DETERMINANTE → $m \in \mathbb{N}$ Y $A=[a_{ij}] \in M_m(K)$

EL $\det(A)$: ① $m=1$, $\det([a])=a$

② $m>1$, $\det(A)=a_{11}\cdot\det A(1|1)-a_{21}\cdot\det(2|1)+\dots+(-1)^{1+m}\cdot a_{m1}\cdot\det A(m|1)$ $=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}a_{i1}\cdot\det A(i|1)$

$A(i|j)$ SEA $A \in M_m(K)$. i,j $1\leq i,j\leq m$ ES LA MAT. $m-1 \times m-1$ QUE SE OBTIENE ELIMINANDO LA FILA i Y LA COLUMNA j DE A.

$A=\begin{bmatrix}1&-1&3\\4&2&-5\\0&7&3\end{bmatrix}$ $A(2|3)=\begin{bmatrix}1&-1\\0&7\end{bmatrix}$

$\det A(i|j)$ "MENOR (i,j) DE A"

$(-1)^{i+j}\cdot\det A(i|j)$ COFACTOR (i,j) DE A

$C^A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot\det A(i|j) \Rightarrow \det A=\sum_{i=1} a_{i1}\cdot C^A_{i1}$

SEA $\in M_m(K)$ A ES INVERTIBLE $\Leftrightarrow$ $\det A\neq 0$ (YA LO DEMOS AGAIN)

SI $A,B \in M_m(K)$ $\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$

$\det(Id_m)=1$ LA DEMOS SE DEDUCE DEL HECHO QUE Id_m ES TRIANGULAR SUP. CON LOS COEF. $=1$

SEA $\in M_m(K)$ MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR $\Rightarrow \det A=d_1\cdot d_2\dots d_m$

SI $m=1$, $A=[d_1] \Rightarrow \det A=d_1$

SI $m>1$, OBSER. $A(1|1)$ ES TR SUP CON VALORES $d_2 \dots d_m$ EN DIAG PRINC / LA 1º COLUMNA SOLO TIENE 1 TERMINO $\det(A)=d_1\cdot\det(A(1|1))=d_1\cdot(d_2\dots d_n)$

SI R ES UNA MERF $\Rightarrow$ $\det r=\begin{cases}1 & \text{SIN FILAS NULAS}\\0 & \text{CON FILAS NULAS}\end{cases}$

① $A \xrightarrow{c f_i} B \Rightarrow \det(B)=c\cdot\det(A)$ $A\in M_n(K)$

② $A \xrightarrow{f_i+cf_j} B \Rightarrow \det(B)=\det(A)$

③ $A \xrightarrow{f_i\leftrightarrow f_j} B \Rightarrow \det(B)=-\det(A)$

① SI A TIENE 2 FILAS IGUALES $\Rightarrow \det A=0$

② SI TIENE ALGUNA FILA NULA $\Rightarrow \det A=0$

DETERMIN. DE MATRICES ELEMENTALES ① $e=f_i \to c f_i \Rightarrow \det E=c$ ② $e=f_i\to f_i+cf_j \Rightarrow \det E=1$ ③ $e=f_i\leftrightarrow f_j \Rightarrow \det E=-1$ $E=e(Id)$ $\det(E\cdot A)=\det(E)\cdot\det(A)$

A ES INVERTIBLE $\Leftrightarrow \det(A)\neq 0$

SI A ES INVERTIBLE $\Rightarrow$ A ES PROD. DE MEL $\Rightarrow \det(A)=\underbrace{\det(E_1)\cdot\det(E_2)\dots\det(E_k)}_{1,-1,c}\neq 0$

$\det(A)\neq 0 \Rightarrow$ A ES INVERTIBLE $\equiv$ A NO ES INV. $\Rightarrow \det(A)=0$

SUP. QUE A NO ES INVERTIBLE $\Rightarrow$ A ES EQUI POR FILAS A UNA MER $\neq Id$ Y EN PARTICULAR $A=E_1\cdot E_2\dots E_k\cdot M \Rightarrow \det(A)=\det(E_1\cdot E_2\dots E_k)\cdot$ $\det(M)=0 \Rightarrow \det(A)=0$

$\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$

SUP. QUE A ES INVERTIBLE $\Rightarrow$ $A=E_1\dots E_j$ CON E_i ELEMENTAL $\Rightarrow$ $\det(A\cdot B)=\det(E_1\dots E_j\cdot B)=\det(\underbrace{E_1\dots E_j}_{=A})$ $\det B=\det(A)\cdot\det(B)$.

