Matematica per la fisica

Marco Militello

Indice

Parte I

Analisi complessa

Capitolo 1

Numeri complessi

Def. Un numero complesso è una coppia ordinata (a,b) con $a,b \in \mathbb{R}$ tale che siano definite

Addizione	$[(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)]$
Moltiplicazione	$[(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bd)]$
Relazione di equivalenza	$[(a,b)=(c,d) \iff a=c\; b=d]$

Teorema.

$$\mathbb{C}=\{(a,b)\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$$

è un campo Abeliano rispetto addizione e moltiplicazione

Oss.

- Proprietà commutativa e associativa seguono da quelle dei reali
- Identità additiva $\quad (0)\to(0,0)$
- Esiste opposto: $\quad (a,b)+(-a,-b)=(0,0)$
- Identità moltiplicativa: $\quad (1)\to(1,0)$
- Esiste inverso: $\quad (a,b)\frac{1}{(a,b)}=(1,0)\;\frac{1}{(a,b)}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$

Teorema.
Il sottoinsieme $\mathbb{C}_0=\{(a,0)\,|\,a\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{C}$ è un campo rispetto ad addizione e moltiplicazione
$\mathbb{C}_0$ è ISOMORFO a $\mathbb{R}$

Def. Unità immaginaria

$$(0,1)=i$$

$(0,1)(0,1)=(-1,0) \qquad (0,-1)=-i$

Def (Forma cartesiana).

$$z=(a,b)=a+ib \qquad a,b\in\mathbb{R};\; z\in\mathbb{C}$$

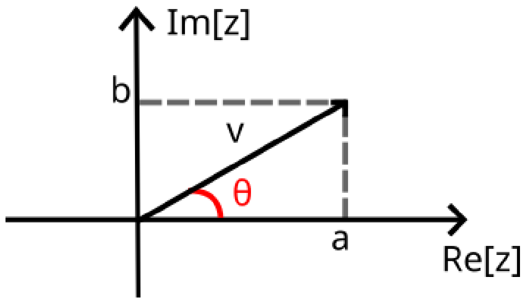
$a=Re\{z\} \quad b=Im\{z\}$

Def (Coniugazione complessa).

$$\bar{z}=a-ib=(a,-b) \quad z=a+ib=(a,b)$$

Operazioni notevoli:

- $z+\bar{z}=2Re\{z\}=2a$
- $z-\bar{z}=2iIm\{z\}=2ib$
- $z\bar{z}=a^2+b^2=|z|^2$



1.1 Piano complesso (Armand-Gauss)

$$|\vec{v}| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\begin{cases} a = |z| \cos\theta \\ b = |z| \sin\theta \end{cases}$$

Somma come somma vettoriale

Def (**Coordinate polari**).

$$z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad r = \sqrt{a^+ b^2} \quad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\arg(z) = \theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & a < 0 \; b > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & a < 0 \; b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & a = 0 \; b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & a = 0 \; b < 0 \end{cases}$$

Formula di Eulero

Estendere e^γ con $\gamma \in \mathbb{R}$ a e^z con $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

Oss.

$$z = re^{i\theta} \to \bar{z} = re^{-i\theta}$$
$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Formula di De Moivre

Se $n \in \mathbb{Z}$ si ha:

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Radice n-esima

Se $n \in \mathbb{Z}$ si ha:

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

Allora esistono n diverse radici si z se $|z| \neq 0$

Equazioni di secondo grado in $\mathbb{C}$

$$az^2 + bz + c \qquad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R} \; z \in \mathbb{C}$$

Ha sempre 2 soluzioni

* Se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0 \; \Rightarrow 2$ soluzioni reali
* Se $\Delta < 0 \; \Rightarrow -\Delta > 0 \Rightarrow z_{1,2} \in \mathbb{C}$ e $z_1 = \bar{z}_2$

Logaritmo

$$\log(z) = \log(r) + i\phi$$

Così definito il logaritmo è una funzione palindroma, cioè assume valori differenti a seconda $\theta \mapsto \theta + 2k\pi$
Allora scelgo θ per aver $\log(z)$ univoco

$$\theta \in \begin{cases} [0, \pi] & y > 0 \\ [-\pi, 0] & y < 0 \end{cases}$$

N.B. $\log(z)$ è discontinuo per $x \in (-\infty, 0]$
Allora escludo $(-\infty, 0] \Rightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0) \Rightarrow$ BRANCH CUT

Definiamo

$$\log(z) = \log(r) + i \arg(z)$$

$\overline{\log(z)} = \log(\bar{z})$

Norma

Su $\mathbb{C}$ è definita la norma $|z|$ che soddisfa le proprietà di una distanza $d(a, b) \quad a, b \in \mathbb{C}$

- $d(a, b) = d(b, a)$
- $d(a, b) = 0 \iff a = b$
- $\forall c \in \mathbb{C} \Rightarrow d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c)$

É possibile allora definire la distanza

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Def (Successione di Cauchy).

$$\{z_k\} \text{ tale che } \forall \epsilon > 0 \; \exists N_\epsilon > 0 \mid \forall n, m > N_\epsilon \Rightarrow |z_n - z_m| < \epsilon$$

N.B.

1. $\{z_k\}$ è di Cauchy se lo sono anche $\{Re(z_k)\}$ e $\{Im(z_k)\}$
2. Tutte le successioni convergenti sono di Cauchy; in $\mathbb{C}$ è vero anche il viceversa perchè $\mathbb{C}$ è completo

Def (Serie su $\mathbb{C}$).
La serie $\sum_n z_n$ con $z_n \in \mathbb{C}$ converge a $z \in \mathbb{C}$ se la successione delle somme parziali $\{S_n\}$ converge a z

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} z_n$$

Oss.

- Condizione necessaria convergenza: $\quad z_n \to 0$ per $n \to \infty$ cioè $\begin{cases} Re(z_n) \to 0 \\ Im(z_n) \to 0 \end{cases}$
- Condizione sufficiente: CONVERGENZA ASSOLUTA cioè
  Se converge $\sum |z_n|$ su $\mathbb{R} \Rightarrow$ converge anche $\sum z_n$ su $\mathbb{C}$

Def.

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\theta)^n$$

Oss. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Def (Serie di potenze).
$S(z, z_0)$ con $z, z_0 \in \mathbb{C}$ e z_0 centro si ha:

$$S(z, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad an = cost \in \mathbb{C}$$

Convergenza per ogni z fissato $\Rightarrow$ CONVERGENZA PUNTALE
Oss.

$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid S(z, z_0) \text{ è convergente}\}$$

E non è mai vuoto $\to z_0 \in E$ e $S(z, z_0) = a_0$ cioè converge

Def (Raggio di convergenza).

$$D = \{|z - z_0| \ \forall z \in E\}$$

Raggio di convergenza:

$$R = \sup_{z \in E} D$$

cioè la maggior distanza da z_0 per cui la serie converge

Oss.

- Le serie di potenze su $\mathbb{C}$ convergono in un cerchio di raggio R
- Se la serie converge solo in $z = z_0 \Rightarrow R = 0$
- Se la serie converge $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow R = \infty$

Calcolo del raggio di convergenza

1. $R = \left(\lim_{n \to \infty} \sup_{k \geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}} \right)^{-1}$
   Si riduce a $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{|a_n|^{\frac{1}{n}}}$ se tale limite esiste
2. $R = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ se tale limite esiste

Calcolato $R \Rightarrow \begin{cases} |z - z_0| < R & \text{la serie converge} \\ |z - z_0| > R & \text{la serie diverge} \\ |z - z_0| = R & \text{si studia caso per caso} \end{cases}$

Oss. La derivata di una serie di potenze con raggio di convergenza R ha lo stesso raggio di convergenza

Corollario. Una serie di potenze è infinitamente differenziabile all'interno del suo raggio di convergenza

Capitolo 2

Funzioni complesse

Def (Funzione complessa).
Una funzione complessa è una mappa

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

che associa un punto $z \in \mathbb{C}$ a un punto $w = f(z) \in \mathbb{C}$

$$f(z) = Re(f(z)) + iIm(f(z)) \Rightarrow f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

u, v funzioni su $\mathbb{R}^2$ di $x, y \in \mathbb{R}$

Def (Continuità).
$f(z)$ è continua in $z_0 \in \mathbb{C}$ se è definita in un intorno di z_0 ed esiste finito il limite

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Def (Limite).
$f(z_0)$ è il limite di $f(z)$ per $z \to z_0$ se:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid |z - z_0| < \delta \text{ se } |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

N.B. Come per $\mathbb{R}^2$ il limite deve essere indipendente dal cammino

Def (Continuità su un dominio).
$f(z)$ è continua su un $D \subseteq \mathbb{C}$ se è continua $\forall z \in D$

Def (Derivata si una funzione continua).
$f(z)$ è differenziabile se esiste il limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = \frac{df}{dz}\Big|_{z_0}$$

N.B. Anche la derivata è indipendente dal cammino

Def (Funzione olomorfa).
Una funzione differenziabile su $D \subseteq \mathbb{C}$ si dice OLOMORFA

Proprietà funzioni olomorfe

- $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$
- $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)} \quad g(z) \neq 0$
- Funzione composta: $\frac{d}{dz}(f \circ g)(z) = f'(g(z))g'(z)$
- Derivata funzione inversa: data $w = f(z)$ olomorfa in z_0 con $f'(z_0)$
  $h(w) = z = f^{-1}(w)$ è olomorfa in $w_0 = f(z_0)$ e $h'(w_0) = \frac{1}{f'(h(w_0))} = \frac{1}{f'(z_0)}$

2.1 Condizioni di Cauchy-Riemann

Condizioni necessarie e sufficienti per verificare differenziabilità

Teorema.
$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ tale che u, v abbiano derivate parziali continue in un intorno di $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\delta_x f(z_0) = i\delta_y f(z)$$

cioè:

- $\delta_x u(x, y)\big|_{(x_0,y_0)} = \delta_y v(x, y)\big|_{x_0,y_0}$
- $\delta_y u(x, y)\big|_{(x_0,y_0)} = -\delta_x v(x, y)\big|_{x_0,y_0}$

Oss. Le condizioni di Cauchy-Riemann permettono di scrivere le derivate complesse di $f(z) = u + iv$ in 4 modi equivalenti:

$$f'(z) = \begin{cases} \delta_x u + i\delta_x v \\ \delta_x u - i\delta_y v \\ \delta_x u - i\delta_y u \\ \delta_y u + i\delta_x u \end{cases}$$

Def (Operatori differenziali in $\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}$).

$$\delta_z = \frac{1}{2}(\delta_x - i\delta_y)$$
$$\delta_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\delta_x + i\delta_y)$$

Teorema.
Se $f(z)$ è olomorfa su un dominio $D \subseteq \mathbb{C} \Rightarrow \delta_{\bar{z}} f(z) = 0$

Def (Funzioni anti-olomorfe).
Una funzione si dice anti-olomorfa se

$$\frac{\delta}{\delta z} f(z) = 0$$

Oss. Si può dimostrare che se $f(z)$ è antiolomorfa $\Rightarrow \bar{f}(z)$ è olomorfa

Def (Funzioni trigonometriche).

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \qquad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

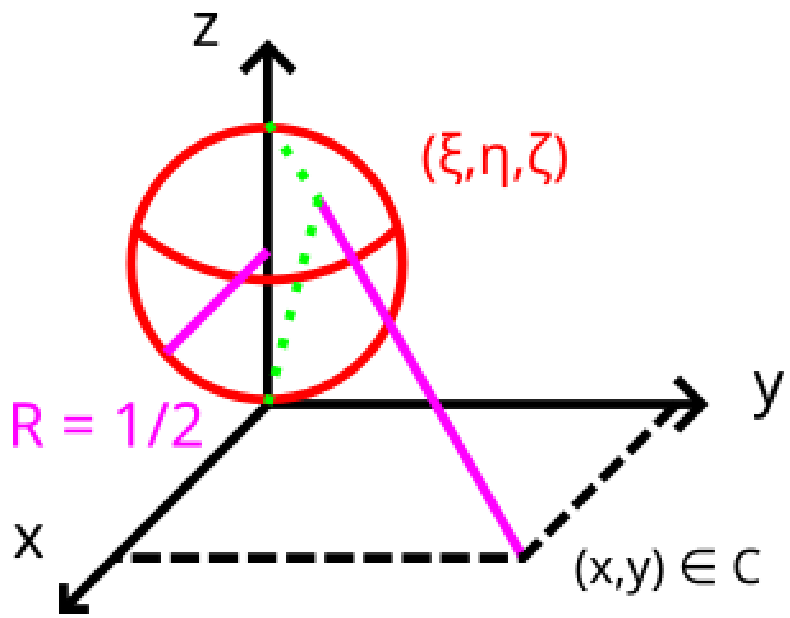
Def (Funzioni iperboliche).

