Повна група подій. Формули повної імовірності та Баєса

1 Теоретичні відомості

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – імовірнісний простір. Нагадаємо, що умовною імовірністю події $A \in \mathcal{F}$ за умови виконання події $B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$, є число

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Нехай $\{H_j\}_{j \in I} \subset \mathcal{F}$ – деякий набір подій. Цей набір будемо називати **повною групою подій**, якщо:

1. Події попарно несумісні, тобто $H_i \cap H_j = \emptyset$, $i \neq j$,
2. $\bigcup_{j \in I} H_j = \Omega$.

Тобто $\{H_j\}_{j \in I}$ по суті задає розбиття простору Ω.

Нехай $C \in \mathcal{F}$. Запишемо **формулу повної імовірності**:

$$P(C) = \sum_{j \in I} P(C \mid H_j) P(H_j)$$

Тепер наведемо **формулу Баєса**:

$$P(H_k \mid C) = \frac{P(C \mid H_k) P(H_k)}{\sum_{j \in I} P(C \mid H_j) P(H_j)}$$

Коментар. Чи можна 'узагальнити' формулу Баєса, взявши в знаменнику іншу повну групу подій? Відповідь: можна. Через $\{H_j^*\}_{j \in I^*}$ позначимо іншу повну групу подій. Тоді

$$P(H_k \mid C) = \frac{P(H_k \cap C)}{P(C)} = \frac{P(H_k \cap C)}{\sum_{j \in I^*} P(C \mid H_j^*) P(H_j^*)} = \frac{P(C \mid H_k) P(H_k)}{\sum_{j \in I^*} P(C \mid H_j^*) P(H_j^*)}$$

Іще коментар. Імовірність $P(H_k)$ називають апріорною, а $P(H_k \mid A)$ – апостеріорною. Наявність інформації про апріорний розподіл $\{P(H_k)\}_k$ ситуацій H_k допомагає порахувати безумовні імовірності подій $A \in \mathcal{F}$. Навпаки, знання про подію що відбулася, A, дає змогу обчислити імовірності ситуацій H_k, тобто $P(H_k \mid A)$.

2 Задачі

2.1 Задача 1

Є три зовні однакові урни. В першій урні містяться дві білі та одна чорна кулі, в другій – три білі і одна чорна, а в третій – дві білі і дві чорні кулі. Дехто навмання вибирає одну з урн і виймає з неї кулю. Знайдіть імовірність того, що ця куля біла.

Розв'язання

Розглянемо таку групу подій $\{H_j\}_{j=1}^{3}$, де

$$H_j \sim \text{'Обрано j-ту урну'}$$

Ця група подій є повною.

Введемо випадкову подію $A \sim$ 'Витягнуто білу кулю'. Для знаходження $P(A)$ скористаємося формулою повної імовірності:

$$P(A) = P(A \mid H_1)P(H_1) + P(A \mid H_2)P(H_2) + P(A \mid H_3)P(H_3)$$

Імовірність обрати одну з урн однакова, тобто $P(H_j) = 1/3$ (скільки всього урн та яку саме ми обираємо?). Тепер обчислимо імовірності $P(A \mid H_j)$. Якщо H_j виконується, значить ми обрали j-ту урну. Значить, саме з j-ої кулі ми навмання обираємо кулю. Отже

$$P(A \mid H_j) = \frac{\text{Кількість білих куль в j-ій урні}}{\text{Кількість куль в j-ій урні}} = \begin{cases} \frac{2}{3}, & j = 1, \\ \frac{3}{4}, & j = 2, \\ \frac{1}{2}, & j = 3. \end{cases}$$

Підставимо підрахунки у формулу, щоб отримати відповідь:

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{23}{36}.$$

2.2 Задача 2

В урні міститься одна кулька, про яку відомо, що вона або білого, або чорного кольору. В цю урну поклали білу кульку та після перемішування навмання вибрали кульку, колір якої виявився білим. Яка ймовірність того, що і колір кульки, що залишилась, теж білий?

Розв'язання

Візуально схема експерименту така:

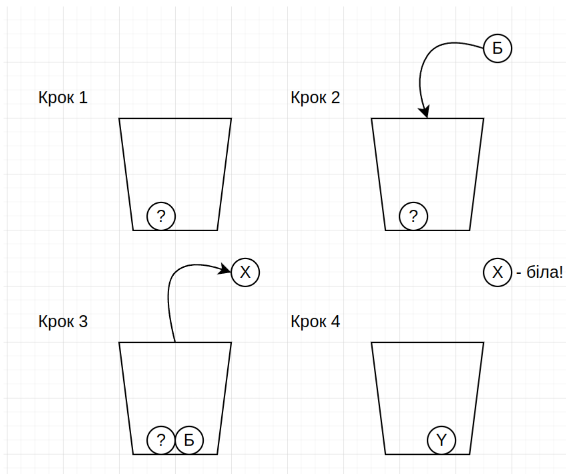

Рис. 1: Ілюстрація експерименту.

