# Імовірнісні збіжності. Частина 1.

## 1 Теоретичні відомості

Розглянемо випадкову послідовність $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$. Цю послідовність називають

1. **збіжною за ймовірністю** до випадкової величини $\xi$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \to 0,\ n \to +\infty.$$

   Позначення: $\xi_n \to^P \xi$.

2. **збіжною з імовірністю 1 (майже напевно)** до випадкової величини $\xi$, якщо

$$P(\lim_{n\to+\infty} \xi_n = \xi) = 1.$$

   Позначення: $\xi_n \to^{P1} \xi$ (або ж $\xi_n \to \xi$ м.н.).

3. **збіжною в середньому порядку** $r$ до випадкової величини $\xi$ ($E[|\xi_n|^r], E[|\xi|^r] < \infty$), якщо

$$E[|\xi_n - \xi|^r] \to 0,\ n \to +\infty.$$

   Позначення: $\xi_n \to^{L_r} \xi$.

Можна провести аналогію зі збіжностями з теорії міри (функціонального аналізу):

| **ТМ** | **ТЙ** |
|---|---|
| За мірою | За ймовірністю |
| Майже напевно | Майже скрізь |
| В просторі $L_p$ | В середньому |

Послідовність $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ називається обмеженою за імовірністю, якщо

$$\sup_{n\geq 1} P(|\xi_n| \geq C) \to 0,\ C \to \infty.$$

Якщо послідовність $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ збіжна за ймовірністю, то вона обмежена за ймовірністю.

Теорема (критерій обмеженості за ймовірністю) Послідовність $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ обмежена за ймовірністю тоді і тільки тоді, коли для всіх $C > 0$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} P(|\xi_n| \geq C) \to 0,\ n \to \infty$$

# 2 Задачі

## 2.1 Задача 1 (Конкретні приклади збіжних послідовностей)

Нехай $\{\xi_j\}_{j=1}^n$ є н.о.р. випадковими величинами, $\xi_1 \sim Exp(\lambda)$. Довести, що при $n \to +\infty$

$$\min_{1 \le j \le n} \xi_j \to^P 0$$

**Розв'язання.**

Доведемо результат за означенням. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і розглянемо

$$P(|\min_{1 \le j \le n} \xi_j - 0| \ge \varepsilon) = P(\{\min_{1 \le j \le n} \xi_j \le -\varepsilon\} \cup \{\min_{1 \le j \le n} \xi_j \ge \varepsilon\}) = P(\min_{1 \le j \le n} \xi_j \le -\varepsilon) + P(\min_{1 \le j \le n} \xi_j \ge \varepsilon) =$$
$$= 0 + P(\xi_1 \ge \varepsilon, \ldots, \xi_n \ge \varepsilon) = \exp(-\lambda n \varepsilon) \to 0,\ n \to \infty.$$

Спочатку скористалися тим, що $\min_{1 \le j \le n} \xi_j$ приймає невід'ємні значення. Далі скористалися незалежністю випадкових величин в сукупності, а далі – відомим розподіл кожної з координат.

Ми довели збіжність $P(|\min_{1 \le j \le n} \xi_j - 0| \ge \varepsilon)$ до нуля для всіх $\varepsilon > 0$, тобто справді $\min_{1 \le j \le n} \xi_j \to^P 0$ при $n \to \infty$.

**Коментар.** Існування випадкової послідовності з незалежних в сукупності її членів гарантує теорема Колмогорова про існування випадкового процесу (див., наприклад, [1]).

## 2.2 Задача 2 (Про збіжність в середньому)

Показати наступне:

1. Якщо $\xi_n \to^{L_r} \xi$, то $\xi_n \to^{L_l} \xi$ при $l < r$,
2. Якщо $\xi_n \to^{L_p} \xi$, то $\xi_n \to^{P} \xi$.

**Розв'язання.**

Для першого результату скористаємося *нерівністю Гельдера*: нехай $p, q > 1$, $1/p + 1/q = 1$ та $\zeta$, $\eta$ є випадковими величинами. Тоді

$$E[|\zeta\eta|] \leq (E[|\zeta|^p])^{1/p}(E[|\eta|^q])^{1/q}$$

Нехай $l < r$. Покладемо $\zeta = |\xi_n - \xi|^l$, $\eta = 1$, $p = r/l > 1$ ($q = p/(p-1) = \frac{r}{l} \cdot \frac{l}{r-l} = \frac{r}{r-l} > 1$), тоді

$$E[|\xi_n - \xi|^l] \leq (E[|\xi_n - \xi|^r])^{l/r} \underbrace{(E[|1|^{r/(r-l)}])^{(r-l)/r}}_{=1} = (E[|\xi_n - \xi|^r])^{l/r} \to 0,\ n \to +\infty,$$

де скористалися тим, що $\xi_n \to^{L_r} \xi$ при $n \to +\infty$.

