# Граничні теореми для схеми випробувань Бернуллі. Загальне означення випадкової величини

# 1 Теоретичні відомості

## Загальне означення випадкової величини

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – імовірнісний простір. Через $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ позначимо борельову сигма-алгебру підмножин з $\mathbb{R}$.

Випадковою величиною називають функцію $X : \Omega \to \mathbb{R}$, що є $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-вимірною, тобто для всіх $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}.$$

Насправді досить вимагати, щоб прообрази $X^{-1}((-\infty, t)) \in \mathcal{F}$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Математичним сподіванням в загальному розумінні є інтеграл Лебега

$$E[X] = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega) \tag{1}$$

Функцією розподілу випадкової величини $X$ називають функцію $F_X(t) = P(X < t)$, $t \in \mathbb{R}$. Відмітимо основні властивості $F_X$:

1. $F_X(t)$ неспадна по $t \in \mathbb{R}$,
2. $\lim\limits_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} F_X(t) = 1$
3. $F_X(t)$ є неперервною зліва функцією.

Розглянемо міру Лебега-Стілтьєса на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, породженою функцією розподілу $F_X(t)$:

$$F_X([a, b)) := F_X(b) - F_X(a), \ -\infty < a < b < +\infty.$$

Зробивши заміну міри з $P(\cdot)$ на $F_X(\cdot) = P(X^{-1}(\cdot))$ в (1), маємо більш вживане означення математичного сподівання:

$$E[X] = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega) = \int_\mathbb{R} tF_X(dt) \left( = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} tdF_X(dt) \right).$$

Дисперсією випадкової величини $X$ є $Var[X] = E[(X - E[X])^2]$.

Сформулюємо правило підрахунку мат. сподівання перетворення від випадкової величини:

**Law of the unconscious statistician (LOTUS).** Нехай вимірна функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є інтегровною за мірою $F_X(\cdot)$. Тоді $E[g(X)]$ існує, причому

$$E[g(X)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)dF_X(t). \tag{2}$$

# Граничні теореми для схеми випробувань Бернуллі

## Трохи розмов про біноміальний розподіл

Випробуванням Бернуллі називають дихотомічний стохастичний експеримент, тобто такий, який може мати один з двох результатів (часто інтерпретується через успіх / невдача).

Схемою випробувань Бернуллі називають послідовність незалежних в сукупності випробувань Бернуллі, тобто послідовність експериментів, кожне з яких може мати два результати.

Одним із розподілів, що ідейно будується через випробування Бернуллі, є біноміальний. Припустимо, що успіх настане в одному випробуванні з імовірністю $p$ та проведено $n$ випробувань. Тоді кількість успіхів $\xi$ в такій схемі має розподіл

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k = \overline{0, n}.$$

Бувають ситуації, коли для такого розподілу потрібно порахувати імовірності 'з рівностями' та 'з нерівностями', коли кількість випробувань $n$ досить велика. Тут можуть виникнути проблеми з підрахунком біноміального коефіцієнта (передавайте привіт факторіалу і множимо у стовпчик). Власне, щоб спробувати уникнути громіздких обчислень, можливо є сенс розглядати досліджувану 'модель' $\xi$ як одну з реалізацій деякої послідовності 'моделей' $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ з хорошими асимптотичними властивостями і скористатися наближенням.

Для формулювання граничних теорем потрібно ввести означення нормального розподілу (цей розподіл вивчатиметься детальніше в задачах на неперервні випадкові величини):

Випадкова величина $\eta$ має стандартний нормальний розподіл, якщо її функцію розподілу можна подати у вигляді:

$$P(\eta < t) = \Phi(t) := \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt,\ t \in \mathbb{R}.$$

Підінтегральну функцію $\varphi(t) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-t^2/2)$ називають щільністю стандартного нормального розподілу.

Більш загально, випадкова величина $\tau$ має нормальний розподіл з параметрами $\mu \in \mathbb{R}$ та $\sigma^2 > 0$, якщо її щільність розподілу має вигляд

$$\varphi_*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ t \in \mathbb{R}.$$

Позначення: $\tau \sim N(\mu, \sigma^2)$ (відповідно $\eta \sim N(0,1)$).

