Расчетные модели макроэкономической динамики

Лектор: Оксана Анатольевна Малаховская

Лекция 4

25 февраля 2017г.

Основные уравнения модели

$$1 = \beta E_t \left[\frac{C_t}{C_{t+1}} (r_{t+1}^k + 1 - \delta) \right] \tag{1}$$

$$(1 - H_t)(1 - \theta) \frac{Y_t}{H_t} = \gamma C_t \tag{2}$$

$$C_t = Y_t + (1 - \delta) K_t - K_{t+1} \tag{3}$$

$$Y_t = A_t K_t^{\theta} H_t^{1-\theta} \tag{4}$$

$$r_t^k = \theta \frac{Y_t}{K_t} \tag{5}$$

$$\ln A_t = (1 - \rho_A) \ln \bar{A} + \rho \ln A_{t-1} + \varepsilon_t^A \tag{6}$$

Механизм решения модели общего равновесия

1. Запись оптимизационных задач
2. Нахождение условий первого порядка ограничений и их агрегирование
3. Нахождение стационарного состояния
4. Линеаризация FOC и ограничений вокруг стационарного состояния
5. Решение модели
6. Калибровка параметров
7. Симуляция модели и анализ результатов (построение функций импульсного отклика, расчет вторых моментов и т. д.)

Логлинеаризация условия первого порядка (1)

$$1 = \beta E_t \left[\frac{C_t}{C_{t+1}} (r^k_{t+1} + 1 - \delta) \right] \Rightarrow 1 = \beta[\bar{r}^k + 1 - \delta]$$

$$1 = \beta E_t \left[\frac{\bar{C} \mathrm{e}^{\tilde{C}_t}}{\bar{C} \mathrm{e}^{\tilde{C}_{t+1}}} \bar{r}^k \mathrm{e}^{\tilde{r}^k_{t+1}} + (1 - \delta) \frac{\bar{C} \mathrm{e}^{\tilde{C}_t}}{\bar{C} \mathrm{e}^{\tilde{C}_{t+1}}}) \right] =$$

$$= \beta E_t \left[\bar{r}^k \mathrm{e}^{\tilde{C}_t - \tilde{C}_{t+1} + \tilde{r}^k_{t+1}} + (1 - \delta) \mathrm{e}^{\tilde{C}_t - \tilde{C}_{t+1}} \right] =$$

$$= \beta \left(\bar{r}^k E_t \left[1 + \tilde{C}_t - \tilde{C}_{t+1} + \tilde{r}^k_{t+1} \right] + (1 - \delta) E_t \left[1 + \tilde{C}_t - \tilde{C}_{t+1} \right] \right) =$$

$$= (\beta \bar{r}^k + \beta \bar{r}^k E_t \left[\tilde{C}_t - \tilde{C}_{t+1} + \tilde{r}^k_{t+1} \right] + \beta(1 - \delta) +$$

$$+ \beta(1 - \delta) E_t \left[\tilde{C}_t - \tilde{C}_{t+1} \right]) = E_t \left[1 + \tilde{C}_t - \tilde{C}_{t+1} + \beta \bar{r}^k \tilde{r}^k_{t+1} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{C}_t - E_t \tilde{C}_{t+1} + \beta \bar{r}^k E_t \tilde{r}^k_{t+1} = 0$$

Логлинеаризация условия первого порядка (2)

$$(1-H_t)(1-\theta)\frac{Y_t}{H_t} = \gamma C_t \Rightarrow (1-\bar{H})(1-\theta)\frac{\bar{Y}}{\bar{H}} = \gamma \bar{C}$$

$$\Rightarrow (1-\theta)\frac{\bar{Y}}{\bar{H}} - (1-\theta)\bar{Y} = \gamma \bar{C}$$

$$(1-\theta)(1-\bar{H}\mathrm{e}^{\tilde{H}_t}) \cdot \frac{\bar{Y}\mathrm{e}^{\tilde{Y}_t}}{\bar{H}\mathrm{e}^{\tilde{H}_t}} = \gamma \bar{C}\mathrm{e}^{\tilde{C}_t}$$

$$(1-\theta)\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{H}}\mathrm{e}^{\tilde{Y}_t-\tilde{H}_t} - \bar{Y}\mathrm{e}^{\tilde{Y}_t}\right) = \gamma \bar{C}\mathrm{e}^{\tilde{C}_t}$$

$$(1-\theta)\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{H}}(1+\tilde{Y}_t-\tilde{H}_t) - \bar{Y}(1+\tilde{Y}_t)\right) = \gamma \bar{C}(1+\tilde{C}_t)$$

$$(1-\theta)\frac{\bar{Y}}{\bar{H}} + (1-\theta)\frac{\bar{Y}}{\bar{H}}(\tilde{Y}_t - \tilde{H}_t) - (1-\theta)\bar{Y} - (1-\theta)\bar{Y}\tilde{Y}_t =$$

$$= \gamma\bar{C} + \gamma\bar{C}\tilde{C}_t$$

$$((1-\theta)\frac{\bar{Y}}{\bar{H}} - (1-\theta)\bar{Y})\tilde{Y}_t - (1-\theta)\frac{\bar{Y}}{\bar{H}}\tilde{H}_t = \gamma\bar{C}\tilde{C}_t \Rightarrow$$

