MECCANICA CLASSICA

DEF EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORDINARIA (ODE) CASO SCALARE NELLA VARIABILE $x(t)$

↳ Relazione che lega $x(t)$ alle sue derivate

$\phi(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(N)}) = 0 \qquad x^{(N)} \cdot = \frac{d^N}{dt^N} x(t)$

ODE è DI ORDINE N se la derivata N è la massima presente

↳ è IN FORMA NORMALE se è nella forma $\Rightarrow \quad x^{(N)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(N-1)})$

DEF ODE VETTORIALE → equazione differenziale nella variabile $\underline{x}(t)$

SOLUZIONE ODE SCALARE $\quad \phi(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(N)}) = 0$

↳ $\tilde{x}(t) \quad (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $\quad \phi(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t), \dots, \tilde{x}^{(N)}(t)) = 0 \quad \forall t \in (a,b)$

DEF SOLUZIONE GENERALE → famiglia di funzioni dipendenti da un certo numero di parametri che contiene tutte le soluzioni della ODE

DEF SOLUZIONE PARTICOLARE → soluzione generale in cui vengono fissati i parametri

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL I ORDINE IN FORMA NORMALE A VARIABILI SEPARABILI

↳ $\dot{x} = f(x)\, g(t)$

Assumo $f(x) \neq 0$ per $\alpha \leq x \leq \beta \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{f(x)} = \int g(t) \cdot dt$

$$\boxed{F(x) = G(t) + c} \to x(t) \text{ si ottiene risolvendo rispetto a } x$$

Se $f(x) = cost \Rightarrow \dot{x} = g(t) \to x(t) = \int g(t)\, dt$

Se $g(t) = cost \Rightarrow \dot{x} = f(x) \to \int \frac{dx}{f(x)} = t - t_0$

ODE VETTORIALE (2D)

↳ $\underline{x} = (x_1, x_2) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t) \equiv \begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2, t) \end{cases}$$

PROP ODE SCALARE DI ORDINE N IN FORMA NORMALE $\equiv$ ODE VETTORIALE DI I ORDINE E RANGO N

DIM. $\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t)$

Se pongo $y = \dot{x} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \ddot{x} = f(t, x, y) \end{cases}$

PROBLEMA DI CAUCHY

↳ Cercare soluzione particolare che soddisfa alcune condizioni iniziali

Ordine ODE indica numero condizioni iniziali necessarie

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) \\ \left.\begin{array}{l} x(t_0) = t_0 \\ \dot{x}(t_0) = v_0 \end{array}\right\} \text{CONDIZIONI INIZIALI} \end{cases} \equiv \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(t, x, y) \\ x(t_0) = t_0 \\ y(t_0) = v_0 \end{cases}$$

TEO ESISTENZA ED UNICITÀ

Si considera un sistema di ODE di ordine I e campo N in forma normale

$\underline{\dot x} = \underline{f}(t, \underline{x}) \quad \underline{f}: (f_1, \dots, f_N) \quad \Omega \times (t_1, t_2) \to \mathbb{R}^N$

Sia $(x_1^0, \dots, x_N^0) \in \Omega \wedge t_0 \in (t_1, t_2)$

Considerando il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \underline{\dot x} = \underline{f}(t, \underline{x}) \\ \underline{x}(t_0) = (x_1^0, \dots, x_N^0) = \underline{x}^0 \end{cases}$$

① Se $\underline{f}$ CONTINUA → AMMETTE SOLUZIONE definita in un certo intorno di t_0 $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

② Se $\underline{f}$ è DIFFERENZIABILE CON CONTINUITÀ IN $\Omega \times (t_0, t_1)$ → in $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ la soluzione è unica

Se $f(\cancel{t}, x, y)$, $g(\cancel{t}, x, y)$ ⇒ ODE SI CHIAMA AUTONOMA

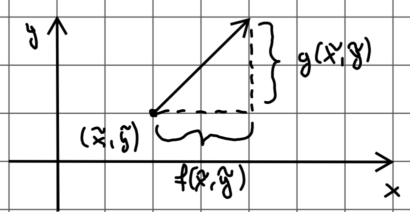
SISTEMI DINAMICI NEL PIANO

$$\begin{cases} \dot x = f(t, x, y) \\ \dot y = f(t, x, y) \end{cases}$$

$$m\ddot x = f(t, x, \dot x) \quad \equiv \quad \begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = \dfrac{f(t, x, y)}{m} \end{cases}$$

SISTEMA DINAMICO NEL PIANO CASO AUTONOMO

$$\begin{cases} \dot x = f(x, y) \\ \dot y = g(x, y) \end{cases}$$



SOLUZIONI STAZIONARIE (PUNTI EQUILIBRIO) → METODO ANALITICO

Sia $(\tilde x, \tilde y)$ t.c. $f(\tilde x, \tilde y) = g(\tilde x, \tilde y) = 0$

$$\begin{cases} \dot x = f(x, y) \\ \dot y = g(x, y) \\ x(t_0) = \tilde x \\ y(t_0) = \tilde y \end{cases} \Rightarrow \text{Sol} \quad \begin{cases} x(t) = \tilde x \\ y(t) = \tilde y \end{cases} \quad \forall t \quad \to \text{SOLUZIONE STAZIONARIA}$$

↳ $(\tilde x, \tilde y)$ PTO EQUILIBRIO

COSTANTI DEL MOTO

Considero una funzione $W: \underset{(x,y) \to W(x,y)}{F \to \mathbb{R}}$

$W(x,y)$ è una costante del moto (per un dato s.d. nel piano) se data una certa $(x(t), y(t))$ soluzione del s.D., $\forall t \in (a,b)$

$\Rightarrow W(x(t), y(t)) = \text{cost} = W(x(t^*), y(t^*))$ con $t^* \in (a,b)$

CURVA DI LIVELLO per $W(x,y)$ → $= \{(x,y) : W(x,y) = \text{cost}\}$

SISTEMI DINAMICI NEWTONIANI CONSERVATIVI NEL PIANO

↳ F dipende solo da posizione → F conservativa : ha potenziale $U(x)$ $\frac{\partial U(x)}{\partial x} = -f(x)$