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}) \qquad \sinh z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z})$$

2.2 Proiezione stereografica e punto all'infinito

I numeri complessi sul piano $\mathbb{C}$ possono essere rappresentati come punti sulla superficie di una sfera

$$S^2 = \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \;\middle|\; \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}$$



$$x = \frac{\xi}{1-\zeta} \qquad y = \frac{\eta}{1-\zeta}$$

$$\xi = \frac{x}{x^2+y^2+1} \qquad \eta = \frac{y}{x^2+y^2+1} \qquad \zeta = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$$

$\zeta = 1 \Rightarrow x = y = \infty \to (0,0,1)$ è chiamato PUNTO ALL'INFINITO

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2 = \hat{\mathbb{C}} \to \text{ COMPATTIFICAZIONE di } \mathbb{C}$$

$\hat{\mathbb{C}}$ è isomorfo a una sfera

N.B. Avremmo potuto usare la proiezione del polo sud $(0,0,-1)$; in questo caso il punto $z = \infty$ sarebbe stato mappato su $w = \frac{1}{x+iy} = 0$

Quindi per studiare $f(z)$ definita su $\mathbb{C}$ e capire il suo andamento a $z = \infty$ posso studiare $f\left(\frac{1}{w}\right)$ attorno a $w = \infty$ con $w = \frac{1}{z}$

Se $f\left(\frac{1}{w}\right)$ è olomorfa o singolare in $w = 0 \Rightarrow f(z)$ è olomorfa o singolare in $z = \infty$

Def (Intera).
Se $f(z)$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C} \Rightarrow$ si dice INTERA

Def (Singolarità).
I punti in cui $f(z)$ (non intera) non è differenziabile o non è definita si dicono SINGOLARITÁ

2.3 Singolarità

Singolarità isolate

Se $f(z)$ è olomorfa in un intono di $D(z_0, \epsilon) = \{z \mid |z - z_0| < \epsilon\}$ di z_0 ma non in z_0; se $f(z_0)$ non è definta o non differenziabile

1. **Singolarità rimovibile**
   Se $f(z_0)$ non è definta, ma esiste finito
   $$\lim_{z \to z_0} f(z)$$
   posso estendere f in z_0
   $$f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)$$
   Con questa estensione $f(z)$ estesa è olomorfa in $D \cup \{z_0\}$

2. **Singolarità di tipo polo di ordine k**
   Se esiste finito
   $$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = a \neq 0 \quad k \in \mathbb{N} \geq 1$$
   allora $f(z)$ ha un polo di ordine k

   - K=1 $\to$ Polo semplice
   - k=2 $\to$ Polo doppio

   Oss. Nelle vicinanze di un polo di ordine k si può scrivere
   $$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \quad g(z) \text{ olomorfa e non nulla in } z_0$$
   Oss. dato un polo di ordine k
   $$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = \infty \quad \forall k < n$$
   In particolare per $k = 0$
   $$\lim_{z \to z_0} f(z) = 0 \text{ la funzione diverge ad un polo}$$

3. **Singolarità essenziale**
   Singolarità non rimovibile neanche moltiplicando per $(z - z_0)^n$ con $n \to \infty$
   Se $f(z_0)$ è singolarità essenziale di $f(z)$ allora non esiste $\lim_{z \to z_0}$
   $f(z)$ oscilla violentemente tanto più mi avvicino a z_0 a seconda del cammino; $f(z)$ può assumere qualsiasi valore

Teorema (**Weierstrass**).
$f(z_0)$ singolarità essenziale; posso avvicinarmi quanto voglio alla singolarità essenziale e allo stesso tempo avvicinarmi a qualsiasi complesso
$$\forall \epsilon, \delta > 0 \; \forall c \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists z \mid |z - z_0| < \delta \text{ e } |f(z) - c| < \epsilon$$

Teorema (**Picard**).
In un intono di z_0 singolarità essenziale di $f(z)$, $f(z)$ assume qualsiasi valore complesso un numero infinito di volte con eccezione al più di un valore

Def (**Funzione meromorfa**).
$f(z)$ è MEROMORFA se le sue uniche singolarità in un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ sono rimovibili o poli (non si considerano le singolarità a $z = \infty$)

Oss. Si possono studiare le proprietà di singolarità di $f(z)$ in z=∞ studiando le proprietà di $f(w)$ con $w = \frac{1}{z}$ in $w = 0$
Grazie al doppio mapping della proiezione stereografica si ha:

- poli in z $\to$ zeri in w
- zeri in z $\to$ poli in w
- singolarità essenziali in z $\to$ singolarità essenziali in w

Singolarità non isolata

Singolarità si dice non isolata se non esiste intorno in cui è isolate

N.B. Basta un solo punto z_1 tale che $|z - z_0| < \delta$ con $f(z_1)$ non olomorfa per avere che $f(z_0)$ è singolarità non isolata

1. Singolarità che sono punti limite di una sequenza di singolarità isolate
   es.: $f(z) = \tan(\frac{1}{z})$
2. Punti di diramazione di funzioni a più variabili
   es.: $f(z) = \sqrt{z}$

Capitolo 3

Superfici di Rieamann

Una volta fissata la disposizione del branch cut, tutti i valori della funzione in tutti i rami sono fissati sapendo il valore in un punto.
$f(z) = \sqrt{z}$ definisco cut $(-\infty, 0]$ e dico che $\sqrt{1} := 1$; Ho completamente determinato $f(z)$ sia $w_0(z)$ che $w_1(z)$.
Questo suggerisce che esiste descrizione alternativa in cui non ci sono tagli.
La funzione a valori doppi sono quindi single-value ed olomorfe.
Estendo il dominio con molteplici copie di $D \subseteq \mathbb{C}$.
es.: lo stesso punto $z \in \mathbb{C}$ possiamo immaginare abbia 2 immagini diverse $f(z)$: $f_1(z)$ e $f_2(z)$
Raddoppiando $\mathbb{C}$ avremmo 2 copie z_1 e $z_2 \Rightarrow$ abbiamo $f_1(z_1)$ e $f_2(z_2)$ che ora sono single-valued.
Il nuovo dominio si chiama **SUPERIFICIE DI RIEMANN** e corrisponde ad un'estensione di $\mathbb{C}$ Le

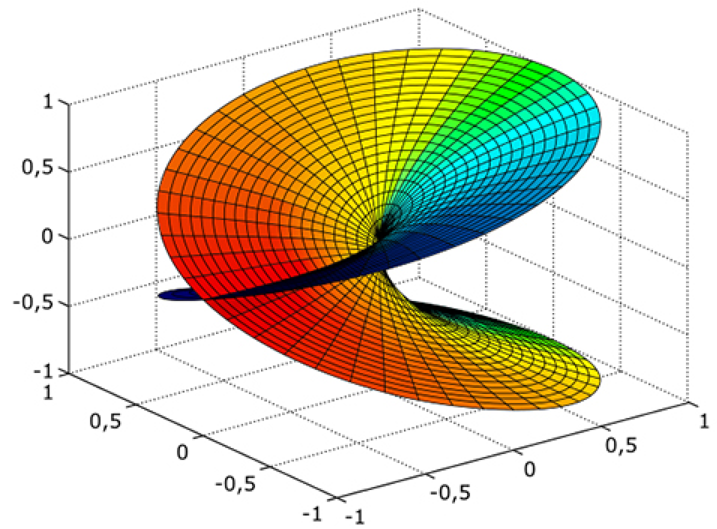


Figura 3.1: Superficie di Riemann

due copie di $\mathbb{C}$ vanno incollate lungo quello che prima era il branch cut. In questo modo attraversando le linee di congiungimento si passa da un ramo all'altro.
In generale ci sono tante copie di $D \in \mathbb{C}$ quante sono le branch-cut (eventualmente anche infinite [es: $\log(z)$])

Capitolo 4

Integrazione sul piano complesso

Le proprietà di olomorfia di $f(z)$ su $\mathbb{C}$ possono essere determinate dalle condizioni di Riemann.
Le proprietà di differenziabilità sono connesse con le proprietà di integrabiltà di $f(z)$ su $\mathbb{C}$

4.1 Curve

Def (Curva).
Una curva è una mappa continua

$$\gamma : [a, b] \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

$z_a = \gamma(a)$ e $z_b = \gamma(b)$ sono gli estremi della curva

Def (Orientazione curva).

- Una curva si dice che ha ORIENTAZIONE POSITIVA se il verso di percorrenza è antiorario
- Una curva si dice che ha ORIENTAZIONE NEGATIVA se il verso di percorrenza è orario

Def (Curva opposta).
La curva con orientazione opposta è data da una mappa

$$t \mapsto \gamma(a + b - t) = -\gamma$$

Def (Curva semplice).
Una curva semplice è una curva che non si interseca $\Rightarrow$ mapping iniettivo

$$\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \quad \forall t_1 \neq t_2$$

Def (Curva chiusa).
Una curva chiusa è una curva tale che $\gamma(a) = \gamma(b)$

Def. Curva di Jordan
Una curva di Jordan è una curva semplice e chiusa (nessun altro punto oltre a $z_a = z_b$ coincide)

Def. Curva regolare a tratti
Data una curva $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, se $x(t)$ e $y(t)$ sono continue per $t \in [a, b]$ e se esiste una partizione di $[a, b]$ dove $x'(t)$ e $y'(t)$ sono continue e non simultaneamente nulle $\Rightarrow \gamma(t)$ è regolare a tratti.

Def. Curve omotope
Due curve su $D \in \mathbb{C}$ con gli stessi estremi $[a, b]$ sono omotope se: esiste una mappa continua che manda l'una nell'altra

$$\gamma : [a, b] \times [0, 1] \mapsto D \in \mathbb{C} \text{ t.c. se } t = [a, b] \text{ e } u = [0, 1] :$$
$$\forall t \in [a, b]\ \forall u \in [0, 1] \Rightarrow \gamma(t, 0) = \gamma_1(t) \text{ e } \gamma(t, 1) = \gamma_2(t)$$

Quindi $\gamma(a,u) = \gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ e $\gamma(b,u) = \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$
Per ogni valore di u ho una curva in D; variando u passo da γ_1 a γ_2

Teorema (Jordan).
Ogni curva di Jordan divide il piano complesso in 2 regioni.
Se l'orientazione della curva è positiva a destra ho la regione esterna, mentre a destra ho la regione interna; se l'orientazione è negativa ho l'opposto.

Def. Dominio semplicemente connesso
Date due curve γ_1 e γ_2 che sono omotope

$$\forall u \in [0,1] \Rightarrow \gamma(a,u) = \gamma(b,u) \text{ e } \gamma(t,0) = \gamma_1(t) \; \gamma(t,1) = \gamma_2(t)$$

Allora il dominio D è semplicemente connesso se ogni curva chiusa è omotopa ad un punto (cioè può essere deformata in punto).
Ciò è possibile solo se non ci sono buchi.