Для другого результату скористаємося *нерівністю Маркова*: якщо $\zeta \geq 0$ м.н. та $h(x) \geq 0$ – строго зростаюча функція на $\zeta(\Omega)$, тоді для всіх $a > 0$

$$P(\zeta \geq a) \leq \frac{E[h(\zeta)]}{h(a)}$$

В якості $\zeta$ розглянемо $|\xi_n - \xi| \geq 0$, $h(t) := t^r$. Тоді для всіх $a > 0$

$$P(|\xi_n - \xi| \geq a) \leq \frac{E[|\xi_n - \xi|^r]}{|a|^r} \to 0,\ n \to \infty,$$

де знову скористалися тим, що $\xi_n \to^{L_r} \xi$. Звідси вивели, що $\xi_n \to^{P} \xi$.

**Коментар.** Навпаки, взагалі кажучи, не працює. Розглянемо випадкову послідовність $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$:

$$P(\xi_n = n) = 1/n,\ P(\xi_n = 1) = 1 - 1/n$$

Неважко побачити, що $\xi_n \to^{P} 0$: для довільного $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} P(|\xi_n - 1| \geq \varepsilon) &= P(\{\xi_n \leq 1 - \varepsilon\} \cup \{\xi_n \geq 1 + \varepsilon\}) = \\ &= P(\xi_n \geq 1 + \varepsilon) = \begin{cases} 0, & \varepsilon > n - 1, \\ P(\xi_n = n) = 1/n \to 0,\ n \to \infty, & \varepsilon \leq n - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Але $E|\xi_n - 1| = (n-1) \cdot 1/n + (1-1) \cdot (1 - 1/n) = 1 - 1/n \to 1$ при $n \to \infty$.

## 2.3 Задача 3 (Теорема про двох стохастичних поліцейських)

Нехай $\xi_n \leq \zeta_n \leq \eta_n$ м.н. та $\xi_n \to^P \zeta$, $\eta_n \to^P \zeta$ при $n \to \infty$. Тоді $\zeta_n \to^P \zeta$.

**Розв'язання.**

Нехай $\varepsilon > 0$. Тоді

$$P(|\zeta_n - \zeta| \geq \varepsilon) = P(|(\zeta_n - \xi_n) - (\zeta - \eta_n)| \geq \varepsilon) \leq P(|\zeta_n - \xi_n| \geq \varepsilon/2) + P(|\xi_n - \zeta| \geq \varepsilon/2)$$

Остання нерівність справді має місце. Дійсно, розглянемо $A_\varepsilon = \{\omega : \ |\xi_1(\omega) - \xi_2(\omega)| < \varepsilon\}$ та $B_\varepsilon = \{|\xi_i(\omega)| < \varepsilon/2, \ i = 1, 2\}$. Тоді, якщо $\omega \in B_\varepsilon$, тоді $|\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)| \leq |\xi_1(\omega)| + |\xi_2(\omega)| < \varepsilon$. Отже $\omega \in A_\varepsilon$, тобто $B_\varepsilon \subset A_\varepsilon$. Перейдемо до доповнень, отримаємо

$$\overline{A}_\varepsilon = \{\omega : \ |\xi_1(\omega) - \xi_2(\omega)| \geq \varepsilon\} \subset \{|\xi_1(\omega)| \geq \varepsilon/2\} \cup \{|\xi_2(\omega)| \geq \varepsilon/2\} = \overline{B}_\varepsilon.$$

Ідемо далі. З другим доданком проблем немає, внаслідок збіжності за ймовірністю $\{\xi_n\}_n$ до $\zeta$. А для першого доданку зауважимо, що $|\zeta_n - \xi_n| =^d \zeta_n - \xi_n$ (бо $\zeta_n - \xi_n \geq 0$ м.н.) та

$$\zeta_n - \xi_n \leq \eta_n - \xi_n \text{ м.н.}$$

Розглянемо події $G_{\zeta_n} = \{\omega : \zeta_n(\omega) - \xi_n(\omega) \geq \varepsilon/2\}$ та $G_{\eta_n} = \{\omega : \eta_n(\omega) - \xi_n(\omega) \geq \varepsilon/2\}$. Візьмемо $\omega \in G_{\zeta_n}$. Тоді

$$\varepsilon/2 \leq \zeta_n(\omega) - \xi_n(\omega) \leq \eta_n(\omega) - \xi_n(\omega) \Rightarrow \varepsilon/2 \leq \eta_n(\omega) - \xi_n(\omega),$$

