CORPO NERO

Onde elettromagnetiche prodotte da campi elettromagnetici variabili nel tempo si comportano come la luce → interferenza, rifrazione, ...

C'è una categoria di corpi caldi che emette la radiazione con caratteristiche universali → CORPO NERO

DEF CORPO NERO: corpo che assorbe tutta la radiazione termica incidente

Tutti i corpi neri ad una stessa temperatura hanno lo stesso spettro
SPETTRO → radiazione spettrale in funzione della lunghezza d'onda

R = radianza/emittanza → $\frac{[J]}{[m]^2[s]} = \frac{[W]}{[m^2]} = \frac{\text{energia emessa}}{\text{u. tempo} \cdot \text{u. area}}$

Generalmente un corpo può assorbire, riflettere e trasmettere luce

$a + t + r = 1$ con
- a (assorbanza): frazione di radiazione incidente che viene assorbita
- t (trasmittanza): frazione di radiazione trasmessa
- r (riflettanza): frazione di luce incidente riflessa

DEF. CORPO OPACO: corpo che ha trasmittanza nulla $t = 0 \Rightarrow a + r = 1$

LEGGI FENOMENOLOGICHE DI KIRKCHOFF

Corpo opaco ($t=0$) in equilibrio termico con l'ambiente sottoposto ad una radiazione di intensità $I \rightarrow \frac{[J]}{[m][s]}$

Ogni corpo assorbirà e rifletterà parte della radiazione
$a_1 r_1 = 1$; $a_2 r_2 = 1$; ...

L'energia irraggiata nell'area ΔA_i in un intervallo di tempo Δt è

$$\underbrace{a_1 I \, \Delta A_1 \Delta t}_{\text{energia assorbita } (E_{IN})} = \underbrace{R_1 \Delta A_1 \Delta t}_{\text{energia emessa } (E_{OUT})}$$

$$a_2 I \Delta A_2 \Delta t = R_2 \Delta A_2 \Delta t$$

Dividendo le due relazioni otteniamo: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{a_1}{a_2}$ cioè

$$\frac{R_1}{a_1} = \frac{R_2}{a_2} = \dots = cost$$

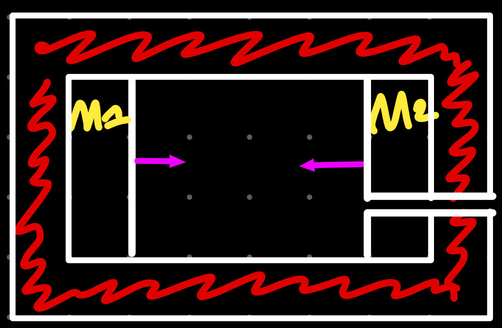
Per un corpo nero $a = 1 \Rightarrow \frac{R_{BB}}{a_{BB}} = \frac{R_{BB}}{1} = R_{BB}$

LEGGE DI KIRKCHOFF: il rapporto tra la radianza di una superficie e la assorbanza è la stessa ∀ superficie ad una certa temperatura, ed è uguale alla radianza di un corpo nero alla stessa temperatura

Il corpo nero può essere modellizzato come una CAVITA' ISOTERMA
↓
Cavità in cui il corpo emette solo nella cavità

Tutta la radiazione incidente è assorbita

LA RADIAZIONE DEL CORPO NERO è ISOTROPA



Considero cavità isoterma in equilibrio termico con all'interno 2 materiali opachi M_1 e M_2

$a_1 r_1 = 1$ $\quad a_2 r_2 = 1$ $\quad \frac{R_1}{a_1} = \frac{R_2}{a_2} = R_{BB}$

Considero le riflessioni multiple all'interno della cavità sui due materiali diversi. Considero un intervallo di tempo Δt abbastanza lungo da permettere alla radiazione di arrivare da una parte all'altra della cavità

Radiazione emessa da M_1

- → $R_1 \Delta t$
- ← $r_2 R_1 \Delta t$
- → $r_1 r_2 R_1 \Delta t$
- ← $r_1 r_2^2 R_1 \Delta t$
- → $r_1^2 r_2^2 R_1 \Delta t$
- ← $r_1^2 r_2^3 R_1 \Delta t$

Radiazione emessa da M_2

- ← $R_2 \Delta t$
- → $r_1 R_2 \Delta t$
- ← $r_1 r_2 R_2 \Delta t$
- → $r_1^2 r_2 R_2 \Delta t$
- ← $r_1^2 r_2^2 R_2 \Delta t$
- → $r_1^3 r_2^2 R_2 \Delta t$

