Estructuras ordenadas

RELACIONES

Una relación será para nosotros un objeto matemático muy concreto.

Dados dos conjunto A y B, decimos que R es una *relación binaria de A en B* si y solo si $R \subseteq A \times B$

$$\text{Escribimos } aRb \text{ para denotar (a,b) } \in R \text{ y } a\not R b \text{ para denotar} (a,b) \notin R$$

Relaciones sobre conjunto

Dado un conjunto A, decimos que R es una relación sobre A si y solo si $R \subseteq A \times A$

Propiedades

Sea R una relación sobre A

- **Reflexiva**
  - $\text{si para todo } a \in A, (a,a) \in R$
- **Simétrica**
  - $\text{si para todo a, b} \in A, \text{ si (a, b) } \in R \text{ entonces (b, a)} \in R$
- **Transitiva**
  - $\text{si para todo a, b, c } \in A, \text{ si } (a,b) \in R \text{ y } (b,c) \in R \text{ entonces } (a,c) \in R$
- **Antisimetrica**
  - $\text{si para todo a, b } \in A, \text{ si } (a,b) \in R \text{ y } (b,a) \in R \text{ entonces } (a = b)$

Relaciones de equivalencia

$R \subseteq A \times A$ es una *relación de equivalencia* si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Dada una relación de equivalencia R sobre un conjunto A, para cada elementos a en A, definimos la clase de equivalencia de a como:

$[a] = \{b \in A : (a,b) \in R\}$

La clase de equivalencia [a] para un elemento a es el conjunto de todos los elementos que están relacionados con a bajo la relación de equivalencia.

$R \subseteq A \times A$ es una *relación de orden parcial* si es reflexiva, antisimetrica y transitiva.

Particiones de un conjunto

Una partición P de A es una familia de subconjuntos no vacíos de A que son disjuntos entre sı y cuya unión da todo A

Lema

Sea R una relación de equivalencia sobre A y sean a, b ∈ A. Entonces:

- [a] = [b] si y solo si (a, b) ∈ R
- Si (a, b) ∉ R entonces [a] ∩ [b] = ∅

  COROLARIO

  El conjunto A/R = {[a] : a ∈ A} de las clases de equivalencia es una partición de A.

  (Esto quiere decir que el conjunto de todas las clses de equivalencia de los elemntos de A, forma un particion de A)

POSET

Conjunto parcialmente ordenado. Un par (A, R) donde A es un conjunto y R es una relación de orden parcial sobre A.

Diremos que (A, ≤) es un poset finito si A es finito.

Cubre

Dados un poset (A, ≤) y a, b ∈ A decimos que b cubre a (a < b) si:

- $a \neq b$ y para cualquier $c \in A$, si $a \leq c \leq b \to c = a$ o $c = b$
- $a \leq b$

Diagrama de Hasse

Dado un poset finito (A, ≤), un diagrama de Hasse del mismo es un grafico en el que se representa la relación de "cubre" asociada, de forma que si b cubre a a hay una línea ascendente de a a b.

Subposets

Es un subconjunto de un poset que hereda la relación de orden del poset original.

Ejemplo y notación: Para cualquier n, llamamos $D_n = \{k \in N : k|n\}$

D6 = (D6, |), D15 = (D15, |), D28 = (D28, |) son subposets de (N, |).

Orden total

Dada un relación R sobre A decimos que R es un orden total sobre A si R es un orden parcial sobre A y ademas satisface que, para todo a, b ∈ A | a ≤ b o b ≤ a.

Cadena

Una cadena es un poset (A, ≤) en el que ≤ es un orden total sobre A.

Ejemplo: (R, ≤), (N, ≤), el orden lexicográfico.

