

第五次作业 向量空间

1. 判断题

- (a) 单独一个向量是线性相关的
- (b) 若 $H = \text{Span}\{b_1, \dots, b_p\}$, 则 b_1, \dots, b_p 是 H 的一个基
- (c) 一个 $n \times n$ 可逆矩阵的列构成 R^n 的一个基
- (d) 基是一个尽可能大的生成集
- (e) 基是一个尽可能大的线性无关集
- (f) 子空间 H 中一个线性无关集是 H 的一个基
- (g) 若 B 是矩阵 A 的阶梯形, 则 B 的主元列构成 $\text{Col } A$ 的一个基
- (h) V 是一个非零有限维向量空间, 若 S 生成 V , T 是 V 的一个子集且含有向量个数多于 S 中向量个数, 则 T 是线性相关的

2. 证明 w 在由 v_1, v_2, v_3 生成的 R^4 的子空间中

$$w = \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

3. 令

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

判定 w 是否在 $\text{Col } A$ 中, w 是否在 $\text{Nul } A$ 中.

4. 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 7 \\ -5 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

- (a) 求 k 使得 $\text{Nul } A$ 是 R^k 的一个子空间
- (b) 求 k 使得 $\text{Col } A$ 是 R^k 的一个子空间

5. 求给出向量 v_1, \dots, v_5 生成的空间的一个基

$$\begin{bmatrix} -8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ -9 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 7 \\ 4 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6. 已知基 B 和坐标向量 $[x]_B$,求向量 x

$$1. B = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}, [x]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$2. B = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}, [x]_B = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$3. B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, [x]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$4. B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}, [x]_B = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix}$$

7. 求出矩阵 A 的 $Nul A$ 和 $Col A$ 的维数

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 9 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. 求下列题目：

- 若 3×8 矩阵 A 的秩为3, 求 $\dim Nul A$, $\dim Row A$ 和 $rank A^T$
- 假设一个 4×7 矩阵 A , 有4个主元列, $Col A = R^4$ 吗? $Nul A = R^3$ 吗? 并给出理由
- 若 5×6 矩阵 A 的零空间是5维的, A 的列空间的维数是多少?
- 若 A 是 4×3 矩阵, A 的秩最大可能是多少? 若 A 是 3×4 矩阵, A 的行空间的维数最大可能为多少? 并给出理由
- 若 A 是一个 6×4 矩阵, $Nul A$ 的最小可能的维数是多少?

9. 假设 A 行等价 B , 写出 $rank A$ 和 $\dim Nul A$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10. 证明以下等式：

A 是一个 $m \times n$ 矩阵

a. $\dim Row A + \dim Nul A = n$ A 的列数

b. $\dim Col A + \dim Nul A^T = m$ A 的行数