Характеристичні функції.

1 Теоретичні відомості

Характеристичною функцією випадкової величини $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ називається функція:

$$\varphi_\xi(t) = E[e^{it\xi}] = E[\cos(t\xi)] + iE[\sin(t\xi)],\ t \in \mathbb{R}.$$

З означення неважко переконатися, що характеристична функція завжди існує.

Якщо $F_\xi(t) = P(\xi < t)$ є функцією розподілу ξ, тоді

$$\varphi_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_\xi(x)$$

Тобто х.ф. є перетворенням Фур'є функції розподілу F_ξ.

Зокрема, якщо ξ абсолютно неперервна з щільністю f_ξ, то по суті маємо перетворення Фур'є щільності розподілу ξ

$$\varphi_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx$$

Властивості характеристичної функції:

1. $\varphi_\xi(0) = 1$,
2. $\varphi_\xi(t)$ рівномірно неперервна на $\mathbb{R}$,
3. $\varphi_\xi(t)$ є невід'ємно визначеною: для довільних $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$, $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k_1,k_2=1}^{n} \varphi_\xi(t_{k_1} - t_{k_2}) z_{k_1} \overline{z}_{k_2} \geq 0.$$

   Тобто матриця $(\varphi_\xi(t_{k_1} - t_{k_2}))_{k_1,k_2=1}^n$ є невід'ємно визначеною,
4. $\varphi_{a+b\xi}(t) = e^{ita}\varphi_\xi(t/b)$ для сталих $a, b \in \mathbb{R}$.

Властивості вище неважко довести – зробіть це.

Теорема Бохнера-Хінчина. Будь-яка функція $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, яка задовольняє перші три властивості, є характеристичною функцією деякого розподілу випадкової величини. (досить вимагати неперервності в 0 замість рівномірної неперервності)

З характеристичної функції можна отримати початковий розподіл випадкової величини ξ.

Теорема (формула обертання) Нехай ξ має функцію розподілу та характеристичну функцію F_ξ та ξ відповідно. Тоді для всіх $a < b$, що є точками неперервності F_ξ,

$$F(b) - F(a) = \lim_{c \to \infty} \frac{i}{2\pi} \int\limits_{-c}^{c} \frac{e^{-itb} - e^{ita}}{t} \varphi_\xi(t) dt$$

З обертання характеристичної функції можна отримати наступні результати:

1. Характеристична функція φ_ξ однозначно визначає розподіл ξ,
2. Якщо $|\varphi_\xi|$ інтегровна на $\mathbb{R}$, то ξ має щільність:

   $$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itu} \varphi_\xi(u) du \text{ м.с.}$$

   Тобто f_ξ є оберненим перетворенням Фур'є φ_ξ.

З формули Тейлора можна отримати альтернативний спосіб підрахунку моментів випадкової величини.

Теорема (зв'язок х.ф. та моментів в.в.) Нехай ξ є інтегровною k-го порядку, тобто $E[|\xi|^k] < \infty$, для деякого $k \in \mathbb{N}$. Тоді, якщо φ_ξ є х.ф. ξ, то $\varphi_\xi \in C^k(\mathbb{R})$ та для всіх $1 \leq l \leq k$

$$E[\xi^l] = (-i)^l \varphi_\xi^{(l)}(0)$$

Поняття характеристичної функції можна узагальнити для випадкового вектора $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T$:

$$\varphi_{\vec{\xi}}(\vec{\lambda}) = E[e^{i\vec{\lambda}^T\vec{\xi}}] = E[e^{i\sum_{j=1}\lambda_j\xi_j}],\ \vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Х.ф. випадкового вектора маю схожі властивості як х.ф. випадкової величини.

2 Задачі

2.1 Задача 1 (Приклад обчислення х.ф. дискретної в.в.)

Нехай дискретна випадкова величина ξ приймає два значення (розподіл Радемахера):

$$P(\xi = -1) = P(\xi = 1) = \frac{1}{2}$$

Знайдіть характеристичну функцію ξ. Отримати з характеристичної функції $E[\xi]$, $E[\xi^2]$.

Розв'язання.

