

Astrofisica

Marco Militello

Indice

1	Introduzione	2
2	Struttura stellare	6
2.1	Diagramma di Hertzsprung-Russell	
2.2	Classificazione delle stelle	
2.3	Descrizione struttura stellare	
2.3.1	Equazione di equilibrio idrostatico	
2.3.2	Equazione di conservazione della massa	
2.3.3	Teorema del viriale	
3	Evoluzione stellare	9
4	Nane bianche	10

Capitolo 1

Introduzione

Spettro elettromagnetico

Spettro corpo nero:
$$\begin{cases} \nu_{max} = 10^{11} Hz \\ \lambda_{max} T = 3 \times 10^6 nm \cdot K \end{cases}$$

Osservazione di tutto lo spettro elettromagnetico: telescopi terrestri e telescopi spaziali a seconda della frequenza

Tecniche di osservazione

Risoluzione angolare $\rightarrow \theta \simeq 1.22 \frac{\lambda}{D}$ con λ lunghezza d'onda e D diametro del telescopio; per l'occhio si ha una risoluzione angolare di 60 arcsec: se la dimensione dell'oggetto da osservare è minore di 60 arcsec allora l'occhio lo vede come un punto; se la distanza tra due oggetti è minore di 60 arcsec allora li vediamo sovrapposti.

Gli effetti atmosferici peggiorano la visione: per esempio l'umidità, che deve essere bassa.

Tecniche interferometriche migliorano la risoluzione (esempio l'utilizzo di diversi telescopi).

Oltre a misurare la posizione degli oggetti si può misurare il flusso, lo spettro e la polarizzazione

Coordinate

- Celesti: per astronomia amatoriale, non professionale Da equatore celeste divido la volta celeste in 2 emisferi
 - Nord $\begin{cases} \text{Declinazione: da } 0^\circ \text{ a } 90^\circ \text{ (asse di rotazione terrestre)} \\ \text{Ascensione retta: da } 0 \text{ a } 24 \text{ ore} \end{cases}$
 - Sud $\begin{cases} \text{Declinazione: da } 0^\circ \text{ a } -90^\circ \text{ (asse di rotazione terrestre)} \\ \text{Ascensione retta: da } 0 \text{ a } 24 \text{ ore} \end{cases}$
- Galattiche: da piano della galassia in cui ci troviamo.
 - Latitudine: da -90° a $90^\circ \rightarrow 0^\circ$ piano della galassia
 - Longitudine: da 0° a $360^\circ \rightarrow$ senso antiorario

Centro galattico è il centro della galassia

Proiezioni

- Proiezione azimutale equidistante: centro latitudine corrisponde a 90° , mentre l'esterno corrisponde a 0° ; si hanno minime distorsioni, ma visualizzo solo metà volta celeste

- Proiezione di Hammer-Aitoff: rappresentazione completa della volta celeste, ma si hanno forti distorsioni ai poli. Il piano della galassia è il piano centrale orizzontale. Solitamente in astrofisica si usa questa rappresentazione

Visulizzazioni

- Ottico: a causa delle polveri il centro della galassia è molto oscurato. L'assorbimento galattico è descritto dalla funzione

$$I = I_0 e^{-\alpha r}$$

dove r è la distanza tra noi e l'oggetto osservato, mentre α è proporzionale a λ^{-1}

- Infrarosso: l'assorbimento galattico è minore, quindi si vede molto meglio il centro della galassia (si rimuove parte delle polveri). Si possono trovare alcune bande infrarosso anche sulla terra. Anche noi emettiamo infrarosso, quindi rischio di avere rumore termico nelle mie misure: posso tenere il telescopio a basse temperature per diminuire il problema. Dall'infrarosso in poi si usano falsi colori: associo colore in base all'intensità della radiazione.
- Microonde: porta a scoperta della radiazione di fondo cosmica
- Radio: porta a due scoperte
 1. Stella di neutroni, grazie ad un segnale periodico; pulsar non si vedono nell'ottico
 2. Quasar
- Raggi-x: si vedono solo in orbita, non a terra. Portano prima prova dell'esistenza dei buchi neri: si capta emissione di materia che cadeva nel buco nero. Il buco nero invece non emette radiazione.
- Raggi- γ : porta scoperta dei gamma-ray bursts.
Neutrini: particelle che interagiscono per interazione debole (anche il sole li emette). Esplosione supernova è una sorgente di neutrini; l'unica prova diretta di un'esplosione di una supernova è SN1987A