$$\tilde{Y}_t - \frac{(1-\theta)\frac{\bar{Y}}{\bar{H}}\tilde{H}}{\gamma\bar{C}} = \tilde{C}_t$$

$$\tilde{Y}_t - \frac{\tilde{H}}{1-\bar{H}} - \tilde{C}_t = 0$$

Логлинеаризация условия первого порядка (3)

$$C_t = Y_t + (1-\delta)K_t - K_{t+1} \Rightarrow \bar{C} = \bar{Y} - \delta K$$
$$\bar{C}\mathrm{e}^{\tilde{C}_t} = \bar{Y}\mathrm{e}^{\tilde{Y}_t} + (1-\delta)\bar{K}\mathrm{e}^{\tilde{K}_t} - \bar{K}\mathrm{e}^{\tilde{K}_{t+1}}$$
$$\bar{C}(1+\tilde{C}_t) = \bar{Y}(1+\tilde{Y}_t) + (1-\delta)\bar{K}(1+\tilde{K}_t) - \bar{K}(1+\tilde{K}_{t+1}) \Rightarrow$$
$$\bar{C}\tilde{C}_t = \bar{Y}\tilde{Y}_t + (1-\delta)\bar{K}\tilde{K}_t - \bar{K}\tilde{K}_{t+1}$$

$$Y_t = A_t K_t^{\theta} H_t^{1-\theta} \Rightarrow \bar{Y} = \bar{A}\bar{K}^{\theta}\bar{H}^{1-\theta}$$

$$\bar{Y}\mathrm{e}^{\tilde{Y}_t} = \bar{A}\mathrm{e}^{\tilde{A}_t}\left(\bar{K}\mathrm{e}^{\tilde{K}_t}\right)^{\theta}\left(\bar{H}\mathrm{e}^{\tilde{H}_t}\right)^{1-\theta}$$

$$\bar{Y}\mathrm{e}^{\tilde{Y}_t} = \bar{A}\bar{K}^{\theta}\bar{H}^{1-\theta}\mathrm{e}^{\tilde{A}_t+\theta\tilde{K}_t+(1-\theta)\tilde{H}_t}$$

$$\bar{Y}(1+\tilde{Y}_t) = \bar{A}\bar{K}^{\theta}\bar{H}^{1-\theta}(1+\tilde{A}_t+\theta\tilde{K}_t+(1-\theta)\tilde{H}_t) \Rightarrow$$

$$\tilde{Y}_t = \tilde{A}_t + \theta\tilde{K}_t + (1-\theta)\tilde{H}_t$$

Логлинеаризация ограничения (5)

$$r_t^k = \theta \frac{Y_t}{K_t} \Rightarrow \bar{r}^k = \theta \frac{\bar{Y}}{\bar{K}}$$

$$\bar{r}^k \mathrm{e}^{\tilde{r}_t^k} = \theta \frac{\bar{Y} \mathrm{e}^{\tilde{Y}_t}}{\bar{K} \mathrm{e}^{\tilde{K}_t}}$$

$$\bar{r}^k (1 + \tilde{r}_t^k) = \theta \frac{\bar{Y}}{\bar{K}} (1 + \tilde{Y}_t - \tilde{K}_t) \Rightarrow$$

$$\tilde{r}_t^k = \tilde{Y}_t - \tilde{K}_t$$

Логлинеаризация ограничения (6)

$$\ln A_t = (1-\rho_A)\bar{A} + \rho \ln A_{t-1} + \varepsilon_t^A \tag{7}$$

$$\ln A_t - \ln \bar{A} = \rho_A \ln A_{t-1} - \rho_A \ln \bar{A} + \varepsilon_t^A \tag{8}$$

$$\tilde{A}_t = \rho_A \tilde{A}_{t-1} + \varepsilon_t^A \tag{9}$$

Общий вид логлинеаризованной модели

Основные уравнения:

$$\tilde{C}_t - E_t \tilde{C}_{t+1} + \beta \bar{r}^k E_t \tilde{r}_{t+1} = 0 \tag{10}$$

$$\tilde{Y}_t - \frac{\tilde{H}}{1 - \bar{H}} - \tilde{C}_t = 0 \tag{11}$$

$$\bar{C} \tilde{C}_t = \bar{Y} \tilde{Y}_t + (1 - \delta) \bar{K} \tilde{K}_t - \bar{K} \tilde{K}_{t+1} \tag{12}$$

$$\tilde{Y}_t = \tilde{A}_t + \theta \tilde{K}_t + (1 - \theta) \tilde{H}_t \tag{13}$$

$$\tilde{r}_t^k = \tilde{Y}_t - \tilde{K}_t \tag{14}$$

Уравнение динамики технологического процесса:

$$\tilde{A}_t = \rho \tilde{A}_{t-1} + \varepsilon_t^A \tag{15}$$

Механизм решения модели общего равновесия

Запись оптимизационных задач

Нахождение условий первого порядка ограничений и их агрегирование

Нахождение стационарного состояния

Линеаризация FOC и ограничений вокруг стационарного состояния

5. Решение модели

Калибровка параметров

Симуляция модели и анализ результатов (построение функций импульсного отклика, расчет вторых моментов и т. д.)