SERIE GEOMETRICHE x^n con $|x| < 1$

Sommo i contributi verso destra (→)

$$R_D \Delta t = R_1 \Delta t \left(1 + r_1 r_2 + r_1^2 r_2^2 + \dots\right) + R_2 \Delta t \left(r_1 + r_1^2 r_2 + r_1^3 r_2^2 + \dots\right)$$

Allora
$$R_D \Delta t = R_1 \Delta t \frac{1}{1-r_1 r_2} + R_2 \Delta t \frac{r_1}{1-r_1 r_2}$$

Kirkchoff $\rightarrow$ $R_1 = a_1 R_{BB}$ $\quad R_2 = a_2 R_{BB}$ $\quad$ e $\quad a_1 = 1 - r_1$ $\quad a_2 = 1 - r_2$

Quindi: $\quad R_1 = (1-r_1) R_{BB} \quad R_2 = (1-r_2) R_{BB}$

$$R_D = (1-r_1) R_{BB} \Delta t \frac{1}{1-r_1 r_2} + (1-r_2) R_{BB} \Delta t \frac{r_1}{1-r_1 r_2}$$

$$= \frac{(1-r_1) R_{BB} \Delta t + (1-r_2) R_{BB} \Delta t \, r_1}{1-r_1 r_2}$$

$$= \frac{R_{BB}\Delta t - \cancel{r_1 R_{BB} \Delta t} + \cancel{r_1 R_{BB} \Delta t} - r_2 r_1 R_{BB} \Delta t}{1-r_1 r_2} = \frac{(\cancel{1-r_1 r_2}) R_{BB} \Delta t}{\cancel{1-r_1 r_2}}$$

$$\Rightarrow \quad R_D \Delta t = R_{BB} \Delta t \quad \Rightarrow \quad R_D = R_{BB}$$

Questo è valido per ogni direzione perchè posso cambiare il posto dei materiali
Allora in ogni direzione trovo che la radiazione in cavità è R_{BB}
Quindi è un buon modello per il corpo nero

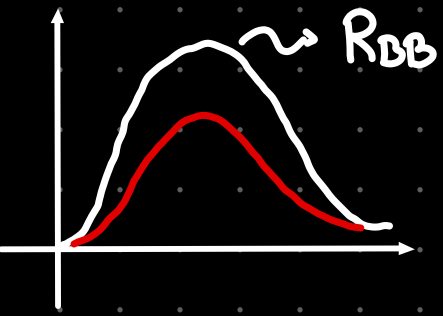
LEGGE DI STEFAN-BOLTZMANN

Serve a studiare come varia R_{BB} con la temperatura
↳ non dipende da forma e materiale corpo

Legge empirica che lega energia totale irraggiata da un corpo alla temperatura T (per unità di volume e di tempo) alla temperatura

$$R_{BB} = \sigma T^4 \qquad \sigma \text{ (costante di Stefan-Boltzmann)} = 5.67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

Per corpi opachi $(a \neq 1) \Rightarrow R = a \sigma T^4 \quad a \leq 1$



Nello spettro $\rightarrow$ R_{BB} = area sotto la curva: radianza totale

PRESSIONE E FLUSSO DI ENERGIA DOVUTO A RADIAZIONE ISOTROPA

a) Suppongo radiazione perpendicolare corpo (nero) w: densità di energia media trasportata dalla radiazione

$$w = \frac{[J]}{[m]^3} = \frac{[F][m]}{[m]^3} = \frac{[F]}{[m]^2} = \frac{kg\, m^2 s^{-1}}{m^3}$$

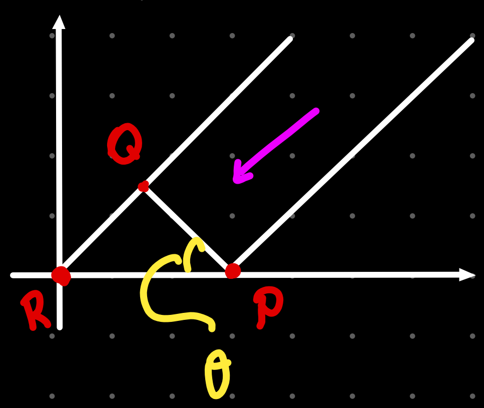
Questo rappresenta il momento per unità di area per unità di tempo scaricato dalla radiazione sulla superficie

$$(w) = \frac{\text{momento}}{\text{area} \cdot \text{tempo}}$$ diretto perpendicolare alla superficie