Обчислюємо по суті математичне сподівання перетвореної випадкової величини:

$$\varphi_\xi(t) = e^{it1}\frac{1}{2} + e^{it(-1)}\frac{1}{2} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos(t),\ t \in \mathbb{R}$$

Щоб знайти перші два моменти ξ, обчислимо похідні φ_ξ до другого порядку включно:

$$\varphi_\xi^{'}(t) = -\sin(t)\Big|_{t=0} = 0,\ \varphi_\xi^{''}(t) = -\cos(t)\Big|_{t=0} = -1$$

Звідси маємо $E[\xi] = (-i)^1\varphi_\xi^{'}(0) = 0$, $E[\xi^2] = (-i)^2\varphi_\xi^{''}(0) = 2$.

Звіримо відповіді лобовим підрахунком:

$$E[\xi] = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0,\ E[\xi^2] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

2.2 Задача 2 (Приклад обчислення х.ф. абс. неперервної в.в.)

Нехай абсолютно неперервна випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[a, b]$. Знайдіть характеристичну функцію ξ. Отримати з характеристичної функції $E[\xi]$.

Розв'язання.

Спочатку знайдемо характеристичну функцію, $\varphi_\xi(t)$:

$$\varphi_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} f_\xi(u) du = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b e^{itu} du = \frac{1}{b-a} \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it}$$

Переконайтеся, що φ_ξ можна довизначити за неперервністю в $t = 0$.

Знайдемо похідну φ_ξ при $t \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\varphi'_\xi(t) &= \frac{1}{b-a} \frac{e^{itb}(itb-1) - e^{ita}(ita-1)}{it^2} = |e^{itk} = 1 + (itk) + (itk)^2/2 + o(t^2),\ t \to 0| = \\
&= \frac{1}{b-a} \frac{((itb+1) + (itb)^2/2)(itb-1) - ((ita+1) + (ita)^2/2)(ita-1) + o(t^2)}{it^2} = \\
&= \frac{1}{b-a} \frac{1}{2} \frac{-t^2(b^2-a^2) + o(t^2)}{it^2} \to i\frac{a+b}{2},\ t \to 0
\end{aligned}$$

Звідси маємо $E[\xi] = (-i)\varphi'_\xi(0) = (a+b)/2$, що справді так:

$$E[\xi] = \int\limits_a^b \frac{t}{b-a} dt = \frac{a+b}{2}$$

2.3 Задача 3 (Про х.ф. симетричного розподілу)

Нехай $-\xi =^d \xi$, тобто $F_{-\xi}(t) = F_\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Довести, що $\mathrm{Im}(\varphi_\xi(t)) = 0$.

Розв'язання.

Оскільки $-\xi =^d \xi$, то $\varphi_{-\xi}(t) = \varphi_\xi(t)$ з однозначності визначення розподілу характеристичною функцією. З іншого боку,

$$\varphi_{-\xi}(t) = E[e^{it(-\xi)}] = E[e^{i(-t)\xi}] = \varphi_\xi(-t)$$

Отже $\varphi_\xi(t) = \varphi_\xi(-t)$ (в принципі тут доведення вже завершено, але продовжимо).

Розписавши дійсну та уявну частини для всіх $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_\xi(t) = E[\cos(t\xi)] + iE[\sin(t\xi)] = E[\cos(-t\xi)] + iE[\sin(-t\xi)] = E[\cos(t\xi)] - iE[\sin(t\xi)] = \varphi_\xi(-t)$$
$$\Rightarrow E[\sin(t\xi)] = -E[\sin(t\xi)] \Leftrightarrow E[\sin(t\xi)] = 0.$$

Тобто справді $\mathrm{Im}(\varphi_\xi(t)) = 0$.

Альтернативний спосіб. Розглянемо $\eta = \sin(t\eta)$ та $\eta_n(x) = 1_{[-n,n]}(\xi)\sin(tx)$. Випадкові величини η, η_n є інтегровними та $\eta_n \to \eta$ з імовірністю 1. Крім того, $|\eta_n(x)| \le 1$, але 1 теж інтегровна. Отже, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\begin{aligned}
E[\sin(t\xi)] &= \lim_{n\to\infty} E[1_{[-n,n]}(\xi)\sin(t\xi)] = \lim_{n\to\infty} E[1_{[-n,0]}(\xi)\sin(t\xi) + 1_{[0,n]}(\xi)\sin(t\xi) - 1_{\{0\}}(\xi)\sin(t\xi)] = \\
&= |1_{\{0\}}(\xi)\sin(t\xi) = 0 \text{ м.н. }| = \lim_{n\to\infty} E[1_{[-n,0]}(\xi)\sin(t\xi) + 1_{[0,n]}(\xi)\sin(t\xi)] = \\
&= \lim_{n\to\infty} E[1_{[0,n]}(-\xi)\sin(t\xi) + 1_{[0,n]}(\xi)\sin(t\xi)] = \\
&= \lim_{n\to\infty} (E[1_{[0,n]}(-\xi)\sin(t\xi)] + E[1_{[0,n]}(\xi)\sin(t\xi)]) = \\
&= \lim_{n\to\infty} (-E[1_{[0,n]}(-\xi)\sin(t(-\xi))] + E[1_{[0,n]}(\xi)\sin(t\xi)]) = \\
&= \lim_{n\to\infty} (-E[1_{[0,n]}(\xi)\sin(t\xi)] + E[1_{[0,n]}(\xi)\sin(t\xi)]) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0
\end{aligned}$$

