

线性代数第一次作业

一、中英文概念对照练习

说明：(a)~(u)项为线性代数一些术语的英文形式。试写出其对应的中文，并简述其含义（使用文字和数学符号等简要解释即可）。

- (a) linear algebra
- (b) linear equations
- (c) row
- (d) column
- (e) matrix
- (f) basic variables
- (g) free variables
- (h) pivot position
- (i) general solutions
- (j) solution sets
- (k) augmented matrix
- (l) reduced echelon form
- (m) consistent
- (n) inconsistent
- (o) linear combination
- (p) subset
- (q) identity matrix
- (r) homogeneous linear equations
- (s) trivial solution
- (t) nontrivial solution
- (u) matrix equation

二、概念巩固练习题

1、写出线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的展开形式，其中矩阵 A 为 m 行、 n 列。（提示：以 x_i 为自变量， a_{ij} 为系数，将方程组展开为 m 个等式。）

2、线性方程组的解有哪三种情况？试举例说明。

3、试写出 m 行 n 列的系数矩阵。（提示：展开写，用矩阵表示，可利用省略号表示矩阵内的元素，不能简写为 A_{mn} ）

4、写出下列方程的增广矩阵形式：

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

5、向量之间有哪几种基本运算方式？可进行相应运算的条件是什么（提示：可结合向量的维度对应关系等进行说明）？

6、

(1) 矩阵和向量的乘法需要满足什么条件才能进行？（提示：考察矩阵和向量的维度）

(2) 若 $A\mathbf{x}$ 存在，则矩阵和向量的维度应满足怎样的关系？

(3) 设矩阵 A 为 $m \times n$ 的矩阵， \mathbf{u} 为 $n \times 1$ 的列向量， \mathbf{v} 为 $1 \times m$ 的行向量，则 $A\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}A$ 是否可能相等？试判断并写出你的分析。

7、

(1) 简述将矩阵化为阶梯型的基本步骤。

(2) 简述对矩阵进行行初等变换的基本步骤。

三、计算类、综合类练习题

1、利用行初等变换（行简化算法）求解下列线性方程组

(1)

$$x_2 + 4x_3 = -5$$

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -2$$

$$3x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 6$$

(2)

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= -4 \\3x_1 - 7x_2 + 7x_3 &= -8 \\-4x_1 + 6x_2 - x_3 &= 7\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_3 &= 8 \\2x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= 7 \\x_2 + 5x_3 &= -2\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 &= 5 \\-x_1 + x_2 + 5x_3 &= 2 \\x_2 + x_3 &= 0\end{aligned}$$

2、试求 g, h, k 的关系，使以下矩阵是相容方程组的增广矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{bmatrix}$$

3、行简化下列两个矩阵为简化阶梯形，在最终的矩阵和原始矩阵中圈出主元位置，指出主元列。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

4、给出线性方程组的增广矩阵，求其通解。

(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

(3)

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 & 0 \\ -9 & 12 & -6 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

(4)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5、请解释：

(1) 欠定方程组

若线性方程组的方程个数少于未知数个数，它称为**欠定方程组**。若一个欠定方程组是相容的，说明它为什么会有无穷多解。

(2) 超定方程组

若线性方程组的方程个数多于未知数个数，它称为**超定方程组**。这样的方程组是否可能相容？用一个含有 2 个未知数，3 个方程的方程组说明你的答案。

6、计算 $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ 与 $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$

(1)

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

7、写出(1)、(2)问的等价于所给向量方程的线性方程组。

(1)

$$x_1 \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

(2)

$$x_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8、写出(1)、(2)问的等价于所给线性方程组的向量方程。

(1)

$$\begin{aligned}x_2 + 5x_3 &= 0 \\4x_1 + 6x_2 - x_3 &= 0 \\-x_1 - 3x_2 - 8x_3 &= 0\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 9 \\x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= 2 \\8x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 15\end{aligned}$$

9、说明 **b** 是否为 **a_1, a_2, a_3** 的线性组合。

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

10、用 **v_1, v_2** 进行线性组合，生成5个向量，写出生成方式(**$v = av_1 + bv_2$**)，并写出这些向量的3个元素（即写出这个向量 **v** ），不用画图。

$$v_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

11、使用 **Ax** 的定义把矩阵方程写成向量方程，或反过来。

(1)

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -8 & 4 \\ -2 & -7 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \\ 9 & -6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ 12 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(3)

$$x_1 \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

(4)

$$z_1 \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} + z_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} + z_3 \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix} + z_4 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \end{bmatrix}$$

12、给出矩阵 \mathbf{A} 和向量 \mathbf{b} ，写出对应的矩阵方程 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的增广矩阵并求解，将解表示成向量形式。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