SUP QUE A NO ES INVERTIBLE B $A=E_1\dots E_j\cdot M$ CON E_i ELEM. Y M MERF $\Rightarrow$ $A\cdot B=E_1\dots E_j(M\cdot B)\Rightarrow\det(A\cdot B)=\det(E_1\dots E_j)$ $\det(M\cdot B)$ PERO M TIENE 1 FILA NULA NO NULA $\Rightarrow [M\cdot B]_{1j}=0 \Rightarrow \det(M\cdot B)=0$ (PEPITO)

SI A INVERTIBLE $\det(A^{-1})=\det(A)^{-1}$

POR (PEPITO) $\det(AA^{-1})=\det(A)\cdot\det(A^{-1})$ COMO $A\cdot A^{-1}=Id \Rightarrow 1=\det(Id)=\det(A\cdot A^{-1})=\det(A)\cdot\det(A^{-1})$ POR LO TANTO $\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}$

$\det(AB)=\det(BA)$

$\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)=\det(B)\cdot\det(A)=\det(BA)$

$(A^t)^t=A$ $[(A^t)^t]_{ij}=[A^t]_{ji}=[A]_{ij}$

A $M_{m\times m}$ Y B $M_{m\times k}$ $(AB)^t=B^t\cdot A^t$ $(AB)^t$ ES UNA MATRIZ $K\times m$ VEMOS QUE B^t ES $K\times m$ Y $A^t_{m\times m}$ TIENE SENT. MULTIPLICAR $B^t\cdot A^t$ Y SE OBTIENE UNA $K\times m$ VER Q LOS COEF. SON $=$ CON LA DEF. DE PRODUCTO

SEA A MATRIZ $m\times m \Rightarrow$ A ES INVERTIBLE $\Leftrightarrow$ A^t ES INVERTIBLE $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

A ES INV. $\Leftrightarrow \exists$ B $m\times m$ | $AB=Id=BA$ $\Leftrightarrow (AB)^t=Id^t=(BA)^t \Leftrightarrow B^t$ ES LA INV. DE A^t $\Leftrightarrow B^t\cdot A^t=Id=A^t\cdot B^t$ $B=A^{-1}\Rightarrow(A^t)^{-1}=B^t$

SI A TIENE 2 COLUMNAS IGUALES $\Rightarrow \det(A)=0$ A^t TIENE 2 FILAS $=$ $\Rightarrow \det A^t=0$ POR LO TANTO $\det(A)=0$

SI A TIENE UNA COLUMNA NULA $\Rightarrow \det A=0$ A^t TIENE UNA FILA NULA $\det A^t=0$ Y POR LO TANTO $\det A=0$

SI A TIENE 2 FILAS $=$ $\Rightarrow \det A=0$ SEA DONDE $f_r=f_s$ CON $r\neq s$, $A\xrightarrow{f_r\leftrightarrow f_s}A \Rightarrow$ $\det A=-\det A$ POR LO TANTO $\det A=0$

SI A TIENE UNA FILA NULA $\Rightarrow \det A=0$ f_k UNA FILA NULA DE A MULT. NO CAMBIA $A\xrightarrow{2f_k}A \Rightarrow \det A=2\cdot\det A$ POR LO TANTO $\det A=0$

NORMA D UN VECTOR $\|V\|=\sqrt{\langle V,W\rangle}=\sqrt{x^2+y^2}$

$\cos(\theta)=\frac{\langle V_1,V_2\rangle}{\|V_1\|\|V_2\|}$

IMPLICITA $y=\frac{-a}{b}x+\frac{c}{b}$ PARAMETRICA $x(t)=V+tw$ $\forall t\in\mathbb{R}$, PASA POR V Y $\wedge w\neq 0$

PLANOS $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ Y $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ PARAL → V. NORMAL $\parallel$

$P=\{(x,y,z): ax+by+cz=d\}$ (a,b,c) VECTOR NORMAL PERP. → V. NORMA $\perp$

$ax+by+cz=d\equiv\langle(x,y,z),(a,b,c)\rangle=d$

SEAN $V,W_1,W_2\in\mathbb{R}^3$ TAL QUE W_1,W_2 NO NULOS Y TAL Q' W_2 NO SEA MULTIPLO DE W_1

$P=\{V+sW_1+tW_2: s,t\in\mathbb{R}\}$ P ES EL PLANO A TRAVES DE V: PARALELO A LOS VECTORES → W_1 Y W_2 $A_{ii}=0\ \forall i$

PROPIEDADES DE LOS VECTORES:

- TODO VECTOR ES COMB. $e_1=(1,0,0)$ DE BASE CANONICA $(x_1,x_m)=x_1e_1+x_me_m$
- $\langle V,W+U\rangle=\langle V,W\rangle+\langle V,U\rangle$
- $\langle\lambda V,W\rangle=\lambda\langle V,W\rangle=\langle V,\lambda W\rangle$
- $\langle V,V\rangle=\|V\|^2$
- $\langle V,W\rangle=0 \Rightarrow \|V+W\|^2=\|V\|^2+\|W\|^2$ $=\langle V+W,V+W\rangle=\langle V,V\rangle+\langle W,W\rangle=\|V\|^2+\|W\|^2$
- $|\langle V,W\rangle|\leq\|V\|\cdot\|W\|$ $V=(V_1,V_2)$ W= $|\langle V,W\rangle|^2\leq\|V\|^2\|W\|^2 \Leftrightarrow$ $(V_1W_1+V_2W_2)^2\leq(V_1^2+V_2^2)(W_1^2+W_2^2)$ HACER BINOMIO, PASAR A UN LADO Y DA ≥ 0

