Дискретні випадкові величини. Математичне сподівання

1 Теоретичні відомості

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – імовірнісний простір.

Випадковою величиною називають функцію $X : \Omega \to \mathbb{R}$, що є $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-вимірною, тобто для всіх $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}.$$

Через $X(\Omega)$ позначимо множину значень випадкової величини X. Якщо $X(\Omega)$ є не більш ніж зліченною множиною, то випадкова величина X називається дискретною.

Якщо простір Ω – дискретний, тоді довільна функція $X : \Omega \to \mathbb{R}$ задає випадкову величину.

Розподілом випадкової величини X називається набір імовірностей

$$P(X = k) = p_k,\ k \in X(\Omega),\ \sum_{k \in X(\Omega)} p_k = 1.$$

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X є зважене середнє всіх її значень за розподілом:

$$E[X] = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k).$$

Якщо ряд $\sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$ збігається абсолютно, тоді випадкову величину X називають інтегровною.

Деякі базові властивості математичного сподівання для дискретних випадкових величин:

1. Якщо $P(X = c) = 1$, тоді $E[X] = c$, $c \in \mathbb{R}$,
2. $E[cX] = cE[X]$ для $c \in \mathbb{R}$,
3. Якщо X та Y одночасно інтегровні або спільного знаку, то $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$,
4. Якщо X та Y, є незалежними, то $E[XY] = E[X]E[Y]$ (за припущення що величини є одночасно інтегровними або спільного знаку).

(Співставте перші властивості з властивостями збіжних числових рядів).

Law of the unconscious statistician. Нехай $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ – деяка функція на множині значень X. Якщо збігається абсолютно ряд $\sum_{k \in X(\Omega)} g(k)P(X = k)$, тоді $g(X)$ – інтегровна випадкова величина та

$$E[g(X)] = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k)P(X = k).$$

Дисперсією інтегровної величини X називають математичне сподівання квадрату відхилення величини від її математичного сподівання: $Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$. Це одна з мір розкиду значень випадкової величини.

2 Задачі

2.1 Задача 1

Підкидаємо пронумеровані куб і тетраедр. Далі записуємо отриману кількість очок на кожному, $X = \overline{1,6}$ та $Y = \overline{1,4}$ відповідно.

1. Описати простір елементарних подій,
2. Знайти розподіл X, Y, сумісний розподіл X та Y,
3. Обчислити $E[X]$, $E[Y]$,
4. Знайти розподіл суми $X + Y$,
5. Обчислити $E[X + Y]$, $Var[X + Y]$.

Розв'язання

Результатом експерименту є пара очок на кожній з фігур, тобто

$$\Omega = \{(x, y) \mid x = \overline{1,6},\ y = \overline{1,4}\},\ |\Omega| = 6 \cdot 4 = 24.$$

Побудуємо випадкові величини X, Y на Ω згідно умови задачі:

$$X(\omega) = x,\ Y(\omega) = y,\ \omega = (x, y) \in \Omega.$$

Знайдемо розподіл X: для $k = \overline{1,6}$

$$P(X = k) = P(\{(x, y) \in \Omega \mid x = k, y = \overline{1,4}\}) = \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{1}{6}$$

Аналогічно можна отримати розподіл для Y: $P(Y = l) = 1/4$, $l = \overline{1,4}$. Легко знаходимо сумісний розподіл X та Y:

$$P(X = k, Y = l) = P(\{(x, y) \in \Omega \mid x = k, y = l\}) = \frac{1}{24}.$$

Побачимо, що $P(X = k, Y = l) = P(X = k)P(Y = l)$ для всіх $(k, l) \in \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 4\}$, тобто випадкові величини X та Y є незалежними.

Знайдемо математичне сподівання випадкових величин X та Y:

$$E[X] = \sum_{k=1}^{6} k \cdot P(X = k) = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 7/2,$$

$$E[Y] = \sum_{l=1}^{4} l \cdot P(Y = l) = \frac{1}{4} \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 5/2.$$

Знайдемо розподіл суми $X + Y$. Корисно побудувати таблицю можливих значень суми при заданих значеннях доданків:

	X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Y							
1		2	3	4	5	6	7
2		3	4	5	6	7	8
3		4	5	6	7	8	9
4		5	6	7	8	9	10

Табл. 1: Можливі значення суми $X + Y$.