Da seconda legge di Newton . $\ddot{x} = f$ $(m=1)$

$W(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + U(x)$

$\phi(t) = W(x(t), y(t))$

$\frac{d\phi(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) - W(x(t), y(t))}{\Delta t}$

$\to \frac{1}{\Delta t}\left[\boxed{W(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) - W(x(t), y(t+\Delta t))} + \boxed{W(x(t), y(t+\Delta t)) - W(x(t), y(t))}\right]$

$\to \frac{1}{\Delta t}\left[\cancel{\frac{1}{2}(y(t+\Delta t))^2} + U(x(t+\Delta t)) - \left[\cancel{\frac{1}{2}(y(t+\Delta t))^2} + U(x(t))\right]\right] = \frac{1}{\Delta t}\left[U(x(t+\Delta t)) - U(x)\right] \Rightarrow \frac{dU(x)}{dx}\dot{x}$

$\to \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{1}{2}y^2(t+\Delta t) + \cancel{U(x(t+\Delta t))} - \left[\frac{1}{2}y^2(t) + \cancel{U(x(t+\Delta t))}\right]\right] = \frac{1}{\Delta t}\cdot\frac{1}{2}\left[\underbrace{y^2(t+\Delta t) - y(t)}_{2y}\right] \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \frac{1}{2}\frac{d}{dy}(y^2)\cdot\dot{y}$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}W(x(t), y(t)) = \frac{dU(x)}{dx}\cdot\dot{x} + y\,\dot{y}$

$(x(t), y(t))$ soluzione sistema dinamico $\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \end{cases} \to -f(x)\,y + y\cdot f(x) = 0 = \frac{dW(x(t), y(t))}{dt}$ costante del moto

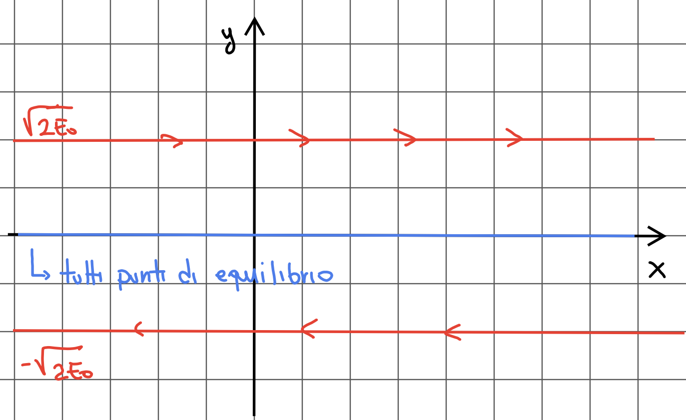
$\frac{dW(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial W}{\partial y}\dot{y}$

DIAGRAMMI DI FASE

es CORPO LIBERO

$U(x) = cost = 0$

$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$ $E(x,y) = \frac{1}{2}y^2$



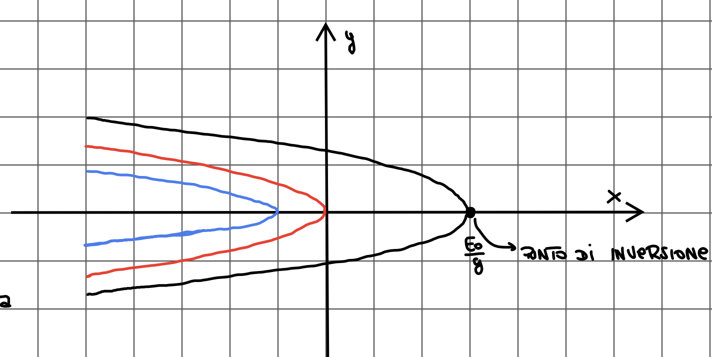
- $E_0 < 0$ → valore energetico non ammesso
- $E_0 = 0$ → $\{(x,y) \; E(x,y) = E_0 = 0\}$ $\frac{1}{2}y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \; \forall x \to \{(x,0)\}$ → Asse x

  $\begin{cases} \dot{x} = y = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$ → punti di equilibrio
- $E_0 > 0$ → $\frac{1}{2}y^2 = E_0$ $y = \pm\sqrt{2E_0}$

  $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$ → $>0 \Rightarrow$ velocità positiva mi muovo verso destra; → $<0 \Rightarrow$ velocità negativa mi muovo verso sinistra

es $U(x) = g\cdot x$, $g > 0$ $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = g \end{cases}$ $E(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + gx$

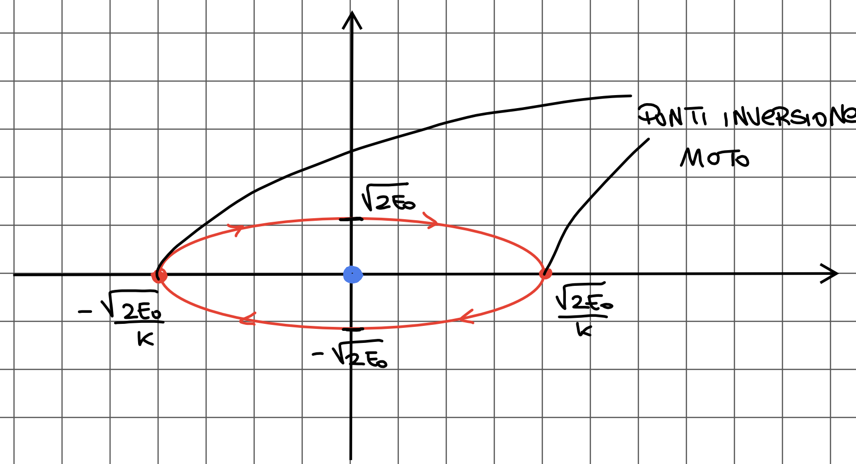
- $E_0 < 0$ → $\frac{1}{2}y^2 + gx = E_0 \Rightarrow x = \frac{E_0}{g} - \frac{1}{2g}y^2$
- $E_0 = 0$
- $E_0 > 0$



