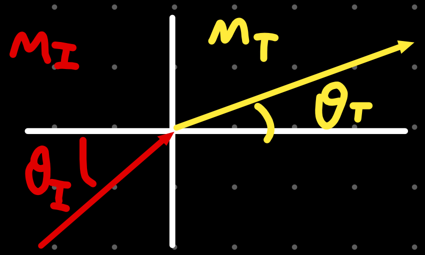
OTTICA GEOMETRICA

L'ottica geometrica descrive la propagazione della luce sulla base di leggi empiriche

1) la luce si propaga in linea retta in un mezzo continuo

2) LEGGE DI CARTESIO : $\theta_{INCIDENZA} = \theta_{RIFLESSIONE}$
↳ riflessione su una superficie liscia

3) LEGGE DI SNELL : $n_I \sin\theta_I = n_T \sin\theta_T$ → angoli calcolati rispetto alla normale



Raggio incidente, riflesso e trasmesso sono complanari

Tutte le relazioni dell'ottica geometrica sono compatibili con teoria C.E.M.
↳ valide fino a che la natura ondulatoria non si manifesta

Dalle relazioni di fase tra i campi all'interfaccia dei mezzi si ottengono le leggi:

- RIFLESSIONE
- RIFRAZIONE

Condizione continuità all'interfaccia

$E_{1//} = E_{2//}$ $\quad\quad$ $H_{1//} = H_{2//}$

$D_{1\perp} = D_{2\perp}$ $\quad\quad$ $B_{1\perp} = B_{2\perp}$

Descriviamo campi come un'onda piana : $\tilde{F} = F e^{i(w_I t - \vec{k}_I \cdot \vec{r})}$

$\vec{r} \in (x, y, 0)$ sull'interfaccia

$\tilde{F}_1 = \tilde{F}_I + \tilde{F}_R$ (incidente e riflesso)

$\tilde{F}_2 = \tilde{F}_T$ (trasmesso)

Condizione continuità impone $\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2$ $\forall t$ e $\vec{r}$ lungo interfaccia

$$\tilde{F}_I e^{i(w_1 t - \vec{k}_I \cdot \vec{r})} + \tilde{F}_R e^{i(w_1 t + \vec{k}_R \cdot \vec{r})} = \tilde{F}_T e^{i(w_2 t - \vec{k}_T \cdot \vec{r})} \qquad \vec{r} \in (x,y,0)$$

onda riflessa è regressiva

- Condizione in $(0,0,0)$

Allora $w_1 t = w_2 t$ → per essere verificata $\forall t$ => $w_1 = w_2$

STESSA FREQUENZA NEI DUE MEZZI

- Condizione $t=0$ $\quad F_{0I}\, e^{-i\vec{k}_I \cdot \vec{r}} + F_{0R}\, e^{i\vec{k}_R \cdot \vec{r}} = F_{0T}\, e^{-i\vec{k}_T \cdot \vec{r}}$

per essere verificata $\forall (x,y,0)$ => $e^{-i\vec{k}_I \cdot \vec{r}} = e^{i\vec{k}_R \cdot \vec{r}} = e^{-i\vec{k}_T \cdot \vec{r}}$

Quindi → $\vec{k}_I \cdot \vec{r} = -\vec{k}_R \cdot \vec{r} = \vec{k}_T \cdot \vec{r}$

- lungo asse y $(x=0)$

$(k_I)_y\, y = -(k_R)_y \cdot y = (k_T)_y\, y$

- lungo asse x $(y=0)$

$(k_I)_x\, x = -(k_R)_x\, x = (k_T)_x \cdot x$

Scelta assi è arbitraria → scelgo x,z nel piano di incidenza del raggio
ossia nel piano di $\vec{k}_I$

In queste ipotesi

$(k_I)_y = 0 \;\Rightarrow\; (k_T)_y = (k_R)_z = 0$

Anche $\vec{k}_R$ e $\vec{k}_T$ giacciono nello stesso piano x,z perchè sono complanari

* $(k_I)_x = (k_R)_x \implies |k_I| \sin\theta_I = |k_R| \sin\theta_R \Rightarrow \theta_I = \theta_R$

