Умовна імовірність. Незалежні випадкові події

1 Теоретичні відомості

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – імовірнісний простір.

Умовна імовірність

Візьмемо $A, B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$. Умовною імовірністю події A за умови виконання події B називається число

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

По суті в означенні вище ми рахуємо імовірність події A, коли виконалася B – тобто звужуємо простій подій з Ω до B.

Це добре бачити, наприклад, для класичної моделі імовірності: якщо $|B| > 0$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

Незалежні випадкові події

Будемо називати випадкові $A, B \in \mathcal{F}$ незалежними, якщо $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Візьмемо набір випадкових подій $\{A_j\}_{j \in I} \subset \mathcal{F}$, де I – не більш ніж зліченна множина.

Випадкові події $\{A_j\}_{j \in I}$ будемо називати

- попарно незалежними, якщо для всіх $i, j \in I$, $i \neq j$, A_i та A_j є незалежними,
- незалежними в сукупності, якщо для довільної $J \subset I$:

$$P(\cap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

З незалежності в сукупності подій випливає попарна незалежність (досить взяти двоелементні підмножини J), але навпаки твердження неправильне.

2 Задачі

2.1 Задача 1

Математик підкидає три гральних кубики. Знайдіть імовірність того, що хоча б на одному кубику випаде шістка за умови, що

1. Випали різні грані,
2. Випали однакові грані.

Розв'язання

Для обчислень скористаємося класичною моделлю імовірності.

Тут введемо $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_j \in \overline{1,6}, j = 1,2,3\}$.

Нехай $A \sim$ 'Хоча б на одному кубику випаде шістка', $B \sim$ 'Випали різні грані', $C \sim$ 'Випали однакові грані'.

Спочатку знайдемо $P(A \mid B)$. Розписавши за означенням,

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Підрахуємо кількості ситуацій. Для $|B|$ виходить $6 \cdot 5 \cdot 4$. Далі, якщо $A \cap B$ виконується, значить шістка буде лише на одному з трьох кубиків. Отже $|A \cap B| = 3 \cdot (5 \cdot 4)$. Отже $P(A \mid B) = 3/6 = 1/2$.

Тепер знайдемо $P(A \mid C)$. Підрахуємо ситуації: очевидно для $|C|$ виходить 6, а для $|A \cap C|$ маємо 1 (шістка на всіх кубиках). В результаті $P(A \mid C) = 1/6$.

2.2 Задача 2

Геолог підкидає два гральних кубики. Розглянемо такі випадкові події:

- $A_1 \sim$ 'На першому кубику парна кількість очок',
- $A_2 \sim$ 'На другому кубику непарна кількість очок',
- $A_3 \sim$ 'Сума очок непарна'.

Показати, що події A_1, A_2, A_3 є попарно незалежними, однак є залежними в сукупності.

Розв'язання

Доводимо та спростовуємо безпосередньо за означенням. Розв'язуємо через класичну імовірність, де $\Omega = \{(x_1, x_2) \mid x_j \in \overline{1,6}, j = 1, 2\}$, $|\Omega| = 6^2$.

Спочатку обчислимо імовірності подій A_j, $j = 1, 2, 3$:

$$P(A_1) = \frac{3 \cdot 6}{6^2} = \frac{1}{2},\ P(A_2) = \frac{6 \cdot 3}{6^2} = \frac{1}{2},\ P(A_3) = \frac{2 \cdot (3 \cdot 3)}{6^2} = \frac{1}{2}$$

Тепер обчислимо імовірності попарних перетинів:

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) = \frac{3 \cdot 3}{6^2} = \frac{1}{4}.$$

Така 'махінація' для $P(A_2 \cap A_3)$, $P(A_1 \cap A_3)$ справді має місце, бо якщо ми зафіксували на одному кубику парне (непарне) число, то на іншому точно має бути непарна (парна) кількість очок (щоби в сумі давало непарне число).

А тепер імовірність перетину трьох подій:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) = 1/4,\ (A_1 \cap A_2) \subset A_3.$$

Тепер побачимо, що імовірності попарних перетинів дорівнюють попарним добуткам імовірностей:

$$P(A_i \cap A_j) = 1/4 = 1/2 \cdot 1/2 = P(A_i \cap A_j),\ i \neq j,$$

що доводить попарну незалежність подій. Спростовує незалежність в сукупності відмінність імовірності потрійного перетину від добутку імовірностей компонент:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/4 \neq 1/8 = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3).$$

2.3 Задача 3

Василь навмання кидає точку всередину куба $[0,1]^3$. Через (X, Y, Z) позначимо координати кинутої точки. Обчислити $P(\max(X, Y, Z) \leq c \mid X + Y + Z \leq 1)$.