4.2 Integrale di linea

Def (Integrale di linea).
Data una curva regolare a tratti $\gamma : t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$ con $t \in [a,b] \subseteq \mathbb{C}$
Dato un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ e una funzione $f(z)$ con $z = \gamma(t)$ che sia continua $\forall z = \gamma(t) \in D$ e $\forall t \in [a,b]$
$\Rightarrow$ si definisce INTEGRALE DI LINEA di f lungo γ

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \quad \text{con } \gamma'(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt} = x'(t) + iy'(t)$$

Si ha dunque

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b \big[u(x(t),y(t)) + iy(x(t),y(t))\big]\big(x'(t) + iy'(t)\big)\,dt \quad \text{con } f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b (ux' - vy')\,dt + i\int_a^b (uy' + vx')\,dt$$

Oss. Questo ci dice l'integrale è lineare e i cammini possono essere sommati

$$\int_\gamma af(z) + bf(z)\,dz = a\int_\gamma f(z)\,dz + b\int_\gamma f(z)\,dz \quad \forall a,b \in \mathbb{C}$$
$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz \quad \text{se } \gamma_1(b) = \gamma_2(a)$$

Questa proprietà mi permette di scrivere $\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_{-\gamma} f(z)\,dz$
Oss. L'integrale è indipendente dalla parametrizzazione scelta per la curva γ

Def (Lunghezza curva).

$$L = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

Teorema (Disuguaglianza di Darboux).
Data una curva regolare a tratti $\gamma(t)$ di lunghezza L e una funzione $f(z)$ continua e limitata su γ

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \gamma \Rightarrow \left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq LM \tag{4.1}$$

4.3 Valore principale integrale

Generalizzo il concetto di integrale improprio
se $f(z)$ è continua su una curva $\gamma(t)$ con $t \in [a, b]$ ad eccezione di un punto $\xi \in \gamma(t)$
Posso considerare una circonferenza di raggio ϵ intorno a ξ
Definisco

$$I_a = \int_a^{\xi'} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \text{ e } I_b = \int_{\xi''}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \quad \forall\epsilon > 0$$

Se esistono I_a, I_b per $\epsilon \to 0 \Rightarrow I_a + I_b$ è integrale improprio di $f(z)$ lungo γ
Se I_a o $I_b \to \pm\infty$ quando $\epsilon \to 0$ ma $\lim\limits_{\epsilon\to 0} I_a + I_b = a(finito) \in \mathbb{C} \Rightarrow$ si definisce il valore principale

$$P.V. \int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_a^{\xi'(t)} f(z)\,dz + \int_{\xi''(t)}^{b} f(z)\,dz\Big)$$

N.B. Se le singolarità sono più di una si può scrivere

$$P.V. \int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\sum_{j=0}^{n} \int_{\xi''_j}^{\xi''_{j+1}} f(z)\,dz\Big) \quad \text{con } \xi''_0 = a \quad \xi'_{n+1} = b$$

Capitolo 5

Forme differenziali

Def (Forma differenziale).
$\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad$ con P,Q funzioni C^1 su $D \subseteq \mathbb{R}^2$

Def (Integrale di una forma differenziale).
L'integrale di una forma differenziale su una curva $\gamma(t)$ regolare a tratti è:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left[P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\right] dt \Rightarrow \int_\gamma \omega = \int_\gamma f(z)$$

Teorema (Green).
Data una forma differenziale definita su S racchiuso da una curva di Jordan γ con orientazione positiva

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy\, dt = \iint_S \left[\delta_x Q(x,y) - \delta_y P(x,y)\right] dx\, dy \tag{5.1}$$

Teorema (Cauchy).
Sia $f(z)$ olomorfa su D semplicemente connesso e γ una curva chiusa in D

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

Oss. Esiste un'estensione dovuta a Goursat che non richiede che $f(z)$ sia derivabile su un dominio semplicemente connesso, ma basta chiedere che $f(z)$ sia omotopa ad un punto.

Corollario. L'integrale di una funzione $f(z)$ olomorfa su D semplicemente connesso non dipende dal cammino γ

Oss. In generale se D non è semplicemente connesso il teorema fallisce.

Teorema.
Sia $f(z)$ olomorfa su un dominio D. Per un punto arbitrario $z_0 \in D$ possiamo sempre definire la primitiva

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z')dz$$

$F(z)$ è anch'essa olomorfa e si ha che $F'(z) = f(z)$

Corollario.

1. Due diverse primitive di $f(z)$ possono differire solo per una costante.
2. $\int_A^B f(z)\, dz = F(B) - F(A)$

5.1 Relazione tra forme differenziali e campi vettoriali

Usando le condizioni di Cauchy-Riemann la forma differenziale su può scrivere come:

$$\omega = f(z)dz = (u + iv)dx + (-v + iu)dy$$

Def (Forma differenziale chiusa).
$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ si dice chiusa se $\delta_y P = \delta_x Q$

Def (Forma differenziale esatta).
$\omega = dg = \delta_x g(x, y)dx + \delta_y g(x, y)dy$

Oss. Ogni forma differenziale esatta è anche chiusa: $\delta_x\delta_y g(x, y) = \delta_y\delta_x g(x, y)$

5.2 Formula integrale di Cauchy

Teorema.
Data $f(z)$ olomorfa su D semplicemente connesso e data γ di Jordan con orientazione positiva

$$\Rightarrow \forall z_0 \text{ interno a } \gamma \text{ si ha:} \quad f(z_0) = \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz$$

Oss. Questo permette di costruire il valore di $f(z)$ all'interno di γ partendo dai valori di γ che sono il bordo della regione $\Rightarrow$ OLOGRAFIA

Corollario. Se $f(z)$ è olomorfa in $z_0 \Rightarrow$ è differenziabile infinite volte e ha derivate che si possono scrivere come:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

La formula integrale di Cauchy è un caso particolare per curve semplici e chiuse. Se la curva non è semplice si può avvolgere più volte attorno a z_0

Def (Numero avvolgimenti).

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz \quad \Rightarrow \quad n(\gamma, z_0)f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Teorema.
Data $\gamma(t)$ con $t \in [a, b]$ curva chiusa e dato $z_0 \notin \gamma$ si ha che $n(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$

Def (Funzione analitica).
Se $F(z)$ è olomorfa su un cerchio D_R di raggio R attorno a $z_0 \in \mathbb{C}$ è anche analitica, cioè si può espandere in serie di potenze ed è derivabile infinite volte

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{con } a_n = \Big[\frac{d^n f(z)}{dz^n}\Big]_{z=z_0} \frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{D_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

R è il raggio di convergenza della serie.

Il teorema di Cauchy mostra che $f(z)$ olomorfa su D semplicemente connesso implica che $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ con γ curva di Jordan.
Il teorema di Morera afferma che le sole funzioni con queste proprietà sono le funzioni olomorfe.

Teorema. Morera
Data $f(z)$ su D semplicemente connesso tale che $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ con γ curva semplice e chiusa
$\Rightarrow f(z)$ è olomorfa

Ulteriori proprietà delle funzioni olomorfe

Teorema (**valor medio**).
Sia $f(z)$ olomorfa su $D \subset \mathbb{C}$ semplicemente connesso è possibile calcolare il vaolore di $f(a)$ tramite un integrale su di una qualsiasi circonferenza centrata in a e contenuta in D

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta$$

Cioè calcolando il valor medio della funzione sulla circonferenza

Def (**Bordo**).
Dato uno spazio topologico S ed un punto $z_0 \in S$. Si dice che z_0 è un punto di bordo di S se ogni intorno di z_0 contiene sia punti di S che punti del suo complementare.
L'insieme dei punti di bordo si chiama BORDO e si indica con δS

Teorema (**massimo modulo**).
Sia $f(z)$ olomorfa e non costante su un dominio D limitato tale che $f(z)$ sia continua sul bord δD $\Rightarrow |f(z)|$ raggiunge il massimo per un punto $z_0 \in \delta D$. Se $f(z) \neq 0 \Rightarrow$ anche il minimo è sul bordo.

N.B. Bisogna richiedere che f(z) sia diverso da zero perchè se $f(z_0) = 0$ per $z_0 \in D \Rightarrow$ il minimo sarebbe z_0

Teorema (**Liouville**).
Una funzione $f(z)$ olomorfa e limitata su $\mathbb{C}$ è una costante

Teorema (**fondamentale dell'algebra**).
Un polinomio complesso di grado n ha esattamente n zeri sul piano complesso

Teorema (**unicità**).
Sia $f(z)$ olomorfa su $D \subseteq \mathbb{C}$ non necessariamente semplicemente connesso tale che $f(z_n) = 0 \forall$ elemento della successione $z_n \in D$ con $z_n \neq z_0$ punto di convergenza della serie allora:

$$f(z) = 0 \quad \forall z \in D$$

Quindi tutti gli zeri di una funzione olomorfa sono punti isolati

Oss. è cruciale che $z_0 \in D$

Corollario. Se $f(z)$ olomorfa è nulla su un aperto contenuto in D $\Rightarrow$ è nulla su tutto D

5.3 Serie di Laurent

Olomorfie e analiticità sono proprietà che sui complessi sono connesse; una funzione olomofa è scrivibile in serie di Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$\forall z_0 \in D$ in $f(z_0)$ sia olomorfa e $\forall$ disco $|z - z_0| < R$ interamente contenuto in D

$$a_n = \left[\frac{1}{n!} f^{(n)}(z)\right]_{z=z_0} = \int_\gamma \frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z - z_0)^n}\, dz$$

con γ curva chiusa e semplice che contiene z_0

Oss. $f(z)$ è analitica perchè può essere differenziata infinite volte

N.B. Questa cosa non succede invece sui reali

Per domini non semplicemente connessi è possibile dare una rappresentazione in serie di una funzione olomorfa su un anello
Applicazione $\rightarrow$ quando ci sono singolarità isolate
La serie che si ottiene è uan serie bilatera e si chiama SERIE DI LAURENT

Teorema.
Data $f(z)$ olomorfa su un anello $k = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$ con z_0 centro e r<R raggi
Si può allora scrivere la serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} d_n(z-z_0)^n}_{parteregolare} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{(z-z_0)^n}}_{parteprincipale} \tag{5.2}$$

$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$ con γ curva semplice e chiusa su k con orientazione positiva

N.B. $d_n \neq \left[\frac{1}{n!} f^{(n)}(z)\right]_{z=z_0}$ perchè la serie non contiene più solo potenze positive.
Quindi i coefficienti non si possono più scrivere in termini di semplici derivate perche z_0 uò essere una singolarità

Oss. I valori massimi e minimi dei raggi r e R sono:

$$R = \left(\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |d_k|^{\frac{1}{k}}\right)^{-1} \quad \text{con } n \geq 0$$

Cioè la parte regolare è una serie di potenze con n positiva che converge su $|z - z_0| < R$

$$r = \left(\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |d_k|^{\frac{1}{k}}\right) \quad \text{con } n > 1$$

Cioè la parte principale è una serie di potenze $\omega = \frac{1}{z-z_0}$ che converge sul disco $|\omega| < \frac{1}{r}$
L'intersezione delle due regioni dà $r < |z - z_0| < R$; quindi la serie converge uniformemente sull'anello k e su ogni suo sottoanello

Data una singolarità isolata z_0 di $f(z)$ esiste un anello $k = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \delta\}$ su $f(z)$ è olomorfa e quindi esiste la sua espansione in serie di Laurent
La forma della serie dà informazioni su natura della singolarità

1. se z_0 è rimovibile $\Rightarrow$ la parte principale è assente e la serie coincide con la serie di Taylor (sostituisco la funzione con la sua serie di Taylor e rimuovo la singolarità)

2. se z_0 è un polo di ordine k $\Rightarrow$ la parte principale contiene solo i primi k termini

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} d_n(z-z_0)^n$$

   $d_{-k} = 0\ \forall k > n$ e $d_{-n} \neq 0$ solo polo più alto

3. se z_0 è una singolarità essenziale la serie di Laurent contiene infiniti termini nella parte principale con potenze negative

5.4 Prolungamento analitico

Data $f(z)$ olomorfa su $D \subset \mathbb{C}$ è possibile estendere estenderla su D' con $D \subset D'$. Questo significa che data $f(z)$ con $z \in D$ si può trovare una funzione olomorfa $g(z)$ con $z \in D'$ tale che $f(z) = g(z)$ in $D \cap D'$
$\Rightarrow$ si può definire $\tilde{f}(z)$ tale che:

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \forall z \in D \\ g(z) & \forall z \in D' \end{cases}$$

Si ha che $\tilde{f}(z)$ è olomorfa su $D \cup D'$ e si riduce a $f(z)$ su

Def (Prolungamento analitico).
La funzione $\tilde{f}(z)$ è detto PROLUNGAMENTO ANALITICO di f

Teorema.
Se $\tilde{f}(z)$ esiste $\Rightarrow$ è unico

5.4.1 Massimo dominio di olomorfia

Ci sono diversi modi per calcolare la continuazione analitica; ognuno di questi metodi è valido in un sottodominio del massimo possibile

1. ESTENSIONE PER SERIE DI POTENZE
   Si usa il metodo di Weierstrass (estensione per cerchi)

   Supponiamo di avere f olomorfa su D_0 disco centrato nell'origine 0 con una singolarità z_0 sul bordo δD_0
   Preso $z_1 \in D_0$ posso espandere in serie di Taylor attorno a z_1 con raggio di convergenza $R_1 = |z_1 - z_0|$
   Chiamo la serie di Taylor $f_1(z)$ e per costruzione $f(z) = f_1(z) \qquad \forall D_0 \cap D_1$
   Se D_1 non è interamente contenuto in $D_0 \Rightarrow f_1(z)$ è prolungamento analitico di f

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(z)\Big|_{z=z_1} (z - z_1)^n$$

   Posso ripetere l'operazione e definire

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(z)\Big|_{z=z_2} (z - z_2)^n$$

   Posso continuare fino al massimo dominio di olomorfia

2. RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE
   Scrivo le funzioni in termini di un integrale

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \, dt \qquad \text{FUNZIONE GAMMA DI EULERO} \tag{5.3}$$

   La funzione $\Gamma(z)$ generalizza il fattoriale ai numeri complessi

3. ESPRESSIONE ANALITICA

5.5 Residui

Vogliamo generalizzare il teorema di Cauchy al caso in cui $\int_\gamma f(z)\, dz$ sia su una curva chiusa che racchiude una singolarità di $f(z)$

