Класичне означення імовірності

1 Теоретичні відомості

Стохастичний експеримент – це такий експеримент, який може мати декілька результатів (результат не можна наперед передбачити).

Найбільш 'точний' опис окремого результату стохастичного експерименту називають елементарною подією ω. Множиною всіх результатів експерименту називають простором елементарних подій Ω.

Підмножиною простору елементарних подій $A \subset \Omega$ називають випадковою подією.

Опишемо класичну модель імовірності. Нехай $|\Omega| < \infty$. Імовірністю події $A \subset \Omega$ називається число:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Інтерпретація: відношення кількості результатів, що задовольняють задану властивість до загальної кількості результатів експерименту.

Нехай $A, B \subset \Omega$ – деякі підмножини. Наведемо імовірнісний сенс операцій над ними:

- $A \cup B$ – виконуються події A або B,
- $A \cap B$ – виконуються події A та B одночасно,
- Якщо $A \cap B = \emptyset$, то події несумісні,
- Подія $\overline{A} = \Omega \setminus A$ є доповненням до події A.

Властивості класичної імовірності (окрім того що $0 \leq P(\cdot) \leq 1$):

- $P(A) = 1 - P(\overline{A})$,
- $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$,
- Якщо $A \subset B$, то $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
- Формула 'включення-виключення':

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) - \sum_{\substack{i,j \in \{1,2,\ldots,n\}, \\ i \neq j}} P(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\}, \\ i \neq j \neq k}} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(\cap_{j=1}^{n} A_j).$$

2 Задачі

2.1 Задача 1

Підкидається двічі монета зі сторонами 'Десятка' (Д) та 'Мазепа' (Д).

1. Описати простір елементарних подій.
2. Обчислити імовірність події 'Мазепа випав в усіх підкиданнях'.
3. Обчислити імовірність події 'Десятка випала принаймні один раз'.

Розв'язання

Експериментом є підкидання монетки двічі, а результатом цього експерименту – що саме випало в кожному з двох підкидань. Отже

$$\Omega = \{\text{Д}, \text{М}\}^2 = \{(\text{Д}, \text{Д}), (\text{М}, \text{Д}), (\text{Д}, \text{М}), (\text{М}, \text{М})\}$$

Всього $|\Omega| = 2 \cdot 2 = 4$ можливих результати.

Через A позначимо подію 'Мазепа випав в усіх підкиданнях':

$$A = \{(\text{М}, \text{М})\},\ |A| = 1.$$

Отже $P(A) = |A|/|\Omega| = 1/4$.

Тепер через B позначимо подію 'Десятка випала принаймні один раз':

$$B = \{(\text{Д}, \text{Д}), (\text{М}, \text{Д}), (\text{Д}, \text{М})\},\ |B| = 3.$$

Отже $P(B) = |B|/|\Omega| = 3/4$. Або ж зауважити що $\overline{B} = A$ і $P(B) = 1 - P(A) = 3/4$.

2.2 Задача 2

Підкидається правильний гральний кубик тричі.

1. Описати простір елементарних подій.
2. Обчислити імовірність події ’Тричі випала шістка’.
3. Обчислити імовірність події ’Випала принаймні один раз шістка’.
4. Обчислити імовірність події ’Випали парні числа’.

Розв’язання

Тут експериментом вважається підкидання грального кубика тричі, результатом експерименту власне буде те що випало при кожному з підкидань:

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_k \in \{1, 2, \ldots, 6\},\ k = 1, 2, 3\},\ |\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3.$$

Через A позначимо подію ’Тричі випала шістка’:

$$A = \{(6, 6, 6)\},\ |A| = 1.$$

Отже $P(A) = |A|/|\Omega| = 1/6^3$.

Через B позначимо подію ’Випала принаймні один раз шістка’. Перейдемо до доповнення $\overline{B}$, що відповідає події ’Шістка жоден раз не випала’. Тоді

$$B = \Omega \setminus \overline{B},\ |\overline{B}| = 5^3 \Rightarrow |B| = |\Omega| - |\overline{B}| = 6^3 - 5^3$$

Отже $P(B) = (|\Omega| - |\overline{B}|)/|\Omega| = (6^3 - 5^3)/6^3 = 91/6^3$.

Можна, звісно, в лоб піти. Введемо $B_k \sim$ ’шістка випала k разів’

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$$

Кількість ситуацій, що задовольняють:

- B_1, становить $|B_1| = C_3^1 \cdot 5^2 = 3 \cdot 25 = 75$,
- B_2, становить $|B_2| = C_3^2 \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15$,
- B_3, становить $|B_3| = 1$.

Отже $P(B) = (75 + 15 + 1)/6^3 = 91/6^3$, що власне й очікувалося.

Імовірність для останнього пункту: парних чисел на кубику всього 3, звідси маємо імовірність $P(C) = 3^3/6^3 = 1/2$, де подія C відповідає умові останнього пункту.

