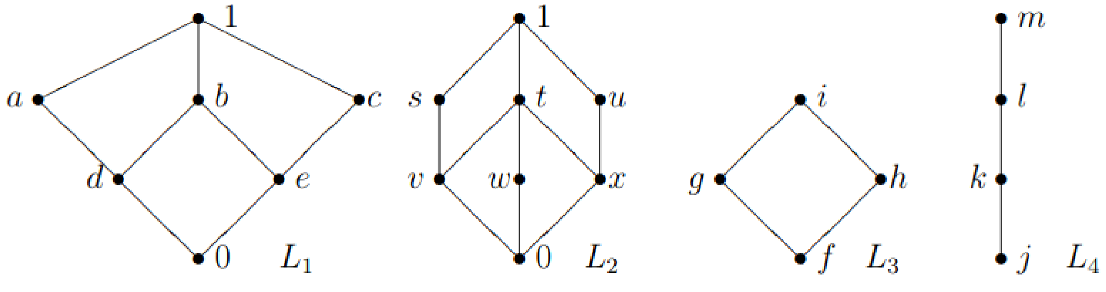
Práctico 3 - Poset Reticulados - Retículos



Ejercicio 1

Considere el reticulado L2. Encuentre v ∨ x, s ∨ v y u ∨ v.

- v ∨ x = sup{v, x} = t
- s ∨ v = sup{s, v} = 1
- u ∨ v = sup{u, v} = 1

Ejercicio 2

Demuestre que en todo poset reticulado se cumple x ∨ (y ∧ z) ≤ (x ∨ y) ∧ (x ∨ z).

Es la demostración de la desigualdad distributiva

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$
$$\{a \leq b \wedge c \leftarrow a \leq \text{ y } a \leq c\}$$
$$x \vee (y \wedge z) \leq x \vee y \text{ y } x \vee (y \wedge z) \leq x \vee z$$
$$x \leq x \vee y \text{ y } y \wedge z \leq x \vee y \text{ y } x \leq x \vee z \text{ y } y \wedge z \leq x \vee z$$
$$\text{Vemos que cada hipotesis se cumple, asi que queda demostrado}$$

Ejercicio 3 (no completado)

Determine cuales de los siguientes mapeos f de P a Q son isomorfismos. En caso de no
serlo determine que es lo que falla.

(a)

P = Q = (Z, ⩽) y f (x) = x + 1.

(b)

P = Q = (Z, ⩽) y f (x) = 2x.

(c)

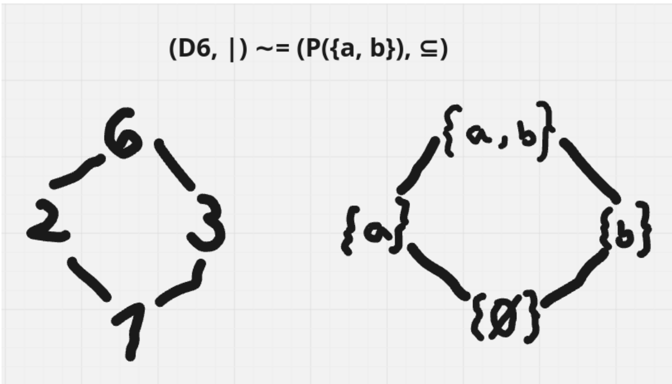
P = Q = (P({a, b, c}, ⊆) y f (A) = Ac.

Ejercicio 4

Determine si se dan los isomorfismos indicados.

(a)

(D6, |) ~= (P({a, b}), ⊆).



Usamos el siguiente mapeo:

- f(6) → {a, b}
- f(2) → {a}
- f(3) → {b}
- f(1) → {ø}

Necesitamos demostrar dos cosas para que sea un isomorfismo:

- f es biyectiva
- para todo x, y ∈ P,
  - x ≤ y ⇔ f (x) ≤′ f (y)

Para que sea biyectivo debemos demostrar que es inyectivo y sobreyectivo:

Inyectivo:

Entonces para que este mapeo sea inyectivo, necesitamos verificar que si f(x)=f(y), entonces x=y

Ahora revisamos:

- Si f(x)=ø, entonces x=1 porque el único elemento que se mapea a ø es 1.
- Si f(x)={a}, entonces x=2.

- Si f(x)={b}, entonces x=3.
- Si f(x)={a,b}, entonces x=6.

Ya que no hay ningún par distinto x≠y y x‟I=y tal que f(x)=f(y), el mapeo es **inyectivo**.

Sobreyectivo:

Un mapeo f:A→B es sobreyectivo si no queda ningún elemento de B sin ser "alcanzado" por f.

En nuestro caso el mapeo que analizamos es f:D6→P({a,b}), y queremos verificar que cada subconjunto de {a,b} tiene una preimagen en el conjunto de divisores de 6.

Podemos ver que no hay ningún subconjunto de {a,b} que se quede sin ser "alcanzado" por f, lo que significa que f es sobreyectivo.

