Practico 1 - Relaciones

GUÍAS DE LOS EJERCICIOS

Ejercicio (1)

Determine si la relación dada es una relación de equivalencia sobre {1, 2, 3, 4, 5}. Si la relación es de equivalencia, indique las clases de equivalencia.

(a)

{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1)}

Para determine si la relación es de equivalencia, tenemos que demostrar que es reflexiva, simétrica y transitiva, ya que es la definición de relación de equivalencia.

1. **Reflexiva:**
   - Recordando la definición: $\text{si para todo } a \in A, (a, a) \in R$
   - Llamamos R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1)}
   - Llamamos A = {1, 2, 3, 4, 5}
   - $\text{Vemos que para todo } a \in A, (a, a) \in R$
   - Osea observamos que todos nuestros a son:
     - {1} {2} {3} {4} {5}
     - y entonces nuestro (a, a) son: {1, 1}, {2, 2}, {3, 3}, {4, 4}, {5, 5}
     - Y ahora si observamos R vemos que todos los (a, a) anteriores están en R por lo tanto podemos decir que la relación ES REFLEXIVA.
2. **Simétrica:**
   - Recordando la definición: $\text{si para todo a, b} \in A,\ \text{si (a, b)} \in R \text{ entonces (b, a)} \in R$
   - Observamos que tenemos 7 pares de elementos en R, pero solo dos de ellos son diferentes y hay que analizarlos.
   - Ya que los pares (a, a) es obvio que se cumple porque $\text{si (a, b)} \in R \text{ entonces (b, a)} \in R$ porque a = b.
   - Los dos diferentes son (1, 3) y (3, 1) y obviamente también se cumple que ES SIMÉTRICO, ya que: $(1, 3) \in R \text{ y } (3, 1) \in R$.
3. **Transitiva:**

- Recordando la definición: $\text{si para todo a, b, c } \in A,\ \text{si } (a,b) \in R \text{ y } (b,c) \in R \text{ entonces } (a,c) \in R$
- Entonces, viendo las relaciones reflexivas, las (a, a) como no hay una forma de obtener (a, b) donde a ≠ b, no necesitamos verificar nada así que en este caso la transitividad no se viola, y por lo tanto sigue siendo transitiva.
- Ahora verificamos el par (1, 3) y (3, 1):
    - Como $(1,3) \in R \text{ y } (3,1) \in R \to (1,1) \text{ tendria que } \in R$
    - Esto se tiene que cumplir para que sea transitiva, y viendo R, vemos que (1, 1) esta, por lo tanto se cumple la condición.
    - Es trivial verificar (3, 1) porque en este caso a = c

Como la relación es de equivalencia, vamos a indicar las clases:

Recordando la definición:

Dada una relación de equivalencia R sobre un conjunto A, para cada elementos a en A, definimos la clase de equivalencia de a como:

$[a] = \{b \in A : (a,b) \in R\}$

- Sabemos que A = {1, 2, 3, 4, 5}
- Entonces los elementos que tenemos son: {1}, {2}, {3}, {4}, {5}
- Y siguiendo la definición, todas las clases son:
    - Para 1: Los pares que involucran a 1 son (1, 1) y (1, 3) entonces:
        - [1] = {1, 3}
    - Para 2: Los pares que involucran a 2 son (2, 2) entonces:
        - [2] = {2}
    - Para 3: Los pares que involucran a 3 son (1, 3), (3, 1) y (3, 3) entonces:
        - [3] = {1, 3}
    - Para 4: Los pares que involucran a 4 son: (4, 4) entonces:
        - [4] = {4}
    - Para 5: Los pares que involucran a 5 son: (5, 5) entonces:

        - [5] = {5}

    Por lo tanto las clases de equivalencias dad por la relación de R en el conjunto A son: {1, 3}, {2}, {4}, {5}

(b)

{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}

Obviamente hay que hacer lo mismo, demostrar que es transitiva, simétrica y reflexiva.