2.3 Задача 3

Маємо колоду з 36 карт, яка містить по 9 карт кожної масті. У кожній масті є туз.

З цієї колоди послідовно витягуються дві карти.

1. Описати простір елементарних подій.
2. Обчислити імовірність події 'Витягнуто два тузи'.
3. Обчислити імовірність події 'Витягнуто дві карти масті червоного кольору'.
4. Розглянути попередні пункти, вважаючи що витягуються навмання дві карти за раз.

Розв'язання

Для спрощення через $K = \{1, \ldots, 36\}$ позначимо множину карт. Опишемо простір елементарних подій:

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \neq x_2,\ x_j \in K\},\ |\Omega| = 36 \cdot 35.$$

Через A позначимо подію 'Витягнуто два тузи'. Отже послідовно виймається по карті з множини тузів, тому кількість результатів дорівнює $|A| = 4 \cdot 3$. Отже

$$P(A) = |A|/|\Omega| = (4 \cdot 3)/(36 \cdot 35)$$

Через B позначимо подію 'Витягнуто дві карти масті червоного кольору'. Всього дві масті червоного кольору: бубна та чирва. Всього карт 18. Отже з цих 18 карт послідовно виймається по карті, тому кількість результатів дорівнює $|B| = 18 \cdot 17$. Отже

$$P(B) = |B|/|\Omega| = (18 \cdot 17)/(36 \cdot 35)$$

Тепер змінимо хід експерименту, вважаючи що за раз навмання витягуються дві карти. Тоді

$$\Omega = \{\{x_1, x_2\} \mid \{x_1, x_2\} \subset K\},\ |\Omega| = C_{36}^2.$$

Відповідно для A та B ми маємо набір підмножин, тому кількість результатів замінюється на C_4^2 та C_{18}^2 відповідно, тому

$$P(A) = \frac{C_4^2}{C_{36}^2}, P(B) = \frac{C_{18}^2}{C_{36}^2}.$$

2.4 Задача 4

З послідовності чисел $\{1, \ldots, n\}$ вибирають навмання k різних чисел. Яка ймовірність того, що:

1. кожне з вибраних чисел кратне даному натуральному числу p,
2. кожне з вибраних чисел кратне хоча б одному з двох взаємно простих чисел p і q
3. серед вибраних чисел є хоча б одне кратне p?

Розв'язання

По суті результатом експерименту є підмножина $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ з k елементів. Опишемо простір елементарних подій:

$$\Omega = \{I \subset \{1, 2, \ldots, n\} \mid |I| = k\},$$

при цьому зрозуміло, що $|\Omega| = C_n^k$.

Розпочнемо з першого пункту задачі. Позначимо випадкову подію, що відповідає умові, через A_p. Кількість елементів з $\{1, 2, \ldots, n\}$ що діляться на p дорівнює $[n/p]$ (можна отримати через нерівність $x = p \cdot x_0 \leq n$ відносно цілого x_0).

Отже, кількість способів утворити підмножину з k елементів із заданою властивістю становить $C_{[n/p]}^k$, звідси

$$P(A_p) = \frac{C_{[n/p]}^k}{C_n^k}$$

Перейдемо до другого пункту задачі. Позначимо відповідну випадкову подію через $B_{p,q}$. По суті $B_{p,q} = A_p \cup A_q$. Тоді, врахувавши перетин подій, маємо

$$P(B_{p,q}) = P(A_p \cup A_q) = P(A_p) + P(A_q) - P(A_p \cap A_q) = \frac{C_{[n/p]}^k + C_{[n/q]}^k - C_{[n/(pq)]}^k}{C_n^k},$$

де скористалися результатом попереднього пункту і тим, що $A_p \cap A_q = A_{pq}$.

В останньому пункті легше перейти до обчислення імовірності доповнення до події. Якщо C_p – випадкова подія, що відповідає умові цього пункту, тоді $\overline{C}_p$ інтерпретується як 'жодне з чисел не є кратним p'. Кількість чисел з $\{1, 2, \ldots, n\}$, не кратних p, становить $n - [n/p]$. Отже

$$P(C_p) = 1 - P(\overline{C}_p) = 1 - \frac{C_{n-[n/p]}^k}{C_n^k}$$

2.5 Задача 5

Написано n листів, але адреси на конвертах написані навмання. Знайдіть:

1. ймовірність того, що хоча б один адресат отримає призначений для нього лист,
2. ймовірність того, що m адресатів отримають призначені їм листи.

Розв'язання

По суті в якості простору елементарних подій Ω можна розглянути всі перестановки на множині $\{1, 2, \dots, n\}$ (взаємно-однозначні відповідності між листами та отримувачами):

$$\Omega = \{\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\} \mid \sigma - \text{бієкція}\},\ |\Omega| = n!$$

Розв'яжемо перший пункт задачі. Введемо наступні випадкові події:

$$A_j \sim \text{'j-ий адресат отримав свій лист'},\ j = \overline{1, n}.$$

Нехай A – це випадкова подія, що цікавить в цьому пункті. Тоді $A = \cup_{j=1}^{n} A_j$.

