Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

Álgebra Lineal

Ayudantía 4: Preparación Interrogación 1

Profesor: Mircea Petrache, Ayudante: Joaquín Oyarzún

1. Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones. En cada caso, justifique su respuesta.

   (a) Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que verifica $T(1,1) = (1,0,2)$ y $T(2,3) = (1,-1,4)$. Entonces $T(8,11) = (5,-3,16)$.

   (b) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisface $T(1,1) = (2,6)$, $T(-1,1) = (2,1)$ y $T(2,7) = (5,3)$. Entonces T es una transformación lineal.

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que verifica:

$$T(1,0,0) = (1,1),\ T(1,1,0) = (1,\alpha) \text{ y } T(0,0,-1) = (2,2).$$

   (a) Determine la matriz A que satisface $T(v) = Av$, para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

   (b) ¿Qué condiciones debe cumplir $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que T sea inyectiva?

   (c) ¿Qué condiciones debe cumplir $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que T sea sobreyectiva?

3. Considere $\{u, v, w\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores en $\mathbb{R}^3$. Pruebe que $\{u + 2v, u + 3w\}$ es linealmente independiente.

4. Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto $P(-1,3,2)$ y es perpendicular a los planos:

$$\pi_1 : 2x + y - 2z = 2,$$
$$\pi_2 : x - y + 3z = 4.$$

5. Considere el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl|} x + y - z & = & 2 \\ x + 2y + z & = & 3 \\ x + y + (k^2 - 5)z & = & k \\ \hline \end{array}$$

Encuentre el valor de $k \in \mathbb{R}$ de modo que el sistema posea:

   (a) Solución única.

   (b) Infinitas soluciones.

   (c) Ninguna solución.