Def (Residuo).
Il residui di $f(z)$ nel punto z_0 di singolarità isolata con $f(z)$ altrimenti olomorfa su $D - \{z_0\}$ è definito come:

$$Res[f, z_0] = d_{-1}$$

con d_{-1} coefficiente del termine $\frac{1}{z-z_0}$ nell'espansione di Laurent di $f(z)$ attorno a z_0. Cioè:

$$Res[f, z_0] = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz$$

con γ semplice e chiusa con orientazione positiva che racchiude z_0

Oss. Il residuo può essere 0, per esempio $d_{-1} = 0$ ma $d_{-n} \neq 0 \quad n > 1$

Oss. Se z_0 è un polo di ordine k allora si ha:

$$Res[f, z_0] = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{z-k}} [(z - z_0)^k f(z)]$$

Oss. Quando $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ con $h(z)$ olomorfa e $g(z)$ ha unico zero semplice in z_0 dove $h(z_0) \neq 0$ allora:

$$Res[f, z_0] = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

5.5.1 Residuo all'infinito

Abbiamo visto che $f(z)$ può avere una singolarità isolata in $z = \infty$. Si definisce allora il residuo all'infinito prendendo una circonferenza $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \quad | \quad |z| = R\}$ con R grande a sufficienza a contenere tutte le singolarità al finito

$$Res[f, \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} f(z)\, dz$$

$z = \infty$ può essere mappato in $w = 0$ tramite $w = \frac{1}{z}$

$$Res[f, \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} f(z)\, dz = -\int_{\gamma'} \frac{1}{w^2} f\Big(\frac{1}{w}\Big)\, dw$$

con γ' una circonferenza centrata in $w = 0$ con raggio $\frac{1}{R}$ con orientazione positivaù

$$Res[f, \infty] = Res\Big[g(w) = -\frac{1}{w^2} f\Big(\frac{1}{w}\Big), 0\Big]$$

Oss. Il $Res[f, \infty] \neq 0$ anche se $f(z = \infty)$ non è singolare

Teorema (residui).
Data $f(z)$ olomorfa su D eccetto un numero finito di singolarità isolate $z_1, \dots, z_n$ e data una curva chiusa e semplice $\gamma \subset D$ con orientazione positiva si ha:

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[f, z_k] \tag{5.4}$$

Corollario. Quando γ non è semplice o non è orientata positivamente si ha in generale:

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} n(\gamma, z_k) Res[f, z_k] \qquad \text{n: indice con segno}$$

Oss. Il teorema dei residui è utile perchè permette di calcolare l'integrale di funzioni olomorfe lungo una curva chiusa sapendo solo i valori della funzione alle singolarità racchiuse dalla curva

Corollario. La somma di tutti i residui incluso il punto all'infinito è zero

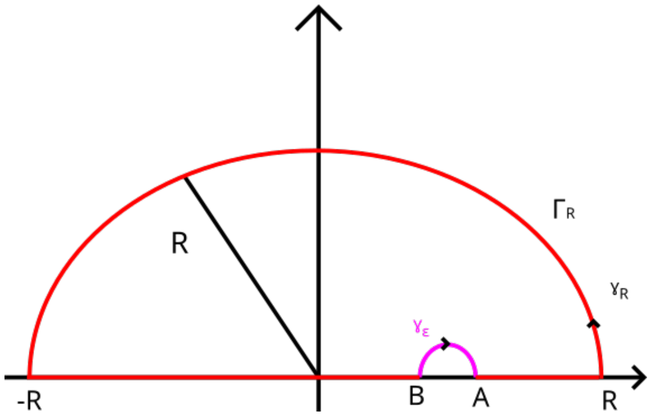
N.B. Il teorema dei residui si può applicare solo quando γ racchiude un numero finito di singolarità. Se fossero infinite ci potrebbe essere un punto di accumulazione per le singolarità che quindi non sarebbero più isolate. Per questo motivo il teorema dei residui non si può applicare direttamente alle funzioni multi-valued. Si può però applicare ad ogni brach basta stare attenti che γ non attraversi il branch-cut

5.6 Valore principale di Cauchy

Se abbiamo singolarità sul cammino di integrazione $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\, dx$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f(x)$ regolare in x_0 tale che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \to 0$ sufficientemente rapido.
Si può definire il valore principale di Cauchy

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\, dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \Big[\int_{-\infty}^{x_0-\epsilon} \frac{f(x)}{x-x_0} + \int_{x_0+\epsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\Big]$$

I due integrali sono separatamente divergenti, ma nella somma la divergenza in ϵ si cancella.
Calcolo integrale usando Γ_R



$$I(R) = \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{z-x_0}\, dz = 2\pi i \sum_k Res\Big[\frac{f(z)}{z-x_0}, z_k\Big]$$

Allora

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\, dx = \pi i f(x_0) + 2\pi i \sum_k Res\Big[\frac{f(z)}{z-x_0}, z_k\Big] \tag{5.5}$$

Capitolo 6

Proprietà mapping

Una funzione $f(z)$ può essere vista come una mappa da $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$
Dato un aperto $\Omega \subseteq D$ dominio di olomorfia, studio comportamento locale di f per capire cosa succede a $f(\Omega) = \{f(z) \quad | \quad z \in \Omega\}$:
f è olomorfa $\Rightarrow$ f è analitica $\Rightarrow$ f è sviluppabile in serie di Taylor attorno a $z_0 \in \Omega$
Il comportamento locale di f ha determinato dai primi termini della serie di taylor
m è il primo indice tale che $a_m \neq 0 \Rightarrow$ il comportamento locale è determinato da

$$f(z) - f(z_0) \simeq a_m(z - z_0)^m$$

Ci sono due casi:

1. $m = 1 \quad$ cioè $\quad a_1 = f'(z_0) \neq 0$

   Teorema.
   Esiste un aperto U in un intorno di z_0 tale che:

   - f mappa U in un intorno di $f(U)$ in maniera biunivoca
   - $f(U)$ è un aperto $\Rightarrow$ f è una mappa aperta
   - f ha una funzione inversa f^{-1} olomorfa e manda $f(U) \to U$
   - f è una mappa CONFORME, cioè converva gli ancoli tra le linee

   Def. Dire che gli angoli si preservano significa che se le rette L e L' hanno angolo θ fra loro su U $\Rightarrow$ $f(L)$ e $f(L')$ hanno tangenti che si intersecano con angolo θ su $f(U)$

   f manda rette in curve, ma le tangenti preservano gli angoli

   Oss. Dato che f^{-1} è olomorfa allora si può espandere in serie di Taylor attorno a $w_0 = f(z_0)$

   $$f^{-1}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(w - w_0)^k$$

   con i b_k dati dalla formula di Lagrange

   $$b_0 = z_0 \qquad b_n = \frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)}\right)^n\Big|_{z=z_0} n \geq 1$$

2. $m > 1$ si può dimostrare che esiste un aperto U tale che

   - f è una mappa m a 1
   - $f(U)$ è un aperto
   - f ingrandisce gli angoli di un fattore m

Teorema (Open Mapping).
Ogni funzione f olomorfa non costante mappa aperti in aperti

N.B. Questo non vale se la funzione è costante perchè f mappa $\mathbb{C}$ in un punto

Teorema.
Se f è olomorfa e biunivoca si ha:

$$f'(z_0) \neq 0 \;\; \forall z \qquad \exists\, f^{-1} \text{ olomorfa}$$

Si dice che f è una MAPPA CONFORME

6.1 Trasformazioni lineari fratte

Trasformazioni lineari conformi del tipo:

$$F(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

con $ad - cb \neq 0$ sono mappe conformi $\forall z_0$ tali che $z_0 \neq -\frac{b}{c}$
Inoltre

$$F'(z) = \frac{ad-bc}{cz+d^2} \neq 0$$

Casi particolari:

1. Traslazioni: $\quad w = z + \alpha$
2. Dilatazioni: $\quad w = \beta z$
3. Inversioni: $\quad w = \frac{1}{z}$

Qualsiasi f lineare fratta può essere scitta come combinazione di queste 3 trasformazioni
Oss. Spesso conviene esprimere $F(z)$ sulla sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$F\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \quad F(\infty) = \frac{a}{c} \qquad \text{quando } c = 0 \to \infty$$

Allora le trasformazioni lineari fratte sono le uniche mappe biunivoche e olomorfe di $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$
Sono AUTOMORFISMI di $\hat{\mathbb{C}}$
Mappano rette e cerchi in se stessi (in realtà su $\hat{\mathbb{C}}$ le rette sono cerchi che passano da ∞)
Inoltre dati 3 punti z_1, z_2, z_3 e dati w_1, w_2, w_3 esiste una sola trasformazione F che abbia

$$w_i = F(z_i) \; i = 1, 2, 3$$

N.B.

$$B(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

è invariante sotto trasformazioni lineari fratte

$$B(F(z), F(z_1), F(z_2), F(z_3)) = B(z, z_1, z_2, z_3)$$

Oss. L'insieme delle trasformazioni F forma un gruppo. Associamo a F la matrice

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad F = \frac{az+b}{cz+d}$$

Inversa e composizione di F seguono dalle regole delle matrici
Dato che si può riscalare $\hat{F} \to \lambda \hat{F}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ senza cambiare trasformazione allora si può normalizzare

$\hat{F}$ in modo che $ad - cb = 1$
Quindi il gruppo delle trasformazioni F è $SL(2, \mathbb{C})$ gruppo di matrici 2×2 complesse e determinante unitario
Dato che $\det \hat{F} = 1$ non fissa il segno di a, b, c, d ho che il gruppo è:

$$\frac{Sl(2, \mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2} \qquad \mathbb{Z}_2 = \{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$$

Teorema (Riemann mapping).
Ogni aperto semplicemente connesso $\omega \subset \mathbb{C}$ può essere mappato conformemente (cioè usando f biolomorfa) sul cerchio unitario aperto

Corollario. Tutte le regioni aperte di $\mathbb{C}$ semplicemente connesse sono uniformemente equivalenti

Parte II

Spazi funzionali

Vogliamo estendere la definizione di spazi euclidei $\mathbb{R}^3$ in maniera astratto in mdo da poterli usare anche per spazi$\infty-$dimensionali

Def. Uno **SPAZIO VETTORIALE V** su uno campo F è un insieme con 3 operazioni, chiuso rispetto:

1. somma per elementi dello spazio (vettori)
$$\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} \in V$$
2. moltiplicazione per un elemento di F (scalari)
$$\forall \lambda \in F\, \forall\, \vec{v} \in V \Rightarrow \lambda\vec{v} \in V$$

La somma di vettori è associativa, commutativa, con elemento neutro $\vec{0}$ e inverso -$\vec{v}$; inoltre è distributiva sul prodotto con $\lambda \in F$
$$\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$$
e ha elemento neutro prodotto $1 \in F$

Def. $W \subset V$ è un **SOTTOSPAZIO** di V se è chiuso rispetto alla somma e moltiplicazione per uno scalare
$$\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in W \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} \in W \subset v$$
$$\forall\, \vec{v} \in W\; \forall \lambda \in F \Rightarrow \lambda\, \vec{v} \in W \subset V$$

Def. n vettori $\vec{u}_k$ $k = 1, \ldots, n$ sono **lineramente indipendenti** se
$$\sum_{k=1}^{n} a_k \vec{u}_k = 0 \Rightarrow \forall k = 1, \ldots, n\; a_k = 0$$

Def. Invece sono **lineramente dipendenti** se
$$\sum_{k=1}^{n} a_k \vec{u}_k = 0 \qquad \text{con qualche } a_k \neq 0$$

Def. Un insieme di vettori linearmente indipendenti è detto **massimale** se l'insieme dei vettori linearmente indipendeti + uno qualsiasi altro vettore è linearmente dipendente
$\{u_k\}$ è chiamata **base** di V

Oss. Data una base posso scrivere un qualsiasi vettore $\vec{v} \in V$ in coordinate o componenti
$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} v_k \vec{u}_k \qquad v_k \in F$$

Oss. n può essere finito o infinito; se è finito tutte le basi hanno lo stesso numero di vettori e si chiama **dimensione** dello spazio
Gli spazi di funzioni sono un esempio di spazio $\infty-$dimensionali
Sugli spazi vettoriali astratti è possibile aggiungere strutture che permettorno di specificare il concetto di lunghezza o distanza, il concetto di limite e di continuità in maniera astratta

Def. Una **metrica o distanza** è una mappa
$$d(,):\, M \to \mathbb{R}$$
con le seguenti proprietà valide $\forall a, b \in M$
$$d(a, b) = d(b, a)$$
$$d(a, b) = 0 \iff a = b$$
$$\forall c \in M \quad d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c)$$

Def. Uno spazio vettoriale i cui è possibile definire una matrica è uno **spazio metrico**