Llamamos:

- Llamamos A = {1, 2, 3, 4, 5}
- Llamamos R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}
- **Reflexiva:**
    - Sabemos que los elementos son: {1}, {2}, {3}, {4}, {5}
    - Entonces lo que hay que comprobar es que (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5) están en el conjunto.
    - Vemos que (5,5) no esta en R, por lo tanto **no** es reflexiva.

Y como no es reflexiva, no es una relación de equivalencia.

(c)

{(x, y) | 1 ≤ x ≤ 5, 1 ≤ y ≤ 5}:

Lo mismo que lo anterior, pero ahora nuestro R, va a contener todo los pares (x, y).

- **Reflexiva:**
    - Llamamos A = {1, 2, 3, 4, 5}
    - Llamamos R = {(x, y) | 1 ≤ x ≤ 5, 1 ≤ y ≤ 5}
    - Vemos que todos los pares (x, y) con x = y están, por lo tanto es reflexiva, ya que están los (x, x).
- **Simétrica:**
    - Observamos que todos los (a, b) que están en R, también van a a estar los (b, a) ya que estan todos las combinaciones posibles de dos elementos de estos conjuntos {1, 2, 3, 4, 5}, y {1, 2, 3, 4, 5}

- **Transitiva:**
  - Observando también lo vemos ya que $\text{para todo a, b, c } \in A, \text{ si } (a, b) \in R \text{ y } (b, c) \in R \text{ entonces } (a, c) \in R$

  Como es una relación de equivalencia vamos a nombras las clases:

  {1, 2, 3, 4, 5}

Ejercicio 2

Determine si las siguientes relaciones sobre Z son reflexivas, simétricas, antisimetricas o transitivas:

(a)

(x, y) ∈ R si $x^2 = y^2$,

observemos que tenemos dos opciones: x = y ó x = -y, con esto vemos que se cumplen las siguientes relaciones en verde:

- Reflexiva
- Simétrica
- Antisimetrica
  - Recordando la definición → $\text{si para todo a, b } \in A, \text{ si } (a, b) \in R \text{ y } (b, a) \in R \text{ entonces } (a = b)$
  - Entonces no necesariamente x = y en nuetro caso ya que x = -y, por ejemplo x = 2, y = -2.
  - $x^2 = 2^2 = 4 \text{ y } y^2 = (-2)^2 = 4$ entonces tenemos que $(2, 4) \in R \text{ y } (-2, 4) \in R \text{ sin embargo } 2 \neq -2$
- Transitiva

(b)

(x, y) ∈ R si x > y

- Reflexiva
  - No ya que nunca x = y, ya que x > y

- Por ejemplo: si $(2,2) \in R\, x = 2, y = 2, \rightarrow x \not> y$
- Simétrica
  - No ya que nunca vamos a poder lograr que un numero x < y este en R
  - Por ejemplo: $(4,2) \in R$ nunca $(2,4) \in R$ ya que $x < y$
- Antisimetrica
  - No ya que nunca vamos a obtener el x = y
  - Un ejemplo puede ser con cualquier de los anteriores
- Transitiva
  - Siii, por fin una que si loco ya me estaba asustando.
  - Recordando la definición → si para todo a, b, c $\in A$, si $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$ entonces $(a,c) \in R$
  - Siguiendo la definición →
    si $(a,b) \in R$ significa que a > b
    si $(b,c) \in R$ significa que b > c
    entonces tenemos :$a > b > c$
    en particular: $a > c$
    entonces $(a,c) \in R$

(c)

(x, y) ∈ R si x ≥ y

- Reflexiva
  - Si, ya que x puede ser igual a y, entonces tendríamos (x, y) con x = y, y tendríamos el (x, x) que queremos.
- Simétrica
  - Nop, ya que es simétrica en el único caso donde x = y, cuando x > y no es simétrica, lo dijimos en el punto anterior.
- Antisimetrica
  - Ahora si, ya que como dijimos anteriormente en el único caso donde es simétrica es cuando x = y, entonces es antisimetrica.
- Transitiva

- Poss si, es igual que en el punto anterior.

