

# Matematica per la fisica

Marco Militello

# Indice

<b>I</b>	<b>Analisi complessa</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Numeri complessi</b>	<b>3</b>
1.1	Piano complesso (Armand-Gauss) . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Funzioni complesse</b>	<b>7</b>
2.1	Condizioni di Cauchy-Riemann . . . . .	8
2.2	Proiezione stereografica e punto all'infinito . . . . .	8
2.3	Singularità . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Superfici di Rieamann</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Integrazione sul piano complesso</b>	<b>13</b>
4.1	Curve . . . . .	13
4.2	Integrale di linea . . . . .	14
4.3	Valore principale integrale . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Forme differenziali</b>	<b>16</b>
5.1	Relazione tra forme differenziali e campi vettoriali . . . . .	17
5.2	Formula integrale di Cauchy . . . . .	17
5.3	Serie di Laurent . . . . .	18
5.4	Prolungamento analitico . . . . .	19
5.4.1	Massimo dominio di olomorfia . . . . .	20
5.5	Residui . . . . .	20
5.5.1	Residuo all'infinito . . . . .	21
5.6	Valore principale di Cauchy . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Proprietà mapping</b>	<b>23</b>
6.1	Trasformazioni lineari fratte . . . . .	24
<b>II</b>	<b>Spazi funzionali</b>	<b>26</b>
<b>7</b>	<b>Spazi normati</b>	<b>29</b>
<b>8</b>	<b>Spazi di Hilbert infinito dimensionali</b>	<b>31</b>
8.1	Integrali . . . . .	32
<b>9</b>	<b>Spazio <math>L_w^1(\Omega)</math></b>	<b>33</b>
9.1	Spazi $L_w^p(\Omega)$ . . . . .	33
<b>10</b>	<b>Basi di Hilbert ed espansione di Fourier</b>	<b>35</b>
10.1	Basi ortonormali . . . . .	35
10.2	Convergenza puntuale . . . . .	36
10.3	Polinomi ortonormali . . . . .	37

Parte I

Analisi complessa

# Capitolo 1

## Numeri complessi

**Def.** Un numero complesso è una coppia ordinata  $(a, b)$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  tale che siano definite

$$\begin{array}{ll} \text{Addizione} & [(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)] \\ \text{Moltiplicazione} & [(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bd)] \\ \text{Relazione di equivalenza} & [(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d] \end{array}$$

**Teorema.**

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

è un campo Abeliano rispetto addizione e moltiplicazione

*Oss.*

- Proprietà commutativa e associativa seguono da quelle dei reali
- Identità additiva  $(0) \rightarrow (0, 0)$
- Esiste opposto:  $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$
- Identità moltiplicativa:  $(1) \rightarrow (1, 0)$
- Esiste inverso:  $(a, b) \frac{1}{(a, b)} = (1, 0) \quad \frac{1}{(a, b)} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$

**Teorema.**

Il sottoinsieme  $\mathbb{C}_0 = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$  è un campo rispetto ad addizione e moltiplicazione  
 $\mathbb{C}_0$  è ISOMORFO a  $\mathbb{R}$

**Def. Unità immaginaria**

$$(0, 1) = i$$

$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) \quad (0, -1) = -i$$

**Def (Forma cartesiana).**

$$z = (a, b) = a + ib \quad a, b \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C}$$

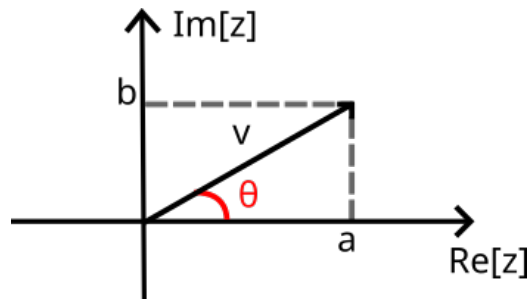
$$a = \operatorname{Re}\{z\} \quad b = \operatorname{Im}\{z\}$$

**Def (Coniugazione complessa).**

$$\bar{z} = a - ib = (a, -b) \quad z = a + ib = (a, b)$$

Operazioni notevoli:

- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}\{z\} = 2a$
- $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}\{z\} = 2ib$
- $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$



## 1.1 Piano complesso (Armand-Gauss)

$$|\vec{v}| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\begin{cases} a = |z| \cos \theta \\ b = |z| \sin \theta \end{cases}$$

Somma come somma vettoriale

**Def (Coordinate polari).**

$$z = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \tan \theta = \frac{b}{a}$$

$$\arg(z) = \theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & a < 0, b > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & a < 0, b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & a = 0, b < 0 \end{cases}$$

### Formula di Eulero

Estendere  $e^\gamma$  con  $\gamma \in \mathbb{R}$  a  $e^z$  con  $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = e^x(\cos(y) + i \sin(y))$$

Oss.

$$z = re^{i\theta} \rightarrow \bar{z} = re^{-i\theta}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

### Formula di De Moivre

Se  $n \in \mathbb{Z}$  si ha:

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

### Radice n-esima

Se  $n \in \mathbb{Z}$  si ha:

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} \left( \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right)$$

Allora esistono n diverse radici si  $z$  se  $|z| \neq 0$

## Equazioni di secondo grado in $\mathbb{C}$

$$az^2 + bz + c \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R} \quad z \in \mathbb{C}$$

Ha sempre 2 soluzioni

\* Se  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow 2$  soluzioni reali

\* Se  $\Delta < 0 \Rightarrow -\Delta > 0 \Rightarrow z_{1,2} \in \mathbb{C}$  e  $z_1 = \bar{z}_2$

## Logaritmo

$$\log(z) = \log(r) + i\phi$$

Così definito il logaritmo è una funzione palindroma, cioè assume valori differenti a seconda  $\theta \mapsto \theta + 2k\pi$   
Allora scelgo  $\theta$  per aver  $\log(z)$  univoco

$$\theta \in \begin{cases} [0, \pi] & y > 0 \\ [-\pi, 0] & y < 0 \end{cases}$$

N.B.  $\log(z)$  è discontinuo per  $x \in (-\infty, 0]$

Allora escludo  $(-\infty, 0] \Rightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \Rightarrow \text{BRANCH CUT}$

Definiamo

$$\log(z) = \log(r) + i \arg(z)$$

$$\overline{\log(z)} = \log(\bar{z})$$

## Norma

Su  $\mathbb{C}$  è definita la norma  $|z|$  che soddisfa le proprietà di una distanza  $d(a, b) \quad a, b \in \mathbb{C}$

- $d(a, b) = d(b, a)$
- $d(a, b) = 0 \iff a = b$
- $\forall c \in \mathbb{C} \Rightarrow d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c)$

È possibile allora definire la distanza

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

**Def (Successione di Cauchy).**

$$\{z_k\} \text{ tale che } \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon > 0 \mid \forall n, m > N_\epsilon \Rightarrow |z_n - z_m| < \epsilon$$

N.B.

1.  $\{z_k\}$  è di Cauchy se lo sono anche  $\{Re(z_k)\}$  e  $\{Im(z_k)\}$
2. Tutte le successioni convergenti sono di Cauchy; in  $\mathbb{C}$  è vero anche il viceversa perchè  $\mathbb{C}$  è completo

**Def (Serie su  $\mathbb{C}$ ).**

La serie  $\sum_n z_n$  con  $z_n \in \mathbb{C}$  converge a  $z \in \mathbb{C}$  se la successione delle somme parziali  $\{S_n\}$  converge a  $z$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} z_k$$

Oss.

- Condizione necessaria convergenza:  $z_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$  cioè  $\begin{cases} \operatorname{Re}(z_n) \rightarrow 0 \\ \operatorname{Im}(z_n) \rightarrow 0 \end{cases}$
- Condizione sufficiente: CONVERGENZA ASSOLUTA cioè  
Se converge  $\sum |z_n|$  su  $\mathbb{R} \Rightarrow$  converge anche  $\sum z_n$  su  $\mathbb{C}$

**Def.**

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\theta)^n$$

Oss.  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

**Def (Serie di potenze).**

$S(z, z_0)$  con  $z, z_0 \in \mathbb{C}$  e  $z_0$  centro si ha:

$$S(z, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad a_n = \text{cost} \in \mathbb{C}$$

Convergenza per ogni  $z$  fissato  $\Rightarrow$  CONVERGENZA PUNTALE

Oss.

$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid S(z, z_0) \text{ è convergente}\}$$

$E$  non è mai vuoto  $\rightarrow z_0 \in E$  e  $S(z, z_0) = a_0$  cioè converge

**Def (Raggio di convergenza).**

$$D = \{|z - z_0| \mid \forall z \in E\}$$

Raggio di convergenza:

$$R = \sup_{z \in E} D$$

cioè la maggior distanza da  $z_0$  per cui la serie converge

Oss.