Методы решения систем уравнений с RE

1. Метод Бланшара-Кана (Blanchard and Kahn, 1980). Базовая версия расширена в работах King and Watson(1998), Uhlig (1999), Klein (2000).
2. Метод Кристиано (Christiano, 2002). Основан на методе неопределенных коэффициентов.
3. Метод Симса (Sims, 2002)

Модель в матричной форме:

Определим вектор эндогенных переменных:

$$x_t = [\tilde{K}_{t+1} \quad \tilde{Y}_t \quad \tilde{C}_t \quad \tilde{H}_t \quad \tilde{r}^k_t]' \tag{16}$$

И экзогенную стохастическую переменную как:

$$z_t = [\tilde{A}_t] \tag{17}$$

Модель может быть записана в матричной форме как:

$$0 = E_t[Fx_{t+1} + Gx_t + Hx_{t-1} + Lz_{t+1} + Mz_t] \tag{18}$$

$$z_{t+1} = Nz_t + \mu_{t+1}, \tag{19}$$

где $N = \rho, F = [5 \times 5], G = [5 \times 5],$
$H = [5 \times 5], L = [5 \times 1], M = [5 \times 1]$

Решение:(1)

Мы ищем решение в виде:

$$x_t = Px_{t-1} + Qz_t \tag{20}$$

Было показано (см Uhlig(1999)), что, если решение существует, то матрица P может быть найдена из решения матричного квадратного уравнения:

$$FP^2 + GP + H = 0, \tag{21}$$

а матрица Q может быть получена из уравнения:

$$Vvec(Q) = -vec(LN + M), \tag{22}$$

где *vec* - операция векторизации и:

$$V = N' \otimes F + I_k \otimes (FP + G), \tag{23}$$

где k -размерность z_t.

Решение матричного квадратного уравнения не всегда легко найти. Часто на практике применяются методы, предполагающие разделение переменных.

Метод неопределенных коэффициентов:

Разделим переменные на три категории:

$$x_t = [\tilde{K}_{t+1}] \qquad y_t = [\tilde{Y}_t, \tilde{C}_t, \tilde{H}_t, \tilde{r}_t]' \qquad z_t = [\tilde{A}_t] \tag{24}$$

Сама модель разделяется на два набора матричных уравнений: на те, что содержат матожидание и те, что не содержат.

$$Ax_t + Bx_{t-1} + Cy_t + Dz_t = 0 \tag{25}$$

$$E_t[Fx_{t+1} + Gx_t + Hx_{t-1} + Jy_{t+1} + Ky_t + Lz_{t+1} + Mz_t] = 0 \tag{26}$$

$$z_{t+1} = Nz_t + \varepsilon_{t+1}, \quad E_t(\varepsilon_{t+1}) = 0 \tag{27}$$

В нашем случае матрицы имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{K} & 0 & 0 \end{bmatrix}', \tag{28}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & (1-\delta)\bar{K} & \theta & -1 \end{bmatrix}', \tag{29}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{1-\bar{H}} & 0 \\ \bar{Y} & -\bar{C} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\theta & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{30}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}', \tag{31}$$

$$F = [0] \quad G = [0] \quad H = [0] \tag{32}$$

Решение:(4)

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \beta\bar{r} \end{bmatrix}, \tag{33}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{34}$$

$$L = [0] \quad M = [0] \quad N = [\rho] \tag{35}$$

Решением для этой экономики является набор матриц P, Q, R, S, описывающих уравнения динамики:

$$x_t = Px_{t-1} + Qz_t \tag{36}$$

$$y_t = Rx_t + Sz_t \tag{37}$$

Матрицы являются решением следующих уравнений:

$$(F - JC^{-1}A)P^2 - (JC^{-1}B - G + KC^{-1}A)P - \\ - KC^{-1}B + H = 0 \Rightarrow P \tag{38}$$

$$R = -C^{-1}(AP + B) \Rightarrow R \tag{39}$$

$$(N' \otimes (F - JC^{-1}A) + I_k \otimes (JR + FP + G - \\ - KC^{-1}A))vec(Q) = vec((JC^{-1}D - L)N + \\ + KC^{-1}D - M) \Rightarrow Q \tag{40}$$

$$S = -C^{-1}(AQ + D) \Rightarrow S, \tag{41}$$

где k - количество столбцов в матрице Q.

Предполагает разделение переменных на:

- предетерминированные (predetermined, backward-looking)
- непредетерминированные (non-predetermined, forward-looking)

Для предетерминированных переменных:

$$E_t x_{t+1} = x_{t+1} \tag{42}$$

Значения предетерминированных переменных периода $(t+1)$ не зависят от реализации шоков (t+1)-го периода, а значения непредетерминированных - зависят.