(d)

(x, y) ∈ R sii x ≠ y

- Reflexiva
  - Noo, osea, es bastante obvio me parece, porque nunca vamos a tener un (x, y) donde x = y, para tener el (x, x) porque x es diferente de y. (lo explique para el otro pero me parece bastante fácil de entender)
- Simétrica
  - Yes, existe todos las combinaciones de los pares (x, y) menos donde x = y, por lo tanto es simétrica.
- Antisimetrica
  - Nop, ya que es lo mismo, necesariamente necesita que x = y, y nunca se va a cumplir esto.
- Transitiva
  - Nou, puede exisit rel caso donde x ≠ y y y/= z, pero x puede ser igual a z.
  - Un ejemplo para entenderlo mejor: x = 1, y = 2, z = 1
    - $(x, y) \in R, \text{ ya que } 1 \neq 2$
    - $(y, z) \in R \text{ ya que } 2 \neq 1$
    - $(x, z) \notin R, \text{ ya que } 1 = 1$

Ejercicio 3

Utilizando las respuestas del ejercicio (2) determine para cada caso si la relación es de equivalencia y/o de orden. Recuerde que una relación de orden debe ser reflexiva, antisimetrica, y transitiva.

Simplemente nos fijamos en el ejercicio anterior.

- Relación de equivalencia → Reflexiva, simétrica y transitiva
- Relación de orden → Reflexiva, antisimetrica y transitiva

En el caso que sea reflexiva, transitiva, simétrica y antisimetrica, la relación es de equivalencia y de orden.

- (a) (x, y) ∈ R si $x^2 = y^2$, → Relación de **equivalencia.**
- (b) (x, y) ∈ R si x > y → **Ninguna** relación
- (c) (x, y) ∈ R si x ≥ y → Relación de **orden**
- (x, y) ∈ R sii x ≠ y → **Ninguna** relación

Ejercicio 4.

Sea A un conjunto y f una función definida en A. Probar que la relación R = {(x, y) ∈ A × A | f (x) = f (y)} es una relación de equivalencia sobre A. Comparar con 2a.

Para demostrar que es una relación de equivalencia, vamos a probar que se cumple que sea reflexiva, simétrica y transitiva.

- Reflexiva:
  - Es bastante trivial, ya que la condición es que f(x) = f(y)
- Simétrica:
  - $\text{si } (x, y) \in R \to f(x) = f(y)$
  - $\text{observamos que si } f(x) = f(y) \to f(y) = f(x)$
  - $\text{lo que significa } (y, x) \in R$
- Transitiva:
  - Si es transitiva, ya que f(x) = f(y) y f(y) = f(z) entonces, obviamente f(x) = f(z) y (x, z) pertenece a R

Ejercicio 5

Utilizando como motivación con los ejercicios 2b y 2c, responda:

(a)

Sea R una relación irreflexiva y transitiva ("relación de orden parcial estricto") sobre un conjunto A. Probar que R ∪ Igualdad_A es una relación de orden parcial sobre A.

Sea R una relación irreflexiva y transitiva sobre un conjunto A.
Queremos demostrar que $R \cup \text{Igualdad}_A$ es una relación de orden parcial sobre A.

Primero, definimos la relación $\text{Igualdad}_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$.
La relación $R \cup \text{Igualdad}_A$ debe ser:

1. Reflexiva:
Para cualquier $x \in A, (x, x) \in \text{Igualdad}_A$.
Por lo tanto, $(x, x) \in R \cup \text{Igualdad}_A$, entonces $R \cup \text{Igualdad}_A$ es reflexiva.

2. Antisimétrica:
Supongamos que $(x, y) \in R \cup \text{Igualdad}_A$ y $(y, x) \in R \cup \text{Igualdad}_A$.
Si $(x, y) \in \text{Igualdad}_A$, entonces $x = y$.
Si $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$, esto contradice la irreflexividad de R.
Por lo tanto, $R \cup \text{Igualdad}_A$ es antisimétrica.

