

标题：一个 L^AT_EX 的数学笔记模板

——副标题：格物致知，慎思明辨

作者：到底

2023 年 8 月 26 日

前言

if people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is. ——John von Neumann

2023 年 8 月 26 日
格物致知，慎思明辨

目录

第一章 演示	2
1.1 导数的概念	2
1.2 偏导数	3
1.2.1 偏导数的定义及其算法	3

这里写内容

第一章 演示

1.1 导数的概念

定义 1.1.1. 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义, 当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx (点 $x_0 + \Delta x$ 在该邻域内), 因变量取得增量

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时的极限存在, 那么称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 并称这个极限为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的导数, 记为 $f'(x)$, 即

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

或记为 $y'|_{x=x_0}$, $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$, $\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$, $f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

引理 1.1.1 (瞎编的引理). 好好学习 \Rightarrow 天天向上

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_C} ((x)\hat{\mathbf{i}}_C + (y)\hat{\mathbf{j}}_C + (z)\hat{\mathbf{k}}_C) \right) \hat{\mathbf{i}}_C + \left(\frac{\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} ((x)\hat{\mathbf{i}}_C + (y)\hat{\mathbf{j}}_C + (z)\hat{\mathbf{k}}_C)}{\mathbf{r}_C} \right) \hat{\mathbf{j}}_C + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}_C} ((x)\hat{\mathbf{i}}_C + (y)\hat{\mathbf{j}}_C + (z)\hat{\mathbf{k}}_C) \right) \hat{\mathbf{k}}_C$$

定理 1.1.2 (离散函数的梯度的散度). 梯度的散度, 在数学中的表达是 Laplace 算子, 对于离散函数 f , 我们有

$$\nabla^2 f = \frac{f(x + dx, y) + f(x - dx, y) + f(x, y + dy) + f(x, y - dy) - 4f(x, y)}{dx^2}$$

.

因为根据泰勒展开我们有

$$f(x + dx, y) = f(x, y) + f'(x, y)dx + f''(x, y)dx^2 + \dots$$

$$f(x - dx, y) = f(x, y) + f'(x, y)dx + f''(x, y)dx^2 + \dots$$

.

两者相加即可得到

推论 1.1.3 (瞎编的推论). 你小子没点赞.

准则 1.1.4 (夹逼准则). $a(x) < b(x) < c(x)$, 且 $\lim a = \lim c = A$, 那么 $\lim b = A$

命题 1.1.1. 差若毫厘, 谬以千里.

例 1.1.1. 求 $1 + 2 = ?$

解. $1 + 2 = (1 + 2) \int_0^1 x^2 dx + (1 + 2) \int_0^1 x^2 dx + (1 + 2) \int_0^1 x^2 dx$ □

注. 我不会

证明. $1 + 2 = 2 + 1$. □

1.2 偏导数

1.2.1 偏导数的定义及其计算法

定义 1.2.1. 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义, 当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时, 相应的函数有增量 $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$, 如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在, 那么称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数 (一点处的偏导), 记作:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0}, \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0}, f_x(x_0, y_0), f'_x(x_0, y_0)$$

类似地, 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

记作同上, 定义可推广到 n 元函数.

例 1.2.1. 求 $z = x^2 \sin 2y$ 的偏导数.

解. 易得 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin 2y + x^2 (\sin 2y)' = 2x \sin 2y, \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 \cos 2y$. □

你小子记得点赞!