Позначимо через $A \sim$ 'Витягнули білу кульку' та $B \sim$ 'В урні залишилася біла кулька'. В задачі нас цікавить імовірність $P(B \mid A)$. Запишемо за означенням,

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

Спочатку обчислимо $P(A)$. В якості повної групи подій візьмемо $\{H_{\text{ч}}, H_{\text{б}}\}$, де

$$H_w \sim \begin{cases} \text{'Початкова куля в урні – чорна'}, & w = \text{ч}, \\ \text{'Початкова куля в урні – біла'}, & w = \text{б}. \end{cases}$$

Вважаємо, що $P(H_w) = 1/2$, $w \in \{\text{ч}, \text{б}\}$. Тепер обчислимо імовірності для A. Якщо $H_{\text{ч}}$ виконується, значить в урні по одній кулі чорного та білого кольору. Тоді $P(A \mid H_{\text{ч}}) = 1/2$. Навпаки, якщо $H_{\text{б}}$ виконується, то в урні всі кулі є білими. Тому $P(A \mid H_{\text{б}}) = 1$. В результаті

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{4}.$$

Розберемося тепер з імовірністю перетину. Подія $A \cap B$ означає, що 'витягнули білу кулю, залишилася біла'. По суті це $H_{\text{б}}$, тому $P(A \cap B) = P(H_{\text{б}}) = 1/2$. Тепер можна обчислити початкову умовну імовірність:

$$P(B \mid A) = \frac{1/2}{3/4} = 2/3.$$

2.3 Задача 3

В першій урні міститься m_1 білих та n_1 чорних куль, а у другій – m_2 білих та n_2 чорних куль. З кожної урни навмання виймається одна куля, а потім з цих двох куль навмання вибирається одна. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

Розв'язання

Розглянемо два способи до розв'язання задачі.

1. **Спосіб 1.** По суті експеримент можна переподати наступним чином: спочатку обирається одна з двох урн, а потім навмання витягується куля з обраної урни. Розглянемо повну групу подій:
$$H_j \sim \text{'Вибрали j-ту урну'},\ j = 1, 2.$$
Вважаємо, що $P(H_j) = 1/2$. Скористаємося формулою повної імовірності для обчислення події $A \sim$ 'Витягнули білу кулю':
$$P(A) = P(A \mid H_1)P(H_1) + P(A \mid H_2)P(H_2) = \dots$$
У постановці вище, по суті, $A \mid H_j$ – витягнути білу кулю з урни, якщо взято j-ту урну. Отже $P(A \mid H_j) = m_j/(n_j + m_j)$ та
$$\dots = \frac{1}{2}\left(P(A \mid H_1) + P(A \mid H_2)\right) = \frac{m_1n_2 + m_1m_2 + n_1m_2 + m_1m_2}{2(n_1 + m1)(n_2 + m_2)} = \frac{m_1n_2 + 2m_1m_2 + n_1m_2}{2(n_1 + m1)(n_2 + m_2)}.$$

