Імовірнісні збіжності III.

1 Теоретичні відомості

Стислі теоретичні викладки про базові імовірнісні збіжності ви можете побачити в попередніх семінарських заняттях з імовірнісних збіжностей. Тут сформулюємо дві леми: Бореля-Кантеллі та її 'обернену версію'.

Нагадаємо, що для послідовності випадкових подій $\{A_n\}_{n\geq 1}$ верхня границя визначається наступним чином: $A := \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k$. Подія A полягає у появі нескінченної кількості подій A_n.

Лема (Бореля-Кантеллі). Нехай $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ – послідовність випадкових подій. Якщо $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, то

$$P(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = 0$$

Лема (обернена до Бореля-Кантеллі). Нехай $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ – послідовність (попарно або сумісно) незалежних випадкових подій. Якщо $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, то

$$P(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = 1$$

Стане у нагоді наступна властивість: послідовність $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ задовольняє закон великих чисел, якщо для $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ має місце збіжність за ймовірністю

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \to^P 0,\ n \to \infty.$$

Якщо $\{\xi_n\}$ однаково розподілені, то це еквівалентне твердженню

$$\frac{S_n}{n} \to^P E[\xi_1],\ n \to +\infty.$$

Грубо кажучи, закон великих чисел інтерпретується як збіжність емпіричного середнього до теоретичного при збільшенні обсягу вибірки.

Для дослідження послідовності на виконання закону великих чисел може допомогти, наприклад, умова на дисперсії членів послідовності:

Теорема (ЗВЧ у формі Чебишева) Послідовність некорельованих випадкових величин $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ задовольняє закон великих чисел, якщо $Var[\xi_n] = o(n)$, $n \to \infty$.

Теорему вище доведіть за допомогою імовірнісних нерівностей.

Також для ЗВЧ досить припустити, що дисперсії членів послідовності обмежені (в деякій літературі обмеженість дисперсій також називають умовою ЗВЧ у формі Чебишева). В цьому теж можна схожим чином переконатися як до попередньої умови.

Якщо умова на дисперсії порушується, можна для н.о.р. випадкових величин перевірити чи є доданки інтегровними. Тоді ЗВЧ виконується і $S_n/n \to^P E[\xi_1]$.

2 Задачі

2.1 Задача 1

Нехай $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ є послідовністю н.о.р. випадкових величин, $\xi_1 \sim U[0,1]$. Розглянемо $\eta_n = 1_{[0,1/n]}(\xi_n)$, $n \geq 1$.

1. Довести, що $\eta_n \to^P 0$,
2. Довести, що $\eta_n \not\to^{P1} 0$.

Розв'язання.

Спочатку доведемо, що $\eta_n \to^P 0$. Беремо довільне $\varepsilon > 0$ та крутимо

$$P(|\eta_n - 0| \geq \varepsilon) = P(\eta_n \geq \varepsilon) = \begin{cases} 0, & \varepsilon > 1, \\ P(\eta_n = 1) = P(\xi_n \in [0, 1/n]) = F_{\xi_n}(1/n) - F_{\xi_n}(0) = 1/n \to 0, & \varepsilon \in (0,1]. \end{cases}$$

Довели збіжність за ймовірністю.

Тепер спростуємо збіжність з імовірністю 1 η_n до 0. Покажемо, що верхня границя η_n ненульова з імовірністю одиниця. Для цього розглянемо послідовність незалежних випадкових подій $\{A_n\}_{n\geq 1}$ вигляду

$$A_n = \{\eta_n = 1\},\ n \geq 1$$

Легко бачити, що $P(A_n) = 1/n$ та $\sum_{n\geq 1} P(A_n) = \sum_{n\geq 1} 1/n = +\infty$. Згідно оберненої леми Бореля-Кантеллі маємо, що

$$P(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

Але ж $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n \sim$ '$\eta_n = 1$ нескінченно часто'. Значить, з імовірністю 1 верхня границя η_n дорівнює 1 (можна виділити підпослідовність, збіжну до 1), тобто

$$P(\overline{\lim}_{n\to\infty} \eta_n = 1) = 1$$

Виходить, що $\{\overline{\lim}_{n\to\infty} \eta_n = 0\}$ має нульову імовірність, а тому з монотонності імовірності

$$0 \leq P(\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0) = P(\{\underline{\lim}_{n\to\infty} \eta_n = 0\} \cap \{\overline{\lim}_{n\to\infty} \eta_n = 0\}) \leq P(\overline{\lim}_{n\to\infty} \eta_n = 0) = 0$$

Звідси $P(\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0) = 0$.

