Relatività

Marco Militello

Indice

1 Richiami meccanica classica ed elettromagnetismo **2**
1.1 Trasformazioni galileiane 2

2 Notazioni e formalismo (indici-vettori-operatori differenziali) **5**
2.1 Operatori differenziali 6
2.2 Spazio euclideo 3D 8
2.3 Spazi di Riemann 9
2.4 Spazio di Minkowski 9

Capitolo 1

Richiami meccanica classica ed elettromagnetismo

La meccanica di Newton si basa su 3 principi:

1. In assenza di moto $\Rightarrow$ quiete o moto rettilineo uniforme
2. $\frac{d}{dt}\vec{p} = F$ con $\vec{p} = m\vec{v}$
3. Principio di azione e reazione

Se in un sistema S ho un moto rettilineo uniforme descritto da $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{u}t$ ed applico una trasformazione del tipo

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{w}t^2$$

allora nel sistema S' avrò un moto accelerato descritto da $\vec{x}' = \vec{x}_0 + \vec{u}t + \vec{w}t^2$
SISTEMI DI RIFERMENTO INERZIALI (SDRI): sistemi in cui una particella di "test" (particella con massa e dimensioni trascurabili rispetto a quello a che sta intorno; non c'è perturbazione della misura) non soggetta a forza permane in stato di quiete o moto rettilineo uniforme
Dato S che è SDRI e S' tale che

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{u}t$$

dove $\vec{v}$ è la velocità relativa tra S e S', allora anche S' è SDRI
Se faccio rotazione (che non dipenda dal tempo) allora permane il moto rettilineo

PRINICIPIO DI RELATIVITÁ: le leggi fisiche devono avere la stessa forma (es. F=ma deve diventare F'=ma') in tutti i SDRI; questo principio si basa su osservazioni empiriche. Enunciato in questo modo vale sia in meccanica classica, sia in relatività $\rightarrow$ cambia solo la trasformazione che uso
COVARIANZA LEGGI FISICHE: significa invarianza in forma
Sistema di rifermento $\rightarrow$ terna di assi cartesiasi e orologio (in fisica classica sono tutti sincronizzati)
SDRI $\rightarrow$ empiricamente sarà sistema inerziale in una certa regione di spazio, in un certo intervallo di tempo ed entro accuratezza delle misure che faccio

1.1 Trasformazioni galileiane

Costruite a partire da principio relatività con ipotesi del tempo unitario (t=t')
Voglio trovare trasformazioni per passare da SDRI a SDRI del tipo

$$\begin{cases} t' = t'(t, x, y, z) \\ x' = x'(t, x, y, z) \\ y' = y'(t, x, y, z) \\ z' = z'(t, x, y, z) \end{cases}$$

Nel sistema S descrivo con $\vec{x}_p(t) = \vec{x}_0 + \vec{u}t$: nello spazio è una retta $\Rightarrow$ in S' deve rimanere una retta, quindi deve essere una trasformazione lineare

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ x' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\ x' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\ x' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{cases}$$

$a_{ij}(\vec{v})$ dipende da $\vec{v}$, ma non può dipendere da x,y,z,t altrimenti non sabbero trasformazioni lineari

- asse $\hat{x}$ coincide con $\hat{x}'$ $\rightarrow$ y=z=0 $\Rightarrow$ y'=z'=0. Quindi: $a_{21} = a_{24} = a_{31} = a_{34} = 0$
- piano xy deve coincidere con piano x'y' $\rightarrow z = 0 \Rightarrow z' = 0$ Quindi: $a_{32} = 0$
- piano xz deve coincidere con piano x'z' $\rightarrow y = 0 \Rightarrow y' = 0$ Quindi: $a_{23} = 0$
- Se ruoto asse x di 180° $\Rightarrow$ y va in -y e z in -z. Allora

  $$x' = a_{11}x + a_{12}(-y) + a_{13}(-z) + a_{14}t$$

  ma coordinata su x non deve cambiare su x'. Quindi $a_{12} = a_{13} = 0$
- per simmetria cilindrica niente di particolare lungo asse y e z. Quindi $a_{22} = a_{33}$; di conseguenza anche $a_{43} = a_{42}$
- t non può dipendere da y e z perchè niente di speciale lungo y e z. Quindi $a_{42} = 0$

Ottengo:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{14}t \\ y' = a_{22}y \\ z' = a_{22}z \\ t' = a_{41}x + a_{44}t \end{cases}$$

