Абсолютно неперервні випадкові величини: перетворення.

По суті це заняття є продовженням теми абсолютно неперервних випадкових величин (див. попередні два заняття).

1 Теоретичні відомості

В задачах пригадується неодноразово нормальний розподіл, що власне нагадаємо. Трохи пригадували коли розглядали граничні теореми в схемі випробувань Бернуллі, але трохи.

Абсолютно неперервна випадкова величина ξ має нормальний розподіл з середнім $\mu \in \mathbb{R}$ та дисперсією $\sigma^2 > 0$, якщо її щільність має вигляд

$$f_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),\ t \in \mathbb{R}.$$

Зокрема при $\mu = 0$ та $\sigma = 1$ кажуть, що ξ має стандартний нормальний розподіл.

Позначення: $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Ясно, що якщо $\xi \sim N(0,1)$ та $\eta \sim N(\mu, \sigma^2)$, то $\eta =^d \mu + \sigma\xi$, тобто розподіли величин співпадають:

$$P(\mu + \sigma\xi \in A) = P(\eta \in A),\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

або $f_{\mu+\sigma\xi}(t) = f_\eta(t)$ майже скрізь за мірою Лебега λ_1.

2 Задачі

2.1 Задача 1

Нехай $\xi \sim N(0,1)$. Розглянемо обмежені функції $f, g \in C^{(1)}(\mathbb{R})$ з обмеженими похідними. Довести наступне:

$$E[\xi f(\xi)g(\xi)] = E[f^{'}(\xi)g(\xi)] + E[f(\xi)g^{'}(\xi)].$$

Розв'язання

Застосуємо LOTUS та інтегрування частинами:

$$E[\xi f(\xi)g(\xi)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} uf(u)g(u)f_\xi(u)du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} uf(u)g(u)e^{-u^2/2}du =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(u)d\left(e^{-u^2/2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(f(u)g(u)e^{-u^2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(f(u)g(u))^{'}_{u}e^{-u^2/2}du\right) = \dots$$

Оскільки f та g – обмежені, то $f(u)g(u)e^{-u^2/2}|_{-\infty}^{+\infty} = 0$. Отже,

$$\dots = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(f(u)g(u))^{'}_{u}f_\xi(u)du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(f^{'}(u)g(u) + f(u)g^{'}(u))f_\xi(u)du = E[f^{'}(\xi)g(\xi) + f(\xi)g^{'}(\xi)].$$

Далі зауважимо, що $f^{'}(\xi)g(\xi)$ та $f(\xi)g^{'}(\xi)$ є інтегровними випадковими величинами (чому?). Отже

$$E[\xi f(\xi)g(\xi)] = E[f^{'}(\xi)g(\xi) + f(\xi)g^{'}(\xi)] = E[f^{'}(\xi)g(\xi)] + E[f(\xi)g^{'}(\xi)],$$

що і доводить твердження задачі.

2.2 Задача 2

Нехай $\xi \sim N(0,1)$. Обчислити $E[\xi^n]$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Розв'язання

Нехай $n \geq 2$. Застосуємо LOTUS та інтегрування частинами, як і в попередній задачі:

$$E[\xi^n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^n e^{-u^2/2} du = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^{n-1} d\left(e^{-u^2/2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(u^{n-1} e^{-u^2/2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - (n-1) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^{k-2} e^{-u^2/2} du \right) = \ldots$$

Далі зауважимо, що $|u|^{n-1} e^{-|u|^2/2}$ при $|u| \to +\infty$, тому перший доданок зникає і тоді маємо

$$\ldots = (n-1) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^{n-2} f_\xi(u) du = (n-1) E[\xi^{n-2}].$$

Тобто ми отримали наступний результат: $E[\xi^n] = E[\xi^{n-2}]$, $n \geq 2$. Тому досить розглянути 'початкові' моменти: $E[\xi^0] = 1$ та $E[\xi]$. Власне, з першого миттєво отримаємо

$$E[\xi^{2k}] = \prod_{j=1}^{k} (2j-1) = (2k-1)!!, \ k \in \mathbb{N}.$$

Для моментів непарного порядку досить обчислити математичне сподівання:

$$E[\xi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u e^{-u^2/2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} d\left(\frac{u^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-u^2/2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Тобто всі моменти непарного порядку нульові: $E[\xi^{2k-1}] = 0$, $k \in \mathbb{N}$.

2.3 Задача 3

Нехай $\xi \sim N(0,1)$. Знайти розподіл, математичне сподівання та дисперсію $\eta = \xi^2$.

Розв'язання

З попередньої задачі отримаємо, що $E[\eta] = E[\xi^2] = 1$ та $Var[\eta] = E[\xi^4] - (E[\xi^2])^2 = 3 - 1^2 = 2$. Перевірте якщо не вірите.