MATRIZ TRASPUESTA $[A^t]_{ij}:=A_{ji}$ $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq m$ $\begin{bmatrix}1&0&4\\0&5&0\\6&0&-9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&6\\0&5&0\\4&0&-9\end{bmatrix}$

TRAZA DE MAT. $Tr(A):=\sum_{i=1}^{m}a_{ii}$ $\begin{bmatrix}2&5\\3&-6\end{bmatrix}=2-6=-4$

PROPIEDADES TRANSPUESTA $(A+cB)^t=A^t+cB^t$ $(A^t)^t=A$ $(BC)^t=C^t\cdot B^t$ | SIMETRICA $A^t=A$ SI ES ANTISIMETRICA $\Rightarrow$

$[A]_{ij}$ FILA i COLU. j

$[A|Y]$ Y $[B|Z]$ SE OBTIENE A PARTIR DE $[A|Y]$ TIENEN $=$ SOLUCIONES.

$a\sim b$ B ES EQUIV. X FILAS A A
- $A\sim A$ (REFLEXIVA)
- $A\sim B\Rightarrow B\sim A$ (SIMETRICA)
- $A\sim B \vee B\sim C\Rightarrow A\sim C$

TODA MATRIZ ES EQUIVA. X FILAS A UNA MERF.

DIAGONAL PRINCIPAL → $[A]_{ii}$

MATRIZ DIAGONAL → $a_{ij}=0$ PARA $i\neq j$

E_1 → MULT. ECU. X CONST. → $e_1'=\frac{1}{c}$

E_2 → $T f_s+f_r$ → $e_2'=-Tf_s+f_r$ OP. ELEMENTALES

E_3 → PERMUTAR FILAS ← E_3'

MATRICES EQUIVALENTES SI SE PUEDE OBTEN. X UN NUM. FINITO DE OP. ELEMENTALES | A CADA OP. ELEMENTAL LE CORRESPONDE UNA TAL QUE $e'(e(A))=A$

MATRIZ ESCALAR TODOS LOS EL. DE LA DIAG $=$

M. TR. SUP. $a_{ij}=0$ PARA $i>j$

M. TR. INF. $a_{ij}=0$ $i<j$

MAT. NULA DE ORDEN $m\times m$ CUYAS ENTRADAS $=0$

MAT. IDT. MAT. DIAGONAL CUYA DIAGONAL TA COMP. 1 PRIN.

SUMA DE MATRICES $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ $C=[a_{ij}+b_{ij}]$ ORDEN $m\times m$ $C_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ (a,b) • CONM • ASOC • NEUTR • OPUES.

MULT. DE MAT. $A=[a_{ij}]$ $m\times m$ $B=[b_{ij}]$ $m\times p$ $C=[c_{ij}]$ $m\times p$ • ASOC • NEUTR. • DISTR.

$A=\begin{bmatrix}1&0\\-3&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}5&-1&2\\15&4&8\end{bmatrix}$ $AB=\begin{bmatrix}1\times5+0\times5 & 1\times(-1)+0\times4 & 1\times2+0\\ -3\times5+1\times15 & -3\times(-1)+1\times4 & -3\times2+1\end{bmatrix}$

$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\dots+a_{im}b_{mj}=\sum_{k=1}a_{ik}b_{kj}$

- $A^0=Id$
- $A\cdot N=N$ N → MAT. NULA
- $AB=0$ NO IMPLICA A Ó $B=0$

MAT. ELEMENTAL MATRIZ $m\times m$ SE DICE ELEMENTAL SI FUE OBTE POR MEDIO DE UNA ÚNICA OP. EL. A PARTIR DE LA Id $E=e(Id)$

A Y B MATR. $m\times m$ B ES EQUIV X FILAS A A $\Leftrightarrow B=PA$ DONDE P ES PRODUCT. DE MATRICES ELEM.

M. INV. A MAT. $m\times m$ B $m\times m$ ES INVERSA DE A SI $BA=AB=Id$. (*) A^{-1} LA INVERSA ES ÚNICA $BA=Id$, $AC=Id \Rightarrow$ (**) $B=C$

e OP. ELEM. Y E. MAT. ELEM. $E=e(Id)\Rightarrow e(A)=E\cdot A$ $e(A)$ $E=\begin{bmatrix}c&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ca_{11}&ca_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$

(*) $B=B\cdot Id=B\cdot(AC)=(BA)\cdot C=Id\cdot C=C$ (**) $BA=AB=Id$ Y $CA=AC=Id$ EN PART. $BA=Id$ Y $AC=Id\Rightarrow B=C$

SI A INV. $\Rightarrow A^{-1}$ ES INV. Y SU INV. ES A. A Y B MATR. $m\times m \Rightarrow$ B ES EQUIV. POR FILAS A $A \Leftrightarrow \exists$ MAT. INV. P $B=PA$

