第一章　2023 暑假图形学与数学笔记

1.1

定理 1.1.1 (离散函数的梯度的散度的计算方式)**.** 梯度的散度，在数学中的表达是 Laplace 算子，对于离散函数 f，我们有

$$\nabla^2 f = \frac{f(x+\mathrm{d}x,y)+f(x-\mathrm{d}x,y)+f(x,y+\mathrm{d}y)+f(x,y-\mathrm{d}y)-4f(x,y)}{\mathrm{d}x^2}$$

因为根据泰勒展开我们有

$$f(x+\mathrm{d}x,y) = f(x,y)+f'(x,y)\mathrm{d}x+\frac{f''(x,y)\mathrm{d}x^2}{2}+...$$
$$f(x-\mathrm{d}x,y) = f(x,y)-f'(x,y)\mathrm{d}x+\frac{f''(x,y)\mathrm{d}x^2}{2}+...$$

两者相加即可得到

定理 1.1.2 ($f(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^3}$ 的梯度的散度)**.** 对于函数 $f(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^2}$ 我们有

$$\nabla^2 f(\vec{r}) = 4\pi\delta(\vec{r})$$

考虑在 $(0,0)$ 点，显然函数是未定义的。但我们可以从积分的层面去描绘未定义的值。

$$r \to 0$$
$$\oint\!\!\!\oint_s \vec{f}\mathrm{d}\vec{a} = \iiint_V \nabla \cdot f\mathrm{d}v$$

于是我们对于原点有有

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2 \sin phi \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta = 4\pi$$

于是

$$\nabla^2 f = 4\pi\delta(\vec{r})$$

定理 1.1.3 (乘积的 Operand 操作数的变化对结果的影响). 考虑 $f(m,n) = m * n$ 在这个函数中若 m 和 n 同时改变得

定理 1.1.4 (向量乘积的微分法则).

$$\nabla \cdot (f * \vec{A}) = \nabla f \cdot \vec{A} + f \nabla \cdot \vec{A}$$

而在图形学中应用拉普拉斯方程通常有

$$\nabla \cdot (\omega \nabla u) = \nabla \omega \cdot \nabla u + \omega \nabla \cdot \nabla u$$

定理 1.1.5 (计算万有引力势能).

$$\begin{aligned} f(x) &= \nabla \Phi \\ f(x) &= -\sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{\nabla x_i(\rho_j v_j)}{4\pi \|x_i - x_j\|_2} \\ f_i &= -\sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{\rho_j v_j (x_i - x_j)}{4\pi \|x_i - x_j\|_2^3} \end{aligned}$$

定理 1.1.6 (伯努利不等式 (体积 >= 边长之和-维数 +1).

$$\begin{aligned} x_1 x_2 \ldots x_n &\geq x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n + 1 \\ (x_1+1)(x_2+1) + \ldots + (x_n+1) &\geq x_1 + x_2 + \ldots + x_n + 1 \end{aligned}$$

想象一个 n 维空间中边长为 1 的正方体，如果另一个长方体完全覆盖正方体或者被这个正方体包裹，那么他的边长就满足体积　边长之和-维数 +1

定理 1.1.7 (n 维空间中边长递增的长方体，它的体积小于其平均边长的 n 北). 一个较弱的推论是当边长从 1 开始且以 1 为增量

$$n! < (\frac{n+1}{2})^n$$

这揭示了指数和阶乘之间的不等式关系, 我们直接证明对于任何起始边长和增量都满足这个条件，即证

$$k(k+c)\ldots(k+nc) \geq (\frac{2k+nc}{2})^n$$

移项后只需证明

$$1 \leq \frac{2k+nc}{4(k+i)(k+nc-i)}$$

利用基本不等式可得

$$1 \leq \frac{(a+b)^2}{4ab}$$

得证

定理 1.1.8 (分式线性函数). 形如

$$\frac{ax+b}{cx+d} \tag{1.1}$$

称之为分式线性函数

求其反函数相当于是把它的四项系数重新排列

$$-\frac{by-d}{cy-a} \tag{1.2}$$

定理 1.1.9 (求 $2x - \lfloor x \rfloor$ 的反函数).

定理 1.1.10 (求 x 左边最近的奇数). 首先做出图像，观察到是对 $\lfloor x \rfloor$ 的 x 轴和 y 轴同时应用拉伸因此可得

$$f(x) = 2\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - 1$$

定理 1.1.11 (取整函数分析). 考虑如下代码

```
base =(x[p]*inv_dx - 0.5).cast(int)
fx = x[p] * inv_dx - base.cast(float)
```

在这里不便于利用函数的偏移分析，应该直接质问取整函数与 x 的差 w

$$\epsilon = x - \lfloor x - 0.5 \rfloor$$
$$\epsilon \in (0.5, 1.5)$$

定理 1.1.12 (B-Spline Kernels 核函数). 定义

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,k}(u) u \in [u_{k-1}, u_{n+1}]$$

B-spline 基函数求出算法应用最广泛的是 deBoor-cox 递推算法:

$$B_{i,k}(u) = \frac{u-u_i}{u_{i+k-1}-u_i} * B_{i,k-1} u + \frac{u_{i+k-u}}{u_{i+k}-u_{i+1}}$$

$$B_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & u_i < u < u_{i+1} \\ 0 & Otherwise \end{cases}$$

定理 1.1.13 (Bezier curve).

定理 1.1.14 (How Euler compute $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$).

$$
\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... \\
\frac{\sin x}{x} &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - ... \\
&= A[(x+\pi)(x-\pi][(x+2\pi)(x-2\pi)]... \\
1 &= A(-\pi^2)(-4\pi^2)(-9\pi^2)... && \text{代入} x = 0
\end{aligned}
$$

定理 1.1.15 (代数基本定理). 代数学基本定理：任何复系数一元 n 次多项式方程在复数域上至少有一根 (n 1)，由此推出，n 次复系数多项式方程在复数域内有且只有 n 个根（重根按重数计算）。代数基本定理在代数乃至整个数学中起着基础作用。据说，关于代数学基本定理的证明，现有 200 多种证法。