PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2022

Ayudante: Diego Milla

MAT1203 - ÁLGEBRA LINEAL
Clase 7: Conjuntos solución de sistemas lineales

1. Describa todas las soluciones de $A\mathbf{x} = 0$ en forma vectorial paramétrica, donde A es equivalente por filas a la matriz dada

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ $\leftarrow$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 6 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ $\leftarrow$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -29 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Suponga que el conjunto solución de un cierto sistema de ecuaciones lineales se describe como $x_1 = 5 + 4x_3$, $x_2 = -2 - 7x_3$, con x_3 libre. Use vectores para describir este conjunto como una recta en $\mathbb{R}^3$.

   $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+4x_3 \\ -2-7x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} t \quad ; t \in \mathbb{R}$

3. Suponga que el conjunto solución de un cierto sistema de ecuaciones lineales se describe como $x_1 = 5x_4$, $x_2 = 3 - 2x_4$, $x_3 = 2 + 5x_4$, con x_4 libre. Utilice vectores para describir este conjunto como una "recta" en $\mathbb{R}^4$.

   $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_4 \\ 3-2x_4 \\ 2+5x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t \quad ; t \in \mathbb{R}$

4. Encuentre la ecuación paramétrica de la recta que pasa por $\mathbf{a}$ y es paralela a $\mathbf{b}$.

   a) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad r_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} t$

   b) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\quad r_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix} t$

   $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{a} + \vec{b} \cdot t$

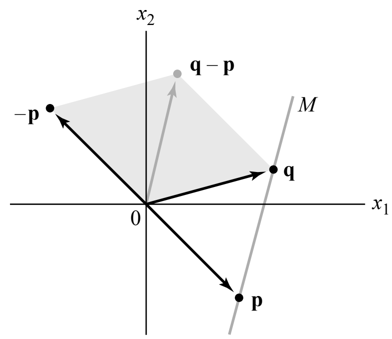
5. Obtenga una ecuación paramétrica de la recta M que pasa a través de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$.

   a) $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. $\quad r_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \cdot t$

   b) $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $q = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$. $\quad r_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) t$

   $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{p} + \overrightarrow{pq} \cdot t = \vec{p} + (\vec{q} - \vec{p}) \cdot t$

   [Sugerencia. M es paralela al vector $\mathbf{q} - \mathbf{p}$. Véase la figura que aparece más abajo].



6. Marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

   a) Una ecuacion homogénea es consistente. V

   b) La ecuación homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene la solución trivial si y solo si la ecuación tiene al menos una variable libre. F

   c) La ecuación $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ describe una recta que pasa por $\mathbf{v}$ y es paralela a $\mathbf{p}$. F

   d) El conjunto solución $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es el conjunto de todos los vectores de la forma $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$ donde $\mathbf{v}_h$ es cualquier solución de la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. V

   e) Un sistema homogéneo de ecuaciones puede ser inconsistente. F

   f) Si $\mathbf{x}$ es una solución no trivial de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces cada entrada en $\mathbf{x}$ es distinta de cero. F

   g) El efecto de sumar $\mathbf{p}$ a un vector es mover a dicho vector en una dirección paralela a $\mathbf{p}$. F

   h) La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es homogénea si el vector cero es una solución. V

   i) Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente, entonces el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se obtiene por traslación del conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. V

7. Construya una matriz A de 2×2 tal que el conjunto solución de la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sea la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa a través de $(4, 1)$ y el origen. Luego, encuentre un vector $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^2$ tal que el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no sea una recta en $\mathbb{R}^2$ paralalela al conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. ¿Por qué esto no contradice al teorema 6 de la página 46 del libro guía?

8. Suponga que A es una matriz de 3×3 y $\mathbf{b}$ es un vector en $\mathbb{R}^3$ tales que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución. ¿Existe un vector $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ tiene una solución única? Justifique su respuesta.

No, ya que si no tiene solución para b significa que al escalonar la matriz aumentada queda de la forma: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & b_1 \\ 0 & 1 & * & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{array}\right]$. Por lo tanto x_3 corresponde a una variable libre, y con una variable libre no puede haber solución única