тобто $\omega \in G_{\eta_n}$, отже $G_{\zeta_n} \subset G_{\eta_n}$. З монотонності імовірності маємо продовження ланки нерівностей:

$$P(|\zeta_n - \xi_n| \geq \varepsilon/2) = P(\zeta_n - \xi_n \geq \varepsilon/2) \leq P(\eta_n - \xi_n \geq \varepsilon/2)$$

Далі врахуємо, що $|\eta_n - \xi_n| =^d \eta_n - \xi_n$ і застосуємо початковий прийом:

$$P(\eta_n - \xi_n \geq \varepsilon/2) = P(|\eta_n - \xi_n| \geq \varepsilon/2) = P(|(\eta_n - \zeta) - (\xi_n - \zeta)| \geq \varepsilon/2) \leq P(|\eta_n - \zeta| \geq \varepsilon/4) + P(|\xi_n - \zeta| \geq \varepsilon/4)$$

Залишається пригадати те, що послідовності, які обмежують $\zeta_n$, збігаються за ймовірністю до $\zeta$:

$$P(|\zeta_n - \zeta| \geq \varepsilon) \leq P(|\eta_n - \zeta| \geq \varepsilon/4) + P(|\xi_n - \zeta| \geq \varepsilon/4) + P(|\xi_n - \zeta| \geq \varepsilon/2) \to 0, \ n \to \infty$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ обирали довільне, то маємо збіжність за ймовірністю послідовності $\{\zeta_n\}_{n \geq 1}$ до $\zeta$.

**Альтернативний спосіб.** Для простоти вважаємо, що $\xi_n(\omega) \leq \zeta_n(\omega) \leq \eta_n(\omega)$ для всіх $\omega \in \Omega$ (доведення неважко адаптувати для $\omega \in \tilde{\Omega}$, $P(\tilde{\Omega}) = 1$). Введемо випадкову подію

$$A(\eta, \varepsilon) := \{\omega : |\eta(\omega) - \zeta(\omega)| \geq \varepsilon\}$$

Для довільного $\varepsilon > 0$, беремо будь-яку $\omega \in A(\zeta_n, \varepsilon)$. Тоді

$$\xi_n(\omega) \leq \zeta_n(\omega) \leq \zeta(\omega) - \varepsilon \text{ або } \zeta(\omega) + \varepsilon \leq \zeta_n(\omega) \leq \eta_n(\omega)$$

Звідси бачимо, що $\omega \in A(\xi_n, \varepsilon)$ та $\omega \in A(\eta_n, \varepsilon)$, тобто $A(\zeta_n, \varepsilon) \subset A(\xi_n, \varepsilon) \cup A(\eta_n, \varepsilon)$. З монотонності, напівадитивності імовірності та збіжності $\xi_n$, $\eta_n$ маємо

$$P(|\zeta_n - \zeta| \geq \varepsilon) = P(A(\zeta_n, \varepsilon)) \leq P(A(\xi_n, \varepsilon)) + P(A(\eta_n, \varepsilon)) \to 0, \ n \to +\infty$$

Знову ж таки, вибір $\varepsilon > 0$ був довільним, власне знову отримали збіжність за ймовірністю цільової послідовності.

## 2.4 Задача 4 (Про метризацію простору випадкових величин)

Нехай $\xi$, $\eta$ є випадковими величинами. Визначимо функцію

$$\rho(\xi, \eta) = E[1 - \exp(-|\xi - \eta|)].$$

1. Переконатися, що $\rho$ є напів-метрикою у просторі випадкових величин $L_0$,
2. Показати, що $\rho(\xi_n, \xi) \to 0$ тоді і тільки тоді, коли $\xi_n \to^P \xi$,
3. Нехай $L_\rho$ є множиною класів еквівалентності з $L_0$ згідно $\rho$ (тобто $\xi \sim \eta \Leftrightarrow \rho(\xi, \eta) = 0$). Довести, що метричний простір $(L_\rho, \rho)$ є повним.

**Розв'язання.**

Спочатку покажемо, що $\rho$ задає напів-метрику:

1. $\rho(\xi, \eta) = E[1 - \exp(-|\xi - \eta|)] \geq E[1 - \exp(-0)] = 0$. Якщо $\rho(\xi, \eta) = 0$, то $1 - \exp(-|\xi - \eta|) = 0$ м.н. (пригадайте задачу з дз на випадкові величини, інакше переконайтесь зараз), а звідси вже $\xi = \eta$ м.н.
2. Неважко побачити, що $\rho(\xi, \eta) = \rho(\eta, \xi)$.
3. Щоб довести нерівність трикутника, досить показати субадитивність $h(x) = 1 - \exp(-x)$. Для цього побачимо, що для $h''(x) = \exp(-x) \geq 0$ для всіх $x \geq 0$, тобто $h(x)$ є опуклою вгору функцією на $[0, +\infty)$. Далі, для довільних $x, y \in (0, +\infty)$ маємо

$$h(x) + h(y) = h\left((x+y)\frac{x}{x+y} + 0 \cdot \frac{y}{x+y}\right) + h\left((x+y)\frac{y}{x+y} + 0 \cdot \frac{x}{x+y}\right) \geq$$
$$\geq |h(0) = 0| \geq \frac{x}{x+y}h(x+y) + \frac{y}{x+y}h(x+y) = h(x+y).$$

