

## PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

## PROBABILIDAD

1

## PROBABILIDAD

## Leyes De La Probabilidad

Las relaciones que se dan entre los eventos al ser aplicadas las operaciones que se presentaron, se facilitan y comprenden mejor haciendo uso de los axiomas y teoremas de probabilidad (Leyes de Probabilidad).

**Axioma.** - es una verdad evidente que no requiere demostración.

**Teorema.** - Es una verdad que requiere ser demostrada.

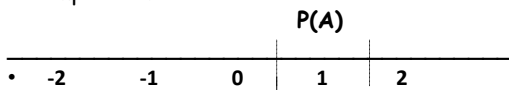
2

## PROBABILIDAD

**Axioma 1.** - Sea  $S$  un espacio muestral cualquiera y  $A$  un evento, tal que  $A \subset S$ , entonces se cumple que

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (3)$$

esto significa que la probabilidad de cualquier evento no puede ser más grande que uno, ni ser menor que cero. Si es igual a 1 se llama evento seguro, y cuando es cero se llama evento imposible.



3

## PROBABILIDAD

**Axioma 2.** - La probabilidad del espacio muestral  $\Omega$  es un evento seguro, es uno

$$P(\Omega) = 1$$

**Ejemplo.** -

**Experimento.** - Se lanza un dado

Si  $A = \Omega$ , es decir si el evento  $A$  coincide o es igual al espacio muestral, entonces.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{N(S)}{N(\Omega)} = 1$$

4

## PROBABILIDAD

**Teorema 1.-** Si  $\Phi$  es el conjunto vacío, entonces la probabilidad de  $\Phi$  es igual a 0

$$P(\emptyset) = \frac{N(\emptyset)}{N(\Omega)} = 0$$

### Ejemplos:

Una persona que quiere ganar la lotería nacional, pero no compra boleto.

Que aparezca un siete al lanzar un dado

Que una persona viva 250 años

En estos casos los eventos son vacíos

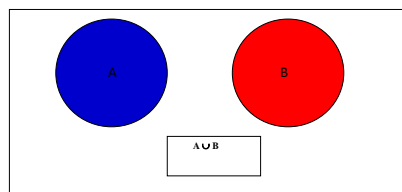
5

## PROBABILIDAD

**Axioma 3.-** Sea  $\Omega$  un espacio muestral cualquiera y sean A y B dos eventos tales que

$A \subset \Omega$ ,  $B \subset \Omega$  y  $A \cap B = \emptyset$ , es decir, dos eventos mutuamente exclusivos, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$



6

## PROBABILIDAD

Ejemplo:

**Experimento:** Se lanzan dos monedas

$\Omega = \{ KK, CC, KC, CK \}$

$N(\Omega) = 4$

Sean:

A: el evento de que al lanzar un par de monedas caigan dos veces cara exactamente

B: el evento de que al lanzar un par de monedas caiga cara exactamente.

Los elementos de A y B son

$A = \{ KK \}$

$B = \{ KC, CK \}$

Se puede ver que  $A \cap B = \emptyset$ , no hay elementos en común, por lo que los eventos son mutuamente exclusivos o disjuntos, por tanto

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

7

## PROBABILIDAD

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{4}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

8

## PROBABILIDAD

### Axioma 4.-

Sean  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$  eventos mutuamente exclusivos:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4, \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + \dots + P(A_n)$$

Este axioma dice que la probabilidad de varios eventos mutuamente exclusivos (que no tienen elementos en común), es igual a la suma de sus probabilidades.

9

## PROBABILIDAD

### Ejemplo:

Experimento: **Se lanza un dado**

Sean

Evento A: que al lanzar un dado salga el 2 o el 4

Evento B: que al lanzar un dado salga un número mayor a 4

Evento C: que salga el 1 o 3

Los elementos de A, B y C son

$$\begin{array}{ll} A = \{2, 4\}, & N(A) = 2 \\ B = \{5, 6\}, & N(B) = 2 \\ C = \{1, 3\}, & N(C) = 2 \end{array}$$



10

## PROBABILIDAD

Como A, B y C son mutuamente excluyentes, ya que  $A \cap B = \{\emptyset\}$ ,  $A \cap C = \{\emptyset\}$ ,

$$B \cap C = \{\emptyset\},$$

Por axioma 4

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6}$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6}$$

$$P(C) = \frac{N(C)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6}$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

