

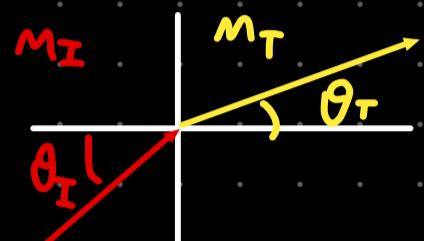
OTTICA GEOMETRICA

L'ottica geometrica descrive la propagazione della luce sulla base di leggi empiriche

1) La luce si propaga in linee rette in un mezzo continuo

2) Legge di CARTESIO : $\theta_{\text{INCIDENZA}} = \theta_{\text{RIFLESSIONE}}$
 ↳ riflessione su una superficie liscia

3) Legge di SNELL : $n_I \sin \theta_I = n_T \sin \theta_T \rightarrow$ angoli col colpo rispetto alle normale



Raggio incidente, riflesso e trasmesso sono complanari

Tutte le relazioni dell'ottica geometrica sono compatibili con teoria C.E.M.
 ↳ valide fino a che la natura ondulatoria non si manifesta

Dalle relazioni di fase tra i campi all'interfaccia dei metti si ottengono le leggi:

- **Riflessione**
- **Rifrazione**

Condizione continuità all'interfaccia

$$E_{1//} = E_{2//} \quad H_{1//} = H_{2//}$$

$$D_{1\perp} = D_{2\perp} \quad B_{1\perp} = B_{2\perp}$$

Descriviamo campi come un'onda piana: $\tilde{F} = F e^{i(lw_1 t - \vec{k}_z \cdot \vec{r})}$
 $\vec{r} \in (x, y, 0)$
 sull'interfaccia

$$\tilde{F}_1 = \tilde{F}_I + \tilde{F}_R \quad (\text{incidente e riflesso})$$

$$\tilde{F}_2 = \tilde{F}_T \quad (\text{trasmesso})$$

Condizione continuità impone $\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2 \quad \forall t \text{ e } \vec{r} \text{ lungo interfaccia}$

$$\tilde{F}_I e^{i(W_1 t - \vec{k}_I \cdot \vec{r})} + \tilde{F}_R e^{i(W_2 t + \vec{k}_R \cdot \vec{r})} = \tilde{F}_T e^{i(W_2 t - \vec{k}_T \cdot \vec{r})} \quad \vec{r} \in (x, y, 0)$$

onde riflessa è regressiva

- Condizione in $(0, 0, 0)$

Allora $W_1 t = W_2 t \rightarrow$ per essere verificata $\forall t \Rightarrow W_1 = W_2$

STESSA FREQUENZA NEI DUE MEZZI

- Condizione $t=0$ $F_{OI} e^{-i\vec{k}_I \cdot \vec{r}} + F_{OR} e^{i\vec{k}_R \cdot \vec{r}} = F_{OT} e^{-i\vec{k}_T \cdot \vec{r}}$

per essere verificata $\forall (x, y, 0) \Rightarrow e^{-i\vec{k}_I \cdot \vec{r}} = e^{i\vec{k}_R \cdot \vec{r}} = e^{-i\vec{k}_T \cdot \vec{r}}$

Quindi $\vec{k}_I \cdot \vec{r} = -\vec{k}_R \cdot \vec{r} = \vec{k}_T \cdot \vec{r}$

- lungo asse y ($x=0$)

$$(k_I)_y y = -(k_R)_y y = (k_T)_y y$$

- lungo asse x ($y=0$)

$$(k_I)_x x = -(k_R)_x x = (k_T)_x x$$

Scelta assi è arbitraria \rightarrow scelgo x, z nel piano di incidente del raggio uscita nel piano di \vec{k}_I

In queste ipotesi

$$(k_I)_y = 0 \Rightarrow (k_R)_y = (k_T)_z = 0$$

Anche \vec{k}_R e \vec{k}_T giacciono nello stesso piano x, z perché sono componenti

$$* (k_I)_x = (k_R)_x \Rightarrow |k_I| \sin \theta_I = |k_R| \sin \theta_R \Rightarrow \theta_I = \theta_R$$

LEGGGE DI CARTESSO

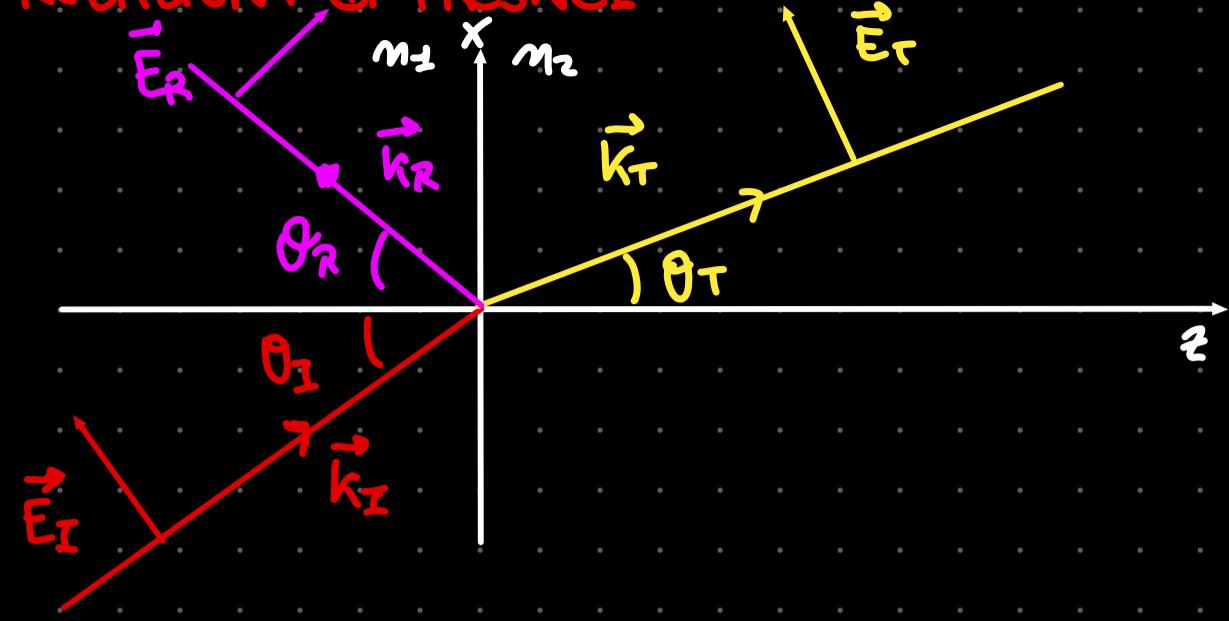
$$* (k_I)_x = (k_T)_x \Leftrightarrow k_I \sin \theta_I = k_T \sin \theta_T$$

$$k = \frac{w}{c} \rightarrow \cancel{\frac{w}{c}} M_I \sin \theta_I = \cancel{\frac{w}{c}} M_T \sin \theta_T \rightarrow \text{LEGGGE DI SNELL}$$

$$(\tilde{E}_{OI} + \tilde{E}_{OR})_x = (\tilde{E}_{OT})_x \rightarrow \text{componente parallela}$$

$$\epsilon_1 (\tilde{E}_{OI} + \tilde{E}_{OR})_z = \epsilon_2 (\tilde{E}_{OT})_z$$

