Стохастичний експеримент. Аксіоми теорії імовірностей

1 Теоретичні відомості

Як відомо з першого практичного заняття,

Стохастичний експеримент – це такий експеримент, який може мати декілька результатів (результат не можна наперед передбачити).

Колмогоров А. М. запропонував наступну модель стохастичного експерименту, що складається з трійки $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, у яку входить:

1. Ω – простір елементарних подій,
2. $\mathcal{F}$ – сигма-алгебра підмножин з Ω,
3. P – імовірнісна міра, визначена на $\mathcal{F}$.

Тобто $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вимірний простір з мірою.

Нагадаємо, що сигма-алгербою називають такий непорожній клас подій, що містить універсальну множину та є замкненим відносно віднімання та зліченного об'єднання. Іншими словами,

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. $\forall A, B \in \mathcal{F} : A \setminus B \in \mathcal{F}$,
3. $\forall \{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} : \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$.

Імовірнісною мірою називають таку функцію множин $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, що задовольняє наступні умови:

1. **Невід'ємність**: $P(A) \geq 0$ для всіх $A \in \mathcal{F}$. Зокрема $P(\emptyset) = 0$,
2. **Зліченна адитивність** (σ-адитивність): для довільного $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$: $P(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$,
3. **Нормованість**: $P(\Omega) = 1$.

Умови (1), (2) по суті визначають міру, а з умовою (3) довизначає імовірність.

Наведемо базові властивості імовірнісної міри:

- Перехід до доповнення: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$,
- $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$,
- Якщо $A \subset B$, то $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
- Формула 'включення-виключення':

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) - \sum_{\substack{i,j \in \{1,2,\ldots,n\}, \\ i \neq j}} P(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\}, \\ i \neq j \neq k}} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(\cap_{j=1}^{n} A_j),$$

- Монотонність: $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$,
- Зліченна напівадитивність: $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$: $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Нехай $A, B \subset \Omega$ – деякі підмножини. Наведемо імовірнісний сенс операцій над ними:

- $A \cup B$ – виконуються події A або B,
- $A \cap B$ – виконуються події A та B одночасно,
- Якщо $A \cap B = \emptyset$, то події несумісні,
- Подія $\overline{A} = \Omega \setminus A$ є доповненням до події A.

2 Задачі

2.1 Задача 1

Нехай монета має сторони 'Десятка' та 'Мазепа'. Монету підкидають доки, поки не з'явиться 'Десятка'. Описати простір елементарних подій.

- Описати події: A – 'Десятка' випаде не пізніше восьмого підкидання, B – 'Десятка' випаде при парній кількості підкидань. Описати події: $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$,
- Навести приклад імовірнісної моделі для заданого прикладу. Підрахувати імовірності подій з попереднього пункту.

Розв'язання

В експерименті ми підкидаємо монету, поки не випаде потрібна сторона. Отже, простір Ω можна описати кількістю проведених випробувань в експерименті (випробування тобто мається на увазі підкидання): $\Omega = \{1, 2, \ldots, k-1, k, k+1, \ldots\}$.

Опишемо тепер випадкові події A та B. Якщо має місце подія A, тоді всього підкидань було не більше 8. Отже, $A = \{1, 2, \ldots, 7, 8\}$. Тепер, якщо має місце подія B, тоді кількість підкидань є парним числом, а тому $B = \{2, 4, \ldots, 2(k-1), 2k, 2(k+1), \ldots\}$.

Опишемо та запишемо події $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$:

- Подія $\overline{B} = \Omega \backslash B$ інтерпретується як *'Десятка' випаде при непарній кількості підкидань*. Отже $\overline{B} = \{1, 3, \ldots, 2(k-1)-1, 2k-1, 2(k+1)-1, \ldots\}$,
- Подія $A \cap B$ інтерпретується як *'Десятка' випаде не пізніше восьмого підкидання або на парній кількості підкидань* (має виконуватися або те що сторона випала до восьмого підкидання, або при парній кількості підкидань, або одночасно обидві ситуації). Отже $A \cup B = \{1, 2, \ldots, 7, 8\} \cup \{10, 12, 14, \ldots\}$,
- Подія $A \cap B$ інтерпретується як *'Десятка' випаде на 2, 4, 6 або 8 підкиданні* (бо одночасно має виконуватися те, що кількість підкидань парна та не більша 8). Значить $A \cap B = \{2, 4, 6, 8\}$

Тепер наведемо приклад імовірнісного простору на основі моделі вище. Припустимо, що монета симетрична і можна вважати рівноймовірними отримання сторін монети. Введемо на Ω ($\mathcal{F} = 2^{\Omega}$) міру: $P(\{\omega\}) = 2^{-\omega}$, $\omega \in \Omega$. Міра P є справді імовірнісною, бо

$$P(\Omega) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\{k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$$

Знайдемо імовірності вищенаведених подій згідно моделі:

1. $P(A) = \sum_{j=1}^{8} P(\{j\}) = \sum_{j=1}^{8} 2^{-j} = \dfrac{(1/2)(1-(1/2)^8)}{1-(1/2)} = 1-(1/2)^8 = 1-1/256 = 255/256,$
2. $P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(\{2j\}) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-2j} = (1/4)/(1-1/4) = 1/3,$
3. $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 2/3,$
4. $P(A \cap B) = \sum_{j=1}^{4} P(\{2j\}) = \sum_{j=1}^{4} 2^{-2j} = \dfrac{(1/4)(1-(1/4)^4)}{1-(1/4)} = (1-(1/4)^4)/3 =$
   $= (1-1/256)/3 = 85/256,$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = (255-85)/256 + 1/3 = (3 \cdot 170 + 256)/(3 \cdot 256) =$
   $= 766/768 = 383/384.$

2.2 Задача 2

Робітник виготовив n деталей. Нехай подія A_k, $k = \overline{1, n}$, означає, що k-та деталь має дефект. Виразити через події A_k, $k = \overline{1, n}$, подію, яка полягає у тому, що:

1. Жодна з деталей не має дефектів,
2. Хоча б одна деталь має дефект,
3. Не більше двох деталей мають дефекти,
4. Тільки дві деталі мають дефекти.

