第一次作业答案

一、中英文概念对照

(a)线性代数　(b)线性方程组　(c)行　(d)列　(e)矩阵　(f)基本变量　(g)自由变量

(h)主元位置　(i)通解　(j)解集　(k)增广矩阵　(l)简化阶梯行　(m)相容的

(n)不相容的　(o)线性组合　(p)子集　(q)单位矩阵　(r)齐次线性方程组　(s)平凡解

(t)非平凡解　(u)矩阵方程

二、概念巩固习题

1、

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

2、

无解，唯一解，无穷多解。**例子不唯一**

（1）无解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

（2）唯一解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

（3）无穷多解

$$x_1 + x_2 = 1$$

3、

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

4、

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

5、

矩阵运算分为线性运算和乘法运算，线性运算包括加、减法和数乘运算。

加、减法要求两个运算的矩阵维度对应相等，数乘为一个实数和一个矩阵相乘，无具体维度要求。

乘法运算要求第一个矩阵的列数和第二个矩阵的行数相等。即

$$A_{mn}B_{nk}$$

6、

（1）参考第五题答案，行向量可以看成$1 \times N$的矩阵，列向量可以看成$M \times 1$的矩阵

（2）$A_{m\times n}$和$x_{k\times 1}$，其中$n = k$

（3）Au 的维度为$m \times 1$,vA 的维度为$1 \times n$，若要相等，则$m = n = 1$

7、

（1）略

（2）

> **行初等变换**
>
> 1.（倍加变换）把某一行换成它本身与另一行的倍数的和.[⊖]
>
> 2.（对换变换）把两行对换.
>
> 3.（倍乘变换）把某一行的所有元素乘以同一个非零数.

三、

1、

（1）

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 7 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & -8 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

显然无解。

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 3 & -7 & 7 & -8 \\ -4 & 6 & -1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & -6 & 15 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

显然无解。

（3）

$$\begin{bmatrix}1&0&-3&8\\2&2&9&7\\0&1&5&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-3&8\\0&2&15&-9\\0&1&5&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-3&8\\0&1&5&-2\\0&0&5&-5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-3&8\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x_1=5\\x_2=3\\x_3=-1\end{cases}$$

(4)

$$\begin{cases}x_1=2\\x_2=-1\\x_3=1\end{cases}$$

2、

$$\begin{bmatrix}1&-4&7&g\\0&3&-5&h\\-2&5&-9&k\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-4&7&g\\0&3&-5&h\\0&-3&5&k+2g\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-4&7&g\\0&3&-5&h\\0&0&0&k+2g+h\end{bmatrix}\Longrightarrow k+2g+h=0$$

3、

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\4&5&6&7\\5&6&7&8\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-3&-6&-9\\0&-4&-8&-12\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

主元位置已标红。

$$\begin{bmatrix}1&3&5&7\\3&5&7&9\\5&7&9&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&5&7\\0&-4&-8&-12\\0&-8&-16&-34\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&5&7\\0&-4&-8&-12\\0&-8&-16&-34\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&5&7\\0&-4&-8&-12\\0&0&0&-10\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&5&7\\0&1&2&3\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

4、

(1)

$$\begin{bmatrix}1&3&4&7\\3&9&7&6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&4&7\\0&0&-5&-15\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&0&-5\\0&0&1&3\end{bmatrix}$$

令$x_2=0$，可得特解为$x_1=-5, x_2=0, x_3=3$ .x_2 为自由变量

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5-3x_2\\x_2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\0\\3\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix}, x2\text{为任意实数}$$

(2)

$$\begin{bmatrix}0&1&-6&5\\1&-2&7&-6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&7&-6\\0&1&-6&5\end{bmatrix}$$

令$x_3=0$，可得特解为$x_1=4,x_2=5,x_3=0.x_3$ 为自由变量

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+5x_3\\5+6x_3\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}5\\6\\1\end{bmatrix},x_3\text{为任意实数}$$