Def. Una **topologia** su un insieme X è una collezione τ di sottoinsiemi di X che contiene l'insieme vuoto, X stesso e che deve essere chiusa rispetto ad un numero finito di iterazioni e ad un numero arbitrario di interazioni, cioè

- $\emptyset \in \tau$
- $X in \tau$
- $\forall V_i \in Z \quad V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \in \tau$
- $\cup_\alpha \quad V_\alpha \in \tau \quad$ con α finito o infinito

Gli elementi di τ sono gli insiemi aperti

Oss. La topologia non è unica

Def. Una **sfera aperta** di raggio r centrata in $a \in M$ è

$$B(a, r) = \{b \in M \mid d(a, b) < r\}$$

Def. Ogni sottoinsieme di $X \subset M$ è aperto se

$$\forall a_o \in X \quad \exists B(a_o, r) \subset X$$

Oss. Ogni spazio metrico è uno spazio topologico, basta definire la topologia degli aperti tramite sfere aperte

Def. Un insieme è **chiuso** se il suo complementare è aperto

Oss. L'esistenza di una topologia metrica permette di definire la nozione di limite di una successione
Diciamo che $\{a_n\}$ converge ad $a \in M$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_o \text{ tale che } d(a_n, a) < \varepsilon \quad \forall n > n_o$$

oppure usando la definizione di limite di $\mathbb{R}$

$$\lim_{n \to \infty} d(a_n, a) = 0$$

Oss. La convergenza di una serie si prova con la convergenza delle somme parziali

Oss. Un insieme chiuso contiene tutti i suoi punti di accumulazione ed il più piccolo insieme chiuso che contiene X è detto **chiusura** di X ($\bar{X}$)

Def. Un insieme Z si dice **denso** in Y se la sua chiusura corrisponde a $Y = \bar{Z}$

Def. Un insieme K in uno spazio metrico X è **compatto** $\iff$ ogni succesione $\{X_k\}$ interamente contenuta in K ha una sottosuccesione convergente ad un elemento di K

Def. Una mappa

$$f : X \to Y$$

tra due spazi topologici è **continua** se la controimmagine di ogni aperto in Y contenente f(X_0) è un aperto in X contenente X_0
Per spazi metri è possibile formulare ciò con sfere aperte

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \text{ tale che } d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \qquad \text{se } d(x, x_0) < \delta$$

Def. Una **successione di Cauchy** è una succesione $\{x_n\}$ tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon > 0 \text{ tale che } \forall n, m \geq N_\varepsilon \qquad d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Teorema. In uno spazio metrico ogni successione convergente è una successione di Cauchy

Def. Uno spazio metrico si dice **completo** se tutte le successioni di Cauchy sono convergenti

Capitolo 7

Spazi normati

Def. La **norma** di un vettore $\in V$ spazio vettoriale è una mappa

$$|| \, || : \; V \to \mathbb{R}^+$$

che soddisfa $\forall \, \vec{v}, \vec{w} \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \mathbb{R}$

1. $||\vec{v}|| \geq 0 \qquad ||\vec{v}|| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$ condizione di positività
2. $||\lambda \vec{v}|| = |\lambda| ||\vec{v}||$
3. $||\vec{v} + \vec{w}|| \leq ||\vec{v}|| + ||\vec{w}||$ disuguaglianza triangolare

Def. Uno spazio vettoriale dotato di norma si dice **spazio normato**

Corollario. Gli spazi normati sono sempre degli spazi metrci dato che si può sempre definire

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = ||\vec{v} - \vec{w}||$$

Corollario. Per la convergenza in uno spazio normato si può usare

$$\lim_{n \to \infty} ||\vec{v}_n - \vec{v}|| = 0$$

Def. Un **isomorfismo** tra spazi normati è una mappa biunivoca

$$f : \; (X, || \, ||_x) \to (Y, || \, ||_y)$$

che preserva la struttura lineare e la norma, cioè

- $f(\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda f(\vec{v}) + \mu f(\vec{w})$
- $||f(\vec{v})||_y = ||\vec{v}||_x \qquad \forall \, \vec{v}, \vec{w} \in X \quad \lambda, \mu \in F$

Oss. Tramite la norma superiore

$$||f||_{sup} = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

possiamo definire il concetto di convergenza uniforme

Def. $\{f_n\} \to f$ converge uniformemente su K se

$$\lim_{n \to \infty} \underbrace{\sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)|}_{||f_n - f||_{sup}} = 0$$

Oss. La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale

Def. Norma L_1

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

Oss. Si può dimostrare che la convergenza in norma sup implica convergenza in norma L_1

Def. Uno **spazio di Banach** è uno spazio vettoriale normato e completo

Def. Il **prodotto scalare (o interno)** su uno spazio vettoriale complesso è una mappa

$$\begin{aligned}(\vec{a}, \vec{b}):\ & V \times V \to \mathbb{C} \\ & \vec{v}, \vec{w} \mapsto (\vec{v}, \vec{w})\end{aligned}$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

1. Linearità
$$(\vec{u}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda(\vec{u}, \vec{v}) + \mu(\vec{v}, \vec{w}) \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$
2. Hermiticità
$$(\vec{v}, \vec{w}) = \overline{(\vec{w}, \vec{v})} \quad \text{simmetria su } \mathbb{R}$$
3. Positività
$$(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0 \qquad (\vec{v}, \vec{v}) = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$$

Oss. La prop 2 implica anti-linearità nel primo argomento

$$(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \vec{w}) = \bar{\lambda}(\vec{u}, \vec{w}) + \bar{\mu}(\vec{v}, \vec{w})$$

Def. Uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare è detto **pre-Hilbert**

Oss. Pre-Hilbert è anche uno spazio normato; si può sempre definire

$$||\vec{v}|| = \sqrt{(\vec{v}, \vec{v})}$$

Oss. Il prodotto scalare soddisfa la disuguaglianza di Schwarz

$$|(\vec{v}, \vec{w})|^2 \leq (\vec{v}, \vec{v})(\vec{w}, \vec{w})$$

Def. Uno **spazio di Hilbert finito dimensionale** è uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare e completo

Def. Due vettori sono **ortogonali** se il loro prodotto scalare è nullo

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

Oss. I vettori ortogonali sono linearmente indipendenti

Oss. Gli elementi di una base (set massimale di vettori linearmenti indipendenti) sono **ortomormali**

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, n$$

1. $\displaystyle \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} v_k \vec{e}_k \qquad v_k = (\vec{e}_k, \vec{v})$
2. $\displaystyle (\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{k=1}^{n} \bar{v}_k w_k \qquad \bar{v}_k = (\vec{v}, \vec{e}_k) \quad \vec{w}_k = (\vec{e}_k, \vec{w})$
3. $\displaystyle ||\vec{v}||^2 = \sum_{k=1}^{n} |v_k|^2$ identità di Parseval

Oss. In ogni spazio di Hilbert finito dimensionale è sempre possibile costruire una base ortonormale a partire da qualsiasi base

Capitolo 8

Spazi di Hilbert infinito dimensionali

Ci concentriamo sugli spazi separabili, cioè che hanno un sottoinsieme denso che è contabile
Diciamoc che il set $\{\vec{l_k}\}$ con $k \in \mathbb{N}$ in uno spazio di Hilbert infinito dimensionale è un sistema ortonormale Se

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} \quad \forall\, i, j \in \mathbb{N}$$

Se inoltre $\forall \vec{v}$ si può scrivere

$$\vec{v} = \sum_{[} i = 1]^{\infty} v_i \vec{e}_i \qquad v_i = (\vec{e}_i, \vec{v}) \in \mathbb{C}$$

allora il sistema $\{\vec{e}_k\}$ è un **sistema ortonormale completo** [S.O.N.C] o base di Hilbert
Oss. Abbiamo generalizzato la nozione di base usando ∞ elementi; ciò è possibile perchè abbiamo la nozione di limite

$$\vec{v} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i \qquad \vec{v} = \lim_{n\to\infty} \left|\left| \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i - \vec{v} \right|\right| = 0$$

Def. L'espansione

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{\infty} (\vec{e}_i, \vec{v}) \vec{e}_i$$

è chiamata **serie di Fourier** e i coefficienti v_i sono detti coefficienti di Fourier

Teorema. La serie $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$ converge $\iff$ $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$ converge

Oss. Come nel caso finito dimensionale valgono

- $(\vec{v}, \vec{e}_i) = 0 \quad \forall i \Rightarrow \vec{v} = 0$
- $||\vec{v}|| = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^2 \quad \forall \vec{v}$
- $\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V \Rightarrow (\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{v}_k w_k$

Def. Lo spazio $l^2(\mathbb{C})$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty$$

è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare
In generale gli spazi $l^p(\mathbb{R})$ o $l^p(\mathbb{C})$ con $1 \leq p < \infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

sono solamente dotati di norma, quindi sono spazi di Banach

Oss. Si può dimostrare utilizzando la disuguaglianza di Minkowski per le serie

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}|x_n + y_N|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=0}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Def. Gli spazi $l^{\infty}(\mathbb{R}/\mathbb{C})$ sono anch'essi spazi di Banach formati da successioni limitate e dotati di norma superiore

$$\sup_{0\leq n\leq\infty}|x_n| < \infty$$

Il tipico esempio di prodotto scalare su spazi di Hilbert infinito dimensionale è quello di funzioni sull'intervallo $[a, b]$

$$(f, g) = \int_a^b \bar{f}(x)g(x)\,dx$$

La somma L^1 rientra in questa categoria

8.1 Integrali

Integrale di Riemann

$$I = \sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i)f(\bar{x}_i)$$

Quando esiste finito il limite per $n \to \infty$ $x_{i+1} - x_i \to \infty$ si dice INTEGRALE DI RIEMANN e la funzione si dice integrabile secondo Riemann

Integrale Lebesgue

$$I = \sum_{i=1}^{n} f_i\mu(f^{-1}([f_{i+1} - f_i]))$$

con f_i una partizione del range di f e con $\mu(x)$ misura di X
La controimmagine di un intervallo non è necessariamente un intervallo

Capitolo 9

Spazio $L^1_w(\Omega)$

Def. Lo spazio $L^1_w(\Omega)$ è uno spazio di funzioni definite su un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}/\mathbb{C}$, Lebesgue-integrabili con norma

$$||f||_1 = \int_\Omega |f(x)| \underbrace{w(x)}_{misura} \, dx < \infty$$

Questi spazi $L^1_w(\Omega)$ sono spazi di Banach

Oss. Lo spazio delle funzioni continue su un intervallo $C([a,b])$ con norma

$$L^1 = \int_a^b f(x) \, dx$$

non è uno spazio di Banach, perchè non è completo

Oss. Se vogliamo che lo spazio $L^1_w(\Omega)$ sia uno spazio di Banach dobbiamo provare linearità, positività e disuguaglianza triangolare nella norma L^1_w

La linearità e la disuguaglianza trinagolare seguono facilmente dalle proprietà degli integrali, la positività vera per integrale di Riemann, ma non è più vera in generale per integrale di Lebesgue; dobbiamo allora definire $f(x) = 0$ quasi ovunque

Teorema (Riesz-Fischer)**.** L^1_w è completo e quindi di Banach

N.B. Per dimostrare che questo spazio è completo, bisogna usare ben due teoremi dell'integrale di Lebesgue $\Rightarrow$ questo vale solo per funzioni Lebesgue-integrabili

9.1 Spazi $L^p_w(\Omega)$

Spazio delle funzioni a valori complessi du regione $\Omega \subset \mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$ tale che

$$\int_\Omega |f(x)|^p w(x) \, dx < \infty \qquad p \geq 1 \in \mathbb{R}$$

Oss. Le funzioni uguali quasi ovunque sono considerate identiche

Oss. Gli spazi $L^p_w(\Omega)$ sono spazi di Banach con norma L^p_w

$$||f||_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p w(x) \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

La completezza di questi spazi si può dimostrare generalizzando il teorema di Riesz-Fischer

Oss. Ci sono due ulteriori disuguaglianze notevoli; se assumiamo che p e q siano coniugati, cioè $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ allora valgono

1. Disuguaglianza di Holder
$$||fg||_p \leq ||f||_p ||g||_p$$
2. Disuguaglianza di Minkowski
$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

Oss. Tra tutti i p possibili, il caso p=2 è particolare; $L^2_w(\Omega)$ non è solo uno spazio di Banach, ma anche uno spazio di Hilbert. Eínfatti l'unico su cui si può definire il prodotto scalare

$$(f,g) = \int_\Omega \bar{f}(x)g(x)w(x)\,dx$$

che induce norma L^2_w

$$||f||_2 = ((f,f))^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 w(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$L^2_w(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile e contiene sia funzioni continue $C(\Omega)$ sia funzioni con singolarità