В принципі тут можна і без граничного переходу зробити, розбивши

$$1 = 1_{\mathbb{R}}(\xi) = 1_{(-\infty,0)}(\xi) + 1_{\{0\}}(\xi) + 1_{(0,+\infty)}(\xi) \text{ м.н.}$$

2.4 Задача 4 (Про формулу обертання)

Розглянемо випадкову величину ξ, яка має щільність розподілу

$$f_\xi(x) = \frac{\max(0, T - |x|)}{T^2}$$

Після цього знайти характеристичну функцію для випадкової величини η з щільністю

$$f_\eta(x) = \frac{1 - \cos(Tx)}{\pi T x^2}$$

Розв'язання.

Спочатку знайдемо характеристичну функцію випадкової величини ξ:

$$\varphi_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx = \frac{1}{T^2}\int\limits_{-T}^{T} e^{itx}\cdot(T - |x|)dx = \frac{1}{T^2}(I(-T,0,-1) + I(0,T,1)) = \dots$$

$$\begin{aligned}
I(a,b,k) &= \int\limits_a^b e^{itx}(T - kx)dx = \frac{T}{it}(e^{itb} - e^{ita}) - \frac{k}{it}\int\limits_a^b x d(e^{itx}) = \\
&= \frac{T}{it}(e^{itb} - e^{ita}) - \frac{k}{it}\left((be^{itb} - ae^{ita}) - \int\limits_a^b e^{itx}dx\right) = \\
&= \frac{T}{it}(e^{itb} - e^{ita}) - \frac{k}{it}\left((be^{itb} - ae^{ita}) - \frac{1}{it}(e^{itb} - e^{ita})\right) \\
I(-T,0,-1) + I(0,T,1) &= \frac{T}{it}(1 - e^{-itT}) + \frac{1}{it}\left(Te^{-itT} - \frac{1}{it}(1 - e^{-itT})\right) + \\
&+ \frac{T}{it}(e^{itT} - 1) - \frac{1}{it}\left(Te^{itT} - \frac{1}{it}(e^{itT} - 1)\right) = \\
&= -\frac{1}{(it)^2}\left((1 - e^{-itT}) + (1 - e^{itT})\right) = \frac{2(1 - \cos(Tt))}{t^2} \\
\dots &= \frac{2(1 - \cos(Tt))}{T^2 t^2}
\end{aligned}$$

Тобто $\varphi_\xi(t) = 2(1 - \cos(Tt))/(Tt)^2$. Переконайтеся, що φ_ξ інтегровна на $\mathbb{R}$. Тоді з формули обертання отримаємо таке:

$$\frac{\max(0, T - |x|)}{T^2} = \frac{\max(0, 1 - |x|/T)}{T} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\frac{2(1 - \cos(Tt))}{T^2t^2}dt$$

$$\Leftrightarrow \max(0, 1 - |x|/T) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\frac{1 - \cos(Tt)}{\pi T t^2}dt = |z = -t| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{izt}\frac{1 - \cos(Tz)}{\pi T z^2}dz = \varphi_\eta(x)$$

Отже так ми знайшли φ_η з формули обертання.

2.5 Задача 5 (Про гратчасту випадкову величину)

Довести, що $P(\xi \in a + h\mathbb{Z}) = 1$ для деяких $a, h \in \mathbb{R}$ $(h \neq 0)$ тоді і тільки тоді, коли для деякого $t \neq 0$: $\varphi_\xi(t) = 1$.

Розв'язання.