Линейная модель может быть записана в форме пространства состояний (state space):

$$B \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + G\varepsilon_t, \tag{43}$$

где x_t - вектор предетерминированных переменных размерности $(n \times 1)$, y_t - вектор непредетерминированных переменных размерности $(m \times 1)$, ε_t - вектор случайных шоков размерности $(k \times 1)$

Предпосылка 1. Матрица B обратима.
Тогда система (43) может быть записана как:

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = B^{-1}A \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + B^{-1}G\varepsilon_t \tag{44}$$

Предпосылка 2 Собственные вектора $B^{-1}A$ линейно независимы.
Тогда матрица $B^{-1}A$ может быть представлена как:

$$B^{-1}A = M\Lambda M^{-1} \tag{45}$$

где Λ - матрица собственных значений матрицы $B^{-1}A$, а M - матрица собственных векторов, причем собственные значения отсортированы на диагонали Λ, т.ч.
$|\lambda_{1,1}| < |\lambda_{2,2}| < \ldots < |\lambda_{m+n,m+n}|$

Собственные значения и собственные векторы
Ненулевой вектор q размерности N является *собственным вектором* матрицы Z размерности $N \times N$, если:

$$Zq = \lambda q, \tag{46}$$

где λ - *собственное значение* матрицы Z, соответствующее вектору q.

Спектральное разложение
Пусть Z квадратная матрица $N \times N$ с N линейно независимыми собственными векторами q_i $(i = 1, \ldots, N)$. Тогда Z может быть представлена:

$$Z = Q \Lambda Q^{-1}, \tag{47}$$

где Q - квадратная матрица, у которой i-ый столбец равен q_i, и Λ - диагональная матрица, с диагональными элементами, равными соответствующим собственным значениям: $\Lambda_{ii} = \lambda_i$.

Условие Бланшара-Кана

Условие Бланшара-Кана

Для того чтобы решение системы существовало и было единственно, необходимо, чтобы количество элементов матрицы Λ (собственных значений матрицы $B^{-1}A$) вне единичного круга было равно количеству непредетерминированных переменных m.

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = B^{-1} A \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + B^{-1} G \varepsilon_t \tag{48}$$

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = M \Lambda M^{-1} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + B^{-1} G \varepsilon_t \tag{49}$$

$$M^{-1} \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = \Lambda M^{-1} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + M^{-1} B^{-1} G \varepsilon_t \tag{50}$$

Разделяем матрицу Λ :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & 0_{12} \\ 0_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix} \tag{51}$$

и матрицу M^{-1}:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{M}_{11} & \hat{M}_{12} \\ \hat{M}_{21} & \hat{M}_{22} \end{bmatrix} \tag{52}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{M}_{11} & \hat{M}_{12} \\ \hat{M}_{21} & \hat{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & 0_{12} \\ 0_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_{11} & \hat{M}_{12} \\ \hat{M}_{21} & \hat{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{G}_1 \\ \hat{G}_2 \end{bmatrix} \varepsilon_t, \tag{53}$$

$$\text{где: } \begin{bmatrix} \hat{G}_1 \\ \hat{G}_2 \end{bmatrix} = M^{-1} B^{-1} G, \tag{54}$$

где $\hat{G}_1$ - матрица размерности $(n \times k)$ и $\hat{G}_2$ - матрица размерности $(m \times k)$.

Второе уравнение (использующее собственные значения вне единичного круга)

$$\hat{M}_{21}x_{t+1} + \hat{M}_{22}E_t y_{t+1} = \Lambda_{22}[\hat{M}_{21}x_t + \hat{M}_{22}y_t] + \hat{G}_2\varepsilon_t \tag{55}$$

Пусть:

$$\lambda_t = \hat{M}_{21}x_t + \hat{M}_{22}y_t \tag{56}$$

Тогда:

$$E_t\lambda_{t+1} = \Lambda_{22}\lambda_t + \hat{G}_2\varepsilon_t \Rightarrow \tag{57}$$

$$\Lambda_{22}\lambda_t = E_t\lambda_{t+1} - \hat{G}_2\varepsilon_t \tag{58}$$

Решение (58)

Выражаем λ_t из (58):

$$\begin{aligned}
\lambda_t &= \Lambda_{22}^{-1}(E_t\lambda_{t+1} - G_2\varepsilon_t) = \\
&= \Lambda_{22}^{-1}E_t\lambda_{t+1} - \Lambda_{22}^{-1}G_2\varepsilon_t = \\
&= \Lambda_{22}^{-1}E_t\left(\Lambda_{22}^{-1}E_{t+1}\lambda_{t+2} - \Lambda_{22}^{-1}G_2\varepsilon_{t+1}\right) - \Lambda_{22}^{-1}G_2\varepsilon_t = \\
&= \Lambda_{22}^{-2}E_t\lambda_{t+2} - E_t(\Lambda_{22}^{-2}G_2\varepsilon_{t+1} + \Lambda_2^{-1}G_2\varepsilon_t) = \\
&= \dots
\end{aligned}$$

Так как все элементы Λ_{22} больше единицы, то $lim_{i\to\infty}\Lambda_{22}^{-i} = 0_{m\times m}$. Тогда решение (58) может быть записано как:

$$\lambda_t = -\sum_{i=0}^{\infty}\Lambda_{22}^{-i-1}\hat{G}_2E_t[\varepsilon_{t+i}] \tag{59}$$