Così non dicono nulla come corpo si muove lungo traiettoria es. OSCILLATORE ARMONICO

$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -kx \end{cases}$

$E(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}kx^2$



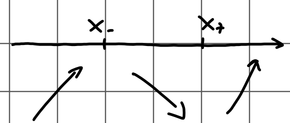
- $E_0 < 0 \rightarrow$ NON ESISTONO TRAIETTORIE AMMESSE
- $E_0 = 0 \rightarrow \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 0 \quad (x,y) = (0,0) \rightarrow$ PUNTO EQUILIBRIO $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
- $E_0 > 0 \quad \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E_0 \rightarrow$ Equazione ellisse

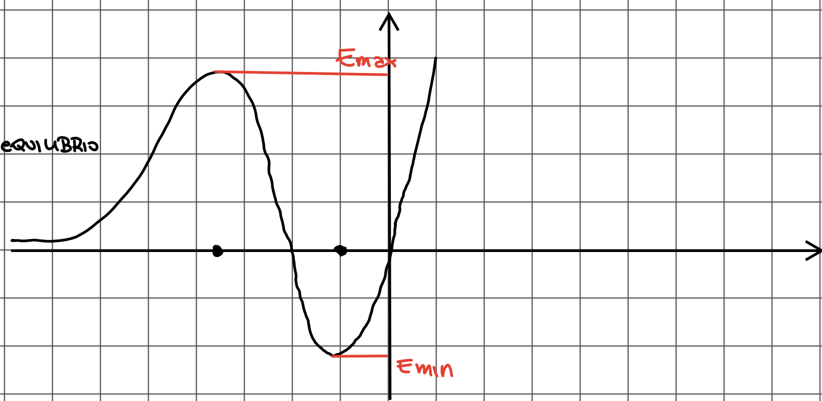
OSS $\rightarrow$ le x ammesse sono quelle tali per cui $E_0 \geq U(x)$

$\hookrightarrow \frac{1}{2}y^2 + U(x) = E_0 \rightarrow y^2 = 2(E_0 - U(x)) \rightarrow y = \pm\sqrt{2(E_0 - U(x))}$

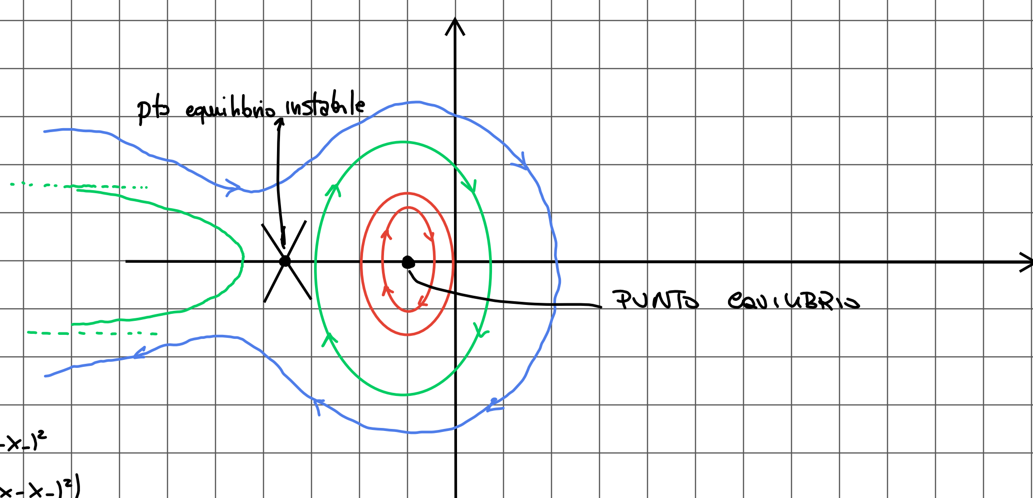
es $U(x) = (x^2 + 2x)e^x$

$\lim_{x \to -\infty} U(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} U(x) = +\infty \qquad \frac{dU}{dx} = 0 \rightarrow x_\pm = -2 \pm \sqrt{2}$





- $E_0 < E_{min} \Rightarrow$ no traiettorie ammesse
- $E_0 = E_{min} \rightarrow U(x) \leq E_{min} \Rightarrow x = x_+ \Rightarrow y = 0$ PTO EQUILIBRIO
- $E_{min} < E_0 \leq 0$
- $0 < E_0 < E_{max}$
- $E_0 > E_{max}$



Espansione Taylor di $U(x)$ attorno a $x = x_-$

$U(x) = U(x_-) + U'(x_-) \cdot (x - x_-) + \frac{1}{2}U''(x_-)(x - x_-)^2$

$U(x) = E_{max} + 0 + \frac{1}{2}U''(x_-)(x - x_-)^2 + o((x - x_-)^2)$

$E(x,y) = E_{max} \rightarrow \frac{1}{2}y^2 + \left[E_{max} + \frac{1}{2}U''(x_-)(x - x_-)^2\right] = E_{max}$

$U''(x_-) < 0 \Rightarrow \quad y^2 - |U''(x_-)|(x - x_-)^2 = 0 \Rightarrow \left(y - \sqrt{|U''(x_-)|}(x - x_-)\right)\left(y + \sqrt{U''(x_-)}(x - x_-)^2\right)$

$\hookrightarrow$ Due rette

APPROSIMAZIONE PICCOLE OSCILLAZIONI

$U(x) = U(x_+) + U'(x_+)(x - x_+) + \frac{1}{2}U''(x_+)(x - x_+)^2 + o((x - x_+)^2)$