Припустимо, що ξ є гратчастою випадковою величиною. Тоді ξ – дискретна випадкова величина. Значить, її характеристичну функцію можемо обчислити наступним чином:

$$\varphi_\xi(t) = E[e^{it\xi}] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{it(a+hk)} P(\xi = a + hk)$$

Було б добре позбутися залежності від k в комплексній експоненті. Дійсно, якщо покласти $t_0 := 2\pi/h \neq 0$, маємо

$$\varphi_\xi(t_0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{it_0(a+hk)} P(\xi = a + hk) = |e^{i2\pi k} = 1,\ k \in \mathbb{Z}| = e^{ia2\pi/h} \sum_{k\in\mathbb{Z}} P(\xi = a + hk) = e^{ia2\pi/h}$$

Тоді $|\varphi_\xi(t_0)| = 1$. Результат показали в один бік.

Тепер припустимо, що існує таке $t_0 \neq 0$, що $|\varphi_\xi(t_0)| = 1$. З одного боку, значить, існує таке $A \in \mathbb{R}$, що $\varphi_\xi(t_0) = e^{iAt_0}$. З іншого боку,

$$e^{it_0 A} = E[e^{it_0\xi}] \Leftrightarrow 1 = E[e^{it_0(A-\xi)}]$$

Розглянемо дійсну частину останньої рівності:

$$1 = E[\cos(t_0(A - \xi))] \Leftrightarrow E[1 - \cos(t_0(A - \xi))] = 0$$

Але $1 - \cos(t_0(A - \xi)) \geq 0$, значить виходить що $1 - \cos(t_0(A - \xi)) = 0$ майже напевно. Це можливо тоді і лише тоді, коли $t_0(A - \xi) \in \{2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$, або ж $\xi \in \{A - 2\pi k/t_0,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2.6 Задача 6 (Про ЗВЧ тут не говорять!)

Нехай $\{\xi_j\}_{j=1}^n$ – набір н.о.р. випадкових величин з розподілом Коші. Довести, що випадкова величина $\overline{\xi}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \xi_j$ теж має розподіл Коші.

Розв'язання.

Спочатку знайдемо $\varphi_{\xi_1}(t)$:

$$\varphi_{\xi_1}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\frac{1}{1+x^2}dx$$

Через обернене перетворення Фур'є. Знайдемо обернене перетворення Фур'є функції $g(t) = e^{-A|t|}$, $A > 0$:

$$\mathcal{F}^{-1}[g](t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itu}e^{-A|u|}du = I_- + I_+ = \dots$$

$$I_- = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-(it-A)u}du = \frac{1}{2\pi}\frac{-1}{(it-A)}e^{(-it+A)u}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{A-it},\ \text{бо } |e^{-itu+Au}| = e^{Au} \to 0,\ u \to -\infty$$

$$I_+ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(it+A)u}du = \frac{1}{2\pi}\frac{-1}{(it+A)}e^{(-it-A)u}\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{it+A},\ \text{бо } |e^{-itu+Au}| = e^{-Au} \to 0,\ u \to +\infty$$

$$\dots = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{A+it} + \frac{1}{A-it}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{2A}{A^2-(it)^2} = \frac{1}{\pi}\frac{A}{A^2+t^2}$$

Якщо $A = 1$, то $\mathcal{F}^{-1}[g](t) = f_\xi(t)$. А це ж по факту результат обертання φ_ξ, тому $\varphi_\xi(t) = e^{-|t|}$.

Через лишки функції. Спробуйте. Я пізніше можу закинути, якщо цікавить. Ідея в тому, що інтеграл можна певним чином виразити як частинку комплексного інтеграла по деякому контуру.

Отже, $\varphi_\xi(t) = e^{-|t|}$ і звідси отримаємо характеристичну функцію вибіркового середнього:

$$\varphi_{\overline{\xi}_n}(t) = E[e^{i(t/n)\sum_{k=1}^n \xi_k}] = \prod_{k=1}^n E[e^{i(t/n)\xi_k}] = (\varphi_{\xi_1}(t/n))^n = e^{-|t/n|n} = e^{-|t|},\ t \in \mathbb{R}$$

Тобто $\overline{\xi}_n =^d \xi_1$ для довільного $n \geq 1$. Це приклад розподілу, коли ЗВЧ жодним чином не працює для набору н.о.р. випадкових величин $\{\xi_j\}_{j=1}^n$.