$(A^{-1})^{-1}=A$ LA INV. IZQ. DE A^{-1} ES A PUES $A\cdot A^{-1}=Id$ Y ADEMÁS LA INV. DER. DE A^{-1} ES A $A^{-1}\cdot A=Id$. A ES LA INV. DE A^{-1}

$(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$ $(B^{-1}A^{-1})AB=B^{-1}(A^{-1}A)B$ $B^{-1}\cdot Id\cdot B=B^{-1}\cdot B=Id$ FALTA POR LA INV DERECHA

UNA MAT. ELEM. ES INV. E LA MAT ELEMENT. Y SEA e_1 LA OP. ELEM INVERSA Y $E_1=e_1(Id)$ $\Rightarrow E\,E_1=e(e_1(Id))=Id$ Y $E_1E=e_1(e(Id))=Id$ LUEGO $E_1=E^{-1}$

SEA A MATR. $m\times m$ Y $e_1,\dots e_k$ LAS OP. ELEM. POR FILAS Q REDUCEN A A UNA MERF $=Id \Rightarrow$ A ES INVERT. Y LAS MISMAS OP. EL. APLICADAS A LA Id NOS LLEVA A A^{-1} (FORMA)

A UNA MATR. $m\times m$ SI A TIENE INVERS. A IZQUIER. ($BA=Id$) $\Rightarrow$ A ES INVERTIBLE LO MISMO VALE SI A TIENE INVERSA A LA DERECHA

SI TENEMOS 5 E_i $E_5\cdot E_4\cdot E_3\cdot E_2\cdot E_1=A^{-1}$ $E_5\cdot E_4\cdot E_3\cdot E_2\cdot E_1\cdot A=Id$ PRIMERO MULTIPLICAMOS $E_5\cdot E_4$ Y NO $E_4\cdot E_5$.

- A ES INVERTIBLE
- A ES EQUIV. A Id
- A ES PROD. MAT. EL

A ES INVERTIBLE $AX=Y$, TIENE SOL ÚNICA PARA TODA MATRIZ Y $AX=0$ TIENE UNA ÚNICA SOLUCIÓN TRIVIAL.

SI A TIENE INVERSA A IZQUIERDA, $BA=Id \Rightarrow$ A ES INVERTIBLE LO MISMO VALE PARA INVERSA DERECHA

AUTOVALOR → $A\in K^{m\times m}$ SE DICE QUE $\lambda\in K$ ES UN AUTOVALOR DE A Y SI EXISTE $V\in K^{m\times m}$ NO NULO TAL Q' $AV=\lambda V$ EN ESE CASO DECIMOS Q' V ES UN AUTOVECTOR ASOCIADO A λ.

UN AUTOVALOR PUEDE VALER 0 PERO UN AUTOVECTOR NUNCA PUEDE SER 0.

DADO $i\in\{1,\dots m\}$ SE DENOTA e_i AL VECTOR COLUMNA K^m CUYAS COORD SON TODAS 0 EXCEPTO LA COORDENADA i QUE ES UN 1 BASE CANONICA

AUTOESPACIO SEA $K^{m\times m}$ Y $\lambda\in K$ ES UN AUTOVALOR DE A EL AUTOESPACIO ASOCIADO A λ ES $V_\lambda=\{V\in K^m | AV=\lambda V\}$ ES DECIR V_λ ES EL CONJ. FORMADO POR TODOS LOS AUTOVECTORES ASOC. A λ

EL CONJ. DE TODOS LOS A. VECTORES CON UN MISMO A. VALOR ES INVARIANTE POR LA SUMA Y LA MULT. POR ESCALARES LOS MULT. DE AVE SON AVE CON $=$ AVALOR

SEA MATRIZ $m\times m$ Y $\lambda\in K$ SI $V,W\in A\,V_\lambda$ $A(V+tW)=AV+tAW=\lambda V+t\lambda W=\lambda(V+tW)$ AUTOESPACIO DE A ASOCIADO A $\lambda \Rightarrow V+tW\in V_\lambda$ PARA CUALQUIER $t\in K$ DEMOSTRACIÓN

$\lambda\in K$ ES UN AUTOVALOR DE A Y $V\in K^m$ ES A. VECT ASOCIADO A $\lambda \Leftrightarrow \det(\lambda Id-A)=0$ V ES SOL. DEL SIST. HOMOG. $(\lambda Id-A)X$

SEA $A\in K^{m\times m}$ EL POLINOMIO CARACTERISTICO DE A ES $\chi_A(x)=\det(x\cdot Id-A)$ EL POL CAR DE $x\,Id_m=(x-1)^m$

CALCULAR EL DETERMINANTE X COL j $\det(A)=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+j}a_{ij}\cdot\det A(i|j)$

CALCULAR EL det. POR LA FILA i ASÍ $\det(A)=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{i+j}a_{ij}\cdot\det A(i|j)$

$\pi_1=a_1x+b_1y+c_1z+d_1$
$\pi_2=a_2x+b_2y+c_2z+d_2$

LOS PLANOS PUEDEN CORTARSE EN UNA RECTA O BIEN SER PARALE.

