Analisi II

Marco Militello

Indice

Capitolo 1

Spazi funzionali ed equazioni differenziali

1.1 Spazi metrici

Una METRICA su un insieme X è una funzione

$$d(distanza): \, X \times X \to [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$$

che gode delle seguenti proprietà:

- $d(x, y) \geq 0 \qquad d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$ simmetria
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ disuguaglianza triangolare

X è uno spazio metrico

metrica euclidea $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$

metrica Manhattan $d(x, y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$

metrica discreta $d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$

Def (Metriche equivalenti).
Due metriche si dicono equivalenti quando danno luogo alla stessa famiglia di aperti (cioè se gli intorni di una sono gli aperti dell'altra)

Def (Norma).
dato V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Una norma su V è

$$N : V \to R$$

tale che

1. $N(v) \geq 0 \qquad N(v) = 0 \iff v = 0$
2. $N(\lambda v) = |\lambda| N(v) \quad \lambda \in \mathbb{R}$
3. $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$

norma euclidea $\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$

norma uniforme $\|x\|_\infty = \max_{j=1,\dots,n}|x_j|$

norma L^1 $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n}|x_j|$

Se N è una norma, allora $d(x,y) = N(x-y)$ è una metrica

Def (Prodotto scalare).
Un prodotto scalare su uno spazio vettoriale $V \subseteq \mathbb{R}$ è

$$S : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$S(v,w) \mapsto v \cdot w$$

1. $S(v,v) \geq 0 \qquad S(v,v) = 0 \iff v = 0$
2. $S(v,w) = S(w,v)$
3. $S(au + bv, w) = aS(u,w) + bS(v,w)$

Se S è un prodotto scalare allora

$$N(v) = (S(v,v))^{\frac{1}{2}}$$

1.2 Continuità e successioni

Def.

$$X \to Y$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \, : \forall x \in \underbrace{0 < d_x(x,x_0) < \delta}_{B_\delta(x_0)} \Rightarrow f(x) \in \underbrace{d_y(f(x),y_0) < \varepsilon}_{B_\varepsilon(y_0)}$$

Def.
f continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Teorema. $f : x \to Y$ è continua $(\forall x \in X) \iff f^{-1}$ è un aperto $\forall A \subset Y$ aperto
Allora la composizione di funzioni continue è continua

Def (Funzione limitata).
Una funzione si dice limitata se l'immagine $f(X) \subset Y$ è limitata in Y

Def.

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in X} d_\infty(f(x), g(x)) \qquad d_\infty \text{ metrica uniforme}$$

Def.

$$C(X,Y) \subset B(X,Y)$$

è l'insieme delle funzioni continue e limitate

Def (Funzione Lipshitziana)**.**
$f : X \to Y$ è Lipschitziana in X se

$$\exists k \in \mathbb{R} \mid \forall x,y \in X \Rightarrow d_y(f(x), f(y)) \leq k d_x(x,y)$$

Se una funzione è Lipshitziana allora è anche continua

1.3 Successioni

Def.
$x_n \to \bar{x}$ converge a $\bar{x}$ (in X spazio metrico) se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N >> 0 \mid n > N \Rightarrow d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon$$

Def (Successione di Cauchy).

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N >> 0 \mid n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Teorema. $f_n \to \bar{f}$ in X metrica uniforme $\iff$ $f_n \mapsto \bar{f}$ (converge uniformemente)

1.4 Completezza

Def (Spazio metrico completo).
X è uno spazio metrico completo $\iff$ ogni successione di Cauchy in X è convergente in X

Lemma. Se X è completo e $C \subset X$ è un sottospazio chiuso $\Rightarrow$ C è completo

Def (Spazio di Banach).
Uno spazio di Banach è uno spazio vettoriale completo dotato di norma

Def (Spazio di Hilbert).
Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale completo dotato di prodotto scalare

Lemma. Hilbert $\Rightarrow$ Banach

Teorema. Sia S un insieme, Y uno spazio metrico, d_∞ metrica uniforme e $B(S, Y) =$ funzioni limitate da $S \to Y$
Se Y è completo $\Rightarrow$ $B(S, Y)$ è completo

Teorema. X spazio metrico, Y spazio metrico completo e $C(X, Y) \subset B(X, Y)$ funzioni continue e limitate con metrica uniforme d_∞
$C(X, Y)$ è completo