Capitolo 10

Basi di Hilbert ed espansione di Fourier

Applicando la teoria generale degli spazi di Hilbert a $L^2_w(\Omega)$ si arriva alla conclusione che è possibile definire una base contabile di funzioni in $L^2_w(\Omega)$
Quindi una qualsiasi funzione $f \in L^2_w(\Omega)$ può essere espressa come combinazione degli infiniti elementi della base ortogonale

10.1 Basi ortonormali

Una funzione si dice normalizzata se la sua norma è 1; in particolare per $L^2_w(\Omega)$

$$||f||_2 = \int_\Omega |f(x)|^2 w(x)\, dx = 1$$

Def. Due funzioni sono **ortogonali** se

$$(f, g) = \int_\Omega \overline{f(x)} g(x) w(x)\, dx = 0$$

Def. Una **base ortonormale** è un set di funzioni $\Psi_n(x)$ con $n = 0, 1, \ldots, N$ su $L^2_w(\Omega)$ che soddisfano

$$(\Psi_n, \Psi_m) = \delta_{m,n} \qquad \forall\, m, n = 0, 1, \ldots, N$$

Oss. Se non ci sono altre funzioni ortogonali a tutti Ψ_n allora il sistema è completo. Quindi $\{\Psi_n\}$ è una base di Hilbert di $L^2_w(\Omega)$
Per la teoria generale degli spazi di Hilbert si può perciò espandere qualsiasi funzione $f \in L^2_w(\Omega)$ sulla base

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \Psi_n \qquad \text{serie di Fourier}$$

I coefficienti di Fourier C_n si calcolano

$$C_n = (\Psi_n, f) = \int_\Omega \overline{\Psi_n(x)} f(x) w(x)\, dx$$

Oss. La convergenza della serie di Fourier non implica che

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \Psi_n$$

converga puntualmente (cioè $\forall\, x$) ad f, ma va intesa come convergenza in norma $L^2_w(\Omega)$, cioè

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f(x) - \sum_{n=0}^{n} C_n \Psi_n|^2\, w(x)\, dx = 0$$

Oss. La serie di Fourier di una qualsiasi funzione a quadrato integrabile definita su $[a, b]$ converge alla funzione stessa in norma L_2

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left| \sum k = -n^n c_k \Psi_k - f \right|\right|_2 = 0$$

Oss. Se $f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow c_k = \overline{c}_{-k}$

Oss. La serie di Fourier su $L^2_{[a,b]}$ può essere anche scritta in forma trigonometrica usando

$$e^{\pm 2\pi i n \frac{x}{L}} = \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \pm i \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)$$

per cui

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)$$

In questa formulazione i coefficienti sono dati da

$$a_n = \frac{c_n + c_{-n}}{\sqrt{2}} \qquad b_n = \frac{i(c_n - c_{-n})}{\sqrt{2}}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx$$

Quindi la base della forma trigonometrica è data da

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{L}}, \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right), \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right\} \qquad n > 1$$

Le funzioni della base trigonometrica si chiamano **armoniche** e il numero $\frac{n}{L}$ si dice frequenza dell'armonica

Oss. Per definire i coefficienti della serie di Fourier

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{L}}\int_a^b e^{-2\pi i \frac{nx}{L}} f(x)\, dx$$

basta che $f(x) \in L^1_{[a,b]}$ e non per forza in $L^2_{[a,b]}$

10.2 Convergenza puntuale

Per semplicità assumiamo $[a, b] = [0, 2\pi]$
Se prendo $f(x) \in L^1_{[0,2\pi]}$ allora

$$c_n = (\Psi_n, f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)$$

sono ben definiti e si può costruire la serie di Fourier

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Osservo che la serie di Fourier ha termini che sono periodici con periodo 2π

$$e^{inx} = e^{i(nx+2\pi)}$$

Quindi posso estendere le funzioni f da $[0, 2\pi]$ a tutto $\mathbb{R}$ usando le condizioni periodiche per l'estensione

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

Allora posso studiare su tutto $\mathbb{R}$ la convergenza delle somme parziali

$$S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} e^{-iky} f(y)\, dy \right] e^{-ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-y)} f(y)\, dy$$

ora sfrutto la periodicità di f per cambiare variabile $z = x - y$ dato che

$$\int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

Allora ottengo

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikz} f(x+z)\, dz$$

introduco KERNEL DI DIRICHLET

$$D_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikz} = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} z\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}$$

per riscrivere

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+z) D_n(z)\, dz$$

dividendo integrale ottengo

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+z) - f(x-z)}{2} D_n(z)$$

Teorema (Dirichlet)**.**
Data f con periodo 2π che sia $L^1_{[0,2\pi]}$ tale che

$$\lim y \to x^{\pm} f(y) = f(x^{\pm})$$

e tale che esista integrale

$$\int_0^{\delta} \frac{f(x \pm y) - f(x^{\pm})}{y}\, dy$$

per qualche valore di δ, allora la serie di Fourier

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

converge a

$$\begin{cases} f(x) & \text{se f è continua} \\ \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] & \text{se f è discontinua} \end{cases}$$

Oss. Il teorema di Dirichlet si applica a tutte le funzioni C^1 a pezzi

Capitolo 11

Polinomi ortonormali

Si può applicare metodo ortogonalizzazione di Gram-Schmidt anche a basi $\infty-$dimensionale.
Solitamente si parte da monomi con potenze diverse: $1, x, x^2, x^3, \dots$ eventualmente moltiplicati per funzioni a decrescenza rapida per renderle integrabili a $\pm\infty$
Queste sono soluzioni linearmente indipendenti e tramite Gram-Schimdt si può arriavre a sestema ortormale completo su $L^2_w[a, b]$
Ci sono vari esempi di polinomi ortogonali, la cui forma dipende principalmente dall'intervallo $[a, b]$ e dalla misura $w(x)$

1. $[a, b]$ finito, $w(x) = 1 \Rightarrow [-1, 1]$ polinomi di Legendre
2. $[0, \infty]$, $w(x) = e^{-x} \Rightarrow$ polinomi di Laguerre
3. $[-\infty, \infty]$, $w(x) = e^{-x^2} \Rightarrow$ polinomi di Hermite

11.1 Polinomi di Legendre

Ci focalizziamo sull'intervallo $[-1, 1]$ (viene dal fatto che sono associati a soluzioni a simmetria sferica e rappresentano la dipendenza da $-1 < \cos\theta < 1$)
I polinomi di Legendre si indicano con $P_l(x)$ o $P_l(\cos(\theta))$ e si possono ricavare dalla formula di Rodrigues

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^- 1)^l \qquad l \in \mathbb{N}$$

Si possono anche ricavare anche dalla funzione generatrice

$$F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l$$

I polinomi di Legendre sono normalizzati in modo che

$$P_l(1) = 1$$

Si ha che i primi polinomi sono

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

in generale si ha $P_l(x)$ è un polinomio di grado massimo l in x
Vale la relazione di parità

$$P_l(-x) = -1^l P_l(x)$$

I polinomi di Legendre soddisfano le seguenti relazioni ricorsive

$$P'_{l+1}(x) = (l+1)P_l(x) + xP'_l(x)$$
$$P'_{l-1}(x) = -lP_l(x) + xP'_l(x)$$
$$(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x)$$

Questi polinomi soddisfano un'equazione differenziale particolare che si chiama equazione di Legendre

$$(1+x^2)P''_l(x) - 2xP'_l(x) + l(l+1)P_l(x) = 0$$

Ma la loro vera utilità è la condizione di ortogonalità

$$(P_l, P_m) = \int_{-1}^{1} P_l(x)P_m(x)\,dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{lm}$$

quindi posso definire le funzioni ortonormali

$$u_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}}P_l(x)$$

tali che $\{u_l\}$ forma un sistema ortonormale completo, cioè una base di Hilbert di $L^2[-1,1]$

Teorema (Approssimazione di Weierstrass)**.**
Ogni funzione continua f(x) su [a,b] limitato è il limite uniforme di una successione di polinomi $\{Q_n(x)\}$

Oss. Dato che i polinomi di Legendre sono una base di Hilbert di $L^2[-1,1]$ si può espandere una qualsiasi funzione su [-1,1] in serie di Fourier usando come base $u(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}}P_l(x)$

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l u_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \sqrt{\frac{2l+1}{2}}P_l(x) \qquad a_l = (u_l, f) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}}\int_{-1}^{1} P_l(x)f(x)\,dx$$

si chiama sviluppo di Legendre di una funzione

11.2 Polinomi di Laguerre

I polinomi di Laguerre sono un S.O.N.C per $L^2[0,\infty]$ con misura $w(x) = e^{-x}$. Si costruiscono ortogonalizzando con Gram-Schmidt i monomi $1, x, x^2, \ldots$ e si ottiene

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x}x^n] \qquad n \in \mathbb{N}$$

si possono anche definire tramite funzione generatrice

$$F(x,t) = \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$$

I primi polinomi sono

$$L_0(x) = 1 \qquad L_1(x) = 1-x \qquad L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$$

in generale $L_n(x)$ è un polinomio di grado massimo n in x
Gli $L_n(x)$ soddisfano le seguenti relazioni di ricorrenza

$$L_{n-1}(x) = L'_{n-1}(x) - L'_n(n)$$
$$xL'_n(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$
$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

soddisfano inoltre l'equazione differenziale di Laguerre

$$xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0$$

I polinomi sono ortogonali con misura $w(x) = e^{-x}$

$$(L_n, L_m) = \int_0^\infty L_n(x)L_m(x)e^{-x}\,dx = \delta_{nm}$$

Quindi le funzioni $L_n(x)$ sono un S.O.N.C. di $L^2_w[0,\infty]$ con $w = e^{-x}$, oppure si possono usare le funzioni $L_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ per fare un S.O.N.C. $L^2[0,\infty]$ con $w = 1$

11.3 Polinomi di Hermite

Sono un S.O.N.C. per $L^2_w[-\infty,\infty]$ con $w(x) = e^{-x^2}$. Sono definiti da

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \qquad n \in \mathbb{N}$$

oppure tramite la funzione generatrice

$$F(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n$$

I primi polinomi sono

$$H_0(x) = 1 \qquad H_1(x) = 2x \qquad H_2(x) = 4x^2$$

In generale $H_n(x)$ sono polinomi di grado massimo n in x
La parità dipende da n

$$H_N(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

Soddisfano le relazioni di ricorrenza

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$$
$$Hn+1(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

e soddisfano l'equazione differenziale di Hermite

$$H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0$$

Per $n \neq m$ ho

$$(H_n, H_m) = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}\,dx = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{n,m}$$

Se voglio avere una base ortonormale devo normalizzare gli $H_n(x)$ tramite

$$h_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}$$

che sono un S.O.N.C. per $L^2[-\infty,\infty]$
Allo stesso modo si possono definire

$$w_n(x) = h_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

che sono un S.O.N.C. su $L^2[-\infty,\infty]$ con $w(x) = 1$

11.4 Trasformata di Fourier

Parte III

Distribuzioni

Distribuzione: concetto che generalizza ed estende il concetto di funzione

Def. Una **distribuzione** è un funzionale lineare, cioè una mappa

$$T: \ \phi(x) \to T(\phi) \in \phi$$

da uno spazio di funzioni di prova $\phi(x) \in F$ (spazio delle funzioni di prova) al campo dei numeri complessi

Ad ogni funzione f(x) si può associare il funzionale T_f tale che

$$\forall \phi(x) \in F \qquad T_f(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\, dx$$

Oss. In generale si può usare funzionale lineare generale e possiamo definire su quest'ultimo operazioni che non possono essere ben definite sulla funzione di partenza

Capitolo 12

Lo spazio delle funzioni di prova

Vogliamo test functions di una sola variabile (estensione a più dimensioni è banale) e vogliamo inoltre che $\phi(x) \in F$ sia il più regolare possibile, quindi

$$\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$$

inoltre per garantire che per esempio

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\,dx < \infty$$

chiediamo che le ϕ siano soppresse a $\pm\infty$; come viene implementata questa richiesta determina lo spazio F

1. Spazio $D(\mathbb{R})$ delle funzioni $C^{\infty}(\mathbb{R})$ a supporto compatto

   Def. Il **supporto** è la chiusura dei punti in cui la funzione non è nulla

   $$supp\{f\} = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}$$

2. Spazio $S(\mathbb{R})$ delle funzioni $C^{\infty}(\mathbb{R})$ a decrescenza rapida

12.1 Spazio $D(\mathbb{R})$

$$D(\mathbb{R}) = \{\phi(x) \mid \phi \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \text{ con supporto compatto}\}$$

Compatto in $\mathbb{R}$ significa chiuso e limitato

Oss. $D(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale, ma è anche uno spazio topologico; tuttavia la topologia non è indotta dalla metrica. A noi interessa solo capire come definire la nozione di convergenza nello spazio topologico di $D(\mathbb{R})$

