Meccanica Quantistica

Marco Militello

Indice

Capitolo 1

La crisi della fisica classica

Concetti incompatibili con la fisica classica, che non si riescono a spiegare. Per fisica classica si intende

1. meccanica newtoniana
2. termodinamica fisica statistica classica
3. elettromagnetismo e le leggi di Maxwell
4. relatività ristretta

1.1 Corpo nero

Universalità: stesso spettro di emissione. Basi termodinamiche $\rightarrow$ Kirchoff.
1900 Planck: giunge a risultato giusto, ma partendo da principi sbagliati

$$g(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{K_B T}} - 1}$$

Ottiene questa relazione grazie a fit dei dati sperimentali; aggiusta i paramentri: si ottiene per la prima volta h, la costante di Planck

$$h = 6.6 \times 10^{-34} J \cdot s \tag{1.1}$$

ha la stessa dimesione di un momento angolare

1.2 Effetto fotoelettrico

1905 Einstein
Proposta di Einstein che spiega l'effetto: scambio di energia come multiplo di $h\nu$ $\rightarrow$ QUANTI DI RADIAZIONE.
Nel grafico dell'energia massima in funzione della frequenza, Millikan misurò la pendenza della retta che risultò essere $\frac{h}{e}$ Si continuava però a pensare che l'energia si propagasse nel continuo, mentre durante le interazioni ci fossere scambi a pacchetti. Questa idea viene abbandonata con l'effetto Compton

1.3 Effetto Compton

Raggi-x su un metallo; $E_m >> E_{legame}$: in questo modo gli elettroni sono visti come liberi.

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$$

se v=c allora m=0. Quindi

$$p^2c^2 = E^2 = (h\nu)^2 \Rightarrow p = \frac{h\nu}{c}$$

Esperimento

Tratto fotone come particella con $\begin{cases} E = h\nu \\ p = \frac{h\nu}{c} \end{cases}$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \sin(\theta))$$

onda elettromagnetica non completamente descritta dalle leggi di Maxwell
$\frac{h}{m_e c} \simeq 2.4 \times 10^{-12} m$: lunghezza d'onda di Compton per l'elettrone $\Rightarrow$ ha la dimensione di una lunghezza.
1926 Lewis: assegna nome ai fotoni

1.4 Spettri atomici

Spettro solare ha delle righe nere: radiazione viene assorbita dallo strato esterno del sole e poi viene diffusa, quindi ci arriva meno intensa $\Rightarrow$ righe nere. He scoperto grazie allo spettro solare.
1897: scoperta elettrone
Modelli atomici $\rightarrow$ Rutherford: però non riesce a spiegare spettri atomici
Emissione e assorbimento non sono un continuo
Bohr: Energia quantizzata

$$\nu_{mn} = (E_m - E_n)\frac{1}{h}$$

ma non dà alcun tipo di spiegazione

$$m_e v r = n\hbar \qquad \text{momento angolare è multiplo intero di } \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Capitolo 2

Interferenza e diffrazione onde elettromagnetiche

Luce descrivibile con fenomeni ondulatori.
Esperimento doppia fenditura: metto uno schermo a una distanza $L >> \lambda$ dalle fenditure. In ogni punto ho che $I \neq I_1 + I_2$, ma ho che

$$I = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2 \neq |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2$$

La differenza di fase vale $d\sin(\theta)$; se la differenza di fase vale $n\frac{\lambda}{2}$ allora ho interferenza distruttiva. Il primo punto di buio si ha per