- Le serie di potenze su  $\mathbb{C}$  convergono in un cerchio di raggio  $R$
- Se la serie converge solo in  $z = z_0 \Rightarrow R = 0$
- Se la serie converge  $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow R = \infty$

**Calcolo del raggio di convergenza**

$$1. R = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}} \right)^{-1}$$

Si riduce a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|^{\frac{1}{n}}}$  se tale limite esiste

$$2. R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \text{ se tale limite esiste}$$

$$\text{Calcolato } R \Rightarrow \begin{cases} |z - z_0| < R & \text{la serie converge} \\ |z - z_0| > R & \text{la serie diverge} \\ |z - z_0| = R & \text{si studia caso per caso} \end{cases}$$

Oss. La derivata di una serie di potenze con raggio di convergenza  $R$  ha lo stesso raggio di convergenza

*Corollario.* Una serie di potenze è infinitamente differenziabile all'interno del suo raggio di convergenza

## Capitolo 2

# Funzioni complesse

### Def (Funzione complessa).

Una funzione complessa è una mappa

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

che associa un punto  $z \in \mathbb{C}$  a un punto  $w = f(z) \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \operatorname{Re}(f(z)) + i\operatorname{Im}(f(z)) \Rightarrow f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$u, v$  funzioni su  $\mathbb{R}^2$  di  $x, y \in \mathbb{R}$

### Def (Continuità).

$f(z)$  è continua in  $z_0 \in \mathbb{C}$  se è definita in un intorno di  $z_0$  ed esiste finito il limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

### Def (Limite).

$f(z_0)$  è il limite di  $f(z)$  per  $z \rightarrow z_0$  se:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid |z - z_0| < \delta \text{ se } |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

*N.B.* Come per  $\mathbb{R}^2$  il limite deve essere indipendente dal cammino

### Def (Continuità su un dominio).

$f(z)$  è continua su un  $D \subseteq \mathbb{C}$  se è continua  $\forall z \in D$

### Def (Derivata di una funzione continua).

$f(z)$  è differenziabile se esiste il limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = \left. \frac{df}{dz} \right|_{z_0}$$

*N.B.* Anche la derivata è indipendente dal cammino

### Def (Funzione olomorfa).

Una funzione differenziabile su  $D \subseteq \mathbb{C}$  si dice OLOMORFA

### Proprietà funzioni olomorfe

- $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$
- $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)} \quad g(z) \neq 0$
- Funzione composta:  $\frac{d}{dz}(f \circ g)(z) = f'(g(z))g'(z)$
- Derivata funzione inversa: data  $w = f(z)$  olomorfa in  $z_0$  con  $f'(z_0)$   
 $h(w) = z = f^{-1}(w)$  è olomorfa in  $w_0 = f(z_0)$  e  $h'(w_0) = \frac{1}{f'(h(w_0))} = \frac{1}{f'(z_0)}$



## 2.1 Condizioni di Cauchy-Riemann

Condizioni necessarie e sufficienti per verificare differenziabilità

**Teorema.**

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  tale che  $u, v$  abbiano derivate parziali continue in un intorno di  $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\delta_x f(z_0) = i\delta_y f(z_0)$$

cioè:

- $\delta_x u(x, y)|_{(x_0, y_0)} = \delta_y v(x, y)|_{x_0, y_0}$
- $\delta_y u(x, y)|_{(x_0, y_0)} = -\delta_x v(x, y)|_{x_0, y_0}$

*Oss.* Le condizioni di Cauchy-Riemann permettono di scrivere le derivate complesse di  $f(z) = u + iv$  in 4 modi equivalenti:

$$f'(z) = \begin{cases} \delta_x u + i\delta_x v \\ \delta_x u - i\delta_y v \\ \delta_x u - i\delta_y u \\ \delta_y u + i\delta_x u \end{cases}$$

**Def (Operatori differenziali in  $z, \bar{z}$ ).**

$$\begin{aligned} \delta_z &= \frac{1}{2}(\delta_x - i\delta_y) \\ \delta_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(\delta_x + i\delta_y) \end{aligned}$$

**Teorema.**

Se  $f(z)$  è olomorfa su un dominio  $D \subseteq \mathbb{C} \Rightarrow \delta_{\bar{z}} f(z) = 0$

**Def (Funzioni anti-olomorfe).**

Una funzione si dice anti-olomorfa se

$$\frac{\delta}{\delta z} f(z) = 0$$

*Oss.* Si può dimostrare che se  $f(z)$  è antiolomorfa  $\Rightarrow \bar{f}(z)$  è olomorfa

**Def (Funzioni trigonometriche).**

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

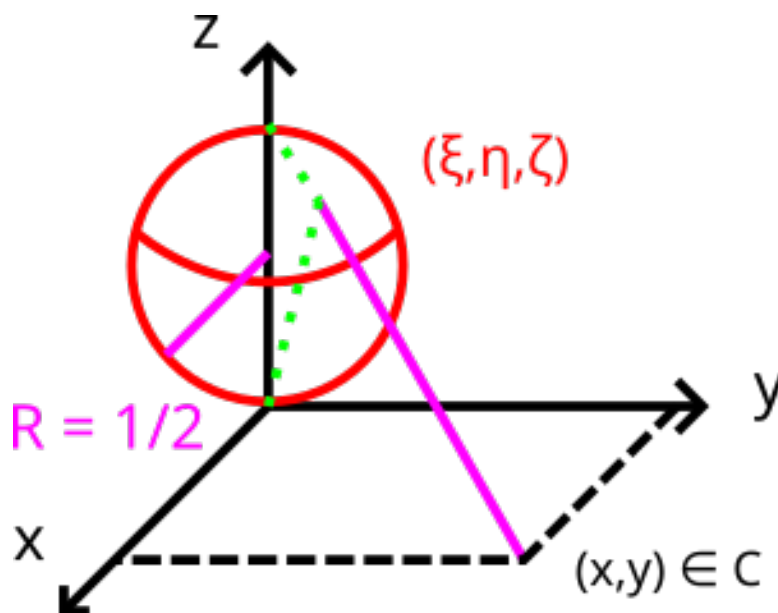
**Def (Funzioni iperboliche).**

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

## 2.2 Proiezione stereografica e punto all'infinito

I numeri complessi sul piano  $\mathbb{C}$  possono essere rappresentati come punti sulla superficie di una sfera

$$S^2 = \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \mid \xi^2 + \eta^2 + \left( \zeta - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \right\}$$



$$x = \frac{\xi}{1-\zeta} \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}$$

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

$\zeta = 1 \Rightarrow x = y = \infty \rightarrow (0,0,1)$  è chiamato PUNTO ALL'INFINITO

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2 = \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \text{COMPATTIFICAZIONE di } \mathbb{C}$$

$\hat{\mathbb{C}}$  è isomorfo a una sfera

*N.B.* Avremmo potuto usare la proiezione del polo sud  $(0,0,-1)$ ; in questo caso il punto  $z = \infty$  sarebbe stato mappato su  $w = \frac{1}{x+iy} = 0$

Quindi per studiare  $f(z)$  definita su  $\mathbb{C}$  e capire il suo andamento a  $z = \infty$  posso studiare  $f\left(\frac{1}{w}\right)$  attorno a  $w = \infty$  con  $w = \frac{1}{z}$

Se  $f\left(\frac{1}{w}\right)$  è olomorfa o singolare in  $w = 0 \Rightarrow f(z)$  è olomorfa o singolare in  $z = \infty$

**Def (Intera).**

Se  $f(z)$  è olomorfa su tutto  $\mathbb{C} \Rightarrow$  si dice INTERA

**Def (Singolarità).**

I punti in cui  $f(z)$  (non intera) non è differenziabile o non è definita si dicono SINGOLARITÀ

## 2.3 Singolarità

### Singolarità isolate

Se  $f(z)$  è olomorfa in un intorno di  $D(z_0, \epsilon) = \{z \mid |z - z_0| < \epsilon\}$  di  $z_0$  ma non in  $z_0$ ; se  $f(z_0)$  non è definita o non differenziabile

#### 1. Singolarità rimovibile

Se  $f(z_0)$  non è definita, ma esiste finito

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

posso estendere  $f$  in  $z_0$

$$f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

Con questa estensione  $f(z)$  estesa è olomorfa in  $D \cup \{z_0\}$

## 2. Singolarità di tipo polo di ordine k

Se esiste finito

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = a \neq 0 \quad k \in \mathbb{N} \geq 1$$

allora  $f(z)$  ha un polo di ordine k

- $k=1 \rightarrow$  Polo semplice
- $k=2 \rightarrow$  Polo doppio

Oss. Nelle vicinanze di un polo di ordine k si può scrivere

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \quad g(z) \text{ olomorfa e non nulla in } z_0$$

Oss. dato un polo di ordine k

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = \infty \quad \forall k < n$$

In particolare per  $k = 0$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0 \text{ la funzione diverge ad un polo}$$

## 3. Singolarità essenziale

Singolarità non rimovibile neanche moltiplicando per  $(z - z_0)^n$  con  $n \rightarrow \infty$

Se  $f(z_0)$  è singolarità essenziale di  $f(z)$  allora non esiste  $\lim_{z \rightarrow z_0}$

$f(z)$  oscilla violentemente tanto più mi avvicino a  $z_0$  a seconda del cammino;  $f(z)$  può assumere qualsiasi valore

### Teorema (Weierstrass).

$f(z_0)$  singolarità essenziale; posso avvicinarmi quanto voglio alla singolarità essenziale e allo stesso tempo avvicinarmi a qualsiasi complesso

$$\forall \epsilon, \delta > 0 \quad \forall c \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists z \mid |z - z_0| < \delta \text{ e } |f(z) - c| < \epsilon$$