Trasformazioni devono dipendere al massimo da direzione moto $\rightarrow$ ISOTROPIA DELLO SPAZIO
Riscrivendo:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bt \\ y' = Cy \\ z' = Cz \\ t' = \dots \end{cases}$$

Moto in O' $\rightarrow$ se $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = Ax + Bt \Rightarrow x = -\frac{B}{A}t \\ x = vt \end{cases}$

Allora $x' = Ax + Bt$ diventa $x' = A(x - vt)$ [perchè $Bt = -Avt$]
Usando ipotesi aggiuntiva del tempo assoluto ottengo:

$$\begin{cases} x' = A(v)(x - vt) \\ y' = C(v)y \\ z' = C(v)z \\ t' = t \end{cases}$$

- se v=0 $\Rightarrow A(v = 0) = C(v = 0) = 1$
- per simmetria cilindrica $\Rightarrow C(v) = C(-v)$

- $S \to S$ deve coincidere a $S \to S'$ se mando v in -v: $S \to S'$ stessa forma trasformazione, ma con velocità -v

$$\begin{cases} x = \frac{1}{A(v)}(x' + vt) \\ y = \frac{1}{C(v)}y' \\ z = \frac{1}{C(v)}z' \\ t = t' \end{cases} \qquad \begin{cases} x = A(-v)(x' + vt) \\ y = C(-v)y' \\ z = C(-v)z' \\ t = t' \end{cases}$$

  Allora ottengo:

$$\frac{1}{A(v)} = A(-v) \qquad \frac{1}{C(v)} = C(-v) \qquad v = A(-v)v$$

  Quindi: $A(v) = 1$ e $C(v) = 1$

Per un moto lungo asse x le trasformazioni di Galilei sono:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

In generale le trasformazioni di Galilei sono:

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t \\ t' = t \end{cases}$$

GRUPPO DI GALILEI: insieme trasformazioni di cui trasformazioni di Galilei fanno parte

- traslazione rigida $\to \vec{x}' = \vec{x} + \vec{x}_0$ $t' = t + t_0$
- traslazione asse (no nel tempo) $\to \vec{x}' = R\vec{x}$ con R matrice di rotazione tale che $RR^T = R^T R = \mathbb{1}$

Capitolo 2

Notazioni e formalismo (indici-vettori-operatori differenziali)

1. Convenzione di Einstein → indici ripetuti = indici sommati

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \vec{e}_i = v_i \vec{e}_i$$

2. Per vettori 4-dimensionali → $(ct, x, y, z) = x^\mu$ con $\mu = 0, 1, 2, 3$
3. $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$
4. Simbolo di levi-civita (in 3D)

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} \epsilon_{123} = 1 & \text{per ogni permutazione pari di 1,2,3} \\ \epsilon_{213} = -1 & \text{per ogni permutazione dispari di 1,2,3} \\ \epsilon_{ii2} = 0 & \text{completamente asimmetrico} \end{cases}$$

$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$

Matrici

A,B matrici

$$(AB)_{ij} = A_{1k} B_{kj}$$

Per una matrice A 3×3

$$\det A = \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

- $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{il}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i = \delta_{ij} a_i b_j$
- $\vec{a} \times \vec{b} = \epsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i$
  $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$

Contrazione di indici simmetrici/antisimmetrici

$$\begin{cases} \text{A: antisimmetrico su i e j} \rightarrow A_{ij} = -A_{ji} \\ \text{S: simmetrico su i e j} \rightarrow S_{ij} = S_{ji} \end{cases}$$

Contrarre gli indici i e j significa sommare su i e j

$$\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}S_{ij} \underbrace{=}_{\text{rename}} \sum_{i,j=1}^{3} A_{ji}S_{ij} = \sum_{i,j=1}^{3} -A_{ij}S_{ij} = 0$$

2.1 Operatori differenziali

- Gradiente

$$\vec{\nabla}\phi = (\delta_i\phi)\vec{e}_i \qquad \delta_i\phi = \frac{\delta\phi}{\delta x_i}$$

- Divergenza

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \delta_i V_i$$

- Rotore

$$(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = \epsilon_{ijk}\delta_j V_k$$

- Laplaciano

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi) = \delta_x^2\phi + \delta_y^2\phi + \delta_z^2\phi$$

- D'Alambertiano

$$\boxdot\phi = \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2}{\delta t^2}\phi - \nabla^2\phi$$

Proprietà:

- $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$
- $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$
- $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\vec{V})) = 0$
- $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(\phi)) = 0$
- $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\vec{V})) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}(\vec{V})) - \nabla^2\vec{V}$

$$[\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})]_i = \delta_i(\vec{\nabla}\vec{V}) - \nabla^2 V_i$$

Equazioni di Maxwell

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \\ \vec{B}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} + \delta_t\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} - \delta_t\vec{E} = 4\pi\vec{J} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \delta_i E_i = 4\pi\rho & \text{M1: 1 equazione} \\ \delta_i B_i = 0 & \text{M2: 1 equazione} \\ \epsilon_{ijk}\delta_j E_k + \delta_t B_i = 0 & \text{M3: 3 equazioni} \\ \epsilon_{ijk}\delta_j B_k - \delta_t E_i = 4\pi J_i & \text{M4: 3 equazioni} \end{cases}$$

Da M4 $\rightarrow$ applico divergenza

$$\begin{aligned} \delta_i(\epsilon_{ijk}\delta_j B_k - \delta_t E_i) &= \delta_i 4\pi J_i \\ 0 - \delta_t\delta_i E_i &= 4\pi\delta_i J_i \\ -4\pi\delta_t\rho &= 4\pi(\vec{\nabla}\cdot\vec{J}) \end{aligned}$$

Ottengo EQUAZIONE CONTINUITÁ

$$\frac{\delta}{\delta t}\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$$

Da M2 $\rightarrow$ poichè div(rot($\vec{A}$)) $= 0$ posso ridefinire $\vec{B}$ come

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow B_i = \epsilon_{ijk} \delta_j A_k$$

Da M3 $\rightarrow$ poichè

$$\mathrm{rot}(\vec{E} + \delta_t \vec{A}) = 0$$
$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(\phi)) = 0$$

posso ridefinire $\vec{E}$ come

$$\vec{E} + \delta_t \vec{A} = -\vec{\nabla}\phi \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\delta}{\delta t}\vec{A}$$

Allora le equazioni di Maxwell

$$\begin{cases} \delta_i E_i = 4\pi\rho \\ \epsilon_{ijk}\delta_j B_k - \delta_t E_i = 4\pi J_i \end{cases}$$

diventano

$$\begin{cases} 4\pi\rho = \delta_i E_i = -\nabla^2\phi - \delta_t(\delta_i A_i) \\ 4\pi J_i = \epsilon_{ijk}\delta_j(\epsilon_{ijk}\delta_j A_k) - \delta_t(-\delta_i\phi - \delta_t A_i) = \delta_i\delta_j A_j - \nabla^2 A_i + \delta_t^2 A_i + \delta_i\delta_t\phi \end{cases}$$

sommando $+\delta_t^2\phi - \delta_t^2\phi$ alla prima equazione si ottiene:

$$\begin{cases} 4\pi\rho = -\nabla^2\phi + \delta_t^2\phi - \delta_t(\delta_t\phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}) \\ 4\pi J_i = \nabla^2 A_i + \delta_t^2 A_i + \delta_i(\delta_t\phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}) \end{cases}$$

Utilizzando operatore d'almenrtino

$$\boxdot = \frac{\delta^2}{\delta t^2} - \nabla^2$$

posso riscrivere le equazioni di Maxwell come

$$\begin{cases} \boxdot\phi - \delta_t(\delta_t\phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = 4\pi\rho \\ \boxdot A_i - \delta_i(\delta_t\phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = 4\pi J_i \end{cases}$$

Trasformazioni di Gauge

Considero $\psi(t, \vec{x})$ arbitraria

$$\begin{cases} \vec{A} \mapsto \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi \\ \phi \mapsto \phi' = \phi - \delta_t\psi \end{cases}$$

Usando queste trasformazioni i campi $\vec{E}, \vec{B}$ sono invarianti $\Rightarrow$ invarianza di Gauge
Posso scegliere ψ per semplificare le scelte iniziali di $\phi, \vec{A} \rightarrow$ scelte di Gauge

- Lorenz: $\delta_t\phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$
- Coulomb: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$
- Temporale: $\phi = 0$
- Radiazione: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ $\phi = 0$ (in assenza di sorgenti)

Applicando scelta di Lorenz ottengo

$$\begin{cases} \boxdot\phi = 4\pi\rho \\ \boxdot\vec{A} = 4\pi\vec{J} \end{cases}$$

2.2 Spazio euclideo 3D

Distanza infinitesima

$$d\vec{x} = (dx, dy, dx) = (dx_1, dx_2, dx_3)$$

Distanza euclidea

$$\underbrace{|d\vec{x}|^2}_{\text{metrica}} = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \delta_{ij} x_i x_j \rightarrow \text{tensore metrico}$$