$$\theta = \frac{n}{2}\frac{\lambda}{d} \text{ con } n = 1$$

Se prendo una lampadina gialla (580 nm) da 100 W, allora vengono emessi $\sim 10^{20}$ fotoni al secondo. Cosa succede se abbasso intensità fino ad avere emissione di un fotone al secondo? L'esperimento della doppia fenditura porta allo stesso risultato precedente; però se ripeto di nuovo l'esperimento la posizione di ogni singolo fotone è diverso, anche se la figura che si viene a creare porta allo stesso risultato. Allora devo introdurre una trattazione probabilistica: posso solo dare distribuzione probabilità
Se chiudo una delle due fenditure non osservo alcuna figura di interferenza: il fotone "sente" la presenza di entrambe le fenditure. Ma con chi interferisce il fotone? Da che fenditura passa?
Esperimenti per capire da che fenditura sia passato il fotone distruggono la figura di interferenza $\Rightarrow$ misura microscopica disturba il fenomeno.
Risultati esperimento:

1. Fotone colpisce schermo in un punto ben preciso $\Rightarrow$ deposita tutta la sua energia $h\nu$
2. Con pochi eventi lo schermo sembra riempirsi in maniera casuale; non sappiamo esattemente dove andrà un fotone, ma possiamo dire dove si sono addensati maggiormente $\Rightarrow$ PROBABILITÁ
3. Se chiudo una fenditura sparisce figura di interferenza: fotone con $\lambda << d$ "sente" le 2 fenditure; ogni tentativo di capire da quale fenditura passi il fotone distrugge la figura di interferenza $\rightarrow$ disturbo con la misura. La misura su un sistema microscopico lo può disturbare in maniera significativa.

In fisica classica, date le condizioni inziali posso completamente determinare il moto di una particella; invece non posso determinare moto di un fotone: fotone ha una certa probabilità di colpire lo schermo proporzionale all'intensità I(x) [probabilità che fotone finisca in un punto preciso dello schermo]ù

Dualismo onda-particella

In alcuni esperimenti è più facile interpretare come particella altre volte come onda; la vera natura è l'elettrodinamica quantistica

1. La radiazione elettromagnetica si comporta come un flusso di particelle
2. Previsioni sul comportamento sono solo probabilistiche
3. In un certo punto $\vec{r}$ dello schermo al tempo t $\rightarrow$ fotone è portato da campo elettrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ che è soluzione delle equazioni di Maxwell; campo elettrico va interpretato come un'ampiezza di probabilità di trovare un fotone in un istante t in un punto $\vec{r}$

$$|E(\vec{r}, t)|^2 \rightarrow \text{ densità di probabilità}$$

4. Le equazioni di MAxwell sono lineari in $\vec{E} \Rightarrow$ vale principio di sovrapposizione: se E_1, E_2 sono soluzioni delle equazioni di Maxwell allora anche $\vec{E} = \lambda_1 \vec{E}_1 + \lambda_2 \vec{E}_2$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ è soluzione delle equazioni di Maxwell. Principio di sovrapposizione è anche quello che ci permette di spiegare interferenza

"Ogni fotone interfesce solo con se stesso"

Capitolo 3

La polarizzazione della luce

La luce ha una direzione privilegiata. Es.: laser, smartphone

Esperimento

Mettere immagine
Interpretazione classica: c'è onda che si propaga lungo z

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \vec{\epsilon}_p e^{i(kz-wt)} + c.c. \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}\ w = 2\pi\nu\ \lambda\nu = c$$

Il campo elettrico è libero, non ci sono cariche $\Rightarrow \div \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_p = 0$. Quindi trasverso rispetto alla direzione di propagazione
$\vec{k}//\vec{z} \Rightarrow$ il vettore di polarizzazione appartiene al pino perpendicolare alla direzione di propagazione

$$I_0 = |E_0|^2$$

Dopo polarizzazione: $\vec{E}'(\vec{r},t) = E_0' \vec{e}_x e^{i(kz-wt)}$

$$E_0' = E_0 cos\theta \Rightarrow I = I_0 \cos^2\theta$$

Dopo polarizzatore passa solo componente parallela $\rightarrow$ interpretazione che viene data.
Adesso faccio esperimento in cui diminuisco intensità fascio fino a che emetta solo un fotone alla volta.
Conseguenze:

1. Rilevatore o vede il fotone o non lo vede
2. Quando vede fotone lo vede tutto $\rightarrow$ tutta energia $h\nu$
3. se $\begin{cases} \theta = 0 \Rightarrow \text{ rilevatore vede tutto fotone} \\ \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{ rilevatore non lo vede mai} \end{cases}$
   La probabilità con cui vedo fotone è $\cos^2\theta \Rightarrow$ Numero fotoni arrivato $= N_0 \cos^2\theta$. Ogni singolo fotone può essere rappresentato come miscela di 2 stati
   - uno stato con probabilità di passare 1: ψ_x
   - uno stato con probabilità di passare 0: ψ_y

   Questi valori sono mutualmente esclusivi
4. Descrivo come somma di due stati $\psi_p = \psi_x \cos\theta + \psi_y \sin\theta \rightarrow$ inizio principio di decomposizione spettrale
   - ψ_x passa con probabilità $|\cos\theta|^2 = \cos^2\theta$

- ψ_y non passa con probabilità $|\sin\theta|^2 = \sin^2\theta$

Interpretazione probabilistica è sensata perchè $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

5. Se io ora metto un altro polarizzatore lungo x, tutti i fotoni passeranno perchè ora tutti i fotoni sono ψ_x: dopo polarizzatore lo stato fotone è diventato ψ_x. La misura ha fatto precipitare lo stato del sistema da ψ_p a ψ_x

Capitolo 4

De Broglie

Maxwell introduce andamento ondulatorio della radiazione elettromagnetico, mentre Einstein ipotizza andamento corpuscolare. De Broglie nel 1923 introduce ipotesi andamento ondulatorio elettroni.
Onda $\rightarrow \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - iwt)$; per essere invariante secondo Loretz $(\vec{k}, w), (\vec{p}, E)$ diventano tetravettori

$$|\vec{p}| = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar|\vec{k}| \Rightarrow \frac{h}{|\vec{p}|}$$

Ad ogni particella di massa è associato $\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$ e quindi un'onda $\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|}$
Numericamente

1. Elettroni: $m_e = 0.9 \times 10^{-30} Kg = 0.511 MeV = 0.511 \times 10^6 eV [eV = 1.6 \times 10^{-19} V \cdot J]$. Un elettrone non relativistico

$$E = \frac{p^2}{2m} \rightarrow \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E}} = \frac{123}{\sqrt{Volt}} \times 10^{-10} m(\text{Å})$$

   $\lambda \simeq 1\text{Å} \Rightarrow$ comparabile con raggi-x e distanza atomi cristallo

2. Neutroni termici (bassa temperatura termica):

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_n E}} = \frac{h}{\sqrt{2m_n \frac{3}{2} K_B T}} = \frac{30}{\sqrt{T(Kelvin)}} \times 10^{-10} m(\text{Å})$$

3. Granello polvere: $1\mu m$ di dimensione

$$v = 1\frac{mm}{s} \; m = 10^{-10} Kg \Rightarrow \lambda = 6.6 \times 10^{-11} \text{Å}$$

Non posso vederlo per oggetti macroscopici, ma solo a livello microscopico

Esperimento di Davisson-Germer 1927

Fascio di elettroni su un cristallo di Nichel $\rightarrow$ ogni punto come sorgente $\Rightarrow$ nasce figura di interferenza/diffrazione

Esperimento doppia fenditura con elettroni 1950

Esperimento doppia fenditura con elettrone singolo 1974: Merli-Missiroli-Pozzi

1. Elettrone arriva tutto intero; la carica non si sparpaglia sullo schermo

2. É un grande numero di elettroni che dà origine a figura di interferenza
3. Arrivo sullo schermo sembra un arrivo casuale
4. Interpreto come distribuzione di probabilità
5. Se chiudo una fenditura $\Rightarrow$ sparisce figura interferenza
6. Ogni tentativo di capire da quale fenditura sia passato l'elettrone distrugge la figura di interefe-renza
7. Cade il concetto di traiettoria