### Teorema (Picard).

In un intorno di  $z_0$  singolarità essenziale di  $f(z)$ ,  $f(z)$  assume qualsiasi valore complesso un numero infinito di volte con eccezione al più di un valore

### Def (Funzione meromorfa).

$f(z)$  è MEROMORFA se le sue uniche singolarità in un dominio  $D \subseteq \mathbb{C}$  sono rimovibili o poli (non si considerano le singolarità a  $z = \infty$ )

Oss. Si possono studiare le proprietà di singolarità di  $f(z)$  in  $z = \infty$  studiando le proprietà di  $f(w)$  con  $w = \frac{1}{z}$  in  $w = 0$

Grazie al doppio mapping della proiezione stereografica si ha:

- poli in  $z \rightarrow$  zeri in  $w$
- zeri in  $z \rightarrow$  poli in  $w$
- singolarità essenziali in  $z \rightarrow$  singolarità essenziali in  $w$

## Singularità non isolata

Singularità si dice non isolata se non esiste intorno in cui è isolate

*N.B.* Basta un solo punto  $z_1$  tale che  $|z - z_0| < \delta$  con  $f(z_1)$  non olomorfa per avere che  $f(z_0)$  è singularità non isolata

1. Singularità che sono punti limite di una sequenza di singularità isolate  
es.:  $f(z) = \tan(\frac{1}{z})$
2. Punti di diramazione di funzioni a più variabili  
es.:  $f(z) = \sqrt{z}$

## Capitolo 3

# Superfici di Rieamann

Una volta fissata la disposizione del branch cut, tutti i valori della funzione in tutti i rami sono fissati sapendo il valore in un punto.

$f(z) = \sqrt{z}$  definisco cut  $(-\infty, 0]$  e dico che  $\sqrt{1} := 1$ ; Ho completamente determinato  $f(z)$  sia  $w_0(z)$  che  $w_1(z)$ .

Questo suggerisce che esiste descrizione alternativa in cui non ci sono tagli.

La funzione a valori doppi sono quindi single-value ed olomorfe.

Estendo il dominio con molteplici copie di  $D \subseteq \mathbb{C}$ .

es.: lo stesso punto  $z \in \mathbb{C}$  possiamo immaginare abbia 2 immagini diverse  $f(z) : f_1(z)$  e  $f_2(z)$

Raddoppiando  $\mathbb{C}$  avremmo 2 copie  $z_1$  e  $z_2 \Rightarrow$  abbiamo  $f_1(z_1)$  e  $f_2(z_2)$  che ora sono single-valued.

Il nuovo dominio si chiama **SUPERIFICIE DI RIEMANN** e corrisponde ad un'estensione di  $\mathbb{C}$  Le

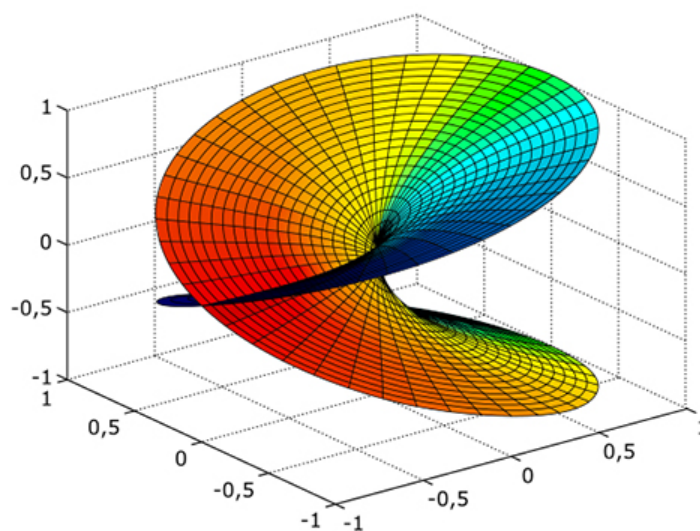


Figura 3.1: Superficie di Riemann

due copie di  $\mathbb{C}$  vanno incollate lungo quello che prima era il branch cut. In questo modo attraversando le linee di congiungimento si passa da un ramo all'altro.

In generale ci sono tante copie di  $D \in \mathbb{C}$  quante sono le branch-cut (eventualmente anche infinite [es:  $\log(z)$ ])

## Capitolo 4

# Integrazione sul piano complesso

Le proprietà di olomorfia di  $f(z)$  su  $\mathbb{C}$  possono essere determinate dalle condizioni di Riemann. Le proprietà di differenziabilità sono connesse con le proprietà di integrabilità di  $f(z)$  su  $\mathbb{C}$

### 4.1 Curve

**Def (Curva).**

Una curva è una mappa continua

$$\begin{aligned}\gamma : [a, b] &\in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)\end{aligned}$$

$z_a = \gamma(a)$  e  $z_b = \gamma(b)$  sono gli estremi della curva

**Def (Orientazione curva).**

- Una curva si dice che ha ORIENTAZIONE POSITIVA se il verso di percorrenza è antiorario
- Una curva si dice che ha ORIENTAZIONE NEGATIVA se il verso di percorrenza è orario

**Def (Curva opposta).**

La curva con orientazione opposta è data da una mappa

$$t \mapsto \gamma(a + b - t) = -\gamma$$

**Def (Curva semplice).**

Una curva semplice è una curva che non si interseca  $\Rightarrow$  mapping iniettivo

$$\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \quad \forall t_1 \neq t_2$$

**Def (Curva chiusa).**

Una curva chiusa è una curva tale che  $\gamma(a) = \gamma(b)$

**Def. Curva di Jordan**

Una curva di Jordan è una curva semplice e chiusa (nessun altro punto oltre a  $z_a = z_b$  coincide)

**Def. Curva regolare a tratti**

Data una curva  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ , se  $x(t)$  e  $y(t)$  sono continue per  $t \in [a, b]$  e se esiste una partizione di  $[a, b]$  dove  $x'(t)$  e  $y'(t)$  sono continue e non simultaneamente nulle  $\Rightarrow \gamma(t)$  è regolare a tratti.

**Def. Curve omotope**

Due curve su  $D \in \mathbb{C}$  con gli stessi estremi  $[a, b]$  sono omotope se: esiste una mappa continua che manda l'una nell'altra

$$\begin{aligned}\gamma : [a, b] \times [0, 1] &\mapsto D \in \mathbb{C} \text{ t.c. se } t = [a, b] \text{ e } u = [0, 1] : \\ \forall t \in [a, b] \forall u \in [0, 1] &\Rightarrow \gamma(t, 0) = \gamma_1(t) \text{ e } \gamma(t, 1) = \gamma_2(t)\end{aligned}$$

Quindi  $\gamma(a, u) = \gamma_1(a) = \gamma_2(a)$  e  $\gamma(b, u) = \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$   
 Per ogni valore di  $u$  ho una curva in  $D$ ; variando  $u$  passo da  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$

**Teorema (Jordan).**

Ogni curva di Jordan divide il piano complesso in 2 regioni.

Se l'orientazione della curva è positiva a destra ho la regione esterna, mentre a sinistra ho la regione interna; se l'orientazione è negativa ho l'opposto.

**Def. Dominio semplicemente connesso**

Date due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  che sono omotope

$$\forall u \in [0, 1] \Rightarrow \gamma(a, u) = \gamma(b, u) \text{ e } \gamma(t, 0) = \gamma_1(t) \quad \gamma(t, 1) = \gamma_2(t)$$

Allora il dominio  $D$  è semplicemente connesso se ogni curva chiusa è omotopa ad un punto (cioè può essere deformata in punto).

Ciò è possibile solo se non ci sono buchi.

## 4.2 Integrale di linea

**Def (Integrale di linea).**

Data una curva regolare a tratti  $\gamma : t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$  con  $t \in [a, b] \subseteq \mathbb{C}$

Dato un dominio  $D \subseteq \mathbb{C}$  e una funzione  $f(z)$  con  $z = \gamma(t)$  che sia continua  $\forall z = \gamma(t) \in D$  e  $\forall t \in [a, b] \Rightarrow$  si definisce INTEGRALE DI LINEA di  $f$  lungo  $\gamma$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \quad \text{con } \gamma'(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt} = x'(t) + iy'(t)$$

Si ha dunque

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iy(x(t), y(t))] (x'(t) + iy'(t)) dt \quad \text{con } f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b (ux' - vy') dt + i \int_a^b (uy' + vx') dt$$

Oss. Questo ci dice l'integrale è lineare e i cammini possono essere sommati

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} af(z) + bf(z) dz &= a \int_{\gamma} f(z) dz + b \int_{\gamma} f(z) dz \quad \forall a, b \in \mathbb{C} \\ \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz &= \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz \quad \text{se } \gamma_1(b) = \gamma_2(a) \end{aligned}$$

Questa proprietà mi permette di scrivere  $\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{-\gamma} f(z) dz$

Oss. L'integrale è indipendente dalla parametrizzazione scelta per la curva  $\gamma$

**Def (Lunghezza curva).**

$$L = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

**Teorema (Disuguaglianza di Darboux).**

Data una curva regolare a tratti  $\gamma(t)$  di lunghezza  $L$  e una funzione  $f(z)$  continua e limitata su  $\gamma$