Для підрахунку $P(A)$ скористаємося формулою включення-виключення:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) - \sum_{\substack{i,j \in \{1,2,\dots,n\},\\ i \neq j}} P(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,k \in \{1,2,\dots,n\},\\ i \neq j \neq k}} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(\cap_{j=1}^{n} A_j). \tag{1}$$

Знайдемо імовірності у правій частині рівності.

Якщо подія A_j виконується, то по суті в нас є фіксована точка у перестановці, і є свобода у перестановці інших $(n-1)$ точок. Отже $|A_j| = (n-1)!$ й звідси

$$P(A_j) = \frac{(n-1)!}{n!},\ j = \overline{1, n}.$$

Аналогічним чином отримаємо імовірність перетину кількох подій A_{j_k}. Дійсно, нехай $\cap_{k=1}^{m} A_{j_k}$ виконується, тоді у перестановці фіксованих точок m, переставляти лишається ті що лишилися, тобто $n - m$. Отже $| \cap_{k=1}^{m} A_{j_k}| = (n-m)!$ та

$$P(\cap_{k=1}^{m} A_{j_k}) = \frac{(n-m)!}{n!},\ j = \overline{1, n},\ m = \overline{1, n}.$$

Підставимо отриманий результат в (1):

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n-1)!}{n!} - \sum_{\substack{i,j \in \{1,2,\dots,n\},\\ i \neq j}} \frac{(n-2)!}{n!} + \sum_{\substack{i,j,k \in \{1,2,\dots,n\},\\ i \neq j \neq k}} \frac{(n-3)!}{n!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} =$$

$$= C_n^1 \frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3 \frac{(n-3)!}{n!} - \dots + (-1)^{n-1} C_n^n \frac{1}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k \frac{(n-k)!}{n!}$$

Перейдемо до другого пункту задачі. Через B_m позначимо випадкову подію, що цікавить в цьому пункті. По суті ми спочатку перебираємо m з n адресатів, яким надійшов потрібний лист, а далі треба не забути врахувати тих адресатів, яким листи надійшли невірні. Тобто

$$P(B_m) = \sum_{\substack{I\subset\{1,2,\dots,n\},\\ |I|=m}} P((\cap_{i\in I}A_i)\cap(\cap_{j\notin I}\overline{A}_j)) \tag{2}$$

Обчислення $P((\cap_{i\in I}A_i)\cap(\cap_{j\notin I}\overline{A}_j))$ можна провести аналогічні до результату першого пункту. Нехай $A_I = \cap_{i\in I}A_i$. Спочатку побачимо, що

$$A_I\cap(\cap_{j\notin I}\overline{A}_j) = A_I\cap(\Omega\setminus\cup_{j\notin I}A_j) = (A_I\cap\Omega)\setminus(A_I\cap(\cup_{j\notin I}A_j))$$

Далі скористаємося формулою включення-виключення для $A_I\cap(\cup_{j\notin I}A_j) = \cup_{j\notin I}(A_j\cap A_I)$:

$$P(\cup_{j\notin I}(A_j\cap A_I)) = \sum_{k=1}^{n-m}(-1)^{k-1}C_{n-m}^k\frac{(n-m-k)!}{n!}$$

Імовірність події A_I відома з попереднього пункту. Поєднавши результати, маємо:

$$P(A_I\cap(\cap_{j\notin I}\overline{A}_j)) = P((A_I\cap\Omega)\setminus(A_I\cap(\cup_{j\notin I}A_j))) = P(A_I) - P(A_I\cap(\cup_{j\notin I}A_j)) =$$
$$= \frac{(n-m)!}{n!} - \sum_{k=1}^{n-m}(-1)^{k-1}C_{n-m}^k\frac{(n-m-k)!}{n!}$$

Підставимо отриману імовірність у (2):

$$P(B_m) = \sum_{\substack{I\subset\{1,2,\dots,n\},\\ |I|=m}}\left(\frac{(n-m)!}{n!} - \sum_{k=1}^{n-m}(-1)^{k-1}C_{n-m}^k\frac{(n-m-k)!}{n!}\right) =$$
$$= C_n^m\cdot\left(\frac{(n-m)!}{n!} - \sum_{k=1}^{n-m}(-1)^{k-1}C_{n-m}^k\frac{(n-m-k)!}{n!}\right) =$$
$$= \frac{1}{m!}\left(1-\sum_{k=1}^{n-m}(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}\right) = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\frac{1}{k!}$$

Задача розв'язана.

Також зауважимо, що при $n\to\infty$:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k\frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k!} = -\left(-1+1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}\right)\to 1-\frac{1}{e}$$
$$P(B_m) = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\frac{1}{k!}\to\frac{1}{m!e}$$