7** → No es isomorfo a ningún Dn
- **L8** → Es isomorfo a n = p * q * r, con p, q, r primos diferentes
- **L9** → Es isomorfmo a n = p * q * q, con p y q primos diferentes.
- **L10** → No es isomorfo a ningún Dn
- **L11** → No es isomorfo a ningún Dn

e)

Determine cuales se incrustan en P(X) para algún conjunto X.

- **L3** → Con x = {a},
- **L4** → Con x = {a, b}
- **L5** → Con x = {a, b}
- **L6** → Con x = {a, b, c}
- **L7** → Con x = {a, b, c}
- **L8** → Con x = {a, b, c}

- **L9** → Con x = {a, b, c}
- **L10** → Con x = {a, b, c, d}
- **L11** → Con x = {a, b, c, d}

f) (no completado)

Determine cuales son reticulados distributivos.

g) (no completado)

Determine cuales admiten estructura de álgebra de Boole.

Ejercicio 4

Determine si los poset reticulados (D18, |) y (D30, |) son complementados y/o distributivos.

- (D18, |) Es complementado?
  - 1 → El complemento es 18, sup{1, 18} = 18, inf{1, 18} = 1
  - 2 → El complemento es 9, sup{2, 9} = 18, inf{2, 9} = 1
  - 3 → No tiene complemento
  - 6 → No tiene complemento
  - 9 → El complemento es 2, por reciprocidad de (2)
  - 18 → El complemento es 1, por reciprocidad de (1)

  Como no todos los elementos tienen complemento. D18 no es complementado.

  Es distributivo. Ya que no contiene subreticulos isomorfos a M3 y N5.

- (D30, |) Es complementado?
  - 1 → El complemento es 30, sup {1, 30} = 30, inf{1, 30} = 1
  - 2 → El complemento es 15, sup{2, 15} = 30, inf{2, 15} = 1

- 3 → El complemento es 10, sup{3, 10} = 30, inf{3, 10} = 1
- 5 → El complemento es 6, sup{5, 6} = 30, inf{5, 6} = 1
- 6 → El complemento es 5, por reciprocidad de (5)
- 10 → El complemento es 3, por reciprocidad de (10)
- 15 → El complemento es 2, por reciprocidad de (2)
- 30 → El complemento es 1, por reciprocidad de (1)

Como todos los elementos tienen complemento. D30 es complementado.

Es distributivo. Ya que no contiene subreticulos isomorfos a M3 y N5.

Ejercicio 5

Dar el diagrama de Hasse de un reticulado no distributivo donde todo elemento tenga a lo sumo un complemento.

N5 es no distributivo, y todos los elementos tienen complemento.

Ejercicio 6

Enumere todos los métodos que utilizo en los ejercicios anteriores para determinar si un reticulado era o no distributivo. Es importante también identificar los resultados teóricos que están implicados en cada método.

- Un reticulado es distributivo si y solo si no contiene subreticulados isomorfos a M3 y N5.
- Cualquier orden total es un reticulado distributivo.
- Reticulos isomorfos a el reticulado P(A) (subconjuntos de un conjunto A) es distributivo.

Ejercicio 7

Sea S un reticulado.

(a)

Demuestre que si x ≤ y, entonces para todo z en S, x ∨ (z ∧ y) ≤ (x ∨ z) ∧ y.

$$\begin{gathered}\text{Tomemos la primera parte:}\\ x \vee (z \wedge y)\\ \{\text{Por desigualdad distributiva }\}\\ x \vee (z \wedge y) \leq (x \vee z) \wedge (x \vee y)\\ \{\text{Como } x \leq y \to x \vee y = y\}\\ x \vee (z \wedge y) \leq (x \vee z) \wedge y\\ \text{De esta manera queda demostrada la desigualdad}\end{gathered}$$

(b)

Demuestre que si S es distributivo vale la igualdad.

$$\begin{gathered}\text{Tomemos la primera parte:}\\ x \vee (z \wedge y)\\ \{\text{Como s es distributivo, por propiedad: }\}\\ x \vee (z \wedge y) = (x \vee z) \wedge (x \vee y)\\ \{\text{Como } x \leq y \to x \vee y = y\}\\ x \vee (z \wedge y) = (x \vee z) \wedge y\\ \text{De esta manera queda demostrada la igualdad}\end{gathered}$$

(c) (no completado)

Si en un reticulado vale la igualdad para todo x ≤ y, ¿es distributivo?

Ejercicio 8

Sea S un ret. distributivo, y sean x, y, a ∈ S. Demostrar que si se satisfacen las propiedades x ∨ a = y ∨ a   &   x ∧ a = y ∧ a (ambas), entonces x = y.

$$\text{Tenemos que:}$$
$$x \vee a = y \vee a \text{ y ademas:}$$
$$x \wedge a = y \wedge a$$

$$\text{queremos probar que:}$$
$$x = y$$

$$\text{empezemos suponiendo que son iguales:}$$
$$x = y$$
$$\{\text{Por absoricion } x \vee (x \wedge a) = x\}$$
$$x \vee (x \wedge a) = y \vee (y \wedge a)$$
$$\{\text{Por distributividad de reticulados distributivos }\}$$
$$(x \vee x) \wedge (x \vee a) = (y \vee y) \wedge (y \vee a)$$
$$\{\text{ Idempotencia }\}$$
$$x \wedge (x \vee a) = y \wedge (y \vee a)$$
$$\{\text{Por lo anterior (antecedente): } x \vee a = y \vee a \text{ reemplazamos }\}$$
$$x \wedge (y \vee a) = y \wedge (x \vee a)$$
$$\{\text{Distributivad de reticulados distributivos }\}$$
$$(x \wedge y) \vee (x \wedge a) = (y \wedge x) \vee (y \wedge a)$$
$$\{\text{Conmutatividad y antecedente }\}$$
$$(x \wedge y) \vee (x \wedge a) = (x \wedge y) \vee (x \wedge a)$$
$$\text{Los dos lado tan iguale, joya bro}$$

Ejercicio 9 (no completado)

Recíprocamente, sea S un reticulado que satisface lo siguiente: para todo x, y, a ∈ S, si x ∨ a = y ∨ a & x ∧ a = y ∧ a, entonces x = y. Demuestre que S es distributivo.
Ayuda: observar lo que ocurre en M3 y N5.

-