Quindi se le onde sono assorbite la superficie riceve il momento ed è sottoposta ad una pressione pari a

$$[p] \sim \frac{R}{A} = \frac{kg\, m\, s^{-1}}{m^2} \Rightarrow w = p$$

b) Suppongo che la radiazione incida con un angolo θ



$$RP = \frac{PQ}{\cos\theta}$$

La componente del momento perpendicolare alla superficie è $w' = w\cos\theta$

$$w' \propto \frac{\cos\theta}{1/\cos\theta} \sim \cos^2\theta \Rightarrow p = w\cos^2\theta$$

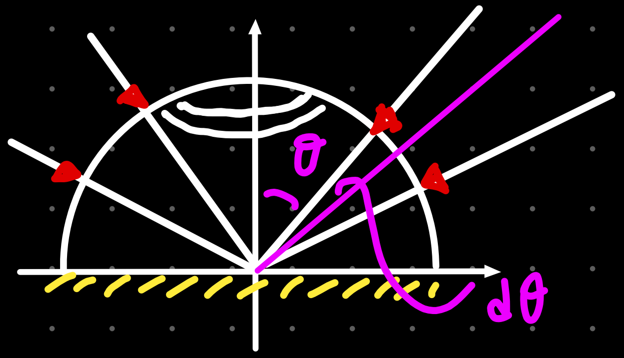
Analogamente per l'emissione e se la superficie è riflettente si ottiene

$$P = 2w\cos^2\theta$$

Se la radiazione viene emessa e assorbita da una superficie con uguale intensità in ogni direzione (come cavità isoterma) allora è equivalente ad avere molte onde piane di uguale densità distribuite in ogni direzione in modo equo

Considero N fasci con w = densità energia $\forall$ fascio

U: densità energia totale davanti superficie $\Rightarrow U = Nw$



$$P = \sum^{N} w\cos^2\theta \rightarrow \int_0^N w\cos^2\theta\, dN = \int_0^{\pi/2} w\cos^2\theta \sin\theta N d\theta$$

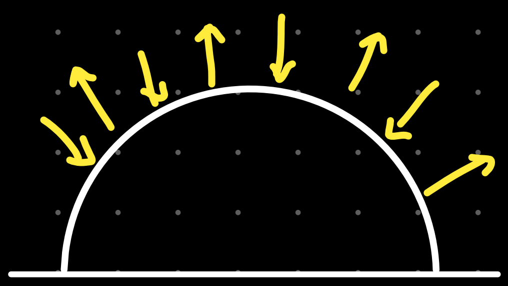
area carità sferica è $2\pi \sin\theta d\theta$

$$\frac{dN}{N} = \frac{dS}{2\pi} = \frac{2\pi \sin\theta d\theta}{2\pi} = \sin\theta d\theta$$

$$P = wN\frac{1}{3} = \frac{1}{3}u$$

La pressione di radiazione nelle pareti di una cavità isoterma è $\frac{1}{3}$ della densità di energia di radiazione

Calcolo energia totale portata alla superficie



$\frac{N}{2}$ raggi verso superficie
$\frac{N}{2}$ raggi dalla superficie

$$\rho v = I \Rightarrow wc = \frac{J}{m^2 s} \rightarrow \text{Radianza}$$

$$R = \sum^{N} cw\cos\theta \rightarrow \int_0^{N/2} cw\cos\theta\, dN = \int_0^{\pi/2} cw\cos\theta \sin\theta \frac{N}{2} d\theta = cw\frac{N}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}cu$$

La radianza di un corpo nero è legata densità di energia di una cavità isoterma alla stessa temperatura