LA INTERSECCIÓN SERÁ LA SOLUCIÓN DE ESTE SIST. LINEAL

$\left[\begin{array}{ccc|c}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\end{array}\right]$

SI UN PLANO ES PERPENDICULAR A 2 PUNTOS, RESTO ESOS DOS PUNTOS Y OBTENGO EL VECTOR.

EL VECTOR NORMAL A UN PLANO, ES AQUEL QUE ES PERPENDICULAR A DICHO PLANO LUEGO CUALQUIER VECTOR CONTENIDO EN EL PLANO ES PERPENDICULAR AL VECTOR NORMAL

$A, B \in M_{m\times m}$ Y $C \in M_{m\times p} \Rightarrow (A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$

VAMOS A USAR QUE DOS MATRICES SON = SI SUS ENTRADAS SON =

$[(A+B)\cdot C]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} [A+B]_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^{m} (A_{ik}+B_{ik}) C_{kj} = \sum_{k=1}^{m} (A_{ik}C_{kj} + B_{ik}C_{kj})$

$[AC+BC]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}C_{kj} + \sum_{k=1}^{m} B_{ik}C_{kj} = \sum_{k=1}^{m} (A_{ik}C_{kj} + B_{ik}C_{kj})$ LUEGO $[(A+B)C]_{ij} = [AC+BC]\ \forall i,j$

A Y B $\in M_m(K)$ $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + 2AB + B^2$

$A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Rightarrow AB + BA = 2AB \Rightarrow$

$BA = 2AB - AB \Rightarrow \boxed{BA = AB}$ QUE LAS MATRICES CONMUTAN

$A^2 - B^2 = (A+B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2 = A^2 - AB + BA - B^2 \Rightarrow$

$0 = -AB + BA \Rightarrow \boxed{AB = BA}$ LA CONDICIÓN NECESARIA ES QUE

MAT. ES TRIANGUL. SUP. SI $a_{ij} = 0$ PARA TODO $i > j$

PROD. D 2 MAT. TRIAN. SUP ES T. SUP

SEAN $A, B \in K^{m\times m}$ MATRICES TRIANGULARES SUPERIORES QUEREMOS PROBAR QUE AB ES TRIANGUL SUP HAY QUE VER $[AB]_{ij} = 0\ \forall i > j$

$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kj} = \underbrace{\sum_{k=1}^{i-1} A_{ik}B_{kj}}_{(1)} + \underbrace{\sum_{k=i}^{m} A_{ik}B_{kj}}_{(2)}$

PARA $k < i$, COMO A ES TR. SUP $A_{ik} = 0$, LUEGO $(1) = \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot B_{kj} = 0$ PARA $k \geq i$, TAMB HIP $i > j$, $k > j$

$\Rightarrow$ B ES TRI SUP. $B_{kj} = 0$ LUEGO $(2) = \sum_{k=i}^{m} A_{ik}\, 0 = 0$ POR LO TANTO $[AB]_{ij} = 1 + 2 = 0$

PROBAR QUE SI $A, B \in M_m(\mathbb{R})$ Y $c \in \mathbb{R} \Rightarrow Tr(A + cB) = Tr(A) + c\,Tr(B)$

$Tr(A+cB) = \sum_{i=1}^{m} (A+cB)_{ii} = \sum_{i=1}^{m} (A_{ii} + cB_{ii}) = \sum_{i=1}^{m} A_{ii} + c\sum_{i=1}^{m} B_{ii} = Tr(A) + c\,Tr(B)$

$Tr(A^t) = Tr(A) = \sum_{i=1}^{m} (A^t)_{ii} = \sum_{i=1}^{m} A_{ii} = Tr\,A$

$Tr(AB) = Tr(BA) = \sum_{i=1}^{m} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}\left(\sum_{k=1} A_{ik}B_{ki}\right) = \sum_{k=1}\left(\sum_{i=1} A_{ik}B_{ki}\right)$
$= \sum_{k=1}\left(\sum_{i=1} B_{ki}A_{ik}\right) = \sum_{k=1} (BA)_{kk} = Tr\,BA$

SI A ES INVERTIBLE $\Rightarrow A^t$ ES INVERTIBLE Y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

SI A ES INVERTIBLE $\Rightarrow \exists A^{-1} \mid A A^{-1} = Id$ YA QUE $Id^t = Id \Rightarrow$

$(AA^{-1})^t = (A^{-1})^t A^t = Id \Rightarrow (A^{-1})^t$ ES INV IZQUIERDA DE A^t