2. **Спосіб 2.** Розглянемо таку групу подій $\{A_{ij}\}_{i,j\in\{\text{ч},\text{б}\}}$, де
$$A_{ij} \sim \text{'З 1-ої урни витягнули i-у кулю, а з 2-ої взяли j-у'}.$$
Ця група подій є повною. Крім того, оскільки вибір куль з кожної урони є незалежним, то
$$P(A_{ij}) = P(\text{'З 1-ої i-у кулю'})P(\text{'З 2-ої j-у кулю'}) = \begin{cases} \dfrac{n_1}{n_1+m_1}\cdot\dfrac{n_2}{n_2+m_2}, & i=\text{ч}, j=\text{ч},\\ \dfrac{m_1}{n_1+m_1}\cdot\dfrac{n_2}{n_2+m_2}, & i=\text{б}, j=\text{ч},\\ \dfrac{n_1}{n_1+m_1}\cdot\dfrac{m_2}{n_2+m_2}, & i=\text{ч}, j=\text{б},\\ \dfrac{m_1}{n_1+m_1}\cdot\dfrac{m_2}{n_2+m_2}, & i=\text{б}, j=\text{б}. \end{cases}$$
Скористаємося формулою повної імовірності для обчислення події $A \sim$ 'Витягнули білу кулю':
$$P(A) = P(A \mid A_{\text{чч}})P(A_{\text{чч}}) + P(A \mid A_{\text{бч}})P(A_{\text{бч}}) + P(A \mid A_{\text{чб}})P(A_{\text{чб}}) + P(A \mid A_{\text{бб}})P(A_{\text{бб}}) = \dots$$
Коли виконується $A_{\text{чч}}$, то серед жодна з двох куль не є білою. Отже, $P(A \mid A_{\text{чч}}) = 0$. Якщо виконується $A_{\text{бч}}$ або $A_{\text{чб}}$, тоді з двох куль лише одна біла, а тому $P(A \mid A_{\text{бч}})$ та $P(A \mid A_{\text{чб}})$ дорівнюють 1/2. А якщо виконується $A_{\text{бб}}$, тоді обидві кулі є білими, тому $P(A \mid A_{\text{бб}}) = 1$. Значить
$$\dots = \frac{P(A \mid A_{\text{бч}}) + P(A \mid A_{\text{чб}}) + 2P(A \mid A_{\text{бб}})}{2} = \frac{m_1n_2 + n_1m_2 + 2m_1m_2}{2(n_1 + m_1)(n_2 + m_2)}.$$

2.4 Задача 4

Із 18 стрільців п'ятеро влучають у дрон з імовірністю 0.8, семеро – з імовірністю 0.7, четверо – з імовірністю 0.6 і двоє – з імовірністю 0.5. Навмання обраний стрілець вистрілив, але у дрон не влучив. До якої групи він найімовірніше належить?

Розв'язання

Введемо випадкову подію $A \sim$ 'У дрон не влучили' та повну групу подій $\{H_j\}_{j=1}^4$, де

$$H_j \sim \text{'Обрали j-ту групу стрілків'}.$$

Обчислимо апріорні імовірності $P(H_j)$:

$$P(H_1) = \frac{5}{18},\ P(H_2) = \frac{7}{18},\ P(H_3) = \frac{4}{18},\ P(H_4) = \frac{2}{18}.$$

Нехай обрали j-ту групу стрільців. Тоді імовірність не влучити стрільцем, який виявився з j-ої групи, $P(A \mid H_j)$, дорівнює 0.2, 0.3, 0.4 та 0.5 відповідно для 1, 2, 3, 4 групи.

Для обчислення апостеріорних імовірностей $P(H_k \mid A)$ скористаємося формулою Баєса:

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(A \mid H_k)P(H_k)}{\sum_{j=1}^4 P(A \mid H_j)P(H_j)},$$

звідки вже можна обчислити апостеріорний розподіл груп стрілків та дати відповідь на питання задачі.

2.5 Задача 5

На даху факультету стоїть студент-математик. Горе-студент знаходиться на відстані одного кроку від краю даху (вважаємо, що дах необмежений в іншу сторону). Він робить крок випадковим чином або до краю даху, або від нього. На кожному кроці ймовірність відійти від краю дорівнює 2/3, а крок до краю має ймовірність 1/3: Які шанси студента не впасти?

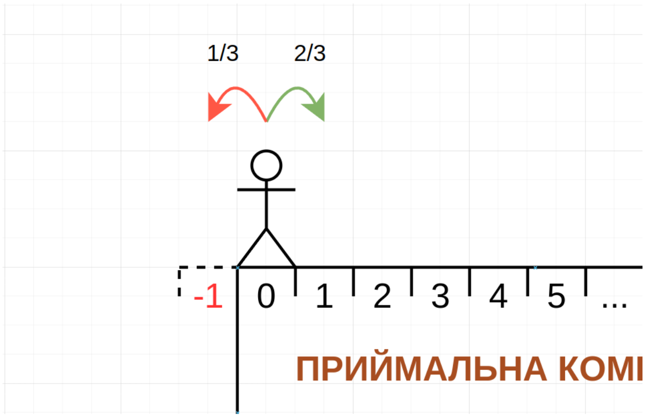

Рис. 2: Ілюстрація сиутації.

Розв'язання

Позначимо через $A \sim$ 'Студент впаде'. Тоді віповіддю на задачу буде $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Розглянемо два способи розв'язання задачі.

1. **Без використання умовних імовірностей.** Введемо випадкові події вигляду

$$A_n \sim \text{'Студент впав на n-му кроці'},\ n \geq 1.$$

Зауважимо, що впасти студент може лише на парному кроці, тому насправді $n = 2k+1$, $k \geq 0$. Отже $P(A_n) = 0$ при $n = 2k$.