Onde gravitazionali

Sono state captate da interferometri a terra nel 2015, ma predette già dalla relatività generale. Le distorsioni dello spazio-tempo si propagano come un'onda.

Le sorgenti più luminose sono le binarie, 2 oggetti compatti che ruotano.

Studio spettro elettromagnetico

Oltre all'intensità della stella possiamo anche vedere lo spettro \Rightarrow spettro quasi perfetto di corpo nero

$$U_\nu = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad \text{densità di energia a una certa frequenza}$$

Densità di energia

$$u = \int_0^\infty d\nu U_\nu = aT^4$$

a : costante di radiazione e vale $7.6 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$

Flusso per unità di frequenza misurato in $\text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \rightarrow f_\nu$

Densità di flusso (vettore di Poynting)

$$f = \int_0^\infty d\nu f_\nu = \sigma T^4$$

σ : costante di Stefan-Boltzman che vale $5.7 \times 10^{-5} \text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{K}^{-4}$

Potenza totale emessa da stella ad una certa frequenza assumendo stella come sfera perfetta misurata in $\text{erg s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$

$$L_\nu = f_\nu(r_*) 4\pi r_*^2$$

Luminosità misurata in erg s^{-1}

$$L = f(r_*) 4\pi r_*^2$$

Le onde elettromagnetiche di tipo sferico vanno come $\sim \frac{1}{\text{distanza}^2}$

$$f(d) = f(r_*) \left(\frac{r}{d}\right)^2 = f(r_*) \frac{4\pi r_*^2}{4\pi d^2} = \frac{L}{4\pi d^2}$$

$$L = 4\pi d^2 f(d) \quad (1.1)$$

se vedo oggetto ho sempre il flusso; conoscendo anche distanza da oggetto posso anche stimare la sua luminosità

Metodo parallasse

Metodo per stimare la distanza di un oggetto sfruttando il moto apparente di questo oggetto nel cielo; necessita la conoscenza della distanza tra noi e il sole come punto di riferimento

In astrofisica come unità di misura per le distanze si usa il parsec: distanza tale per cui l'angolo α del moto apparente è di un arcosecondo

$$1pc \simeq 3.1 \times 10^{18} cm \simeq 3.3ly$$

La stella più vicina a noi è Proxima Centauri che dista $d \simeq 1.3pc \rightarrow \alpha \sim 0.768 \text{arcsec}$

A causa del potere risolutivo con metodo parallasse posso stimare distanze oggetti fino ad una distanza di $\sim 100 pc$

$$L = 4\pi r_*^2 f(r_*) \underbrace{=}_{\text{per corpo nero}} 4\pi r_*^2 \sigma T^4$$

La temperatura la ottengo facendo un fit dei dati con la curva del corpo nero; dato che conosco la luminosità posso calcolare il raggio della stella. La temperatura che posso stimare è la temperatura superficiale della stella, perchè i fotoni che ci arrivano sono quelli della superficie

Magnitudine

Unità di misura che è stata introdotta dagli antichi greci

- 0: stella più luminosa che vedo a occhio nudo
- 5: stella più debole visibile a occhio nudo