Неважко переконатися (переконайтесь), що $\tau =^d \mu + \sigma\eta$ (розподіли величин однакові).

**Граничні теореми**

Припустимо, що імовірність успіху $p$ є фіксованою незалежно від кількості проведених випробувань $n$. Тоді, неформально, при збільшенні обсягу вибірки, біноміальний розподіл за формою нагадуватиме нормальний розподіл із деяким 'зсувом' та 'масштабом'.

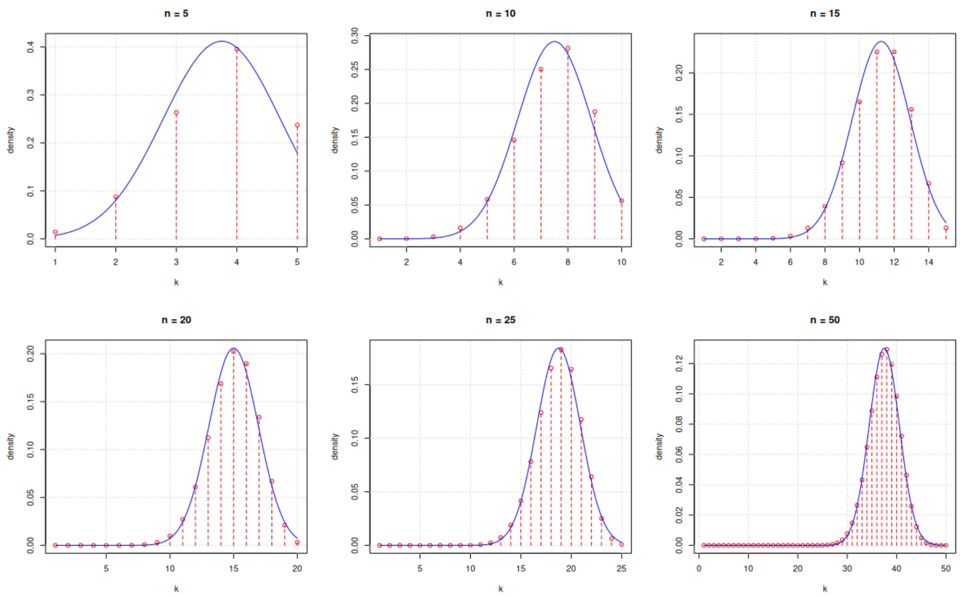

Рис. 1: Графіки біноміального розподілу (червоним) та щільності нормального розподілу з $\mu = np$, $\sigma^2 = np(1-p)$ (синім) в залежності від кількості випробувань $n$ (тут $p = 3/4$).

Наступні теореми формалізують проведені вище спостереження для біноміального розподілу.

**Теорема де Муавра-Лапласа в локальній формі.** Нехай $\xi_n \sim \mathrm{Binom}(n, p)$.

Тоді для довільного $c > 0$

$$\sup_{k:|k-np|\le c\sqrt{n}} \left| \frac{P(\xi_n = k)}{\varphi_*(k)} - 1 \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \ n \to \infty,$$

де $\varphi_*(t) = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \varphi\left(\frac{t-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

**Теорема де Муавра-Лапласа в інтегральній формі.** Нехай $\xi_n \sim \mathrm{Binom}(n, p)$.

Тоді для $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$:

$$P(a \le \xi_n < b) = \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \ n \to \infty.$$

Коментарі далі.

Якщо зовсім грубо, то для досить великих $n$ допускається нормальна апроксимація:

$$P(\xi_n = k) = P\left(\frac{\xi_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\phi\left(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$P(a \le \xi_n < b) = P\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{\xi_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

До речі, процедуру віднімання математичного сподівання та ділення отриманого на корінь з дисперсії випадкової величини називають стандартизацією. Відповідно випадкову величину $(\xi - E[\xi])/\sqrt{Var[\xi]}$ називають стандартизованою (а $(\xi - E[\xi])$ – центрованою).