（3）

$$\begin{bmatrix}3&-4&2&0\\-9&12&-6&0\\-6&8&-4&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3&-4&2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

x_2,x_3 为自由变量，

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x_2-2x_3\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}4\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix},x_2,x_3\text{为任意实数}$$

（4）

$$\begin{bmatrix}1&-3&0&-1&0&-2\\0&1&0&0&-4&1\\0&0&0&1&9&4\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

令$x_3=x_5=0$，可得特解为$x_1=5,x_2=1,x_4=4$ .x_3,x_5是自由变量，

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5+x_5\\1+4x_5\\x_3\\4-9x_5\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\\0\\4\\0\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}1\\4\\0\\-1\\1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}x_5,x_3\text{为任意实数}$$

5、

（1）

假设增广矩阵有k(k<=m)个主元列，则增广矩阵经过行初等变换之后可以化为

$$\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&a_{1,k+1}&\cdots&a_{1,n}\\0&1&\cdots&0&a_{2,k+1}&\cdots&a_{2,n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1&a_{k,k+1}&\cdots&a_{k,n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$$

矩阵存在多个自由变量，所以有无穷多解。

（2）

可能，

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \\ 4x_2 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x1 + x2 + x3 = 1 \\ 2x_1 + x2 + x3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

6、

(1)

$$u + v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u + 2v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2)

$$u + v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u + 2v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7、

(1)

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 = -7 \\ 5x_1 = -5 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} -2x_1 + 8x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

8、

(1)

$$x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 15 \end{bmatrix}$$

9、

$$[a1 \quad a2 \quad a3 \quad b]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 5 & 2\\ -2 & 1 & -6 & -1\\ 0 & 2 & 8 & 6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 5 & 2\\ 0 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

从矩阵可以看出该方程组有解，所以b为a1,a2,a3的线性组合。

10、

举一个例子，权重全为1，

$$v1+v2=\begin{bmatrix}7\\ 1\\ -6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5\\ 3\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 4\\ -6\end{bmatrix}$$

11、

（1）

$$5\begin{bmatrix}5\\ -2\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}1\\ -7\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-8\\ 3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}4\\ -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\ 16\end{bmatrix}$$

（2）略

（3）

$$\begin{bmatrix}4 & -5 & 7\\ -1 & 3 & -8\\ 7 & -5 & 0\\ -4 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ -8\\ 0\\ -7\end{bmatrix}$$

（4）略

12、

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & -2\\ 0 & 1 & 5 & 2\\ -2 & -4 & -3 & 9\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -6 & -6\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 5 & 5\end{bmatrix}\Longrightarrow x=\begin{bmatrix}0\\ -3\\ 1\end{bmatrix}$$

13、

（1）

利用方程组的思想，实质是求$Ax=u$的解，其增广矩阵为

$$\begin{bmatrix}3 & -5 & 0\\ -2 & 6 & 4\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 4\\ 0 & 8 & 12\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

方程组有解，所以在。

（2）

本问题的实质是找一个b使得$Ax=b$无解，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & a1 \\ 0 & -1 & 0 & a2 \\ -1 & 0 & 0 & a3 \\ 0 & 1 & -1 & a4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & a1 \\ 0 & -1 & 0 & a2 \\ 0 & 0 & 1 & a3+a1 \\ 0 & 0 & 0 & a4+a2+a3+a1 \end{bmatrix}$$

由矩阵可知，$a1+a2+a3+a4 \neq 0$.

（3）

$$Ax = w = y_1 + y_2 = Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2) \Longrightarrow x = x_1 + x_2$$

14、

（1）

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

无非平凡解。

（2）

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 39 \end{bmatrix}$$

有非平凡解。

15、

（1）

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3\text{为任意实数}$$

（2）

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & -8 & 0 \\ -3 & -7 & 9 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 为自由变量,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_3 \\ 3x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3\text{为任意实数}$$

16、

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_2 - 5x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2, x_3\text{为任意实数}$$

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4$$

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x_2 - 5x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2, x_3 \text{为任意实数}$$