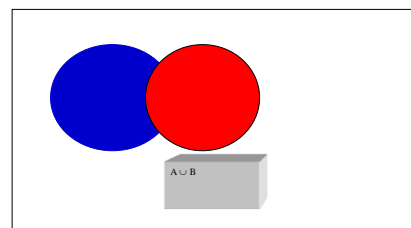
11

## PROBABILIDAD

### Teorema 2.-(Ley Aditiva de la Probabilidad).

Sean A y B dos eventos no excluyentes,  $A \cap B \neq \emptyset$ , entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



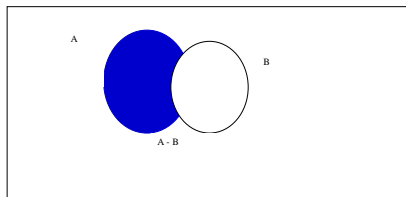
12

## PROBABILIDAD

Diferencia

Sean A y B dos eventos:

$$A-B = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \notin B \}$$



13

## PROBABILIDAD

Ejemplo. -

**Experimento.** - Se lanza un dado y una moneda  
 $\Omega = \{1c, 2c, 3c, 4c, 5c, 6c, 1a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a\}$   
 $N(\Omega) = 12$

A: Al lanzar un dado y una moneda aparezcan el número 2 o 3 con cara.

B: Al lanzar un dado y una moneda aparezcan números pares con cara.

$$A = \{2c, 3c\}, \quad N(A) = 2$$

$$B = \{2c, 4c, 6c\} \quad N(B) = 3$$

$$A \cap B = \{2c\} \quad N(A \cap B) = 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = 2/12 + 3/12 - 1/12 = 4/12 = 1/3$$

14

## PROBABILIDAD

**Teorema 3.** - Sea A un evento cualquiera y  $\Omega$  un espacio muestral, tal que  $A \subset S$ , si  $A^c$  es el complemento del evento A, entonces la probabilidad de  $A^c$  es igual a 1 menos la probabilidad de A, es decir

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

15

## PROBABILIDAD

**Experimento.** - Se lanza un dado y una moneda  
 $\Omega = \{1c, 2c, 3c, 4c, 5c, 6c, 1a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a\}$   
 $N(\Omega) = 12$

A: Al lanzar un dado y una moneda aparezcan el número 2 o 3 con cara.

B: Al lanzar un dado y una moneda aparezcan números pares con cara.

$$A = \{2c, 3c\}, \quad N(A) = 2$$

$$B = \{2c, 4c, 6c\} \quad N(B) = 3$$

$$A^c = \{1c, 4c, 5c, 6c, 1a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a\}$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 2/12 = 10/12$$

$$B^c = \{1c, 3c, 5c, 1a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a\}$$

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 3/12 = 9/12$$

16

## PROBABILIDAD

### Probabilidad Condicional.

Sea  $A$  un evento arbitrario de un espacio muestral  $\Omega$ , con  $P(E) > 0$ . La probabilidad de que un evento  $A$  suceda una vez que  $E$  ha sucedido o en otras palabras, la probabilidad condicional de  $A$  dado  $E$ , se define como:

$$P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

17

## PROBABILIDAD

Ejemplo:

Experimento: Lanzar un dado.

$A$ : que al lanzar el dado caiga 3

$E$ : que al lanzar un dado salga un impar

Encontrar la probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga un 3 dado que se obtuvo un impar.

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{3\}$ ,  $E = \{1,3,5\}$ ,  $(A \cap E) = \{3\}$ ,

$P(A) = 1/6$

$$\begin{aligned} P(A/E) &= P(A \cap E) / P(E) \\ &= 1/6 / 3/6 = (1)(6)/(6)(3) \\ &= 6/18 = 1/3 \end{aligned}$$

18

## PROBABILIDAD

Otra forma de calcular las probabilidades de la intersección y las probabilidades condicionales, de dos eventos  $A$  y  $B$ , tal que

$$A \cup A^c = \Omega$$

$$B \cup B^c = \Omega$$

es elaborando primero la tabla de número de elementos de los eventos y después la tabla de sus probabilidades.

