1. Рассмотрим векторы: $x = (2, 1, 0)$, $z = (1, 1, 0)$.

   а) Найдите матрицу-шляпницу, проецирующую любой вектор на линейную оболочку векторов $x$ и $z$.

   б) Найдите $\partial \hat{y}_1 / \partial y_3$ и $\partial \hat{y}_3 / \partial y_1$.

2. В рамках классической регрессионной модели $y = X\beta + u$, где $\mathbb{E}(u) = 0$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(u) = \sigma^2 \cdot I$, вектор $\hat{\beta}$ оценивается с помощью МНК. Обозначим $\hat{y} = X\hat{\beta}$, $\hat{u} = y - \hat{y}$.

   Найдите $\mathbb{E}(\hat{y})$, $\mathbb{E}(\hat{u})$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\hat{u})$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(\hat{u}, \hat{\beta})$.

3. Рассмотрим модель парной регрессии $y = \beta_1 \cdot \mathbb{1} + \beta_2 x + u$.

   а) Нарисуйте векторы $x$, $\mathbb{1}$, $y$, $\hat{y}$, $\bar{y} \cdot \mathbb{1}$.

   б) Укажите все прямые углы на рисунке.

   в) Отметьте угол, квадрат косинуса которого равен $R^2$.

   г) Закончите фразу так, чтобы она была корректной

      i. Вектор $\bar{y} \cdot \mathbb{1}$ — это проекция вектора $y$ на ...

      ii. Вектор $\hat{\beta}_2(x - \bar{x} \cdot \mathbb{1})$ — это проекция вектора $y$ на ...

4. Для регрессии $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i$ геометрически докажите, что $\bar{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{x}$.

   Попытайтесь обобщить это геометрическое доказательство на случай $k$ коэффициентов $\hat{\beta}_j$.

5. Рассмотрим парную регрессию $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i$. Исследователь Василий посчитал величину $t/\sqrt{n-2}$, где $t$ — это $t$-статистика, проверяющая гипотезу $H_0$: $\beta_2 = 0$.

   Какой геометрический смысл имеет эта величина?

   Подсказка: отношение катетов называется...

6. Пусть $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$ — регрессионная модель, где $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$,

   $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix}$, ошибки $\varepsilon_i$ независимы и нормально распределены с $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$,

   $Var(\varepsilon) = \sigma^2 I$. Для удобства расчётов даны матрицы: $X'X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.3333 & -0.3333 & 0.0000 \\ -0.3333 & 1.3333 & -1.0000 \\ 0.0000 & -1.0000 & 2.0000 \end{pmatrix}$.

   а) Укажите число наблюдений.

   б) Методом МНК найдите оценку для вектора неизвестных коэффициентов.

   в) Укажите число регрессоров в модели, учитывая константу.

   г) Найдите $TSS = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$.

   д) Найдите $RSS = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$.