Meccanica Quantistica

Marco Militello

Indice

Capitolo 1

Formule

1.1 Equazione Schrodinger per una particella libera 1D

$$i\hbar\frac{\delta\psi}{\delta t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}$$

1.2 Equazione Schrodinger per un potenziale arbitrario V(x)

1.2.1 1D

$$i\hbar\frac{\delta\psi}{\delta t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\delta^2}{\delta x^2} + V(x)\right]\psi$$

1.2.2 3D

$$i\hbar\frac{\delta}{\delta t}\psi(t,\vec{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(t,\vec{x}) + V(t,\vec{x})\psi(t,\vec{x})$$

1.3 Operatori

- $\hat{H} = \frac{\hat{p}}{2m} + V(\hat{x})$ hamiltoniana
- $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\hat{p}\right)$
- $\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\hat{p}\right)$ creatore
- $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^+ + \hat{a})$ distruttore
- $\hat{p} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a}^+ - \hat{a})$
- $\hat{N} = (\hat{a}^+\hat{a})$ operatore numero

1.3.1 Rappresentazione coordinate

- $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\delta}{\delta x}$
- $\hat{x} = x$
- $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{x})$

1.3.2 Rappresentazione momenti

- $\hat{p}_x = p$
- $\hat{x} = i\hbar \frac{\delta}{\delta p}$

1.3.3 Applicazione operatori su stati

- $a^+|n> = \sqrt{n+1}|n+1>$
- $a|n> = \sqrt{n}|n-1>$
- $\hat{x}|n> = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n+1}|n+1> + \sqrt{n}|n-1>)$
- $\hat{p}|n> = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\sqrt{n+1}|n+1> - \sqrt{n}|n-1>)$

1.4 Commutatore

- $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$
- $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$
- $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$

1.5 Stati stazionari

$$\hat{H}\varphi = E\varphi$$

1.6 Continuità della funzione d'onda e della derivata

- $V \to \infty \Rightarrow \varphi = 0$
- Salto in $x = x_0 \Rightarrow \dot{\varphi} \in C^1$ (la funzione non ha salti)
- V(x) ha delta in $x = x_0 \Rightarrow V = V_0\delta(x - x_0)$

$$\dot{\varphi}(x_0 + \varepsilon) - \dot{\varphi}(x_0 - \varepsilon) = \frac{2m}{\hbar}V_0\varphi(x_0)$$

1.7 Soluzione equazione stati stazionari

1. Soluzione del tipo oscillatorio

   $$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha^2\psi = 0$$

   Le soluzioni sono del tipo

   $$c_1 \sin(\alpha x) + c_2 \cos(\alpha x)$$

2. Soluzioni del tipo esponenziali

   $$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha^2\psi = 0$$

   Le soluzioni sono del tipo

   $$c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$$

1.8 Particella in una scatola con potenziale infinito

1.8.1 Energia

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2$$

1.8.2 Autofunzioni

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

1.9 Evoluzione temporale

$$\psi(t, \vec{x}) = \sum c_n \varphi_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} + \int dk\, c(k) \varphi_k e^{-\frac{iE_k t}{\hbar}}$$

1.10 Oscillatore armonico

1.10.1 Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

1.10.2 Energia

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$$