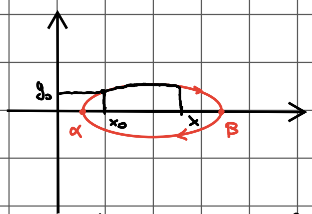
$= E_{min} + 0 + \frac{1}{2}U''(x_+)(x - x_+)^2 \qquad U''(x_+) > 0$

$$U(x) = E_{min} + \underbrace{\frac{1}{2} U''(x_1)}_{k} (x-x_1)^2 \Rightarrow \text{POTENZIALE MOLLA}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{U''(x_1)} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{U''(x_1)}} \quad \text{Periodo piccole oscillazioni}$$

TEMPO DI PERCORRENZA SULLE TRAIETTORIE

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{dU}{dx} \end{cases}$$



$$y = \pm\sqrt{2(E_0 - U(x))} \rightarrow \text{RAMO SUPERIORE}$$

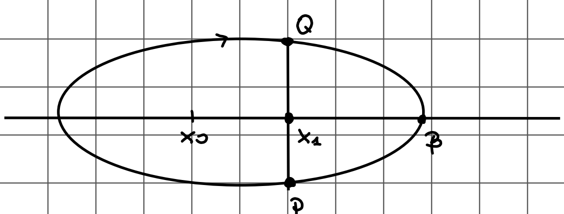
$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2(E_0-U(x))} \rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{2(E_0-U(\xi))}} = \int dt = t - t_0 \quad \text{TEMPO DI PERCORRENZA}$$

Per percorrere tratto di traiettoria da (x_0, y_0) a (x, y) impiego un tempo $t = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{2(E_0-U(\xi))}}$

$U(x) = E_0 \Leftrightarrow x = \alpha \vee x = \beta$

Se $x \rightarrow \beta$ $\lim_{x\rightarrow\beta} \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{2(E_0-U(\xi))}}$

$$E_0 - U(\xi) = E_0 - U(\beta) - U'(\beta)(\xi-\beta) + o(\xi-\beta) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2(E_0-U(\xi))}} \sim \frac{1}{\sqrt{2U'(\beta)(\xi-\beta)}}$$



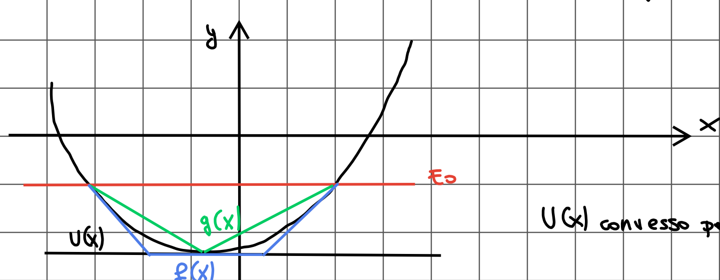
il tempo da β a P = il tempo da Q a β

PERIODO MOTO PERIODICO $\quad T(E_0) = 2\int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\xi}{\sqrt{2(E_0-U(\xi))}}$

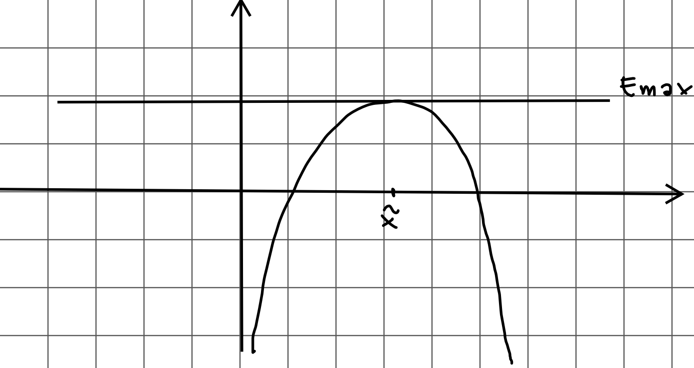
APPROSSIMAZIONE PER RISOLVERE INTEGRALE $\rightarrow$ cerco $f(x)$ e $g(x)$ t.c.
1) $f(x) \leq U(x) \leq g(x)$ per $\alpha < x < \beta$
2) $E_0 - f(x) \geq 0 \wedge E_0 - g(x) \geq 0$ per $x \in [\alpha, \beta]$

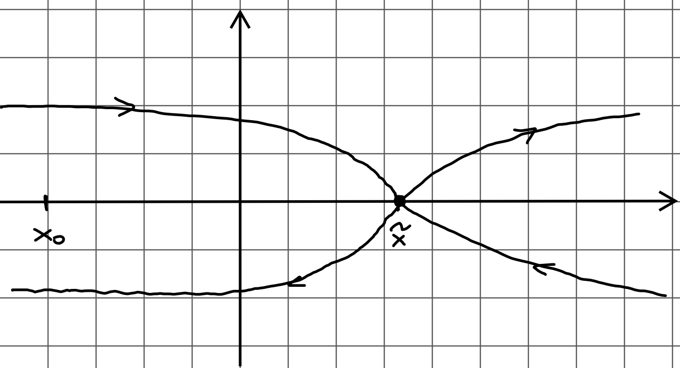
$$\Rightarrow \sqrt{E_0 - g(x)} \leq \sqrt{E_0 - U(x)} \leq \sqrt{E_0 - f(x)}$$

$$\rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2dx}{\sqrt{2(E_0-f(x))}} \leq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2dx}{\sqrt{2(E_0-U(x))}} \leq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2dx}{\sqrt{2(E_0-g(x))}} \Rightarrow T_f(E_0) \leq T_U(E_0) \leq T_g(E_0)$$



$U(x)$ convesso per $x \in [\alpha, \beta] \Rightarrow U''(x) > 0$ per $x \in [\alpha, \beta]$





