第一章　演示

1.1　导数的概念

定义 1.1.1. 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx（点 $x_0 + \Delta x$ 在该邻域内），因变量取得增量

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x \to 0$ 时的极限存在，那么称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的导数，记为 $f'(x)$，即

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

或记为 $y'|_{x=x_0}$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，$\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，$f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

引理 1.1.1 (瞎编的引理). 好好学习 => 天天向上

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r_C}}\left((x)\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{C}} + (y)\hat{\mathbf{j}}_{\mathbf{C}} + (z)\hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{C}}\right)\right)\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{C}} + \left(\frac{\frac{\partial}{\partial\, \mathbf{C}}\left((x)\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{C}} + (y)\hat{\mathbf{j}}_{\mathbf{C}} + (z)\hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{C}}\right)}{\mathbf{r_C}}\right)\hat{\mathbf{j}}_{\mathbf{C}} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z_C}}\left((x)\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{C}} + (y)\hat{\mathbf{j}}_{\mathbf{C}} + (z\right.\right.$$

定理 1.1.2 (离散函数的梯度的散度). 梯度的散度，在数学中的表达是 Laplace 算子，对于离散函数 f，我们有

$$\nabla^2 f = \frac{f(x + \mathrm{d}x, y) + f(x - \mathrm{d}x, y) + f(x, y + \mathrm{d}y) + f(x, y - \mathrm{d}y) - 4f(x, y)}{\mathrm{d}x^2}$$

.

因为根据泰勒展开我们有

$$f(x + \mathrm{d}x, y) = f(x, y) + f'(x, y)\mathrm{d}x + f''(x, y)\mathrm{d}x^2 + ...$$
$$f(x - \mathrm{d}x, y) = f(x, y) + f'(x, y)\mathrm{d}x + f''(x, y)\mathrm{d}x^2 + ...$$

.

两者相加即可得到

推论 1.1.3 (瞎编的推论). 你小子没点赞.

准则 1.1.4 (夹逼准则). $a(x) < b(x) < c(x)$, 且 $\lim a = \lim c = A$，那么 $\lim b = A$

命题 1.1.1. 差若毫厘，谬以千里.

例 1.1.1. 求 $1 + 2 = ?$

解. $1 + 2 = (1 + 2)\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x + (1 + 2)\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x + (1 + 2)\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$ □

注. 我不会

证明. $1 + 2 = 2 + 1$. □

1.2 偏导数

1.2.1 偏导数的定义及其计算法

定义 1.2.1. 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应的函数有增量 $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$，如果

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，那么称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数（一点处的偏导），记作：

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=x_0,\, y=y_0}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0,\, y=y_0}, \quad f_x(x_0, y_0), \quad {f_x}'(x_0, y_0)$$

类似地，函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

记作同上，定义可推广到 n 元函数.

例 1.2.1. 求 $z = x^2 \sin 2y$ 的偏导数.

解. 易得 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin 2y + x^2(\sin 2y)' = 2x \sin 2y$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 \cos 2y$. □

你小子记得点赞！