LEGGE DI CARTESIO

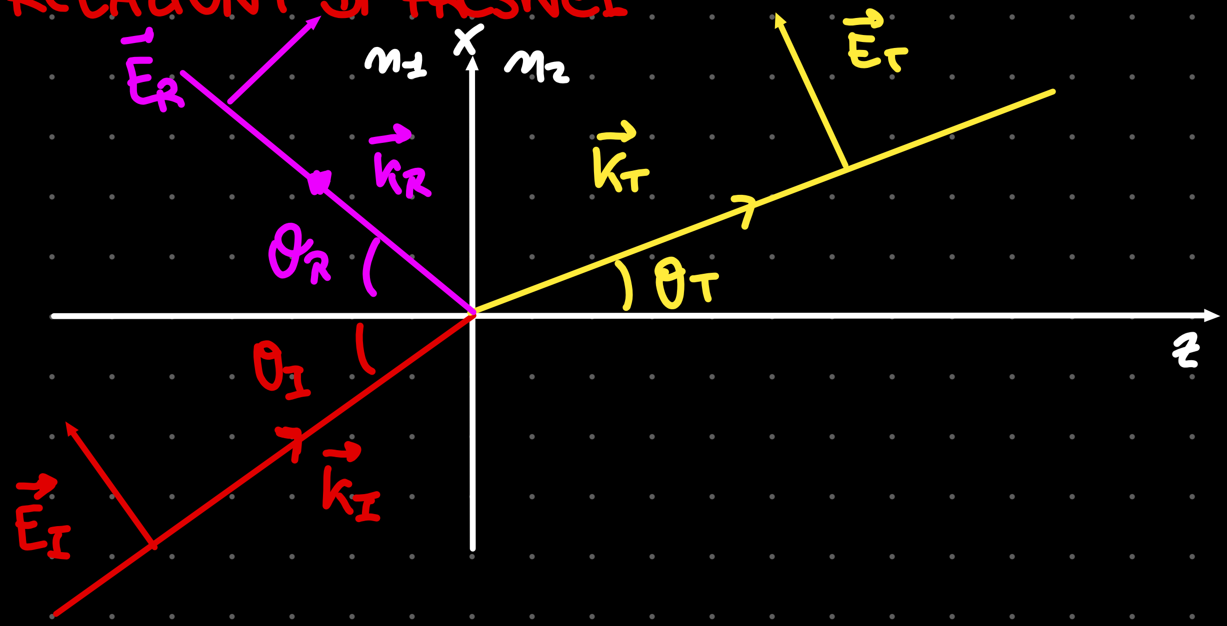
* $(k_I)_x = (k_T)_x \Leftrightarrow k_I \sin\theta_I = k_T \sin\theta_T$

$k = \frac{w}{c} n \;\rightarrow\; \cancel{\frac{w}{c}}\, n_I \sin\theta_I = \cancel{\frac{w}{c}}\, n_T \sin\theta_T$ → LEGGE DI SNELL

$(\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R})_x = (\tilde{E}_{0T})_x$ → componente parallela

$\varepsilon_1 (\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R})_z = \varepsilon_2 (\tilde{E}_{0T})_z$

RELAZIONI DI FRESNEL



$$\tilde{E}_I = \tilde{E}_{I,//}\,\hat{u}_{//} + \tilde{E}_{I\perp}\,\hat{u}_{//}$$

- Componente parallela

$$\vec{E}_I = E_{xI}\,\hat{u}_x + E_{zI}\,\hat{u}_z = E_I \sin\theta_I\,\hat{u}_x + E_I\cos\theta_I\,\hat{u}_z$$

Simile per E_R e E_T (attenzione segni)

$\vec{B} = \dfrac{\vec{k}\times\vec{E}}{w}$ è completamente determinato dalla conoscenza di $\vec{E}$

Usando le 4 condizioni di continuità (sapendo che $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$)

GAUSS: $\varepsilon_1(\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R})_z = \varepsilon_2(\tilde{E}_{0T})_z$ → componente perpendicolare interfaccia

$(\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R})\sin\theta_I = \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\tilde{E}_{0T}\sin\theta_T$ → proiezione su z con $\theta_I = \theta_R$

Sapendo che $n^2 = \varepsilon$ ⟹ $(\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R}) = \dfrac{n_2^2\sin\theta_T}{n_1^2\sin\theta_I}\tilde{E}_{0T}$

Per Snell $n_1\sin\theta_I = n_2\sin\theta_T$ ⟹ $\tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R} = \dfrac{n_2}{n_1}\tilde{E}_{0T}$