Per conservazione del momento $\rightarrow$ durante interazione con lo schermo c'è trasferimento di momento

Capitolo 5

Il principio di indeterminazione

Traiettoria $\rightarrow$ determinare posizione e velocità della particella istante per istante $\Rightarrow$ determino procedura di misura
Per determinare da quale fenditura sia passata la mia particella pongo uno schermo (1 fenditura), ma particella forma figura di diffrazione al passaggio nella fenditura
Facendo un'analisi degli ordini di grandezza, per una particella che passa da una fenditura di larghezza Δy, con una lunghezza d'onda λ, che forma un angolo θ si ha che

$$\Delta p_y \simeq p\theta = p\frac{\lambda}{\Delta y} = \frac{h}{\Delta y}$$

ottengo così il principio di indeterminazione di Heisenberg

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \simeq h \tag{5.1}$$

più voglio determinare la posizione (minuisco Δy) più aumenta l'intervallo Δp_y; cade così il concetto di traiettoria.
Questa è un'approssimazione: significato completamente diverso da quello che ricaveremo esattamente

Principio di indeterminazione è l'effetto della perturbazione causata dallo strumento di misura $\rightarrow$ perturbazione ha ruolo essenziale in meccanica quantistica perchè ha lo stesso ordine di grandezza della mia misura

- Elettrone: oltre a carica e massa ha anche un momento magnetico, che è una proprietà dell'elettrone $\Rightarrow$ spin $\left(\pm\frac{h}{2}\right)$ [elettrone come piccola calamita]

Capitolo 6

L'equazione di Schrodinger

É ricavata da ipotesi plausibili, ma non è dimostrabile; descrive fenomeni quantistici, ma non relativistici.
Deve contenere:

1. Principio di indeterminazione di Heisenberg $\rightarrow$ incapacità operativa di calcolare traiettoria particella

2. Corretto limite classico $\rightarrow$ quando posso trascurare dettagli quantistici devo riavere fisica classica

3. Equazione lineare per poter sovrapporre soluzioni $\Rightarrow$ principio sovrapposizione. Algoritmo per costruire diffrazione (del tipo $|\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2 \neq |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2$) $\rightarrow$ somma coerente di 2 oggetti $\Rightarrow |?|^2$: densità di probabilità

4. Somma coerente richiede lunghezza d'onda $\rightarrow$ ipotesi di De Broglie

5. Per somma coerente non è necessario campo vettoriale; massima semplicità: campi scalari complessi $\rightarrow$ in ogni punto ho bisogno di 2 soli valori, non di 3. Ipotesi valida perchè: $|c_1 + c_2|^2 \neq |c_1|^2 + |c_2|^2$

Costruzione...

- Particella libera in 1 dimensione

- f(x): campo scalare complesso

- $|f(x)|^2\, dx = dP \rightarrow$ probabilità infinitesima di trovare particella tra x e x + dx $\Rightarrow |f(x)|^2$: densità di probabilità

- $\int dP = 1 \rightarrow$ postulato probabilità
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x)|^2 = 1$$

- f(x) ampiezza di probabilità (campo quantistico)

- Rappresento particella come pacchetto d'onde molto localizzato; ambito naturale è trasformata di Fourier
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, g(k) e^{ikx}$$
Esempio uso gaussiana $g(k) = e^{\alpha(k-k_0)^2}$ che ha come ordine di grandezza della larghezza $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$
$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{ik_0 x} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} \qquad |f(x)|^2 = \frac{\pi}{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}$$

