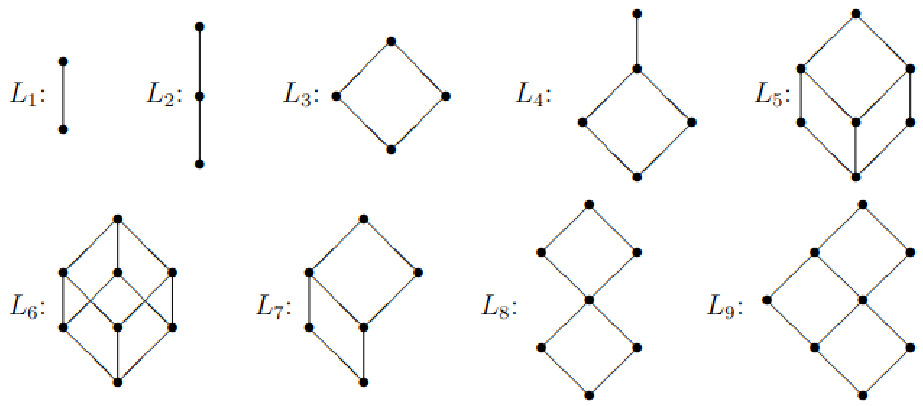
Práctico 6: Teorema de Birkhoff para reticulados distributivos finitos.

Ejercicio 1

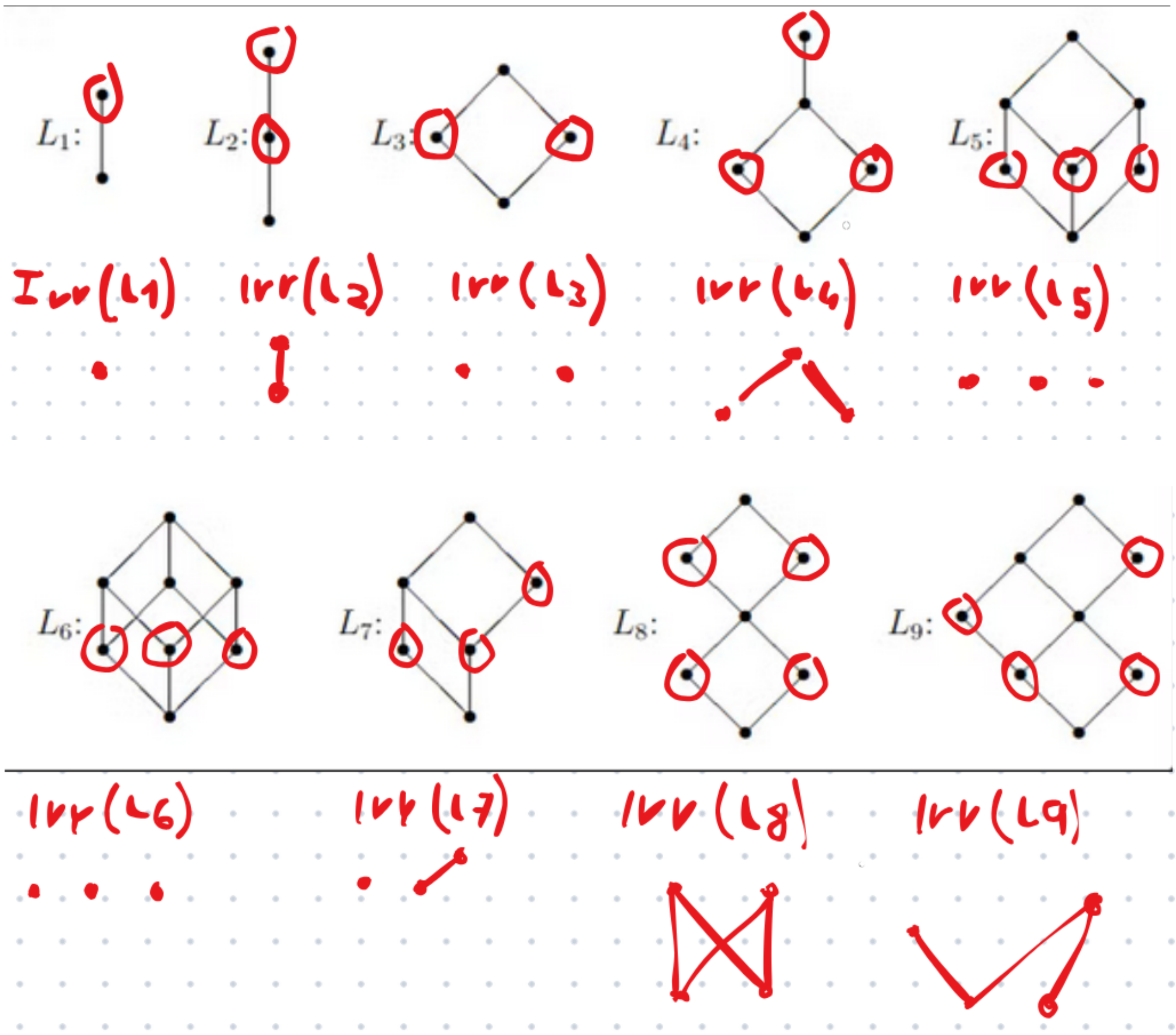
Para cada uno de los reticulados diagramados:



a)

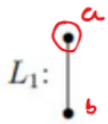
Dibuje el diagrama de Hasse del poset de elementos irreducibles.

Las marcas en el diagrama son los irreducibles, y abajo se encuentra el diagrama de hasse de los irreducibles:

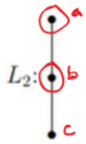


b)

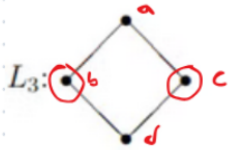
Dibuje en cada caso el diagrama de Hasse de D(Irr(L)).



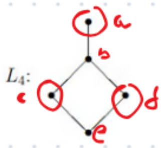
Los conjunto en L1 = {{a}}
Subconjuntos posibles = {{vació}, {a}}
Observamos que {a} es decreciente
Y {vacio} tambien entonces:



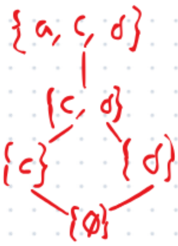
Los conjunto en L2 = {{a}, {b}}
Subconjuntos posibles = {{vació}, {a}, {b}, {a, b}}
Observamos que {a} que no están todos los elementos <= a, porque falta b.
{b} si es decreciente y {a, b} también lo es.

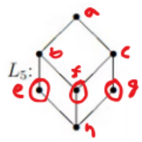


Los conjunto en L2 = {{b}, {c}}
Subconjuntos posibles = {{vació}, {b}, {c}, {c, b}}
Observamos que {b} es decreciente
{c} tambien es decreciente y {c, b} también lo es.

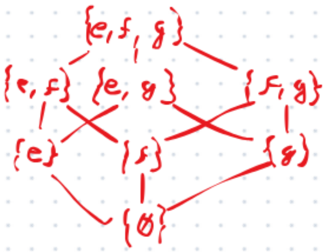


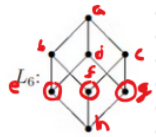
Los conjunto en L4 = {{a}, {c}, {d}}
Subconjuntos posibles = {{vació}, {a}, {c}, {d}, {a, c}, {a, d}, {c, d}, {a, c, d}}
Observamos que {a} no es decreciente, ya que tendrían que estar c y d.
{c} si es decreciente al igual que {d}
{a, c} no es decreciente porque falta d. lo mismo con {a, d}. {c, d} si es decreciente y {a, c, d} tambien lo es.