RELAZIONI DI FRESNEL



$$\tilde{E}_I = \tilde{E}_{I\parallel} \hat{u}_{\parallel} + \tilde{E}_{I\perp} \hat{u}_{\perp}$$

- Componente parallela

$$\vec{E}_I = E_{xI} \hat{u}_x + E_{zI} \hat{u}_z = E_I \sin \theta_I \hat{u}_x + E_I \cos \theta_I \hat{u}_z$$

Simile per E_R e E_T (attenzione segni)

$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\mu}$ è completamente determinato dalle conoscenze di \vec{E}

Usando le 4 condizioni di continuità (sapendo che $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$)

GAUSS: $\epsilon_1 (\tilde{E}_{OI} + \tilde{E}_{OR})_z = \epsilon_2 (\tilde{E}_{OT})_z \rightarrow$ componente perpendicolare interfaccia

$$(\tilde{E}_{OI} + \tilde{E}_{OR}) \sin \theta_I = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \tilde{E}_{OT} \sin \theta_T \rightarrow \text{proiezione su } z \text{ con } \theta_T = \theta_R$$

$$\text{Sapendo che } n^2 = \epsilon \Rightarrow (\tilde{E}_{OI} + \tilde{E}_{OR}) = \frac{n_2^2 \sin \theta_T}{n_1^2 \sin \theta_I} \tilde{E}_{OT}$$

$$\text{Per SNELL } n_1 \sin \theta_I = n_2 \sin \theta_T \Rightarrow \tilde{E}_{OI} - \tilde{E}_{OR} = \frac{n_2}{n_1} \tilde{E}_{OT}$$

FARADAY: $(\tilde{E}_{OI} + \tilde{E}_{OR})_x = (\tilde{E}_{OT})_x \rightarrow$ componente // all'interfaccia

$$(\tilde{E}_{OI} + \tilde{E}_{OR}) \cos \theta_I = \tilde{E}_{OT} \cos \theta_T \Rightarrow \tilde{E}_{OI} + \tilde{E}_{OR} = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} \tilde{E}_{OT}$$

$$\begin{cases} (\tilde{E}_{OI} - \tilde{E}_{OR}) = \beta \tilde{E}_{OT} & \beta = n_2/n_1 \\ (\tilde{E}_{OI} + \tilde{E}_{OR}) = \alpha \tilde{E}_{OT} & \alpha = \cos \theta_T / \cos \theta_I \end{cases}$$

\vec{E} nel piano di incidenza

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_{OT} = \frac{2}{\alpha + \beta} \tilde{E}_{OI} \\ \tilde{E}_{OR} = \frac{1 - \alpha\beta}{\alpha + \beta} \tilde{E}_{OI} \end{array} \right.$$

RELAZIONI DI FRESNEL
con \vec{E} nel piano di incidenza

RELAZIONI DI FRESNEL con \vec{E} nel piano \perp al piano di incidenza

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_{OT} = \frac{2}{1 + \alpha\beta} \tilde{E}_{OI} \\ \tilde{E}_{OR} = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \tilde{E}_{OI} \end{array} \right.$$

Se $\theta_I = 0 \Rightarrow \cos\theta_I = 1 \rightarrow$ per SNELL : $\cos\theta_T = 4 \Rightarrow \alpha = \frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I} = 1$

Se $\alpha - \beta < 0 \quad o \quad 1 - \alpha\beta < 0 \Rightarrow$ onde riflessa è sfalsata di 180° rispetto
onda incidente

COEFFICIENTI DI RIFLESSIONE e TRASMISSIONE

$$R_{\parallel} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 \quad R_{\perp} = \left(\frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \right)^2$$

$$T_{\parallel} = \underbrace{\frac{4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2}}_{\text{trasmissione}}$$

polarizzazione \parallel al piano di incidenza \rightarrow include caso $\alpha = \beta \Rightarrow R_{\parallel} = 0$

Non c'è riflessione, tutta l'onda è trasmessa

POLARIZZAZIONE PER RIFLESSIONE : l'onda riflessa per $\alpha = \beta$ è polarizzata
nel piano \perp al piano di incidenza

ANGOLI DI BRENSTEIN $\tan \theta_B = \beta$

$$\underline{\text{Dim}} \quad \alpha = \beta \quad \frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_B} = \beta$$

$$1 - \sin^2 \theta_T = \beta^2 (1 - \sin^2 \theta_B)$$

$$\text{da Snell} \rightarrow 1 - \frac{1}{\beta^2} \sin^2 \theta_B = \beta^2 (1 - \sin^2 \theta_B)$$

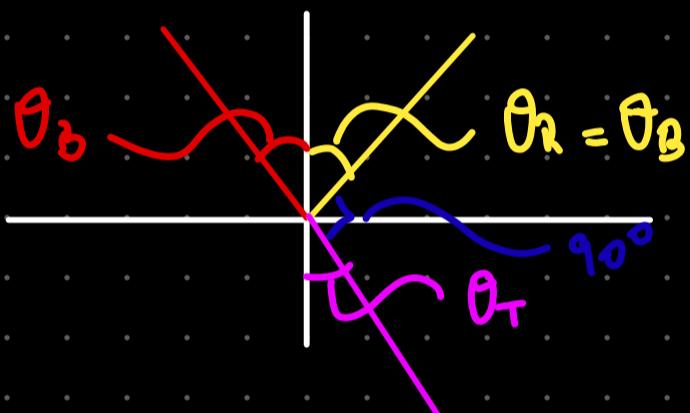
$$\cancel{\beta^2(1-\beta^2)} = (1-\cancel{\beta^2})(1+\beta^2) \sin^2 \theta_B \Rightarrow \sin^2 \theta_D = \frac{\beta^2}{1+\beta^2} \quad \cos^2 \theta_B = \frac{1}{1+\beta^2}$$

$$\tan^2 \theta_D = \frac{\sin^2 \theta_B}{\cos^2 \theta_B} = \beta^2 \Rightarrow \tan \theta_D = \beta$$

L'angolo di Brewster e l'angolo di rifrazione sono complementari

$$\text{SNELL} \rightarrow \sin \theta_B = \beta \sin \theta_T$$

$$\text{BREWSTER} \rightarrow \sin \theta_B = \beta \cos \theta_B \Rightarrow \sin \theta_T = \cos \theta_B \Rightarrow \theta_B = \frac{\pi}{2} - \theta_T$$



