PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2022

Ayudante: Diego Milla

MAT1203 - ÁLGEBRA LINEAL
Clase 6: Ecuaciones Vectoriales y ecuación matricial

1. Determine si $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$.

   a) $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$.

   Calcular solución de $[a_1\ a_2\ a_3 \mid b]$
   Al ojo: $2a_1 + 3a_2 = b$

   b) $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}$.

   Calcular solución de $[a_1\ a_2\ a_3 \mid b]$

2. Sean $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ h \end{bmatrix}$. ¿Con qué valor (o valores) de h se encuentra $\mathbf{b}$ en el plano generado por $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$? Calcular solución de $[a_1\ a_2 \mid b]$

3. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} h \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$. ¿Para qué valor (o valores) de h se encuentra $\mathbf{y}$ en el plano generado por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$? Calcular solución de $[v_1\ v_2 \mid y]$

4. Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Demuestre que $\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ está en Gen$\{u, v\}$ para todas las h y k. Demostrar que u y v generan $\mathbb{R}^2$, es decir, demostrar que u y v son LI

5. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$. Denote las columnas de A por $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, y sea $W = \text{Gen}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

   a) ¿Está $\mathbf{b}$ en $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$? ¿Cuántos vectores hay en $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$? No, 3

   b) ¿Está $\mathbf{b}$ en W? ¿Cuántos vectores hay en W? Calcular $[A \mid b]$, infinitos

   c) Demuestre que a_1 está en W.

   sea $W = \{a_1, a_2, a_3\}$. y la comb. lineal $\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3$
   - Considerando $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$: $1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 = a_1$
   $\downarrow$
   a_1 está en W

6. Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ y sea W el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A.

   a) ¿Está $\mathbf{b}$ en W? Calcular solución de $[A|b]$

   b) Demuestre que la segunda columna de A está en W. $W = \text{Gen}\{a_1, a_2, a_3\}$
   sea la comb. lineal: $\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3$
   - con $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0$:
   $0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 = a_2$
   $\downarrow$
   $\therefore$ segunda columna de A está en W

7. Marque cada enunciado como falso o verdadero. Justifique sus respuestas.

   a) Otra notación para el vector $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ es $[-4, 3]$. V

   b) Los puntos en el plano que corresponden a $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$ están sobre una recta que pasa por el origen. F

   c) Un ejemplo de combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ es el vector $\frac{1}{2}\mathbf{v}_1$. V

   d) El conjunto solución del sistema lineal cuya matriz aumentada es $[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{b}]$ coincide con el conjunto solución de la ecuación $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$. V

   e) El conjunto Gen$\{u, v\}$ siempre se visualiza como un plano que pasa por el origen. F (si u y v son LD sería una recta)

   f) Cuando $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores diferente de cero, Gen$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ solo contiene la recta que pasa por $\mathbf{u}$ y por el origen, y la recta que pasa por $\mathbf{v}$ y el origen. F (Puede contener un plano)

   g) Cualquier lista de cinco números reales es un vector en $\mathbb{R}^5$. V

   h) Preguntar si el sistema lineal correspondiente a la matriz aumentada $[\mathbf{a}_1 \, \mathbf{a}_2 \, \mathbf{a}_3 \, \mathbf{b}]$ tiene solución equivale a preguntar si el vector $\mathbf{b}$ está en Gen$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$. V

   i) El vector $\mathbf{v}$ resulta cuando un vectgor $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ se suma al vector $\mathbf{v}$. F (Resulta u)

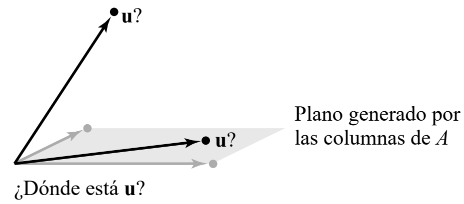
   j) No todos los pesos $c_1, \ldots, c_p$ en una combinación lineal $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$ pueden ser cero. F (si pueden ser 0)

8. Considerando A y $\mathbf{b}$, escriba la matriz aumentada para el sistema lineal que corresponde a la ecuación matricial $Ax = \mathbf{b}$. Después, resuelva el sistema y escriba la solución como un vector.

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & -7 & 6 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$ *b*) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

   Calcular solución de $[A|b]$

9. Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. ¿Está $\mathbf{u}$ en el plano generado por las columnas de A? (Véase la figura). ¿Por qué? Calcular solución de $[A \mid u]$



10. Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. ¿Está $\mathbf{u}$ en el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ generado por las columnas de A? ¿Por qué? Calcular solución de $[A \mid u]$

11. Considere las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & 9 & 5 & -7 \end{bmatrix}.$$

a) ¿Cuántas filas de A contienen una posición pivote? ¿La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^4$?

b) ¿Cada vector en $\mathbb{R}^4$ se puede escribir como una combinación lineal de las columnas de la matriz B? ¿Las columnas de B generan a $\mathbb{R}^3$?

c) ¿Todo vector en $\mathbb{R}^4$ se puede escribir como una combinación lineal de las columnas de la matriz A anterior? ¿Las columnas de A generan a $\mathbb{R}^4$?

d) ¿Las columnas de B generan a $\mathbb{R}^4$? ¿La ecuación $B\mathbf{x} = \mathbf{y}$ tiene solución para cada $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^4$?

12. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. ¿$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ genera a $\mathbb{R}^4$? ¿Por qué?

Nunca, ya que se necesitan 4 vectores en $\mathbb{R}^4$ que sean linealmente independientes

13. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$. ¿$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ genera $\mathbb{R}^3$? ¿Por qué?

Si, ya que son 3 vectores en $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes

14. Marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

a) La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se reconoce como una *ecuación vectorial.* F (Ecuación matricial)

b) Un vector $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de las columnas de una matriz A si y solo si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución. V

c) La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente si la matriz aumentada $[A \;\; \mathbf{b}]$ tiene una posición pivote en cada fila. F (La última fila puede ser [0 0 0 0 | bn] y eso no tendría solución)

d) La primera entrada en el producto $A\mathbf{x}$ es una suma de productos. V

e) Si las columnas de una matriz A de $m \times n$ generan a $\mathbf{R}^m$, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$. V

f) Si A es una matriz de $m \times n$ y si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente para alguna $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$, entonces A no puede tener una posición pivote en cada fila. V

g) Cada ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ corresponde a una ecuación vectorial con el mismo conjunto solución. F

h) Si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente, entonces $\mathbf{b}$ está en el conjunto generado por las columnas de A. V

i) Cualquier combinación lineal de vectores siempre se puede escribir en la forma $A\mathbf{x}$ para una matriz A y un vector $\mathbf{x}$ adecuados. V

j) Si la matriz coeficiente A tiene una posición pivote en cada fila, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente. F

k) El conjunto solución de un sistema lineal cuya matriz aumentada es $[\mathbf{a}_1 \; \mathbf{a}_2 \; \mathbf{a}_3 \; \mathbf{b}]$ coincide con el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, si $A = [\mathbf{a}_1 \;\; \mathbf{a}_2 \;\; \mathbf{a}_3]$. V

l) Si A es una matriz de $m \times n$ cuyas columnas no generan a $\mathbb{R}^m$, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para toda $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$. F