Абсолютно неперервні випадкові величини: перетворення.

По суті це заняття є продовженням теми абсолютно неперервних випадкових величин (попереднє заняття). Ненавмисно зробили скачок у тему випадкових векторів для знаходження розподілу добутку двох випадкових величин.

1 Теоретичні відомості

По суті див. матеріали попереднього семінарського. Тут буде доповнення того, що не вказано:

Випадкові величини ξ та η називають незалежними, якщо для довільних $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$P(\xi \in A, \eta \in B) = P(\xi \in A)P(\eta \in B) \tag{1}$$

Для незалежності двох випадкових величин досить вимагати виконання (1) на півінтервалах вигляду $A = (-\infty, x)$, $B = (-\infty, y)$, для всіх $x, y \in \mathbb{R}$, тобто

$$P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x)P(\eta < y).$$

Набір випадкових величин $\{\xi_j\}_{j=1}^n$ називають:

1. Попарно незалежними, якщо довільна пара величин ξ_i, ξ_j є незалежною, $i \neq j$,
2. Незалежними в сукупності, якщо для довільної підмножини $J \subset \{1, \ldots, n\}$:

$$P(\cap_{j \in J}\{\xi_j \in B_j\}) = \prod_{j \in J} P(\xi_j \in B_j),\ \{B_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Також раптовий референс в теорію випадкових векторів. Сумісною функцією розподілу випадкових величин $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ називають функцію

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n),\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Щільністю сумісного розподілу величин $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ називають похідну Радона-Никодима $f(\vec{x})$ міри, породженої сумісною функцією розподілу $F(x_1, \ldots, x_n)$ відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$:

$$F(A) = \int\limits_A f(\vec{x})\lambda_n(d\vec{x}),\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Оперуючи сумісним розподілом $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ можна знайти розподіл перетворень, що вживають задані випадкові величини.

2 Задачі

2.1 Задача 1

Нехай $\{\xi_j\}_{j=1}^n$ – незалежні в сукупності, однаково розподілені абсолютно неперервні випадкові величини з функцією розподілу $F(t)$ (та щільністю $f(t)$). Знайти розподіли випадкових величин:

1. $\xi_{(n)} = \max\limits_{1\leq j\leq n} \xi_j$ та $\xi_{(1)} = \min\limits_{1\leq j\leq n} \xi_j$,
2. $\xi_{(k)}$ – k-ий елемент впорядкованого набору величин $\{\xi_j\}$ в порядку зростання:

$$\xi_{(1)} < \xi_{(2)} < \ldots < \xi_{(n-1)} < \xi_{(n)} \quad \text{м.н.}$$

Розв'язання

Спочатку знайдемо розподіл $\xi_{(n)}$:

$$P(\xi_{(n)} < t) = P(\max_{1\leq j\leq n} \xi_j < t) = P(\cap_{j=1}^n \{\xi_j < t\}) = |\text{Незалежність в.в. в сукупності}| = \prod_{j=1}^n P(\xi_j < t) =$$

$$= |\text{Однакова розподіленість в.в.}| = \prod_{j=1}^n F(t) = (F(t))^n.$$

Неважко переконатися, що щільністю $\xi_{(n)}$ є $f_{\xi_{(n)}}(t) = n(F(t))^{n-1} f(t)$. Аналогічними міркуваннями можна отримати розподіл $\xi_{(1)}$:

$$P(\xi_{(1)} < t) = 1 - P(\xi_{(1)} \geq t) = 1 - \prod_{j=1}^n P(\xi_j \geq t) = 1 - (1 - F(t))^n \Rightarrow f_{\xi_{(1)}}(t) = n(1 - F(t))^{n-1} f(t).$$

Для отримання розподілу $\xi_{(k)}$ зауважимо таке: якщо $\{\xi_{(k)} < t\}$, тоді точно відомо, що якісь з k величин у наборі менші за t, втім треба ще врахувати що меншими за це значення може бути і певний залишок з цих величин. Тоді випадкову подію $\{\xi_{(k)} < t\}$ можна переподати у вигляді:

$$\{\xi_{(k)} < t\} = \bigcup_{l=k}^n \bigcup_{I\subset\{1,\ldots,n\},|I|=l} \left(\bigcap_{j\in I} \{\xi_j < t\} \right) \cap \left(\bigcap_{j\notin I} \{\xi_j \geq t\} \right)$$