ANGOLI LIMITE E RIFLESSIONE TOTALE

$$n_1 > n_2$$

$$n_1 \sin \theta_I = n_2 \sin \theta_T \quad \theta_T = \frac{\pi}{2} \quad n_1 \sin \theta_L = n_2 \quad \Rightarrow \text{angolo limite}$$

Se $\theta_I > \theta_L \Rightarrow$ non c'è onda rifratta \Rightarrow RIFLESSIONE TOTALE

ANALISI CAMPI

$$\text{Relazioni Fresnel} \rightarrow \begin{cases} \tilde{E}_{OI} + \tilde{E}_{OR} = \alpha \tilde{E}_{OT} \\ \tilde{E}_{OI} - \tilde{E}_{OR} = \beta \tilde{E}_{OT} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{caso polarizzazione} \\ \text{parallele} \end{array}$$

$\tilde{E}_{OI} \neq 0 \quad \tilde{E}_{OR} \neq 0$ contemporaneamente $\Rightarrow \tilde{E}_{OT} \neq 0$

Allora anche se non c'è onda rifratta deve esistere un campo E.M. non nulla

nel mezzo 2

si può dimostrare che \tilde{E}_T è rapidamente evanescente lungo z e non trasporta energia \rightarrow tutta energia riflessione

ANALISI NUMERO DI ONDA

Relazioni Snell $\rightarrow k_I \sin \theta_I = k_T \sin \theta_T$ componente x

Se $\theta > \theta_L \Rightarrow$ dobbiamo estendere l'analisi alla rappresentazione complessa

$$\tilde{k}_T^2 = (k_T)_x^2 + (k_T)_z^2 \rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} m_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} m_x^2 \sin^2 \theta_I + (k_T)_z^2$$

$$(k_T)_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} m_z^2 \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_I}{m_z^2 / h_z^2} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} m_z^2 \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_I}{\sin^2 \theta_I} \right)$$

Per $\theta_I < \theta_L \Rightarrow k_z$ è reale $\rightarrow \vec{k}_T = k_x \hat{u}_x + k_z \hat{u}_z$ vettore d'onda per il trasporto dell'onda rifratta

Per $\theta_I = \theta_L \Rightarrow k_z = 0$ onde naggio all'interfaccia

Per $\theta_I > \theta_L \Rightarrow k_z$ immaginario puro $k_z^2 < 0 \quad \vec{k}_T \cdot \vec{r} = k_x x + i k_z z$

CAMPO: $\tilde{E}_T = \tilde{E}_0 r e^{i(\omega t - kx)} e^{-k_z z}$ rapidamente evanescente
onde naggio lungo x

Inoltre $\tilde{B} = \frac{\tilde{k}}{w} \times \tilde{E}$ è sfalsato di 90° $E \propto \cos(\omega t)$
 $B \propto \sin(\omega t)$

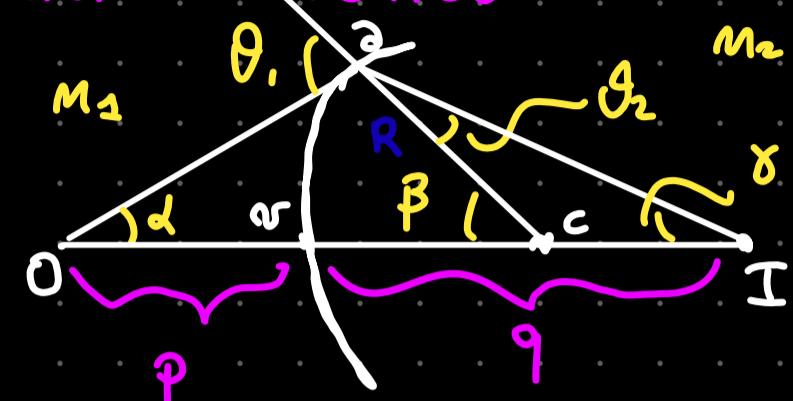
Media sul periodo del vettore di Poincaré è nulla \Rightarrow non c'è trasporto energia

ESEMPPIO FORMAZIONI DI IMMAGINI

Superficie sezioni di coniche (paraboloidi) → specchi e lenti

Approssimazione sfenice (simmetrica) e parallese (di piccolo rispetto alle distanze ottiche)

DIOTTOPO SFERICO



Approssimazione parallese

$$\begin{aligned} \rightarrow n_1 d &\approx t_1 d \approx d \\ \text{area } ar &\approx \text{corda } 2r \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{R} \quad d \approx \frac{ar}{p} \quad \gamma \approx \frac{2\pi}{q}$$

$$\text{Relazione angoli: } \rightarrow \alpha + \beta = \theta_1 \quad \gamma + \theta_2 = \beta \quad \theta_2 = \beta - \gamma$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \rightarrow \text{per parallese } n_1 \theta_1 \approx n_2 \theta_2$$

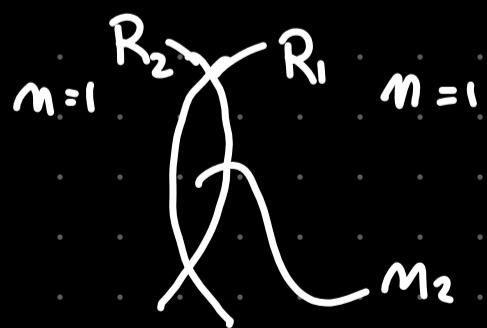
$$\text{Quindi: } n_1 (\alpha + \beta) = n_2 (\beta - \gamma) \rightarrow n_1 \alpha + n_2 \gamma = (n_2 - n_1) \beta$$

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2}{R} - \frac{n_1}{q} \Rightarrow \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \underbrace{(n_2 - n_1)}_{\text{potere della lente}} \frac{1}{R}$$

Potere delle lente →

- nullo per $n_2 = n_1$
- nullo per $R = \infty \rightarrow$ superficie piatta, no rifrazione

LENTE → combinazione di due diafoni



$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n_2 - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\frac{1}{f} = P \rightarrow \text{potere focalizzante}$$

