$$3T(\lfloor n/4 \rfloor) + O(n^2)$$

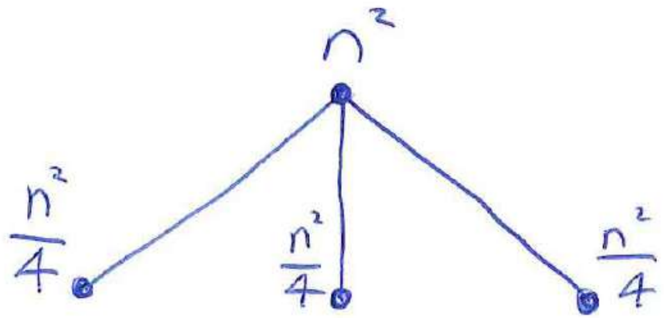
Paso 1: Dibujar raíz del árbol, respetando orden de magnitud de la parte no recursiva de la Recurrencia.

Nivel ∅

Paso 2: Lanzar cantidad de hijos indicados en la Recurrencia (equivalente a la cantidad de llamadas recursivas), y enviarles la cantidad de datos que también se define en la Recurrencia.

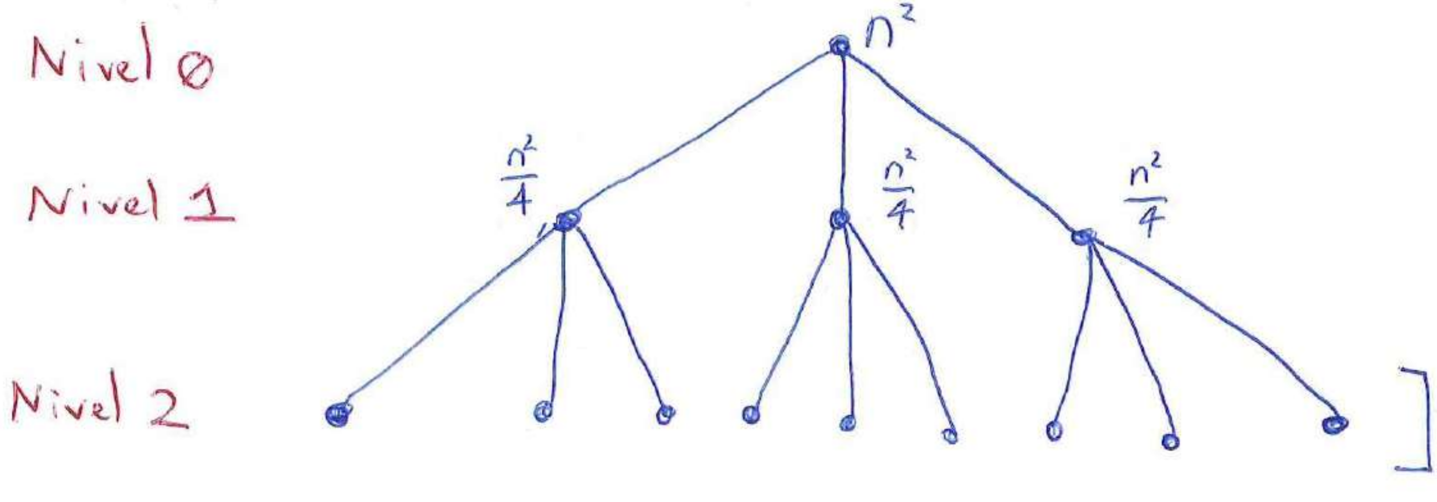
Nivel ∅

Nivel 1



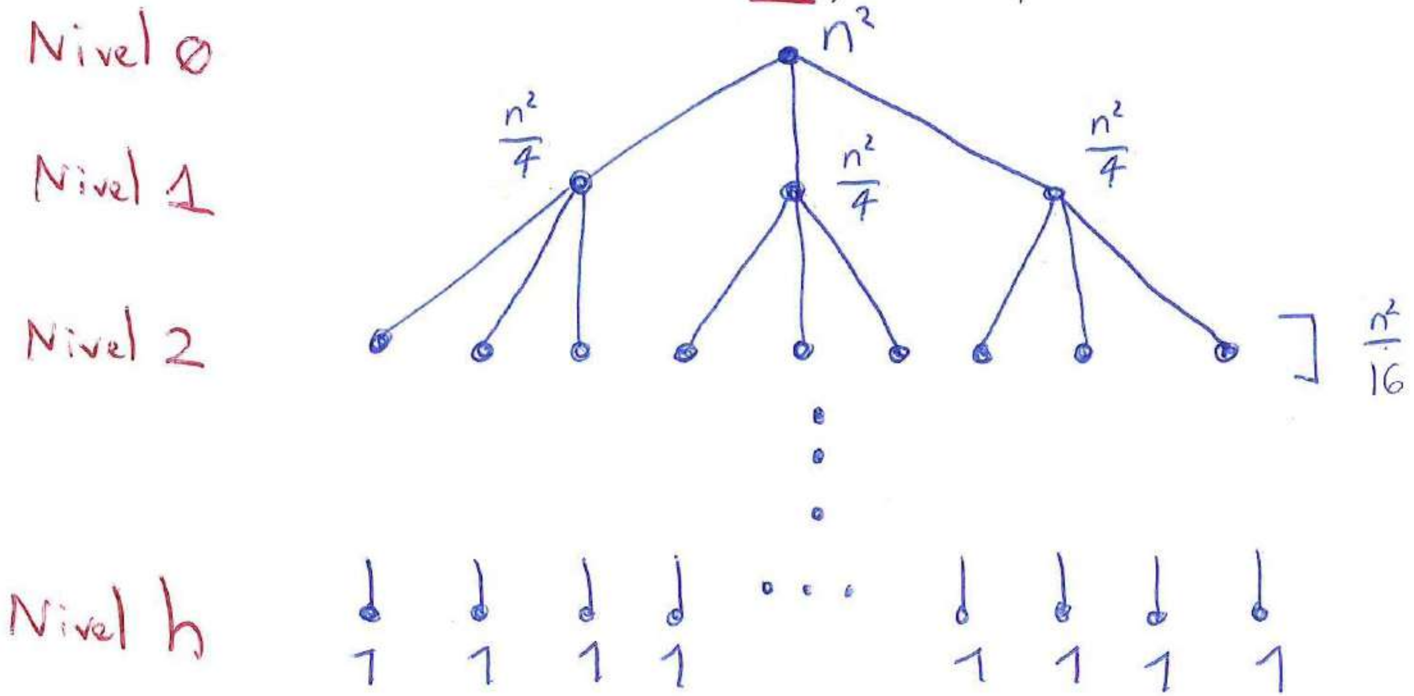
* $\lfloor n/4 \rfloor$ se 'simplifica' a $n/4$, es decir, se asume que n es divisible entre 4.

Paso 3: Replicar lo hecho en el Paso 2.



Todos los nodos de este nivel reciben $\frac{n^2}{16}$

Paso 4: Establecer el último nivel del árbol. Éste nivel siempre contendrá solo hojas, y cada una de estas hojas maneja 1 solo dato. El índice de este último nivel se denomina h y corresponde a la altura del árbol.



Paso 5: A partir del árbol, determinar una fórmula general para la cantidad de datos que maneja un nodo, esta fórmula debe estar en función del índice del nivel del nodo, denominado k.