Si può legare magnitudine a logaritmo del flusso

Magnitudine apparente m

Da un punto di vista fisico è uguale al flusso

$$m = \text{cost} - 2.5 \log_{10} f$$

devo scegliere come definire la costante

$$\begin{cases} \text{Scelgo costante in modo che m di Vega sia } 0 \rightarrow m = -2.5 \log_{10} \left(\frac{f}{f_{\text{Vega}}} \right) \\ \text{Sistema AB} \rightarrow m = -2.5 \log_{10} \left(\frac{f}{f_0} \right) \text{ con } f_0 \text{ costante per ogni frequenza} \end{cases}$$

Magnitudine assoluta M

Da un punto di vista fisico è analogo luminosità. È la distanza che dovrebbe avere un oggetto se si trovasse ad una distanza di 10 parsec

$$M = m - 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right)$$

$$M = M_{sole} - 2.5 \log_{10} \left(\frac{L}{L_{sole}} \right) \quad M_{sole} \simeq 4.75 \quad L_{sole} \simeq 3.8 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1} \simeq 3.8 \times 10^{26} \text{ W}$$

Le bande di frequenza vengono segnate usando come pedice una lettera

Colore

Calcolo della differenza tra magnitudine apparente di una frequenza e un'altra; fisicamente mi dice se oggetto picca più su una frequenza o su un'altra. È legata alla temperatura

Calcolo della massa

Per poterla stimare con questo metodo ho bisogno di un sistema binario (2 stelle che orbitano una intorno all'altra). Il piano dell'orbita lo poniamo per semplicità ortogonale a piano vista → percorrono circonferenza nel cielo.

Per definizione centro di massa

$$r_1 M_1 = r_2 M_2$$

Chiamo la separazione tra le 2 stelle $a = r_1 + r_2$

Applico legge di Keplero

$$w^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a^3}$$

Tramite separazione angolare θ che posso calcolare perchè vedo le 2 stelle $\begin{cases} r_1 = \theta_1 d \\ r_2 = \theta_2 d \end{cases} \rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{M_1}{M_2}$

Se riesco a misurare la distanza tra me e sistema con leggi Keplero posso ottenere massa totale del sistema ⇒ ho un sistema con 2 equazioni e 2 incognite

Spectroscopy bynarie

Deduco presenze di binarie da studio dello spettro perchè risoluzione non mi permette di vedere le due stelle separate (esempio da effetto Doppler dello spettro di assorbimento)

Capitolo 2

Struttura stellare

Stelle con masse inferiori hanno luminosità inferiore

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Esempio: $L_{sole} \simeq 4 \times 10^{33} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1}$

2.1 Diagramma di Hertzsprung-Russell

Anche detto diagramma magnitudine-colore. Si usa per stelle di cui conosco la distanza.

Asse x: colore B-V; più mi trovo verso sinistra, più picco sul blu. Temperatura cresce verso sinistra

Asse y: magnitudine assoluta nel V; valori più bassi hanno luminosità più alta

La maggior parte delle stelle si trova sulla diagonale principale → SEQUENZA PRINCIPALE (racchiude le stelle che bruciano H in He). Qui si trova anche il sole, più o meno al centro. La maggior parte della loro vita le stelle la passano sulla sequenza principale (sole ~ 10 miliardi di anni)

Diagonale minore: RAMO DELLE GIGANTI. Si trovano stelle che hanno raggi decisamente più grandi di quelle che si trovano sulla sequenza principale. Vediamo meno stelle sul ramo delle giganti, perchè le stelle passano molto meno tempo in questa fase, e quindi è statisticamente più difficile osservarle

In basso a sinistra si trovano le NANE BIANCHE: sono l'unico oggetto compatto visibile su diagramma H-R; hanno raggi decisamente più piccoli di quelle sulla sequenza principale

La massa (indicata con unità di massa solare) andando verso l'alto a sinistra. Sulla sequenza principale massa più grande indica raggi più grandi. La vita lungo sequenza principale diminuisce andando verso alto a sinistra: questo perchè la luminosità è proporzionale a M^α con $\alpha > 1$, quindi maggiore è la massa, maggiore è la luminosità, quindi muore prima