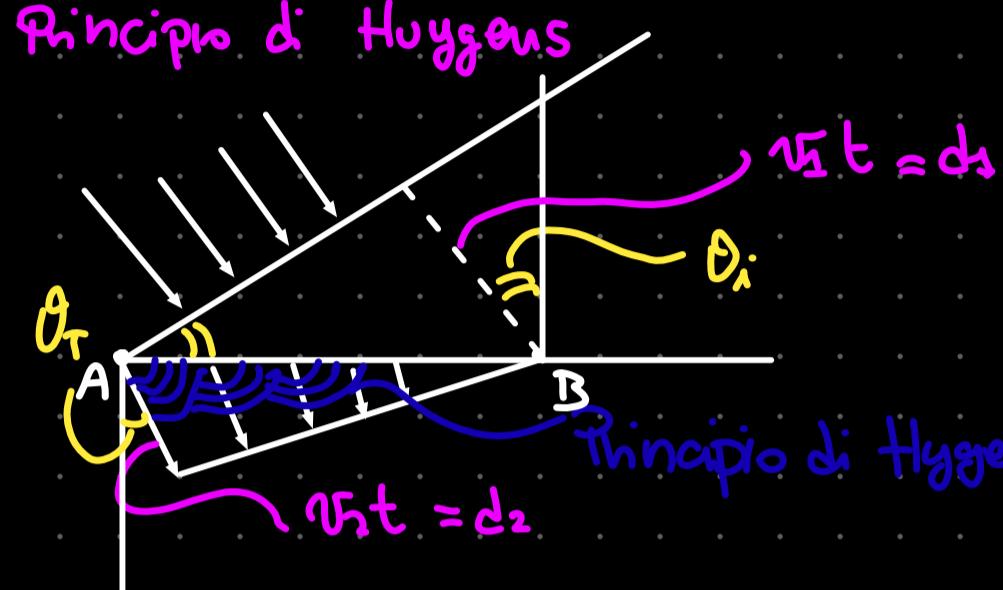
OTTICA ONDULATORIA

Formalizzazione di un metodo di calcolo ottico ondulatorio

→ Fronti d'onda determinate da sovrapposizione di onde sferiche di sorgenti puntiformi distribuite con continuità nel mezzo

DIFFRAZIONE CON INNIPPO

Princípio di Huygens



Princípio di Huygens → spiega bene sia riflessione che diffrazione

$$d_1 = N_1 t = AB \sin \theta_i$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N_1} \sin \theta_i = \frac{1}{N_2} \sin \theta_T \quad \text{legge di SNELL}$$

$$d_2 = N_2 t = AB \sin \theta_T$$

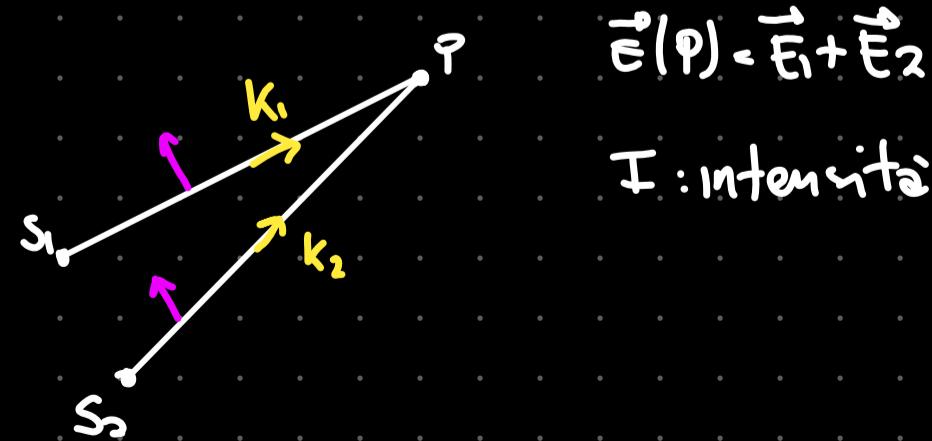
$$N = \frac{c}{\lambda}$$

La descrizione ondulatoria funziona perché l'ottica fisica ammette soluzioni ondulatorie di eq. lineari

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t) + \dots$$

Base dell'innippo di Huygens

Interferenza tra due sorgenti



I : intensità $\rightarrow I = \langle |\vec{E}|^2 \rangle \rightarrow$ misurando qualche riguardo fenomeni che oscillano dell'ordine di 10^{-15} Hz

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \epsilon \nu \langle E^2(\vec{r}, t) \rangle = \epsilon \nu \langle E_1^2 + E_2^2 + 2 \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \\ &= \underbrace{\epsilon \nu \langle E_1^2 \rangle}_{I_1} + \underbrace{\epsilon \nu \langle E_2^2 \rangle}_{I_2} + 2 \underbrace{\epsilon \nu \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle}_{I_{12}} \quad I_{12}: \text{interferenza} \end{aligned}$$

Termino intervento $\rightarrow 2\epsilon v \langle E_1 E_2 \rangle \cos \phi$

\hookrightarrow max per $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$: stessa polarizzazione

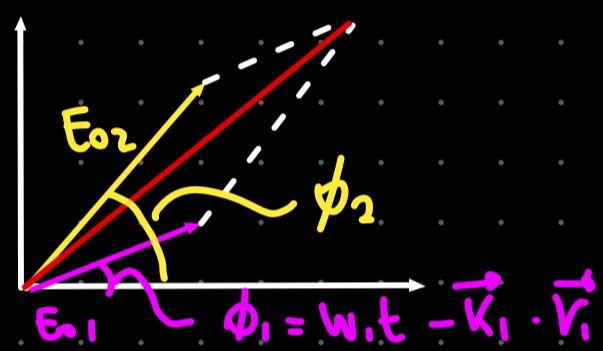
Nella pratica difficile avere intervento per di non picchi.

\Rightarrow condizione intervento: stesse polarizzazioni nel punto di intervento

Quindi \rightarrow considero solo natura scalare $I_{12} = 2\epsilon v \langle E_1 E_2 \rangle$

$\tilde{E}_j = E_{0j} e^{i\phi_j}$ $j=1,2$ $E_j = \operatorname{Re} [\tilde{E}_j]$ \rightarrow campo reale osservabile

$\phi_j = w_j t - \vec{k}_j \cdot \vec{r}_j + \psi_j$ Fase



$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = \begin{cases} 0 & \rightarrow \text{max sovrapposizione} \\ \pi \text{ (multiplo)} & \rightarrow \text{si elidono} \end{cases}$$

Per avere sovrapposizione osservabile nel tempo, le fasi relative non deve cambiare rapidamente allora:

$w_1 = w_2 \rightarrow$ stesse frequenze centrali

Se $w_1 \neq w_2 \Rightarrow$ media è nulla

Pongo $w_1 = w_2 = w$

$$E_1 E_2 = E_{01} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - wt + \psi_1) E_{02} \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - wt + \psi_2)$$

$$= E_{01} E_{02} [\cos(wt) \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 + \psi_1) + \sin(wt) \sin(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 + \psi_1)] \cdot [\cos(wt) \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 + \psi_2) + \sin(wt) \sin(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 + \psi_2)]$$