Так как модель строится так, чтобы ожидаемые значения будущих шоков были равны нулю, то:

$$\lambda_t = -\Lambda_{22}^{-1} \hat{G}_2 \varepsilon_t \tag{60}$$

$$\hat{M}_{21} x_t + \hat{M}_{22} y_t = -\Lambda_{22}^{-1} \hat{G}_2 \varepsilon_t \tag{61}$$

$$\hat{M}_{22} y_t = -\hat{M}_{21} x_t - \Lambda_{22}^{-1} \hat{G}_2 \varepsilon_t \tag{62}$$

$$y_t = -\hat{M}_{22}^{-1} \hat{M}_{21} x_t - \hat{M}_{22}^{-1} \Lambda_{22}^{-1} \hat{G}_2 \varepsilon_t \tag{63}$$

$$E_t y_{t+1} = -\hat{M}_{22}^{-1} \hat{M}_{21} x_{t+1} \tag{64}$$

Воспользуемся первым матричным уравнением системы (53) и уравнениями (63) и (64):

$$\hat{M}_{11}x_{t+1} + \hat{M}_{12}E_t y_{t+1} = \Lambda_{11}(\hat{M}_{11}x_t + \hat{M}_{12}y_t) + \hat{G}_1\varepsilon_t \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
\hat{M}_{11}x_{t+1} - \hat{M}_{12}\hat{M}_{22}^{-1}\hat{M}_{21}x_{t+1} &= \Lambda_{11}(\hat{M}_{11}x_t - \\
&- \hat{M}_{12}\hat{M}_{22}^{-1}\hat{M}_{21}x_t - \hat{M}_{12}\hat{M}_{22}^{-1}\Lambda_{22}^{-1}\hat{G}_2\varepsilon_t) + \hat{G}_1\varepsilon_t \\
(\hat{M}_{11} - \hat{M}_{12}\hat{M}_{22}^{-1}\hat{M}_{21})x_{t+1} &= \Lambda_{11}(\hat{M}_{11} - \\
&- \hat{M}_{12}\hat{M}_{22}^{-1}\hat{M}_{21})x_t - (\Lambda_{11}\hat{M}_{12}\hat{M}_{22}^{-1}\Lambda_{22}^{-1}\hat{G}_2 - \hat{G}_1)\varepsilon_t \\
x_{t+1} = (\hat{M}_{11} - \hat{M}_{12}\hat{M}_{22}^{-1}\hat{M}_{21})^{-1}\Lambda_{11}(\hat{M}_{11} &- \hat{M}_{12}\hat{M}_{22}^{-1}\hat{M}_{21})x_t - \\
&- (\hat{M}_{11} - \hat{M}_{12}\hat{M}_{22}^{-1}\hat{M}_{21})^{-1}(\Lambda_{11}\hat{M}_{12}\hat{M}_{22}^{-1}\Lambda_{22}^{-1}\hat{G}_2 - \hat{G}_1)\varepsilon_t
\end{aligned} \tag{66}$$

Таким образом, решение системы (43) представлено в виде:

$$x_{t+1} = Lx_t + N\varepsilon_t \tag{67}$$

$$y_t = Px_t + R\varepsilon_t, \tag{68}$$

где:

$$L = (\hat{M}_{11} - \hat{M}_{12}\hat{M}_{22}^{-1}\hat{M}_{21})^{-1}\Lambda_{11}(\hat{M}_{11} - \hat{M}_{12}\hat{M}_{22}^{-1}\hat{M}_{21})$$

$$N = -(\hat{M}_{11} - \hat{M}_{12}\hat{M}_{22}^{-1}\hat{M}_{21})^{-1}(\Lambda_{11}\hat{M}_{12}\hat{M}_{22}^{-1}\Lambda_{22}^{-1}\hat{G}_2 - \hat{G}_1)$$

$$P = -\hat{M}_{22}^{-1}\hat{M}_{21}$$

$$R = -\hat{M}_{22}^{-1}\Lambda_{22}^{-1}\hat{G}_2$$

Однако, если матрица B не является обратимой, то метод Бланшара-Кана не работает. В этом случае можно использовать обобщенную декомпозицию Шура (Schur), или QZ-разложение. При этом все матрицы, используемые в рамках данной декомпозиции, содержат только действительные элементы. **Обобщенная декомпозиция Шура:**

$$B = QTZ' \tag{69}$$

$$A = QSZ', \tag{70}$$

$$QQ' = Q'Q = ZZ' = Z'Z = I \tag{71}$$

T и S - верхние треугольные матрицы

Разложение Шура

Квадратная матрица с комплексными элементами может быть представлена в виде: $A = QUQ^{-1}$, где Q - унитарная матрица (так что ее обратная Q^{-1} является эрмитово-сопряженной Q' матрицы Q), а U - верхняя треугольная матрица. Матрица U имеет то же мультимножество собственных значений, что и матрица А, и они стоят на главной диагонали U.

Обобщенное разложение Шура

Обобщенное разложение Шура двух квадратных матриц А и В - согласованная пара разложений обеих матриц $A = QSZ'$ и $B = QTZ'$, где Q и Z - унитарны, а S и T - треугольные.