2.2 Задача 2

Нехай $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ є послідовністю н.о.р. випадкових величин. Довести, що

$$P(\xi_n = o(n),\ n \to \infty) = 1$$

тоді і тільки тоді, коли $E[|\xi_1|] < \infty$.

Розв'язання.

Тобто потрібно довести, що $P(\lim\limits_{n\to+\infty}(\xi_n/n) = 0) = 1$ тоді і тільки тоді, коли $E[|\xi_1|] < \infty$.

Припустимо, що $\xi_n/n \to^{P1} 0$. Оцінимо

$$\begin{aligned}
E[|\xi_1|] = \sum_{k=1}^{+\infty} E[|\xi_1|\mathbf{1}_{[k-1,k)}(|\xi_1|)] \leq \sum_{k=1}^{+\infty} E[k\mathbf{1}_{[k-1,k)}(|\xi_1|)] = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(|\xi_1| \in [k-1,k)) = \\
= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{k} P(|\xi_1| \in [k-1,k)) = \sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{k=l}^{+\infty} P(|\xi_1| \in [k-1,k)) = \\
= \sum_{l=1}^{+\infty} P(|\xi_1| \geq l-1) = 1 + \sum_{l=1}^{+\infty} P(|\xi_l|/l \geq 1)
\end{aligned}$$

Розглянемо незалежні випадкові події $A_l = \{|\xi_l/l| \geq 1\}$, $l \geq 1$ та, відповідно, ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} P(A_l) = \sum_{l=1}^{\infty} P(|\xi_l| \geq l). \tag{1}$$

Якщо (1) розібжний, тоді з оберненої леми Бореля-Кантеллі матимемо

$$P(|\xi_n|/n \geq 1 \text{ нескінченно часто}) = 1,$$

тобто $P(\overline{\lim}_{n\to\infty}|\xi_n|/n \geq 1) = 1$, що суперечить збіжності майже напевно ξ_n/n до нуля. Отже, ряд (1) збігається і, як наслідок, $E[|\xi_1|] < \infty$.

Навпаки, припустимо що $E[|\xi_1|] < \infty$. Вийдемо на лему Бореля-Кантеллі, розглянувши події $B_n(\varepsilon) = \{|\xi_n| \geq n\varepsilon\}$ для всіх $n \geq 1$ та довільного фіксованого $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n(\varepsilon)) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| \geq n\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(|\xi_n|/\varepsilon \in [k,k+1)) = \\
= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} P(|\xi_n|/\varepsilon \in [k,k+1)) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(|\xi_n|/\varepsilon \in [k,k+1)) = \\
= \sum_{k=1}^{\infty} E[k\mathbf{1}\{k \leq |\xi_n|/\varepsilon < k+1\}] \leq \sum_{k=1}^{\infty} E[|\xi_n|/\varepsilon \mathbf{1}\{|\xi_n|/\varepsilon \leq |\xi_n|/\varepsilon < k+1\}] = \\
= E[|\xi_n|/\varepsilon] = E[|\xi_n|]/\varepsilon < \infty
\end{aligned}$$

Тобто ряд $\sum_n P(B_n(\varepsilon))$ збіжний. Згідно леми Бореля-Кантеллі, $P(\overline{\lim}_{n\to\infty} B_n(\varepsilon)) = 0$, тобто подія $B_n(\varepsilon)$ виконується для скінченної кількості номерів. Тоді майже напевно існує $n_0 = n_0(\omega) \geq 1$ таке, що для довільного $n \geq n_0$ матимемо $|\xi_n|/n < \varepsilon$. З довільного вибору $\varepsilon > 0$ також отримаємо, що для всіх $k \geq 1$ майже напевно

$$\exists n_0 \geq 1 : \ \forall n \geq 1 \ |\xi_n|/n < \frac{1}{k}.$$

Звідси виходимо на збіжність з імовірністю 1:

$$P(\lim_{n\to\infty} (\xi_n/n) = 0) \geq P\left(\bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n_0 \geq 1} \bigcap_{n \geq n_0} \{|\xi_n|/n < 1/k\}\right) = 1 \Rightarrow P(\lim_{n\to\infty} (\xi_n/n) = 0) = 1,$$