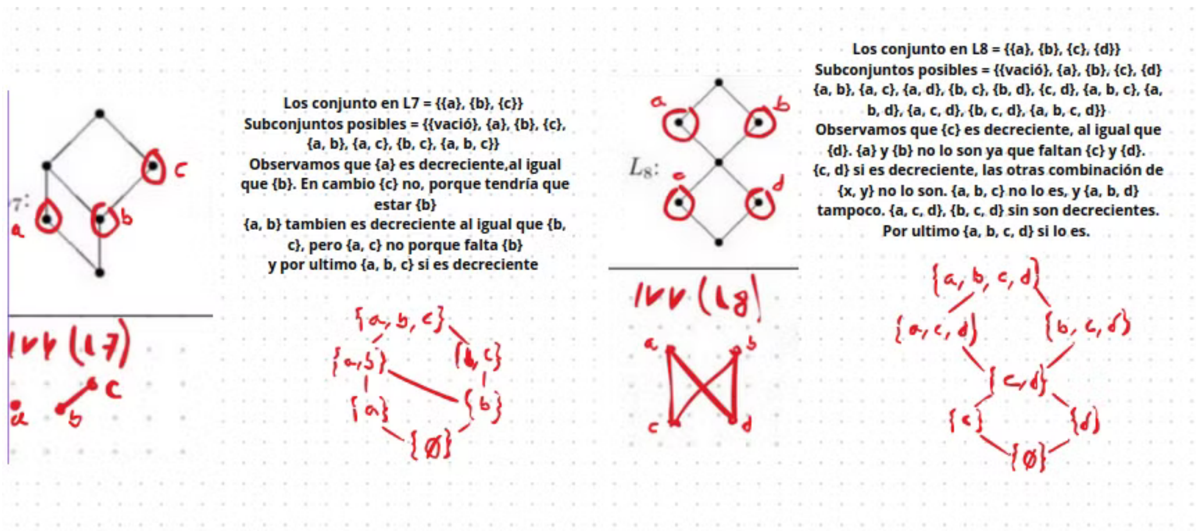


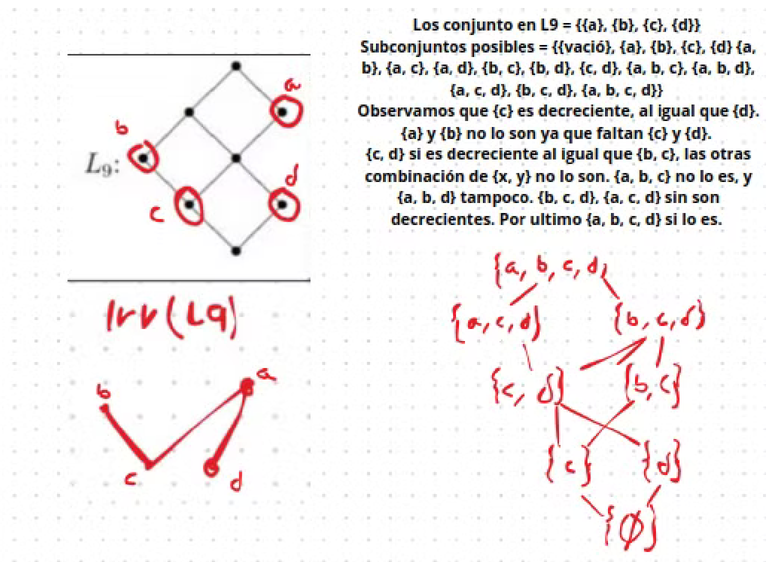
Los conjunto en L2 = {{e}, {f}, {g}}
Subconjuntos posibles = {{vació}, {e}, {f}, {g}, {e, f}, {e, g}, {f, g}, {e, f, g}}
Observamos que {e} es decreciente, al igual que {f} y que {g}. Por lo tanto {e, f} y {e, f} tambien son decrecientes y {f, g} y {e, f, g} tambien. Todos los subconjunto son decrecientes.





Vemos que los irreducibles son los mismo que L5. Por lo tanto el diagrama y el análisis es el mismo.





c)

Utilice el Teorema de Birkhoff para determinar si es distributivo o no.

Recordemos que el Teorema de Birkhoff nos dice que: “Todo retículo distributivo finitos es isomorfos al retículo de los subconjuntos decrecientes de un poset”

- L1 → Es distributivo, por el teorema (ver los gráficos anteriores)
- L2 → Es distributivo.
- L3 → Es distributivo.
- L4 → Es distributivo.
- L5 → No es distributivo, ya que no es isomorfo los dos retículos.