19

Se tienen los eventos  $A$  y  $B$  y sus complementos  $A^c$ ,  $B^c$

|       | $B$          | $B^c$          | Total    |
|-------|--------------|----------------|----------|
| $A$   | $A \cap B$   | $A \cap B^c$   | $A$      |
| $A^c$ | $A^c \cap B$ | $A^c \cap B^c$ | $A^c$    |
| Total | $B$          | $B^c$          | $\Omega$ |

20

Tabla de número de elementos de  $A$ ,  $B$  y sus complementos  $A^c$ ,  $B^c$

|       | $B$             | $B^c$             | Total       |
|-------|-----------------|-------------------|-------------|
| $A$   | $N(A \cap B)$   | $N(A \cap B^c)$   | $N(A)$      |
| $A^c$ | $N(A^c \cap B)$ | $N(A^c \cap B^c)$ | $N(A^c)$    |
| Total | $N(B)$          | $N(B^c)$          | $N(\Omega)$ |

21

Tabla de probabilidades de  $A$ ,  $B$ ,  $A^c$ ,  $B^c$  y sus intersecciones

|       | $B$             | $B^c$             | Total       |
|-------|-----------------|-------------------|-------------|
| $A$   | $P(A \cap B)$   | $P(A \cap B^c)$   | $P(A)$      |
| $A^c$ | $P(A^c \cap B)$ | $P(A^c \cap B^c)$ | $P(A^c)$    |
| Total | $P(B)$          | $P(B^c)$          | $P(\Omega)$ |

22

## PROBABILIDAD

### Ejemplo. -

En cierta ciudad, las mujeres representan el 50% de la población y los hombres el otro 50%. Se sabe que el 20% de las mujeres y el 5% de hombres están sin trabajo. Un economista estudia la situación de empleo, elige al azar una persona desempleada. Si la población total es de 8000 personas,

¿Cuál es la probabilidad de que la persona escogida sea ?:

23

## PROBABILIDAD

- a).- Mujer
- b).- Hombre
- c).- Mujer dado que está empleado
- d).- Desempleado dado que es hombre
- e).- Empleado dado que es mujer

Sean los eventos:

- M: Que sea Mujer
- H: Que sea Hombre
- D: Que sea Desempleado
- E: Que sea Empleado

24

Tabla Número de elementos de los Eventos M, H, D, E y S

|              | Desempleados<br>D | Empleados<br>E | Total |
|--------------|-------------------|----------------|-------|
| Mujeres<br>M | 800               | 3200           | 4000  |
| Hombres<br>H | 200               | 3800           | 4000  |
| Total        | 1000              | 7000           | 8000  |

Tabla de Probabilidades

|       | D                  | E                  | Total            |
|-------|--------------------|--------------------|------------------|
| M     | $800/8000 = .1$    | $3200/8000 = .4$   | $4000/8000 = .5$ |
| H     | $200/8000 = .025$  | $3800/8000 = .475$ | $4000/8000 = .5$ |
| Total | $1000/8000 = .125$ | $7000/8000 = .875$ | $8000/8000 = 1$  |

25

26

## PROBABILIDAD

$$\begin{aligned}
 P(M) &= .50 \\
 P(H) &= .50 \\
 P(E) &= .875 \\
 P(D) &= .125 \\
 P(M/E) &= P(M \cap E)/P(E) = .40/.875 = .4571 \\
 P(D/H) &= P(D \cap H)/P(H) = .025/.5 = .05 \\
 P(E/M) &= P(M \cap E)/P(M) = .40/.5 = .8 \\
 P(M/D) &= P(M \cap D)/P(D) = .10/.125 = .8 \\
 P(H/D) &= P(H \cap D)/P(D) = .025/.125 = .2
 \end{aligned}$$

27

## PROBABILIDAD

Eventos dependientes e independientes

En el ejemplo anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
 P(M) &= .50 \\
 P(H) &= .50 \\
 P(E) &= .875 \\
 P(D) &= .125 \\
 P(M \cap E) &= .40 & P(M) P(E) &= .4375 \\
 P(D \cap H) &= .025 & P(D) P(H) &= .0625 \\
 P(M \cap D) &= .10 & P(M) P(D) &= .0625 \\
 P(E \cap H) &= .475 & P(E) P(H) &= .4375
 \end{aligned}$$

28

**PROBABILIDAD**

Por tanto los eventos  $M$  y  $E$  ,  
                                   $D$  y  $H$  ,  
                                   $M$  y  $D$  ,  
                                   $E$  y  $H$   
son dependientes.