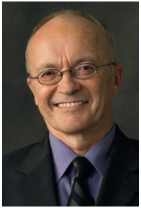
Расчетные модели макроэкономической динамики

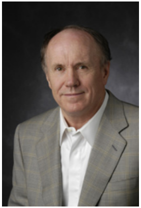
Лектор: Оксана Анатольевна Малаховская

Лекция 3

18 февраля 2017г.

Авторы первой RBC модели:





Ф. Кидланд (р. 1943)- норвежский экономист, Нобелевский лауреат (2004).

Э.Прескотт (р. 1940) - американский экономист, Нобелевский лауреат (2004).

Премия присуждена «за вклад в динамическую макроэкономику: динамическую состоятельность экономической политики и факторы деловых циклов.»

Kydland and Prescott (1982)

- первая модель RBC
- имеет микроэкономические обоснования
- содержала различные усложнения, чтобы модель количественно соответствовала фактическим колебаниям
- достаточно сложна для первого знакомства с моделями этого класса

Микроэкономические обоснования

- Экономика состоит из нескольких секторов
  - Основные: домохозяйства и фирмы
  - Дополнительные: центральный банк, правительство, иностранный сектор и т.д.
- В базовой версии: репрезентативное домохозяйство, репрезентативная фирма
- Все агенты имеют рациональные ожидания и максимизируют целевую функцию при некоторых ограничениях.
- Бесконечный горизонт планирования

Механизм решения модели общего равновесия

1. Запись оптимизационных задач
2. Нахождение условий первого порядка/ограничений и их агрегирование
3. Нахождение стационарного состояния
4. Линеаризация FOC и ограничений вокруг стационарного состояния
5. Решение модели
6. Калибровка параметров
7. Симуляция модели и анализ результатов (построение функций импульсного отклика, расчет вторых моментов и т. д.)

Сектор фирм

Предпосылки:

- Фирмы производят товары и услуги
- Цель фирм - максимизировать прибыль при условии технологического ограничения
- Совершенная конкуренция на товарном рынке

Сектор фирм: ограничения на технологию

- Производственная функция (ПФ):

$$y_t = A_t F(k_t, h_t), \tag{1}$$

  где A_t - общая факторная производительность (TFP), отражает уровень эффективности производства
- Выполнены предпосылки неоклассической ПФ: $F'_k > 0, F'_h > 0, F''_{kk} < 0, F''_{hh} < 0$
- Функция обладает постоянной отдачей от масштаба: $F(\zeta k_t, \zeta h_t) = \zeta F(k_t, h_t)$
- Выполнены условия Инады:

$$\lim_{k \to 0} F'_k = \infty, \lim_{k \to \infty} F'_k = 0,$$
$$\lim_{h \to 0} F'_h = \infty, \lim_{h \to \infty} F'_h = 0$$

- Кроме того: $A_t F(0, h_t) = 0$, $A_t F(0, k_t) = 0$

Механизм решения модели общего равновесия

1. Запись оптимизационных задач
2. Нахождение условий первого порядка/ограничений и их агрегирование

Нахождение стационарного состояния

Линеаризация FOC и ограничений вокруг стационарного состояния

Решение модели

Калибровка параметров

Симуляция модели и анализ результатов (построение функций импульсного отклика, расчет вторых моментов и т. д.)

Специфицируем производственную функцию:

$$Y_t = A_t F(k_t, h_t) = A_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta} \tag{2}$$

$$\max_{k_t, h_t} \Pi_t = A_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta} - w_t h_t - r_t^k k_t \tag{3}$$

$$FOC: r_t^k = \theta \frac{y_t}{k_t} \Rightarrow r_t^k k_t = \theta y_t \tag{4}$$

$$w_t = (1-\theta)\frac{y_t}{h_t} \Rightarrow w_t h_t = (1-\theta) y_t \Rightarrow \tag{5}$$

Можно показать, что в оптимуме прибыль равна нулю:

$$\Pi = A_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta} - \theta A_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta} - (1-\theta) A_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta} = 0 \tag{6}$$