3. Transitiva:
Supongamos que $(x, y) \in R \cup \text{Igualdad}_A$ y $(y, z) \in R \cup \text{Igualdad}_A$.
Si $(x, y) \in \text{Igualdad}_A$, entonces $x = y$ y, por lo tanto, $(y, z) = (x, z) \in R \cup \text{Igualdad}_A$.
Si $(y, z) \in \text{Igualdad}_A$, entonces $y = z$ y, por lo tanto, $(x, z) = (x, y) \in R \cup \text{Igualdad}_A$.
Si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces $(x, z) \in R \subseteq R \cup \text{Igualdad}_A$.
Por lo tanto, $R \cup \text{Igualdad}_A$ es transitiva.

Aclaración: Copiado de una demostracion hecha en el práctico

(b) (no completado)

¿Como se podrá obtener una relación de orden parcial estricto a partir de una relación de orden parcial?

Ejercicio 6

Liste los pares de la relación de equivalencia sobre {1, 2, 3, 4} definida por la partición dada. También señale las clases de equivalencia [1], [2], [3] y [4].

(a)

{1, 2}, {3, 4}

Para que sea una relación de equivalencia tiene que ser:

Reflexivo:

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)

Simétrico:

(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)

Transitivo:

No hace falta, porque solo hay dos elementos

Entonces los pares de la relación de equivalencia son:

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)

Para determinar las clases de equivalencia, recordando un poco que es, una clase de equivalencia [x] para un elemento x es el conjunto de todos los elementos que están relacionados con x bajo la relación de equivalencia.

[1] = {1, 2}

[2] = [1, 2}

[3] = {3, 4}

[4] = {3, 4}

(b)

{1}, {2}, {3}, {4}

En este caso observamos que cada elemento esta en su propio bloque, esto significa que la relación de equivalencia relaciona a cada elementos unicamente consigo mismo, (reflexiva)

Entonces los pares de la relación de equivalencia son: (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)

y las clases de equivalencia son:

$[1] = \{1\}$ $[3] = \{3\}$

$[2] = \{2\}$ $[4] = \{4\}$

Ejercicio 7

Sea R la relación "Fulano no es mas viejo que Mengano" sobre un conjunto de personas A.

Me parece mas fácil escribir la relación como: "Fulano es mas joven o tiene la misma edad que Mengano" o sea si lo volvemos un toque matemático seria x = Fulano, y = Mengano y $x \leq y$ seria la relación.

(a)

De un ejemplo, puede ser ficticio, de un conjunto A de personas en los cuales esa relación no sea un orden parcial.

En cualquier ejemplo donde haya personas diferentes y tengan edad diferentes no va a ser de orden parcial.

O sea para que la relación sea de orden parcial, se tiene que cumplir:

- Reflexividad:
    - Para todas las personas en el conjunto de personas se tiene que cumplir que $x \leq x$, o sea "Fulano no es mas viejo que si mismo" entonces esto es obvio, porque cada persona tiene la misma edad que si misma.
- Transitividad:
    - Aca tenemos que $x \leq y$ (o sea x no es mas viejo que y) y $y \leq z$ (y no es mas viejo que z) entonces $x \leq z$ (x no es mas viejo que z)
- Antisimetria:
    - Si $x \leq y$ (es decir, x no es más viejo que y) y $y \leq x$ (es decir, y no es más viejo que x), entonces x y y deben ser la misma persona o tener la misma edad.

Entonces podemos ejemplificar con el conjunto A = {Wolovick, Demetrio, Tiraboschi}

Y definimos la relación como:

R = {(Wolovick, Demetrio), (Demetrio, Tiraboschi), (Tiraboschi, Wolovick)}

Entonces vemos que no hay reflexividad, no tenemos al (Wolovick, Wolovick) por ejemplo; tampoco hay antisimetria, ya que están en una especie de relación circular. Y por ultimo no hay transitiva, Deberíamos tener (Wolovick, Tiraboschi) y no esta.

Aclaración → Los nombres corresponden a una ejemplificación no son personas en la vida real.

(b)

Explique que propiedad falla para que sea un orden parcial.

Lo explique en el punto anteriorr!
