第一章　2023 暑假图形学与数学笔记

1.1

定理 1.1.1 (离散函数的梯度的散度的计算方式). 梯度的散度，在数学中的表达是 Laplace 算子，对于离散函数 f，我们有

$$\nabla^2 f = \frac{f(x+\mathrm{d}x,y)+f(x-\mathrm{d}x,y)+f(x,y+\mathrm{d}y)+f(x,y-\mathrm{d}y)-4f(x,y)}{\mathrm{d}x^2}$$

因为根据泰勒展开我们有

$$f(x+\mathrm{d}x,y)=f(x,y)+f'(x,y)\mathrm{d}x+\frac{f''(x,y)\mathrm{d}x^2}{2}+...$$
$$f(x-\mathrm{d}x,y)=f(x,y)-f'(x,y)\mathrm{d}x+\frac{f''(x,y)\mathrm{d}x^2}{2}+...$$

两者相加即可得到

定理 1.1.2 ($f(\vec{r})=\frac{\vec{r}}{r^3}$ 的梯度的散度). 对于函数 $f(\vec{r})=\frac{\vec{r}}{r^2}$ 我们有

$$\nabla^2 f(\vec{r})=4\pi\delta(\vec{r})$$

考虑在 $(0,0)$ 点，显然函数是未定义的。但我们可以从积分的层面去描绘未定义的值。

$$r\to 0$$
$$\oiint_s \vec{f}\mathrm{d}\vec{a}=\iiint_V \nabla\cdot f\mathrm{d}v$$

于是我们对于原点有有

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2\sin phi\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta=4\pi$$

于是

$$\nabla^2 f=4\pi\delta(\vec{r})$$

定理 1.1.3 (乘积的 Operand 操作数的变化对结果的影响). 考虑 $f(m,n)=m*n$ 在这个函数中若 m 和 n 同时改变得

定理 1.1.4 (向量乘积的微分法则).

$$\nabla\cdot(f*\vec{A})=\nabla f\cdot\vec{A}+f\nabla\cdot\vec{A}$$

而在图形学中应用拉普拉斯方程通常有

$$\nabla\cdot(\omega\nabla u)=\nabla\omega\cdot\nabla u+\omega\nabla\cdot\nabla u$$

定理 1.1.5 (计算万有引力势能).

$$\begin{aligned}f(x)&=\nabla\Phi\\ f(x)&=-\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{\nabla x_i(\rho_j v_j)}{4\pi\|x_i-x_j\|_2}\\ f_i&=-\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{\rho_j v_j(x_i-x_j)}{4\pi\|x_i-x_j\|_2^3}\end{aligned}$$

定理 1.1.6 (伯努利不等式 (体积 >= 边长之和-维数 +1).

$$\begin{aligned}x_1x_2\dots x_n\geq x_1+x_2+\dots+x_n-n+1\\ (x_1+1)(x_2+1)+\dots+(x_n+1)\geq x_1+x_2+\dots+x_n+1\end{aligned}$$

想象一个 n 维空间中边长为 1 的正方体，如果另一个长方体完全覆盖正方体或者被这个正方体包裹，那么他的边长就满足体积　边长之和-维数 +1

定理 1.1.7 (n 维空间中边长递增的长方体，它的体积小于其平均边长的 n 北). 一个较弱的推论是当边长从 1 开始且以 1 为增量

$$n!<(\frac{n+1}{2})^n$$

这揭示了指数和阶乘之间的不等式关系, 我们直接证明对于任何起始边长和增量都满足这个条件，即证

$$k(k+c)\dots(k+nc)\geq(\frac{2k+nc}{2})^n$$

移项后只需证明

$$1\leq\frac{2k+nc}{4(k+i)(k+nc-i)}$$

利用基本不等式可得

$$1\leq\frac{(a+b)^2}{4ab}$$

得证