Специфицируем динамику TFP:

$$A_t = \bar{A}^{1-\rho} A_{t-1}^{\rho} u_t^A \Rightarrow \tag{7}$$

$$\ln A_t = (1-\rho_A) \ln \bar{A} + \rho \ln A_{t-1} + \varepsilon_t^A, \quad \varepsilon_t^A \sim N(0, \sigma_A^2) \tag{8}$$

Предпосылки:

- Большое число домашних хозяйств
- Каждое домашнее хозяйство - репрезентативное
- Максимизирует дисконтированную полезность на бесконечном временном горизонте при бюджетных ограничениях.
- Одномоментная функция полезности: $U(c_t, l_t)$, где c_t - потребление в периоде t, l_t - досуг в периоде t. При этом: $U'_c > 0, U'_l > 0, U'_{cc} < 0, U'_{ll} < 0$
- Функция полезности аддитивно-сепарабельная во времени.
- Домашние хозяйства - собственники труда и капитала.

Задача домохозяйства

Бюджетное ограничение:

$$c_t + s_t = w_t h_t + r_t^k k_t \tag{9}$$

$$s_t = i_t \tag{10}$$

Единственное использование сбережений- покупка капитала

$$c_t + i_t = w_t h_t + r_t^k k_t \tag{11}$$

Задача домохозяйства:

$$\max_{c_t, 1-h_t} E_t \sum_{\tau=t}^{\infty} \beta^{\tau} U(c_{\tau}, 1 - h_{\tau}) \tag{12}$$

$$\text{s.t. } c_t + i_t = w_t h_t + r^k k_t, \tag{13}$$

где β - межвременной фактор дисконтирования

Определение динамики капитала:

$$i_t = k_{t+1} - (1-\delta)k_t \tag{14}$$

Задание функции полезности:

$$U(c_t, 1-h_t) = \ln c_t + \gamma \ln(1-h_t) \tag{15}$$

Уравнение Беллмана

$$V(k_t, A_t) = \max_{c_t, h_t}[\ln c_t + \gamma \ln(1 - h_t) + \beta E_t[V(k_{t+1}, A_{t+1})|A_t]] \tag{16}$$

$$\text{s.t. } A_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta} = c_t + i_t \tag{17}$$

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t \tag{18}$$

Подставляем ограничения в целевую функцию:

$$\begin{aligned} V(k_t, A_t) = \max_{k_{t+1}, h_t} [ln \left(A_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta} + (1 - \delta)k_t - k_{t+1}\right) + \\ + \gamma ln(1 - h_t) + \beta E_t[V(k_{t+1}, A_{t+1})|A_t]] \end{aligned} \tag{19}$$

Условия первого порядка и теорема об огибающей:

- Условия первого порядка

$$\frac{\partial V(k_t, A_t)}{\partial k_{t+1}} = -\frac{1}{A_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}} + \\ + \beta E_t[V'_{k_{t+1}}(k_{t+1}, A_{t+1})|A_t] = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial V(k_t, A_t)}{\partial h_t} = (1-\theta)\frac{1}{A_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}} \times \\ \times \left(A_t k_t^{\theta} h_t^{-\theta}\right) - \gamma \frac{1}{1-h_t} = 0 \tag{21}$$

- Теорема об огибающей:

$$\frac{\partial V(k_t, A_t)}{\partial k_t} = \frac{1}{A_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}} \times \\ \times \left(\theta A_t k_t^{\theta-1} h_t^{1-\theta} + 1 - \delta\right) \tag{22}$$

Условия первого порядка:

Подставляем (22) в (20). Получаем:

$$\frac{1}{A_t k_t^\theta h_t^{1-\theta} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}} = \\ = \beta E_t \left[\frac{\theta A_{t+1} k_{t+1}^{\theta-1} h_{t+1}^{1-\theta} + 1 - \delta}{A_{t+1} k_{t+1}^\theta h_{t+1}^{1-\theta} + (1-\delta)k_{t+1} - k_{t+2}} \middle| A_t \right] \tag{23}$$