Источник: `https://ru.wikipedia.org`, статья «Разложение Шура»

Решение с помощью QZ-разложения

$$B \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + G\varepsilon_t \tag{72}$$

$$QTZ' \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = QSZ' \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + G\varepsilon_t \tag{73}$$

Сортировка происходит таким образом, что в векторе $\lambda_i = S_{ii}/T_{ii}$ сначала стоят элементы внутри единичного круга. Для существования единственного решения необхдоимо, чтобы количество элементов вне единичного круга совпадало с числом непредетерминированных переменных в модели.

Решение с помощью QZ-разложения(2)

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} \\ Z'_{21} & Z'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = \\
= \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} \\ Z'_{21} & Z'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \\
+ \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} \\ Q'_{21} & Q'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \varepsilon_t
\end{aligned}
\tag{74}
$$

Решение с помощью QZ-разложения (2)

Рассмотрим второе матричное уравнение:

$$T_{22}\begin{bmatrix} Z'_{21} & Z'_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = S_{22}\begin{bmatrix} Z'_{21} & Z'_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} Q'_{21}G_1 & Q'_{22}G_2 \end{bmatrix}\varepsilon_t \tag{75}$$

Пусть:

$$\lambda_t = Z'_{21}x_t + Z'_{22}y_t \tag{76}$$

Тогда:

$$T_{22}E_t\lambda_{t+1} = S_{22}\lambda_t + [Q'_{21}G_1 + Q'_{22}G_2]\varepsilon_t \Rightarrow \tag{77}$$

$$\lambda_t = S_{22}^{-1}T_{22}E_t\lambda_{t+1} - S_{22}^{-1}[Q'_{21}G_1 + Q'_{22}G_2]\varepsilon_t \tag{78}$$

Решение с помощью QZ-разложения (2)

Чтобы избежать взрывной динамики, нужно, чтобы

$$S_{22}Z'_{21}x_t + S_{22}Z'_{22}y_t + [Q'_{21}G_1 + Q'_{22}G_2][\varepsilon_t] = 0 \tag{79}$$

$$-S_{22}Z'_{22}y_t = S_{22}Z'_{21}x_t + [Q'_{21}G_1 + Q'_{22}G_2][\varepsilon_t] \tag{80}$$

$$\begin{aligned} y_t = &-[S_{22}Z'_{22}]^{-1}S_{22}Z'_{21}x_t - \\ &- [S_{22}Z'_{22}]^{-1}[Q'_{21}G_1 + Q'_{22}G_2][\varepsilon_t] \end{aligned} \tag{81}$$

$$\begin{aligned} y_t = &-(Z'_{22})^{-1}(S_{22})^{-1}S_{22}Z'_{21}x_t - \\ &- (Z'_{22})^{-1}(S_{22})^{-1}[Q'_{21}G_1 + Q'_{22}G_2][\varepsilon_t] \end{aligned} \tag{82}$$

$$y_t = -(Z'_{22})^{-1}Z'_{21}x_t - (Z'_{22})^{-1}(S_{22})^{-1}[Q'_{21}G_1 + Q'_{22}G_2][\varepsilon_t] \tag{83}$$

Пусть:

$$N = (Z'_{22})^{-1}Z'_{21}; \quad L = (Z'_{22})^{-1}(S_{22})^{-1}[Q'_{21}G_1 + Q'_{22}G_2] \tag{84}$$

Тогда решение для непредетерминированных переменных имеет вид:

$$y_t = -Nx_t - L[\varepsilon_t] \tag{85}$$

Т.к. ожидания шоков равны нулю, то:

$$E_t y_{t+1} = -(Z'_{22})^{-1} Z'_{21} x_{t+1} = -N x_{t+1} \tag{86}$$

Тогда исходную модель:

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ Ey_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} [\varepsilon_t] \tag{87}$$

можно записать как:

Решение с помощью QZ-разложения(4)

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -N \end{bmatrix} x_{t+1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -N \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} G_1 - A_{12}L \\ G_2 - A_{22}L \end{bmatrix} [\varepsilon_t] \tag{88}$$

Используя первое уравнение системы, получаем:

$$[B_{11} - B_{12}N]x_{t+1} = [A_{11} - A_{12}N]x_t + [G_1 - A_{12}L][\varepsilon_t] \tag{89}$$

$$\begin{gathered} x_{t+1} = [B_{11} - B_{12}N]^{-1}[A_{11} - A_{12}N]x_t + \\ + [B_{11} - B_{12}N]^{-1}[G_1 - A_{12}L][\varepsilon_t] \end{gathered} \tag{90}$$

$$x_{t+1} = Cx_t + D[\varepsilon_t], \tag{91}$$

где $C = [B_{11} - B_{12}N]^{-1}[A_{11} - A_{12}N]$ и
$D = [B_{11} - B_{12}N]^{-1}[G_1 - A_{12}L]$

Запись оптимизационных задач

Нахождение условий первого порядка ограничений и их агрегирование

Нахождение стационарного состояния

Линеаризация FOC и ограничений вокруг стационарного состояния

Решение модели

6. Калибровка параметров

Симуляция модели и анализ результатов (построение функций импульсного отклика, расчет вторых моментов и т. д.)