Sviluppo nel prodotto e calcolo media temporale

$$\bullet \langle \cos^2(wt) \rangle = \langle \sin^2(wt) \rangle = \frac{1}{2} \quad \bullet \langle \cos(wt) \sin(wt) \rangle = 0$$

$$\langle E_1 E_2 \rangle = \frac{1}{2} E_{01} E_{02} [\cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 + \psi_1) \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 + \psi_2) + \sin(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 + \psi_1) \sin(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 + \psi_2)]$$

$$\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \frac{1}{2} E_01 E_02 \cos(\underbrace{\vec{k}_1 \cdot \vec{v}_1 + \varphi_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{v}_2 - \varphi_2}_{\delta})$$

$$\delta = \varphi_2 - \varphi_1$$

Differenza di fase

$$\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = \underbrace{\vec{k}_2 \cdot \vec{k}_2 - \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_1}_{\text{contributo dovuto a differente di cammino ottico}} + \underbrace{\varphi_2 - \varphi_1}_{\text{differenza di fase iniziale tra le sorgenti}}$$

contributo dovuto a differente di cammino ottico

$$I = I_1 + I_2 + \epsilon \pi E_01 E_02 \cos(\delta)$$

$$\text{Poiché } I_j = \epsilon \pi \langle E_j^2 \rangle = \frac{1}{2} \epsilon \pi E_{0j}^2 \Rightarrow \sqrt{I_j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\epsilon \pi} E_{0j}$$

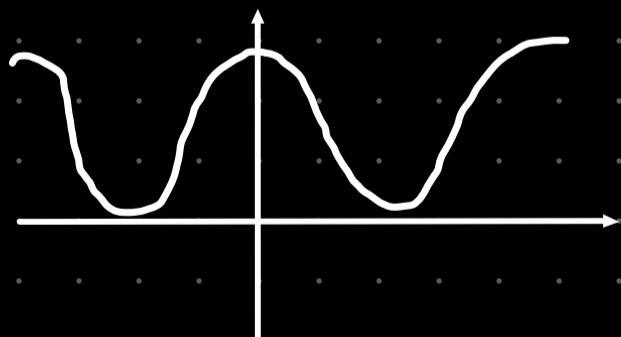
Possiamo riscrivere le relazioni di interferenza tra due sorgenti come

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \rightarrow \text{tunina interferenza tra due onde monochromatiche}$$

- COERENZA TEMPORALE \rightarrow stessa fase iniziale (impossibile con due sorgenti diverse)

Se $I_1 = I_2 \rightarrow$ facilmente osservabile interferenza

$$I = 2I_1(1 + \cos \delta) \Rightarrow I = 4I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2}$$



$$\text{condizioni per il max: } \frac{\delta}{2} = h\pi$$

$$\text{condizioni minimi: } \frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{2} + h\pi = \pi \left(m + \frac{1}{2} \right)$$

La condizione si traduce in una condizione sulla differenza di cammino ottico

$$\boxed{\Delta \varphi = 0}$$

$$\delta = \vec{k}_1 \cdot \vec{v}_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{v}_2$$

differenza di cammino ottico

$$\text{A meno di un segno} \rightarrow \delta = k_1 v_1 - k_2 v_2 = \underbrace{\frac{c}{n} (n_1 k_1 - n_2 k_2)}$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n_1 v_1 - n_2 v_2)$$

Per trovare i numeri precedenti si usa:

$$k_i = \frac{w}{N_i} = \frac{w}{c} n_i = \frac{2\pi}{\lambda} n_i = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Condizione interferenza:

- max $\rightarrow \delta = 2\pi m \Rightarrow (n_1 k_1 - n_2 k_2) = m \lambda$
- min $\rightarrow \delta = (2m+1)\pi \Rightarrow |n_1 k_1 - n_2 k_2| = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda$

CONDIZIONI INTERFERENZA

- 1) Stessa polarizzazione
- 2) Stessa frequenza centrale
- 3) Coerenza temporale: $\Delta\phi = \text{cost}$ (indipendente dal tempo)
 - Se $\Delta\phi$ dipendesse dal tempo no immagine di interferenza persistente
- 4) Coerenza spaziale \rightarrow sulla dimensione del fronte che interviene

Queste condizioni si verificano con:

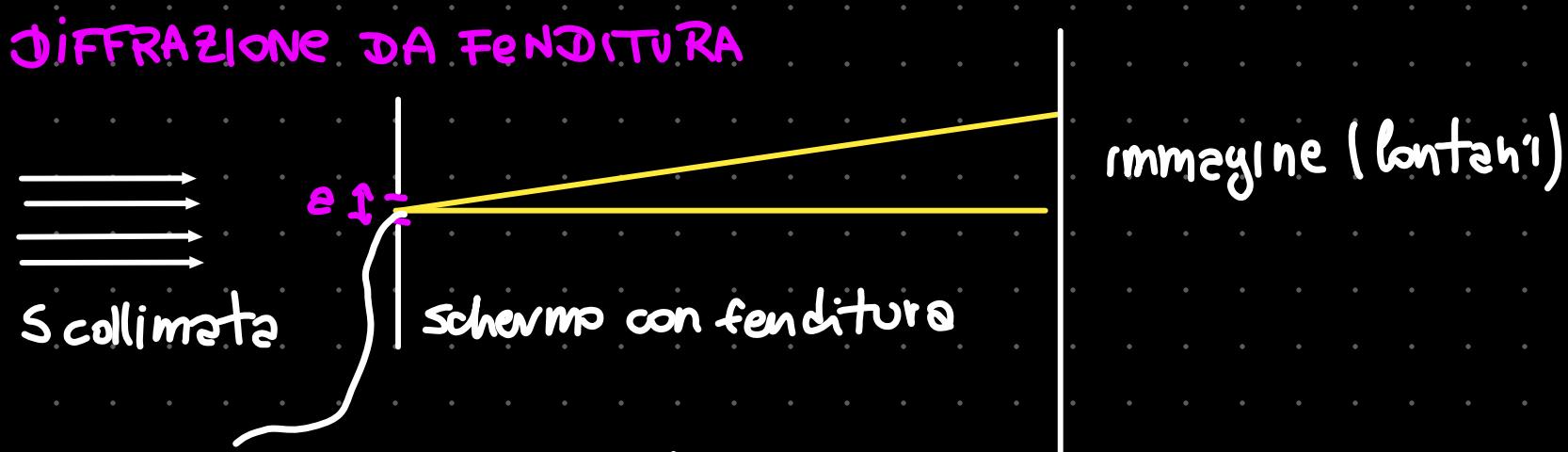
- a) Separatori di fronte d'onda
- b) Separatori di ampiezza

