

## Introducción a los Algoritmos

### Axiomas y Teoremas del Cálculo Proposicional

#### Ax. Equivalencia, Discrepancia y Negación

A1 Asociatividad  $\equiv$ :

$$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (P \equiv (Q \equiv R))$$

A2 Conmutatividad  $\equiv$ :

$$P \equiv Q \equiv Q \equiv P$$

A3 Neutro  $\equiv$ :

$$P \equiv \text{True} \equiv P$$

A4 Definición  $\neg$ :

$$\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q$$

A5 Definición False:

$$\text{False} \equiv \neg \text{True}$$

A6 Definición  $\neq$ :

$$P \neq Q \equiv \neg(P \equiv Q)$$

#### Ax. de la Disyunción y Conjunción

A7 Asociatividad  $\vee$ :

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

A8 Conmutatividad  $\vee$ :

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

A9 Idempotencia  $\vee$ :

$$P \vee P \equiv P$$

A10 Distributividad  $\vee$  con  $\equiv$ :

$$P \vee (Q \equiv R) \equiv (P \vee Q) \equiv (P \vee R)$$

A11 Tercero excluido:

$$P \vee \neg P$$

A12 Regla dorada:

$$P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q$$

#### Ax. de la Implicación y la Consecuencia

A13 Definición de  $\Rightarrow$ :

$$P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q \equiv Q$$

A14 Definición  $\Leftarrow$ :

$$P \Leftarrow Q \equiv P \vee Q \equiv P$$

#### Teo. Negación

T1 Doble negación:

$$\neg\neg P \equiv P$$

T2 Equivalencia y negación:

$$P \equiv \text{False} \equiv \neg P$$

#### Teo. Disyunción

T3 Elemento absorbente  $\vee$ :

$$P \vee \text{True} \equiv \text{True}$$

T4 Elemento neutro  $\vee$ :

$$P \vee \text{False} \equiv P$$

T5 Teorema (\*):

$$P \vee Q \equiv P \vee \neg Q \equiv P$$

#### Teo. Conjunción

T6 Asociatividad  $\wedge$ :

$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$$

T7 Conmutatividad  $\wedge$ :

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

T8 Idempotencia  $\wedge$ :

$$P \wedge P \equiv P$$

**T9** Neutro  $\wedge$ :

$$P \wedge \text{True} \equiv P$$

**T10** Elemento absorbente  $\wedge$ :

$$P \wedge \text{False} \equiv \text{False}$$

**T11** Principio de no contradicción:

$$P \wedge \neg P \equiv \text{False}$$

### Teo. Disyunción con Conjunción

**T12** De Morgan para  $\vee$ :

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

**T13** De Morgan para  $\wedge$ :

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

**T14** Distributividad de  $\vee$  con  $\wedge$ :

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

**T15** Distributividad de  $\wedge$  con  $\vee$ :

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

**T16** Ley de absorción:

$$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$$

**T17** Ley de absorción (bis):

$$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$$

### Teo. Implicación

**T18** Definición dual  $\Rightarrow$ :

$$P \Rightarrow Q \equiv P \wedge Q \equiv P$$

**T19** Caracterización  $\Rightarrow$ :

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

**T20** Modus ponens:

$$P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

**T21** Modus ponens con equivalencia:

$$P \wedge (P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge Q$$

**T22** Modus tollens:

$$(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$$

**T23** Modus tollens con equivalencia:

$$(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

**T24** Curryficación:

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (P \wedge Q \Rightarrow R)$$

**T25** Transitividad  $\Rightarrow$ :

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

**T26** Debilitamiento  $\Rightarrow$  y  $\wedge$ :

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

**T27** Debilitamiento  $\Rightarrow$  y  $\vee$ :

$$P \Rightarrow P \vee Q$$

**T28** Distributividad a derecha  $\Rightarrow$  y  $\wedge$ :

$$P \Rightarrow (Q \wedge R) \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$$

**T29** Distributividad a izquierda  $\Rightarrow$  y  $\vee$ :

$$P \vee Q \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$$

### Niveles de Precedencia

Los que están más arriba tienen mayor precedencia — “pegan más”, se ponen entre paréntesis primero, se aplican primero.

$E(x := a), .$	sustitución y evaluación
$\sqrt{\phantom{x}}, (\cdot)^2$	raíces y potencias
$*, /$	producto y división
máx, mín	máximo y mínimo
$+, -$	suma y resta
$=, \leq, \geq$	conectivos aritméticos
$\neg$	negación
$\vee, \wedge$	disyunción y conjunción
$\Rightarrow, \Leftarrow$	implicación y consecuencia
$\equiv, \neq$	equivalencia y discrepancia

Los operadores que están en un mismo nivel tienen exactamente la misma prioridad, así que deben ponerse siempre con paréntesis, a menos que asocien entre sí ( $\vee$  y  $\wedge$ ,  $\neq$  y  $\equiv$ , máx y mín).