$\forall$ range spettrale $\quad R_\lambda = \frac{1}{4}c\, u_\lambda$

DERIVAZIONE TERMODINAMICA DELLA RADIAZIONE DI CORPO NERO

Calcolo entropia della radiazione di corpo nero

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \qquad \delta Q = \delta L + \delta U \qquad U = uV$$ energia interna
↳ densità di energia interna

$$\delta L = p dV = \frac{1}{3}u dV$$

$$U = uV \qquad dU = u dV + du V$$

$$dU = u\,dV + V\frac{du}{dT}dT$$

$$dS = \frac{1}{3}\frac{u\,dV}{T} + \left[\frac{u}{T}dV + \frac{V}{T}\frac{du}{dT}dT\right] = \left(\frac{4}{3}\frac{u}{T}\right)dV + \left(\frac{V}{T}\frac{du}{dT}\right)dT$$

dS è una funzione di stato $\Rightarrow$ differenziale esatto : $S(V,T)$

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V}$$

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{V}{T}\frac{du}{dT}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{4}{3}\frac{u}{T}\right) \Rightarrow \frac{1}{T}\frac{du}{dT} = \frac{4}{3}\frac{1}{T}\frac{du}{dT} - \frac{4}{3}u\frac{1}{T^2}$$

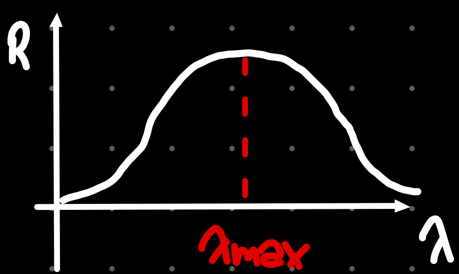
$$\frac{4}{3}\frac{u}{T^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{T}\frac{du}{dT} \rightarrow 4\frac{dT}{T} = \frac{du}{u} \qquad \ln u = A + 4\ln T \Rightarrow u = AT^4$$

$$R = \frac{1}{4}cu = \frac{1}{4}cAT^4 = \sigma T^4 \qquad \text{c.v.d}$$

σ

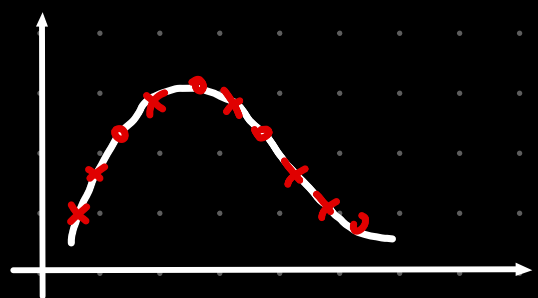
LEGGE DI WIEN

Studiando spettri corpo nero a diverse temperature Wien trovò legge che lega la lunghezza d'onda del massimo dello spettro alla temperatura



$$\lambda_{max} \cdot T = 2.898 \times 10^{-3} \ \text{m} \cdot \text{K}$$

studio diversi spettri a diverse temperature e riporto tutto su un grafico



Sull' asse x $\rightarrow$ λT

Sull' asse y $\rightarrow$ $\lambda^5 R$ o $T^{-5} R$

$$R(\lambda) = T^5 F(\lambda T) = \lambda^{-5} f(\lambda T)$$

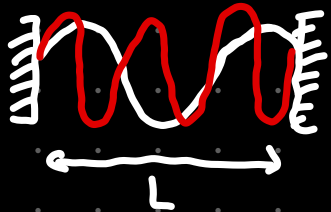
$F(\lambda T) = (\lambda T)^5 f(\lambda T) \lambda$

↳ funzione universale

LEGGE DI RAYLEIGH-JEANS

Applicazione del teorema di equipartizione dell'energia
Un'onda stazionaria che interagisce con gli atomi oscillanti sul muro
In una cavità di corpo nero possiamo vedere onde e.m. come oscillatore

1D



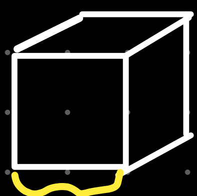
condizione onda stazionaria : $KL = \pi n$
↳ # di modi

$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} L = \pi n \rightarrow n = \frac{2L}{\lambda}$ $\qquad \tilde{n} = \frac{2}{\lambda}$ → # di modi per unità di lunghezza

$dn = \frac{2}{\lambda^2} d\lambda \cdot 2$ ↳ vibrazioni sia orizzontali che verticali