Por ultimo demostraremos la preservación de orden

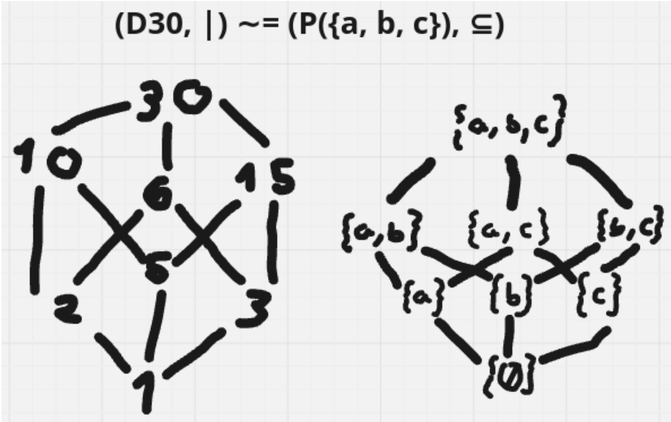
La preservación del orden significa que si un elemento x es menor que otro elemento y en D6 (con respecto a la divisibilidad |), entonces su imagen bajo f también debe respetar el orden de inclusión en P({a,b}).

Observando nuestro mapeo, vemos que cada relación de divisibilidad en D6 respeta el orden de inclusión en P({a,b}), el mapeo **preserva el orden**.

Por lo tanto como se cumple la biyectividad y como preserva el orden, podemos concluir que es un isomorfismo.

(b)

(D30, |) ~= (P({a, b, c}), ⊆)



Hacemos el siguiente mapeo:

- f(1) → {ø}
- f(2) → {a}
- f(3) →{c}
- f(5) →{b}
- f(6) →{a, c}
- f(10) → {a, b}
- f(15) →{b, c}
- f(30) → {a, b, c}

Ejercicio 5

Demuestre que si f : (P, ≤) → (Q, ≤′) es isomorfismo entonces f −1 también lo es.

Sabemos que f es un isomorfismo, entonces podemos afirmar que f es biyectiva (inyectiva y sobreyectiva) y ademas preserva el orden.

1. **Inyectividad**
    - $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)?$
    - Sabemos que f(x) = f(y), por lo tantao x = y.
    - $f(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(y))$ aplicamos f de ambos lados
    - $x = y$ ya que f es inyectiva
2. **Sobreyectividad**
    - como f es sobreyectivo, para todo y $\in$ Q $\exists$ x $\in$ P | f(x) = y
    - esto implica que $f^{-1}(y) = x$
    - Por lo tanto f^{-1} es sobreyectivo
3. **Preservación del orden**

- (completar)

Ejercicio 6

Suponga que f : (P, ≤) → (Q, ≤′) es un isomorfismo de posets.

(a)

Si m ∈ P es minimal, entonces f (m) es minimal.

$$\begin{gathered}\text{si } m \in P \text{ es minimal} \rightarrow f(m) \text{ es minimal} \\ \{ \text{ definicion de minimal } \} \\ \forall a \in P: \text{ si } a \leq m \rightarrow a = m \\ \{\text{como f es un isomorfismo } \} \\ \text{si } f(a) \leq f(m) \rightarrow a = m \\ \{ \text{ como f es biyectiva } \} \\ f(a) \leq f(m) \rightarrow f(a) = f(m) \\ \{ \text{ definicion de minimal } \} \\ f(m) \text{ es minimal}\end{gathered}$$

(b)

Probar que si Q tiene algún minimal, entonces P tiene un minimal (Ayuda: usar f −1).

Demostración anterior y cambiamos la ultima parte:

$$\begin{gathered}\text{si } m \in P \text{ es minimal} \rightarrow f(m) \text{ es minimal} \\ \{ \text{ definicion de minimal } \} \\ \forall a \in P: \text{ si } a \leq m \rightarrow a = m \\ \{\text{como f es un isomorfismo } \} \\ \text{si } f(a) \leq f(m) \rightarrow a = m \\ \{ \text{ como f es biyectiva } \} \\ f(a) \leq f(m) \rightarrow f(a) = f(m) \\ \{ \text{ definicion de minimal } \} \\ f(m) \text{ es minimal de p} \\ \{\text{porque es biyectiva puedo cambiar por la inyectividad } \} \\ f(m) \text{ es minimal de q}\end{gathered}$$

Ejercicio 7

Determine cuantos isomorfismos hay de (P({a, b, c}), ⊆) en sı mismo..

Dado que los átomos del poset son los subconjuntos de un solo elemento {a}, {b},{c}, un isomorfismo debe permutar estos átomos, entonces como hay 3 átomos, 3! = 6, la cantidad de isomorfismo son 6.

Ejercicio 8 (no completado)

(a)

Defina una función biyectiva f del reticulado (L3, ≤3) en el reticulado (L4, ≤4) que preserve el orden, es decir, tal que x ≤3 y =⇒ f (x) ≤ 4 f (y).

(b)

Compruebe que no se cumple x ≤3 y ⇐= f (x) ≤4 f (y). La función f es un ejemplo que
muestra que preservación del orden no implica isomorfismo.