Розв'язання

Будемо працювати з геометричною імовірністю. Візьмемо $\Omega = [0,1]^3$, а мірою буде об'єм λ_3.

В термінах Ω, випадкові події A та B_c мають вигляд:

$$A = \{(x,y,z) \in [0,1]^3 \mid x+y+z \leq 1\}, \ B_c = \{(x,y,z) \in [0,1]^3 \mid \max(x,y,z) \leq c\} = [0,c]^3.$$

Спочатку знайдемо $P(A)$, а далі будемо розглядати $P(A \cap B_c)$:

$$P(A) = \lambda_3(A) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dzdydx = \int_0^1 \int_0^{1-x} ((1-x)-y)dydx =$$
$$= \int_0^1 (1-x)^2/2dx = -(1-x)^3/6\Big|_0^1 = 1/6.$$

(можна без інтегралів, але хай буде)

Тепер дослідимо перетин подій A та B_c та розглянемо різні ситуації в залежності від $c \in [0,1]$.

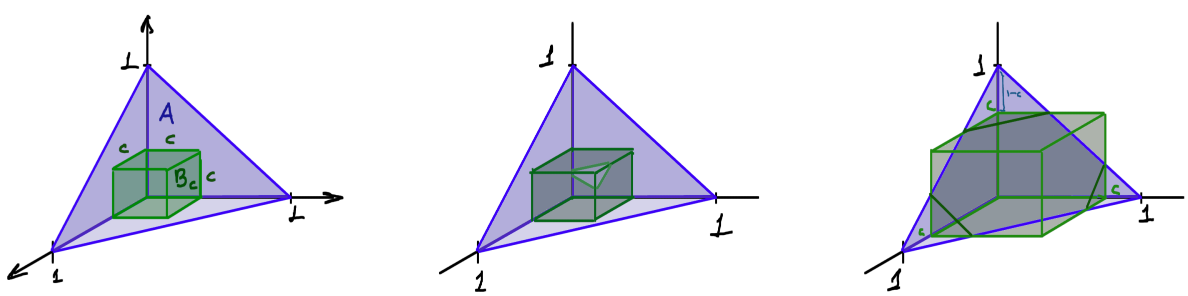

Рис. 1: Схематична візуалізація подій A (синій симплекс) та B_c (зелений куб). Зліва при $c < 1/3$, в центрі при $c \in (1/3, 1/2)$ та справа при $c > 1/2$.

По суті куб збільшується вздовж прямої $\mathcal{L}: \ x = y = z$ (дальня вершина тягнеться по цій прямій). Отже, визначимо умову дотику куба B_c з 'верхньою' поверхнею A:

$$\begin{cases} x = y = z, \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 1/3$$

Отже, при $c < 1/3$ куб B_c повністю міститься всередині A, при $c = 1/3$ маємо дотик, а при $c > 1/3$ куб вилізає за межі симплекса. При $c \in (1/3, 1/2)$ від куба вилізає лише частина у формі тетраедра. А коли $c > 1/2$, то куб відсікає від симплекса 3 подібні тетраедри.

Спочатку розглянемо випадок $c < 1/3$. Тоді $B_c \subset A$, а тому $P(A \cap B_c) = P(B_c) = \lambda_3(B_c) = c^3$. Отже $P(B_c \mid A) = 6c^3$.

Тепер розглянемо випадок, коли $c \in (1/3, 1/2)$. Тоді об'єм $B_c \cap A$ є різниця об'єму B_c та об'єму піраміди, утвореної відсіканням симплексом A куба B_c. Довжина зовнішнього шматка ребра куба становить $3c - 1$ (можна вивести з рівнянь $y = c$, $y = (1-c) - x$). Отже, об'єм піраміди становить $S_{\triangle_0} = 1/3 \cdot (1/2 \cdot (3c-1)^2) \cdot (3c-1) = (3c-1)^3/6$, звідки $\lambda_3(A \cap B_c) = 1 - S_{\triangle_0} = c^3 - (3c-1)^3/6$, в результаті $P(B_c \mid A) = 6c^3 - (3c-1)^3$.