FARADAY: $(\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R})_x = (\tilde{E}_{0T})_x$ → componente // all'interfaccia

$(\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R})\cos\theta_I = \tilde{E}_{0T}\cos\theta_T$ ⟹ $\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R} = \dfrac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I}\tilde{E}_{0T}$

$$\begin{cases} (\tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R}) = \beta\,\tilde{E}_{0T} \\ (\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R}) = \alpha\,\tilde{E}_{0T} \end{cases}$$

$\beta = n_2/n_1$

$\alpha = \cos\theta_T/\cos\theta_I$

$\vec{E}$ nel piano di incidenza

$$\begin{cases} \tilde{E}_{0T} = \dfrac{2}{\alpha+\beta}\,\tilde{E}_{0I} \\ \tilde{E}_{0R} = \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\,\tilde{E}_{0I} \end{cases}$$

RELAZIONI DI FRESNEL con $\vec{E}$ nel piano di incidenza

RELAZIONI DI FRESNEL con $\vec{E}$ nel piano $\perp$ al piano di incidenza

$$\begin{cases} \tilde{E}_{0T} = \dfrac{2}{1+\alpha\beta}\,\tilde{E}_{0I} \\ \tilde{E}_{0R} = \dfrac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta}\,\tilde{E}_{0I} \end{cases}$$

Se $\theta_I = 0 \Rightarrow \cos\theta_I = 1 \rightarrow$ Per Snell: $\cos\theta_T = 1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I} = 1$

Se $\alpha-\beta<0$ o $1-\alpha\beta<0 \Rightarrow$ onda riflessa è sfalsata di 180° rispetto onda incidente

COEFFICIENTI DI RIFLESSIONE e TRASMISSIONE

$$R_{//} = \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 \qquad R_{\perp} = \left(\frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta}\right)^2$$

$$\underbrace{T_{//} = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}} \qquad T_{//} = \left(\frac{4\alpha\beta}{1+\alpha\beta}\right)^2$$

polarizzazione // al piano di incidenza $\rightarrow$ include caso $\alpha=\beta \Rightarrow R_{//}=0$

Non c'è riflessione, tutta l'onda è trasmessa

POLARIZZAZIONE PER RIFLESSIONE: l'onda riflessa per $\alpha=\beta$ è polarizzata nel piano $\perp$ al piano di incidenza

ANGOLO DI BREWSTER $\quad \operatorname{tg}\theta_B = \beta$

Dim $\quad \alpha=\beta \quad \dfrac{\cos\theta_T}{\cos\theta_B} = \beta$

$1-\sin^2\theta_T = \beta^2(1-\sin^2\theta_B)$

Da snell $\rightarrow$ $1-\frac{1}{\beta^2}\sin^2\theta_B = \beta^2(1-\sin^2\theta_B)$

$\beta^2(\cancel{1-\beta^2}) = (\cancel{1-\beta^2})(1+\beta^2)\sin^2\theta_B \Rightarrow \sin^2\theta_B = \frac{\beta^2}{1+\beta^2} \quad \cos^2\theta_B = \frac{1}{1+\beta^2}$

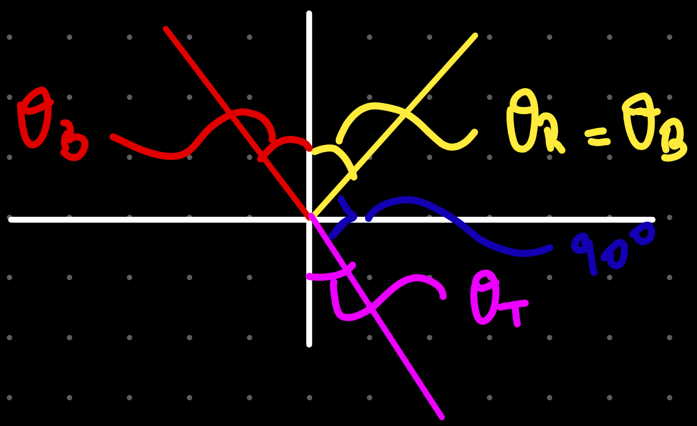
$tg^2\theta_B = \frac{\sin^2\theta_B}{\cos^2\theta_B} = \beta^2 \Rightarrow tg\,\theta_B = \beta$

