

Часть 1. Тест.

Вопрос 1 ♣ Если квадраты остатков оценённой с помощью МНК регрессионной модели линейно и значимо зависят от квадрата регрессора Z , то гетероскедастичность можно попытаться устранить,

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> А умножив исходное уравнение на Z | <input checked="" type="checkbox"/> Б поделив исходное уравнение на Z |
| <input type="checkbox"/> В умножив исходное уравнение на Z^2 | <input type="checkbox"/> Г поделив исходное уравнение на Z^2 |
| <input type="checkbox"/> С поделив исходное уравнение на \sqrt{Z} | <input type="checkbox"/> Д Нет верного ответа. |
| <input type="checkbox"/> Е умножив исходное уравнение на \sqrt{Z} | |

Вопрос 2 ♣ Метод максимального правдоподобия для оценки коэффициентов регрессии $Y = X\beta + \varepsilon$ НЕ МОЖЕТ быть применён, если

- | |
|---|
| <input type="checkbox"/> А закон распределения вектора ε известен, но не является нормальным |
| <input type="checkbox"/> Б $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0; \Omega)$ и структура Ω известна, но зависит от набора неизвестных параметров |
| <input type="checkbox"/> В $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0; \Omega)$ и $\Omega = b \cdot I$, где b — неизвестный параметр |
| <input checked="" type="checkbox"/> Г $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0; \Omega)$ и структура Ω неизвестна |
| <input type="checkbox"/> Д $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0; \Omega)$ и $\Omega = 2017 \cdot I$ |
| <input type="checkbox"/> Е Нет верного ответа. |

Вопрос 3 ♣ При наличии сильной практической мультиколлинеарности нарушается следующее свойство МНК-оценок параметров классической регрессии:

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> А линейность по зависимой переменной | <input type="checkbox"/> Б несмещённых оценок |
| <input type="checkbox"/> В несмещённость | <input type="checkbox"/> Г равенство нулю суммы остатков |
| <input type="checkbox"/> С эффективность в классе линейных и | <input checked="" type="checkbox"/> Д Нет верного ответа. |

Вопрос 4 ♣ Оценка максимального правдоподобия параметра λ по случайной выборке X_1, \dots, X_n из распределения с функцией плотности

$$f(x|\lambda) = \begin{cases} \lambda^{-1} x^{-1+1/\lambda}, & \text{если } 0 < x < 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

имеет вид:

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> А $\hat{\lambda}_{ML} = -\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ | <input type="checkbox"/> Б $\hat{\lambda}_{ML} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ |
| <input type="checkbox"/> В $\hat{\lambda}_{ML} = \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n}$ | <input type="checkbox"/> Г $\hat{\lambda}_{ML} = \frac{\ln X_1 + \dots + \ln X_n}{n}$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> Д $\hat{\lambda}_{ML} = -\frac{\ln X_1 + \dots + \ln X_n}{n}$ | <input type="checkbox"/> Е Нет верного ответа. |

Вопрос 5 ♣ Методом максимального правдоподобия Гоша оценил модель

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_6 X_{i6} + \varepsilon_i,$$

где $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2 I)$, по 12 наблюдениям. Оказалось, что $RSS = 24$. Оценка дисперсии случайной составляющей равна

☐ A 0.5

☐ C 24/7

☐ E 2.4

☐ B 0.48

☒ 2

☐ F Нет верного ответа.

Вопрос 6 ♣ Имеются данные по 100 работникам: затраты на проезд в общественном транспорте (E_i , руб.), количество часов работы в день (WH_i , руб.), количество часов отдыха в день (LH_i , руб.) и количество часов сна в день (SH_i , руб.). Считая, что всё время суток распределяется между трудом, сном и отдыхом, оценка регрессии в виде

$$E_i = \beta_1 + \beta_2 WH_i + \beta_3 LH_i + \beta_4 SH_i + u_i$$

приведет к тому, что

☐ A МНК-оценки параметров окажутся смещёнными

☐ B коэффициент детерминации R^2 окажется отрицательным

☐ C МНК-оценки параметров регрессии будут несмещёнными и эффективными

☒ МНК-оценки получить не удастся

☐ E МНК-оценки параметров окажутся неэффективными в классе линейных и несмещённых

☐ F Нет верного ответа.

Вопрос 7 ♣ Обобщенный МНК служит для оценивания регрессионных моделей в случае нарушений следующего условия теоремы Гаусса-Маркова:

☒ $\text{Var}(u) = \sigma^2 I$

☐ D u_i распределены нормально

☐ B $\text{rank } X = k$

☐ E Величина Y_i линейна по β_1, β_2, \dots

☐ C $\mathbb{E}(u_i) = 0$

☐ F Нет верного ответа.

Вопрос 8 ♣ По $n = 550$ наблюдениям была оценена регрессия:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + u_i.$$

Затем была оценена регрессия $|\hat{u}_i| = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{1}{Z_i} + \nu_i$. Оказалось, что $\hat{\alpha}_2 = 28$ и $se(\hat{\alpha}_2) = 5$. Согласно этим данным, на уровне значимости 5% гипотеза о

- | | | | |
|-------------------------------------|---|----------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> A | верной функциональной форме не отвергается | <input type="checkbox"/> E | пропущенной переменной $1/Z_i$ отвергается |
| <input checked="" type="checkbox"/> | гомоскедастичности отвергается | <input type="checkbox"/> F | верной функциональной форме отвергается |
| <input type="checkbox"/> C | пропущенной переменной $1/Z_i$ не отвергается | <input type="checkbox"/> G | Нет верного ответа. |
| <input type="checkbox"/> D | гомоскедастичности не отвергается | | |

Вопрос 9 ♣ Василий хочет оценить константу μ в модели $Y_i = \mu + u_i$, где $\mathbb{E}(u_i) = 0$, $\mathbb{E}(u_i u_j) = 0$ при $i \neq j$, $\text{Var}(u_i) = \sigma^2 X_i$ и $X_i > 0$.

