T es lineal si $(\lambda \in \mathbb{R})$

$T(v_1+v_2) = T(v_1) + T(v_2)$

$T(\lambda v_1) = \lambda T(v_1)$

Si T es lineal $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$\boxed{T(\alpha v + \beta w)} = \boxed{\alpha T(v) + \beta T(w)}$

Álgebra Lineal

Ayudantía 4: Preparación Interrogación 1

1. Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones. En cada caso, justifique su respuesta.

(a) Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que verifica $T(1, 1) = (1, 0, 2)$ y $T(2, 3) = (1, -1, 4)$. Entonces $\boxed{T(8, 11) = (5, -3, 16)}$.

(b) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisface $T(1, 1) = (2, 6)$, $T(-1, 1) = (2, 1)$ y $T(2, 7) = (5, 3)$. Entonces T es una transformación lineal.

(a) Escribiremos $(8,11)$ como combinación lineal de $(1,1)$ y $(2,3)$.

Existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$(8,11) = \alpha(1,1) + \beta(2,3)$$

$$(8,11) = (\alpha,\alpha) + (2\beta, 3\beta)$$

$$(8,11) = (\alpha+2\beta, \alpha+3\beta)$$

Entonces

$$\alpha + 2\beta = 8$$

$$\alpha + 3\beta = 11 \quad / \cdot -1$$

Así

$$\left|\begin{array}{l} \alpha + 2\beta = 8 \\ -\alpha - 3\beta = -11 \end{array}\right.$$

Sumando

$$-\beta = -3$$

$$\boxed{\beta = 3}$$

Esto Implica

$$\alpha + 6 = 8$$

$$\boxed{\alpha = 2}$$

Por lo tanto

$$(8,11) = 2(1,1) + 3(2,3) \Big/ T$$

Aplicando T

$$T(8,11) = T\big(\underbrace{2(1,1) + 3(2,3)}\big)$$

T es Transf. lineal

$$= T(2(1,1)) + T(3(2,3))$$

$$= 2\,T(1,1) + 3\,T(2,3)$$

$$= 2(1,0,2) + 3(1,-1,4)$$

$$= (2,0,4) + (3,-3,12)$$

$$= (5,-3,16)$$

//

Así, la Proposición es Verdadera.

(b) Encontraremos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$(2,7) = \alpha(1,1) + \beta(-1,1)$$
$$(2,7) = (\alpha,\alpha) + (-\beta,\beta)$$
$$(2,7) = (\alpha-\beta, \alpha+\beta)$$

Entonces

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ \alpha + \beta = 7 \end{cases}$$

Sumando

$$2\alpha = 9 \Rightarrow \alpha = \frac{9}{2}$$

Por lo tanto

$$\frac{9}{2} - \beta = 2$$
$$\frac{9}{2} - 2 = \beta$$

$$\frac{9-4}{2}=\frac{5}{2}=\beta$$

Por lo tanto

$$(2,7)=\frac{9}{2}(1,1)+\frac{5}{2}(-1,1) \quad /T$$

Si T <u>fuese</u> lineal, entonces

$$T(2,7)=T\left(\frac{9}{2}(1,1)+\frac{5}{2}(-1,1)\right)$$

$$=T\left(\frac{9}{2}(1,1)\right)+T\left(\frac{5}{2}(-1,1)\right)$$

$$=\frac{9}{2}T(1,1)+\frac{5}{2}T(-1,1)$$

$$=\frac{9}{2}(2,6)+\frac{5}{2}(2,1)$$

$$=(9,27)+\left(5,\frac{5}{2}\right)$$

$$= \left(14, \frac{59}{2}\right)$$

Pero $T(2,7) = (5,3)$. Como

$$(5,3) \neq \left(14, \frac{59}{2}\right)$$

Entonces T NO es lineal.

La Proporción es Falsa

2 Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que verifica:

$$\boxed{T(1,0,0) = (1,1),\ T(1,1,0) = (1,\alpha) \text{ y } T(0,0,-1) = (2,2).} \quad (*)$$

(a) Determine la matriz A que satisface $T(v) = Av$, para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

(b) ¿Qué condiciones debe cumplir $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que T sea inyectiva?

(c) ¿Qué condiciones debe cumplir $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que T sea sobreyectiva?

(a) Sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Supondremos que existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \beta \\ -\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \alpha + \beta \\ y = \beta \\ z = -\gamma \\ -z = \gamma \end{array}$$

Obtenemos

$$\boxed{\beta = y}$$

$$\boxed{\gamma = -z}$$

$$x = \alpha + \beta$$

$$x - \beta = \alpha$$

$$\boxed{x - y = \alpha}$$

Ahora

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x-y)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aplicando T

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T\left((x-y)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

T es lineal

$$= (x-y)\,T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\,T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - z\,T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= (x-y)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \end{pmatrix} - z\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x-y \\ x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ \alpha y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2z \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x - 2z \\ x+\alpha y - y - 2z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x - 2z \\ x + y(\alpha - 1) - 2z \end{pmatrix}$$

Así

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2z \\ x + (\alpha - 1)y - 2z \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & \alpha-1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{v}) = A\vec{v}$$

Por lo tanto

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & \alpha-1 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} c_1 & \qquad & c_3 \end{array} \end{array}$$

(b) Para que T sea Inyectiva, debe ocurrir que las Columnas de A sean Linealmente Independiente. Pero esto NO es posible, pues la Columna 3 es un Múltiplo Escalar (no Nulo) de la Columna 1.