Залишається знайти розподіл $\eta = \xi^2$. Ясно, що $\eta \in (0, +\infty)$ майже напевно, тому при $t \leq 0$ маємо $F_\eta(t) := P(\eta < t) = 0$. Якщо $t \geq 0$, маємо таке:

$$F_\eta(t) = P(|\xi| < \sqrt{t}) = P(\xi < \sqrt{t}) - P(\xi < -\sqrt{t}) = F_\xi(\sqrt{t}) - F_\xi(-\sqrt{t}).$$

Побачимо, що η має щільність розподілу. Беремо похідну від функції розподілу та отримаємо

$$f_\eta(t) = \frac{d}{dt}F_\eta(t) = 1_{(0,+\infty)}(t)\frac{f_\xi(\sqrt{t}) + f_\xi(-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} = |\text{Чому?}| = 1_{(0,+\infty)}(t)\frac{1}{\Gamma(1/2)}(1/2)^{1/2}t^{(1/2)-1}e^{-(1/2)t}$$

В результаті ми отримали розподіл хі-квадрат з один ступенем вільності. Зокрема це частковий випадок гамма-розподілу з $\lambda = 1/2$ та $\alpha = 1/2$ (параметризація згідно наведених записів з позаминулого заняття). Позначення: $\eta \sim \chi_1^2$.

Більш загально, в майбутньому можна показати таке: якщо $\{\xi_j\}_{j=1}^n$ незалежні в сукупності, однаково розподілені випадкові величини, то їхня сума квадратів $\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$ має розподіл хі-квадрат з n ступенями вільності.

Взагалі хі-квадрат розподіл має важливе застосування при побудові статистичних тестів (критеріїв) для перевірки узгодженості розподілу даних з гіпотетичним розподілом. Але це математична статистика, всьому свій час.

2.4 Задача 4

Нехай $\xi \geq 0$ майже напевно. Довести альтернативний підрахунок математичного сподівання:

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} P(\xi \geq t)dt.$$

Розв'язання

Візьмемо до уваги праву частину рівності та розпишемо її через $F_\xi(t) := P(\xi < t)$:

$$\int_0^{+\infty} P(\xi \geq t)dt = \int_0^{+\infty}\int_t^{+\infty} dF_\xi(u)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} 1_{(0,+\infty)}(t)1_{(t,+\infty)}(u)dF_\xi(u)dt.$$

По суті $1_{(0,+\infty)}(t)1_{(t,+\infty)}(u) = 1_\Delta(t,u)$, де

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > x\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y, y > 0\}.$$

Ця множина є відкритою в $\mathbb{R}^2$, отже $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Значить, 1_Δ є борельовою невід'ємною функцією. Отже, за теоремою Тонеллі (для міри Лебега λ_1 та Лебега-Стілтьєса λ_{F_ξ}, породженою функцією розподілу F_ξ),

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} 1_\Delta(t,u)dF_\xi(u)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} 1_\Delta(t,u)dtdF_\xi(u) = \int_0^{+\infty}\int_0^{u} dtdF_\xi(u) = \int_0^{+\infty} udF_\xi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} udF_\xi(u) = E[\xi].$$

2.5 Задача 5

Нехай $\xi \geq 0$ майже напевно. Показати, що ξ є інтегровною тоді і лише тоді, коли ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} P(\xi \geq k)$ є збіжним.

Розв'язання

Помітимо, що $0 \leq \sum_{k=0}^{n} P(\xi \geq k) \leq \sum_{k=0}^{n+1} P(\xi \geq k)$, тому ряд або збіжний до скінченного числа або розбігається до $+\infty$.

Скористаємося результатом попередньої задачі:

$$E[\xi] = \int\limits_{0}^{+\infty} P(\xi \geq t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{k}^{k+1} P(\xi \geq t)dt. \tag{1}$$

Тепер зауважимо, що $P(\xi \geq k+1) \leq P(\xi \geq t) \leq P(\xi \geq k)$ при $t \in [k, k+1]$, оскільки хвостова імовірність $P(\xi \geq t)$ є незростаючою по t функцією.

Припустимо, що $E[\xi] < +\infty$. Тоді з (1) маємо

$$E[\xi] = \sum_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{k}^{k+1} P(\xi \geq t)dt \geq \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{k}^{k+1} P(\xi \geq t)dt \geq \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{k}^{k+1} P(\xi \geq k+1)dt = \sum_{k=0}^{n} P(\xi \geq k+1).$$

Значить, часткові суми $\sum_{k=0}^{n} P(\xi \geq k)$ утворюють неспадну обмежену послідовність. Значить, ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} P(\xi \geq k)$ збіжний.

Навпаки, припустимо збіжність ряду $\sum_{k=0}^{+\infty} P(\xi \geq k)$. Схожими кроками отримаємо

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(\xi \geq k) \geq \sum_{k=0}^{n} P(\xi \geq k) = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{k}^{k+1} P(\xi \geq k)dt \geq \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{k}^{k+1} P(\xi \geq t)dt = \int\limits_{0}^{n+1} P(\xi \geq t)dt.$$

Але ж відомо, що інтеграл справа не спадає при зростанні k. Отже, $\lim_{A \to +\infty} \int\limits_{0}^{A} P(\xi \geq t)dt$ скінченна та

$$E[\xi] = \int\limits_{0}^{+\infty} P(\xi \geq t)dt = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{0}^{A} P(\xi \geq t)dt < +\infty.$$