Máximo, Mínimo, Maximal y Minimal

Sea P = (P, ≤) un poset y m ∈ P. Decimos que:

- **Máximo**
  - Definición → m es máximo de P si para todo a∈P, a ≤ m.
  - En criollo → El elemento mas grande en P. Si tiene máximo es único. Domino a todos los otros
  - En el diagrama es el nodo que esta por encima de **todos** los demás.
- **Mínimo**
  - Definición → m es mínimo de P si para todo a ∈ P, m ≤ a.
  - En criollo → El elemento mas chico en P. Si tiene mínimo es único. Dominado por todos los otros. En
  - En el diagrama es el nodo que esta por debajo de **todos** los demás.
- **Maximal**
  - Definición → m es maximal de P si para todo a ∈ P, si m ≤ a entonces a = m.
  - En criollo → En el diagrama es un nodo que no tiene ninguna arista arriba, no hay ningún nodo arriba de el.
  - O sea puede haber otros elementos en el ps=oset, que no estan relacionados con el maximal, pero no hay ningun elemento arriba del maximal. O sea que puede haber multiples maximales.
- **Minimal**
  - Definición → m es minimal de P si para todo a ∈ P, si a ≤ m entonces a = m
  - En criollo → En el diagrama es un nodo que no tiene ninguna arista abajo, no hay ningun nodo abajo de el

TEOREMA → Todo poset finito tiene al menos un elemento maximal (minimal).

Supremo e Ínfimo

Sea P = (P, ≤) un poset, c ∈ P y S ⊆ P. Decimos que:

- **Cota superior**
    - Definición→ c es cota superior de S si para todo a ∈ S, a ≤ c.
    - En criollo → La cota superior de un subconjunto s, son todos los elementos que están arriba en el diagrama de **todos** los nodos que hay en s.
    - O sea son todos los elmentos que pertenecen al psoet, que son mayores o iguales a todos los elemtnos del subconjunto.
- **Cota inferior**
    - Definición → c es cota inferior de S si para todo a ∈ S, c ≤ a
    - En criollo → La cota inferior de un subconjunto s, son todos los elementos que están abajo en el diagrama de **todos** los nodos que hay en s.

y ademas, si decimos que s, i ∈ P y S ⊆ P

- **Supremo**
    - Definición → s es el supremo de S si s es la menor de las cotas superiores de S. Escribimos s = sup(S).
    - En criollo → Es la cota superior mas baja.
- **Ínfimo**
    - Definición → i es el ınfimo de S si s es la mayor de las cotas inferiores de S.

      Escribimos i = inf(S)
    - En criollo → Es la cota inferior mas alta.

PROPIEDADES de supremos en ínfimos

1. **Leyes de idempotencia:**
    a. x ∨ x = x ∧ x = x
2. **Leyes conmutativas:**
    a. x ∨ y = y ∨ x
    b. x ∧ y = y ∧ x
3. **Leyes de absorción:**
    a. x ∨ (x ∧ y) = x
    b. x ∧ (x ∨ y) = x
4. **Leyes asociativas:**
    a. (x ∨ y) ∨ z = x ∨ (y ∨ z)
    b. (x ∧ y) ∧ z = x ∧ (y ∧ z)

Posets Reticulados

Dado un poset P = (P, ≤), decimos que P es un poset reticulado si para todos a y b en A existen el **supremo** y el **ínfimo** del conjunto {a, b}.

Notación: En los posets reticulados escribimos $a \vee b = \sup\{a, b\}$ y $a \wedge b = \inf\{a, b\}$

LEMA:

Sea (P, ≤) un poset reticulado y sean x, y, z ∈ P. Se satisfacen las siguientes equivalencias:

- $x \vee y \leq z$ si $x \leq z$ y $y \leq z$
- $z \leq x \vee y$ si $z \leq x$ y $z \leq y$

APLICACIONES:

- Leyes de compatibilidad o monotonía:
  - $x \leq y$ y $z \leq w$ implica $x \vee z \leq y \vee w$ (y $x \wedge z \leq y \wedge w$)
- Desigualdades distributivas:
  - $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ y $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Isomorfismo de posets

Sean P = (P, ≤) y Q = (Q, ≤') dos posets. Dada una funcion f : P → Q, decimos que f es un isomoforfismo entre P y Q si:

- f es biyectiva
- para todo x, y ∈ P,
  - $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq' f(y)$

Cuando existe uno de tales isomorfismos decimos que P y Q son isomorfos y escribimos P ~= Q

PROPOSICIÓN:

Sea f un isomorfismo de (P, ≤) en (Q, ≤') y sean u ∈ P y S ⊆ P. Entonces u es cota superior de S si f (u) es cota superior de $f(S) := \{f(x) : x \in S\}$.