L'angolo di Brewster e l'angolo di rifrazione sono complementari

snell $\rightarrow$ $\sin\theta_B = \beta\sin\theta_T$

BREWSTER $\rightarrow$ $\sin\theta_B = \beta\cos\theta_B$

$\Rightarrow \sin\theta_T = \cos\theta_B \Rightarrow \theta_B = \frac{\pi}{2} - \theta_T$



ANGOLO LIMITE e RIFLESSIONE TOTALE

$n_1 > n_2$

$n_1\sin\theta_I = n_2\sin\theta_T \qquad \theta_T = \frac{\pi}{2} \qquad n_1\sin\theta_L = n_2$ → angolo limite

Se $\theta_I > \theta_L$ $\Rightarrow$ non c'è onda rifratta $\Rightarrow$ RIFLESSIONE TOTALE

ANALISI CAMPI

Relazioni Fresnel $\rightarrow$ $\begin{cases} \tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R} = \alpha\tilde{E}_{0T} \\ \tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R} = \beta\tilde{E}_{0T} \end{cases}$ Caso polarizzazione parallela

$\tilde{E}_{0I} \neq 0 \quad \tilde{E}_{0R} \neq 0$ contemporaneamente $\Rightarrow \tilde{E}_{0T} \neq 0$

Allora anche se non c'è onda rifratta deve esistere un campo E.M. non nullo nel mezzo 2

si può dimostrare che $\tilde{E}_T$ è rapidamente evanescente lungo z e non trasporta energia → tutta energia riflessione

ANALISI NUMERO D'ONDA

Relazioni snell → $K_I \sin\theta_I = K_T \sin\theta_T$ componente x

Se $\theta > \theta_L$ ⇒ dobbiamo estendere l'analisi alla rappresentazione complessa

$$\tilde{K}_T^2 = (K_T)_x^2 + (K_T)_z^2 \quad \rightarrow \quad \frac{w^2}{c^2} n_2^2 = \frac{w^2}{c^2} n_1^2 \sin^2\theta_I + (K_T)_z^2$$

$$(K_T)_z^2 = \frac{w^2}{c^2} n_2^2 \left(1 - \frac{\sin^2\theta_I}{n_2^2/n_1^2}\right) = \frac{w^2}{c^2} n_2^2 \left(1 - \frac{\sin^2\theta_I}{\sin^2\theta_L}\right)$$

Per $\theta_I < \theta_L$ ⇒ K_z è reale → $\vec{K}_T = K_x \hat{u}_x + K_z \hat{u}_z$ vettore d'onda per il trasporto dell'onda rifratta

Per $\theta_I = \theta_L$ ⇒ $K_z = 0$ → onda viaggia all'interfaccia

Per $\theta_I > \theta_L$ ⇒ K_z immaginario puro $K_z^2 < 0$ $\quad \vec{K}_T \cdot \vec{r} = K_x x + i K_z \cdot z$

CAMPO: $\tilde{E}_T = \underbrace{E_{0T}\, e^{i(wt - Kx)}}_{\text{onda viaggiante lungo x}} \; \underbrace{e^{-K_z \cdot z}}_{\text{rapidamente evanescente}}$

Inoltre $\tilde{B} = \dfrac{\tilde{K} \times \tilde{E}}{w}$ è sfalsato di 90°
$E \propto \cos(wt)$
$B \propto \sin(wt)$

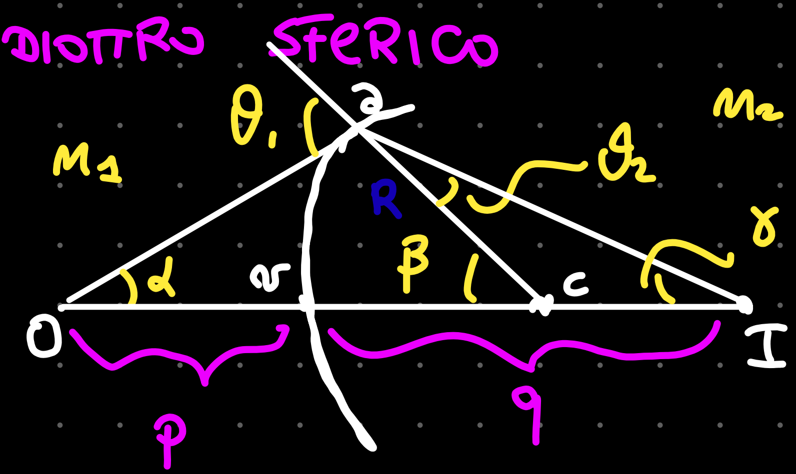
Media sul periodo del vettore di Poynting è nulla ⇒ non c'è trasporto energia