2.2 Classificazione delle stelle

La classificazione delle stelle avviene in base a spettro di assorbimento: si associano lettere a spettro di assorbimento (OBAFGKM). La "O" è associata ha temperature alte $\sim 40000K$, mentre la "M" è associata a temperature minori $\sim 2400K$. Ad esempio il sole è di tipo "G". Esiste sottoclassificazione per le temperature: si indica con un numero. Per indicare la posizione della stella nel diagramma si usa un numero romano (V indica che la stella si trova nella sequenza principale)

2.3 Descrizione struttura stellare

Sulla sequenza principale le stelle fanno fusione nucleare per convertire H in He. Per il sole l'efficienza di questo processo è di circa lo 0.7%

$$\text{Composizione massa del sole} \begin{cases} 71\% H \\ 27\% He \\ 2\% C, N, O, Fe: \text{metalli (così indico tutti gli elementi più pesanti dell'elio)} \end{cases}$$

Assunzioni:

1. Le stelle hanno simmetria sferica: grandezze dipendono solo da r , non da θ, ϕ, t
2. Le stelle non ruotano
3. No campo magnetico

2.3.1 Equazione di equilibrio idrostatico

Equazione per descrivere la pressione in funzione del raggio

Forza gravitazionale è uguale alla forza dovuta al gradiente di pressione che bilancia la forza gravitazionale

$$-\frac{GM(r)dm}{r^2} = dPA$$

Considerando che $dm = \rho(r)Adr$ dove ρ è la densità si ottiene

$$-\frac{GM(r)\rho(r)Adr}{r^2} = dPA \quad (2.1)$$

che ci porta a scrivere la prima equazione di evoluzione stellare, che però non può essere risolta da sola, perchè non ho espressione di $M(r), \rho(r)$

$$\frac{dP}{dr} - \frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

2.3.2 Equazione di conservazione della massa

Equazione per descrivere la massa in funzione del raggio

Considerando che

$$dM = \rho(r)4\pi r^2 dr$$

posso scrivere la seconda equazione di evoluzione stellare

$$\frac{dM}{dr} = \rho(r)4\pi r^2 \quad (2.2)$$

2.3.3 Teorema del viriale

$$\begin{aligned} \int_0^{r_*} dr 4\pi r^3 \frac{dP}{dr} &= - \int_0^{r_*} dr 4\pi r^3 \frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} \\ \int_0^{r_*} dr 4\pi r^3 \frac{dP}{dr} &= -3 \int_0^{r_*} dr 4\pi r^2 P(r) \\ - \int_0^{r_*} dr 4\pi r^3 \frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} &= - \int_0^{r_*} dr \frac{GM(r)dM}{r dr} = - \int_0^{M_*} \frac{GM(r)dM}{r} = E_{\text{gravitazionale}} \end{aligned}$$

Allora

$$-3 \int_0^{r_*} dr 4\pi r^2 P(r) = E_{\text{gr}}$$

assumendo che la stella sia fatta di gas perfetto e che Γ sia costante, considerando la densità di energia interna (e)

$$P = (\Gamma - 1)e$$

si ottiene

$$-3(\Gamma - 1)E_{\text{termica}} = E_{\text{gr}}$$

- gas monoatomico classico, senza effetti quantistici

$$P = nK_B T \Rightarrow e = \frac{3}{2} nK_B T = \frac{P}{(\Gamma - 1)}$$

si ottiene

$$\Gamma - 1 = \frac{2}{3} \Rightarrow \Gamma = \frac{5}{3}$$

sostituendo nel teorema del viriale

$$-2E_{TH} = E_{GR}$$

L'energia totale è data dall'energia gravitazionale + energia termica

$$E_{TOT} = E_{TH} + E_{GR} = -E_{TH} < 0$$

allora stella è sistema legato: se viene perturbata la stella oscilla attorno al suo punto di equilibrio. Conseguenza: le reazioni nucleari sono stabili \rightarrow se energia termica aumenta per perturbazione allora la pressione fa espandere la stella; allora diminuisce l'energia gravitazionale che fa diminuire energia termica, quindi si torna ad equilibrio \Rightarrow equilibrio stabile (torna a situazione iniziale)