Залишається дослідити $c > 1/2$. Висота трикутної піраміди (однієї з трьох утворених) становить $1 - c$. Значить об'єм такої піраміди становить $S_{\triangle_1} = (1-c)^3/6$, звідки $\lambda_3(A \cup B_c) = c^3 + 3 \cdot S_{\triangle_1} = c^3 + (1-c)^3/2$. Отже $\lambda_3(A \cap B_c) = \lambda_3(A) + \lambda_3(B_c) - \lambda_3(A \cup B_c) = 1/6 + c^3 - c^3 - (1-c)^3/2 = 1/6 - (1-c)^3/2$ Остаточно $P(B_c \mid A) = 1 - 3(1-c)^3$.

У точках $c \in \{1/3, 1/2\}$ імовірності можна справедливо довизначати по неперервності.

Отже,

$$P(B_c \mid A) = \begin{cases} 6c^3, & c \in [0, 1/3), \\ 6c^3 - (3c-1)^3, & c \in [1/3, 1/2), \\ 1 - 3(1-c)^3, & c \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

2.4 Задача 4

Урна містить M куль, серед яких M_1 білих куль. Розглядається вибір обсягу n. Нехай B_j – подія, яка полягає в тому, що вибрана на j-му кроці куля була білою, а A_k – подія, яка полягає в тому, що у вибірці обсягу n є рівно k білих куль. Показати, що як для вибору з поверненням, так і для вибору без повернення $P(B_j \mid A_k) = k/n$.

Розв'язання

За означенням умовної імовірності,

$$P(B_j \mid A_k) = \frac{P(B_j \cap A_k)}{P(A_k)}.$$

Опишемо розв'язок в термінах класичної моделі імовірності.

1. Послідовно витягуємо n куль з поверненням. Значить, на кожному витягуванні можна обрати одну з M куль. Тоді

   $$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_j = \overline{1, M}, j = \overline{1, n}\},\ |\Omega| = M^n.$$

   (Рахувати $|\Omega|$ необов'язково, бо можна скоротити)

   Обчислимо $P(A_k)$. Кількість елментарних подій в A_k є $C_n^k M_1^k (M - M_1)^{n-k}$ (вибір витягувань з білими кулями, і власне способи обрати кулі на конкретних витягуваннях). Отже

   $$P(A_k) = |A_k|/|\Omega| = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ p = M_1/M.$$

   Далі, обчислимо тепер $P(A_k \cap B_j)$. Отже, одна позиція (витягування) зафіксована, маємо відібрати $k-1$ витягувань на білі кулі: $|A_k \cap B_j| = M_1 C_{n-1}^{k-1} M_1^{k-1} (M - M_1)^{n-k}$. Отже

   $$P(A_k \cap B_j) = |A_k \cap B_j|/|\Omega| = p C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}.$$

   Підставимо у підрахунок умовної імовірності:

   $$P(B_j \mid A_k) = \frac{P(B_j \cap A_k)}{P(A_k)} = \frac{C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k}}{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{k}{n}.$$

2. Послідовно витягуємо n куль *без* повернення. Значить, на кожному наступному етапі можна обрати на одну кулю менше. Тоді

   $$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_j = \overline{1, M}, j = \overline{1, n}; x_p \neq x_q, p \neq q\},\ |\Omega| = M \cdot (M-1) \cdot \ldots \cdot (M - n + 1).$$

   Кількість елементарних подій в A_k є

   $$C_n^k (M_1 \cdot (M_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (M_1 - k + 1)) \cdot ((M - M_1) \cdot ((M - M_1) - 1) \cdot \ldots \cdot ((M - M_1) - (n-k) + 1))$$

   (схоже до ситуації з поверненням, але кульки пропадають при кожному витягуванні). Кількість подій для перетину теж зрозуміла: позиція фіксується, кульки втрачаються

   $$C_{n-1}^{k-1} (M_1 \cdot (M_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (M_1 - k + 1)) \cdot ((M - M_1) \cdot ((M - M_1) - 1) \cdot \ldots \cdot ((M - M_1) - (n-k) + 1))$$

   Звідки $P(B_j \mid A_k) = \dfrac{|A_k \cap B_j|}{|B_j|} = \dfrac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k} = \dfrac{k}{n}$, що і треба було довести.