Студент: Сергеев Александр
Группа: 8304
Дата: 26 мая 2020 г.

Теория вероятностей и математическая статистика
Индивидуальное домашнее задание №3
Вариант №21

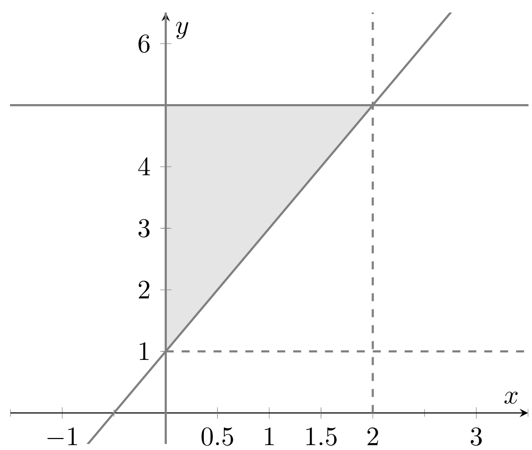
Случайная величина (ξ, η) имеет равномерное распределение в области

$$\begin{pmatrix} 4x - 2y \le -2, \\ x \ge 0, y \le 5 \end{pmatrix}$$

$\zeta = 3\xi^2 + 3, \nu = [5\eta], \mu = -8\xi + 4\eta$.

Задача 1. *Найти $p_{\xi,\eta}$, функции и плотности распределения компонент. Будут ли компоненты независимыми?*

Решение. Построим график:



$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{S} = \frac{1}{4}$$

Плотность распределения компоненты ξ:

$$p_\xi(x) = \int p_{\xi,\eta}(x,y)dy = \int_{2x+1}^{5} \frac{1}{4}dy = 1 - 0.5x$$

Плотность распределения компоненты η:

$$p_\eta(y) = \int p_{\xi,\eta}(x,y)dx = \int_0^{0.5(y-1)} \frac{1}{4}dx = \frac{1}{8} \cdot (y-1)$$

Функция распределения компоненты ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ x - 0.25x^2,\ 0 \le x \le 2 \\ 1,\ x > 2 \end{cases}$$

Функция распределения компоненты η:

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0,\ y < 1 \\ \dfrac{1}{16} \cdot (y-1)^2,\ 1 \le y \le 5 \\ 1,\ y > 5 \end{cases}$$

Величины зависимы, так как $p_\xi(x) \cdot p_\eta(y) \neq p_{\xi,\eta}$. $\square$

Задача 2. *Найти распределение случайных величин ζ и ν; $E\zeta$, $E\nu$, $D\zeta$, $D\nu$.*

Решение. Плотность распределения ζ:

$$p_\zeta(x) = P(\zeta < x) = P(3\xi^2 + 3 < x) = P(\xi < \sqrt{\frac{x-3}{3}}) = p_\xi(\sqrt{\frac{x-3}{3}}) = \begin{cases} 0,\ x < 3 \\ \sqrt{\frac{x-3}{3}} - \frac{x-3}{12},\ 3 \leq x \leq 15 \\ 1,\ x > 15 \end{cases}$$

Функция распределения ζ:

$$F_\zeta(x) = \begin{cases} 0,\ x < 3 \\ \frac{1}{12} \cdot (\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x-3}} - 1),\ 3 \leq x \leq 15 \\ 0,\ x > 15 \end{cases}$$

Функция распределения ν:

$$F_\nu(y) = \sum_{i=5}^{i<y} (P(\eta \in [\frac{i}{5}; \frac{i+1}{5}])) = \sum_{i=5}^{i<y} (F_\eta(\frac{i+1}{5}) - F_\eta(\frac{i}{5})) = \begin{cases} 0,\ y < 5 \\ \frac{1}{16} \cdot \sum_{i=5}^{i<y} (\frac{2i-9}{25}),\ 5 \leq y \leq 25 \\ 1,\ y > 25 \end{cases}$$

Математическое ожидание ζ:

$$E_\zeta = \int x \cdot p_\zeta(x) dx = \int_3^{15} \frac{x}{12} \cdot (\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x-3}} - 1) dx = 5$$

Математическое ожидание ν:

$$E_\nu = \frac{1}{16} \cdot \sum_{i=5}^{25} (i \cdot \frac{2i-9}{25}) = 17.825$$

Дисперсия ζ:

$$D_\zeta = \int x^2 \cdot p_\zeta(x) dx - E_\zeta^2 = \int_3^{15} \frac{x^2}{12} \cdot (\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x-3}} - 1) dx - 25 = \frac{153}{5} - 16 = 14.6$$

Дисперсия ν:

$$D_\nu = \frac{1}{16} \cdot \sum_{i=5}^{25} (i^2 \cdot \frac{2i-9}{25}) - 17.825^2 \approx 22.194$$

$\square$

Задача 3. *Вычислить вектор математических ожиданий и ковариационные характеристики вектора (ξ, η). Найти условное распределение ξ при условии η; $E(\xi|\eta)$, $D(\xi|\eta)$.*

Решение. Вектор математического ожидания $(\xi,\ \eta)$:

$$E_{\xi,\eta} = (E_\xi, E_\eta) = (\int x \cdot p_\xi(x) dx, \int y \cdot p_\eta(y) dy) = (\int_0^2 x \cdot (1 - 0.5x) dx, \int_1^5 \frac{y}{8} \cdot (y-1) dy) = (\frac{2}{3}, \frac{11}{3})$$

Ковариационная матрица вектора (α, β) представляет из себя: $\begin{pmatrix} D_\alpha & Cov(\alpha, \beta) \\ Cov(\beta, \alpha) & D_\beta \end{pmatrix}$, где $Cov(\alpha, \beta) = Cov(\beta, \alpha) = E_{\alpha,\beta} - E_\alpha \cdot E_\beta$.