Из (21)

$$(1-\theta)(1-h_t)\left(A_t k_t^\theta h_t^{-\theta}\right) = \gamma \left(A_t k_t^\theta h_t^{1-\theta} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}\right) \tag{24}$$

Из бюджетного ограничения следует, что:

$$\mathrm{c}_t = A_t k_t^\theta h_t^{1-\theta} + (1-\delta)k_t - k_{t+1} \tag{25}$$

FOC для сектора фирм :

$$r_t^k = \theta A_t k_t^{\theta-1} h_t^{1-\theta} \tag{26}$$

$$w_t = (1-\theta) A_t k_t^\theta h_t^{-\theta} \tag{27}$$

Условия первого порядка:

Условия (23) - (24) могут быть упрощены до:

$$\frac{1}{c_t} = \beta_t E_t \left[\frac{r_{t+1}^k + 1 - \delta}{c_{t+1}} \middle| A_t \right] \tag{28}$$

$$(1 - h_t) w_t = \gamma c_t \tag{29}$$

Перепишем модель в агрегированных величинах:

$$K_t = k_t$$
$$H_t = h_t$$
$$Y_t = y_t$$
$$C_t = c_t$$

Основные уравнения модели

$$1 = \beta E_t \left[\frac{C_t}{C_{t+1}} (r^k_{t+1} + 1 - \delta) \right] \tag{30}$$

$$(1 - H_t)(1 - \theta) \frac{Y_t}{H_t} = \gamma C_t \tag{31}$$

$$C_t = Y_t + (1 - \delta) K_t - K_{t+1} \tag{32}$$

$$Y_t = A_t K_t^\theta H_t^{1-\theta} \tag{33}$$

$$r^k_t = \theta \frac{Y_t}{K_t} \tag{34}$$

$$\ln A_t = (1 - \rho_A) \ln \bar{A} + \rho \ln A_{t-1} + \varepsilon^A_t \tag{35}$$

Механизм решения модели общего равновесия

Запись оптимизационных задач

Нахождение условий первого порядка ограничений и их агрегирование

3. Нахождение стационарного состояния

Линеаризация FOC и ограничений вокруг стационарного состояния

Решение модели

Калибровка параметров

Симуляция модели и анализ результатов (построение функций импульсного отклика, расчет вторых моментов и т. д.)

Стационарное состояние

Вектор значений эндогенных переменных, на уровне которых эндогенные переменнные будут оставаться постоянными с течением времени в отсутствии шоков.

$$1 = \beta \left[\frac{\bar{C}}{\bar{C}} (\bar{r}^k + 1 - \delta) \right] \tag{36}$$

$$(1 - \bar{H})(1 - \theta) \frac{\bar{Y}}{\bar{H}} = \gamma \bar{C} \tag{37}$$

$$\bar{C} = \bar{Y} + (1 - \delta)\bar{K} - \bar{K} \tag{38}$$

$$\bar{Y} = \bar{A}\bar{K}^{\theta}\bar{H}^{1-\theta} \tag{39}$$

$$\bar{r}^k = \theta \frac{\bar{Y}}{\bar{K}} \tag{40}$$

$$\ln \bar{A} = (1 - \rho) \ln \bar{A} + \rho \ln \bar{A} \tag{41}$$

Стационарные состояние: решение

Стационарные значения для $\bar{K}$ и $\bar{H}$ равны:

$$\bar{H} = \frac{(1-\theta)(1-\beta(1-\delta))}{(1-\theta)(1-\beta(1-\delta)) + \gamma(1-\beta(1-\delta)-\beta\delta\theta)} \tag{42}$$

$$\bar{K} = \bar{H}\left[\frac{\theta\bar{A}}{\frac{1}{\beta}-1+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\theta}} \tag{43}$$

Динамика вне стационарного состояния

Для определения динамики экономики вне стационарного состояния существует несколько подходов, каждый из которых дает приближенное решение.