ESEMPIO FORMAZIONI DI IMMAGINI

Superfici sezioni di coniche (paraboloidi) → specchi e lenti

Approssimazione sferica (simmetria) e parallasse (α piccolo rispetto asse ottico)

DIOTTRO SFERICO



Approssimazione parallasse

↳ $\sin\alpha \sim \tan\alpha \sim \alpha$

area $av \simeq$ corda av

$$\beta = \frac{av}{R} \qquad \alpha \sim \frac{av}{p} \qquad \gamma \sim \frac{av}{q}$$

Relazione angoli → $\alpha + \beta = \theta_1$ $\quad \gamma + \theta_2 = \beta$ $\quad \theta_2 = \beta - \gamma$

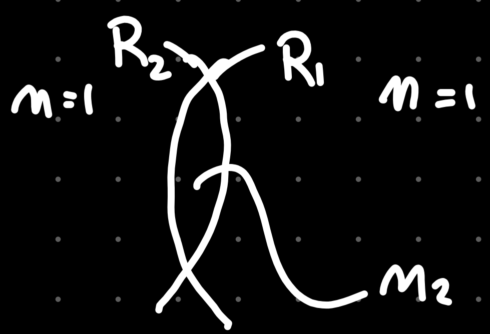
$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ → per parallasse $n_1\theta_1 \simeq n_2\theta_2$

Quindi $n_1(\alpha+\beta) = n_2(\beta-\gamma)$ → $n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta$

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{R} = \frac{n_2}{R} - \frac{n_1}{q} \Rightarrow \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \underbrace{(n_2 - n_1)\frac{1}{R}}_{\text{potere della lente}}$$

Potere della lente →
- nullo per $n_2 = n_1$
- nullo per $R = \infty$ → superficie piana, no rifrazione

LENTE → combinazione di due diottri



$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \underbrace{(n_2 - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}_{\frac{1}{f} = P \text{ → potere focalizzante}}$$

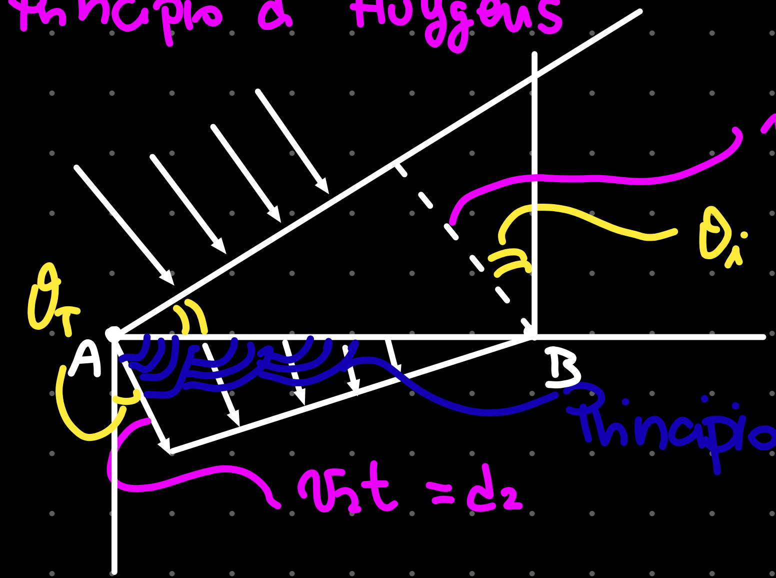
OTTICA ONDULATORIA

Formulazione di un metodo di calcolo ottica ondulatoria

→ Fronti d'onda determinate da sovrapposizione di onde sferiche di sorgenti puntiformi distribuite con continuità nel mezzo

DIFFRAZIONE CON INVILUPPO

Principio di Huygens



Principio di Huygens → spiega bene sia riflessione che diffrazione

$$d_1 = v_1 t = AB\sin\theta_i$$
$$d_2 = v_2 t = AB\sin\theta_T$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{v_1}\sin\theta_i = \frac{1}{v_2}\sin\theta_T$$

