

# 第一章

## 1.1 2023 暑假图形学与数学笔记

**定理 1.1.1** (离散函数的梯度的散度的计算方式). 梯度的散度, 在数学中的表达是 Laplace 算子, 对于离散函数  $f$ , 我们有

$$\nabla^2 f = \frac{f(x+dx, y) + f(x-dx, y) + f(x, y+dy) + f(x, y-dy) - 4f(x, y)}{dx^2}$$

因为根据泰勒展开我们有

$$\begin{aligned} f(x+dx, y) &= f(x, y) + f'(x, y)dx + \frac{f''(x, y)dx^2}{2} + \dots \\ f(x-dx, y) &= f(x, y) - f'(x, y)dx + \frac{f''(x, y)dx^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

两者相加即可得到

**定理 1.1.2** ( $f(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^3}$  的梯度的散度). 对于函数  $f(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^2}$  我们有

$$\nabla^2 f(\vec{r}) = 4\pi\delta(\vec{r})$$

考虑在  $(0, 0)$  点, 显然函数是未定义的。但我们可以从积分的层面去描绘未定义的值。

$$\begin{aligned} r &\rightarrow 0 \\ \oint_s \vec{f} d\vec{a} &= \iiint_V \nabla \cdot f dv \end{aligned}$$

于是我们对于原点有

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin\phi d\phi d\theta = 4\pi$$

于是

$$\nabla^2 f = 4\pi\delta(\vec{r})$$

**定理 1.1.3** (乘积的 Operand 操作数的变化对结果的影响). 考虑  $f(m, n) = m * n$  在这个函数中若  $m$  和  $n$  同时改变得

**定理 1.1.4** (向量乘积的微分法则).

$$\nabla \cdot (f * \vec{A}) = \nabla f \cdot \vec{A} + f \nabla \cdot \vec{A}$$

而在图形学中应用拉普拉斯方程通常有

$$\nabla \cdot (\omega \nabla u) = \nabla \omega \cdot \nabla u + \omega \nabla \cdot \nabla u$$

**定理 1.1.5** (计算万有引力势能).

$$\begin{aligned} f(x) &= \nabla \Phi \\ f(x) &= - \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\nabla x_i (\rho_j v_j)}{4\pi \|x_i - x_j\|_2} \\ f_i &= - \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\rho_j v_j (x_i - x_j)}{4\pi \|x_i - x_j\|_2^3} \end{aligned}$$

**定理 1.1.6** (伯努利不等式 (体积  $\geq$  边长之和-维数 +1)).

$$\begin{aligned} x_1 x_2 \dots x_n &\geq x_1 + x_2 + \dots + x_n - n + 1 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) + \dots + (x_n + 1) &\geq x_1 + x_2 + \dots + x_n + 1 \end{aligned}$$

