1. Sea $A$ una matriz invertible tal que una descomposición en matrices elementales de $A^{-1}$ es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sin calcular $A$ ni $A^{-1}$.

*a*) **[4 ptos]** Encuentre una factorización $PA = LU$.

*b*) **[2 ptos]** Usando la factorización anterior, resuelva el sistema

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sea $A$ una matriz de $3 \times 3$ con determinante 2 y sean $B$, $C$ dos matrices de $3 \times 3$ tales que:

- $B$ es la matriz que se obtiene al realizar la siguiente operación en $A$: A la fila dos se le resta la fila tres.
- $C$ es la matriz que se obtiene al realizar la siguiente operación en $A$: Se intercambia la fila dos por la fila tres.

Calcular el determinante de $(3A^T B^{-1} C^3)$.

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det(A)$$

Matriz adjunta: Sea $A_{n \times n}$:

$$|A| \cdot |Adj(A)| = \big| |A| \cdot I \big|$$

$$\Rightarrow |A| \cdot |Adj(A)| = |A|^n$$

$$A \cdot Adj(A) = Adj(A) \cdot A = |A| \cdot I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Adj(A) = (C_{ij})^T$$

$$= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$\mathrm{Det}(Adj(A)) = [\det(A)]^{n-1}$$

2. Sea $A$ una matriz de $3 \times 3$ con determinante 2 y sean $B$, $C$ dos matrices de $3 \times 3$ tales que:

- $B$ es la matriz que se obtiene al realizar la siguiente operación en $A$: A la fila dos se le resta la fila tres.
- $C$ es la matriz que se obtiene al realizar la siguiente operación en $A$: Se intercambia la fila dos por la fila tres.

Calcular el determinante de $(3A^T B^{-1} C^3)$.

$|A| = 2$

$|B| = 2$

$|C| = -2$

$$\det(3A^T \cdot B^{-1} \cdot C^3)$$

$$= \det(3A^T) \cdot \det(B^{-1}) \cdot \det(C^3)$$

$$= 3^3 \cdot \det(A^T) \cdot 1/\det(B) \cdot [\det(C)]^3$$

$$= 27 \cdot \det(A) \cdot 1/\det(B) \cdot [\det(C)]^3$$

$$= 27 \cdot 2 \cdot 1/2 \cdot (-2)^3$$

//

3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 2\alpha & \alpha+5 & 4 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

*a*) Aplicando el desarrollo por cofactores, calcule el determinante de $A$.

*b*) Determine todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que la matriz $A$ es invertible.

$$A = \begin{vmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 2\alpha & \alpha+5 & 4 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{vmatrix} \xrightarrow[f_3 \to f_3 - f_1]{f_2 \to f_2 - 2f_1} \begin{vmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & \alpha+1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix} = \alpha(\alpha+1)(\alpha-1)$$

$\alpha \neq 0, -1, 1$

$$\begin{vmatrix} 2\alpha & 4 & 2 \\ 2\alpha & \alpha+5 & 4 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{vmatrix} \xrightarrow{f_1 \to \frac{1}{2} f_1} 2 \begin{vmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 2\alpha & \alpha+5 & 4 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{vmatrix}$$

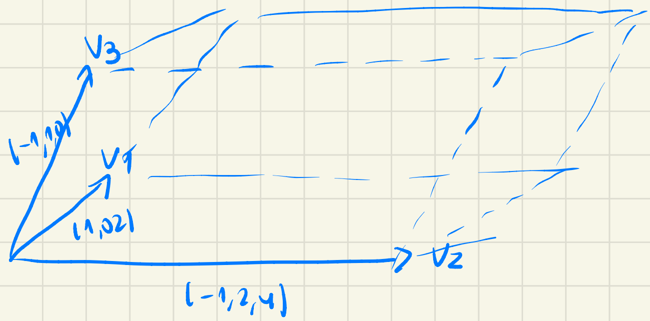
$$2x^2 + 4x + 6 = 2(x^2 + 2x + 3)$$

$$\det(A) = \det(A^T)$$

$$\det(A) \longrightarrow \det(A^T) \xrightarrow{\text{Operación fila}} \det(B^T) \longrightarrow \det(B)$$

$$\det(A) \xrightarrow{\text{Operación columna}} \det(B)$$

4. Sean $S$ el paralelepípedo que tiene un vértice en el origen y vértices adyacentes en $(1,0,2),(-1,2,4),(-1,1,0)$, y $T(x_1,x_2,x_3)=(\alpha x_1+x_2, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3)$ una transformación lineal. Encuentre el o los valor(es) de $\alpha$ tal que el volumen del paralelepípedo $T(S)$ sea 4.




$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1+x_2+x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vol}(T(S)) = \det(A) \cdot \text{Vol}(S)$$

$$= |\alpha - 1| \cdot \left| \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \ldots$$

6. Dada la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$.

Encuentre el espacio nulo de esta transformación y determine si $T$ es inyectiva.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{Null}(A) \Rightarrow [A \mid 0] \ \ldots$

$\text{Gen}\{\vec{v}\}$ | sol infinita | $\rightarrow$ T no es inyectiva

$\{\vec{0}\}$ | sol única | $\rightarrow$ T sí es inyectiva

7. Sea $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ el espacio de los polinomios de grado inferior o igual a 3 y

$$E = \{P \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \mid P(-1) = 0 \text{ y } P(1) = 0\}.$$

Demuestre que $E$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

Definicion

① $\vec{0} \in E$: $\quad \overset{\in \mathbb{P}_3}{q(t) = 0} \rightarrow q(-1) = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad q(1) = 0$

②

③

Teorema:

$q(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$

$\hookrightarrow q(-1) = -a + b - c + d = 0$

$\quad q(1) = a + b + c + d = 0$

$> \quad 2b + 2d = 0$

$b + d = 0$

$b = -d$

$a = -c$

$q(t) = -ct^3 - dt^2 + ct + d = c(-t^3 + t) + d(-t^2 + 1)$

$= \text{gen}\{(-t^3+t), (-t^2+1)\} \Rightarrow$ Subespacio

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

*a*) Escriba $A$ como producto de matrices elementales.

*b*) Encuentre una factorización del tipo $A = LU$, y úsela para resolver $Ax = \vec{\mathbf{b}}$ donde $\vec{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ -12 \end{bmatrix}$

$$E_4 E_3 E_2 E_1 A = I$$

$$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot E_4^{-1} \cdot I$$