A Y B MAT. INVERTIBLES $\Rightarrow A+B$ ES INVERTIBLE

FALSO TOMAR UNA MI Y SU OPUESTO $A + (-A) = 0$

$\exists$ MAT. $A, B \in M_m(\mathbb{R})$ | $AB - BA = I_m$ FALSO

$Tr(AB - BA) = Tr\,I_m \Rightarrow Tr\,AB - Tr\,BA = Tr\,AB - Tr\,AB = 0$

SI $A \in M_m(\mathbb{R})$ MAT DIAGONAL $Tr(A^2) = 0 \Rightarrow A = 0$

$Tr(A^2) = \sum_{i=1}(A\,A)_{ii} = \sum_{i=1}\left(\sum_{k=1} A_{ik}A_{ki}\right)$ COMO A ES DIAG. $a_{ik} = a_{ki} = 0$ $k \neq i$

$Tr(A^2) = \sum_{i=1} A_{ii}A_{ii} = \sum_{i=1} A_{ii}^2$ Y $0 = Tr(A^2) \to \sum_{i=1} A_{ii}^2 = 0$

LA UNICA FORMA $A_{ii} = 0\ \forall\ 1 \leq i \leq m$ Y $A = 0$

SEA A UNA M_m SI A ES INV. Y $AB = 0 \Rightarrow B = 0$

$A^{-1}(AB) = A^{-1}(0) = (A^{-1}A)B = 0 = IdB = 0 = B = 0$

A, B MAT. DIAGONALES

AB ES DIAGONAL $\to [AB]_{ij} = 0$ $i \neq j$ $[AB]_{ij} = \sum_{k=1} A_{ik}B_{kj}$ Y $k \neq i \Rightarrow$

$A_{ik} = 0$ PQ ES DIAGONAL, Y $k \neq j \Rightarrow B_{kj} = 0$ Y $i \neq j$ $A_{ik} = 0$ Ó $B_{kj} = 0$ YA QUE (*)

(*) NO PUEDEN SER AL MISMO TIEMPO $k = i$ Y $k = j$ CADA SUMANDO ES NULO Y ASÍ $[AB]_{ij} = 0$

$AB = BA$ (1) $[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{ik} = A_{ii}B_{ii}$ YA QUE A Y B SON DIAGONAL

$[BA]_{ij} = \sum_{k=1} B_{ik}A_{ki} = B_{ii}A_{ii}$ LO UNICO Q' SOBREVIVE ES CUANDO $k = i$

MATRIZ TRANSPUESTA A^t

SEA $A_{m\times m}$ ES LA MATRIZ $m\times m$ QUE EN LA FILA i Y COLUMNA j TIENE COEFICIENTE $[A]_{ji}$, $[A^t]_{ij} = A_{ji}$

MATRIZ SIMETRIC.

$A^t = A$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ B ES SIMETRICA

A^t ES LA MATRIZ CUYA FILAS SON LAS COLUM. DE A

DETERMINANTE REGLA DE SARRUS

$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ det(A) = $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix}$ $= -28 + 0 + (-36) - (105 + 0 + 48) = -64$

SOLO FUNC PARA 3x3

SEA K UN CUERPO. SEAN $A, B \in M_{m\times m}(K)$ SE DICE QUE A SEMEJANTE A B SI $\exists P \in M_{m\times m}(K)$ INVERTIBLE TAL QUE $B = PAP^{-1}$

SI A SEMEJANTE A B $\Rightarrow$ det A = det B

$Tr\,A = Tr\,B$

$\det B = \det(PAP^{-1}) = \det P \cdot \det A \cdot \det P^{-1} = \det P \cdot \det A \cdot \frac{1}{\det P} = \det A$

$Tr\,B = Tr(PAP^{-1}) = Tr((PA)P^{-1}) = Tr(P^{-1}(PA)) = Tr((P^{-1}P)A) = Tr(Id\,A) = Tr\,A$

DETERMINAR TODOS LOS VALORES DE $a, b \in \mathbb{R}$ TALES QUE

$\begin{cases} ax + bz = 2 \\ ax + ay + 4z = 4 \\ ay + 2z = b \end{cases}$

a) TENGA SOLUCIÓN:

MATRIZ AMPLIADA $\left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{array}\right]$ TRANSFORMAMOS A UNA MERF Y VAMOS VIENDO LAS CONDICIONES.

b) TENGA UNA ÚNICA SOL.

TIENE UNA UNICA SOLUCIÓN SI LA MERF ASOCIADA NO TIENE FILAS NULAS EN EL CASO $a \neq 0$ Y $b \neq 2$

SI $A \in F^{m\times m}$ ES TAL QUE $A^m = 0 \Rightarrow \det A = 0$

$A^m = A \cdot A \cdots A$ (m VECES) $\Rightarrow \det(A^m) = \det A \cdot \det A$ (m veces) $= \det(A)^m$ PERO $A^m = 0 \Rightarrow \det(A^m) = 0 \Rightarrow \det A = 0$

SI $A \in F^{m\times m}$ $\det A = 0 \Rightarrow AX = 0$ SOLUC. NO TRIVIAL.

$\det A = 0 \Longleftrightarrow$ A NO ES INVERTIBLE $\Longleftrightarrow Ax = 0$

ENCONTRAR UN VECTOR $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ QUE SEA ORTOGONAL

$U = (4,-1,1)$, $V = (2,1,1)$, $W = (1,2,1)$ PRODUCT ESCALAR

UN VECTOR (x,y,z) ES ORTOGONAL $\Longleftrightarrow$ EL PROD CON ESTOS ES CERO.