想象一个  $n$  维空间中边长为 1 的正方体, 如果另一个长方体完全覆盖正方体或者被这个正方体包裹, 那么他的边长就满足体积 边长之和-维数 +1

**定理 1.1.7** ( $n$  维空间中边长递增的长方体, 它的体积小于其平均边长的  $n$  次). 一个较弱的推论是当边长从 1 开始且以 1 为增量

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

这揭示了指数和阶乘之间的不等式关系, 我们直接证明对于任何起始边长和增量都满足这个条件, 即证

$$k(k+c) \dots (k+nc) \geq \left(\frac{2k+nc}{2}\right)^n$$

移项后只需证明

$$1 \leq \frac{2k+nc}{4(k+i)(k+nc-i)}$$

利用基本不等式可得

$$1 \leq \frac{(a+b)^2}{4ab}$$

得证

**定理 1.1.8** (分式线性函数). 形如

$$\frac{ax+b}{cx+d} \quad (1.1)$$

称之为分式线性函数

求其反函数相当于是把它的四项系数重新排列

$$-\frac{by-d}{cy-a} \quad (1.2)$$

**定理 1.1.9** (求  $2x - \lfloor x \rfloor$  的反函数).

**定理 1.1.10** (求  $x$  左边最近的奇数). 首先做出图像, 观察到是对  $\lfloor x \rfloor$  的  $x$  轴和  $y$  轴同时应用拉伸因此可得

$$f(x) = 2 \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - 1$$

**定理 1.1.11** (取整函数分析). 考虑如下代码

```
base =(x[p]*inv_dx - 0.5).cast(int)
fx = x[p] * inv_dx - base.cast(float)
```

在这里不便于利用函数的偏移分析, 应该直接质问取整函数与  $x$  的差  $w$

$$\epsilon = x - \lfloor x - 0.5 \rfloor$$

$$\epsilon \in (0.5, 1.5)$$

**定理 1.1.12** (B-Spline Kernels 核函数). 定义

$$P(u) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,k}(u) u \in [u_{k-1}, u_{n+1}]$$

B-spline 基函数求出算法应用最广泛的是 deBoor-cox 递推算法:

$$B_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k-1} - u_i} \cdot B_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k} - u}{u_{i+k} - u_{i+1}} \cdot B_{i+1,k-1}(u)$$

$$B_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & u_i < u < u_{i+1} \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

基函数的个数等于段数减去阶数, 所有基函数之和为 1 的段数为总段数减去二倍阶数

**定理 1.1.13** (Bezier curve).

**定理 1.1.14** (How Euler compute  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ).

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ \frac{\sin x}{x} &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \\ &= A[(x + \pi)(x - \pi)][(x + 2\pi)(x - 2\pi)] \dots \\ 1 &= A(-\pi^2)(-4\pi^2)(-9\pi^2) \dots \quad \text{代入 } x = 0\end{aligned}$$

对于  $\frac{1}{3!}$

**定理 1.1.15** (代数基本定理). 代数学基本定理: 任何复系数一元  $n$  次多项式方程在复数域上至少有一根 ( $n-1$ ), 由此推出,  $n$  次复系数多项式方程在复数域内有且只有  $n$  个根 (重根按重数计算). 代数基本定理在代数乃至整个数学中起着基础作用. 据说, 关于代数学基本定理的证明, 现有 200 多种证法.

**定理 1.1.16** (质点系角动量的分解).

$$\begin{aligned}L &= \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \\ &= \sum_i (\vec{c} + \vec{r}'_i) \times m_i (\vec{v}_c + \vec{v}'_i) \\ &= \vec{r}_c \times (\sum_i m_i) \vec{v}_c + \vec{r}_c \times (\sum_i m_i \vec{v}'_i) + (\sum_i m_i \vec{r}'_i) \times \vec{v}_c + \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i \\ &= \vec{r}_c \times m \vec{v}_c + \vec{r}_c \times \vec{p}'_c + m \vec{r}'_c \times \vec{v}_c + \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i \\ &= \vec{r}_c \times m \vec{v}_c + \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i \\ &= \vec{L}_c + \vec{L}'\end{aligned}$$

这样我们就把质点系的总动量分解成了质心的角动量与质点系相对角动量之和

定理 1.1.17 (L M J 物理量关系).

$$L = \int M dt$$

$$L = J\omega$$

$$M = J\alpha$$

$$\vec{r} \times \vec{F}$$

定理 1.1.18 (快速傅里叶变换).

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-2\pi i f t} dt X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{kn} \quad \text{其基础周期为 } 1W_n = e^{-\frac{2\pi}{N}}.$$

频率到时域转换就是把各个响应的频率相加，所以在逆变换的时候要遍历所有的频率频率数等于时域点数每个 e 的指数的范围一定是 2pi 的整数倍，这样保证对齐傅里叶变换和你傅里叶变换的指数符号不同

定理 1.1.19. 用频率确定概率事件  $A \rightarrow P(a)$

概率和频率之间的关系，其中频率会再样本数目增长的时候趋近于概率

高尔顿板子 galton board，应该满足二项式分布

古典概型在样本空间中的样本点每个概率均匀相等出现

定理 1.1.20 (和差化积积化和差).