LEMA:

Sea f un isomorfismo de (P, ≤) en (Q, ≤') y sea S ⊆ P. Entonces:

- Existe el supremo de S si existe el supremo de f (S). En tal caso se da ademas que:
  - $f(\sup(S)) = \sup(f(S))$
- Existe el ínfimo de S si existe el ínfimo de f (S). En tal caso se da ademas que:
  - $f(\inf(S)) = \inf(f(S))$

RETÍCULOS

Un retículo es una terna $(L, \varovee, \varowedge)$, donde L es un conjunto y $\varovee$ y $\varowedge$ son dos operaciones (binarias) que cumplen:

1. Idempotencia:
   $x \varovee x = x \varowedge x = x.$

2. Conmutatividad:
   $x \varovee y = y \varovee x,$
   $x \varowedge y = y \varowedge x.$

3. Absorción:
   $x \varovee (x \varowedge y) = x,$
   $x \varowedge (x \varovee y) = x.$

4. Asociatividad:
   $(x \varovee y) \varovee z = x \varovee (y \varovee z),$
   $(x \varowedge y) \varowedge z = x \varowedge (y \varowedge z).$

OBS: Como vimos anteriormente, dado un poset reticulado (L, ≤), las operaciones de supremo e ínfimo asociadas satisfacen todas estas propiedades por lo que (L, ∨, ∧) es un retículo.

TEOREMA:

Sea $(L, \varovee, \varowedge)$ un retículo y sea $\ll$ la relación sobre L definida por $x \ll y \iff x \varovee y = y$. Tenemos que $(L, \ll)$ es un poset reticulado y además $\sup\{x, y\} = x \varovee y$ y $\inf\{x, y\} = x \varowedge y$.

Subreticulados

Sea $(L, \vee, \wedge)$ un retículo y sea $S \subseteq L$. Diremos que S es un *subuniverso* de $(L, \vee, \wedge)$ si es cerrado por las operaciones $\vee$ y $\wedge$.
En tal caso, decimos que $(S, \vee|_S, \wedge|_S)$ (de aquí en más también obviaremos la notación de restricción) es un *subreticulado* o *subretículo* de $(L, \vee, \wedge)$.

También escribimos usualmente "$(S, \leq)$ es subreticulado de $(L, \leq)$" pero nos estaremos refirendo siempre a la noción algebraica definida anteriormente.

No debemos confundir *subreticulado* de con *subposet*. Todo subconjunto de L dará lugar a un subposet, pero no todo subconjunto de L será un subuniverso.

Isomorfismo de Retículos

Sean $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ y $\mathbf{L}' = (L', \vee', \wedge')$ dos retículos y $f : L \to L'$ una función. Decimos que f es un ismomorfismo de $\mathbf{L}$ en $\mathbf{L}'$ sii f es biyectiva y para todo $x, y \in L$

$$f(x \vee y) = f(x) \vee' f(y) \quad \text{y} \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge' f(y).$$

Teorema:

Dados dos retículos $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ y $\mathbf{L}' = (L', \vee', \wedge')$, sean $(L, \leq)$ y $(L, \leq')$ los posets reticulados asociados, respectivamente. Para toda función $f : L \to L'$ se tiene que

$$f : (L, \vee, \wedge) \to (L', \vee', \wedge') \text{ es un iso} \iff f : (L, \leq) \to (L, \leq') \text{ es un iso.}$$

Incrustaciones

Dados dos retículos $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ y $\mathbf{L}' = (L', \vee', \wedge')$ decimos que $\mathbf{L}$ se incrusta en $\mathbf{L}'$ sii existe un subreticulado $\mathbf{S}$ de $\mathbf{L}'$ isomorfo $\mathbf{L}$.

