

# 线性代数第七次作业

## 写在前面

- 从ppt 5.123开始的这部分内容很重要，比如特征值、相似对角化、正交、二次型就挺重要的，我多出几个题（逃
- ps：课后练习题部分，多数题目是基础/经典/重要的
- pps：由于这部分题目期末考试不会出的特别简单，一来分值较多，二来多为大题（计算、证明）和中档/较难的小题（填空/选择），所以作业题也不会特别简单，同时加大了题量。大家要提前做好心理准备，把不理解/不熟练的东西抓紧学会，坚持把作业做完，奥利给！

## 一、课后练习题

1、本题要求写出每个选项的分析步骤，**只写选项不得分！**

**【2.2】** 若  $A$  与  $B$  相似，则\_\_\_\_\_.

(A)  $\lambda E - A = \lambda E - B$

(B)  $|A| = |B|$

(C) 对于相同的特征值  $\lambda$ ,  $A$ 、 $B$  有相同的特征向量

(D)  $A$ 、 $B$  均与同一个对角阵相似

2、本题为计算题，要求写出解答步骤，**只写答案不得分！**

**【2.4】** 已知

$$A \sim B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

则  $r(A - E) + r(A - 3E) =$  \_\_\_\_\_.

3、计算题

**【2.19】** 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ , 求可逆矩阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP$  为对角阵.

#### 4、综合题

**【4.32】** 已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  与  $B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$  相似,

(1) 求  $x, y, z$  的值;

(2) 求可逆矩阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP = B$ .

#### 5、证明题

**【2.32】** 设  $n$  阶方阵  $A$  有  $n$  个互异的特征值, 而矩阵  $B$  与  $A$  有相同的特征值, 证明:  $A$  与  $B$  相似.

#### 6、计算题

##### 题型 2: 实对称矩阵的正交相似对角化

**【3.8】** 将矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$  正交相似对角化, 并求出正交矩阵  $Q$ , 使  $Q^{-1}AQ = \Lambda$  为对角阵

## 二、期末真题——证明题

### 写在前面

大家把基本的概念和性质 (比如什么是正交、什么是实对称矩阵、特征向量和特征值的定义) 掌握牢固之后再下面的题目, 或者回顾完概念再做题。ps: 题目难度是从我自己的角度标注的。

#### 7、证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

(1) 证明不含零向量的正交向量组一定是线性无关组。(简单题)

(2) 证明同一矩阵不同特征值对应的特征向量必定线性无关。(中档题)

### 8、证明题（简单题）（本题10分）

若 $n$ 阶方阵 $A$ 满足 $A^2 - 4A + 3I = 0$ ，则 $A$ 的特征值只能是3或1。

### 9、证明题（中档题）

证明实对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交

### 10、证明题（难题）

设 $A$ 为2阶方阵，非零向量 $\alpha$ 不是 $A$ 的特征向量，满足 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$ 。令矩阵 $P = [\alpha \ A\alpha] \in R^{2 \times 2}$ 。证明 $P$ 可逆，并求 $P^{-1}AP$

## 三、特征值、特征向量、对角矩阵的应用——SVD分解

11、线性代数已经学那么久了，它究竟有什么用呢？下面我们就来看一个能用上它的例子。

### 题目描述：

SVD分解在信息检索、推荐系统、自然语言处理等领域（这几年喊得那么响的人工智能的研究分支就包括它们，准确说是基于深度学习的IR/RS/NLP。此外做的比较多的还有CV、多模态等）具有广泛的应用。ps：咱们学院3楼的信息检索实验室和4楼的iLearn实验室的研究方向就涵盖NLP、IR、RS、CV、MM等。

大家可以根据第（1）小问的两个链接理解一下SVD是什么，需要用到的数学知识我们已经学过了，应该能看懂。然后第（2）小问完成一个计算实例。

（1）试结合参考链接1和2（博客2为1的阅读笔记），推导矩阵的奇异值分解 $A = U\Sigma V$ ，要求详细说明三个矩阵 $U, \Sigma, V$ 中的元素如何确定（如何求出来）。

1、[刘建平-奇异值分解\(SVD\)原理与在降维中的应用](#)

2、[知乎-奇异值分解\(SVD\)\(链接1文章的阅读笔记\)](#)

（2）对矩阵 $A$ 进行特征值分解，其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$