Legge di Snell

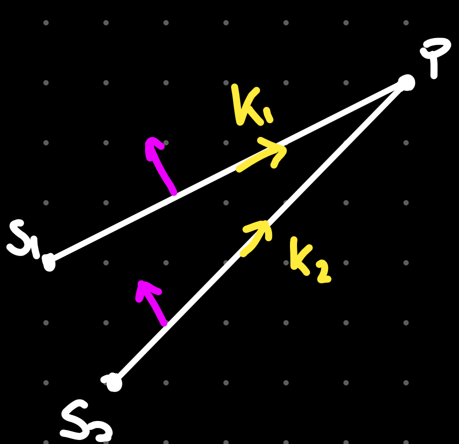
$$v = \frac{c}{n}$$

La descrizione ondulatoria funziona perché l'ottica fisica ammette soluzioni ondulatorie di eq. lineari

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_1(\vec{r},t) + \vec{E}_2(\vec{r},t) + \dots$$

Base dell'inviluppo di Huygens

Interferenza tra due sorgenti



$$\vec{E}(P) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

I: intensità → $I = \langle|\vec{S}|\rangle$ → media perché riguarda fenomeni che oscillano dell'ordine di 10^{-15} Hz

$$\langle I\rangle = \varepsilon v \langle E^2(\vec{r},t)\rangle = \varepsilon v \langle E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1\vec{E}_2\rangle =$$

$$= \overbrace{\varepsilon v\langle E_1^2\rangle}^{I_1} + \overbrace{\varepsilon v\langle E_2^2\rangle}^{I_2} + 2\varepsilon v\langle \vec{E}_1\vec{E}_2\rangle$$

I_{12}: interferenza

Termine interferenza $\rightarrow 2\varepsilon v \langle E_1 E_2 \rangle \cos\alpha$

$\hookrightarrow$ max per $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$: stessa polarizzazione

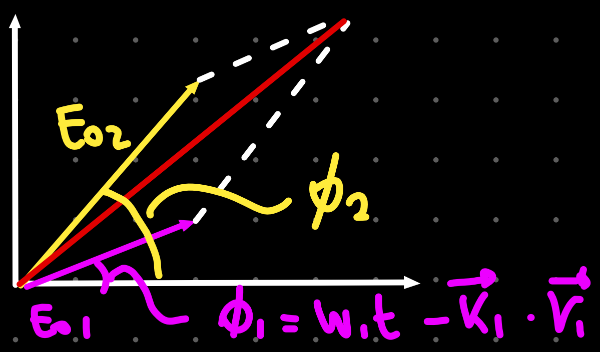
Nella pratica difficile avere interferenza per α non piccoli

$\Rightarrow$ condizione interferenza : stessa polarizzazione nel punto di interferenza

Quindi $\rightarrow$ considero solo natura scalare $\quad I_{12} = 2\varepsilon v \langle E_1 E_2 \rangle$

$\tilde{E}_j = E_{0j}\, e^{i\phi_j} \quad j = 1, 2 \quad E_j = \mathrm{Re}[\hat{E}_j] \rightarrow$ campo reale osservabile

$\phi_j = w_j t - \vec{k}_j \cdot \vec{r}_j + \varphi_j$ Fase



$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = \begin{cases} 0 & \rightarrow \text{max sovrapposizione} \\ \pi \text{ (multipli)} & \rightarrow \text{si elidono} \end{cases}$$

Per avere sovrapposizione osservabile nel tempo, la fase relativa non deve cambiare rapidamente allora:

$w_1 = w_2 \rightarrow$ stessa frequenza centrale

Se $w_1 \neq w_2 \Rightarrow$ media è nulla

Pongo $w_1 = w_2 = w$

$$E_1 E_2 = E_{01} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - wt + \varphi_1)\, E_{02} \cos(\vec{k}_2 \vec{r}_2 - wt + \varphi_2)$$

$$= E_{01} E_{02} \left[\cos(wt) \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 + \varphi_1) + \sin(wt) \sin(\vec{k}_1 \vec{r}_1 + \varphi_1) \right] \cdot$$
$$\cdot \left[\cos(wt) \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 + \varphi_2) + \sin(wt) \sin(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 + \varphi_2) \right]$$