Розв'язання

Задача не вимагає попереднього знання щодо вигляду Ω, $\mathcal{F}$ (власне експерименту). Втім, для кращого розуміння ви звісно можете нав'язати конкретний стохастичний експеримент щоби описати простір елементарних подій.

Для простоти позначимо $I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

- Нехай випадкова подія A відповідає ситуації з першого пункту. Для цього треба описати подію, що k-та деталь не має дефектів – це по суті доповнення $\overline{A}_k = \Omega \setminus A_k$. Якщо всі деталі не мають дефектів, то значить маємо перетин доповнень всіх A_k, тобто подія $A = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \overline{A}_n = \bigcap_{j=1}^{n} \overline{A}_j$,
- $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$
- $\left(\bigcup_{i \in I} (A_i \cap (\bigcap_{l \in I \setminus \{i\}} \overline{A}_l))\right) \cup \left(\bigcup_{i,j \in I : i \neq j} (A_i \cap A_j \cap (\bigcap_{l \in I \setminus \{i,j\}} \overline{A}_l))\right)$
- $\bigcup_{i,j \in I : i \neq j} (A_i \cap A_j \cap (\bigcap_{l \in I \setminus \{i,j\}} \overline{A}_l))$

2.3 Задача 3

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – імовірнісний простір та $A, B, A_i, B_j \in \mathcal{F}$. Доведіть:

1. $P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$,
2. $P(A \triangle B) \leq P(A \triangle C) + P(C \triangle B)$,
3. $P((\cup_j A_j) \triangle (\cup_j B_j)) \leq \sum_j P(A_j \triangle B_j)$.

Розв'язання

Розв'яжемо задачу поетапно:

1. $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, отже

   $$P(A \triangle B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B),$$

2. Покажемо, що $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$. Нехай $\omega \in A \setminus B$. Якщо $\omega \in C$, то $\omega \in C \setminus B$, отже $\omega \in C \triangle B$. Навпаки, якщо $\omega \notin C$, то $\omega \in A \setminus C$, отже $\omega \in A \triangle C$. Аналогічні міркування можна провести для $\omega \in B \setminus A \Rightarrow \omega \in (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$. Отже, з монотонності імовірності маємо, що $P(A \triangle B) \leq P((A \triangle C) \cup (C \triangle B))$, а звідси

   $$P((A \triangle C) \cup (C \triangle B)) = P(A \triangle C) + P(C \triangle B) - P((A \triangle C) \cap (C \triangle B)) \leq P(A \triangle C) + P(C \triangle B),$$

   що і доводить потрібну нерівність.

3. Спочатку доведемо, що $(\bigcup_j A_j) \triangle (\bigcup_j B_j) \subset \bigcup_j (A_j \triangle B_j)$. Нехай, наприклад, $\omega \in \bigcup_j A_j$, але $\omega \notin \bigcup_j B_j$. Тоді існує таке $k \geq 1$, що $\omega \in A_k$. Зауважимо, що для всіх $l \geq 1$: $\omega \notin B_l$. Отже, $\omega \in A_k \setminus B_k \subset \bigcup_j (A_j \triangle B_j)$. Аналогічно довести випадок, коли $\omega \notin \bigcup_j A_j$, але $\omega \in \bigcup_j B_j$.

   Отже, з монотонності імовірності маємо що $P((\bigcup_j A_j) \triangle (\bigcup_j B_j)) \leq P(\bigcup_j (A_j \triangle B_j))$, а з напівадитивності імовірності виходимо на нерівність:

   $$P\left(\bigcup_j (A_j \triangle B_j)\right) \leq \sum_j P(A_j \triangle B_j).$$

   Поєднавши викладені результати докупи, маємо твердження третього пункту.

2.4 Задача 4

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – ймовірнісний простір. Введемо функцію $\rho(A, B) = P(A \triangle B)$.

1. Дві події $A, B \in \mathcal{F}$ назвемо P-еквівалентними, якщо $\rho(A, B) = 0$. Доведіть, що це відношення є відношенням еквівалентності.

Розв'язання

Спочатку покажемо, що $A \sim B \Leftrightarrow \rho(A, B) = 0$ справді задає відношення еквівалентності:

- Рефлексія: $\rho(A, A) = P(A \triangle A) = P(\emptyset) = 0 \Rightarrow A \sim A$,
- Симетрія: $A \sim B \Leftrightarrow 0 = \rho(A, B) = P(A \triangle B) = P(B \triangle A) = \rho(B, A) \Rightarrow B \sim A$,
- Транзитивність: $A \sim B, B \sim C$

$$0 \leq \rho(A, C) = P(A \triangle C) \leq P(A \triangle B) + P(B \triangle C) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \rho(A, C) = 0 \Rightarrow A \sim C.$$