- gas stella di tipo relativistico \rightarrow pressione stella è dovuta principalmente a radiazione (fotoni)

$$p = \frac{1}{3} e \Rightarrow \Gamma = \frac{4}{3}$$

si ottiene quindi

$$-E_{TH} = E_{GR}$$

di conseguenza l'energia totale è nulla: ciò significa che sistema è marginalmente legato \rightarrow la minima perturbazione fa esplodere la stella

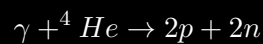
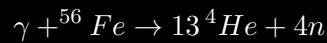
Capitolo 3

Evoluzione stellare

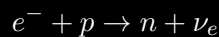
$M = 15M_{sole}$:

- brucia H in He; $10^7 yr$ sulla sequenza principale
- $He \rightarrow C, O, Ne \Rightarrow$ passa $10^6 yr$ a bruciare He: passa nel ramo delle giganti
- $C \rightarrow Ne, Mg, Na \Rightarrow 10^3 yr$
- $Ne \rightarrow O, Mg \Rightarrow 0.7 yr$
- $O \rightarrow Si, Ar, Ca \Rightarrow 2.6 yr$
- $Si \rightarrow Fe, Ni \Rightarrow 18 days$

1. FOTODISINTEGRAZIONE



2. NEUTRONIZZAZIONE (inverse β decay)



$$\rho \sim 10^{11} gcm^{-3} \Rightarrow n_e = n_p = \frac{1}{10} n_n$$

- $8 < M < 20M_{sole} \Rightarrow$ stella di neutroni
- $M > 20M_{sole} \Rightarrow$ buco nero

In entrambi i casi si ha prima un'esplosione di supernova; se la massa della stella però troppo massiva si può avere direttamente un buco nero senza avere l'esplosione di supernova. Durante queste esplosioni avviene rilascio degli stati più esterni, esplosione è quindi fondamentale anche per la nostra vita.

Capitolo 4

Nane bianche

$$\frac{dN}{d^3p dV} = \frac{2}{h^3} \frac{1}{e^{\frac{E - \mu(t)}{k_B T}} + 1}$$

Elettrone che va sbattere sulla superficie della nana bianca

$$\begin{aligned} dF_x &= \frac{2p_x}{dt} \\ \frac{dF_x}{dA} &= \frac{2p_x}{dA dt} \frac{dx}{dx} = \frac{2p_x}{dA dx} \frac{dx}{dt} = \frac{2p_x}{dV} v_x \\ P &= \int \frac{2p_x v_x}{dV} \frac{dN}{d^3p} d^3p \quad \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{fattore correttivo}} \end{aligned} \quad (a)$$

caso non relativistico

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 3v_x^2 \\ p_x v_x &= m v_x^2 = \frac{1}{3} m v^2 = \frac{1}{3} p v \end{aligned}$$

allora la (a) diventa

$$P = \int \frac{1}{3} p v \frac{dN}{dV d^3p} d^3p$$

Calcolo la soluzione in 2 casi limiti

1. $v \ll c$

$$P = \frac{1}{3} \int \frac{2}{h^3} p v d^3p = \frac{1}{3} \int_0^{p_f} \frac{2}{h^3} p v 4\pi p^2 dp = \frac{1}{3} \int_0^{p_f} \frac{8\pi}{h^3} p \frac{p}{m_e} p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3 m_e} \int_0^{p_f} p^4 dp = \frac{8\pi}{3h^3 m_e} \frac{p_f^5}{5} \quad (b)$$

sapendo che

$$n = \frac{8\pi}{3h^3} p_f^3$$

(b) diventa

$$P = \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{5m_e} n^{\frac{5}{3}} \quad (c)$$