Ясно, що з властивостей імовірності можна отримати

$$P(\xi_{(k)} < t) = \sum_{l=k}^n \sum_{I\subset\{1,\ldots,n\},|I|=l} P((\cap_{j\in I}\{\xi_j < t\}) \cap (\cap_{j\notin I}\{\xi_j \geq t\})) = \left| \text{В.в. є незалежними в сукупності} \right| =$$

$$= \sum_{l=k}^n \sum_{I\subset\{1,\ldots,n\},|I|=l} \prod_{j\in I} F(t) \prod_{j\notin I} (1 - F(t)) = \sum_{l=k}^n C_n^l (F(t))^l (1 - F(t))^{n-l}$$

Зокрема при $k = 1$ та $k = n$ отримаємо розподіли для мінімума та максимума відповідно.

2.2 Задача 2

Розглянемо дві незалежні випадкові величини U та V з рівномірним розподілом на $(0, 1]$. Перетворення Бокса-Мюллера має вигляд

$$T = \sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V),\ S = \sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V).$$

1. Знайти розподіли перетворень $\sqrt{-2\ln(U)}$, $\sin(2\pi V)$, $\cos(2\pi V)$.
2. Знайти математичні сподівання та дисперсії величин з попереднього пункту.

Коментар: таке перетворення дає отримати випадкові величини зі стандартним нормальним розподілом, тобто $T \sim N(0, 1)$ та $S \sim N(0, 1)$. Зокрема ці в.в. будуть незалежними. Доведення цього результату залишимо на тему випадкових векторів (на парі ми пробували викрутитися лише через одне з перетворень, що в результаті нас покусало).

Розв'язання

Знайдемо спочатку розподіл $X = \sqrt{-2\ln(U)}$: для $t \in (0, +\infty)$

$$P(\sqrt{-2\ln(U)} < t) = P(-2\ln(U) < t^2) = P(\ln(U) > -t^2/2) = P(U > \exp(-t^2/2)) = 1-\exp(-t^2/2).$$

Звідси $f_X(u) = 1_{(0,\infty)}(u)u\exp(-u^2/2)$. Неважко переконатися, що

$$E[X^k] = \int\limits_0^{+\infty} u^{k+1}e^{-u^2/2}du = |z = u^2/2 \Rightarrow u = \sqrt{2z}| = \int\limits_0^{+\infty} (2z)^{(k+1)/2-1/2}e^{-z}dz = 2^{k/2}\Gamma(k/2+1), k > -2$$

Зокрема $E[X] = \sqrt{2}\Gamma(1/2 + 1) = \sqrt{\pi/2}$, $E[X^2] = 2\Gamma(2/2 + 1) = 2$, звідки $Var[X] = 2 - (\pi/2)$.

Тепер знайдемо розподіл $Y = \sin(2\pi V)$. Неважко побачити, що $V_0 = 2\pi V \sim U[0, 2\pi]$ (див. попереднє заняття). Далі, через $\arcsin(x)$ введемо обернену до $\sin(x)$ функцію на $[-\pi/2, \pi/2]$ та перезапишемо випадкову подію $\{Y < t\}$ в термінах V там де треба:

$$\{Y < t\} = \{\sin(2\pi V) < t\} = \begin{cases} \emptyset, & t \le -1, \\ Y^{-1}((-\infty, t)), & t \in (-1, 1], \\ \Omega, & t > 1, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Y^{-1}((-\infty, t)) &= \begin{cases} (\{2\pi V \in (0, \arcsin(t))\} \cup \{2\pi V \in (\pi - \arcsin(t), \pi]\}) \cup \{2\pi V \in (\pi, 2\pi]\}, & t > 0, \\ \{2\pi V \in (\pi - \arcsin(t), \arcsin(t) + 2\pi]\}, & t \le 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \{V \in (0, \arcsin(t)/(2\pi))\} \cup \{V \in (1/2 - \arcsin(t)/(2\pi), 1]\}, & t > 0, \\ \{V \in (1/2 - \arcsin(t)/(2\pi), \arcsin(t)/(2\pi) + 1]\}, & t \le 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Тепер можна знайти функцію розподілу Y:

$$P(Y<t)=\begin{cases}0, & t\le -1,\\ P(V\in(0,\arcsin(t)/(2\pi))\cup(1/2-\arcsin(t)/(2\pi),1]), & -1<t\le 0,\\ P(V\in(1/2-\arcsin(t)/(2\pi),\arcsin(t)/(2\pi)+1]), & 0<t\le 1,\\ 1, & t>1\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}0, & t\le -1,\\ 1/2+\arcsin(t)/\pi, & -1<t\le t,\\ 1, & t>1.\end{cases}$$

