

1. Рассмотрим векторы:  $x = (2, 0, 1)$ ,  $z = (1, 0, 1)$  и  $y = (1, 2, 3)$ .
  - а) Найдите матрицу-шляпницу, проецирующую любой вектор на линейную оболочку векторов  $x$  и  $z$ .
  - б) Найдите  $\partial \hat{y}_2 / \partial y_3$  и  $\partial \hat{y}_3 / \partial y_2$ .
2. В рамках классической регрессионной модели  $y = X\beta + u$ , где  $\mathbb{E}(u) = 0$ ,  $\text{Var}(u) = \sigma^2 \cdot I$ , вектор  $\hat{\beta}$  оценивается с помощью МНК. Обозначим  $\hat{y} = X\hat{\beta}$ ,  $\hat{u} = y - \hat{y}$ . Найдите  $\mathbb{E}(\hat{y})$ ,  $\mathbb{E}(\hat{u})$ ,  $\text{Var}(\hat{y})$ ,  $\text{Cov}(\hat{y}, \hat{\beta})$ .
3. Рассмотрим модель парной регрессии  $y = \beta_1 \cdot \mathbb{1} + \beta_2 x + u$ .
  - а) Нарисуйте векторы  $x$ ,  $\mathbb{1}$ ,  $y$ ,  $\hat{y}$ ,  $\bar{y} \cdot \mathbb{1}$ .
  - б) Укажите все прямые углы на рисунке.
  - в) Отметьте угол, квадрат косинуса которого равен  $R^2$ .
  - г) Закончите фразу так, чтобы она была корректной
    - i. Вектор  $y - \bar{y} \cdot \mathbb{1}$  — это проекция вектора  $y$  на ...
    - ii. Вектор  $\hat{\beta}_2(x - \bar{x} \cdot \mathbb{1})$  — это проекция вектора  $y$  на ...
4. Для регрессии  $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i$  геометрически докажите, что  $\bar{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{x}$ . Попробуйте обобщить это геометрическое доказательство на случай  $k$  коэффициентов  $\hat{\beta}_j$ .
5. Рассмотрим парную регрессию  $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i$ . Исследователь Василий посчитал величину  $t/\sqrt{n-2}$ , где  $t$  — это  $t$ -статистика, проверяющая гипотезу  $H_0: \beta_2 = 0$ . Какой геометрический смысл имеет эта величина? Подсказка: отношение катетов называется...

6. Пусть  $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$  — регрессионная модель, где  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,

$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ ,  $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix}$ , ошибки  $\varepsilon_i$  независимы и нормально распределены с  $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$ ,

$\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 I$ . Для удобства расчётов даны матрицы:  $X'X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  и  $(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.3333 & -0.3333 & 0.0000 \\ -0.3333 & 1.3333 & -1.0000 \\ 0.0000 & -1.0000 & 2.0000 \end{pmatrix}$ .

- а) Укажите число наблюдений.
- б) Методом МНК найдите оценку для вектора неизвестных коэффициентов.
- в) Укажите число регрессоров в модели, учитывая константу.
- г) Найдите  $TSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ .
- д) Найдите  $RSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ .