第一章

1.1　2023 暑假图形学与数学笔记

定理 1.1.1 (离散函数的梯度的散度的计算方式). 梯度的散度，在数学中的表达是 Laplace 算子，对于离散函数 f，我们有

$$\nabla^2 f = \frac{f(x+\mathrm{d}x, y) + f(x-\mathrm{d}x, y) + f(x, y+\mathrm{d}y) + f(x, y-\mathrm{d}y) - 4f(x, y)}{\mathrm{d}x^2}$$

因为根据泰勒展开我们有

$$f(x+\mathrm{d}x, y) = f(x, y) + f'(x, y)\mathrm{d}x + \frac{f''(x, y)\mathrm{d}x^2}{2} + ...$$
$$f(x-\mathrm{d}x, y) = f(x, y) - f'(x, y)\mathrm{d}x + \frac{f''(x, y)\mathrm{d}x^2}{2} + ...$$

两者相加即可得到

定理 1.1.2 ($f(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^3}$ 的梯度的散度). 对于函数 $f(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^2}$ 我们有

$$\nabla^2 f(\vec{r}) = 4\pi\delta(\vec{r})$$

考虑在 $(0, 0)$ 点，显然函数是未定义的。但我们可以从积分的层面去描绘未定义的值。

$$r \to 0$$
$$\oiint_s \vec{f}\mathrm{d}\vec{a} = \iiint_V \nabla \cdot f\mathrm{d}v$$

于是我们对于原点有有

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin phi \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\theta = 4\pi$$

于是

$$\nabla^2 f = 4\pi\delta(\vec{r})$$

定理 1.1.3 (乘积的 Operand 操作数的变化对结果的影响). 考虑 $f(m,n)=m*n$ 在这个函数中若 m 和 n 同时改变得

定理 1.1.4 (向量乘积的微分法则).

$$\nabla\cdot(f*\vec{A})=\nabla f\cdot\vec{A}+f\nabla\cdot\vec{A}$$

而在图形学中应用拉普拉斯方程通常有

$$\nabla\cdot(\omega\nabla u)=\nabla\omega\cdot\nabla u+\omega\nabla\cdot\nabla u$$

定理 1.1.5 (计算万有引力势能).

$$\begin{aligned} f(x)&=\nabla\Phi\\ f(x)&=-\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{\nabla x_i(\rho_j v_j)}{4\pi\|x_i-x_j\|_2}\\ f_i&=-\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{\rho_j v_j(x_i-x_j)}{4\pi\|x_i-x_j\|_2^3} \end{aligned}$$

定理 1.1.6 (伯努利不等式 (体积 >= 边长之和-维数 +1).

$$\begin{aligned} x_1x_2\ldots x_n\geq x_1+x_2+\ldots+x_n-n+1\\ (x_1+1)(x_2+1)+\ldots+(x_n+1)\geq x_1+x_2+\ldots+x_n+1 \end{aligned}$$

想象一个 n 维空间中边长为 1 的正方体，如果另一个长方体完全覆盖正方体或者被这个正方体包裹，那么他的边长就满足体积　边长之和-维数 +1

定理 1.1.7 (n 维空间中边长递增的长方体，它的体积小于其平均边长的 n 北). 一个较弱的推论是当边长从 1 开始且以 1 为增量

$$n!<(\frac{n+1}{2})^n$$

这揭示了指数和阶乘之间的不等式关系, 我们直接证明对于任何起始边长和增量都满足这个条件，即证

$$k(k+c)\ldots(k+nc)\geq(\frac{2k+nc}{2})^n$$

移项后只需证明

$$1\leq\frac{2k+nc}{4(k+i)(k+nc-i)}$$

利用基本不等式可得

$$1 \leq \frac{(a+b)^2}{4ab}$$

得证

定理 1.1.8 (分式线性函数). 形如

$$\frac{ax+b}{cx+d} \tag{1.1}$$

称之为分式线性函数

求其反函数相当于是把它的四项系数重新排列

$$-\frac{by-d}{cy-a} \tag{1.2}$$

定理 1.1.9 (求 $2x - \lfloor x \rfloor$ 的反函数).