DIFFRAZIONE

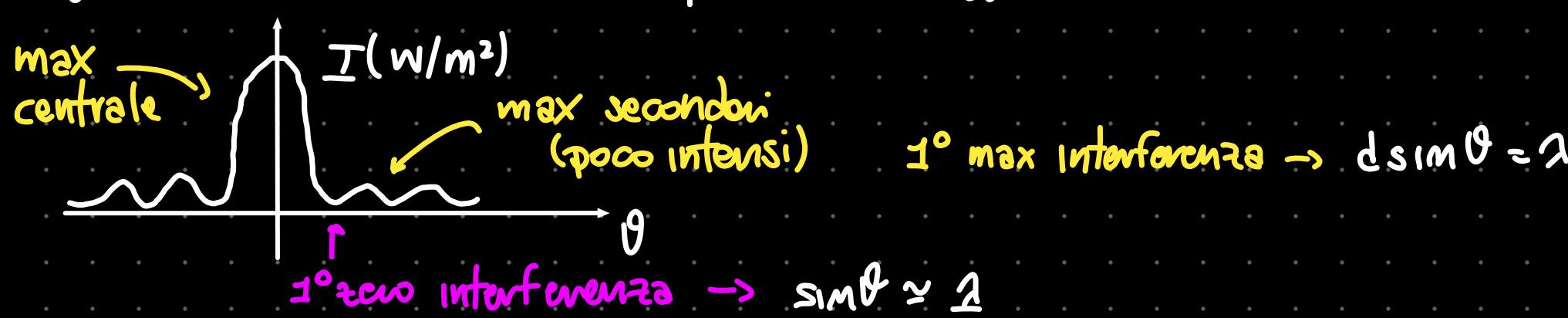
limite al continuo dell'interferenza: sovrapposizione di un numero infinito di sorgenti puntiformi e infinitesime

→ Effetto delle variazioni continue del cammino ottico della luce da una sorgente estesa, ma finita

DIFFRAZIONE DA FENDITURA



Sorgenti virtuali nella fenditura: principio di Huygens



- limite alla risoluzione visiva con strumenti ottici

DIFFRAZIONE DA O斯塔CO



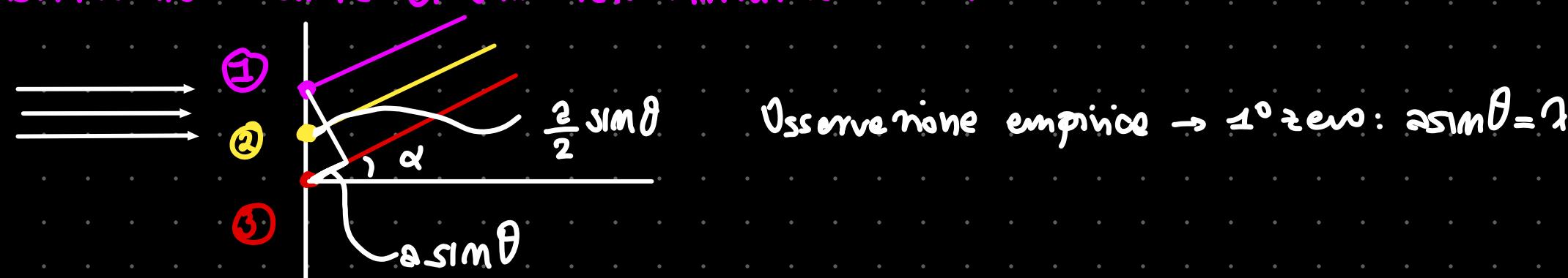
$$\text{Lunghezza della figura centrale (1° zero)} \rightarrow \sin\theta = \frac{\lambda}{d} \Rightarrow \theta \approx \frac{\lambda}{d}$$

limite alla capacità di racchiudere un oggetto con un'onda

Descrizione tramite Maxwell auspicabile, ma complicata → uso principio sovrapposizione Huygens-Fresnel

- Il fronte a un tempo $t > t_0$ è la sovrapposizione di onde secondarie di sorgenti virtuali puntiformi poste sul fronte d'onda al tempo t_0

DIFFRAZIONE DA FENDITURA PER IMMAGINE LONTANA



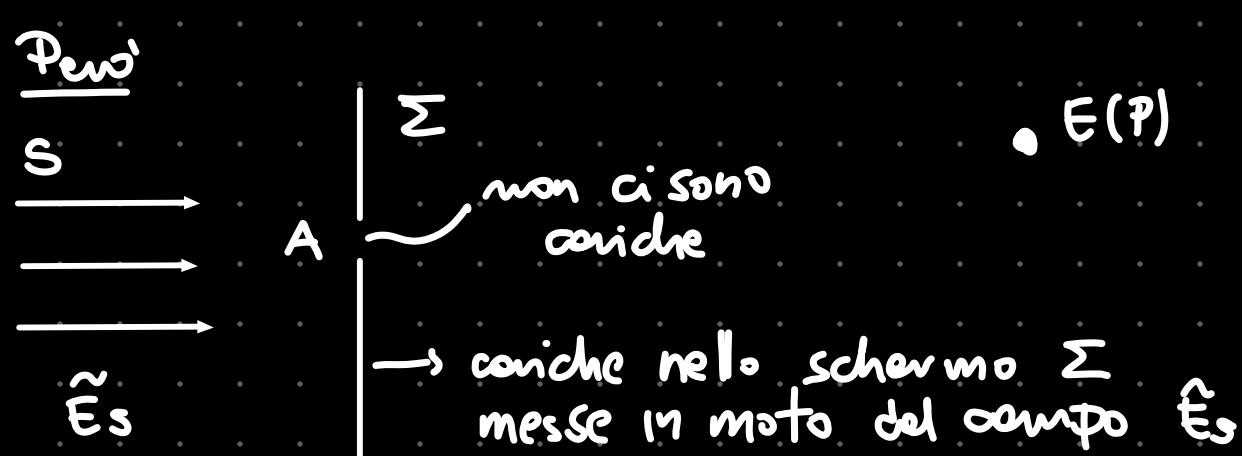
Da studio intervento → • se $2 \sin\theta = \lambda \Rightarrow ① + ③$ sorgenti discrete danno massimo intervento perché la differenza di cammino ottico δ_{13} è multiplo intero della lunghezza d'onda

$$\Rightarrow \delta_{12} = \frac{\lambda}{2} \quad \text{Quindi: } ② + ③ \text{ danno un minimo}$$

Per ogni sorgente tra ① e ③ esiste sempre una sorgente tra ② e ③ che ne cancella le contribuz.

Quindi la condizione per il max di interferenza $d \sin \theta = \lambda$ si traduce in uno zero di diffrazione

Allora il principio di Huygens - Fresnel funziona, ma non da' una corretta rappresentazione del fenomeno: infatti seppiamo che in vuoto l'apertura è sicuramente l'unico punto in cui non ci sono sorgenti



1) Il campo nello schermo $\tilde{E}(P')$ è sovrapposizione di \tilde{E}_S e di \tilde{E}_{Σ} campo delle coniche stimolate da \tilde{E}_S

$$\tilde{E}(P') = \tilde{E}_S + \tilde{E}_{\Sigma}$$

2) Ipotizziamo di tappare l'apertura A con stesso materiale schermo (veniamo schermo continuo) Altre le coniche di A contribuiscono a nuovo campo totale

Se campo \tilde{E}_A non perturba campo \tilde{E}_{Σ} $\Rightarrow \tilde{E}(P') = \tilde{E}_S + \tilde{E}_{\Sigma} + \tilde{E}_A = 0$ $\rightarrow \tilde{E}_A = -(\tilde{E}_S + \tilde{E}_{\Sigma})$

$\Rightarrow I_A = I_S + \Sigma = I(P')$ ($I \propto E$)