Posso calcolare

$$\begin{cases} < x >= \int dx\, x f(x) \\ \Delta x^2 = \int dx\, (x- < x >)^2 f(x) \end{cases}$$

ottenendo che $\Delta x =\sqrt{\alpha}$ e $\Delta k = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\alpha}}$ e quindi che

$$\Delta x \Delta k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

In generale si può dimostare che per qualunque funzione vale che

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$$

- Se voglio che sia valido De Broglie chiamo: $\hbar k = p \rightarrow k = \frac{p}{\hbar}$

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar$$

che ci rimanda al principio di indeterminazione: la trasformata di Fourier ci dà informazioni sui momenti

- Tutto qeusto è valido per una particella ad un istante $t = \bar{t} = 0$; devo inserire il tempo: per farlo uso la condizione che il baricentro del pacchetto d'onda soffisfi equazione di Newton $\rightarrow$ posizione classica della particella è il baricentro <x> del pacchetto d'onda

- Per un'onda piana qualsiasi vale che $e^{i(kx-w(k)t)}$, ma per le onde elettromagnetiche nel vuoto $w(k) = 2\pi\nu = 2\pi\frac{c}{\lambda} = kc$, quindi

$$e^{ik(x-ct)}$$

ogni singola onda piana si muove con velocità c. Per soddisfare equazioni di Maxwell $f(x,t) \mapsto f(x-ct)$

$$f(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, g(k) e^{i(kx-w(k)t)}$$

espandendo attorno a $k_0 \rightarrow w(k) = w(k_0) + (k-k_0)\left(\frac{dw}{dk}\right)_{k_0} + \frac{1}{2}(k-k_0)^2\left(\frac{d^2w}{dk^2}\right)_{k_0} + \ldots$, ponendo $k' = k - k_0$

$$f(x,t) = e^{i(k_0x-w(k_0)t)} \int dk'\, g(k') e^{i(x-v_gt)} e^{i\beta t k'^2} \qquad v_g = \left(\frac{dw}{dk}\right)_{k_0} \quad \beta = \left(\frac{d^2w}{dk^2}\right)_{k_0}$$

v_g: velocità di gruppo con cui si propaga il centro del pacchetto d'onda.
I pacchetti sono centrati $\rightarrow p_0 = \hbar k_0$

- Impongo equazioni di Newton

$$v_g = \frac{p_0}{m} = \frac{\hbar k_0}{m} \Rightarrow \left(\frac{dw}{dk}\right)_{k_0} = \frac{\hbar k_0}{m}$$

integrando si ottiene la relazione di dispersione per una particella libera

$$w = \frac{\hbar}{m}\frac{k^2}{2} = \frac{1}{2m\hbar}p^2$$

mettendo insieme

$$f(x,t) = \int dk\, g(k) e^{i\left(kx-\frac{\hbar}{2m}k^2t\right)} \underbrace{=}_{p=\hbar k} \frac{1}{\hbar}\int dp\, g(p) e^{\frac{i}{\hbar}\left(px-\frac{p^2}{2m}t\right)} \underbrace{=}_{E=\frac{p^2}{m}} \frac{1}{\hbar}\int dp\, g(p) e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$$

$$\psi(x,t) = \int dp\, \phi(p) e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$$

- Impongo condizione che
$$\int_{-\infty}^{\infty} dV \, |\psi(x,t)|^2 = 1$$
- Cerco equazione lineare più semplice che soddisfa ψ:
  - $\frac{\delta\psi}{\delta t} = \int dp \, \Phi(p) \left(-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}\right) e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$
  - $\frac{\delta\psi}{\delta z} = \int dp \, \Phi(p) \frac{i}{\hbar} p e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$
  - $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = \int dp \, \Phi(p) \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 p^2 e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$

  $$i\hbar\frac{\delta\psi}{\delta t} = \frac{1}{2m}\int dp \, \Phi(p) p^2 e \frac{i}{\hbar}(px - Et) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$$

  EQUAZIONI DI SCHRODINGER di 1 particella libera in una dimensione

  $$i\hbar\frac{\delta\psi}{\delta t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} \tag{6.1}$$