Nivel $\varnothing \rightarrow n^2$

Nivel 1 $\rightarrow \left(\frac{n}{4}\right)^2$

Nivel 2 $\rightarrow \left(\frac{n}{4^2}\right)^2$

Se infiere: Nivel 3 $\rightarrow \left(\frac{n}{4^3}\right)^2$

Se reformula: Nivel $\varnothing \rightarrow \left(\frac{n}{4^0}\right)^2$

$\rightarrow \left(\frac{n}{4^k}\right)^2$

Se reexpresa:

$$\left(\frac{n}{4^k}\right)^2 = \frac{n^2}{4^{2k}} = \frac{n^2}{(4^2)^k} = \frac{n^2}{16^k}$$

Paso 6: Se determina el costo de procesar 1 dato (caso trivial).

1 dato cuesta C

Paso 7: Se determina el costo de un nodo:

$$C\frac{n^2}{16^k}$$

Paso 8: Se determina el costo de un nivel. Para esto debe primero generarse a partir del árbol una fórmula en función de k para la cantidad de nodos por nivel.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Nivel } 0 \rightarrow 1 \\ \text{Nivel } 1 \rightarrow 3 \\ \text{Nivel } 2 \rightarrow 9 \\ \text{Se infiere: Nivel } 3 \rightarrow 27 \end{array}\right] \rightarrow 3^k$$

Costo por nivel: $(3^k)\left(c\dfrac{n^2}{16^k}\right)$

Reexpresando: $3^k c\dfrac{n^2}{16^k} = \dfrac{3^k c n^2}{16^k} = cn^2\dfrac{3^k}{16^k} = cn^2\left(\dfrac{3}{16}\right)^k$

Paso 9: Se determina el costo de todo el árbol haciendo una sumatoria del costo por nivel desde el primero hasta el último.

$$\sum_{k=0}^{h} cn^2\left(\frac{3}{16}\right)^k = cn^2\sum_{k=0}^{h}\left(\frac{3}{16}\right)^k$$

Paso 10: Para obtener el valor de h, se utiliza la fórmula del Paso 6 aprovechando que sabemos que en el último nivel los nodos tienen 1 dato.

$$\left(\frac{n}{4^h}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{n}{4^h}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{n}{4^h} = 1 \rightarrow n = 4^h \rightarrow \log_4 n = \log_4 4^h$$

$$\rightarrow h \cancel{\log_4 4}^{1} = \log_4 n \rightarrow h = \log_4 n$$

$$\downarrow$$

$$cn^2 \sum_{k=0}^{\log_4 n} \left(\frac{3}{16}\right)^k$$

Paso 11: Simplificar y operar la sumatoria hasta obtener un resultado final.

$cn^2 \sum_{k=0}^{\log_4 n} \left(\frac{3}{16}\right)^k$ es una cantidad difícil de manejar, a causa del límite superior.

Sin embargo, como solo nos interesa tendencia, basta con saber un límite o asíntota superior, entonces:

$$cn^2 \sum_{k=0}^{\log_4 n} \left(\frac{3}{16}\right)^k \leq cn^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^k$$

Sumar hasta cualquier número es menor que sumar infinitamente.

Luego:

$$cn^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^k = cn^2 \left(\left(\frac{3}{16}\right)^{0} \xrightarrow{} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^k \right) = cn^2 + cn^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^k$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}}$$

$$cn^2 + cn^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^k = cn^2 + cn^2 \frac{1}{1-3/16} = cn^2 + \frac{16}{13} cn^2 = \frac{29}{13} cn^2 = \underline{O(n^2)}$$

Entonces:

$$3T(\lfloor n/4 \rfloor) + O(n^2) = O(n^2) + O(n^2) = \boxed{O(n^2)}$$

Nota adicional:

Hacer el análisis para $n/4$ en lugar de $\lfloor n/4 \rfloor$ funciona dado que:

$$\lfloor n/4 \rfloor \leq n/4$$

El resultado para $n/4$ mantendría la tendencia de ser mayor o igual que el resultado para $\lfloor n/4 \rfloor$, y eso es lo relevante: la tendencia.

El resolver para $n/4$ nos da un límite superior, que al fin y al cabo es lo que andamos buscando, una $O(\ )$.