Дисперсия ξ:

$$D_\xi = \int x^2 \cdot p_\xi(x) dx - E_\xi^2 = \int_0^2 x^2 \cdot (1 - 0.5x) dx - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

Дисперсия η:

$$D_\eta = \int y^2 \cdot p_\eta(y) dy - E_\eta^2 = \int_1^5 \frac{y^2}{8} \cdot (y-1) dy - \frac{121}{9} = \frac{8}{9}$$

Математическое ожидание ξ и η:

$$E_{\xi,\eta} = \int\int yx \cdot p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = \int_1^5 \int_0^{0.5(y-1)} yx \cdot \frac{1}{4}dxdy = \int_1^5 0.03125y \cdot (1-y)^2 dy = \frac{8}{3}$$

Ковариация ξ и η:

$$Cov(\xi,\eta) = E_{\xi,\eta} - E_\xi \cdot E_\eta = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{3} = \frac{2}{9}$$

Ковариационная матрица вектора $(\xi,\, \eta)$:

$$\frac{2}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Условное распределение ξ при условии η:

$$p_{\xi|\eta=y_0}(x) = \frac{p_{\xi,\eta}(x,y)}{p_\eta(y)} = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ \dfrac{2}{y_0 - 1}, \ 0 \le x \le \dfrac{y_0-1}{2} \\ 0, \ x > \dfrac{y_0 - 1}{2} \end{cases}$$

Условное математическое ожидание ξ при условии η:

$$E_{\xi|\eta=y_0}(y_0) = \int x \cdot p_{\xi|\eta=y_0}(x)dx = \begin{cases} 0, \ y_0 < 1 \\ \dfrac{y_0-1}{4}, \ 1 \le y_0 \le 5 \\ 0, \ y_0 > 5 \end{cases}$$

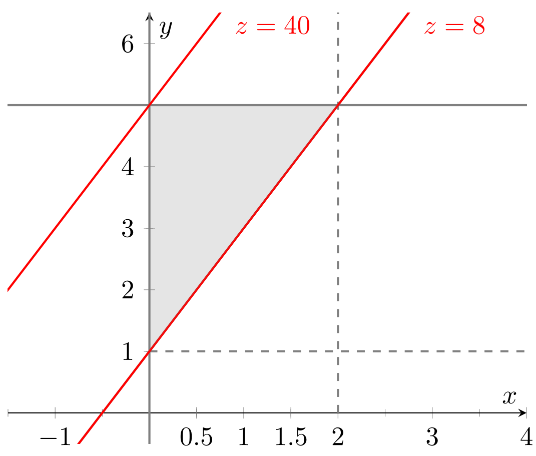
Условная дисперсия ξ при условии η:

$$D_{\xi|\eta=y_0}(y_0) = \int x^2 \cdot p_{\xi|\eta=y_0}(x)dx - E^2_{\xi|\eta=y_0}(y_0) = \begin{cases} 0, \ y_0 < 1 \\ \dfrac{(y_0-1)^2}{12} - \dfrac{(y_0-1)^2}{16}, \ 1 \le y_0 \le 5 \\ 0, \ y_0 > 5 \end{cases} = \begin{cases} 0, \ y_0 < 1 \\ \dfrac{y_0^2 - 2y_0^2 + 1}{48}, \ 1 \le y_0 \le 5 \\ 0, \ y_0 > 5 \end{cases}$$

□

Задача 4. *Найти распределение μ; E_μ; D_μ.*

Решение. F_μ зависит от переменной $z = -8x + 4y$.



Распределение μ:

$$F_\mu(z) = \int\int p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = \int_0^{\frac{z-20}{-8}} dx \int_{2x+\frac{z}{4}}^5 p_{\xi,\eta}(x,y)dy = \begin{cases} 0, \ z < 4 \\ 1 - \dfrac{(z-20)^2}{256}, \ 4 < z < 20 \\ 1, \ z > 20 \end{cases}$$

Плотность распределения μ:

$$p_\mu(z) = \begin{cases} 0,\ z < 4 \\ \dfrac{20 - z}{128},\ 4 < z < 20 \\ 0,\ z > 20 \end{cases}$$

Математическое ожидание μ:

$$E_\mu = \int z \cdot p_\mu(z) dz = \int_4^{20} \frac{20z - z^2}{128} dz = \frac{28}{3} \approx 9.33$$

Дисперсия μ:

$$D_\mu = \int z^2 \cdot p_\mu(z) dz - E_\mu^2 = \int_4^{20} \frac{20z - z^2}{128} dz - \frac{784}{9} = \frac{128}{9} \approx 14.22$$

$\square$