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \gamma \Rightarrow \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq LM \quad (4.1)$$

### 4.3 Valore principale integrale

Generalizzo il concetto di integrale improprio

se  $f(z)$  è continua su una curva  $\gamma(t)$  con  $t \in [a, b]$  ad eccezione di un punto  $\xi \in \gamma(t)$

Posso considerare una circonferenza di raggio  $\epsilon$  intorno a  $\xi$

Definisco

$$I_a = \int_a^{\xi'} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \text{ e } I_b = \int_{\xi''}^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \quad \forall \epsilon > 0$$

Se esistono  $I_a, I_b$  per  $\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow I_a + I_b$  è integrale improprio di  $f(z)$  lungo  $\gamma$

Se  $I_a$  o  $I_b \rightarrow \pm\infty$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$  ma  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_a + I_b = a(\text{finito}) \in \mathbb{C} \Rightarrow$  si definisce il valore principale

$$P.V. \int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{\xi'(t)} f(z) dz + \int_{\xi''(t)}^b f(z) dz \right)$$

*N.B.* Se le singolarità sono più di una si può scrivere

$$P.V. \int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \sum_{j=0}^n \int_{\xi_j''}^{\xi_{j+1}''} f(z) dz \right) \quad \text{con } \xi_0'' = a \quad \xi_{n+1}' = b$$



## Capitolo 5

# Forme differenziali

**Def (Forma differenziale).**

$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  con  $P, Q$  funzioni  $C^1$  su  $D \subseteq \mathbb{R}^2$

**Def (Integrale di una forma differenziale).**

L'integrale di una forma differenziale su una curva  $\gamma(t)$  regolare a tratti è:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt \Rightarrow \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} f(z)$$

**Teorema (Green).**

Data una forma differenziale definita su  $S$  racchiuso da una curva di Jordan  $\gamma$  con orientazione positiva

$$\int_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_S [\delta_x Q(x, y) - \delta_y P(x, y)] dx dy \quad (5.1)$$

**Teorema (Cauchy).**

Sia  $f(z)$  olomorfa su  $D$  semplicemente connesso e  $\gamma$  una curva chiusa in  $D$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

*Oss.* Esiste un'estensione dovuta a Goursat che non richiede che  $f(z)$  sia derivabile su un dominio semplicemente connesso, ma basta chiedere che  $f(z)$  sia omotopa ad un punto.

*Corollario.* L'integrale di una funzione  $f(z)$  olomorfa su  $D$  semplicemente connesso non dipende dal cammino  $\gamma$

*Oss.* In generale se  $D$  non è semplicemente connesso il teorema fallisce.

**Teorema.**

Sia  $f(z)$  olomorfa su un dominio  $D$ . Per un punto arbitrario  $z_0 \in D$  possiamo sempre definire la primitiva

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z') dz$$

$F(z)$  è anch'essa olomorfa e si ha che  $F'(z) = f(z)$

*Corollario.*

1. Due diverse primitive di  $f(z)$  possono differire solo per una costante.
2.  $\int_A^B f(z) dz = F(B) - F(A)$

## 5.1 Relazione tra forme differenziali e campi vettoriali

Usando le condizioni di Cauchy-Riemann la forma differenziale si può scrivere come:

$$\omega = f(z)dz = (u + iv)dx + (-v + iu)dy$$

**Def (Forma differenziale chiusa).**

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad \text{si dice chiusa se } \delta_y P = \delta_x Q$$

**Def (Forma differenziale esatta).**

$$\omega = dg = \delta_x g(x, y)dx + \delta_y g(x, y)dy$$

Oss. Ogni forma differenziale esatta è anche chiusa:  $\delta_x \delta_y g(x, y) = \delta_y \delta_x g(x, y)$

## 5.2 Formula integrale di Cauchy

**Teorema.**

Data  $f(z)$  olomorfa su  $D$  semplicemente connesso e data  $\gamma$  di Jordan con orientazione positiva

$$\Rightarrow \forall z_0 \text{ interno a } \gamma \text{ si ha: } f(z_0) = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Oss. Questo permette di costruire il valore di  $f(z)$  all'interno di  $\gamma$  partendo dai valori di  $\gamma$  che sono il bordo della regione  $\Rightarrow$  OLOGRAFIA

*Corollario.* Se  $f(z)$  è olomorfa in  $z_0 \Rightarrow$  è differenziabile infinite volte e ha derivate che si possono scrivere come:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

La formula integrale di Cauchy è un caso particolare per curve semplici e chiuse. Se la curva non è semplice si può avvolgere più volte attorno a  $z_0$

**Def (Numero avvolgimenti).**

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz \quad \Rightarrow \quad n(\gamma, z_0)f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

**Teorema.**

Data  $\gamma(t)$  con  $t \in [a, b]$  curva chiusa e dato  $z_0 \notin \gamma$  si ha che  $n(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$

**Def (Funzione analitica).**

Se  $F(z)$  è olomorfa su un cerchio  $D_R$  di raggio  $R$  attorno a  $z_0 \in \mathbb{C}$  è anche analitica, cioè si può espandere in serie di potenze ed è derivabile infinite volte

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{con } a_n = \left[ \frac{d^n f(z)}{dz^n} \right]_{z=z_0} \frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{D_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

$R$  è il raggio di convergenza della serie.

Il teorema di Cauchy mostra che  $f(z)$  olomorfa su  $D$  semplicemente connesso implica che  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  con  $\gamma$  curva di Jordan.

Il teorema di Morera afferma che le sole funzioni con queste proprietà sono le funzioni olomorfe.

**Teorema. Morera**

Data  $f(z)$  su  $D$  semplicemente connesso tale che  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  con  $\gamma$  curva semplice e chiusa  $\Rightarrow f(z)$  è olomorfa

## Ulteriori proprietà delle funzioni olomorfe

### Teorema (valor medio).

Sia  $f(z)$  olomorfa su  $D \subset \mathbb{C}$  semplicemente connesso è possibile calcolare il valore di  $f(a)$  tramite un integrale su di una qualsiasi circonferenza centrata in  $a$  e contenuta in  $D$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

Cioè calcolando il valor medio della funzione sulla circonferenza

### Def (Bordo).

Dato uno spazio topologico  $S$  ed un punto  $z_0 \in S$ . Si dice che  $z_0$  è un punto di bordo di  $S$  se ogni intorno di  $z_0$  contiene sia punti di  $S$  che punti del suo complementare.

L'insieme dei punti di bordo si chiama BORDO e si indica con  $\delta S$

### Teorema (massimo modulo).

Sia  $f(z)$  olomorfa e non costante su un dominio  $D$  limitato tale che  $f(z)$  sia continua sul bordo  $\delta D$   
 $\Rightarrow |f(z)|$  raggiunge il massimo per un punto  $z_0 \in \delta D$ . Se  $f(z) \neq 0 \Rightarrow$  anche il minimo è sul bordo.

*N.B.* Bisogna richiedere che  $f(z)$  sia diverso da zero perchè se  $f(z_0) = 0$  per  $z_0 \in D \Rightarrow$  il minimo sarebbe  $z_0$

### Teorema (Liouville).

Una funzione  $f(z)$  olomorfa e limitata su  $\mathbb{C}$  è una costante

### Teorema (fondamentale dell'algebra).

Un polinomio complesso di grado  $n$  ha esattamente  $n$  zeri sul piano complesso

### Teorema (unicità).

Sia  $f(z)$  olomorfa su  $D \subseteq \mathbb{C}$  non necessariamente semplicemente connesso tale che  $f(z_n) = 0 \forall$  elemento della successione  $z_n \in D$  con  $z_n \neq z_0$  punto di convergenza della serie allora:

$$f(z) = 0 \quad \forall z \in D$$

Quindi tutti gli zeri di una funzione olomorfa sono punti isolati

*Oss.* è cruciale che  $z_0 \in D$

*Corollario.* Se  $f(z)$  olomorfa è nulla su un aperto contenuto in  $D \Rightarrow$  è nulla su tutto  $D$

## 5.3 Serie di Laurent

Olomorfe e analiticità sono proprietà che sui complessi sono connesse; una funzione olomorfa è scrivibile in serie di Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$\forall z_0 \in D$  in  $f(z_0)$  sia olomorfa e  $\forall$  disco  $|z - z_0| < R$  interamente contenuto in  $D$

$$a_n = \left[ \frac{1}{n!} f^{(n)}(z) \right]_{z=z_0} = \int_{\gamma} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

con  $\gamma$  curva chiusa e semplice che contiene  $z_0$

*Oss.*  $f(z)$  è analitica perchè può essere differenziata infinite volte

*N.B.* Questa cosa non succede invece sui reali

Per domini non semplicemente connessi è possibile dare una rappresentazione in serie di una funzione olomorfa su un anello

Applicazione → quando ci sono singolarità isolate

La serie che si ottiene è una serie bilatera e si chiama SERIE DI LAURENT

### Teorema.

Data  $f(z)$  olomorfa su un anello  $k = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$  con  $z_0$  centro e  $r < R$  raggi

Si può allora scrivere la serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} d_n (z - z_0)^n}_{\text{parte regolare}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{(z - z_0)^n}}_{\text{parte principale}} \quad (5.2)$$

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \text{con } \gamma \text{ curva semplice e chiusa su } k \text{ con orientazione positiva}$$

N.B.  $d_n \neq \left[ \frac{1}{n!} f^{(n)}(z) \right]_{z=z_0}$  perchè la serie non contiene più solo potenze positive.