Тепер припустимо, що імовірність успіху $p = p_n$ є змінною в залежності від кількості проведених випробувань $n$, причому так, щоб $E[\xi_n] \to \lambda > 0$ при $n \to \infty$. Тоді наступна теорема дозволяє скористатися пуассонівською апроксимацією:

**Теорема Пуассона (закон рідкісних подій).** Нехай $\xi_n \sim \mathrm{Binom}(n, p)$, причому $p = p_n$ таке, що $n \cdot p_n \to \lambda > 0$.

Тоді для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$:

$$P(\xi_n = k) \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ n \to \infty.$$

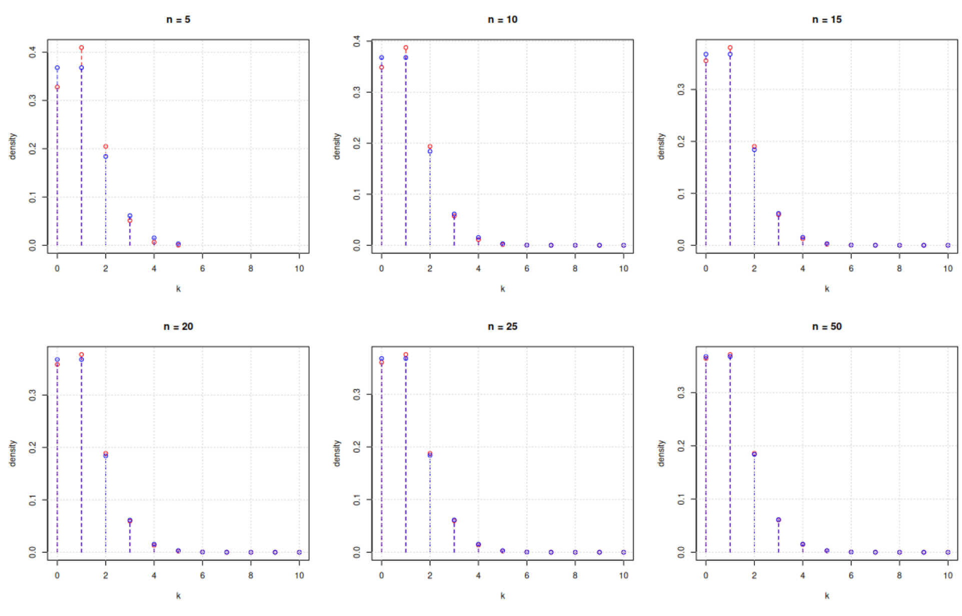


Рис. 2: Графіки біноміального розподілу (червоним) та пуассонівського з $\lambda = 1$ (синім) в залежності від кількості випробувань $n$ (тут $p_n = 1/n$).

Чи доречно вживати апроксимацію? Якщо так, то яку саме краще? Універсальної відповіді на задані питання не буде.

Доречність вживати апроксимацію залежить від того, яку точність підрахунків треба забезпечити. З візуалізацій можна на око 'прикинути', що при $n > 20$ виходять 'хорошими'.

Яку саме з апроксимацій вживати краще: треба дивитися на те що наявне в задачі. Було видно, що з $E[\xi_n] = np > 10$ 'форма' біноміального розподілу ставала 'більш симетричною' навколо математичного сподівання, що власне притаманно для нормального розподілу. Тому у такій ситуації можна було б скористатися нормальною апроксимацією. Симетрію також може 'підсилити' ситуація, коли успіх та невдача рівноймовірні, тобто $p = 1/2$. Інакше спробувати застосувати пуассонівську апроксимацію, коли імовірність успіху (або невдачі) є досить малою (скажімо $p < 0.05$ або $1 - p < 0.05$) на помірних вибірках (до 100 наприклад), а на більших з $np \leq 10$.

Можна зайнятися симуляціями (на комп'ютері), щоб випробувати різні випадки 'наочно'.

Питання: як рахувати імовірності нормального розподілу?

Принаймні два підходи. Один може допомогти, коли у вас в руках є лише ручка, папір та калькулятор, а інший – за наявності комп'ютера.