$\langle u,(x,y,z)\rangle = \langle v,(x,y,z)\rangle = \langle w,(x,y,z)\rangle = 0$

$\begin{cases} 4x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ RESOLVIENDO EL SISTEMA $(x, x, -3x) = x(1,1,-3)$

PARAMETRICO $\{x(1,1,-3) \mid x \in \mathbb{R}\}$ Resultado

DETERMINAR PARA Q' VALORES DE $k \in \mathbb{R}$ SOL ÚNICA, NO SOL Ó INF SOL

$\begin{aligned} x + ky - z &= 1 \\ -x + y + k^2 z &= -1 \\ x + ky + (k-2)z &= 2 \end{aligned}$

SEA $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ PLANTEAMOS LA MATRIZ DEL SISTEMA (NO AMPL)

$\begin{bmatrix} 1 & k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3 - f_1]{f_2 + f_1} \begin{bmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & k+1 & k^2-1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}$

ANTES DE SEGUIR REDUCIENDO DEBEMOS DISTINGUIR 2 CASOS $k = -1$ NOS QUEDA LA MATRIZ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

PARA SABER SI HAY UNA, NINGUNA O INFINITA, NO HACE FALTA SEGUIR REDUCIENDO PUES VEMOS Q' HAY 1 FILA NULA

EL VECTOR OBTENIDO ES $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ CUYA 2DA COORD. SI ES NULA (*)

(*) POR LO TANTO SI $k = -1$ SI HAY SOL Y HAY INF

Y $k \neq -1$ REDUCIMOS Y OBTENEMOS $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \ \end{bmatrix}$ Y NO HAY SOLUCIÓN

IMPLICITA A PARAMETRICA DE UN PLANO.

$\{(x,y,z) : x - 2y + z = 1\}$

COMO $x = 1 + 2y - z$

$P = \{(1 + 2y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$

PARAMETRICA A IMPLICITA

$P = \{(1,1,0) + s(-1,0,-1) + t(0,1,-2) : s, t \in \mathbb{R}\}$

SEA $v = (a,b,c) \Rightarrow \langle v,(-1,0,-1)\rangle = 0$

$\Leftrightarrow -a - c = 0$ Y $\langle v,(0,1,-2)\rangle = 0 \Leftrightarrow b - 2c = 0$

$a = -c$ Y $b = 2c \Rightarrow v = (-c, 2c, c)$

$P = \{(x,y,z) : -x + 2y + z = 1\}$

REP. PARAM. P/ LA RECTA Q' CONTIENE (1,-3,1) (-2,4,5)

$V = (-1,-3,1)$ $U = (-2,4,5)$

VECT. DIRECTOR $U - V = (-2,4,5) - (-1,-3,1) = (-1,7,4)$ $x(t) = V + t(U - V)$

$x(t) = (-1,-3,1) + t(-1,7,4)$ $t \in \mathbb{R}$

PARAMETRICA Q' CONTIENE (2,2) Y ES PERP. A (2,1)

$V(2,2)$ $W = (1,-2)$

$x(t) = V + t(w)$

$x(t) = (2,2) + t(1,-2) \mid t \in \mathbb{R}$

IMPLICITA A PARAMETRICA

$5x + y = 11 \Rightarrow Y(t) = (t, -5t + 11)$

A ES INVERTIBLE $\Leftrightarrow A^k$ ES INVERTIBLE

$A \in K^{m\times m}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1 \Rightarrow A$ ES INVERTIBLE

$\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow (\det A)^k \neq 0 \Leftrightarrow \det(A^k) \neq 0$

$\Leftrightarrow A^k$ ES INVERTIBLE.

I-ESIMA FILA DE A ES NULA $\Rightarrow$ I-ESIMA FILA DE AB ES N

POR LA DEF. DE MULT. DE MAT. LA I-ESIMA FILA DE AB ES LA MULT DE LA I-ESIMA FILA DE A POR LA J-ESIMA COLUMNA DE B Y SUMANDO

DADO Q' LA I-ESIMA FILA DE A ES CERO, EL PRODUCTO SERÁ CERO POR LO TANTO LA I-ESIMA FILA DE AB ES NULA

$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ PROBAR CON MATRICES 2x2

DESC. PARAM. EL CONJ. $P_1 = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v_0, w\rangle = 0\}$

$W = (x,y,z) \Rightarrow W \in P_1 \Longleftrightarrow \langle (2,-1,1),(x,y,z)\rangle = 0$

$W \in P_1 \Longleftrightarrow 2x - y + z = 0$ IMPLICITA A PARAMET.