Reticulados acotados y complementados

Decimos que un reticulado L es **acotado** si tiene primer elemento, que llamamos 0^L y ultimo elemento 1^L

Para un reticulado acotado L con primer elemento 0 y ultimo elemento 1, dados elementos a, b ∈ L, decimos que b es un **complemento** de a si:

a ∨ b = 1 y a ∧ b = 0.

Decimos que un reticulado acotado L es **complementado** si todos sus elementos tienen complemento.

Un reticulado acotado es una estructura (L, ∨, ∧, 0, 1) tal que (L, ∨, ∧) es un reticulado, 0, 1 ∈ L y satisfacen que, para todo x ∈ L

x ∧ 0 = 0 y x ∨ 1 = 1

Complemento

Sea L = (L, ∨, ∧, 0, 1) un reticulado acotado. Dados a, b ∈ L diremos que b es complemento de a si:

a ∨ b = 1 y a ∧ b = 0

Un elemento puede no tener complemento o puede tener varios.

Retículo complementado

Un reticulado complementado es una estructura (L, ∨, ∧, ¬, 0, 1) tal que
(L, ∨, ∧, 0, 1) es un reticulado acotado y ¬ es una función unaria tal que, para todo x ∈ L, ¬x es un complemento de x.

Esto no significa que un reticulado complementado todo elemento tiene un único complemento, sino que tiene al menos uno.
La función ¬ “elige” algún complemento para cada elemento de L.

Reticulados Distributivos

Sea L = (L, ∨, ∧) un reticulado. Son equivalentes:

- para todo x, y, z ∈ L, x ∧ (y ∨ z) = (x ∧ y) ∨ (x ∧ z)
- para todo x, y, z ∈ L, x ∨ (y ∧ z) = (x ∨ y) ∧ (x ∨ z)

Dado un reticulado L = (L, ∨, ∧) decimos que es un reticulado distributivo si satisface cualquiera de las condiciones anteriores.

Propiedad Cancelativa

Sea L = (L, ∨, ∧) un reticulado distributivo. Se satisface que, para todo a, b, c ∈ L:

- a ∨ c = b ∨ c
- a ∧ c = b ∧ c

y por lo tanto, entonces a = b

Si L = (L, ∨, ∧, 0, 1) es un reticulado acotado distributivo, todo elemento de L tiene a lo sumo un complemento.

La reciproca no vale, es decir, que un reticulado no tenga elementos con dos complementos no implica que sea distributivo.

ÁLGEBRA DE BOOLE

Un álgebra de Boole es un reticulado acotado complementado (B, ∨, ∧, ¬, 0, 1) distributivo.

Leyes de Morgan

En toda algebra de Boole (B, ∨, ∧, ¬, 0, 1), se dan:

¬(x ∨ y) = ¬x ∧ ¬y y ¬(x ∧ y) = ¬x ∨ ¬y

Isomorfismos

Un isomorfismo de algebras de Boole
f : (B, ∨, ∧, ¬, 0, 1) → (B′, ∨′, ∧′, ¬′, 0′, 1′) es un isomorfismo de reticulados si satisface que para todo x ∈ B,

f (¬x) = ¬′f (x)   f (0) = 0′   f (1) = 1′

si f : (B, ≤) → (B′, ≤′) es isomorfismo de posets

Átomos e irreducibles

Sea P = (P, ≤) un poset con elemento mínimo 0 y a ∈ P.

Decimos que a es átomo en P sii $\not{a}$ = 0 y, para todo b ∈ P, b ≤ a implica b = a o b = 0, es decir, a cubre a 0.

Denotamos con At(P) = {a ∈ P : a es átomo de P}.