Quindi i coefficienti non si possono più scrivere in termini di semplici derivate perchè  $z_0$  può essere una singolarità

Oss. I valori massimi e minimi dei raggi  $r$  e  $R$  sono:

$$R = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} |d_k|^{\frac{1}{k}} \right)^{-1} \quad \text{con } n \geq 0$$

Cioè la parte regolare è una serie di potenze con  $n$  positiva che converge su  $|z - z_0| < R$

$$r = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} |d_k|^{\frac{1}{k}} \right) \quad \text{con } n > 1$$

Cioè la parte principale è una serie di potenze  $\omega = \frac{1}{z - z_0}$  che converge sul disco  $|\omega| < \frac{1}{r}$

L'intersezione delle due regioni dà  $r < |z - z_0| < R$ ; quindi la serie converge uniformemente sull'anello  $k$  e su ogni suo sottoanello

Data una singolarità isolata  $z_0$  di  $f(z)$  esiste un anello  $k = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \delta\}$  su  $f(z)$  è olomorfa e quindi esiste la sua espansione in serie di Laurent

La forma della serie dà informazioni su natura della singolarità

1. se  $z_0$  è rimovibile  $\Rightarrow$  la parte principale è assente e la serie coincide con la serie di Taylor (sostituisco la funzione con la sua serie di Taylor e rimuovo la singolarità)
2. se  $z_0$  è un polo di ordine  $k \Rightarrow$  la parte principale contiene solo i primi  $k$  termini

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} d_n (z - z_0)^n$$

$$d_{-k} = 0 \quad \forall k > n \text{ e } d_{-n} \neq 0 \text{ solo polo più alto}$$

3. se  $z_0$  è una singolarità essenziale la serie di Laurent contiene infiniti termini nella parte principale con potenze negative

## 5.4 Prolungamento analitico

Data  $f(z)$  olomorfa su  $D \subset \mathbb{C}$  è possibile estendere estenderla su  $D'$  con  $D \subset D'$ . Questo significa che data  $f(z)$  con  $z \in D$  si può trovare una funzione olomorfa  $g(z)$  con  $z \in D'$  tale che  $f(z) = g(z)$  in  $D \cap D' \Rightarrow$  si può definire  $\tilde{f}(z)$  tale che:

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \forall z \in D \\ g(z) & \forall z \in D' \end{cases}$$

Si ha che  $\tilde{f}(z)$  è olomorfa su  $D \cup D'$  e si riduce a  $f(z)$  su

**Def (Prolungamento analitico).**

La funzione  $\tilde{f}(z)$  è detto PROLUNGAMENTO ANALITICO di  $f$

**Teorema.**

Se  $\tilde{f}(z)$  esiste  $\Rightarrow$  è unico

**5.4.1 Massimo dominio di olomorfia**

Ci sono diversi modi per calcolare la continuazione analitica; ognuno di questi metodi è valido in un sottodominio del massimo possibile

**1. ESTENSIONE PER SERIE DI POTENZE**

Si usa il metodo di Weierstrass (estensione per cerchi)

Supponiamo di avere  $f$  olomorfa su  $D_0$  disco centrato nell'origine 0 con una singolarità  $z_0$  sul bordo  $\delta D_0$

Preso  $z_1 \in D_0$  posso espandere in serie di Taylor attorno a  $z_1$  con raggio di convergenza

$$R_1 = |z_1 - z_0|$$

Chiamo la serie di Taylor  $f_1(z)$  e per costruzione  $f(z) = f_1(z) \quad \forall D_0 \cap D_1$

Se  $D_1$  non è interamente contenuto in  $D_0 \Rightarrow f_1(z)$  è prolungamento analitico di  $f$

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(z) \Big|_{z=z_1} (z - z_1)^n$$

Posso ripetere l'operazione e definire

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(z) \Big|_{z=z_2} (z - z_2)^n$$

Posso continuare fino al massimo dominio di olomorfia

**2. RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE**

Scrivo le funzioni in termini di un integrale

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad \text{FUNZIONE GAMMA DI EULERO} \quad (5.3)$$

La funzione  $\Gamma(z)$  generalizza il fattoriale ai numeri complessi

**3. ESPRESSIONE ANALITICA****5.5 Residui**

Vogliamo generalizzare il teorema di Cauchy al caso in cui  $\int_{\gamma} f(z) dz$  sia su una curva chiusa che racchiude una singolarità di  $f(z)$

**Def (Residuo).**

Il residui di  $f(z)$  nel punto  $z_0$  di singolarità isolata con  $f(z)$  altrimenti olomorfa su  $D - \{z_0\}$  è definito come:

$$Res[f, z_0] = d_{-1}$$

con  $d_{-1}$  coefficiente del termine  $\frac{1}{z-z_0}$  nell'espansione di Laurent di  $f(z)$  attorno a  $z_0$ . Cioè:

$$Res[f, z_0] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

con  $\gamma$  semplice e chiusa con orientazione positiva che racchiude  $z_0$

Oss. Il residuo può essere 0, per esempio  $d_{-1} = 0$  ma  $d_{-n} \neq 0 \quad n > 1$

Oss. Se  $z_0$  è un polo di ordine  $k$  allora si ha:

$$Res[f, z_0] = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)]$$

Oss. Quando  $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$  con  $h(z)$  olomorfa e  $g(z)$  ha unico zero semplice in  $z_0$  dove  $h(z_0) \neq 0$  allora:

$$Res[f, z_0] = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

### 5.5.1 Residuo all'infinito

Abbiamo visto che  $f(z)$  può avere una singolarità isolata in  $z = \infty$ . Si definisce allora il residuo all'infinito prendendo una circonferenza  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$  con  $R$  grande a sufficienza a contenere tutte le singolarità al finito

$$Res[f, \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} f(z) dz$$

$z = \infty$  può essere mappato in  $w = 0$  tramite  $w = \frac{1}{z}$

$$Res[f, \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma'} \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) dw$$

con  $\gamma'$  una circonferenza centrata in  $w = 0$  con raggio  $\frac{1}{R}$  con orientazione positiva

$$Res[f, \infty] = Res\left[g(w) = -\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right]$$

Oss. Il  $Res[f, \infty] \neq 0$  anche se  $f(z = \infty)$  non è singolare

#### **Teorema (residui).**

Data  $f(z)$  olomorfa su  $D$  eccetto un numero finito di singolarità isolate  $z_1, \dots, z_n$  e data una curva chiusa e semplice  $\gamma \subset D$  con orientazione positiva si ha:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n Res[f, z_k] \quad (5.4)$$

*Corollario.* Quando  $\gamma$  non è semplice o non è orientata positivamente si ha in generale:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n n(\gamma, z_k) Res[f, z_k] \quad n: \text{indice con segno}$$

Oss. Il teorema dei residui è utile perchè permette di calcolare l'integrale di funzioni olomorfe lungo una curva chiusa sapendo solo i valori della funzione alle singolarità racchiuse dalla curva

*Corollario.* La somma di tutti i residui incluso il punto all'infinito è zero

*N.B.* Il teorema dei residui si può applicare solo quando  $\gamma$  racchiude un numero finito di singolarità. Se fossero infinite ci potrebbe essere un punto di accumulazione per le singolarità che quindi non sarebbero più isolate. Per questo motivo il teorema dei residui non si può applicare direttamente alle funzioni multi-valued. Si può però applicare ad ogni brach basta stare attenti che  $\gamma$  non attraversi il branch-cut

## 5.6 Valore principale di Cauchy

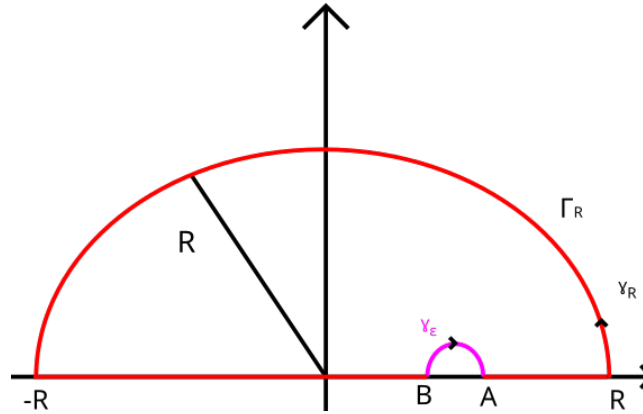
Se abbiamo singolarità sul cammino di integrazione  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx$  con  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $f(x)$  regolare in  $x_0$  tale che  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \rightarrow 0$  sufficientemente rapido.

Si può definire il valore principale di Cauchy

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-\infty}^{x_0-\epsilon} \frac{f(x)}{x-x_0} + \int_{x_0+\epsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} \right]$$

I due integrali sono separatamente divergenti, ma nella somma la divergenza in  $\epsilon$  si cancella.