Ogni modo di oscillazione è assunto avere KT di energia

3D



L

$$\begin{cases} K_x L = n_x \pi \\ K_y L = n_y \pi \\ K_z L = n_z \pi \end{cases} \qquad K_x = \frac{n_x \pi}{L} \qquad K_y = \frac{n_y \pi}{L} \qquad K_z = \frac{n_z \pi}{L}$$

$$k^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (\underbrace{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}_{n^2})$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi n}{L} \qquad n = \frac{2L}{\lambda}$$

$$N = \frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi n^3 = \frac{1}{\cancel{8}}\frac{4\pi}{3}\frac{\cancel{8}L^3}{\lambda^3}$$ → volume nella sfera di raggio n nel solo semi-volume positivo

$$dN = \frac{4}{3}\pi L^3 \frac{3}{\lambda^4} d\lambda \cdot 2$$
↓ polarizzazioni

$$d\tilde{N} = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda$$
↳ # modi per unità di volume

RAYLEIGH-JEANS : $u(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda \, KT$
↳ $\langle E\rangle(\lambda)$ → doveva descrivere radianza corpo nero

$$\langle E\rangle = \frac{U}{N} = \frac{1}{N}\frac{N}{Z}\int_0^\infty E e^{-\frac{E}{K_B T}} dE \qquad Z = \int_0^\infty e^{-\frac{E}{K_B T}} dE$$

$$\langle E\rangle = \frac{\sum n u \, e^{-\frac{nu}{KT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nu}{KT}}}$$ E_n: discreta

↳ u: quanto di energia

Scambia solo in maniera discreta → $n \in \mathbb{N}$

LEGGE DI PLANCK

$$u(\lambda)\,d\lambda = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{C_2/\lambda T} - 1}$$

FORMULA DI BOLTZMANN $\rightarrow$ $\langle E\rangle = \dfrac{\int E e^{-\frac{E}{kT}} dE}{\int e^{-\frac{E}{kT}} dE} = kT$

Planck assume che ogni modo possa ricevere energia solo in maniera discreta
↳ $E = m u$ con $m \in \mathbb{N}$

Il numero di oscillatori con energia mu è $n_m = n_0 e^{-\frac{mu}{kT}}$
↳ allora l'energia totale è $m u\, n_m = m u\, n_0 e^{-\frac{mu}{kT}}$

$$\langle E\rangle = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} m u\, n_0 e^{-\frac{mu}{kT}}}{\sum_{m=0}^{\infty} n_0 e^{-\frac{mu}{kT}}} = \frac{\boxed{0 + u e^{-\frac{u}{kT}} + 2u e^{-\frac{2u}{kT}} + 3u e^{-\frac{3u}{kT}}}}{\boxed{1 + e^{-\frac{u}{kT}} + e^{-\frac{2u}{kT}} + e^{-\frac{3u}{kT}}}}$$

$x = e^{-\frac{u}{kT}}$ $\Rightarrow$ SERIE GEOMETRICA : $\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \dfrac{1}{1-x}$

NUMERATORE $\rightarrow$ $= u e^{-\frac{u}{kT}} \left(1 + 2e^{-\frac{u}{kT}} + 3e^{-\frac{2u}{kT}} + \dots\right)$

↳ $x = e^{-\frac{u}{kT}}$ $\Rightarrow$ $= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)x^m = \sum_{m=1}^{\infty} m x^{m-1} = \dfrac{d}{dx}\left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m - 1\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{(1-x) - x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Mettendo insieme

$$\langle E\rangle = u x \frac{1}{(1-x)^2} \cdot (1-x) = \frac{ux}{1-x} \Rightarrow \langle E\rangle = \frac{u e^{-\frac{u}{kT}}}{1 - e^{-\frac{u}{kT}}} = \frac{u}{e^{\frac{u}{kT}} - 1}$$

Pongo $\rightarrow$ $\dfrac{u}{kT} = \dfrac{C_2}{\lambda T}$ $\quad u = \dfrac{C_2 k_B}{\lambda} \dfrac{c}{c} = \underbrace{\dfrac{k_B C_2}{c}}_{h} \cdot \nu = h\nu$

h = costante di Planck = 6.67×10^{-34} J·s

$$\langle E\rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{hc/\lambda}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1}$$

$$u(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}\frac{hc/\lambda}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}}-1}\,d\lambda = \frac{8\pi\, hc\, \lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{kT}}-1}$$

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{c}{\nu} \\ d\lambda = \dfrac{c}{\nu^2}\,d\nu \end{cases} \rightarrow \frac{8\pi}{c^4}\,\nu^4\,\frac{c}{\nu^2}\,d\nu \implies u(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\,\nu^2\,\frac{h\nu}{e^{\frac{hc}{kT}}-1}\,d\nu$$