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

只需考虑如下等式

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left( e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \right)$$

$$= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left( e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \right)$$

$$= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot 2i \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

**定理 1.1.21** (给定三个向量形成三维图形的体积).

$$dV = dL_1 e_1 \cdot (dL_2 e_2 \times dL_3 e_3)$$

**定理 1.1.22** (极分解). 常用于力学中, 将应力分解为旋转分量与伸缩分量

$$A = U \Sigma V^T = UV^T V \Sigma V^T = (UV^T)(V \Sigma V^T) = QS$$

$$Q = UV^T \quad \text{旋转}$$

$$S = V \Sigma V^T \quad \text{伸缩}$$

**定理 1.1.23** (代数基本定理的证明).

$$\begin{aligned} G_{m-1} &= \frac{z^m - c^m}{z - c} \\ &= c^{m-1} + c^{m-2}z + \dots + cz^{m-2} + z^{m-1} \end{aligned}$$

$$P_n(z) = z^n + Az^{n-1} + \dots + Dz + E$$

$$P_n(z) - P_n(c) = (z - c)(G_{n-1} + AG_{n-2} + \dots + D)$$

**定理 1.1.24** (Neo-Hookean superelasticity model).

$$\Psi(F) = \frac{\mu}{2}(\text{tr}(F^T F) - d) - \mu \log(J) + \frac{\lambda}{2} \log^2(J)$$

势能函数是与应变之间的公式, 其中  $d$  表示 dimensions of space to simulate in

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

## 1.2 2023 大二第一学期笔记

**定理 1.2.1** (矩阵内积以表示矩阵微分).

$$df = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_{ij}} dX_{ij} = \text{tr}\left(\frac{\partial f}{\partial X}^T dX\right)$$

**定理 1.2.2** (Euler formula of Points Edges Regions). 考虑在一个平面内的  $V$  个点, 在拥有这些点的闭合图中一定存在一个由图中的边组成多边形可以将所有的点囊括, 并且使得剩下的边不相交, 显然

$$\text{剩下的边数} = E - V$$

首先我们只考虑多边形我们发现这个平面被划分成了两个区域: 里和外. 由于剩下  $E - V$  条不相交的边把这个图形进行了切分, 我们可以知道

$$R - (E - V) = 2$$

定理 1.2.3 (Jacobian Determinant).

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

定理 1.2.4 (Gamma Function).

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \dots n}{z(z+1) \dots (z+n)} n^z \\ &= \int_0^\infty x^{z-1} \cdot e^{-x} dx\end{aligned}$$

定理 1.2.5 (Cauchy Integral Formula).

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

定理 1.2.6 (Laurent series ).

$$f(z) = \dots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

定理 1.2.7 (高斯分布与二项分布). Gaussian distribution 和 binomial distribution 的概率密度函数相同

定理 1.2.8 (概率与几何概率). 如果存在两个及以上的随机变量, 那么可以用多个维度的体积来表示概率

定理 1.2.9 (Morgan's law).

$$\bigcap_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}.$$

定理 1.2.10 (scaled dot-product attention).

$$Attention(Q, K, V) = softmax\left(\frac{QK^T}{\sqrt{d_k}}\right)V.$$

定理 1.2.11 (关于积分的菜谱). 1. Fourier 正弦展开

2. 交换积分词语

3. 构造韩餐变量函数

4. laplace 变换

5. 狄拉克函数

6. 留数定理

## 7. 黎曼引理

**定理 1.2.12** (贝叶斯公式 bayes formula).

$$\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)}$$

考虑这个公式，一般而言结果和起因各是一种划分，而划分可以同时存在，因此，贝叶斯公式又称之为后验概率或逆概率，一般而言是让我们在结果划分的一个部分求各种原因的概率

**定理 1.2.13** (Laplace Transformation 拉普拉斯变换). 傅里叶变换是拉普拉斯变换的一个特例，拉普拉斯变换可以认为是对傅里叶变换在复数域上的拓展。首先考虑傅里叶变换的缺点，它要求函数绝对可积，并且要求函数在不能向无限拓展。考虑用  $e^t$  将函数压下去

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{at}] &= \frac{1}{s-a} \\ \mathcal{L}[\sin at] &= \frac{a}{s^2 + a^2} \\ \mathcal{L}[\cos at] &= \frac{s}{s^2 + a^2} \quad \mathcal{L}[e^{at} \sin bt] = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}\end{aligned}$$