Calcolo integrale usando  $\Gamma_R$



$$I(R) = \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{z-x_0} dz = 2\pi i \sum_k \text{Res} \left[ \frac{f(z)}{z-x_0}, z_k \right]$$

Allora

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx = \pi i f(x_0) + 2\pi i \sum_k \text{Res} \left[ \frac{f(z)}{z-x_0}, z_k \right] \quad (5.5)$$

## Capitolo 6

# Proprietà mapping

Una funzione  $f(z)$  può essere vista come una mappa da  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

Dato un aperto  $\Omega \subseteq D$  dominio di olomorfia, studio comportamento locale di  $f$  per capire cosa succede a  $f(\Omega) = \{f(z) \mid z \in \Omega\}$ :

$f$  è olomorfa  $\Rightarrow f$  è analitica  $\Rightarrow f$  è sviluppabile in serie di Taylor attorno a  $z_0 \in \Omega$

Il comportamento locale di  $f$  ha determinato dai primi termini della serie di Taylor  
 $m$  è il primo indice tale che  $a_m \neq 0 \Rightarrow$  il comportamento locale è determinato da

$$f(z) - f(z_0) \simeq a_m(z - z_0)^m$$

Ci sono due casi:

1.  $m = 1$  cioè  $a_1 = f'(z_0) \neq 0$

### **Teorema.**

Esiste un aperto  $U$  in un intorno di  $z_0$  tale che:

- $f$  mappa  $U$  in un intorno di  $f(U)$  in maniera biunivoca
- $f(U)$  è un aperto  $\Rightarrow f$  è una mappa aperta
- $f$  ha una funzione inversa  $f^{-1}$  olomorfa e manda  $f(U) \rightarrow U$
- $f$  è una mappa CONFORME, cioè conserva gli angoli tra le linee

**Def.** Dire che gli angoli si preservano significa che se le rette  $L$  e  $L'$  hanno angolo  $\theta$  fra loro su  $U \Rightarrow f(L)$  e  $f(L')$  hanno tangenti che si intersecano con angolo  $\theta$  su  $f(U)$

$f$  manda rette in curve, ma le tangenti preservano gli angoli

*Oss.* Dato che  $f^{-1}$  è olomorfa allora si può espandere in serie di Taylor attorno a  $w_0 = f(z_0)$

$$f^{-1}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(w - w_0)^k$$

con i  $b_k$  dati dalla formula di Lagrange

$$b_0 = z_0 \quad b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \right)^n \Big|_{z=z_0} \quad n \geq 1$$

2.  $m > 1$  si può dimostrare che esiste un aperto  $U$  tale che

- $f$  è una mappa  $m$  a 1
- $f(U)$  è un aperto
- $f$  ingrandisce gli angoli di un fattore  $m$



**Teorema (Open Mapping).**

Ogni funzione  $f$  olomorfa non costante mappa aperti in aperti

*N.B.* Questo non vale se la funzione è costante perchè  $f$  mappa  $\mathbb{C}$  in un punto

**Teorema.**

Se  $f$  è olomorfa e biunivoca si ha:

$$f'(z_0) \neq 0 \quad \forall z \quad \exists f^{-1} \text{ olomorfa}$$

Si dice che  $f$  è una MAPPA CONFORME

**6.1 Trasformazioni lineari fratte**

Trasformazioni lineari conformi del tipo:

$$F(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

con  $ad - cb \neq 0$  sono mappe conformi  $\forall z_0$  tali che  $z_0 \neq -\frac{b}{c}$

Inoltre

$$F'(z) = \frac{ad - bc}{cz + d}^2 \neq 0$$

Casi particolari:

1. Traslazioni:  $w = z + \alpha$
2. Dilatazioni:  $w = \beta z$
3. Inversioni:  $w = \frac{1}{z}$

Qualsiasi  $f$  lineare fratta può essere scritta come combinazione di queste 3 trasformazioni

*Oss.* Spesso conviene esprimere  $F(z)$  sulla sfera di Riemann  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$F\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \quad F(\infty) = \frac{a}{c} \quad \text{quando } c = 0 \rightarrow \infty$$

Allora le trasformazioni lineari fratte sono le uniche mappe biunivoche e olomorfe di  $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$   
Sono AUTOMORFISMI di  $\hat{\mathbb{C}}$

Mappano rette e cerchi in se stessi (in realtà su  $\hat{\mathbb{C}}$  le rette sono cerchi che passano da  $\infty$ )

Inoltre dati 3 punti  $z_1, z_2, z_3$  e dati  $w_1, w_2, w_3$  esiste una sola trasformazione  $F$  che abbia

$$w_i = F(z_i) \quad i = 1, 2, 3$$

*N.B.*

$$B(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

è invariante sotto trasformazioni lineari fratte

$$B(F(z), F(z_1), F(z_2), F(z_3)) = B(z, z_1, z_2, z_3)$$

*Oss.* L'insieme delle trasformazioni  $F$  forma un gruppo. Associamo a  $F$  la matrice

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad F = \frac{az + b}{cz + d}$$

Inversa e composizione di  $F$  seguono dalle regole delle matrici

Dato che si può riscalare  $\hat{F} \rightarrow \lambda \hat{F}$  con  $\lambda \in \mathbb{C}$  senza cambiare trasformazione allora si può normalizzare

$\hat{F}$  in modo che  $ad - cb = 1$

Quindi il gruppo delle trasformazioni  $F$  è  $SL(2, \mathbb{C})$  gruppo di matrici  $2 \times 2$  complesse e determinante unitario

Dato che  $\det \hat{F} = 1$  non fissa il segno di  $a, b, c, d$  ho che il gruppo è:

$$\frac{SL(2, \mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2} \quad \mathbb{Z}_2 = \{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$$

**Teorema (Riemann mapping).**

Ogni aperto semplicemente connesso  $\omega \subset \mathbb{C}$  può essere mappato conformemente (cioè usando  $f$  bi-olomorfa) sul cerchio unitario aperto

*Corollario.* Tutte le regioni aperte di  $\mathbb{C}$  semplicemente connesse sono uniformemente equivalenti

Parte II

Spazi funzionali

Vogliamo estendere la definizione di spazi euclidei  $\mathbb{R}^3$  in maniera astratta in modo da poterli usare anche per spazi  $\infty$ -dimensionali

**Def.** Uno **SPAZIO VETTORIALE**  $V$  su uno campo  $F$  è un insieme con 3 operazioni, chiuso rispetto:

1. somma per elementi dello spazio (vettori)

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in V \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} \in V$$

2. moltiplicazione per un elemento di  $F$  (scalari)

$$\forall \lambda \in F \forall \vec{v} \in V \Rightarrow \lambda \vec{v} \in V$$

La somma di vettori è associativa, commutativa, con elemento neutro  $\vec{0}$  e inverso  $-\vec{v}$ ; inoltre è distributiva sul prodotto con  $\lambda \in F$

$$\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \vec{v} + \lambda \vec{w}$$

e ha elemento neutro prodotto  $1 \in F$

**Def.**  $W \subset V$  è un **SOTTOSPAZIO** di  $V$  se è chiuso rispetto alla somma e moltiplicazione per uno scalare

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in W \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} \in W \subset V$$

$$\forall \vec{v} \in W \forall \lambda \in F \Rightarrow \lambda \vec{v} \in W \subset V$$

**Def.**  $n$  vettori  $\vec{u}_k$   $k = 1, \dots, n$  sono **linearmente indipendenti** se

$$\sum_{k=1}^n a_k \vec{u}_k = 0 \Rightarrow \forall k = 1, \dots, n \ a_k = 0$$

**Def.** Invece sono **linearmente dipendenti** se

$$\sum_{k=1}^n a_k \vec{u}_k = 0 \quad \text{con qualche } a_k \neq 0$$

**Def.** Un insieme di vettori linearmente indipendenti è detto **massimale** se l'insieme dei vettori linearmente indipendenti + uno qualsiasi altro vettore è linearmente dipendente  
 $\{u_k\}$  è chiamata **base** di  $V$

*Oss.* Data una base posso scrivere un qualsiasi vettore  $\vec{v} \in V$  in coordinate o componenti

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^n v_k \vec{u}_k \quad v_k \in F$$

*Oss.*  $n$  può essere finito o infinito; se è finito tutte le basi hanno lo stesso numero di vettori e si chiama **dimensione** dello spazio

Gli spazi di funzioni sono un esempio di spazio  $\infty$ -dimensionali

Sugli spazi vettoriali astratti è possibile aggiungere strutture che permettono di specificare il concetto di lunghezza o distanza, il concetto di limite e di continuità in maniera astratta

**Def.** Una **metrica o distanza** è una mappa

$$d(, ) : M \rightarrow \mathbb{R}$$

con le seguenti proprietà valide  $\forall a, b \in M$

$$d(a, b) = d(b, a)$$

$$d(a, b) = 0 \iff a = b$$

$$\forall c \in M \quad d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c)$$

**Def.** Uno spazio vettoriale i cui è possibile definire una matrice è uno **spazio metrico**

**Def.** Una **topologia** su un insieme  $X$  è una collezione  $\tau$  di sottoinsiemi di  $X$  che contiene l'insieme vuoto,  $X$  stesso e che deve essere chiusa rispetto ad un numero finito di iterazioni e ad un numero arbitrario di interazioni, cioè