13、请解释：

(1) 设

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

\mathbf{u} 是否在由 \mathbf{A} 的列所生成的 \mathbf{R}^3 的子集当中？为什么？

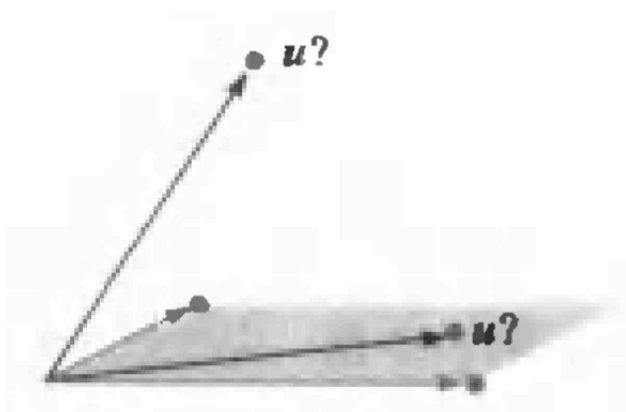


图1 \mathbf{u} 在何处？

(2) 设

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ 是否生成 \mathbf{R}^4 ？为什么？

(3) 设 A 是 3×4 矩阵, y_1, y_2 为 R^3 中的向量, $w = y_1 + y_2$, 设对 R^4 中的向量 x_1 和 x_2 , $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$, 为什么方程 $Ax = w$ 相容?

14、确定方程组是否有非平凡解, 使用尽可能少的行运算。

(1)

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 0 \\-2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= 0\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}-5x_1 + 7x_2 + 9x_3 &= 0 \\x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 0\end{aligned}$$

15、参照例1、例2, 将线性方程组的解集用参数向量的形式表示出来。(示例在题目后给出)

(1)

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\-4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= 0 \\-3x_2 - 6x_3 &= 0\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 0 \\x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= 0 \\-3x_1 - 7x_2 + 9x_3 &= 0\end{aligned}$$

例 1 确定下列齐次方程组是否有非平凡解, 并描述它的解集.

$$3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0$$

$$-3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$$

$$6x_1 + x_2 - 8x_3 = 0$$

解 令 A 为该方程组的系数矩阵, 用行化简法把增广矩阵 $[A \ 0]$ 化为阶梯形.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因 x_3 是自由变量, $Ax=0$ 有非平凡解 (对 x_3 的每一选择都有一个解), 为描述解集, 继续把 $[A \ 0]$ 化为简化阶梯形:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 - \frac{4}{3}x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}$$

解出基本变量 x_1 和 x_2 得 $x_1 = \frac{4}{3}x_3, x_2 = 0, x_3$ 是自由变量, $Ax=0$ 的通解有向量形式

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_3 \mathbf{v}, \text{ 其中 } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

这里 x_3 由通解向量的表达式中作为公因子提出来. 这说明本例中 $Ax=0$ 的每一个解都是 \mathbf{v} 的倍数. 平凡解可由 $x_3=0$ 得到. 几何意义下, 解集是 \mathbb{R}^3 中通过 $\mathbf{0}$ 的直线, 见图 1-21.

例2 单一方程也可看作是方程组，描述下列齐次“方程组”的解集.

$$10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \quad (1)$$

解 这里无需矩阵记号. 用自由变量表示基本变量 x_1 . 通解为

$$x_1 = 0.3x_2 + 0.2x_3$$

x_2 和 x_3 为自由变量. 写成向量形式, 通解为

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.3x_2 + 0.2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= x_2 \begin{bmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (x_2, x_3 \text{ 为自由变量}) \end{aligned} \quad (2)$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{matrix}$

计算表明, 方程(1)的每个解都是向量 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 的线性组合, 如(2)式所示. 即解集为 $\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, 因为, \mathbf{u} 不是 \mathbf{v} 的倍数, 解集是通过原点的一个平面. 见图 1-22.

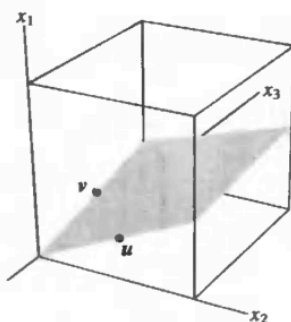


图 1-22

16、说明和比较 $x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0$ 与 $x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4$ 的解集。

四、注意事项

- 上交日期: 下周三 (10月14日)
- 本次作业第一部分共有21个小题, 第二部分共有7题, 第三部分共有16题, 请不要漏做。
- 禁止抄袭, 逾期视为未提交作业。