В классе линейных несмещенных оценок наиболее эффективной является:

- | | | | | | |
|----------------------------|--|----------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|
| <input type="checkbox"/> A | $\frac{\sum Y_i / \sqrt{X_i}}{\sum 1/X_i}$ | <input type="checkbox"/> C | $(I' I)^{-1} I' Y$ | <input type="checkbox"/> F | $\frac{\sum Y_i X_i}{\sum X_i^2}$ |
| <input type="checkbox"/> B | $\frac{\sum Y_i X_i}{\sum X_i}$ | <input type="checkbox"/> D | $\frac{\sum Y_i / X_i}{\sum 1/X_i^2}$ | <input checked="" type="checkbox"/> | Нет верного ответа. |
| | | <input type="checkbox"/> E | \bar{Y} | | |

Вопрос 10 ♣ Оценки коэффициентов линейной регрессии, полученные методом максимального правдоподобия и методом наименьших квадратов в случае нормально распределенной случайной составляющей, будут совпадать

- | | |
|-------------------------------------|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> | если ковариационная матрица случайной составляющей пропорциональна единичной |
| <input type="checkbox"/> B | никогда |
| <input type="checkbox"/> C | если ковариационная матрица случайной составляющей нулевая |
| <input type="checkbox"/> D | всегда |
| <input type="checkbox"/> E | если ковариационная матрица случайной составляющей диагональна |
| <input type="checkbox"/> F | Нет верного ответа. |

Вопрос 1 : ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☒ E ☐ F ☐ G

Вопрос 2 : ☐ A ☐ B ☐ C ☒ D ☐ E ☐ F

Вопрос 3 : ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☒ E

Вопрос 4 : ☐ A ☐ B ☒ C ☐ D ☐ E ☐ F

Вопрос 5 : ☐ A ☐ B ☐ C ☒ D ☐ E ☐ F

Вопрос 6 : ☐ A ☐ B ☐ C ☒ D ☐ E ☐ F

Вопрос 7 : ☒ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐ F

Вопрос 8 : ☐ A ☒ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐ F ☐ G

Вопрос 9 : ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐ F ☒ G

Вопрос 10 : ☒ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐ F

Часть 2. Задачи.

1. По данным для 39 районов Балтимора в 1970 г. были оценены уравнения

$$\ln \hat{Y}_i = 10.093 - \frac{0.239}{t=54.7} X_i, \quad R^2 = 0.803$$

и

$$\frac{\ln \hat{Y}_i}{\sqrt{X_i}} = \frac{9.093}{t=47.87} \frac{1}{\sqrt{X_i}} - \frac{0.2258}{t=-15.10} \sqrt{X_i},$$

где Y_i — плотность населения района, X_i — расстояние до центрального делового квартала.

- а) С какой целью оценили второе уравнение? Какое при этом было сделано предположение о дисперсии ошибок?
- б) Дайте интерпретацию полученным результатам.
2. Были обследованы 36 предприятий по трём показателям: K_i — основным фондам (млн. руб.), W_i — фонду оплаты труда (млн. руб.), R_i — расходам на НИОКР (млн. руб.). Получены оценки вектора средних $\hat{\mu} = (3, 4, 3)'$ и ковариационной матрицы $\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Найдите первую главную компоненту и определите долю суммарной дисперсии, которую она объясняет.

3. Мартовский Заяц и Безумный Шляпник почти все время пьют чай. Известно, что количество выпитого за день чая (в чашках) зависит от количества пирожных (в штуках) и печенья (в штуках). Алиса, гостившая у героев в течение 35 дней, заметила, что если оценить зависимость выпитого чая от закуски для Мартовского Зайца и Шляпника

$$Tea_i = \beta_1 + \beta_2 Biscuit_i + \beta_3 Cake_i + u_i,$$

то получится регрессия с $RSS = 23$.

Чтобы понять, удачную ли модель она построила, Алиса оценила еще одну регрессию

$$Tea_i = \beta_1 + \beta_2 Biscuit_i + \beta_3 Cake_i + \gamma_2 \widehat{Tea_i^2} + \gamma_3 \widehat{Tea_i^3} + \gamma_4 \widehat{Tea_i^4} + \nu_i,$$

с $RSS = 10$.

Помогите Алисе понять, верную ли спецификацию модели она выбрала: сформулируйте основную и альтернативную гипотезы и проведите подходящий тест.

Несколько решений

1. Второе уравнение оценили для корректного построения доверительных интервалов и проверки гипотез о коэффициентах в условиях гетероскедастичности, для получения более эффективных оценок, $\text{Var}(u_i) = \sigma^2 X_i$.

После применения взвешенного МНК оба коэффициента значимы.

2. `eigen(matrix(c(2, 3, 3, 10), nrow = 2))`

```
## $values
## [1] 11  1
##
## $vectors
##      [,1] [,2]
## [1,] 0.3162278 -0.9486833
## [2,] 0.9486833  0.3162278
```

Доля дисперсии: 0.6470588

3.

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/3}{RSS_{UR}/(n - k_{UR})} = 13.8666667$$