- $\emptyset \in \tau$
- $X \in \tau$
- $\forall V_i \in \tau \quad V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n \in \tau$
- $\cup_\alpha V_\alpha \in \tau$  con  $\alpha$  finito o infinito

Gli elementi di  $\tau$  sono gli insiemi aperti

*Oss.* La topologia non è unica

**Def.** Una **sfera aperta** di raggio  $r$  centrata in  $a \in M$  è

$$B(a, r) = \{b \in M \mid d(a, b) < r\}$$

**Def.** Ogni sottoinsieme di  $X \subset M$  è aperto se

$$\forall a_o \in X \quad \exists B(a_o, r) \subset X$$

*Oss.* Ogni spazio metrico è uno spazio topologico, basta definire la topologia degli aperti tramite sfere aperte

**Def.** Un insieme è **chiuso** se il suo complementare è aperto

*Oss.* L'esistenza di una topologia metrica permette di definire la nozione di limite di una successione. Diciamo che  $\{a_n\}$  converge ad  $a \in M$  se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_o \text{ tale che } d(a_n, a) < \varepsilon \quad \forall n > n_o$$

oppure usando la definizione di limite di  $\mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, a) = 0$$

*Oss.* La convergenza di una serie si prova con la convergenza delle somme parziali

*Oss.* Un insieme chiuso contiene tutti i suoi punti di accumulazione ed il più piccolo insieme chiuso che contiene  $X$  è detto **chiusura** di  $X$  ( $\bar{X}$ )

**Def.** Un insieme  $Z$  si dice **denso** in  $Y$  se la sua chiusura corrisponde a  $Y = \bar{Z}$

**Def.** Un insieme  $K$  in uno spazio metrico  $X$  è **compatto**  $\iff$  ogni successione  $\{X_k\}$  interamente contenuta in  $K$  ha una sottosuccessione convergente ad un elemento di  $K$

**Def.** Una mappa

$$f : X \rightarrow Y$$

tra due spazi topologici è **continua** se la controimmagine di ogni aperto in  $Y$  contenente  $f(X_0)$  è un aperto in  $X$  contenente  $X_0$

Per spazi metri è possibile formulare ciò con sfere aperte

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \text{ tale che } d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \text{se } d(x, x_0) < \delta$$

**Def.** Una **successione di Cauchy** è una successione  $\{x_n\}$  tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon > 0 \text{ tale che } \forall n, m \geq N_\varepsilon \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

**Teorema.** In uno spazio metrico ogni successione convergente è una successione di Cauchy

**Def.** Uno spazio metrico si dice **completo** se tutte le successioni di Cauchy sono convergenti

## Capitolo 7

# Spazi normati

**Def.** La **norma** di un vettore  $\in V$  spazio vettoriale è una mappa

$$|| \cdot || : V \rightarrow \mathbb{R}^+$$

che soddisfa  $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \mathbb{R}$

1.  $||\vec{v}|| \geq 0 \quad ||\vec{v}|| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$  condizione di positività
2.  $||\lambda \vec{v}|| = |\lambda| ||\vec{v}||$
3.  $||\vec{v} + \vec{w}|| \leq ||\vec{v}|| + ||\vec{w}||$  disuguaglianza triangolare

**Def.** Uno spazio vettoriale dotato di norma si dice **spazio normato**

*Corollario.* Gli spazi normati sono sempre degli spazi metrci dato che si può sempre definire

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = ||\vec{v} - \vec{w}||$$

*Corollario.* Per la convergenza in uno spazio normato si può usare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ||\vec{v}_n - \vec{v}|| = 0$$

**Def.** Un **isomorfismo** tra spazi normati è una mappa biunivoca

$$f : (X, ||\cdot||_x) \rightarrow (Y, ||\cdot||_y)$$

che preserva la struttura lineare e la norma, cioè

- $f(\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda f(\vec{v}) + \mu f(\vec{w})$
- $||f(\vec{v})||_y = ||\vec{v}||_x \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in X \quad \lambda, \mu \in F$

*Oss.* Tramite la norma superiore

$$||f||_{sup} = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

possiamo definire il concetto di convergenza uniforme

**Def.**  $\{f_n\} \rightarrow f$  converge uniformemente su K se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)|}_{||f_n - f||_{sup}} = 0$$

*Oss.* La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale

**Def.** Norma  $L_1$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

*Oss.* Si può dimostrare che la convergenza in norma sup implica convergenza in norma  $L_1$

**Def.** Uno **spazio di Banach** è uno spazio vettoriale normato e completo

**Def.** Il **prodotto scalare (o interno)** su uno spazio vettoriale complesso è una mappa

$$(\vec{a}, \vec{b}) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\vec{v}, \vec{w} \mapsto (\vec{v}, \vec{w})$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

1. Linearità

$$(\vec{u}, \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda (\vec{u}, \vec{v}) + \mu (\vec{u}, \vec{w}) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

2. Hermiticità

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \overline{(\vec{w}, \vec{v})} \quad \text{simmetria su } \mathbb{R}$$

3. Positività

$$(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0 \quad (\vec{v}, \vec{v}) = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$$

*Oss.* La prop 2 implica anti-linearità nel primo argomento

$$(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \vec{w}) = \bar{\lambda} (\vec{u}, \vec{w}) + \bar{\mu} (\vec{v}, \vec{w})$$

**Def.** Uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare è detto **pre-Hilbert**

*Oss.* Pre-Hilbert è anche uno spazio normato; si può sempre definire

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(\vec{v}, \vec{v})}$$

*Oss.* Il prodotto scalare soddisfa la disuguaglianza di Schwarz

$$|(\vec{v}, \vec{w})|^2 \leq (\vec{v}, \vec{v})(\vec{w}, \vec{w})$$

**Def.** Uno **spazio di Hilbert finito dimensionale** è uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare e completo

**Def.** Due vettori sono **ortogonali** se il loro prodotto scalare è nullo

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

*Oss.* I vettori ortogonali sono linearmente indipendenti

*Oss.* Gli elementi di una base (set massimale di vettori linearmente indipendenti) sono **ortomormali**

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

$$1. \quad \vec{v} = \sum_{k=1}^n v_k \vec{e}_k \quad v_k = (\vec{e}_k, \vec{v})$$

$$2. \quad (\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{k=1}^n \bar{v}_k w_k \quad \bar{v}_k = (\vec{v}, \vec{e}_k) \quad w_k = (\vec{e}_k, \vec{w})$$

$$3. \quad \|\vec{v}\|^2 = \sum_{k=1}^n |v_k|^2 \text{ identità di Parseval}$$

*Oss.* In ogni spazio di Hilbert finito dimensionale è sempre possibile costruire una base ortonormale a partire da qualsiasi base

## Capitolo 8

# Spazi di Hilbert infinito dimensionali

Ci concentriamo sugli spazi separabili, cioè che hanno un sottoinsieme denso che è contabile. Diciamo che il set  $\{\vec{e}_k\}$  con  $k \in \mathbb{N}$  in uno spazio di Hilbert infinito dimensionale è un sistema ortonormale. Se

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

Se inoltre  $\forall \vec{v}$  si può scrivere

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \vec{e}_i \quad v_i = (\vec{e}_i, \vec{v}) \in \mathbb{C}$$

allora il sistema  $\{\vec{e}_k\}$  è un **sistema ortonormale completo** [S.O.N.C] o base di Hilbert.

*Oss.* Abbiamo generalizzato la nozione di base usando  $\infty$  elementi; ciò è possibile perchè abbiamo la nozione di limite.

$$\vec{v} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i \quad \vec{v} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i - \vec{v} \right\| = 0$$

**Def.** L'espansione

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{\infty} (\vec{e}_i, \vec{v}) \vec{e}_i$$

è chiamata **serie di Fourier** e i coefficienti  $v_i$  sono detti coefficienti di Fourier.

**Teorema.** La serie  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i$  converge  $\iff \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$  converge.

*Oss.* Come nel caso finito dimensionale valgono

- $(\vec{v}, \vec{e}_i) = 0 \quad \forall i \Rightarrow \vec{v} = 0$
- $\|\vec{v}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^2 \quad \forall \vec{v}$
- $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V \Rightarrow (\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{v}_k w_k$

**Def.** Lo spazio  $l^2(\mathbb{C})$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty$$

è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

In generale gli spazi  $l^p(\mathbb{R})$  o  $l^p(\mathbb{C})$  con  $1 \leq p < \infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

sono solamente dotati di norma, quindi sono spazi di Banach.



