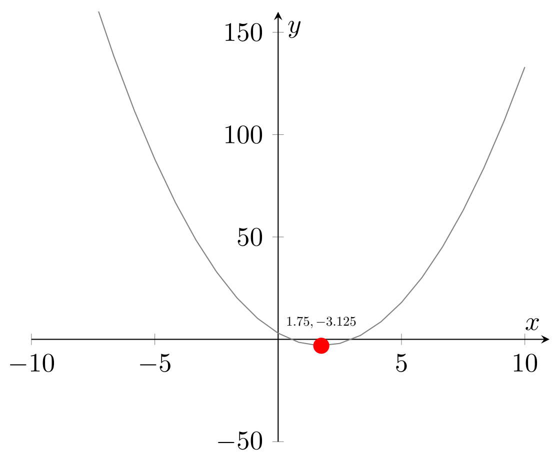
Студент: Сергеев Александр
Группа: 8304
Дата: 8 апреля 2020 г.

Специальные разделы алгебры
Индивидуальное домашнее задание
Вариант №41 (8123034)

Задача 1. *Функция* $f : (\alpha; +\infty) \to (\beta; +\infty)$ *задана формулой* $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$. *Найдите наименьшие* α *и* β, *при которых функция* f *биективна.*

Решение. Функция биективна в той области, где она одновременно и инъективна и сюръективна. Функция инъективна тогда, когда она строго монотонна. Поскольку верхний предел дан в условии, найдем минимальное значение на оси абсцисс, начиная с которого функция f возрастает.
Построим график функции и отметим на нем вершину параболы красной точкой:



Очевидно, что как раз от вершины функция начинает монотонно возрастать. Следовательно, α равна абсциссе вершины параболы.
Функция сюръективна тогда, когда ее область значения непрерывна. Очевидно, что область значения данной функции непрерывна начиная от вершины параболы и выше. Следовательно, β равна ординате вершины параболы.
Ответ: $\alpha = 1.75, \beta = -3.125$. □

Задача 2. *Является ли функция* $f : (1, \ldots, 8) \to (1, \ldots, 6)$ *заданная таблицей* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 2 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ *инъективной? сюръективной? биективной?*

Решение. Функция является инъективной, если элементы ее образа не повторяются. Как видно из таблицы, 3, 4 и 8 переходят в 1. Следовательно, функция f не инъективна.
Функция является сюръективной, если все элементы образа имеют соответствующий им элемент в прообразе. Так как образ содержит все числа от 1 до 6, функция f сюръективна.
Функция биективна тогда, когда она и инъективна и сюръективна одновременно. Следовательно, f не биективна. □

Задача 3. *Решить:*

(1) *Является ли группой множество корней 6-й степени из 1 с операцией сложения?*
(2) *Является ли группой множество невырожденных верхнетреугольных матриц размера* $n \times n$ *над* $\mathbb{R}$ *с операцией умножения?*

(3) *Является ли группой множество дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией композиции?*

Решение. Множество является группой относительно операции $\cdot$, если операция $\cdot$ ассоциативна, в множестве есть нейтральный элемент относительно $\cdot$, и для любого элемента множества существует обратный ему элемент.
Рассмотрим данные три случая:

(1) Множество корней 6-й степени из 1 - подмножество множества $\mathbb{C}$. В множестве $\mathbb{C}$ операция сложения ассоциативна. Единственный нейтральный элемент множества $\mathbb{C}$ - $(0,0)$ не принадлежит множеству корней 6-й степени из 1. Следовательно, в нём нет нейтрального элемента, и группой оно не является.

(2) Операция умножения любых матриц ассоциативна. Ее нейтральный элемент - единичная матрица - является элементом множества невырожденных верхнетреугольных матриц размера $n \times n$. Обратные матрицы (обратные элементы) для верхнетреугольных матриц также принадлежат этому множеству. Следовательно, это множество являктся группой.

(3) Множество дробно-рациональных функций не является замкнутым относительно операции композиции, а, следовательно, не является и группой.

$\square$

Задача 4. *Записать перестановку* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 8 & 10 & 1 & 2 & 6 & 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ *в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.*

Решение. Обозначим перестановку квадратными скобками, а циклы - круглыми. Разложим на циклы: $[3\ 7\ 8\ 10\ 1\ 2\ 6\ 4\ 9\ 5] = (1\ 3\ 8\ 4\ 10\ 5)(2\ 7\ 6)(9)$
Порядок перестановки равен НОК длин всех простых циклов: 6 $\square$

Задача 5. *Найдите произведение перестановок:* $(1\ 3\ 7\ 8\ 4)(5\ 6)\cdot(1\ 5\ 6\ 7\ 3\ 8)(2\ 4)$, *ответ в циклической форме.*

Решение. Представим произведения в виде перестановки:

$$(1\ 3\ 7\ 8\ 4)(5\ 6) = (3\ 2\ 7\ 1\ 6\ 5\ 8\ 4)$$

$$(1\ 5\ 6\ 7\ 3\ 8)(2\ 4) = (5\ 4\ 8\ 2\ 6\ 7\ 3\ 1)$$

Перемножим перестановки:

$$(3\ 2\ 7\ 1\ 6\ 5\ 8\ 4) \cdot (5\ 4\ 8\ 2\ 6\ 7\ 3\ 1) = (1\ 3\ 7\ 8\ 4)(5\ 6) \cdot (1\ 5\ 6\ 7\ 3\ 8)(2\ 4) = (6\ 1\ 4\ 2\ 5\ 8\ 7\ 3)$$

Представим перестановку в циклической форме:

$$(6\ 1\ 4\ 2\ 5\ 8\ 7\ 3) = (1\ 6\ 8\ 3\ 4\ 2)(5)(7) = (1\ 6\ 8\ 3\ 4\ 2)$$

$\square$

Задача 6.

Решение. Множество является группой относительно операции $*$, если операция $*$ ассоциативна, в множестве есть нейтральный элемент относительно $*$, и для любого элемента множества существует обратный ему элемент.
Так как G - подмножество $\mathbb{R}$ а, операция $*$ состоит из операций сложения и умножения, которые, в свою очередь, ассоциативны на $\mathbb{R}$, операция $*$ ассоциативна на G.
Нейтральный элемент для операции $*$, определенной на G - 0, так как для операции при умножении он обращает результат в 0.
Обратный элемент для операции $*$ вычисляется по формуле: $y = -\frac{x}{x+1}$. Исключение из множества $\mathbb{R}$ элемента $\{-1\}$ никак не повлияло на тот факт, что для каждого элемента G можно найти обратный, так как -1 не имеет обратного элемента (уравнение $\frac{x}{x+1} - 1 = 0$ не имеет решений).
Следовательно, множество G - группа. $\square$

Задача 7.

Решение. Группа A изоморфна группе B, если существует такое биективное отображение F, такое, что для любых m и n, принадлежащих группе A, справедливо: $F(m \cdot n) = F(m) \cdot F(n)$. $\square$