Sea P = (P, ≤) un poset reticulado a es (supremo) irreducible en P sii $\not{a}$ = 0
(si existiere elemento mínimo 0) y para todo b, c ∈ P, a = b ∨ c implica a = b o a = c,
es decir, si a cubre exactamente a un elemento

Irreducibles y átomos en Dn

- Los atomos se corresponden con los primos y los irreducibles con las potencias de primos.
- Todo irreducible solo puede cubrir a un elemento que es irreducible o 1.
- De todos los elementos que cubren a un irreducible, a lo sumo uno puede ser irreducible.

Álgebra de Boole finitas

En álgebra de Boole finita, nos interesa ver que los átomos “separan” elementos distintos.

Lema:

Sea B un álgebra de Boole finita. Para todo $x \in B$, $x \neq 0$, existe un átomo a tal que $a \leq x$

O sea cualquier elemento no nulo en un algebra de bool finita, contiene un atomo.

O sea los atomos separan los elementos distintos de cero en un algebra de boole finita, ya que cada elemento no nulo contiene al menos un atomo en su descomposicion.

Lema (separación):

Sea B un álgebra de Boole finita y sean $x, y \in B$, tales que $x \not\leq y$. Entonces existe un átomo a, tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$

Lema:

Sea L un reticulado distributivo con elemento mínimo 0. Sean $b1, \ldots, bn \in L$ y a un átomo de L. Si $a \leq b1 \vee \cdots \vee bn$ entonces $a \leq bi$ para algún i, $1 \leq i \leq n$.

Lema (Representación de álgebra de Boole finitas):

Sea B un álgebra de Boole finita. La función

$$F : B \to P(At(B))$$
$$x \to \{a \in At(B) : a \leq x\}$$

es un isomorfismo entre B y $(P(At(B)), \cup, \cap, c, \varnothing, At(B))$ y la inversa de F es el sup.

Corolario:

Si B es un algebra de Boole finita entonces $|B| = 2^n$ para algun $n \in N$.

Corolario:

Si B y B′ son algebras de Boole finitas y $g : At(B) \to At(B')$ es una función biyectiva, existe un y solo un isomorfismo $G : B \to B'$ que extiende a g.
Todo isomorfismo de álgebras de Boole esta determinado por su valor en los átomos.

Corolario:

Si B y B′ son dos algebras de Boole finitas, son isomorfas si tienen la misma cantidad de atomos.

Este teorema nos sirve como criterio para determinar si un reticulado finito es o no algebra de Boole.
Para cualquier reticulado finito L podemos realizar la contruccion (P(At(L)), ⊆) y fijarnos si es isomorfa a L.
Podemos concluir que L es un algebra de Boole si resulta isomorfo a (P(At(L)), ⊆).

Conjuntos decrecientes de un poset

Sea P = (P, ≤) un poset. Decimos que un subconjunto D ⊆ P es decreciente sii para todo x, z ∈ P, si x ∈ D y z ≤ x entonces z ∈ D.
Llamaremos D(P) := familia de todos los subconjuntos decrecientes de P.

O sea un conjunto decreciente de un poset, es un subconjunto qeu incluye a todos los elementos menores o iguales a cada uno de sus elementos.

Lema:

Dado un poset P = (P, ≤), (D(P), ⊆) es un subreticulado de (P(P), ⊆).

Corolario:

(D(P), ⊆) es distributivo.

Dado un reticulado L, un elemento u ∈ L es (supremo) irreducible si cubre exactamente a un elemento.
Denotaremos mediante L al conjunto de los elementos irreducibles de L.
Observar que si u es irreducible y u = x1 ∨ · · · ∨ xn entonces u = xi para algun i.

Representación de reticulados distributivos finitos

Sea L un reticulado distributivo finito. Entonces la funcion

F : L → D(Irr(L))

x → {u ∈ Irr(L) : u ≤ x}

es un isomorfismo entre (L, ≤) y (D(Irr(L)), ⊆)