- Если бы набор значений переменной технологии был бы небольшим, то можно было бы применить методы, рассмотренные на прошлой лекции, и посчитать приближенную функцию стоимости и функцию - план. Преимущества:
  - работа с исходной, нелинейной моделью
  - позволяет изучать динамику не в окрестности стационарного состояния
- В обратном случае возможно применение одного из двух методов:
  - Логлинеаризация FOC и бюджетных ограничений
  - Квадратическая аппроксимация целевой функциии и линеаризация бюджетных ограничений

Механизм решения модели общего равновесия

1. Запись оптимизационных задач
2. Нахождение условий первого порядка ограничений и их агрегирование
3. Нахождение стационарного состояния
4. Линеаризация FOC и ограничений вокруг стационарного состояния
5. Решение модели
6. Калибровка параметров
7. Симуляция модели и анализ результатов (построение функций импульсного отклика, расчет вторых моментов и т. д.)

Для нелинейной модели сложно искать общее решение, поэтому обычно прибегают к логлинейной аппроксимации вокруг стационарного состояния.

$$\tilde{X}_t = \ln X_t - \ln \bar{X} \tag{44}$$

Заметим, что тогда:

$$X_t = \bar{X} \mathrm{e}^{\tilde{X}_t} \tag{45}$$

Воспользуемся теперь методом Uhlig(1999) для логлинеаризации (см. первую лекцию, уравнения (24)-(28)). Повторение:

$$\tilde{X}_t = \ln X_t - \ln \bar{X} \tag{46}$$

$$X_t = \bar{X} \mathrm{e}^{\tilde{X}_t} \tag{47}$$

$$\mathrm{e}^{\tilde{X}_t} \approx 1 + \tilde{X}_t \tag{48}$$

$$\mathrm{e}^{\tilde{X}_t + b\tilde{Y}_t} \approx 1 + \tilde{X}_t + b\tilde{Y}_t \tag{49}$$

Логлинеаризация условия первого порядка (30)

$$1 = \beta E_t \left[\frac{C_t}{C_{t+1}} (r^k_{t+1} + 1 - \delta) \right] \Rightarrow 1 = \beta[\bar{r}^k + 1 - \delta]$$

$$\begin{aligned}
1 &= \beta E_t \left[\frac{\bar{C} \mathrm{e}^{\tilde{C}_t}}{\bar{C} \mathrm{e}^{\tilde{C}_{t+1}}} \bar{r}^k \mathrm{e}^{\tilde{r}^k_{t+1}} + (1 - \delta) \frac{\bar{C} \mathrm{e}^{\tilde{C}_t}}{\bar{C} \mathrm{e}^{\tilde{C}_{t+1}}}) \right] = \\
&= \beta E_t \left[\bar{r}^k \mathrm{e}^{\tilde{C}_t - \tilde{C}_{t+1} + \tilde{r}^k_{t+1}} + (1 - \delta) \mathrm{e}^{\tilde{C}_t - \tilde{C}_{t+1}} \right] = \\
&= \beta \left(\bar{r}^k E_t \left[1 + \tilde{C}_t - \tilde{C}_{t+1} + \tilde{r}^k_{t+1} \right] + (1 - \delta) E_t \left[1 + \tilde{C}_t - \tilde{C}_{t+1} \right] \right) = \\
&= (\beta \bar{r}^k + \beta \bar{r}^k E_t \left[\tilde{C}_t - \tilde{C}_{t+1} + \tilde{r}^k_{t+1} \right] + \beta(1 - \delta) + \\
&+ \beta(1 - \delta) E_t \left[\tilde{C}_t - \tilde{C}_{t+1} \right]) = E_t \left[1 + \tilde{C}_t - \tilde{C}_{t+1} + \beta \bar{r}^k \tilde{r}^k_{t+1} \right] \Rightarrow \\
&\Rightarrow \tilde{C}_t - E_t \tilde{C}_{t+1} + \beta \bar{r}^k E_t \tilde{r}^k_{t+1} = 0
\end{aligned}$$

Литература

Основная литература:

- McCandless, G. The ABCs of RBCs: An Introduction to Dynamic Macroeconomic models, Harvard University Press, 2008, ch 6.1, 6.2