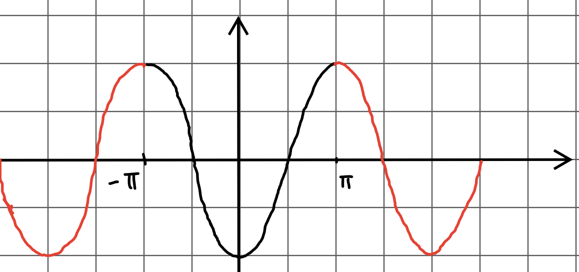
$E_0 = E_{max}$

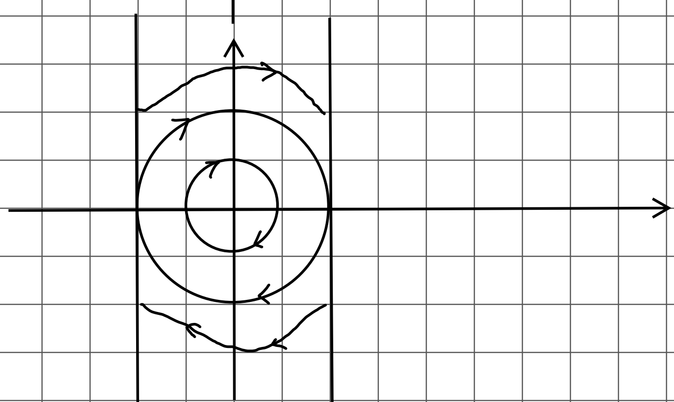
$$T_{x \to \tilde{x}} = \lim_{x \to \tilde{x}} \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{2(E_0 - U(\xi))}} \qquad U(\xi) = U(\tilde{x}) + U'(\tilde{x})(x-\tilde{x}) + \frac{1}{2} U''(\tilde{x})(x-\tilde{x})^2 + o((x-\tilde{x})^2)$$

$\Rightarrow T = +\infty \rightarrow$ non arrivo mai a $\tilde{x}$ es. Pendolo semplice

PENDOLO SEMPLICE

$$\begin{cases} \dot{\theta} = y \\ \dot{y} = -\frac{dU(\theta)}{d\theta} \end{cases} \qquad U(\theta) = -\frac{g}{l}\cos\theta \qquad \theta \in [-\pi, \pi]$$





- $E_0 < -\frac{g}{l} \rightarrow$ NO TRAIETTORIE
- $E_0 = -\frac{g}{l} \rightarrow (0,0)$ P.TO DI EQUILIBRIO
- $-\frac{g}{l} < E_0 < \frac{g}{l}$
- $E_0 = \frac{g}{l}$ SEPARATRICE $\rightarrow (\pi, 0)$ P.TO DI EQUILIBRIO
  ↳ 3 traiettorie distinte
- $E_0 > \frac{g}{l}$

STABILITA' DEI PUNTI DI EQUILIBRIO (PER SISTEMI DINAMICI NEWTONIANI CONSERVATIVI NEL PIANO)

- PUNTO DI EQUILIBRIO STABILE $\rightarrow U''(\tilde{x}) > 0$
- PUNTO DI EQUILIBRIO INSTABILE $\rightarrow U''(x) < 0$

DIAGRAMMA DI BIFORCAZIONE → riassume posizione e stabilita' punto di equilibrio al variare di un parametro

SISTEMI DINAMICI NEL PIANO caso autonomo

$$\begin{cases} x = f(x,y) \\ y = g(x,y) \end{cases}$$

localmente tutti i punti non di equilibrio sono equivalenti

Teo SCATOLA DI FLUSSO

Si consideri sistema dinamico nel piano (autonomo), Sia $(\tilde{x},\tilde{y})$ non di equilibrio $[f(\tilde{x},\tilde{y}) \neq 0 \wedge g(\tilde{x},\tilde{y}) \neq 0]$

$\Rightarrow \exists$ U intorno di $(\tilde{x},\tilde{y})$ e un opportuno cambio di coordinate (RETTIFICAZIONE) $(z(x,y); w(x,y)) \cdot U \to \mathbb{R}^2$

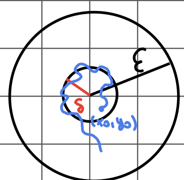
t.c. il sistema riscritto per z, w diventa → $\begin{cases} z = 1 \\ w = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{l} w(t) = w(0) = cost \\ z(t) = t + z(0) \end{array}$

PUNTO DI EQUILIBRIO STABILE NEL PIANO SECONDO LYAPUNOV

Un punto di equilibrio stabile del sistema dinamico $(\tilde{x},\tilde{y})$ si dice STABILE se:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$. l'evoluto temporale di un qualsiasi punto $(x_0,y_0) \in B_\delta(\tilde{x},\tilde{y})$ rimane nella bolla di raggio ε centrato in $(\tilde{x},\tilde{y})$

Un punto di equilibrio si dice instabile se non è stabile



LINEARIZZAZIONE DI UN SISTEMA DINAMICO NEL PIANO ATTORNO AD UN P.TO DI EQUILIBRIO $(\tilde{x},\tilde{y})$

$$\begin{cases} x = f(x,y) \\ y = g(x,y) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \cancel{f(\tilde{x},\tilde{y})}^{\,0} + \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x},\tilde{y})(x-\tilde{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y})(y-\tilde{y}) + o()$$

$$g(x,y) = \cancel{g(\tilde{x},\tilde{y})}^{\,0} + \frac{\partial g}{\partial x}(\tilde{x},\tilde{y})(x-\tilde{x}) + \frac{\partial g}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y})(y-\tilde{y}) + o()$$

cambio di variabile → $u = x - \tilde{x} \quad v = y - \tilde{y}$

$$\begin{cases} \dot{u} = \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x},\tilde{y}) \cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y})\, v + o() \\ \dot{v} = \dot{y} = \frac{\partial g}{\partial x}(\tilde{x},\tilde{y})\, u + \frac{\partial g}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y})\, v + o() \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il sistema si approssima come $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x},\tilde{y}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y}) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\tilde{x},\tilde{y}) & \frac{\partial g}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y}) \end{pmatrix}}_{J} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ LINEARIZZAZIONE

STABILITA' → studio sistema lineare

1) Due radici reali distinte

2) Due radici complesse coniugate

3) Due radici reali coincidenti

1) $\lambda_1\ \lambda_2$ reali distinti $\Psi_1\ \Psi_2$ autovalori corrispondenti

$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = u(t)\, e_1 + v(t)\, e_2 \qquad \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \xi(t) \cdot \Psi_1 + \eta(t) \cdot \Psi_2$