Ясно, що розподіл $X+Y$ можна виразити через сумісний розподіл X та Y: для $n \in \{2, 3, \ldots, 9, 10\}$

$$P(X+Y=n) = \sum_{k,l:k+l=n} P(X=k, Y=l) = \sum_{k=1}^{6} P(X=k)P(Y=n-k) = \begin{cases} 1/24, & n \in \{2, 10\}, \\ 2/24, & n \in \{3, 9\}, \\ 3/24, & n \in \{4, 8\}, \\ 4/24, & n \in \{5, 6, 7\}. \end{cases}$$

Неважко переконатися, що вище отримали розподіл суми. Для обчислення математичного сподівання, звісно, можна скористатися означенням, однак слушно використати лінійність математичного сподівання:

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] = 7/2 + 5/2 = 6.$$

Для підрахунку дисперсії скористаємося тим, що X та Y є незалежними:

$$Var[X+Y] = E[(X-E[X]+Y-E[Y])^2] = Var[X] - 2E[(X-E[X])(Y-E[Y])] + Var[Y] = Var[X] + Var[Y],$$

бо $E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[X-E[X]]E[Y-E[Y]] = 0 \cdot 0 = 0$, де перший перехід має місце внаслідок незалежності випадкових величин.

Далі підрахуємо математичне сподівання квадратів X^2, Y^2:

$$E[X^2] = \frac{1}{6} \cdot (1+4+9+16+25+36) = 91/6,$$
$$E[Y^2] = \frac{1}{4} \cdot (1+4+9+16) = 15/2.$$

Отже $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] = (91/6 - (7/2)^2) + (15/2 - (5/2)^2) = 25/6$.

2.2 Задача 2

Підкидаємо симетричну монету поки не випаде 'Десяткою'. Нехай X є номером підкидання, коли вперше випала 'Десятка'.

1. Побудувати $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,
2. Записати розподіл X на побудованому просторі,
3. Обчислити $P(X \geq n)$, $P(X > n+k \mid X > k)$ для $n, k \geq 1$.

Розв'язання

В експерименті ми підкидаємо монету, поки не випаде потрібна сторона. Отже, простір Ω можна описати кількістю проведених випробувань в експерименті (випробування тобто мається на увазі підкидання): $\Omega = \{1, 2, \dots, k-1, k, k+1, \dots\}$. Введемо на Ω ($\mathcal{F} = 2^{\Omega}$) міру: $P(\{\omega\}) = 2^{-\omega}$, $\omega \in \Omega$ (див. матеріали заняття №3). Тоді $X(\omega) = \omega$ та $P(X = k) = P(\{k\})$, $k \in \Omega$.

Обчислимо $P(X \geq n)$, $P(X > n+k \mid X > k)$ для $n, k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
P(X \geq n) &= \sum_{k=n}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = \frac{2^{-n}}{1 - 2^{-1}} = 2^{-n+1}, \\
P(X > n+k \mid X > k) &= \frac{P(X > n+k, X > k)}{P(X > k)} = \Big| \{X > n+k\} \subset \{X > k\} \Big| = \\
&= \frac{P(X > n+k)}{P(X > k)} = \frac{P(X \geq n+k+1)}{P(X \geq k+1)} = \\
&= 2^{-n-k} 2^{k} = 2^{-n} = 2^{-(n+1)-1} = P(X \geq n+1) = P(X > n).
\end{aligned}$$

Коментар. Геометричний розподіл – це єдиний дискретний розподіл, який має властивість 'відсутності пам'яті' (англ. memorylessness) в сенсі $P(X > n+k \mid X > k) = P(X > n)$. Можна показати, що остання умова є достатньою для того, щоб дискретна випадкова величина на $\mathbb{N}$ мала геометричний розподіл.

2.3 Задача 3

Нехай X_1, X_2 – незалежні випадкові величини, $X_i \sim \text{Pois}(\lambda_i)$.

1. Обчислити $E[X_i]$, $Var[X_i]$,
2. Знайти розподіл суми $S = X_1 + X_2$,
3. Знайти умовний розподіл X_1 відносно значень суми S.

Розв'язання

Спочатку обчислимо математичне сподівання та дисперсію пуассонівського розподілу:

$$E[X_i] = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X_i = k) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X_i = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda_i^k}{k!}e^{-\lambda_i} = \lambda_i e^{-\lambda_i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda_i e^{-\lambda_i} e^{\lambda_i} = \lambda_i,$$

де скористалися розкладом $e^x = \sum_{k\geq 0} x^k/k!$, $x \in \mathbb{R}$. Далі, аналогічно до попередніх підрахунків, маємо

$$E[X_i^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X_i = k) = \ldots = \lambda_i \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda_i^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda_i} = |l = k-1| = \lambda_i \sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\frac{\lambda_i^l}{l!}e^{-\lambda_i} = \ldots$$

Тепер побачимо, що

$$E[X_i] + P(X_i \in \mathbb{Z}_+) = \sum_{l=0}^{\infty} l \cdot \frac{\lambda_i^l}{l!}e^{-\lambda_i} + \sum_{l=0}^{\infty} 1 \cdot \frac{\lambda_i^l}{l!}e^{-\lambda_i} = \sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\frac{\lambda_i^l}{l!}e^{-\lambda_i}.$$

Отже,

$$\ldots = \lambda_i \cdot (E[X_i] + P(X_i \in \mathbb{Z}_+)) = \lambda_i^2 + \lambda_i.$$

В результаті отримаємо, що $\text{Var}[X_i] = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = \lambda_i$.