   Тобто $h(x)$ субадитивна. Звідси та з зростання $h(x)$ отримаємо, що для довільних випадкових величин $\xi$, $\eta$, $\zeta$ виконується

$$\rho(\xi, \eta) = h(|\xi - \eta|) \leq h(|\xi - \zeta| + |\zeta - \eta|) \leq h(|\xi - \zeta|) + h(|\zeta - \eta|) = \rho(\xi, \zeta) + \rho(\zeta, \eta)$$

   Нерівність трикутника показали. З отриманих вище результатів маємо, що $\rho$ справді є напів-метрикою (для того, щоб $\rho$ була метрикою, треба її задати на множині класів еквівалентностей $L_\rho$).

Тепер доведемо, що умова $\rho(\xi_n, \xi) \to 0$ є необхідною та достатньою, щоб $\xi_n$ збігалася за ймовірінстю до $\xi$.

Припустимо, що $\rho(\xi_n, \xi) \to 0$ при $n \to \infty$. Оскільки $h(x)$ є невід'ємною та зростаючою на $[0, +\infty)$, то з нерівності Маркова отримаємо: для довільного $\varepsilon > 0$

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[h(|\xi_n - \xi|)]}{h(\varepsilon)} = \frac{\rho(\xi_n, \xi)}{h(\varepsilon)} \to 0,\ n \to \infty$$

З довільності взятого $\varepsilon$ отримали $\xi_n \to^P \xi$.

Навпаки, тепер припустимо що $\xi_n \to^P \xi$ при $n \to +\infty$. Тоді $h(|\xi_n - \xi|) \to^P 0$ при $n \to +\infty$: це миттєво випливає з теореми неперервності або лобової перевірки для всіх $\varepsilon > 0$

$$P(h(|\xi_n - \xi|) \geq \varepsilon) = P(|\xi_n - \xi| \geq h^{-1}(\varepsilon)) \to 0,\ n \to \infty.$$

Тепер побачимо, що $h(|\xi_n - \xi|) \leq 1$ майже напевно для всіх $n \geq 1$, причому $E[1] = 1 < \infty$ (очевидно). Отже, можна скористатися теоремою Лебега про мажоровану збіжність маємо

$$\rho(\xi_n, \xi) = E[h(|\xi_n - \xi|)] \to E[0] = 0,\ n \to +\infty.$$

Отже, ми довели результат в зворотній бік.

Залишається обгрунтувати повноту простору $(L_\rho, \rho)$. Нехай $\{\xi_n\}_{n\geq 1} \subset L_\rho$ є фундаментальною послідовністю, тобто

$$\rho(\xi_n, \xi_m) \to 0,\ n, m \to \infty.$$

Звідси отримаємо, що $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ фундаментальна за імовірністю (досить застосувати повторно нерівність Маркова), тобто $|\xi_n - \xi_m| \to^P 0$ при $n, m \to \infty$.

Далі відомо, що послідовність є фундаментальною за мірою тоді і лише тоді, коли вона є збіжносю за ймовірністю. Це значить, що існує така випадкова величина $\xi$, що $\xi_n \to^P \xi$. А це те саме, що $\rho(\xi_n, \xi) \to 0$.

Отже, фундаментальна в $(L_\rho, \rho)$ послідовність є збіжною в цьому просторі. З довільного вибору послідовності доводимо повноту простору.

**Коментар.** Насправді якщо знати, що наступні функції

$$\rho_1(\xi, \eta) = \frac{|\xi - \eta|}{1 + |\xi - \eta|} \text{ та } \rho_2(\xi, \eta) = E[\min(1, |\xi - \eta|)]$$

є напів-метриками (переконайтеся), збіжність за якими еквівалентна збіжності для $\rho(\xi, \eta)$ можна було б отримати через ці 'еквівалентні' напів-метрики.

$$\frac{x}{1 + x} \leq h(x) \leq \min(1, x),\ x \geq 0$$

# Література


[1] Ю. С. Мішура, К. В. Ральченко, Л. М. Сахно, Г. М. Шевченко. Випадкові процеси: теорія, статистика, застосування : підручник. - К: ВПЦ "Київський університет 2023 [Link]