$\binom{\dot u}{\dot v} = J\binom{u}{v} \rightsquigarrow \binom{\dot\xi}{\dot\eta} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\binom{\xi}{\eta} \Rightarrow \begin{cases}\dot\xi = \lambda_1 \xi\\ \dot\eta = \lambda_2\eta\end{cases}$

Soluzione $\rightarrow$ $\xi(t) = \xi_0 e^{\lambda_1 t}$

$\eta(t) = \eta_0 e^{\lambda_2 t}$

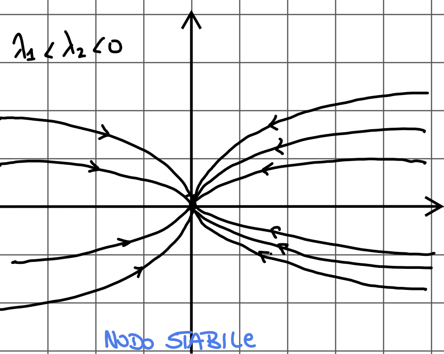
$d((\xi,\eta),(0,0))^2 := \xi^2 + \eta^2 = \xi_0^2 e^{2\lambda_1 t} + \eta_0^2 e^{2\lambda_2 t}$

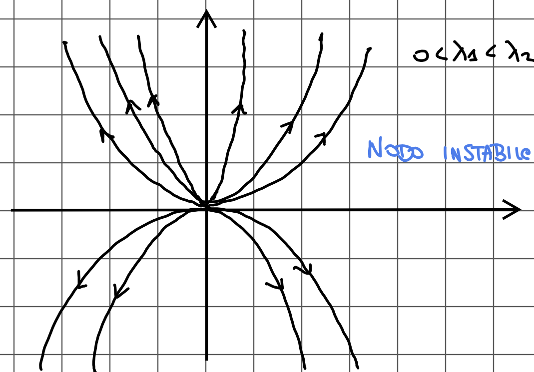
Se $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow d \to +\infty$

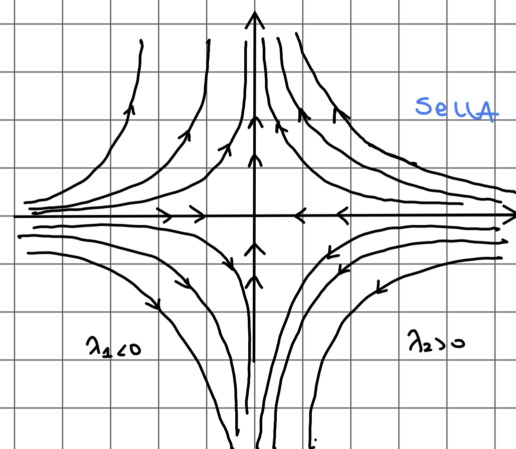
Se $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow d \to 0$

Se λ_1, λ_2 discordi $\Rightarrow d \to +\infty$

$\left(\frac{\xi(t)}{\xi_0}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \left(e^{\lambda_1 t}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \left(\frac{\eta(t)}{\eta_0}\right) = e^{\lambda_2 t} \quad \Rightarrow \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \frac{\eta}{\eta_0}$







I METODO LYAPUNOV

Teo (HARTMANN - GROSSMAN)

Sia $(\tilde x, \tilde y)$ punto di equilibrio di un sistema dinamico, sia $J(\tilde x, \tilde y)$ matrice jacobiana calcolata in $(\tilde x, \tilde y)$

Se nessun autovalore di $J(\tilde x, \tilde y)$ ha parte reale nulla $\Rightarrow$ - Se entrambi hanno parte reale $< 0 \Rightarrow (\tilde x, \tilde y)$ è STABILE

- Se entrambi hanno parte reale $> 0 \Rightarrow (\tilde x, \tilde y)$ è INSTABILE

II METODO LYAPUNOV → (dimostrazione facoltativa)

Sia $(\tilde x, \tilde y)$ P.to equilibrio sistema dinamico, sia $W(x,y) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $W \in C^1$

$\exists\, U$ intorno di $(\tilde x, \tilde y)$ t.c. - $\forall (x,y) \neq (\tilde x, \tilde y)$ $(x,y) \in U \Rightarrow W(x,y) > W(\tilde x, \tilde y)$

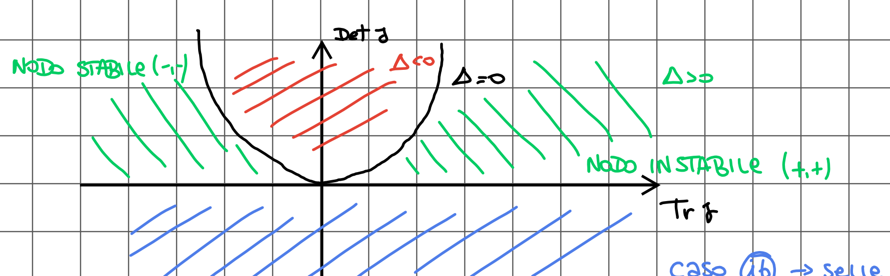
- $\frac{\partial W}{\partial x} f(x,y) + \frac{\partial W}{\partial y} g(x,y) \leq 0$ lungo soluzioni $(x(t), y(t))$ del sistema dinamico con $(x(t), y(t)) \in U$

$\phi(t) = W(x(t), y(t)) \qquad \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x}\cdot \dot x + \frac{\partial W}{\partial y} \dot y \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial x} f + \frac{\partial W}{\partial y}\cdot g \leq 0$

$\Rightarrow (\tilde x, \tilde y)$ STABILE SECONDO LYAPUNOV

i) AUTOVALORI REALI DISTINTI <
(a) segno uguale
(b) segno opposto
(c) $\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 \neq 0$