Калибровка

Чтобы задать параметры модели можно воспользоваться

- общей экономической логикой
- результатами существующих микро- и макроисследований

В данном случае положим:

$$\theta = 0.36 \quad \text{доля дохода капитала в агрегированных данных}$$

$$\beta = 0.99 \quad \text{Микроэкономические исследования}$$

$$\delta = 0.025 \quad \text{Микроэкономические исследования}$$

$$\bar{H} = \frac{(1-\theta)(1-\beta(1-\delta))}{(1-\theta)(1-\beta(1-\delta)) + \gamma(1-\beta(1-\delta) - \beta\delta\theta)}$$

(формула (42) из прошлой лекции) $\Rightarrow$

$$\gamma = \frac{(1-H)(1-\theta)}{H} \cdot \frac{1-\beta(1-\delta)}{1-\beta(1-\delta)-\beta\delta\theta} = 1.72 \quad \text{при } \bar{H} = \frac{1}{3}$$

Значение ρ можно получить из оценки логарифмической версии производственной функции:

$$\ln A_t = \ln Y_t - \theta \ln K_t - (1-\theta) \ln H_t \tag{92}$$

В этом временном ряде коэффициент автокорреляции с первым лагом равен 0,95. Следовательно $\rho = 0.95$.

Стационарные состояния

Определяем значения переменных в стационарном состоянии.
Считаем, что $\bar{H} = 0.333$ (8 часов из 24).
Используем формулу (43) из прошлой лекции:

$$\bar{K} = \bar{H}\left[\frac{\theta \bar{A}}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta}\right]^{\frac{1}{1-\theta}} = 12.6695$$

$$\bar{Y} = \bar{K}^{\theta}\bar{H}^{1-\theta} = (12.6695)^{0.36}(0.3335)^{0.64} = 1.2353$$

Из бюджетного ограничения (формула (38) из прошлой лекции):

$$\bar{C} = \bar{Y} - \delta\bar{K} = 1.2353 - 0.025 \times 12.6695 = 0.9186$$

Из уравнения уравнения Эйлера в стационарном состоянии (формула (36) из прошлой лекции):

$$\bar{r} = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta = \frac{1}{0.99} - 1 + 0.025 = 0.0351 \qquad (93)$$

Вставляем полученные значения в матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{K} & 0 & 0 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -12.6698 & 0 & 0]' \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & (1-\delta)\bar{K} & \theta & -1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 12.353 & 0.36 & -1 \end{bmatrix}'$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{1-\bar{H}} & 0 \\ \bar{Y} & -\bar{C} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\theta & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1.5004 & 0 \\ 1.2353 & -0.9186 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0.64 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}'$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \beta\bar{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0.0348 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Решение(2)

Используя эти матрицы, находим квадратное уравнение относительно P:

$$7.0734P^2 - 14.2376P + 7.1448 = 0, \tag{94}$$

решением которого являются $P = 1.0592$ и $P = 0.9537$. Второе значение позволяет получить устойчивое решение. Для этого случая получаем:

$$Q = 0.1132$$
$$R = \begin{bmatrix} 0.2045 & 0.5691 & -0.2430 & -0.7955 \end{bmatrix}'$$
$$S = \begin{bmatrix} 1.4523 & 0.3920 & 0.7067 & 1.4523 \end{bmatrix}'$$

Решение(3)

Уравнения динамики принимают вид:

$$\tilde{K}_{t+1} = 0.9537\tilde{K}_t + 0.1132\tilde{A}_t \tag{95}$$

$$\tilde{Y}_t = 0.2045\tilde{K}_t + 1.4523\tilde{A}_t \tag{96}$$

$$\tilde{C}_t = 0.5691\tilde{K}_t + 0.3920\tilde{A}_t \tag{97}$$

$$\tilde{H}_t = -0.2430\tilde{K}_t + 0.7067\tilde{A}_t \tag{98}$$

$$\tilde{r}_t = -0.7955\tilde{K}_t + 1.4523\tilde{A}_t \tag{99}$$

Запись оптимизационных задач

Нахождение условий первого порядка ограничений и их агрегирование

Нахождение стационарного состояния

Линеаризация FOC и ограничений вокруг стационарного состояния

Решение модели

Калибровка параметров

7. Симуляция модели и анализ результатов (построение функций импульсного отклика, расчет вторых моментов и т. д.)

Хансен использовал квартальные данные по США с 1955.3 по 1984.1, для которых стандартное отклонение логарифма выпуска составляло 1.76%. В рассматриваемой модели все переменнные - это логарифмированные отклонения от стационарного состояния ($\tilde{Y}_t = \ln Y_t - \ln \bar{Y}$), следовательно стандартная ошибка для $\tilde{Y}_t$ равна 0.0176. Используем уравнения динамики:

$$\tilde{K}_{t+1} = a\tilde{K}_t + b\tilde{A}_t \tag{100}$$

$$\tilde{Y}_t = c\tilde{K}_t + d\tilde{A}_t \tag{101}$$

$$\tilde{A}_t = \rho\tilde{A}_{t-1} + \varepsilon_t \tag{102}$$

$$\tilde{K}_{t+1} = a\tilde{K}_t + b\rho\tilde{A}_{t-1} + b\varepsilon_t \tag{103}$$

