

Теория вероятностей и математическая статистика

Индивидуальное домашнее задание №1

Вариант №22

**Задача 1.** Слово "математика" разрезается на буквы. Затем из этих букв случайным образом составляется слово. Определить вероятность, что получится то же слово.

**Решение.** Вероятность получения того же слова представляет из себя произведение вероятностей того, что на каждом шаге будет выбрана правильная буква из оставшихся. Необходимо учитывать, что некоторые буквы в слове одинаковы.

$$\frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \approx 0.0000066$$

Ответ: 0.0000066. □

**Задача 2.** Из двух колод по 36 карт вытащили по 3 карты и переложили в 3 такую же колоду. После этого из 3 колоды вытащили 8 карт. Среди них оказалось 4 туза. Найти вероятность того, что переложили 2 туза.

**Решение.** Информация про 8 вытащенных из 3 колоды карт на решение задачи не влияет, так как 4 туза в 3 колоде могло быть при любом исходе первого действия.

Рассмотрим три варианта, при которых могло быть переложено 2 туза:

- (1) Из 1 колоды был переложено 1 туз, и из второй колоды был переложено 1 туз
- (2) Из 1 колоды было переложено 2 туза, а из второй не было переложено ни одного
- (3) Из 1 колоды не было переложено ни одного туза, а из второй было переложено 2 туза

Очевидно, что, поскольку 1 и 2 колоды одинаковые, вероятность 2 и 3 варианта равна.

Найдём вероятность того, что из 3 переложённых карт 2 были тузами:

$$\frac{\frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{32!}{31! \cdot 1!}}{\frac{36!}{33! \cdot 3!}} \approx 0.02689$$

Найдём вероятность того, что из 3 переложённых карт 1 была тузом:

$$\frac{\frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{32!}{30! \cdot 2!}}{\frac{36!}{33! \cdot 3!}} \approx 0.07721$$

Найдём вероятность того, что из 3 переложённых карт ни одна не была тузом:

$$\frac{\frac{4!}{4! \cdot 0!} \cdot \frac{32!}{29! \cdot 3!}}{\frac{36!}{33! \cdot 3!}} \approx 0.69468$$

Тогда для рассмотренных ранее вариантов:

- (1) :  $P(a) = 0.07721^2 = 0.00596$
- (2) = (3):  $P(a) = 0.02689 \cdot 0.69468 = 0.01868$

Следовательно, общая вероятность будет равна сумме вероятностей рассмотренных двух случаев:

$$P(a) = 0.00596 + 0.01868 \cdot 2 = 0.04332$$

Ответ: 0.04332. □

**Задача 3.** Система охраны некоторого объекта, имеющего форму прямоугольника  $500 \times 300$  м, состоит из трех контуров ограждений, соединяющихся между собой через каждые 100 м. Вероятность повреждения каждого участка контура между двумя соседними соединениями независимо от других равно 0,2. Определить вероятность того, что данная система охраны будет нарушена.

*Решение.* Рассмотрим каждый участок ограждения, состоящий из трех контуров. Вероятность повреждения такого участка равно произведению составляющих его участков контуров:

$$0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2 = 0.008$$

Общая вероятность будет равна сумме вероятностей повреждения всех рассмотренных участков:

$$P(a) = 0.008 \cdot ((3 + 5) \cdot 2) = 0.128$$

Ответ: 0.128. □

**Задача 4.** Вероятность успеха в схеме Бернулли равна 0.001. Проводится 2000 испытаний. Написать точную формулу и вычислить приближенно вероятность того, что число успехов не превышает 4.

*Решение.* Согласно формуле Бернулли:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n - k}$$

Вероятность того, что число успехов не превышает 4 равна сумме вероятностей того, что число успехов будет равно 0, 1, 2, 3 и 4 соответственно:

$$P_n(k \leq 4) = \sum_{i=0}^4 \frac{n!}{i! \cdot (n - i)!} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n - i}$$

Поскольку  $n \cdot p = 2000 \cdot 0.001 = 2$  для приближения используем теорему Пуассона:

$$P(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \exp^{-\lambda}, \lambda = n \cdot p = 2$$

$$P_n(k \leq 4) \approx \sum_{i=0}^4 \left( \frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} \right) \cdot \exp^{-2} = \left( 1 + 2 + 2 + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \right) \cdot \exp^{-2} = 7 \cdot \exp^{-2} \approx 0.94735$$

Ответ: 0.94735. □