Граничні теореми для схеми випробувань Бернуллі. Загальне означення випадкової величини

1 Теоретичні відомості

Граничні теореми для схеми випробувань Бернуллі

Випробуванням Бернуллі називають дихотомічний стохастичний експеримент, тобто такий, який може мати один з двох результатів (часто інтерпретується через успіх / невдача).

Схемою випробувань Бернуллі називають послідовність незалежних в сукупності випробувань Бернуллі, тобто послідовність експериментів, кожне з яких може мати два результати.

Одним із розподілів, що ідейно будується через випробування Бернуллі, є біноміальний. Припустимо, що успіх настане в одному випробуванні з імовірністю p та проведено n випробувань. Тоді кількість успіхів ξ в такій схемі має розподіл

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k = \overline{0, n}.$$

Часто бувають ситуації, коли для такого розподілу потрібно порахувати

Для формулювання граничних теорем потрібно ввести означення нормального розподілу (цей розподіл вивчатиметься детальніше в задачах на неперервні випадкові величини):

Випадкова величина ξ має стандартний нормальний розподіл з параметрами $\mu \in \mathbb{R}$ та $\sigma^2 > 0$, якщо її розподіл можна подати у вигляді:

$$P(\xi < t) = \Phi(t) := \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt,\ t \in \mathbb{R}.$$

Підінтегральну функцію $\varphi(t) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-t^2/2)$ називають щільністю стандартного нормального розподілу.

Теорема Муавра-Лапласа в локальній формі. Нехай $\xi \sim \mathrm{Binom}(n, p)$.

Тоді для довільного $c > 0$

$$\sup_{k: |k - np| \le c\sqrt{n}} \left| \frac{P(\xi = k)}{\varphi_*(k)} - 1 \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ n \to \infty,$$

де $\varphi_*(t) = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \varphi\left(\frac{t - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

Теорема Муавра-Лапласа в інтегральній формі. Нехай $\xi \sim \mathrm{Binom}(n, p)$.

Тоді для $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$:

$$P(a \leq \xi < b) = \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ n \to \infty.$$

Теорема Пуассона. Нехай $\xi \sim \mathrm{Binom}(n, p)$, причому $p = p_n$ таке, що $n \cdot p_n \to \lambda > 0$.

Тоді для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$:

$$P(\xi = k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ n \to \infty.$$

Загальне означення випадкової величини

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – імовірнісний простір. Через $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ позначимо борельову сигма-алгебру підмножин з $\mathbb{R}$.

Випадковою величиною називають функцію $X : \Omega \to \mathbb{R}$, що є $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-вимірною, тобто для всіх $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}.$$

Математичним сподіванням в загальному розумінні є інтеграл Лебега

$$E[X] = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega) \tag{1}$$

Функцією розподілу випадкової величини X називають функцію $F_X(t) = P(X < t)$, $t \in \mathbb{R}$. Відмітимо основні властивості F_X:

1. $F_X(t)$ неспадна по $t \in \mathbb{R}$,
2. $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$
3. $F_X(t)$ є неперервною зліва функцією.

Під хвостом розподілу часто розуміють імовірність $P(X \geq t) = 1 - F_X(t)$.

Розглянемо міру Лебега-Стілтьєса на (algebra???), породженою функцією розподілу $F_X(t)$:

$$F_X([a, b)) := F_X(b) - F_X(a), \; a < b.$$

Зробивши заміну міри з $P(\cdot)$ на $F_X(dt) = P(X^{-1}(\cdot))$ в (1), маємо більш вживане означення математичного сподівання:

$$E[X] = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega) = \int_\mathbb{R} t dF_X(t)$$

2 Задачі

2.1 Задача 1

Імовірність отримання з конвеєра виробу, що відповідає стандарту, дорівнює 0,95. Наближено оцініть імовірність того, що з 600 виробів рівно 580 відповідатимуть стандарту.

В умовах попередньої задачі наближено оцініть імовірність того, що серед 1000 виробів з лінії зійде більше 940 виробів, що відповідають стандарту.

Розв'язання

2.2 Задача 2

Кур'єрська служба відправляє термінову кореспонденцію. Ймовірність того, що один лист буде пошкоджено під час пересилки, становить 0,0005. Наближено оцініть імовірність того, що серед надісланих 8000 листів буде пошкоджено рівно три листи.

В умовах попередньої задачі наближено оцініть імовірність того, що буде пошкоджено від трьох до п'яти листів.

Розв'язання

2.3 Задача 3

Розв'язання

2.4 Задача 4

Розв'язання

2.5 Задача 5

Розв'язання