Def. Una **sequenza** di test functions $\{\phi_n\} \in D(\mathbb{R})$ converge a $\phi \in D(\mathbb{R})$ se valgono

- esiste un intervallo limitato $\hat{I} \subset \mathbb{R}$ che contiene il supporto di tutte le ϕ_n
- esiste un numero reale r tale che

  $$\phi_n(x) = \phi(x) = 0 \qquad \forall\,|x| > r$$

- la sequenza delle derivate p-esime di $\phi_n(x)$ converge uniformemente alla derivata p-esima di $\phi(x)$

  $$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{d^p\phi_n(x)}{dx^p} - \frac{d^p\phi(x)}{dx^p} \right| = 0 \qquad \forall\, p = 1, 2, 3, \ldots$$

N.B. $p = 0$ significa $\phi_n \to \phi$ uniformemente

Oss. Tutte le funzioni $\phi(x)$ in $D(\mathbb{R})$ non sono analitiche

Oss. $D(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ perchè le ϕ sono a quadrato sommabile; inoltre $D(\mathbb{R})$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$

12.2 Spazio $S(\mathbb{R})$

$$S(\mathbb{R}) = \left\{ \phi(x) \mid \phi \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \text{ e } \lim_{x \to \pm\infty} x^p \frac{d^p}{dx^p} f(x) = 0 \quad \forall\, p, q = 0, 1, 2, \ldots \right\}$$

Def. Una sequenza $\{\phi_n\} \in S(\mathbb{R})$ **converge** a $\phi \in S(\mathbb{R})$ se una qualsiasi potenza di x moltiplicata per una qualsiasi derivata di ϕ_n converge uniformemente ala stessa combinazione di x e derivate di ϕ, cioè

$$\forall\, p, q \qquad \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^p \frac{d^p}{dx^p} \phi_n(x - x^p \frac{d^p}{dx^p} \phi(x)) \right| = 0$$

Oss. Ogni $\phi \in S(\mathbb{R})$ è a quadrato sommabile, quindi

$$S(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$$

in effetti $S(\mathbb{R})$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$, cioè ogni elemento di $L^2(\mathbb{R})$ può essere visto come limite di una successione di elementi di $S(\mathbb{R})$

Def. Chiamiamo **distribuzione** un funzionale che associa un numero complesso ad una test function

$$\phi(x) \to T(\phi) \in \mathbb{C}$$

che ha le seguenti proprietà

1. è lineare

$$T(\lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2) = \lambda_1 T(\phi_1) + \lambda_2 T(\phi_2) \qquad \forall \phi_1, \phi_2 \in D(\mathbb{R}) \text{ o } S(\mathbb{R}) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

2. è continua, nel senso che data una sequenza di test functions $\{\phi_n\} \in F$ che converge a $\phi \in F$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} T(\phi_n) = T(\phi)$$

Def. Se $\phi \in D(\mathbb{R})$ allora $T(\phi)$ si chiama **distribuzione** e lo spazio vettoriale definito dai T è chiamato $D'(\mathbb{R})$
Se $\phi \in S(\mathbb{R})$ allora $T(\phi)$ si chiama **distribuzione temperata** e lo spazio associato $S'(\mathbb{R})$

Oss. Gli spazi vettoriali delle distribuzione $D'(\mathbb{R})$ e $S'(\mathbb{R})$ sono a loro volta spazi vettoriali

$$(T_1 + T_2)(\phi) = T_1(\phi) + T_2(\phi) \qquad \forall \phi \in F$$
$$(\lambda T)(\phi) = \lambda T(\phi) \qquad \forall \phi \in F \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

N.B. Dato che $D(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$ si ha che lo spazio delle distribuzioni , cioè dei funzionali che si possono definire su tutte le funzioni in F, avrà la relazione opposta, cioè

$$S'(\mathbb{R}) \subset D'(\mathbb{R})$$

lo spazio delle distribuzioni temperate è un sottospazio delle distribuzioni

Capitolo 13

Distribuzioni regolari

Def. Diciamo che una funzione f(x) è **localmente integrabile**

$$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$$

se l'integrale del modulo di un qualsiasi sottoinsieme k compatto di $\mathbb{R}$ è finito

$$\int_k |f(x)|\, dx < \infty$$

Teorema. Ad ogni $f(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ posso associare una distribuzione regolare

$$T_f(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\, dx$$

e si ha che

$$T_f(\phi) \in D'(\mathbb{R})$$

Oss. Il T_f così definito è molto simile al prodotto scalare di $L^2(\mathbb{R})$ e coincide con esso quando $f(x) \in \mathbb{R}$

$$T_f(\phi) =< T, \phi >= (f^*, \phi) \qquad (f, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f^* \phi\, dx$$

Oss. Qualsiasi funzione C^∞ può essere vista come una distribuzione

$$\sin x \;\; \cos x \;\; \log x \;\; P(x)$$

hanno tutte

$$T_{\sin} \;\; T_{\cos} \;\; T_{\log} \;\; T_p \in S'(\mathbb{R})$$

invece $T_{e^x} \notin S'(\mathbb{R})$ perchè non basta $\phi \in S(\mathbb{R})$ per sopprimere e^x, ma devo richiedere $\phi \in D(\mathbb{R})$, allora

$$T_{e^x} \in D'(\mathbb{R})$$

N.B.

$$D(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset S'(\mathbb{R}) \subset D'(\mathbb{R})$$

Ogni spazio è denso in quelli che lo includono

Capitolo 14

Distribuzioni singolari

La maggior parte delle distribuzioni non può essere scritta come

$$T_f = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\,dx$$

Quindi sono nuovi oggetti che chiamiamo **distribuzioni singolari**

14.1 Delta di Dirac

Associa ad una test function $\phi(x)$ il suo valore x_0

$$\delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0)$$

Il funzionale δ_{x_0} è lineare

$$\delta_{x_0}(\phi - 1 + \phi_2) = \phi_1(x_0) + \phi_2(x_0)$$

è anche continuo, infatti una sequenza $\{\phi_L\} \in D(\mathbb{R})$ tale che $\phi_n \to \phi$ uniformemente

$$|\delta_{x_0}(\phi_n) - \delta_{x_0}(\phi)| = |\phi_n(x_0) - \phi(x)|$$

ma dato che $\phi_n \to \phi$ uniformemente implica convergenza puntuale

$$\phi_n(x_0) - \phi(x_0) = 0$$

Quindi $\delta_{x_0}(\phi)$ è anche ben definita sulle $\phi \in S(\mathbb{R})$, allora è una distribuzione temperata

$$\delta_{x_0} \in S'(\mathbb{R})$$

In fisica si usa notazione

$$\delta_{x_0}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\phi(x)\,dx = \phi(x_0)$$

sembra che esista funzione $\delta(x - x_0)$ che estrae $\phi(x_0)$, ma una funzione che realizzi ciò $\forall\phi$ non è possibile, quindi $\delta_{x_0}(\phi)$ è una distribuzione

N.B. Quando $x = 0$ si scrive $\delta(x)$, ma si intende $\delta_0(\phi)$

14.2 Principal value

Se considere $f(x) = \frac{1}{x} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$ quindi non è possibile considerarla una distribuzione tramite la T_f associata. Possiamo definire una dstribuzione temperata che si comporta quasi ovunque come $\frac{1}{x}$

$$T(\phi) = \int_0^{\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x}\,dx = P\left(\frac{1}{x}\right) \text{ o } P.V.\left(\frac{1}{x}\right)$$

questo è un modo per regolarizzarla; alternativamente possiamo definire

$$T_{\pm}(\phi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x \pm i\varepsilon} \, dx$$

e ottenere una relazione valida per qualsiasi ϕ test function

$$\frac{1}{x \pm i0} = P\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta(x)$$

Oss. Il principal value o la $T_{\pm}$ non sono ben definite per $\frac{1}{x^2} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. In quel caso si usa la finite part

$$f.p.(\phi) = T(\phi) = \int_0^{\infty} \frac{\phi(x) + \phi(-x) - 2\phi(0)}{x^2}$$

questa regolarizza anche $\frac{1}{x^2}$

Oss. Anche se le si denotano le distribuzioni come funzioni, esse non lo sono e il loro effetto è unicamente determinato dal modo in cui agiscono sulle test function

Oss. A volte si parla di supporto di una distribuzione come la chiusura dei punti in cui $T_f(\phi) \neq 0$

Capitolo 15

Limiti di distribuzioni

La successione di distribuzione $\{T_n\} \in D'(\mathbb{R})$ converge a $T \in D'(\mathbb{R})$ e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T$$

se $\forall\phi \in D(\mathbb{R})$ si ha che

$$\lim_{n\to\infty} T_n(\phi) = T(\phi)$$

Questo si chiama limite in senso debole, perchè è definito considerando l'azione sulle test function. Ciò vuol dire che tale limite non implica nè convergenza puntuale, nè convergenza uniforme e neanche convergenza in qualsiasi norma L^p

Oss. La delta di Dirac si può rappresentare in diversi modi equivalenti come distribuzioni regolari

$$f_n(x) = \left\{ \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}, \frac{1}{n\pi}\left(\frac{\sin(nx)}{x}\right)^2, \frac{1}{n\sqrt{\pi}}\frac{1}{x^2+\frac{1}{n^2}}, \dots \right\}$$

sono tutte rapresentazioni equivalenti di δ_{x_0}; partono tutte da funzioni con area unitaria

$$f(x) = \left\{ \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2, \frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+1} \right\}$$

tramite riscalamento

$$f_n(x) = nf(nx)$$

Posso costruire la delta come limite di una qualsiasi funzione ad area unitaria

Capitolo 16

Operazioni sulle distribuzioni

L'idea è di agire con funzioni con operazioni su funzioni di prova: si parte da distribuzioni regolare, si muove l'operazione sulle funzioni di prova, poi si usa lo stasso approccio anche per distribuzioni singolari

16.1 Cambio di variabili

Le distribuzioni non sono definite puntualmente, ma per distribuzioni regolari $T_f(\phi)$ posso considerare $g(x) = f(u(x))$, anche scritta come composizione $g = f \circ u$ con $u(x) \in C^\infty$ tale che $u'(x) \neq 0$, cioè una mappa 1 a 1 di $\mathbb{R}$ in se stesso
Allora abbiamo

$$T_g(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u(x))\phi(x)\, dx$$

Cambio di variabile

$$y = u(x) \Rightarrow dy = u'(x)dx \quad x = u^{-1}(y)$$

Allora

$$T_g(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{|u'(x)|}\, f(y)\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{|u'(u^{-1}(y))|}\, f(y)\phi(u{-}1(y)) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\, \underbrace{\left[\frac{\phi(u{-}1(y))}{|u'(u^{-1}(y))|}\right]}_{\text{Nuova test function}}$$

quindi

$$T_g = T_{f\circ u}(\phi) = T_f\left(\frac{\phi \circ u{-}1(y)}{|u' \circ u^{-1}(y)|}\right)$$

Questo spostare l'operazione da f a ϕ è ben definito perchè $\phi \in D(\mathbb{R})$ e allora

$$\frac{\phi \circ u^{-1}(y)}{|u' \circ u^{-1}(y)|} \in D(\mathbb{R})$$

In generale estendendo il concetto alle distribuzioni, anche singolari si ha

$$(T \circ u)(\phi) = T\left(\frac{\phi \circ u^{-1}(y)}{|u' \circ u^{-1}(y)|}\right)$$

Traslazione delta di Dirac

Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ e δ_{x_0} vogliamo applicare traslazione

$$R_a(x) = x + a$$

La traslazione di $\delta(x - x_0)$ di una quantità a è data da

$$\delta(x - (x_0 - a)) = \delta(x + a - x_0)$$

Dilatazione delta di Dirac

Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ e δ_0 vogliamo applicare dilatazione

$$D_\lambda(x) = \lambda x$$

si ottiene

$$\delta(\lambda x) = \frac{\delta_x}{|\lambda|}$$

In generale, per un qualsiasi cambio di variabile alla distribuzione δ_{x_0} (se ci sono più zeri di $u(x)$) si ha

$$\delta(u(x)) = \sum_i \frac{\delta(x_i)}{|u'(x_i)|}$$

16.2 Moltiplicazione distribuzione per una funzione C^∞

Data $g(x) \in c\infty(\mathbb{R})$ si ha

$$(gT)(\phi) = T(g\phi)$$

16.3 Complesso coniugato distribuzione

$$\overline{T}(\phi) = (\overline{T(\overline{\phi})})$$

si può vedere anche per distribuzioni regolari

$$T_{\bar{f}}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x)\phi(x)\,dx = (\overline{T(\overline{\phi})})$$