(c)

Pruebe también que f no preserva supremo ni ínfimo.

Ejercicio 9 (no completado)

Sea $(L, \varovee, \varowedge)$ un retículo. Demostrar que $x \varowedge (y \varowedge z) = z \varowedge (y \varowedge x)$.

Ejercicio 10 (no completado)

(del teórico) Sea $(L, \varovee, \varowedge)$ un retículo y considere la relación de orden parcial definida por $x \leq y \iff x \varovee y = y$. Probar que $x \varovee y$ es cota superior del conjunto $\{x, y\}$.

Ejercicio 11

Decida, y fundamente, cuales de los reticulados L1, L2, L3 y L4 son complementados.

Recordemos que es un retículo complementado:

Un reticulado es complementado si para cada elemento x en el reticulado, existe un elemento y tal que:

$x \wedge y = 0$ y $x \vee y = 1$

Recordemos a L1, L2, L3, Y L4

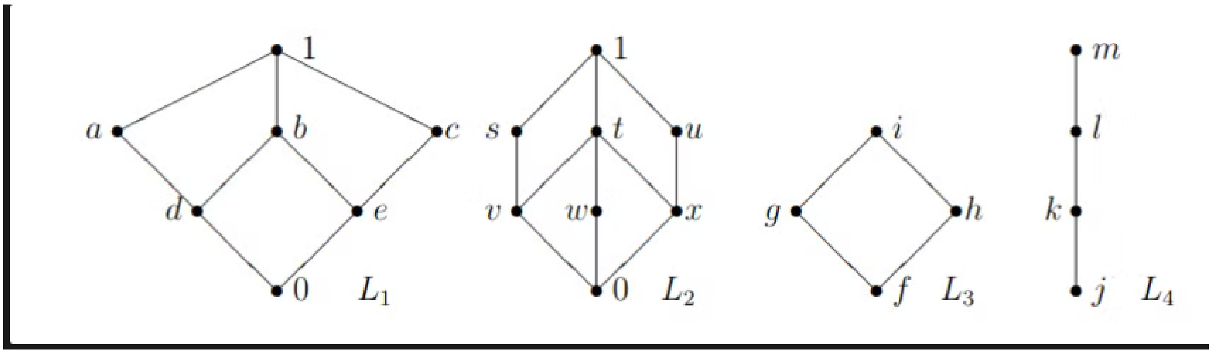
- L1 → Es complementado ya que:
  - Para el elemento a:
    - Vemos que sup{a, c} = 1
    - Y ademas inf{a, c} = 0
    - Por lo tanto c es el complemento de a
  - Para el elemento b:
    - Observamos que sup{b, e} = 1
    - Y ademas el inf{b, e} = 0
    - Por lo tanto e es el complemento de b
  - Para el elemento c:
    - Por simetría, visto anteriormente que c es el complemento de a, a es el complemento de c.
  - Para el elemento d:
    - EL sup{d, 1} = 1
    - El inf{d, 1} = 0
  - Para el elemento e:
    - Por simetría de b, b es el complemento de e.
  - Para el elemento 1:
    - El complemento es 0.
  - Para el elemento 0:
    - El complemento es 1.

Por lo tanto como todos los elementos tienen un complemento, L1 es complementado.

- L2 → Es complementado ya que:
  - Para el elemento s:
    - Vemos que sup{s, u} = 1
    - Y ademas inf{s, u} = 0
    - Por lo tanto u es el complemento de s
  - Para el elemento t:
    - Observamos que sup{t, x} = 1
    - Y ademas el inf{t, x} = 0
    - Por lo tanto x es el complemento de t
  - Para el elemento u:
    - Por simetría, visto anteriormente s es el complemento de u
  - Para el elemento v:
    - EL sup{v, u} = 1
    - El inf{v, u} = 0
  - Para el elemento w:
    - EL sup{w, s} = 1
    - El inf{w, s} = 0
  - Para el elemento x:
    - Por simetria el complemento de x es t
  - Para el elemento 0:
    - El complemento es 1.
  - Para el elemento 1:
    - El complemento es 0.

Por lo tanto como todos los elementos tienen un complemento, L2 es complementado.

- L3 → No es complementado ya que:
    - no hay supremos
- L4 → No es complementado ya que:
    - Los elementos l y k, no tienen complemento.



Ejercicio 12 (con completado)

Supongamos que un poset P tiene la siguiente propiedad: para todo subconjunto S de
P se tiene que sup(S) existe (en particular existe sup(P) y sup(ø)). Demostrar que ınf(S)
existe para cualquier S.

Ejercicio 13

¿Para que valores n se tiene que Dn se incrusta en L3?

Recordemos que significa que Dn se incrusta en L3:

> Dados dos retículos $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ y $\mathbf{L}' = (L', \vee', \wedge')$ decimos que $\mathbf{L}$ se incrusta en $\mathbf{L}'$ sii existe un subreticulado $\mathbf{S}$ de $\mathbf{L}'$ isomorfo $\mathbf{L}$.

Entonces podemos ver que d6, d10, d14 se incrustan en l3.