$\lambda^2 - \mathrm{Tr} J\, \lambda + \det J = 0 \quad \Rightarrow \Delta = (\mathrm{Tr} J)^2 - 4 \det J$



ii) AUTOVALORI COMPLESSI CONIUGATI $\qquad J\Psi = \lambda\Psi$

$\bar J \bar\Psi = \bar\lambda \bar\Psi$

Cerco cambio di base per avere soluzioni reali

$\underline{w} = \frac{1}{2}(\Psi + \overline{\Psi}) \quad \underline{z} = \frac{1}{2i}(\Psi - \overline{\Psi})$

$\delta \underline{w} = \frac{1}{2}\delta(\Psi + \overline{\Psi}) = \frac{1}{2}(\lambda\Psi + \overline{\lambda}\overline{\Psi}) \qquad \lambda = a + ib \; ; \; \overline{\lambda} = a - ib$

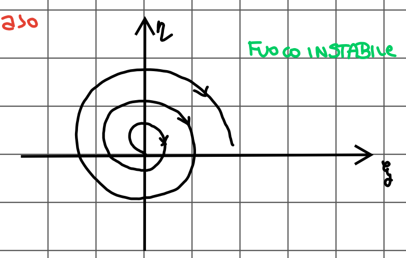
$\Rightarrow \delta \underline{w} = \frac{1}{2}(a+ib)\Psi + \frac{1}{2}(a-ib)\overline{\Psi} = a\left(\frac{1}{2}(\Psi + \overline{\Psi})\right) - b\left(\frac{1}{2i}(\Psi - \overline{\Psi})\right) \Rightarrow \delta\underline{w} = a\underline{w} - b\underline{z}$: in modo analogo $\delta\underline{z} = b\underline{w} + a\underline{z}$

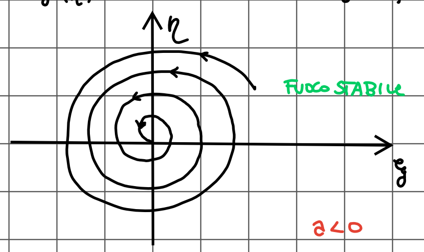
$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \xi\underline{w} + \eta\underline{z} = \delta\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

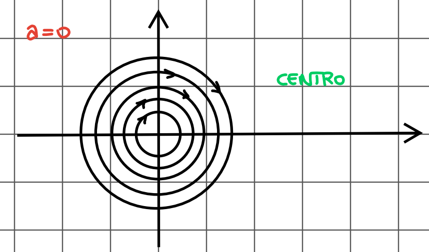
$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \xi\underline{w} + \eta\underline{z} = \xi(a\underline{w} - b\underline{z}) + \eta(b\underline{w} + a\underline{z}) = \underline{w}(\xi a + \eta b) + \underline{z}(-b\xi + \eta a)$

$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

Passo a coordinate polari $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, $\theta = \arctg\left(\frac{\xi}{\eta}\right) \rightarrow \begin{cases} \dot{\rho} = a\rho \\ \dot{\theta} = b \end{cases} \Rightarrow \rho(t) = \rho_0 e^{at}, \; \theta(t) = \theta_0 + bt$



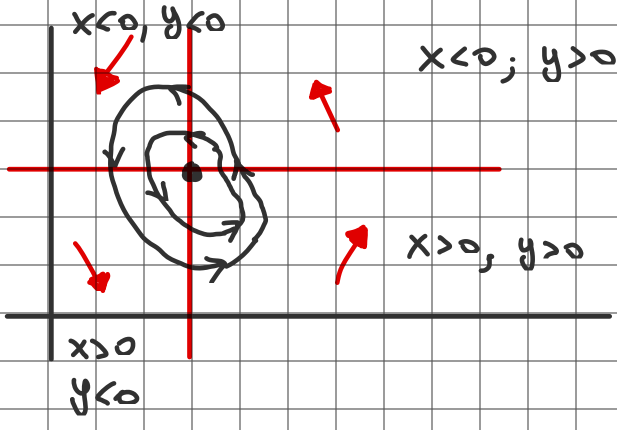




LOKTA - VOLTERRA (prede / predatore)

x prede $\quad y$: predatore $\qquad x, y \in \mathbb{R}^+$

$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x - \lambda_4 xy \\ \dot{y} = -\lambda_2 x + \lambda_3 xy \end{cases} \qquad \lambda_i > 0 \;\; \forall i = 1, \dots, 4$



Punti di equilibrio

$\begin{cases} \lambda_1 x - \lambda_4 xy = 0 \\ -\lambda_2 y + \lambda_3 xy = 0 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x(\lambda_1 - \lambda_4 y) = 0 \rightsquigarrow y = \frac{\lambda_1}{\lambda_4} \\ y(\lambda_3 x - \lambda_2) = 0 \rightsquigarrow x = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \end{cases}$

$(x(t), y(t)) \rightarrow \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}, \frac{\lambda_1}{\lambda_4}\right)$ · costante $\rightarrow$ EQUILIBRIO BIOLOGICO

$\begin{cases} \lambda_1 x - \lambda_4 xy > 0 \Rightarrow y < \frac{\lambda_1}{\lambda_4} \\ -\lambda_2 y + \lambda_3 xy > 0 \Rightarrow x > \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \end{cases}$

$$\begin{cases} x\left(\dfrac{\lambda_2-\lambda_3 x}{x}\right) = \cancel{x}(\lambda_1-\lambda_4 y)\dfrac{(\lambda_2-\lambda_3 x)}{\cancel{x}} \\ y\dfrac{(\lambda_1-\lambda_4 y)}{y} = -\cancel{y}(\lambda_2-\lambda_3 x)\dfrac{(\lambda_1-\lambda_4 y)}{\cancel{y}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_2\frac{\dot{x}}{x} - \lambda_3 \dot{x} + \lambda_1\frac{\dot{y}}{y} - \lambda_4 \dot{y} = 0 = \lambda_2 \frac{d}{dt}(\ln x) - \lambda_3\frac{d}{dt}x + \lambda_1\frac{d}{dt}(\ln y) - \lambda_4\frac{d}{dt}y$$