$2x - y + z = 0 \Rightarrow y = 2x + z$ $(x, 2x + z, z)$ Y A SU VEZ

$(x, 2x + z, z) = x(1,2,0) + z(0,1,1)$

$P_1 = \{s(1,2,0) + t(0,1,1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$

ECUACIÓN PARAMETRICA PASA POR $^u(0,0,0)$, $^v(1,1,0)$ Y $^w(1,-2,0)$

U, V, W ES $\{u + s(v - u) + t(w - u) \mid s, t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \Pi_1 = \{s(1,1,0) + t(1,-2,0) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$

LA ECUACIÓN PARAMETRICA ES $X(s,t) = s(1,1,0) + t(1,-2,0)$

PARA LA ECUACIÓN IMPLICITA, NECESITAMOS UN VECTOR Q' SEA ORTOGONAL A AMBOS VECTORES $(1,1,0)$ Y $(1,-2,0)$ UN VECTOR QUE CUMPLE ESO ES $(0,0,1) \Rightarrow \langle (x,y,z),(0,0,1)\rangle = \langle (0,0,0),(0,0,1)\rangle$

O EQUIV. $z = 0 \Rightarrow \Pi_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$

PRODUCTO DE 2 MATRICES Δ SUP. ES Δ SUP.

$A, B \in K^{m\times m}$ MAT Δ SUP. QUEREMOS PROBAR AB ES Δ SUP.

$[AB]_{ij} = 0\ \forall j$ SEA $i > j$ $[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kj}$

PARA $k < i$ COMO A ES TRIN. SUP. $A_{ik} = 0$

PARA $k \geq i$ DADO LA HIP. $i > j$ LUEGO $k > j$

SEA $A \in K^{m\times m}$ EL POLINOMIO CARACT. DE A ES $X_A(x) = \det(x \cdot Id - A)$

SEA $A \in K^{m\times m} \Rightarrow \lambda \in K$ ES AUTOVALOR $\Leftrightarrow \lambda$ ES RAIZ DEL POLINOMIO CARACTERISTICO DE A

$A(x) = \begin{bmatrix} x^2 & 0 & x+i \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2x \end{bmatrix} \Rightarrow A(i) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2i \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2i \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ REDUCIMOS POR FILAS JUNTO CON LA Id PAR OBT LA INVERS Y VER

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ POR LO TANTO A(i) ES INVER Y LA INV. ES ESS

$E_4 E_3 E_2 E_1 A(i) = Id \Leftrightarrow$

$E_4 E_3 E_2 E_1 = A(i)^{-1} \Leftrightarrow$

$A(i) = (E_1)^{-1} (E_2)^{-1} (E_3)^{-1} (E_4)^{-1}$

PLANO $2x - y + 3z = 5$ ES PERPENDICULAR A $(2,-1,3)$

SI QUEREMOS ENCONTRAR UN PUNTO QUE $\in$ PODEMOS DARLE VALORES ARBITRARIOS A X E Y Y LUEGO DESPEJAMOS Z

$A, B \in K^{m\times m}$ A ES SEMEJANTE A B SI $\exists P \in K^{m\times m}$ INVERTIBLE TAL QUE: $B = PAP^{-1}$

SI A ES SEMEJANTE A B $\Rightarrow \det A = \det B$ Y $Tr\,A = Tr\,B$

$\det B = \det(PAP^{-1}) = \det P \cdot \det A \cdot \det P^{-1} = \det P \cdot \det A \cdot \frac{1}{\det P} = \det A$

$Tr\,B = Tr(PAP^{-1}) = Tr((PA)P^{-1}) = Tr(P^{-1}(PA)) = Tr((P^{-1}P)A)$

$\det(-A) = (-1)^m \det(A)$

$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & & A_{mm} \end{bmatrix} \xrightarrow[-f_m]{-f_1,\ -f_2,\ \ldots} \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1m} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_{m1} & -a_{m2} & & -a_{mm} \end{bmatrix} = -A$

SI A ES UNA MATRIZ ORTOGONAL $\Rightarrow$

$(\det A)^2 = \det A \cdot \det A = \det A \cdot \det A^t = \det(A \cdot A^t) = \det(Id) = 1$ Y ASÍ

$(\det A)^2 = 1$ Y $\det A = \pm 1$

$\det A \in \mathbb{Z}$ Y $\det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$ EN CONSECUENCIA $\det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$ RESULTA QUE $\det A$ ES UN NUM. ENTERO QUE ES DIVISOR DE 1 Y VICEVERSA Y DEBE SER 1

SEA $A \in K^{m\times m}$ UNA MAT. INVERTIBLE CON COEFICIENTES ENTEROS SI A^{-1} TIENE COEF. ENTEROS $\Rightarrow \det A = 1$ O $\det A = -1$

A^{-1} TMB TIENE COEF ENTEROS $\Rightarrow$ POR COMO ESTA DEFINIDO EL DESARROLLO POR 1 COLUMNA EL CALCULO DEL DETERMINANTE DE LA MAT. A Y DEL DET A^{-1} MEDIANTE EL DESARROLLO DE 1 COLUM SOLO INVOLUCRA (+) Y (x) DE ENT. LUEGO COMO Z ES CERRADO PARA (+) Y (x) TENEMOS QUE,