Independiente del valor de α, T jamás sera Inyectiva.

(c) T es Sobreyectiva si las Columnas de A generan $\mathbb{R}^2$.

Es decir, si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ se puede obtener a partir de $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad v_1 \qquad\quad v_2 \qquad\quad v_3$

$\text{Gen}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{Gen}\{v_1, v_2\}$

$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \underbrace{(x, y)}_{\in \mathbb{R}^2} = \alpha v_1 + \beta v_2$

Note que (Sean $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$)

Verificar que μ, σ existan

$\overbrace{(x, y)}^{\in \mathbb{R}^2} = \mu (1, 1) + \sigma (0, \alpha - 1)$

$(x, y) = (\mu, \mu) + (0, \sigma\alpha - \sigma)$

$$\boxed{X = \mu} \quad (*)$$

$$y = \mu + \sigma\alpha - \sigma$$

$$y = \mu + \sigma(\alpha - 1)$$

$$\frac{y - \mu}{\alpha - 1} = \sigma$$

$$\boxed{\frac{y - X}{\alpha - 1} = \sigma}$$

$\alpha - 1 \neq 0$

$\boxed{\alpha \neq 1}$

σ existe si $\alpha \neq 1$

T es Sobreyectiva si $\alpha \neq 1$.

$V_1 = K V_2$ $\quad$ $V_1, V_2 \neq \vec{0}$

$K \neq 0$

(3) Considere $\{u, v, w\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores en $\mathbb{R}^3$. Pruebe que $\{u + 2v, u + 3w\}$ es linealmente independiente.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha(u+2v) + \beta(u+3w) = \vec{0}$$

Por demostrar que $\alpha = \beta = 0$.

En efecto

$$\alpha u + 2\alpha v + \beta u + 3\beta w = \vec{0}$$

$$(\alpha+\beta)u + 2\alpha v + 3\beta w = \vec{0}$$

Como $\{u, v, w\}$ es L.I entonces

$$\alpha + \beta = 0$$

$$2\alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$3\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Obtenemos $\alpha = \beta = 0$, por lo que $\{u+2v, u+3w\}$ es

L.I

4 Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto $P(-1,3,2)$ y es perpendicular a los planos:

$$\pi_1 : 2x + y - 2z = 2,$$
$$\pi_2 : x - y + 3z = 4.$$

El Vector director de Π_1 es

$$\vec{V}_{\Pi_1} = (2, 1, -2)$$

El Vector director de Π_2 es

$$\vec{V}_{\Pi_2} = (1, -1, 3)$$

El Vector Perpendicular a $\vec{V}_{\Pi_1}$ y $\vec{V}_{\Pi_2}$ es

el Vector director del plano buscado $(\vec{V_\pi})$.
Por lo tanto

$$\vec{V_\pi} = \vec{V_{\pi_1}} \times \vec{V_{\pi_2}}$$

$$= (2,1,-2) \times (1,-1,3)$$

$$= \det \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= (1, -8, -3)$$

De esta manera

$$\Pi : x - 8y - 3z + D = 0$$

Como $P(-1,3,2) \in \Pi$,

entonces

$$-1-3\cdot 8-3\cdot 2+D=0$$

$$-31+D=0$$

$$\boxed{D=31}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\pi:\ x-8y-3z+31=0}$$

(5) Considere el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 2 \\ x+2y+z &=& 3 \\ x+y+(k^2-5)z &=& k \end{array}$$

Encuentre el valor de $k \in \mathbb{R}$ de modo que el sistema posea:

(a) Solución única.

(b) Infinitas soluciones.

(c) Ninguna solución.

La matriz ampliada asociada al sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & k^2-5 & k \end{array}\right)$$

$F_2 - F_1 \to F_2 \sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & K^2-5 & k \end{array}\right)$$

$$F_3 - F_1 \to F_3 \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & K^2-4 & K-2 \end{array}\right)$$

Si $K = 2$, entonces

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

↳ Existe una variable libre

Expresado como sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

Digamos $z = t$, $t \in \mathbb{R}$

(variable libre). Entonces

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3t \\ 1-2t \\ t \end{pmatrix}$$

con $t \in \mathbb{R}$. Así, con

$\boxed{K=2}$ el sistema

tiene infinitas soluciones

Con $K = -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

el Sistema NO tiene Solución

Con $k \neq \{-2, 2\}$ el sistema tiene solución única dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k+5}{k+2} \\ \frac{k}{k+2} \\ \frac{1}{k+2} \end{pmatrix}$$