↑
schermo opaco

Altra l'intensità nel punto P' è ben rappresentata dall'intensità dovuta a coniche virtuali poste solo nell'apertura

Corollario (PRINCIPIO DI BABINET)

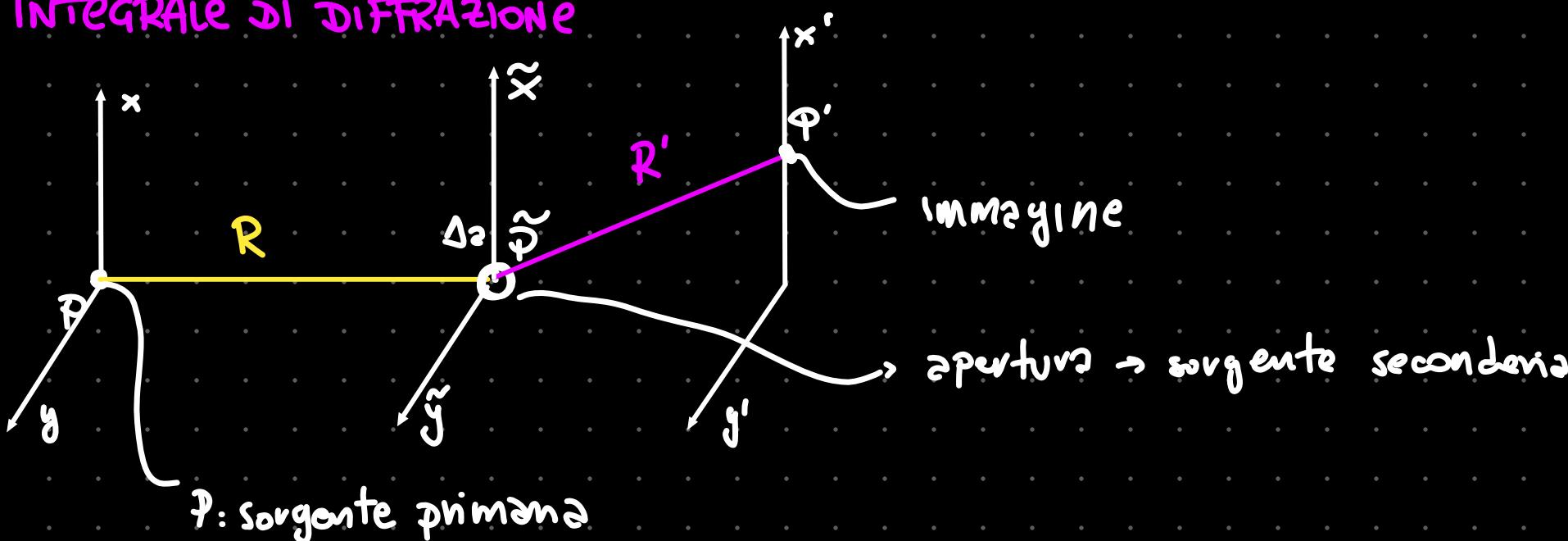
Se $\tilde{E}_S \approx 0$ (ossia dappertutto eccetto in $\theta=0$ per un fascio collimato e stretto)

$$\Rightarrow \tilde{E}_A = -\tilde{E}_{\Sigma} \rightarrow I_A = I_{\Sigma}$$

LA FIGURA DI DIFFRAZIONE DI UNA FENDITURA e di uno ostacolo di GEOMETRIA COMPLEMENTARE SONO uguali

Non posso stabilire la posizione di un oggetto con una precisione maggiore di 1

INTEGRALE DI DIFFRAZIONE



Condizioni sorgenti secondarie

- Stessa polarizzazione
- stessa frequenza centrale
- coerenza spazio-temporale

Queste condizioni sono soddisfatte in maniera naturale delle situazioni reali in cui si manifesta diffrazione

Sorgente \rightarrow onde sferiche $E(P) = \frac{A e^{i\phi}}{R}$ con $\phi = wt - KR$

Campo $E(P')$ di un'apertura Δa infinitesima $\Rightarrow E(P') \propto \frac{\hat{A} e^{i\phi'}}{R'}$ $\phi' = wt - kP'$
 $\hat{A} = \text{ampiezza sorgente secondaria}$

$$\tilde{A} \propto E(P) \Delta \sigma$$

Onde sferiche da P e \tilde{P} $\Rightarrow E(\tilde{P}) = A \frac{e^{i(\omega t - kR)}}{R}$

fase ωt comune a P , \tilde{P} e P' e nella propagazione avvengono stazariamente solo per differenze di cammino ottico
 ↳ stesso frequenza per principio Huygens

$$E(P') = C \frac{A e^{i\theta}}{R} \frac{e^{i\phi'}}{R'} \Delta \sigma = C A e^{i\omega t} \frac{e^{-ik(R+R')}}{RR'} \Delta \sigma$$

fattore proporzionalità

FATORE DI OBliquità

$$[C] = [L^{-1}] \text{ perché } [E] = [A/R] \text{ e } [E'] = [cA]$$

Nella teoria di Kirchhoff $\rightarrow C = \frac{i}{\lambda} \left(\frac{\cos \theta + \cos \theta'}{2} \right)$

- Per $\theta \approx \theta' \approx 0$ (limite PARASSIALE) $\Rightarrow C \approx \text{costante sull'apertura}$