usando

$$n = \frac{Z}{A} \frac{\rho}{m_p}$$

(c) diventa

$$P = \left(\frac{3}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{20m_e m_p^{\frac{5}{3}}} \left(\frac{Z}{A} \right)^{\frac{5}{3}} \rho^{\frac{5}{3}}$$

se $\rho \sim 10^6 g cm^{-3} \Rightarrow P \simeq 10^{16} atm$

Per i nuclei l'unica pressione è quella della temperatura, il gas è di tipo classico

$$P_{TH} = n_N K_B T = \frac{\rho}{A m_p} K_B T$$

per ^{12}C a $T = 10^7 K$ si ottiene

$$P \simeq 10^{14} atm$$

pressione termica per le nane bianche ha veramente un ruolo secondario, praticamente insignificante

Gas elettroni degenerare non relativistico

$$P = K \rho^{\frac{5}{3}}$$

2. caso fortemente relativistico: tutti gli elettroni si stanno muovendo alla velocità della luce [$v = c$]; limite per densità che va all'infinito ($\rho \rightarrow \infty$)

3.

$$P = \int_0^{p_f} \frac{2}{h^3} p c 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi c}{3h^3} \frac{p_f^4}{4}$$

facendo le stesse sostituzioni precedenti si ottiene l'espressione finale

$$\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{hc}{4m_p^{\frac{4}{3}}} \left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{4}{3}} \rho^{\frac{4}{3}}$$

quindi

$$P = K' \rho^{\frac{4}{3}}$$

Equazione di stato politropica

$$P = K \rho^\gamma$$

Caso non relativistico

$$\rho \ll 10^6 g cm^{-3} \quad \gamma = \frac{5}{3}$$

Caso fortemente relativistico

$$\rho \rightarrow \infty \quad \gamma = \frac{4}{3}$$

Anche i neutroni sono fermioni, quindi avrei potuto fare lo stesso conto, sostituendo solo la massa elettroni con la massa dei neutroni

Equazioni per la nana bianca

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dr} &= 4\pi r^2 \rho \\ \frac{dP}{dr} &= -\frac{GM\rho}{r^2} \\ P &= K \rho^\gamma \end{aligned}$$

$$\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} = -GM$$

derivo entrambi i membri per r

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) &= -G \frac{dM}{dr} = -G 4\pi r^2 \rho \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) &= -4\pi G \rho \end{aligned}$$

posso usare

$$P = K\rho^\gamma$$

definisco

$$\begin{aligned}\gamma &= 1 + \frac{1}{n} && \text{n: indice politropico} \\ \theta^n &= \frac{\rho}{\rho_c} && \rho_c = \rho(r=0) \\ \xi = \frac{r}{a} && a = \left[\frac{(n+1)K\rho_c^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}}{4\pi G} \right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

allora ottengo equazione di Lane-Emden

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = \theta^n$$

anche questa equazione deve essere risolta numericamente. Condizioni iniziali

$$\begin{aligned}\theta(\xi=0) &= 1 \\ \theta'(\xi=0) &= 0\end{aligned}$$

Posso fare ragionamento sulla massa

$$M = \int_0^R 4\pi\rho^2 dr = 4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^n d\xi = -4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) d\xi = 4\pi a^3 \rho_c \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|$$

combinando con

$$R = a\xi_1$$

si ottiene

$$R \div M^{\frac{1-n}{3-n}}$$

caso non relativistico

$$\begin{cases} \gamma = \frac{5}{3} \\ n = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow R \div M^{-\frac{1}{3}}$$

all'aumentare della massa diminuisce il raggio; allora ho un limite massimo della massa

$$M = 4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{\frac{3}{2}} \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|$$

Caso fortemente relativistico si ottiene il valore limite della massa: *massa di Chandrasekhar*

$$\begin{cases} \gamma = \frac{4}{3} \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow M = 1.457 \left(\frac{A}{2Z} \right)^{-2} M_{\text{sole}}$$