Rotazioni

Trasformazioni lineai che lasciano invariante $|d\vec{x}|^2$

$$\begin{cases} x \mapsto x' \quad x'_i = R_{ij} x_j \rightarrow \text{ R non dipende da } \vec{x} \\ d\vec{x} \mapsto d\vec{x}_i = R_{ij} dx_j \end{cases}$$

Impongo che $d\vec{x}'^2 = d\vec{x}^2$

$$|d\vec{x}'|^2 = d\vec{x}' \cdot d\vec{x}' = R_{ij} dx_j R_{ik} x_k = R_{ij} R_{ik} dx_j dx_k = (R^T)_{ij} R_{ik} dx_j dx_k = (R^T R)_{jk} dx_j dx_k = \delta_{jk} dx_j dx_k$$

Allora

$$R^T R = \mathbb{I}_{3\times 3} \qquad R \in O(3)$$

Quindi se $R \in O(3)$ allora $|d\vec{x}'|^2$ è invariante
ROTAZIONI PROPRIE $\rightarrow R \in SO(3)$

$$R^T R = R R^T = \mathbb{I} \qquad \det R = +1$$

- Passivo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Attivo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Vettori

$\vec{A}$ è un vettore (A_x, A_y, A_z) se sotto trasformazioni trasforma come vettore

$$A_i \mapsto A'_i = R_{ij} A_j$$

Campo vettoriale

$\vec{A}(x)$ è un campo vettoriale tale che

$$A_i(x) \mapsto A'_i(\vec{x}') = R_{ij} A_j(\vec{x}) \qquad \vec{x}' = R\vec{x}$$

Tensore di rango m

$$T_{i_1,\ldots,i_n} \underbrace{\mapsto}_{\text{rotazione}} R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \cdots R_{i_n j_n} T_{j_1,\ldots,j_n}$$

Un tensore di rango n contiene 3^n elementi. Un vettore è un caso particolare di tensore: un vettore è un tensore di rango 1

Campo tensoriale

$$T_{i_1,\dots,i_n}(\vec{x})$$

Scalare

Uno scalare è una quantità invariante sotto rotazione

- $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i$ è uno scalare $\rightarrow$ rappresenta l'angolo tra i due vettori
- $|\vec{A}| = \vec{A} \cdot \vec{A}$ è uno scalare
- Il prodotto tra due tensori con tutti gli indici contratti è uno scalare

Campo scalare

$$\phi(\vec{x}) \qquad \phi'(\vec{x}) = \phi(\vec{x})$$

Un esempio è la temperatura

2.3 Spazi di Riemann

Uno spazio di Riemann è uno spazio N-dimensionale dotato di metrica che esprime la distanza infinitesima tra due punti nello spazio stesso

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b \qquad a, b = 1, \dots, N$$

con ds^2 metrica e g_{ab} tensore metrico, che i generale può dipendere dal punto x

- g è invertibile ($\det g \neq 0$)
- g è simmetrico ($g_{ab} = g_{ba}$)
- g non per forza diagonale
- ds^2 è invariante, non dipende dal sistema di coordinate

1. Se g_{ab} non dipende da x $\Rightarrow$ spazio piatto
2. Se ho uno spazio piatto $\Rightarrow$ esiste sistema di coordinare in cui g_{ab} è costante su tutto lo spazio
3. Segnatura: denota il numero di autovalori positivi e negativi della matrice g_{ab}
4. n = numero autovalori positivi e N = dimensione dello spazio

$$\begin{cases} n = N \Rightarrow \text{Varietà riemanniana} \rightarrow \text{metrica euclidea} \\ \begin{cases} n = 1 \\ n = N - 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Varietà pseudo riemanniana} \rightarrow \text{metrica pseudo euclidea} \end{cases}$$

La metrica pseudo euclidea comprende anche lo spazio di Minkowski

2.4 Spazio di Minkowski

Coordinate controvarianti

$$x^\mu = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^i)$$
$$x = x^\mu \hat{e}_\mu$$

Struttura riemanniana

$$M = \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \text{ Spazio di Riemann}$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \qquad g_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$$

ds^2 non dipende da sistema di coordinate, mentre $g_{\mu\nu}$ (tensore metrico) non dipende da x. M è uno spazio piatto perchè il tensore metrico non dipende da x

Coordinate covarianti