1. **Табульовані значення.** У збірнику задач [1] починаючи з ст. 359 ви знайдете табульовані значення для стандартного нормального розподілу.
2. **Програмні методи R, Python.** Якщо ви маєте доступ до комп'ютера (якщо не маєте, купіть), то можна обчислити імовірності нормального розподілу доклавши трохи зусиль у програмуванні:
   - Якщо ви дружите з Python, то вам допоможе бібліотека SciPy. Наведемо приклад обчислення $P(\zeta < 1)$, $\zeta \sim N(1, 2^2)$:

     ```
     > import scipy
     > x = 0.4
     > norm_dist = scipy.stats.norm(loc=1, scale=2)
     > # Значення ф.р. N(1, 4) у точці x = 0.4
     > print(norm_dist.cdf(0.4))
     0.3820885778110474
     ```

   - Якщо ви маєте навички в R, то обчислення значень функції розподілу реалізовано в вбудованій функції pnorm(x, mean, sd). Наведемо приклад обчислення $P(\zeta < 1)$, $\zeta \sim N(1, 2^2)$:

     ```
     > x <- 0.4
     > # Значення ф.р. N(1, 4) у точці x = 0.4
     > pnorm(x, 1, 2)
     [1] 0.3820886
     ```

# Література

[1] В.В. Голомозий, М.В. Карташов , О.Г. Кукуш, С.В. Кушніренко, Р.Є. Майборода, Ю.С. Мішура, К.В. Ральченко, Г.М. Шевченко. *Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики* (клікабельне посилання)

# 2 Задачі

## 2.1 Задача 1

Імовірність отримання з конвеєра виробу, що відповідає стандарту, дорівнює 0,95. Наближено оцініть імовірність того, що з 600 виробів рівно 580 відповідатимуть стандарту.

В умовах попередньої задачі наближено оцініть імовірність того, що серед 580 виробів з лінії зійде більше 450 виробів, що відповідають стандарту.

**Розв'язання**

В задачі відомо, що проведено $n = 600$ випробувань (отримано 600 виробів з конвеєру), з імовірністю успіху (відповідність виробу вимогам стандарту) $p = 0.95$. Через $\xi \sim \mathrm{Binom}(n, p)$ позначимо кількість виробів, що відповідають стандарту.

Тут $np = 570 > 10$, $\sqrt{np(1-p)} \approx 5.338539$, ідейно 'дзвін' має переважно влізти в носій розподілу $\xi$. Спробуємо нормальну апроксимацію.

Використовуючи локальну теорему де Муавра-Лапласа

$$P(\xi_n = 580) = P\left(\frac{\xi_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{580 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\varphi\left(\frac{580 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx 0.01292908$$

Якби рахували 'біноміальну' імовірність напряму (використали комп'ютер), то б отримали

$$P(\xi_n = 580) = C_{600}^{580} 0.95^{580} (1 - 0.95)^{600-580} \approx 0.01250116$$

Отримали непогану апроксимацію з точністю до третього знаку після коми.

Тепер обчислимо другу імовірність, скориставшись теоремою де Муавра-Лапласа в інтегральній формі:

$$P(\xi_n \geq 580) = P(580 \leq \xi_n < +\infty) \approx 1 - \Phi\left(\frac{450 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Тут $x_* := (580 - np)/\sqrt{np(1-p)} \approx 1.873172$, у цій точці $\Phi(x_*) \approx 0.9695$. Отже

$$P(\xi_n \geq 580) \approx 1 - 0.9695 = 0.0305.$$

Використавши комп'ютер, порівняємо з 'лобовою' імовірністю:

$$P(\xi_n \geq 580) = \sum_{k=580}^{600} C_{600}^{k} 0.95^{k} (1 - 0.95)^{600-k} \approx 0.03195449$$

## 2.2 Задача 2

Кур'єрська служба відправляє термінову кореспонденцію. Ймовірність того, що один лист буде пошкоджено під час пересилки, становить 0,0005. Наближено оцініть імовірність того, що серед надісланих 8000 листів буде пошкоджено рівно три листи.

В умовах попередньої задачі наближено оцініть імовірність того, що буде пошкоджено від трьох до п'яти листів.