Обчислимо $P(A_n)$, де $n = 2k+1$. Тобто студент $2k$ кроків 'гуляв' на даху, а на останньому звалився на курилку. Кроки є незалежними між собою, тому для одного такого маршуруту, що відповідає події A_n, матимемо імовірність $p^k q^{k+1}$, де $p = 2/3$, $q = 1/3$. А скільки всього таких 'маршрутів' студента може бути?

У кожному такому маршруті зафіксованим буде останній крок – щоб студент точно звалився. Ми маємо певну свободу у переборі кроків у різні сторони на $2k$ етапах. Тільки варто не забувати, що ми маємо переставляти так, щоб студент не впав раніше бажаного часу (тобто треба відсікати кількість маршрутів, де студент впаде раніше n-го кроку).

Всього маршрутів, навіть враховуючи 'небажані', C_{2k}^k. Кількість маршрутів, коли студент провалюється раніше n-го кроку, становить C_{2k}^{k+1} (переконайтеся).

Отже, загальна кількість маршрутів, що відповідає A_n, становить $C_k = C_{2k}^k - C_{2k}^{k+1}$ – k-те число Каталана. Імовірність, $P(A)$, тепер можемо виразити через $\{A_n\}_{n\geq 1}$, щоб отримати

$$P(A) = P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{k\geq 0} P(A_{2k+1}) = q\sum_{k\geq 0} C_k (pq)^k = qC(pq),$$

де $C(x) = \sum_{k\geq 0} C_k x^k$ – твірна функція послідовності чисел Каталана. Щоб обчислити $C(pq)$, можна скористатися властивістю (яку можна довести. до речі, вправа)

$$C(x) = 1 + x(C(x))^2,$$

звідки $C(x) = (1-\sqrt{1-4x})/(2x)$. Тоді $C(pq) = 3/2$ і звідси $P(A) = 1/3 \cdot 3/2 = 1/2$.

2. **З використанням умовних імовірностей.** Через $p(n)$ позначимо імовірність впасти з даху, стартуючи з n-ої точки. Тоді імовірність, яка цікавить нас у задачі, власне, є $p(1)$. Позначимо також $p = 2/3$, $q = 1/3$.

   Зрозуміло, що коли зроблено з n-ої позиції крок вліво, то після цього по факту на рух починається з $n-1$-ої точки і, навпаки, якщо зробити з позиції n крок вправо, то старт іде з $n+1$. За формулою повної імовірності,

$$p(n) = q\cdot p(n-1) + p\cdot p(n+1),\ n\geq 1.$$

   Також зауважимо, що $p(0) = 1$ (студент вже впав) та $\lim\limits_{n\to+\infty} p(n) = 0$. Виділимо p та q у лівій частині рівності та зробимо групування при заданих 'крокових' імовірностях:

$$\begin{aligned} &q\cdot p(n) + p\cdot p(n) = q\cdot p(n-1) + p\cdot p(n+1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow q\cdot(p(n)-p(n-1)) = p\cdot(p(n+1)-p(n)) \\ &\Leftrightarrow (p(n+1)-p(n)) = \frac{q}{p}\cdot(p(n)-p(n-1)). \end{aligned}$$

   Тепер покроково скористаємося отриманим вище співвідношенням:

$$\begin{aligned} (p(n+1)-p(n)) &= \frac{q}{p}\cdot(p(n)-p(n-1)) = \left(\frac{q}{p}\right)^2\cdot(p(n-1)-p(n-2)) = \ldots = \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^k\cdot(p(n-k+1)-p(n-k)) = |k=n| = \left(\frac{q}{p}\right)^n\cdot(p(1)-p(0)). \end{aligned}$$

   Візьмемо $k\geq 1$ та отримаємо вираз для $p(n+k)-p(n)$:

$$\begin{aligned} (p(n+k)-p(n)) &= (p(n+k)-p(n+k-1)) + \ldots + (p(n+1)-p(n)) = \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^n\cdot(p(1)-p(0))\cdot\sum_{l=0}^{k}\left(\frac{q}{p}\right)^l \end{aligned}$$

Перейдемо в рівності вище до границі при $k\to+\infty$, звідки отримаємо $(q<p)$

$$-p(n) = \left(\frac{q}{p}\right)^n\cdot(p(1)-p(0))\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)} \Rightarrow p(1) = p(0) - p(n)\cdot\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)\right)\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^n$$

Поклавши $n=0$ в останній рівності, маємо $p(1) = 1-(p-q)/p = q/p = 1/3\cdot 3/2 = 1/2$.