Студент: Сергеев Александр
Группа: 8304
Дата: 18 апреля 2020 г.

Теория вероятностей и математическая статистика
Индивидуальное домашнее задание №2
Вариант №21

Задача 1. *На плоскости расчерчена прямоугольная сетка, величина ячейки 9 × 8 единиц. Определить вероятность того, что монета диаметра 4, наугад брошенная на плоскость, не пересечёт ни одной прямой.*

Решение. Представим событие A - монета не пересечёт сетки в виде двух событий: B - монета не пересечёт вертикальных линий и C - монета не пересечёт горизонтальных линий. Тогда $P(A) = P(B) \cdot P(C)$.
Вероятность попадания монеты на параллельные прямые равна вероятности попадания центра монеты в область, находящуюся от любой прямой на расстоянии, большем, чем радиус монеты, делённой на вероятность попадания центра монеты в область между прямыми:

$$P(X) = \frac{a-d}{a}$$

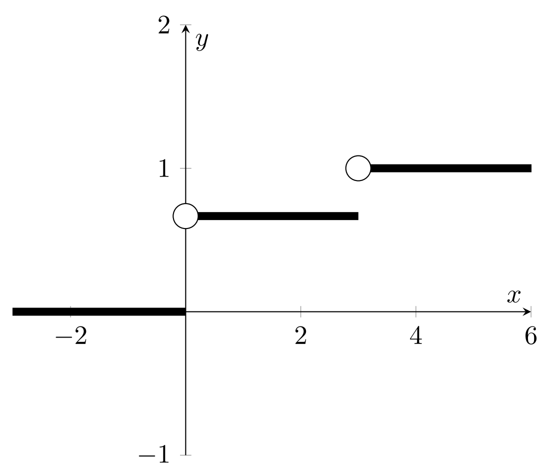
, где a - расстояние между прямыми, а d - диаметр монеты.
Таким образом мы можем высчитать вероятности событий B и C, а, следовательно, и события A:

$$P(A) = P(B) \cdot P(C) = \frac{9-4}{9} \cdot \frac{8-4}{8} = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$$

Ответ: $\frac{5}{18}$. □

Задача 2. *Дана функция распределения случайной величины* ξ*:* $\begin{array}{cccc} x & (-\infty, 0] & (0, 3] & (3, \infty) \\ F_\xi(x) & 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{array}$*. Вычислить* $\boldsymbol{E}\xi$*,* $\boldsymbol{D}\xi$*, энтропию* ξ *и распределение* $\eta = \xi^4$*.*

Решение. Построим график функции распределения ξ:



Найдём закон распределения ξ, разделив функцию на отрезки:

x	0	3
p	2/3	1/3

Проверим верность построения: $\sum p_n = 1$.
Рассчитаем математическое ожидание, для дискретной случайной величины оно вычисляется по формуле $\mathbf{E}\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$:

$$\mathbf{E}\xi = (0 \cdot \frac{2}{3}) + (3 \cdot \frac{1}{3}) = 1$$

Рассчитаем дисперсию, $\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^2$. Для этого добавим в таблицу законна распределения ещё одну вспомогательную строку:

x	0	3
p	2/3	1/3
$(x - \mathbf{E}\xi)^2$	1	4

Для дискретной случайной величины она вычисляется по формуле $\mathbf{D}\xi = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathbf{E}\xi)^2 \cdot p_i$:

$$\mathbf{D}\xi = (1 \cdot \frac{2}{3}) + (4 \cdot \frac{1}{3}) = 2$$

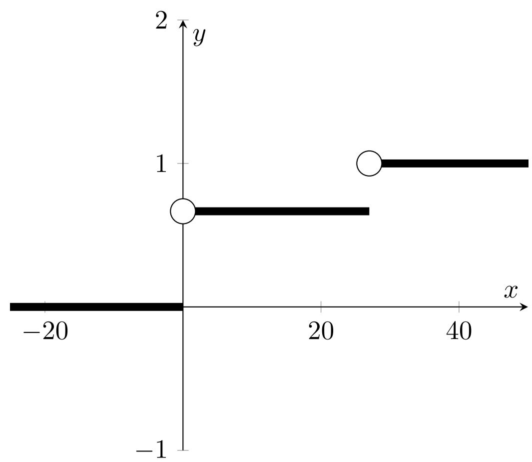
Проверим верность вычисления: $\mathbf{D}\xi > 0$.
Рассчитаем энтропию, для дискретной случайной величины она вычисляется по формуле $\mathbf{H}\xi = -\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log(p_i)$:

$$\mathbf{H}\xi = (\frac{2}{3} \cdot \log(\frac{2}{3})) + (\frac{1}{3} \cdot \log(\frac{1}{3})) = -0.27643$$

Найдём закон распределения случайной величины $\eta = \xi^4$:

x	0	27
p	2/3	1/3

Следовательно, $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, \ -\infty < x \leq 0 \\ 2/3, \ 0 < x \leq 27 \\ 1, \ 27 < x < \infty \end{cases}$. Построим график функции распределения η:



□

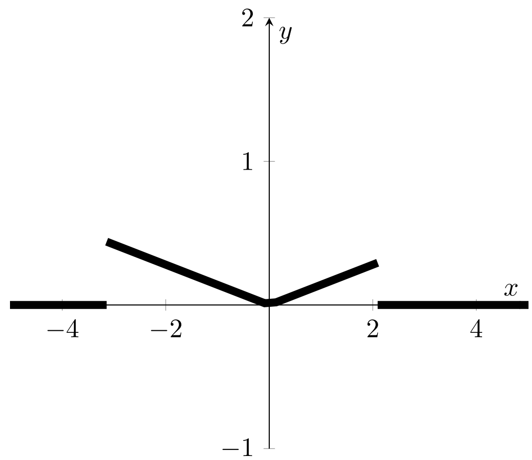
Задача 3. *Дана плотность распределения абсолютно непрерывной случайной величины* ξ*:* $p(x) = \begin{cases} C|x|, \ x \in [-\pi; \frac{2}{3}\pi] \\ 0, \ x \notin [-\pi; \frac{2}{3}\pi] \end{cases}$*. Вычислить* C*,* $\boldsymbol{E}\xi$*,* $\boldsymbol{D}\xi$*, энтропию* ξ *и распределение* $\eta = \cos(3\xi)$*.*

Решение. Известно, что функция распределения $F'(x) = p(x)$. Следовательно, $F_\xi(x) = \begin{cases} 0,\ x \in (-\infty; -\pi] \\ g(x),\ x \in [-\pi; \dfrac{2}{3}\pi] \\ 1,\ x \notin [\dfrac{2}{3}\pi; \infty] \end{cases}$,

где $g(x) = \int C|x|dx$ такая, что $g(-\pi) = 0$ и $g(\frac{2}{3}\pi) = 1$ (из-за непрерывности ξ).
Вычислим C по формуле $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi} 0dx + \int_{-\pi}^{\frac{2}{3}\pi} C|x|dx + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\infty} 0dx = \int_{-\pi}^{\frac{2}{3}\pi} C|x|dx = C \cdot \frac{13}{18}\pi^2 = 1$$

Следовательно, $C = \frac{18}{13\pi^2} \approx 0.44074$.
Построим график плотности распределения ξ:



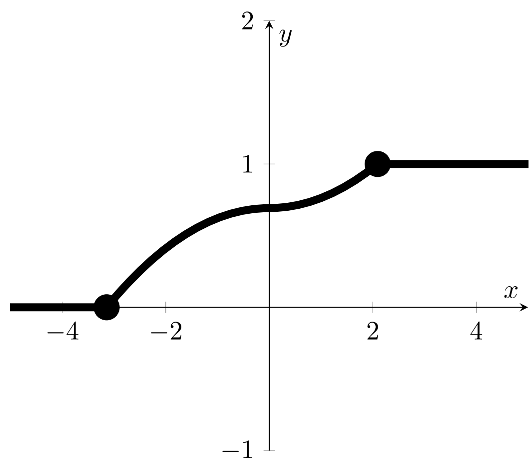
Найдём функцию распределения ξ:

$$F_\xi(x) = \int_{-\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{18}{13\pi^2}|x|dx = \frac{18}{26\pi^2}x^2 \cdot sign(x) + const.$$

Подставим точку $(-\pi, 0)$, чтобы узнать константу:

$$\frac{18}{26\pi^2}(-\pi)^2 \cdot (-1) + const. = 0$$

Следовательно, $const. = \frac{9}{13}$.
Построим график функции распределения ξ:



Рассчитаем математическое ожидание, для непрерывной случайной величины оно вычисляется по формуле $\mathbf{E}\xi = \int xp(x)dx$:

$$\mathbf{E}\xi = \int_{-\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{18}{13\pi^2} x^2 dx = -\frac{38\pi}{117} \approx -1.02035$$

Рассчитаем дисперсию по формуле $\mathbf{D}\xi = \int x^2 p(x)dx - \mathbf{E}\xi^2$:

$$\mathbf{D}\xi = \int_{-\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{18}{13\pi^2} x^2|x|dx - \mathbf{E}\xi^2 = \frac{97}{234}\pi^2 - \frac{1444}{13689}\pi^2 = \frac{8461}{27378}\pi^2 \approx 3.05014$$

Проверим верность вычисления: $\mathbf{D}\xi > 0$. Рассчитаем энтропию, для непрерывной случайной величины она вычисляется по формуле $\mathbf{H}\xi = -\int p(x)\log(p(x))dx$:

$$\mathbf{H}\xi = -\int_{-\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{18}{13\pi^2}|x| \cdot \log(\frac{18}{13\pi^2}|x|)dx = log(\frac{6 \cdot 2^{\frac{4}{13}} \cdot 3^{\frac{9}{13}}}{13\pi}) - \frac{1}{2} \approx -1.4441$$

Найдём функцию распределения случайной величины η:

$$F_\eta(x) = p(\eta < x) = p(\cos(3\xi) < x) = p(\xi < \frac{\arccos(x)}{3}) = F_\xi(\frac{\arccos(x)}{3})$$

Следовательно, подставив крайние значения $F_\xi(x)$ в уравнение η, получим:

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, \ x \in (-\infty; -1] \\ \dfrac{6}{26\pi^2} \arccos(x)^2 \cdot sign(x) + \dfrac{9}{13}, \ x \in [-1; 1] \\ 1, \ x \notin [1; \infty] \end{cases}$$

$\square$