**Розв'язання**

Нехай $\xi \sim \text{Binom}(n, p)$ – кількість пошкоджених листів з $n = 8000$, $p = 0.0005$. Видно, що $np = 4$. Згідно 'інтуїції', при $n > 100$ маємо $np < 10$, тому можемо спробувати скористатись пуассонівською апроксимацією:

$$\begin{aligned} P(\xi = 3) &\approx \frac{4^3}{3!}e^{-4} \approx 0.1953668 \\ P(3 \leq \xi \leq 5) = P(\xi = 3) + P(\xi = 4) + P(\xi = 5) &\approx \left(\frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!}\right)e^{-4} \approx 0.5470271 \end{aligned}$$

Якщо взяти порахувати імовірності біноміального розподілу 'в лоб' (завдяки комп'ютеру), можна отримати:

$$\begin{aligned} P(\xi = 3) &\approx C_8000^3(0.0005)^3(1 - 0.0005)^{8000-3} \approx 0.1953912 \\ P(3 \leq \xi \leq 5) &= P(\xi = 3) + P(\xi = 4) + P(\xi = 5) = \\ &= C_{8000}^3(0.0005)^3(1 - 0.0005)^{8000-3} + \\ &+ C_{8000}^4(0.0005)^4(1 - 0.0005)^{8000-4} + \\ &+ C_{8000}^5(0.0005)^5(1 - 0.0005)^{8000-5} \approx 0.5471395 \end{aligned}$$

Пуассонівська апроксимація вийшла непоганою: для 'події-рівності' маємо точність до четвертого знаку після коми, для 'події-нерівності': до третього знаку включно.

## 2.3 Задача 3

Стохастичний експеримент полягає у тому, що підкидається навмання точка на відрізок $[a, b]$. Нехай $X$ – координата цієї точки.

1. Побудувати імовірнісний простір.
2. Побудувати випадкову величину $X$ на цьому просторі. Довести, що $X$ є випадковою величиною. Знайти функцію розподілу $X$.
3. Обчислити $E[X]$, $Var[X]$.
4. Нехай $Y = a \cdot 1_{[a,a')} + (a+b)/2 \cdot 1_{[a',a'')} + b \cdot 1_{[a'',b]}$. Довести, що $Y$ є випадковою величиною.
5. Знайти розподіл $Y$ та обчислити $E[Y]$.

**Розв'язання**

По суті можна вдатися до геометричної імовірності. Тоді $\Omega = [a, b]$ – можливі положення точки, $\mathcal{F} := \mathcal{B}([a, b])$, $P(\cdot) = \lambda(\cdot)/\lambda(\Omega)$ породжується 'довжиною': $\lambda([x, y)) = x - y$, $[x, y) \in \mathcal{F}$.

Згідно умови задачі $X$ є положенням кинутої на відрізок точки, тому $X(\omega) := \omega$. Це відображення є вимірним, оскільки:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \ X^{-1}((-\infty, t)) = [a, b] \cap (-\infty, t) \in \mathcal{F}$$

Тобто $X$ – дійсно випадкова величина на побудованому просторі. Знайдемо її функцію розподілу:

$$F_X(t) = P(X < t) = \begin{cases} P(\emptyset) = 0, & t \le a, \\ P((a, t)) = \dfrac{t-a}{b-a}, & t \in (a, b], \\ P(\Omega) = 1, & b < t. \end{cases}$$

Обчислимо математичне сподівання:

$$E[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t dF_X(t) = \left| dF_X(t) = 1_{(a,b]}(t) \frac{1}{b-a} dt \right| = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b t dt = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Обчислимо її дисперсію (традиційним чином):

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Знайдемо розподіл $X^2$ (до речі, це випадкова величина як композиція двох вимірних відображень). Очевидно, що $F_{X^2}(t) = P(X^2 < t) = 0$ при $t \le 0$. Інакше,

$$F_{X^2}(t) = P(X^2 < t) = P(|X| < \sqrt{t}) = P(-\sqrt{t} < X < \sqrt{t}) = P([a, b] \cap (-\sqrt{t}, \sqrt{t})).$$

Далі розглянемо випадки:

1. Ситуація: $b \le 0$. Тоді $a^2 > b^2$ і
$$P([a,b] \cap (-\sqrt{t}, \sqrt{t})) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le b^2, \\ P((-\sqrt{t}, b]) = \dfrac{b+\sqrt{t}}{b-a}, & t \in (b^2, a^2], \\ 1, & a^2 < t. \end{cases}$$
Отже розподіл зосереджений на $(b^2, a^2)$. Далі, рахуємо математичне сподівання:
$$E[X^2] = \left| dF_{X^2}(t) = 1_{(b^2,a^2)}(t)\frac{1}{b-a}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt \right| = \int_{b^2}^{a^2} t\frac{1}{b-a}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{b-a}\frac{1}{3}(|a|^3 - |b|^3) = \frac{1}{b-a}\frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

2. Ситуація: $0 \le a$. Тоді $a^2 < b^2$ і
$$P([a,b] \cap (-\sqrt{t}, \sqrt{t})) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le a^2, \\ P([a, t^2)) = \dfrac{\sqrt{t}-a}{b-a}, & t \in (a^2, b^2], \\ 1, & b^2 < t. \end{cases}$$
Схожими кроками вийдемо на те, що $E[X^2] = \frac{1}{b-a}\frac{1}{3}(b^3 - a^3)$.

3. Ситуація: $a < 0 < b$. Тоді
$$P([a,b] \cap (-\sqrt{t}, \sqrt{t})) =$$
$$= \begin{cases} P((-\sqrt{t}, \sqrt{t})) = \dfrac{2\sqrt{t}}{b-a}, & 0 \le t \le \min(a^2, b^2), \\ P((\max(a, -\sqrt{t}), \min(b, \sqrt{t}))) = \dfrac{\min(b,\sqrt{t}) - \max(a, -\sqrt{t})}{b-a}, & t \in (\min(a^2,b^2), \max(a^2,b^2)], \\ 1, & \max(a^2,b^2) < t. \end{cases}$$
Друга частина виразу (при $t \in (\min(...), \max(...)]$) насправді вже нам знайома з попередніх двох випадків. Обчислимо математчне сподівання:
$$\begin{aligned} E[X^2] &= \left| dF_{X^2}(t) = \left( 1_{(0,\min(a^2,b^2))}(t)\frac{1}{b-a}\frac{1}{\sqrt{t}} + 1_{(\min(a^2,b^2),\max(a^2,b^2))}(t)\frac{1}{b-a}\frac{1}{2\sqrt{t}} \right) dt \right| = \\ &= \frac{2}{b-a}\frac{1}{3}(\min(a^2,b^2))^{3/2} + \frac{1}{b-a}\frac{1}{3}\left( (\max(a^2,b^2))^{3/2} - (\min(a^2,b^2))^{3/2} \right) = \\ &= \frac{1}{b-a}\frac{1}{3}(\max(|a|^3, b^3) + \min(|a|^3, b^3)) = \frac{1}{b-a}\frac{1}{3}(|a|^3 + b^3) = \frac{1}{b-a}\frac{1}{3}(b^3 - a^3) \end{aligned}$$

Тобто $E[X^2] = \frac{1}{b-a}\frac{1}{3}(b^3 - a^3)$. Ура. Чи можна простіше піти? Можна, якщо згадати LOTUS і скористатися розподілом для $X$:
$$E[X^2] = \int_a^b t^2 dF_X(t) = \int_a^b t^2 \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a}\frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$
Сила: якщо працює LOTUS, не то не ламати голову над виведенням складних розподілів (звісно, бувають винятки).

Отже, дисперсія $X$ дорівнює

$$\begin{aligned}
Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 &= \frac{1}{b-a}\frac{1}{3}(b^3 - a^3) - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \\
&= \frac{1}{b-a}\frac{4b^3 - 4a^3 - (3a^2 + 6ab + 3b^2)(b-a)}{12} = \\
&= \frac{b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3}{(b-a)\cdot 12} = \frac{(b-a)^3}{(b-a)\cdot 12} = \frac{(b-a)^2}{12}.
\end{aligned}$$

Тепер розглянемо відображення

$$Y(\omega) = a \cdot 1_{[a,a')}(\omega) + (a+b)/2 \cdot 1_{[a',a'')}(\omega) + b \cdot 1_{[a'',b]}(\omega),$$