定理 1.1.10 (求 x 左边最近的奇数). 首先做出图像，观察到是对 $\lfloor x \rfloor$ 的 x 轴和 y 轴同时应用拉伸因此可得

$$f(x) = 2\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - 1$$

定理 1.1.11 (取整函数分析). 考虑如下代码

```
base =(x[p]*inv_dx - 0.5).cast(int)
fx = x[p] * inv_dx - base.cast(float)
```

在这里不便于利用函数的偏移分析，应该直接质问取整函数与 x 的差 w

$$\epsilon = x - \lfloor x - 0.5 \rfloor$$

$$\epsilon \in (0.5, 1.5)$$

定理 1.1.12 (B-Spline Kernels 核函数). 定义

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,k}(u) u \in [u_{k-1}, u_{n+1}]$$

B-spline 基函数求出算法应用最广泛的是 deBoor-cox 递推算法:

$$B_{i,k}(u) = \frac{u-u_i}{u_{i+k-1}-u_i} \cdot B_{i,k-1}u + \frac{u_{i+k-u}}{u_{i+k}-u_{i+1}}$$

$$B_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & u_i < u < u_{i+1} \\ 0 & Otherwise \end{cases}$$

基函数的个数等于段数减去阶数，所有基函数之和为 1 的段数为总段数减去二倍阶数

定理 1.1.13 (Bezier curve).

定理 1.1.14 (How Euler compute $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$).

$$
\begin{aligned}
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...\\
\frac{\sin x}{x} &= 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-...\\
&= A[(x+\pi)(x-\pi][(x+2\pi)(x-2\pi)]\ldots\\
1 &= A(-\pi^2)(-4\pi^2)(-9\pi^2)\ldots && \text{代入} x=0
\end{aligned}
$$

对于 $\frac{1}{3!}$

定理 1.1.15 (代数基本定理). 代数学基本定理：任何复系数一元 n 次多项式方程在复数域上至少有一根 (n 1)，由此推出，n 次复系数多项式方程在复数域内有且只有 n 个根（重根按重数计算）。代数基本定理在代数乃至整个数学中起着基础作用。据说，关于代数学基本定理的证明，现有 200 多种证法。

定理 1.1.16 (质点系角动量的分解).

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_i r_i\times m_i\vec{v}_i\\
&= \sum_i(\vec{c}+\vec{r}'_i)\times m_i(\vec{v}_c+\vec{v}'_i)\\
&= \vec{r}_c\times(\sum_i m_i)\vec{v}_c+\vec{r}_c\times(\sum_i m_i\vec{v}'_i)+(\sum_i m_i\vec{r}'_i)\times\vec{v}_c+\sum_i\vec{r}'_i\times m_i\vec{v}'_i\\
&= \vec{r}_c\times m\vec{v}_c+\vec{r}_c\times\vec{p}'_c+m\vec{r}'_c\times v_c+\sum_i\vec{r}'_i\times m_i\vec{v}'_i\\
&= \vec{r}_c\times m\vec{v}_c+\sum_i\vec{r}'_i\times m_i\vec{v}'_i\\
&= \vec{L}_c+\vec{L}'
\end{aligned}
$$

这样我们就把质点系的总动量分解成了质心的角动量与质点系相对角动量之和

定理 1.1.17 (L M J 物理量关系).

$$L = \int M \, dt$$
$$L = J\omega$$
$$M = J\alpha$$
$$\vec{r} \times \vec{F}$$

定理 1.1.18 (和差化积积化和差).

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
\sin\alpha - \sin\beta &= -2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
\cos\alpha - \cos\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

只需考虑如下等式

$$\begin{aligned}
e^{i\alpha} + e^{i\beta} &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right) \\
&= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
e^{i\alpha} - e^{i\beta} &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right) \\
&= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}$$

定理 1.1.19 (给定三个向量形成三维图形的体积).

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}L_1 e_1 \cdot (\mathrm{d}L_2 e_2 \times \mathrm{d}L_3 e_3)$$

定理 1.1.20 (极分解). 常用于力学中，将应力分解为旋转分量与伸缩分量

$$\begin{aligned}
&A = U\Sigma V^T = UV^T V\Sigma V^T = (UV^T)(V\Sigma V^T) = QS \\
&Q = UV^T && \text{旋转} \\
&S = V\Sigma V^T && \text{伸缩}
\end{aligned}$$

定理 1.1.21 (代数基本定理的证明).

$$
\begin{aligned}
G_{m-1} &= \frac{z^m - c^m}{z - c} \\
&= c^{m-1} + c^{m-2}z + ... + cz^{m-2} + z^{m-1}
\end{aligned}
$$

$$P_n(z) = z^n + Az^{n-1} + ... + Dz + E$$

$$P_n(z) - P_n(c) = (z - c)(G_{n-1} + AG_{n-2} + ... + D)$$

定理 1.1.22 (Neo-Hookean superelasiticity model).

$$\Psi(F) = \frac{\mu}{2}(tr(F^TF) - d) - \mu log(J) + \frac{\lambda}{2}log^2(J)$$

势能函数是与应变之间的公式，其中 d 表示 dimensions of space to simulate in

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

1.2 大二第一学期笔记

定理 1.2.1 (矩阵内积以表示矩阵微分).

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial X_{ij}}\mathrm{d}X_{ij} = tr({\frac{\partial f}{\partial X}}^T \mathrm{d}X)$$