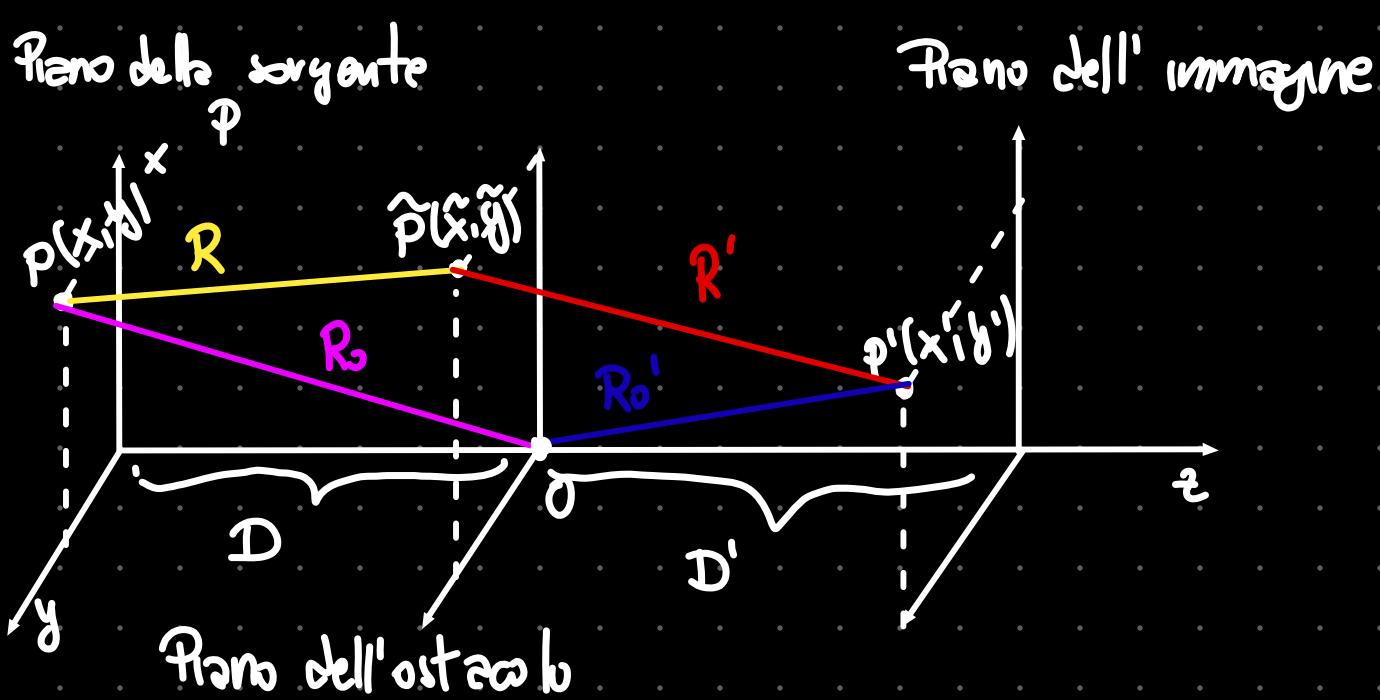
In approssimazione di parallasse \rightarrow estensione $\approx N$ aperture $\Rightarrow E'(P') = \sum_{j=1}^N C_j A_j \frac{e^{i\omega t - ik(R_j + R'_j)}}{R_j R'_j} \Delta \sigma_j$

limite continuo : $-\Delta \sigma_j \rightarrow$ da tutti uguali

- $A_j \rightarrow A$ tutte uguali (vero perché da tutti uguali e per apertura piccola rispetto alla variazione laterale del fronte d'onda
 ↳ $E(\tilde{P})$ localmente piatta)

$$E(P) = c A e^{i\omega t} \int_S e^{-ik(R+R')} \frac{1}{RR'} d\sigma$$

superficie apertura



$$R_0 = \sqrt{D^2 + x^2 + y^2} \quad R'_0 = \sqrt{D'^2 + x'^2 + y'^2}$$

sviluppo di Taylor per $R_0 \gg \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{x}'$

$$R = \sqrt{D^2 + (x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2} = \sqrt{R_0^2 - 2x\tilde{x} + y\tilde{y} + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} \approx R_0 \left(1 - \frac{x\tilde{x} + y\tilde{y}}{R_0^2} + \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{2R_0^2} \right)$$

Analogo per R'

Se $\frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{2R_0^2}$ piccolo \rightarrow trascurabile quando ha piccole variazioni di fase (max variazione quando argomento varia di π)

$$\tilde{r}^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \Rightarrow \frac{\tilde{r}^2}{2R_0} \cdot k \ll \pi \quad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda} \right) \rightarrow \frac{\tilde{r}^2}{R_0} \ll 1$$

APPROXIMAZIONE DI FRAUNHOFER

Approssimazione : $R = R_0 - \frac{x\tilde{x} + y\tilde{y}}{R_0}$ $R' = \dots$ \rightarrow NUMERATORE

$R = R_0$ $R' = R'$ \rightarrow DENOMINATORE

$$E'(P') = cA e^{iwt} \int_S \frac{e^{-ik(R_0 - \frac{x\tilde{x} + y\tilde{y}}{R_0})}}{R_0 R_0'} e^{-ik(R_0' - \frac{x'\tilde{x}' + y'\tilde{y}'}{R_0'})} dx dy$$

$$E'(P') = cA e^{iwt} \underbrace{\frac{e^{-ik(R_0 + R_0')}}{R_0 R_0'}}_{\text{termine oscillante in } t, \text{ ma costante. Si media nel tempo ma non cambia la figura di interferenza}} \int_S e^{ik(\frac{x}{R_0} + \frac{x'}{R_0'})\tilde{x}} e^{ik(\frac{y}{R_0} + \frac{y'}{R_0'})\tilde{y}} dx dy$$

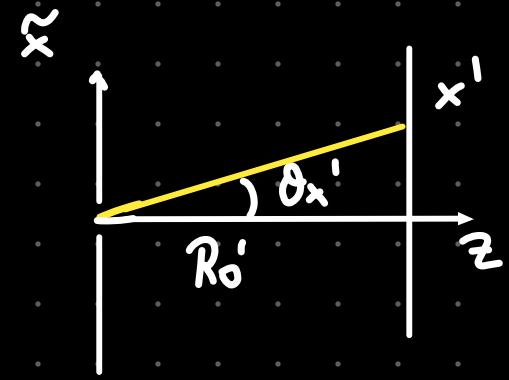
$\frac{x}{R_0} = \sin \theta_x$ (incidente) $\frac{x'}{R_0'} = \sin \theta'_x$ (usciente)

termine di intervento

FENDITURA

$$\sin \theta = \sin \theta_x = \frac{x'}{R_0'}$$

$$\frac{x}{R_0} = 0$$

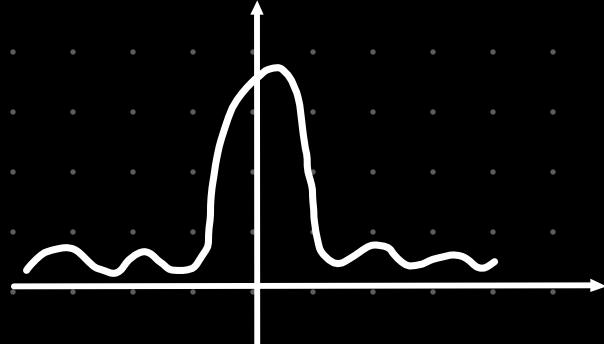


$$E'(P') = B \int_S e^{ik \sin \theta \tilde{x}} d\tilde{x} = \frac{B}{ik \sin \theta} e^{ik \sin \theta \tilde{x}} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

APERTURA

$$= B_0 \left(\frac{\sin \pi}{2} \right) \quad \pi = \frac{k \sin \theta \pi}{2}$$

Intensità $\Rightarrow I = I_0 \left(\frac{\sin^2 \pi}{\pi^2} \right)$



max centrale : $z=0 \quad \left(\frac{\sin \pi}{\pi} = 1 \right)$

zeri : $z = m\pi \quad m \neq 0 \quad 2 \sin \theta = m\pi$

Intensità z^0 max

$$\frac{I\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{I(0)} = \frac{4}{9\pi^2} \approx \frac{1}{20} \sim 5\% \Rightarrow \sim \text{tutta intensità luminosa è nel max centrale}$$