оскільки

$$\bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n_0 \geq 1} \bigcap_{n \geq n_0} \{|\xi_n|/n < 1/k\} \subset \left\{\lim_{n\to\infty} (\xi_n/n) = 0\right\}.$$

2.3 Задача 3

Нехай $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ є послідовністю незалежних випадкових величин з розподілом

$$P(\xi_n = \pm n) = \frac{1}{n\ln(n)},\ P(\xi_n = 0) = 1 - \frac{2}{n\ln(n)},\ n \geq 2,\ \xi_1 := 0.$$

Розглянемо $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Довести, що $S_n/n \to^P 0$, але не з імовірністю 1.

Розв'язання.

Спочатку доведемо, що $S_n/n \to^P 0$ при $n \to \infty$. Для цього можемо скористатися умовою ЗВЧ у формі Чебишева. Обчислимо дисперсії: побачивши, що $E[\xi_n] = 0$ (побачили?)

$$Var[\xi_n] = E[\xi_n^2] = \frac{1}{n\ln(n)} \cdot (-n)^2 + \frac{1}{n\ln(n)} \cdot (+n)^2 = \frac{2n}{\ln(n)}$$

Покажемо, що $Var[\xi_n] = o(n)$ при $n \to \infty$. Дійсно,

$$\frac{Var[\xi_n]}{n} = \frac{1}{\ln(n)} \to 0,\ n \to \infty.$$

Отже, умова ЗВЧ у формі Чебишева виконується, а значить має місце збіжність за ймовірністю

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} = \frac{S_n}{n} \to^P 0,\ n \to \infty.$$

Тепер покажемо, що S_n/n не збігається до 0 майже напевно. Розглянемо послідовність незалежних подій вигляду

$$A_n = \{\xi_n/n = 1\},\ n \geq 1$$

Неважко побачити, що $P(A_1) = 0$ та $P(A_n) = P(\xi_n = n) = 1/(n\ln(n))$ при $n \geq 2$. Зокрема

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)} \tag{2}$$

Переконаємося, що останній ряд розбігається до $+\infty$. Для цього розглянемо інтеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln(x)} = \int_2^{+\infty} \frac{d\ln(x)}{\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)) = +\infty,$$

оскільки $\ln(\ln(x))$ є зростаючою необмеженою функцією при $x > 1$. Отже, при $N > 3$

$$\int_2^{N-1} \frac{dx}{x\ln(x)} = \sum_{n=2}^{N-2} \int_n^{n+1} \frac{dx}{x\ln(x)} \leq \sum_{n=2}^{N-2} \frac{1}{n\ln(n)}$$

Інтеграл зліва розбігається до $+\infty$ при $N \to \infty$, а тому $\sum_{n=2}^{N-2} 1/(n\ln(n)) \to +\infty$. Отже, ряд (2) розбіжний та $\sum_n P(A_n) = +\infty$. За оберненою лемою Бореля-Кантеллі має місце

$$P(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = 1,$$

де $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n \sim$ '$\xi_n/n = 1$ нескінченно часто'. Значить, $P(\overline{\lim}_{n\to\infty}(\xi_n/n) = 1) = 1$. З цього маємо, що $P(\lim\limits_{n\to\infty}(\xi_n/n) = 0) = 0$.

А тепер припустимо, що $S_n/n \to^{P1} 0$ при $n \to +\infty$. Тоді також $S_{n-1}/(n-1) \to^{P1} 0$. Згідно арифметичних дій над збіжними майже напевно послідовностями маємо при $n \geq 2$

$$\frac{1}{n}(S_n - S_{n-1}) = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \to^{P1} 0 - 0 \cdot 1 = 0,\ n \to \infty.$$

З іншого боку, $(S_n - S_{n-1})/n = \xi_n/n$, але $\xi_n/n \not\to^{P1} 0$ при $n \to \infty$. Отримали суперечність, тому припущення не вірне. Внаслідок маємо що $S_n/n \not\to^{P1} 0$ при $n \to \infty$, що і треба було довести.