Oss. Si può dimostrare utilizzando la disuguaglianza di Minkowski per le serie

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

**Def.** Gli spazi  $l^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{C})$  sono anch'essi spazi di Banach formati da successioni limitate e dotati di norma superiore

$$\sup_{0 \leq n \leq \infty} |x_n| < \infty$$

Il tipico esempio di prodotto scalare su spazi di Hilbert infinito dimensionale è quello di funzioni sull'intervallo  $[a, b]$

$$(f, g) = \int_a^b \bar{f}(x)g(x) dx$$

La somma  $L^1$  rientra in questa categoria

## 8.1 Integrali

### Integrale di Riemann

$$I = \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(\bar{x}_i)$$

Quando esiste finito il limite per  $n \rightarrow \infty$   $x_{i+1} - x_i \rightarrow 0$  si dice INTEGRALE DI RIEMANN e la funzione si dice integrabile secondo Riemann

### Integrale Lebesgue

$$I = \sum_{i=1}^n f_i \mu(f^{-1}([f_{i+1} - f_i]))$$

con  $f_i$  una partizione del range di  $f$  e con  $\mu(x)$  misura di  $X$

La controimmagine di un intervallo non è necessariamente un intervallo

## Capitolo 9

### Spazio $L_w^1(\Omega)$

**Def.** Lo spazio  $L_w^1(\Omega)$  è uno spazio di funzioni definite su un insieme  $\Omega \subset \mathbb{R}/\mathbb{C}$ , Lebesgue-integrabili con norma

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)| \underbrace{w(x)}_{\text{misura}} dx < \infty$$

Questi spazi  $L_w^1(\Omega)$  sono spazi di Banach

*Oss.* Lo spazio delle funzioni continue su un intervallo  $C([a, b])$  con norma

$$L^1 = \int_a^b f(x) dx$$

non è uno spazio di Banach, perchè non è completo

*Oss.* Se vogliamo che lo spazio  $L_w^1(\Omega)$  sia uno spazio di Banach dobbiamo provare linearità, positività e disuguaglianza triangolare nella norma  $L_w^1$

La linearità e la disuguaglianza triangolare seguono facilmente dalle proprietà degli integrali, la positività vera per integrale di Riemann, ma non è più vera in generale per integrale di Lebesgue; dobbiamo allora definire  $f(x) = 0$  quasi ovunque

**Teorema** (Riesz-Fischer).  $L_w^1$  è completo e quindi di Banach

*N.B.* Per dimostrare che questo spazio è completo, bisogna usare ben due teoremi dell'integrale di Lebesgue  $\Rightarrow$  questo vale solo per funzioni Lebesgue-integrabili

#### 9.1 Spazi $L_w^p(\Omega)$

Spazio delle funzioni a valori complessi su regione  $\Omega \subset \mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$  tale che

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p w(x) dx < \infty \quad p \geq 1 \in \mathbb{R}$$

*Oss.* Le funzioni uguali quasi ovunque sono considerate identiche

*Oss.* Gli spazi  $L_w^p(\Omega)$  sono spazi di Banach con norma  $L_w^p$

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

La completezza di questi spazi si può dimostrare generalizzando il teorema di Riesz-Fischer

*Oss.* Ci sono due ulteriori disuguaglianze notevoli; se assumiamo che  $p$  e  $q$  siano coniugati, cioè  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  allora valgono

1. Disuguaglianza di Holder

$$\|fg\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_p$$

2. Disuguaglianza di Minkowski

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

*Oss.* Tra tutti i  $p$  possibili, il caso  $p=2$  è particolare;  $L_w^2(\Omega)$  non è solo uno spazio di Banach, ma anche uno spazio di Hilbert. E infatti l'unico su cui si può definire il prodotto scalare

$$(f, g) = \int_{\Omega} \bar{f}(x)g(x)w(x) dx$$

che induce norma  $L_w^2$

$$\|f\|_2 = ((f, f))^{\frac{1}{2}} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$L_w^2(\Omega)$  è lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile e contiene sia funzioni continue  $C(\Omega)$  sia funzioni con singolarità

## Capitolo 10

# Basi di Hilbert ed espansione di Fourier

Applicando la teoria generale degli spazi di Hilbert a  $L_w^2(\Omega)$  si arriva alla conclusione che è possibile definire una base contabile di funzioni in  $L_w^2(\Omega)$

Quindi una qualsiasi funzione  $f \in L_w^2(\Omega)$  può essere espressa come combinazione degli infiniti elementi della base ortogonale

### 10.1 Basi ortonormali

Una funzione si dice normalizzata se la sua norma è 1; in particolare per  $L_w^2(\Omega)$

$$\|f\|_2 = \int_{\Omega} |f(x)|^2 w(x) dx = 1$$

**Def.** Due funzioni sono **ortogonali** se

$$(f, g) = \int_{\Omega} \overline{f(x)} g(x) w(x) dx = 0$$

**Def.** Una **base ortonormale** è un set di funzioni  $\Psi_n(x)$  con  $n = 0, 1, \dots, N$  su  $L_w^2(\Omega)$  che soddisfano

$$(\Psi_n, \Psi_m) = \delta_{m,n} \quad \forall m, n = 0, 1, \dots, N$$

*Oss.* Se non ci sono altre funzioni ortogonali a tutti  $\Psi_n$  allora il sistema è completo. Quindi  $\{\Psi_n\}$  è una base di Hilbert di  $L_w^2(\Omega)$

Per la teoria generale degli spazi di Hilbert si può perciò espandere qualsiasi funzione  $f \in L_w^2(\Omega)$  sulla base

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \Psi_n \quad \text{serie di Fourier}$$

I coefficienti di Fourier  $C_n$  si calcolano

$$C_n = (\Psi_n, f) = \int_{\Omega} \overline{\Psi_n(x)} f(x) w(x) dx$$

*Oss.* La convergenza della serie di Fourier non implica che

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \Psi_n$$

converga puntualmente (cioè  $\forall x$ ) ad  $f$ , ma va intesa come convergenza in norma  $L_w^2(\Omega)$ , cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f(x) - \sum_{n=0}^n C_n \Psi_n|^2 w(x) dx = 0$$

Oss. La serie di Fourier di una qualsiasi funzione a quadrato integrabile definita su  $[a, b]$  converge alla funzione stessa in norma  $L_2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=-n}^n c_k \Psi_k - f \right\|_2 = 0$$

Oss. Se  $f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow c_k = \bar{c}_{-k}$

Oss. La serie di Fourier su  $L^2_{[a,b]}$  può essere anche scritta in forma trigonometrica usando

$$e^{\pm 2\pi i n \frac{x}{L}} = \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \pm i \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)$$

per cui

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)$$

In questa formulazione i coefficienti sono dati da

$$a_n = \frac{c_n + c_{-n}}{\sqrt{2}} \quad b_n = \frac{i(c_n - c_{-n})}{\sqrt{2}}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx \quad b_n = \frac{2}{L} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx$$

Quindi la base della forma trigonometrica è data da

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{L}}, \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right), \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \right\} \quad n > 1$$

Le funzioni della base trigonometrica si chiamano **armoniche** e il numero  $\frac{n}{L}$  si dice frequenza dell'armonica

Oss. Per definire i coefficienti della serie di Fourier

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_a^b e^{-2\pi i \frac{n x}{L}} f(x) dx$$

basta che  $f(x) \in L^1_{[a,b]}$  e non per forza in  $L^2_{[a,b]}$

## 10.2 Convergenza puntuale

Per semplicità assumiamo  $[a, b] = [0, 2\pi]$

Se prendo  $f(x) \in L^1_{[0,2\pi]}$  allora

$$c_n = (\Psi_n, f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x) dx$$

sono ben definiti e si può costruire la serie di Fourier

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Osservo che la serie di Fourier ha termini che sono periodici con periodo  $2\pi$

$$e^{inx} = e^{i(n x + 2\pi)}$$

Quindi posso estendere le funzioni  $f$  da  $[0, 2\pi]$  a tutto  $\mathbb{R}$  usando le condizioni periodiche per l'estensione

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

Allora posso studiare su tutto  $\mathbb{R}$  la convergenza delle somme parziali

$$S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-n}^n c_k e^{-ikx} = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} e^{-iky} f(y) dy \right] e^{-ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-y)} f(y) dy$$

ora sfrutto la periodicità di  $f$  per cambiare variabile  $z = x - y$  dato che

$$\int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Allora ottengo

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikz} f(x+z) dz$$

introduco KERNEL DI DIRICHLET

$$D_n(z) = \sum_{k=-n}^n e^{ikz} = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}z\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}$$

per riscrivere

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+z) D_n(z) dz$$

dividendo integrale ottengo

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+z) - f(x-z)}{2} D_n(z) dz$$

**Teorema** (Dirichlet).

Data  $f$  con periodo  $2\pi$  che sia  $L^1_{[0,2\pi]}$  tale che

$$\lim_{y \rightarrow x^\pm} f(y) = f(x^\pm)$$

e tale che esista integrale

$$\int_0^\delta \frac{f(x \pm y) - f(x^\pm)}{y} dy$$

per qualche valore di  $\delta$ , allora la serie di Fourier

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

converge a

$$\begin{cases} f(x) & \text{se } f \text{ è continua} \\ \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] & \text{se } f \text{ è discontinua} \end{cases}$$

*Oss.* Il teorema di Dirichlet si applica a tutte le funzioni  $C^1$  a pezzi

### 10.3 Polinomi ortonormali

Si può applicare metodo ortogonalizzazione di Gram-Schmidt anche a basi  $\infty$ -dimensionale.

Solitamente si parte da monomi con potenze diverse:  $1, x, x^2, x^3, \dots$  eventualmente moltiplicati per funzioni a decrescenza rapida per renderle integrabili a  $\pm\infty$

Queste sono soluzioni linearmente indipendenti e tramite Gram-Schmidt si può arrivare a sistema ortormale completo su  $L^2_w[a, b]$