Нехай $n \in \mathbb{Z}_+$. Тепер знайдемо розподіл суми через сумісний розподіл X_1 та X_2:

$$P(S = n) = P(X_1 + X_2 = n) = \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k, X_2 = n-k) = \left|\text{Незалежність в.в.}\right| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\lambda_1^k e^{-\lambda_1} \frac{1}{(n-k)!}\lambda_2^{n-k}e^{-\lambda_2} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}\lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = \left|\text{Біном Ньютона}\right| =$$

$$= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

Тобто $S \sim \text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Тепер дамо відповідь на питання третього пункту. Для цього ще візьмемо $k = \overline{0, n}$:

$$P(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n) = \frac{P(X_1 = k, X_1 + X_2 = n)}{P(X_1 + X_2 = n)} = \frac{P(X_1 = k, X_2 = n - k)}{P(X_1 + X_2 = n)} =$$

$$= \frac{P(X_1 = k)P(X_2 = n - k)}{P(X_1 + X_2 = n)} = \frac{\frac{1}{n!}\lambda_1^k e^{-\lambda_1} \frac{1}{(n-k)!}\lambda_2^{n-k} e^{-\lambda_2}}{\frac{1}{n!}(\lambda_1 + \lambda_2)^n e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}} =$$

$$= C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ p = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Тобто $X_1 \mid \{X_1 + X_2 = n\} \sim \text{Binom}(n, p)$.

2.4 Задача 4

Нехай $\{X_j\}_{j=1}^n$ – незалежні в сукупності випадкові величини, $X_j \sim \text{Geom}(p_j)$, $j = \overline{1, n}$. Знайти розподіл випадкової величини $X = \min\limits_{1 \le j \le n} X_j$.

Розв'язання

За умовою задачі відомо, що $P(X_j = k) = q_j^{k-1} p_j$, $k \in \mathbb{N}$, де $q_j = 1 - p_j$. Для $k \in \mathbb{N}$, виразимо імовірність $P(X = k)$ через 'хвостові' імовірності $P(X \ge k+1)$ та $P(X \ge k)$ (бо $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \ge k\} \setminus \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \ge k+1\}$):

$$P(X = k) = P(X \ge k) - P(X \ge k+1) = \dots$$

Очевидно, що $P(X \ge k) = P(\cap_{j=1}^n \{X_j \ge k\}) = \prod_{j=1}^n P(X_j \ge k)$, де другий перехід отримано завдяки сукупної незалежності величин. Знайдемо 'хвіст' розподілу X_j:

$$P(X_j \ge k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(X_j = k) = \sum_{n=k}^{\infty} q_j^{n-1} p_j = p_j \cdot \frac{q_j^{k-1}}{1 - q_j} = q_j^{k-1}.$$

Врахувавши отримані результати, завершимо розв'язок задачі:

$$\dots = \prod_{j=1}^n q_j^{k-1} - \prod_{j=1}^n q_j^k = \left(\prod_{j=1}^n q_j\right)^{k-1} \left(1 - \prod_{j=1}^n q_j\right).$$

Звідси маємо, що $X \sim \text{Geom}(\Pi)$, де $\Pi = 1 - \prod_{j=1}^n q_j$.

Коментар. Насправді можна було б зупинитися на отриманні функції розподілу $P(X < k)$ або 'хвостової' імовірності $P(X \ge k)$ (подумати чому, суть у функції розподілу).

2.5 Задача 5

Розглянемо на імовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, для заданої випадкової події $A \in \mathcal{F}$ випадкову величину:

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Це індикатор випадкової події A. Знайти розподіл, математичне сподівання та дисперсію $\mathbf{1}_A$.

Розв'язання

Задача очевидна.

Знаходимо розподіл $\mathbf{1}_A$:

$$P(\mathbf{1}_A = 1) = P(A),\ P(\mathbf{1}_A = 0) = P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Знаходимо математичне сподівання $\mathbf{1}_A$:

$$E[\mathbf{1}_A] = 1 \cdot P(\mathbf{1}_A = 1) + 0 \cdot P(\mathbf{1}_A = 0) = P(\mathbf{1}_A = 1) = P(A).$$

Знаходимо дисперсію $\mathbf{1}_A$: оскільки $\mathbf{1}_A^2 = \mathbf{1}_A$ (переконатися), то

$$Var[\mathbf{1}_A] = E[\mathbf{1}_A^2] - (E[\mathbf{1}_A])^2 = P(A) - (P(A))^2 = P(A)(1 - P(A)).$$