$$\tilde{K}_{t+1} = b\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i} a^j\rho^{i-j}\right)\varepsilon_{t-i} \tag{104}$$

$$\tilde{A}_t = \sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\varepsilon_{t-i} \tag{105}$$

$$\tilde{Y} = d\varepsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty}\left[cb\sum_{j=0}^{i} a^j\rho^{i-j} + d\rho^{i+1}\right]\varepsilon_{t-i-1} \tag{106}$$

$$var\tilde{Y}_t = \left(d^2 + \sum_{i=0}^{\infty}\left[cb\sum_{j=0}^{i} a^j\rho^{i-j} + d\rho^{i+1}\right]^2\right) var\varepsilon_t \tag{107}$$

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{t+1} &= a\tilde{K}_t + b\rho(\varepsilon_{t-1} + \rho\varepsilon_{t-2} + \rho^2\varepsilon_{t-3} + \ldots) + b\varepsilon_t = \\ &= a\tilde{K}_t + b(\varepsilon_t + \rho\varepsilon_{t-1} + \rho a^2\varepsilon_{t-2} + \ldots) = \\ &= a\tilde{K}_t + b\sum_{r=0}^{\infty}\rho^r\varepsilon_{t-r}\end{aligned} \tag{108}$$

$$\tilde{K}_{t+1} = b\sum_{r=0}^{\infty}\rho^r\varepsilon_{t-r} + ab\sum_{r=0}^{\infty}\rho^r\varepsilon_{t-1-r} + a^2b\sum_{r=0}^{\infty}\rho^r\varepsilon_{t-2-r}\ldots \tag{109}$$

Посчитаем коэффициенты перед ε_{t-i}

$$(a^i + a^{i-1}\rho^1 + a^{i-2}\rho^2 + \ldots + \rho^i) = \sum_{j=0}^{i} a^j\rho^{i-j} \Rightarrow \tag{110}$$

$$\tilde{K}_{t+1} = b\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i} a^j\rho^{i-j}\right)\varepsilon_{t-i} \tag{111}$$

Значение в круглых скобках может быть найдено численными методами. При введенных выше параметрах оно равно 30.0757. Стандартное отклонение для $\tilde{Y}$, равное 0.0176, означает, что $var\tilde{Y}_t = 0.0030976$. Это означает, что $var\varepsilon_t = 0.000010299$, а значит, стандартное отклонение шока технологии должно быть равно 0.0032. По аналогии с уравнениями (96) и (101), меняя параметры c и d и учитывая калиброванное значение $var\varepsilon_t$, можно найти стандартные отклонения $\tilde{C}_t$, $\tilde{H}_t$, $\tilde{r}_t$. Стандартное отклонение для $\tilde{I}_t$ может быть найдено из:

$$\bar{I}\tilde{I}_t = \bar{Y}\tilde{Y}_t - \bar{C}\tilde{C}_t \Rightarrow \tag{112}$$

$$\tilde{I}_t = \hat{c}\tilde{K}_t - \hat{d}\tilde{A}_t, \tag{113}$$

где $\hat{c} = 0.2045\frac{\bar{Y}}{\bar{I}} - 0.5691\frac{\bar{C}}{\bar{I}} = -0.8530$ и $\hat{d} = 1.4523\frac{\bar{Y}}{\bar{I}} - 0.3920\frac{\bar{C}}{\bar{I}} = 4.5277$

Волатильность переменных модели(4)

Стандартные отклонения в модели и по реальным данным

	$\tilde{Y}_t$	$\tilde{C}_t$	$\tilde{H}_t$	$\tilde{r}_t$	$\tilde{I}_t$
			В модели		
Ст. ошибка	$5.484\sigma_\varepsilon$	$4.065\sigma_\varepsilon$	$1.640\sigma_\varepsilon$	$3.492\sigma_\varepsilon$	$11.742\sigma_\varepsilon$
В % от выпуска	100%	74.12%	29.90%	63.67%	214.1%
			По реальным данным		
В % от выпуска	100%	73.30%	94.32%	NA	488.64%

Вывод: модель хорошо предсказывает волатильность потребления, но плохо - волатильность рабочего времени и инвестиций.

Функции реакции на импульс

Еще одним способ оценки «правдоподобности» модели является анализ генерируемых ее функций импульсного отклика - impulse response functions (IRF). Они позволяют увидеть, как переменные модели реагируют на импульс в одном из случайных процессов.

$$\tilde{A}_t = \rho \tilde{A}_{t-1} + \varepsilon_t \tag{114}$$

$$\tilde{K}_{t+1} = PK_t + Q\tilde{A}_t \tag{115}$$

$$y_t = R\tilde{K}_t + S\tilde{A}_t, \tag{116}$$

где $y_t = [\tilde{Y}_t, \tilde{C}_t, \tilde{H}_t, \tilde{r}_t]'$.

Основная литература:

- McCandless, G. The ABCs of RBCs: An Introduction to Dynamic Macroeconomic Models, Harvard University Press, 2008, ch 6.3, 6.7, 6.8