16.4 Derivata di una distribuzione

Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tale che $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ si può definire per distribuzioni regolari

$$T_{f'}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x)\,dx = -T_f(\phi')$$

estendendolo anche a distribuzioni singolari

$$T'(\phi) = -T(\phi')$$

Dato che $\phi \in C^\infty$ posso fare tutte le derivate che voglio in senso distribuzioni

$$T^{(n)}(\phi) = (-1)^n T(\phi^{(n)})$$

Oss. In generale la derivata in senso distribuzionale si può applicare a una qualsiasi funzione con discontinuità f in x_0

$$T'_f = T_{f'} + disc(f, x_0)\delta_{x_0} \qquad disc(f, x_0) = f(x_0^+) - f(x_0^-)$$

16.5 Convoluzione di distribuzioni

Non si possono moltiplicare 2 distribuzioni perchè non sono definite puntualmente; il prodotto più naturale tra distribuzioni è la convoluzione, che per funzioni è definita da

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x - x')\,dx'$$

se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ allora $f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$
Valgono le seguenti proprietà

$$\begin{gathered}
f_1 * f_2 = f_2 * f_1 \\
(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3) \\
f_1 * (\lambda f_2 * \mu f_3) = \lambda(f_1 * f_2) + \mu(f_1 * f_3) \\
(f_1 * f_2)' = f_1' * f_2 - f_1 * f_2'
\end{gathered}$$

Se applichiamo la convoluzione a distribuzioni regolari abbiamo

$$T_{f*g}(\phi) = T_f(g * \phi)$$

Generalizzando a due distribuzioni T e S anche singolari, di cui almeno una delle due in $D'(\mathbb{R})$, cioè a support compatto, abbiamo

$$(T * S)(\phi) =< T(y), \underbrace{< S(x), \phi(x+y) >}_{\text{ottengo funzione } C^\infty \text{ di y}} >$$

La convoluzione di distribuzioni così definita soddisfa le proprietà

Oss. L'identità per le distribuzioni è data da

$$< \delta * T, \phi >= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) T(x) \phi(x+y)\, dx =< T, \phi >$$

Capitolo 17

Operatori su spazi finito dimensionali

Dati due spazi vettoriali complessi X e Y con $dim(X), dim(Y) < \infty$, si deinisce **operatore lineare** A un mappa

$$A: \; X \mapsto Y$$

che soddisfi

$$A(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda A(\vec{v}) + \mu A(\vec{w}) \qquad \forall\lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad \forall\vec{v}, \vec{w} \in X$$

si usa la notazione A(x) per indicare l'effetto dell'operatore di $x \in X$; si usa anche la notazione Ax perchè ogni operatore lineare A su spazi finito dimensionali si può rappresentare come una matrice

Def (Kernel).

$$\ker A = \{x \in X \mid Ax = 0\} \quad \text{sottospazio di X}$$

Def (Immagine).

sottospazio di Y

Una qualsiasi matrice $m \times n$ A_{ij} è un operatore lineare da $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$; gli elementi di $X = \mathbb{C}^n$ sono $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ sono mappati in $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^m$ tramite relazione

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} A_{ij}x_j = A_{ij}x_j \qquad \text{notazione di Einstein: gli indici ripetuti sono sommati}$$

Se adesso prendiamo base di X $\{u_i\}$ con $i = 1, \ldots, n$ e prendiamo base di Y $\{u'_i\}$ con $i = 1, \ldots, m$ si ha che $\forall\, x, y$ si può scrivere

$$x = x_i u_i \quad y = y_i u'_i$$
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \quad y = \sum_{i=1}^{m} y_i u'_i$$

Quindi se applichiamo operatore A su elemento della base di X troviamo un vettore in Y

$$A(u_i) \in Y$$

Se appartiene a Y lo posso espandere su $\{u'_i\}$ tramite

$$A(u_i) = A_{ij}u'_j = \sum_{j=1}^{m} A_{ij}u'_j$$

Applicando lo stesso ad un generico vettore $x \in X$

$$A(x) = A(x_i u_i) = \underbrace{x_i A_i j}_{y_i} u'_j = y_i u'_j$$

quindi

$$y_i = A_{ij}x_j$$

Se X e Y sono anche spazi di Hilbert si possono definire le basi ortonormali $\{e_j\}, \{e'_j\}$ e si può trovare la matrice A come proiezione sugli elementi della base

$$A_{ij} = (e_j, Ae_j)$$

Lo spazio degli operatori lineari da X a Y è anch'esso uno spazio vettoriale complesso e vale

$$(\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2)(x) = \mu_1 A_1(x) + \mu_2 A_2(x) \qquad \forall \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C} \quad A_1, A_2 \text{ operatori lineari}$$

Questo spazio degli operatori linaeri si chiama **endomorfismo** di X e Y

$$End(X, Y)$$

è isomorfo dello spazio Mat(m,n) di tutte le matrici $m \times n$ con $m = dim(Y)$ e $n = dim(X)$

17.1 Spazio duale

Def. Funzionale lineare è un operatore lineare α da spazio vettoriale X a $\mathbb{C}$; associa a $x \in X$ un valore $\alpha(x) \in \mathbb{C}\, \forall x \in X$

Def. Lo spazio vettoriale di tutti i funzionali lineari in X si chiama **spazio duale** di X e si indica con X^*

Oss. $\forall$ base $\{u_i\}$ su X esiste una base $\{u_k^*\}$ su X^*; si ha che $dimX^* = dimX$ e X, X^* sono isomorfi

Oss. Se $x \in X$ è rappresentato da $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vettore colonna che è necessario per prodotto matrice per colonna, allora $x^* \in X^*$ è un vettore riga $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ dei complessi coniugati; si ha inoltre che gli elementi delle basi danno

$$(u_j^*, u_i) = \delta_{ij}$$

ogni volta che X ammette prodotto scalare

L'insieme dei funzionali lineari è a sua volta uno spazio vettoriale

$$X^* = End(X, \mathbb{C})$$

isomorfo a Mat(1,n)

Oss. Se X è anche uno spazio di Hilbert possiamo definire un funzionale lineare associato $\forall x \in X$ tramite

$$\alpha_x(x') = (x, x') = \underbrace{x_1^*, \dots, x_n^*}_{\in X^*} \underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}}_{\in X}$$

Se espamndo x rispetto alla base ortonormale $\{e_k\}$ trovo

$$(x, x') = \bar{x}_k x_k = \sum_k \bar{x}_k e_k^* x_{k'} e_{k'}$$

quindi

$$(\alpha_x)_k = \bar{x}_k$$

Def. Dato A su H di Hilbert definiamo **operatore aggiunto** A^+ come operatore che soddisfa

$$(v, A^+ w) = (Av, w) \qquad \forall\, v, w \in H$$

Se scegliamo una base ortogonale su H allora A è una matrice e si ha

$$(Av)_i = A_{ij} v_j$$

allo stesso modo

$$(A^+ w)_i = A^+_{ij} w_j$$

quindi si ottiene

$$A^+_{ij} = \bar{A}_j i$$

L'operatore aggiunto è il complesso coniugato del trasposto

$$A^+ = \left(A^T\right)^*$$

Proprietà:

$$\begin{aligned}
\left(A^+\right)^+ &= A \\
\left(A^+\right)^{-1} &= \left(A^{-1}\right)^+ \\
(AB)^+ &= B^+ A^+ \qquad \forall\, A, B \in H^* \\
(\alpha A + \beta B)^+ &= \bar{\alpha} A^+ + \bar{\beta} B^+ \qquad \forall\, B, A \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Def. A è **autoaggiunto o hermitiano** se $A^+ = A$ cioè se

$$(Av, w) = (v, A^+ w) \qquad \forall\, v, w \in H$$

A è **antihermitiano** se $A^+ = -A$

Oss. Se a è reale allora $A^* = A$ quindi

$$A^+ = A$$

questo vuol dire che $A^T = A$ allora A è simmetrica

Def. Gli **operatori unitari** sono operatori invertibili tali che

$$U^+ = U^{-1}$$

l'aggiunto è uguale all'inverso, cioè

$$UU^+ = UU^{-1} = \mathbb{I}$$

Oss. Gli operatori unitari preservano i prodotti scalari e quindi le norme

$$(Uv, Uw) = (v, w)$$

Sono quindi isomorfismi di H in se stesso

Teorema. Gli operatori unitari mappano basi ortonormali in basi ortonormali

17.2 Teoria spettrale

Studia autovalori e autovettori degli operatori lineari su spazi di Hilbert. Nel caso finito-dimensionale questa è l'algebra lineare

Def. Dato

$$A:\ x \mapsto X$$

si dice **autovalore** di A un numero $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che esiste $u \neq 0 \in X$ per cui valga

$$Au = \lambda u$$

Def. L'insieme degli autovalori di A è detto **spettro** di A e si indica con

$$\sigma(A)$$

Def. Gli $u \in X$ per cui vale

$$Au = \lambda u$$

si chiamano **autovettori**

Oss. Gli autovettori non sono unici: posso sempre riscalarli o prendere una combinazione lineare di due o più autovettori che corrispondono allo stesso autovalore e trovare un autovettore

$$A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 A u_1 + \alpha_2 A u_2 = \lambda(\alpha_1 u - 1 + \alpha_2 u_2)$$

Oss. Autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono linearmente indipendenti

Def. L'**autospazio** L_λ è uno spazio vettoriale degli autovettori associati ad un autovalore λ

$$L_\lambda = \{u \in X \mid Au = \lambda u\}$$

Per trovare autovalori e autovettori si risolve equazione

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$$

questa equazione è un polinomio di grado n in λ

Polinomio caratteristico

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$$

Per il teorema fondamentale dell'algebra il polinomio di grado n su $\mathbb{C}$ ha esattamente n soluzioni (naturalmente contate con la loro molteplicità)

Se ora assumiamo che gli autovalori siano diversi tra loro allora questi determinano $\{u_i\}$ autovettori linearmente indipendenti con

$$\dim\{u_i\} = n$$

gli autovettori sono una base di X, su quella base A si scrive come

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

abbiamo diagonalizzato la matrice associata all'operatore A
Quando il polinomio caretteristico ha autovalori con molteplicità maggiore di 1 si hanno 2 possibili casi

1. Ordine dello zero in $P_A(\lambda) > 1 \Rightarrow$ molteplicità algebrica $m_a(\lambda)$

2. Dimensione dell'autospazio L_{λ_i} associata a$\lambda \Rightarrow$ molteplicità geometrica $m_g(\lambda) = \dim L_\lambda$

Def. Se $m_a(\lambda) > 1$ allora si dice che l'autovalore è degenere

Oss. Per teorema fondamentale dell'algebra

$$\sum_\lambda m_a(\lambda) = n = \dim X$$

però $m_a(\lambda)$ e $m_g(\lambda) = \dim L_\lambda$ non devono per forza coincidere per ogni λ; in generale

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n$$

Teorema. A si dice diagonalizzabile se e solo se

$$m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$$

esiste cioè una base in cui A si può scrivere in forma diagonale

Teorema. Per operatore A hermitiano se H è di Hilbert abbiamo

1. gli autovalori di A sono reali
2. gli autovettori di A associati ad autovalori diversi sono ortogonali
3. gli autovettori di A (opportunamente normalizzati) formano una base ortonormale

Teorema. In maniera analoga si può provare che per operatore U unitario valgono

1. gli autovalori sono complessi $\lambda \in \mathbb{C}$ ma con $|\lambda| = 1$
2. gli autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali
3. esiste una base ortonormale costituita dagli autovettori

Oss. Gli operatori hermitiani e unitari appartengono alla stessa classe di operatori normali, coè

$$AA^+ = A^+A$$

tali operatori ammettono sempre una base di autovettori e quindi sono diagonalizzabili

17.3 Funzioni di operatori

Dati due operatori lineari

$$A_1, A_2 : \ X \mapsto X$$

spazio vettoriale, possiamo definire somma e prodotto

$$\begin{aligned} \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \qquad (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)v = \alpha_1 A_1 v + \alpha_2 A_2 v \\ \forall\ v \in X \qquad (A_1 A_2)v = A_1(A_2 v) \end{aligned}$$

quindi posso definire polinomi di operatori

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k \qquad A^0 = \mathbb{I}$$

Lo stesso approccio si può usare per qualsiasi funzione che sia scrivibile come serie di potenze

N.B. La definizione ha senso solo se la serie converge

Per operatore finito dimensionale A è sempre limitato, quindi se il raggio di convergenza della serie è R si avrà che la serie converge se

$$||A|| < R$$

Per operatori diagonalizzabili è ancora più semplice

$$A = U^{-1} A_{diag} U \qquad f(A_{diag}) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

quindi

$$f(A) = U^{-1} A_{diag} U = U^{-1} \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} U$$

Oss. Se la funzione f è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ si può definire f(A) tramite **formula di Dunford**