$\rightarrow \dfrac{d}{dt}\left[\lambda_2 \ln x - \lambda_3 x + \lambda_1 \ln y - \lambda_4 y\right] = 0$ $\rightarrow$ Funzione COSTANTE del MOTO

$G(x,y) = \lambda_2 \ln x - \lambda_3 x + \lambda_1 \ln y - \lambda_4 y$ (1)

II metodo $\rightarrow$ (1) + (2) $\Rightarrow$ P.TO eq stabile

$\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}, \dfrac{\lambda_1}{\lambda_4}\right)$ PTO di minimo assoluto (2)

I LEGGE LOKTA-VOLTERRA $\rightarrow$ EVOLUZIONE PERIODICA

II LEGGE LOKTA-VOLTERRA $\rightarrow \Delta T = T_2 - T_1 > 0$

$$\bar{f}_{\Delta t} := \int_{t_1}^{t_2} \frac{f(t)\,dt}{T_2 - T_1}$$

$\bar{y}_{\tau\tilde{G}} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_4}$ $\quad \bar{x}_{\tau\tilde{G}} = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}$ $\quad \tau\tilde{G} \rightarrow$ periodo del moto per $\tilde{G} > G_{MIN}$

Dim

$\dot{x} = x(\lambda_1 - \lambda_4 y)$ $\quad \displaystyle\int_{T_1}^{T_2} \frac{\dot{x}}{x}\,dt = \int_{T_1}^{T_2} (\lambda_1 - \lambda_4 y)\,dt$

$$\ln\left(\frac{x(T_2)}{x(T_1)}\right) = \lambda_1(T_2 - T_1) - \lambda_4 \int_{T_1}^{T_2} y(t)\,dt$$

$$\Rightarrow 0 = \lambda_1 \tau\tilde{G} - \lambda_4 \int_{T_1}^{T_2} y(t)\,dt$$

Se $T_2 = T_1 + \tau\tilde{G} \Rightarrow x(T_2) = x(T_1)$ $\quad \dfrac{1}{\tau\tilde{G}}\displaystyle\int_{T_1}^{T_2} y(t)\,dt = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_4}$

III LEGGE LOTKA-VOLTERRA → Pesca indiscriminata

⇒ Aumento numero medio prede e diminuisce numero medio predatori

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x - \lambda_4 xy - \delta x \\ \dot{y} = -\lambda_2 y + \lambda_3 xy - \delta y \end{cases} \qquad \delta > 0$$

$\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 - \delta \qquad \tilde{\lambda}_2 = \lambda_2 + \delta \qquad \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \tilde{\lambda}_1 x - \lambda_4 xy \\ \dot{y} = -\tilde{\lambda}_2 y + \lambda_3 xy \end{cases} \qquad \bar{x} = \dfrac{\tilde{\lambda}_2}{\lambda_3} \qquad \bar{y} = \dfrac{\tilde{\lambda}_1}{\lambda_4}$

$\bar{x}$ ↓ aumentano — $\bar{y}$ ↓ diminuiscono

MODELLO SIR

S sani
I · infetti
R · guariti/deceduti

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta S I \\ \dot{I} = \beta S I - \alpha I \\ \dot{R} = \alpha I \end{cases} \qquad \begin{matrix} \beta > 0 \\ \alpha > 0 \end{matrix}$$

$N = S + I + R$
$\dot{N} = \dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = 0 \qquad N(t) = N(0)$

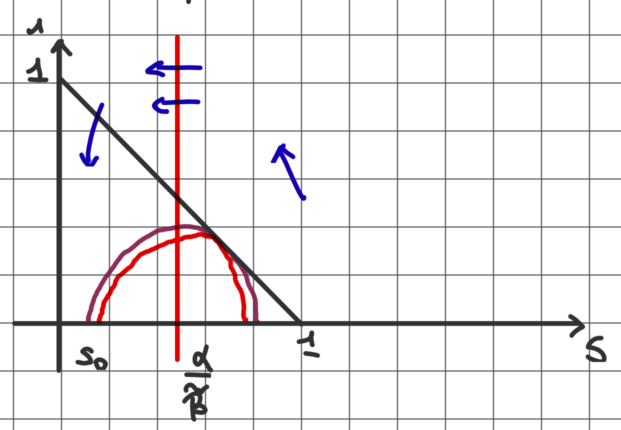
$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_3 = \lambda_4 = \beta \qquad \lambda_2 = \alpha$

Asse $I = 0$ ⇝ punti equilibrio $\forall S$

$s = \dfrac{S}{N}, \quad i = \dfrac{I}{N} \qquad i, s \in (0,1) \qquad \begin{cases} \dot{s} = \dfrac{\dot{S}}{N} \\ \dot{i} = \dfrac{\dot{I}}{N} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{s} = -(\beta N) s i = -\tilde{\beta} s i < 0 \\ \dot{i} = \tilde{\beta} s i - \alpha i \end{cases}$$

$\dot{i} > 0 \iff s > \dfrac{\alpha}{\tilde{\beta}}$



$i + s - \dfrac{\alpha}{\tilde{\beta}} \ln(s) = E$ → Costante del moto

$\lim_{t \to +\infty} i(t) = 0 \qquad \lim_{t \to +\infty} s(t) = s_\infty$

$$c(i,s) = \tilde{\beta}(i+s) - \alpha \ln(s)$$

$$c(i(t), s(t)) = c(i(0), s(0))$$

ipotesi ragionevolezza $\rightarrow i(0) = \varepsilon$

$\rightarrow s(0) = 1 - \varepsilon$

$$c = \tilde{\beta} - \alpha \ln(s(0)) = \tilde{\beta} - \alpha \ln(1-\varepsilon)$$

$\downarrow$

$$c(t) = c(\infty) = \tilde{\beta} S_\infty - \alpha \ln(S_\infty)$$

$$\Rightarrow \tilde{\beta} - \alpha \ln(1-\varepsilon) = \tilde{\beta}(S_\infty) - \alpha \ln(S_\infty)$$

↳ LAMBERT