- L6 → Es distributivo.
- L7 → Es distributivo.
- L8 → Es distributivo.
- L9 → Es distributivo.

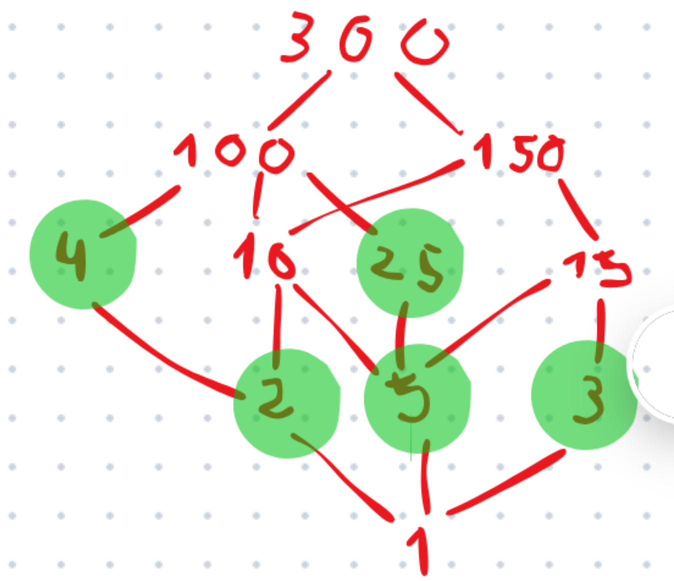
Ejercicio 2

a)

Determine Irr(D300).

Yo se que 300 = 2^2 * 3 * 5^2, con esto se me hace mas fácil hacer el diagrama de hasse, ay que son las combinaciones de los 3, teniendo en cuenta los exponente que también forman parte.

La siguiente imagen esta mal, me di cuenta después me falta el 20 y el 6 y un montón mas ajsjasj



b)

Describa de la manera aritmética cuales son los elementos irreducibles de Dn.

A n lo podemos escribir como producto de primos, entonces n = p1^r1 * p2^r2 * p3^r3 ... * pk^rk, donde pi es primo y ri es un natural.

Entonces podemos decir que los irreducibles de Dn, son todos los pi, y los pi ^ ri, algo asi mas o menos.

c)

¿Que forma tiene los posets Irr (Dn) en general?

- Todos los primos de su descomposición son elementos aislados y sin relación de orden entre los primos.
- Las potencias de primos son los que tendrán relación de orden con los primos.
- EL diagrama sera bastante sencillo, ya que son primos aislados que pueden tener o no elementos arriba, pero no habrá conexión entre ellos.

Ejercicio 3

Determine cuando Dn es isomorfo a algún P(X). En tal caso, de un X adecuado y describa explícitamente el isomorfismo.

Sabemos que Dn es isomorfo, porque son los divisores.

Por lo tanto para ser isomorfo a algún x, x tiene que ser finito, entonces:

$D_n \text{ es isomorfo a algún } \mathrm{P(X)} \leftrightarrow \text{ n es producto de primos distintos entre si}$
Una verga dar el isomorfismo general, es un quilombo loco.

Ejercicio 4 (no completado)

De todos los reticulados distributivos con exactamente 3 elementos irreducibles.

Ejercicio 5 (no completado)

Sean (L, ≤L) y (M, ≤M) posets. Considere el conjunto L × M con ≤ definida ası: (x1, y1) ≤ (x2, y2) si x1 ≤L x2 y y1 ≤M y2.

a)

Sea n la cadena de n elementos. D´e los diagramas de Hasse de :

1. 2×4
2. $P(\{a, b\}) \times 2$.
3. $2 \times (2 \times 2)$.

b)

Pruebe que si L y M son reticulados entonces L × M también lo es. De explícitamente las operaciones

$(x1, y1) \wedge (x2, y2)$

$(x1, y1) \vee (x2, y2)$

c)

Defina el producto B0 × B1 de las álgebras de Boole B0 y B1 y pruebe que es un álgebra de Boole.

d)

Pruebe que si L y M son distributivos, entonces L × M tambien lo es.