для деяких $a', a'' \in (a,b)$, $a' < a''$. Неважко переконатися, що $Y$ є випадковою величиною (як вимірна проста функція, але розпишемо):

$$Y^{-1}((-\infty,t)) = \begin{cases} \emptyset,\ t \le a, & \\ [a,a'), & t \in (a,(a+b)/2], \\ [a,a''), & t \in ((a+b)/2, b], \\ [a,b] = \Omega, & t > b \end{cases} \Rightarrow Y^{-1}((-\infty,t)) \in \mathcal{F},\ t \in \mathbb{R}.$$

Це дискретна випадкова величина з розподілом

$$P(Y = k) = \begin{cases} \dfrac{a'-a}{b-a}, & k = a, \\ \dfrac{a''-a'}{b-a}, & k = (a+b)/2, \\ \dfrac{b-a''}{b-a}, & k = b. \end{cases}$$

Можна записати функцію розподілу:

$$P(Y < t) = \begin{cases} 0, & t \le a, \\ \dfrac{a'-a}{b-a}, & a < t \le (a+b)/2, \\ \dfrac{a''-a}{b-a}, & (a+b)/2 < t \le b, \\ 1, & b < t. \end{cases}$$

Математичне сподівання можна теж по-різному рахувати: або в лоб згідно розподілу $Y$, або скориставшись лінійністю математичного сподівання:

1. Спосіб перший:

$$E[Y] = a\cdot P(Y=a) + \frac{a+b}{2}\cdot P(Y=(a+b)/2) + b\cdot P(Y=b) = a\cdot\frac{a'-a}{b-a} + \frac{a+b}{2}\cdot\frac{a''-a'}{b-a} + b\cdot\frac{b-a''}{b-a}.$$

2. Спосіб другий:

$$\begin{aligned}
E[Y] &= a \cdot E[1_{[a,a')}] + \frac{a+b}{2}\cdot E[1_{[a',a'')}] + b \cdot E[1_{[a'',b]}] = \Big| E[1_A] = P(A) \Big| = \\
&= a\cdot\frac{a'-a}{b-a} + \frac{a+b}{2}\cdot\frac{a''-a'}{b-a} + b\cdot\frac{b-a''}{b-a}.
\end{aligned}$$

## 2.4 Задача 4

Розглянемо імовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Нехай на цьому просторі $\xi^2$ є випадковою величиною. Чи обов'язково є випадковими величинами: $|\xi|$? $\xi$?

### Розв'язання

Відомо, що $\xi^2$ є випадковою величиною, тобто для всіх $x \in \mathbb{R}$:

$$\{\omega \in \Omega \mid (\xi(\omega))^2 < x\} \in \mathcal{F}$$

Доведемо, що тоді $|\xi|$ – також випадкова величина. Зауважимо, що $\xi^2 = |\xi|^2$, а тому

$$\{\omega \in \Omega \mid |\xi(\omega)| < x\} = \{\omega \in \Omega \mid |\xi(\omega)|^2 < x^2\} \in \mathcal{F}.$$

От з $\xi$, справді кажучи, так не вийде. Розглянемо два приклади:

- Нехай $(\Omega, \mathcal{F}) = (\{-1, 1\}, \{\Omega, \emptyset\})$ та $\xi(\omega) = \omega$. Тоді $\xi^2 = 1$ є випадковою величиною (переконайтеся, що прообраз $(\xi^2)^{-1}((-\infty, x))$ буде $\Omega$ або $\emptyset$). Але $\xi^{-1}(\{1\}) = \{1\} \notin \mathcal{F}$, отже $\xi$ не є випадковою величиною на заданому просторі.

  (Інтуїція (беззмістовна): провели стохастичний експеримент, який полягає в підкиданні монети. Відомо, що монета впала однією зі сторін, але не ясно якою саме. Тому величину, яка б індикувала яка саме сторона випала не можна, бо не володіємо цією інформацією)

- Побудуємо таку випадкову величину: $\xi(\omega) = 1_E(\omega) - 1/2$, де $E \notin \mathcal{F}$. Тоді $\xi^2 = 1/4$ є випадковою величиною, а $\xi$ – ні, бо $\xi^{-1}(\{1/4\}) = E \notin \mathcal{F}$.