Таким чином отримали розподіл арксинуса. Для обчислення математичного сподівання та дисперсії Y скористаємося представленням $Y=\sin(V_0)$ і LOTUS:

$$E[Y]=E[\sin(V_0)]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin(t)dt=0,$$

$$E[Y^2]=E[(\sin(V_0))^2]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\sin(t))^2dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}dt=\frac{1}{2}.$$

Можете, звісно, переконатися, що підрахунки вірні, взявши 'в лоб' математичні сподівання величин Y та Y^2. Отже, з викладок вище маємо що $Var[Y]=E[Y^2]-(E[Y])^2=1/2$.

Викладки для $Z=\cos(2\pi V)$ цілком схожі до зробленого для Y, тому 'помацайте' випадкову величину самостійно.

2.3 Задача 3

Розглянемо випадкову величину ξ, яка має розподіл арксинуса:

$$f_\xi(t) = 1_{(-1,1)}(t)\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Знайти:

1. Розподіли $\nu = \arcsin(\xi)$, $\eta = 1+\xi^2$,
2. Математичні сподівання та дисперсію величин з попереднього пункту.

Розв'язання

З попередньої задачі неважко побачити (подивіться!), що $\arcsin(\xi) \sim U(-\pi/2, \pi/2)$. Звідси отримаємо, що $E[\nu] = 0$ та $Var[\nu] = \pi^2/12$.

Для $\eta = 1+\xi^2$ знайдемо представлення випадкової події $\{\eta < t\}$ в термінах ξ. Ясно, що $\eta \in (1,2)$ майже напевно. Тому $\{\eta < t\} = \emptyset$ при $t \le 1$ та Ω при $t > 2$. Якщо $t \in (1,2]$:

$$\{\eta < t\} = \{\xi^2 < t-1\} = \{-\sqrt{t-1} < \xi < \sqrt{t-1}\}.$$

Отже при $t \in (1,2]$ маємо (поклавши $F_\xi(t) := P(\xi < t)$)

$$\begin{aligned} P(\eta < t) &= P(\xi < \sqrt{t-1}) - P(\xi \le -\sqrt{t-1}) = F_\xi(\sqrt{t-1}) - F_\xi(-\sqrt{t-1}) = \\ &= |\xi \text{ є симетричною}| = 2F_\xi(\sqrt{t-1}) - 1. \end{aligned}$$

При $t \le 1$ маємо $P(\eta < t) = 0$ і при $t > 2$ відповідно $P(\eta < t) = 1$. Знайдемо похідну η:

$$\begin{aligned} f_\eta(t) &= \frac{d}{dt}F_\eta(t) = \frac{d}{dt}(P(\eta < t)) = 1_{(1,2)}(t)(2F_\xi(\sqrt{t-1}) - 1)'_t = 1_{(1,2)}(t)\cdot\frac{f_\xi(\sqrt{t-1})}{\sqrt{t-1}} = \\ &= 1_{(1,2)}(t)\cdot 1_{(-1,1)}(\sqrt{t-1})\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{t-1})^2}\cdot\sqrt{t-1}} = |1_A(t)\cdot 1_B(t) = 1_{A\cap B}(t)| = \\ &= 1_{(1,2)}(t)\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{(t-1)(t-2)}}. \end{aligned}$$

Переконайтеся, що $f_\eta(t)$ є справді щільністю за означенням.

Для обчислення $E[\eta]$, $E[\eta^2]$ скористаємося представленнями $\eta = 1+\xi^2$, $\xi = \sin(u)$ для $u \sim U[-\pi/2, \pi/2]$, та LOTUS:

$$E[\eta] = 1 + E[\xi^2] = 1 + E[(\sin(u))^2] = 1 + 1/2 = 3/2,$$

$$E[\eta^2] = 1 + 2E[\xi^2] + E[\xi^4] = 1 + 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\sin(u))^4 du = \ldots = 2 + 3/8 = 19/8.$$

згідно схожих міркувань до тих, що були наведені у попередній задачі. В результаті

$$Var[\eta] = E[\eta^2] - (E[\eta])^2 = 19/8 - 9/4 = (19-18)/8 = 1/8.$$

Насправді $Var[\eta] = Var[\xi^2]$ (інваріантність дисперсії відносно зсувів), що дозволяє уникнути зайвої арифметики.