Sviluppo nel prodotto e calcolo media temporale

- $\langle \cos^2(wt) \rangle = \langle \sin^2(wt) \rangle = \frac{1}{2}$
- $\langle \cos(wt) \sin(wt) \rangle = 0$

$$\langle E_1 E_2 \rangle = \frac{1}{2} E_{01} E_{02} \left[\cos(\vec{k}_1 \vec{r}_1 + \varphi_1) \cos(\vec{k}_2 \vec{r}_2 + \varphi_2) + \sin(\vec{k}_1 \vec{r}_1 + \varphi_1) \sin(\vec{k}_2 \vec{r}_2 + \varphi_2) \right]$$

$$\langle E_1 E_2 \rangle = \frac{1}{2} E_{01} E_{02} \cos(\underbrace{\vec{k_1}\vec{r_1} + \varphi_1 - \vec{k_2}\cdot\vec{r_2} - \varphi_2}_{\delta = \phi_2 - \phi_1})$$

Differenza di fase

$$\delta = \phi_2 - \phi_1 = \underbrace{\vec{k_2}\cdot\vec{r_2} - \vec{k_1}\vec{r_1}}_{\text{contributo dovuto a differenza di cammino ottico}} + \underbrace{\varphi_2 - \varphi_1}_{\text{differenza di fase iniziale tra le sorgenti}}$$

$$I = I_1 + I_2 + \varepsilon v E_{01} E_{02} \cos(\delta)$$

Poiché $I_j = \varepsilon v \langle E_j^2 \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon v E_{0j}^2 \Rightarrow \sqrt{I_j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon v}\, E_{0j}$

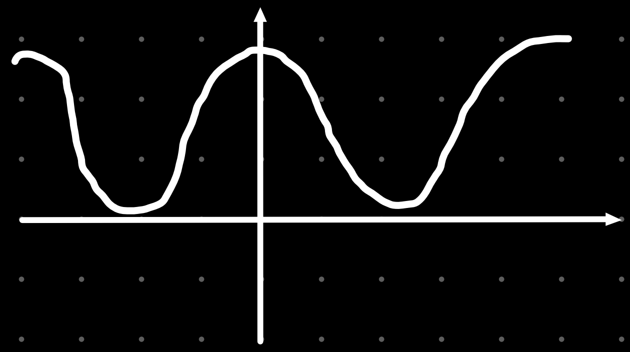
Possiamo riscrivere le relazioni di interferenza tra due sorgenti come

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\delta$$ → termine interferenza tra due onde monocromatiche

- COERENZA TEMPORALE → stessa fase iniziale (impossibile con due sorgenti diverse)

Se $I_1 = I_2$ → facilmente osservabile interferenza

$$I = 2I_1 (1 + \cos\delta) \Rightarrow I = 4I \cos^2 \frac{\delta}{2}$$



condizioni per il max: $\frac{\delta}{2} = n\pi$

condizioni minimi: $\frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi = \pi\left(m + \frac{1}{2}\right)$

La condizione si traduce in una condizione sulla differenza di cammino ottico

$\boxed{\Delta\varphi = 0}$ $\quad \delta = \vec{k_1}\vec{r_1} - \vec{k_2}\vec{r_2}$

A meno di un segno → $\delta = k_1 r_1 - k_2 r_2 = \frac{\omega}{c}\overbrace{(n_1 r_1 - n_2 r_2)}^{\text{differenza di cammino ottico}}$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_1 r_1 - n_2 r_2)$$

Per trovare relazioni precedenti si usa:

$$k_i = \frac{w}{v_i} = \frac{w}{c} n_i = \frac{2\pi}{\lambda} n_i = \frac{2\pi}{\lambda_i}$$

Condizione interferenza:

- max $\rightarrow$ $\delta = 2\pi m \Rightarrow (n_1 r_1 - n_2 r_2) = m\lambda$
- min $\rightarrow$ $\delta = (2m+1)\pi \Rightarrow |n_1 r_1 - n_2 r_2| = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$

CONDIZIONI INTERFERENZA

1) Stessa polarizzazione
2) stessa frequenza centrale
3) Coerenza temporale : $\Delta\varphi = cost$ (indipendente dal tempo)
   - Se $\Delta\varphi$ dipendesse dal tempo no immagine di interferenza persistente
4) Coerenza spaziale $\rightarrow$ sulle dimensione del fronte che interferisce

Queste condizioni si verificano con:

a) Separatori di fronte d'onda
b) Separatori di ampiezza