Завдання №2.1
зі статистики випадкових процесів

Горбунов Даніел Денисович
1 курс магістратури
група "Прикладна та теоретична статистика"
Варіант №4

8 квітня 2022 р.

Вступ.

У даній роботі побудовано найпростіші оцінки для параметрів зсуву та дифузії в елементарній моделі лінійної регресії. Досліджено властивості побудованих оцінок, результати підтверджено за допомогою комп'ютерного моделювання процесу.

Хід роботи.

Постановка задачі.

Розглянемо модель вигляду

$$X_n = x_0 + \theta b_n + \sigma R_n,\ b_0 := 0,\ b_n := 5n + \frac{1}{n},\ n \geq 1,\ x_0 = -2,\ \theta = 0.4,\ \sigma = 2.3$$

у якій $R_n = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j$, де $\varepsilon_j \sim N(0,1),\ j \geq 1$ – незалежні. Написати програму для обчислення:

1. Оцінки параметра θ за останнім спостереженням;
2. ОМНК параметра θ при відомому x_0;
3. ОМНК параметрів x_0 та θ;
4. Оцінки параметра σ (при відомому θ).

Згенерувати 1000 реалізацій моделі та знайти середні та дисперсії оцінок для n = 50, 100, 200, 500, 1000. Порівняти якість різних оцінок параметра θ. Чи підтверджують одержані результати консистентність оцінок? Виконати те саме завдання для випадку, коли величини $\{\varepsilon_j,\ j \geq 1\}$ — незалежні та рівномірно розподілені відрізку $[-1, 1]$.

Теоретична частина.

Оцінка зсуву за останнім спостереженням.

Нехай спостерігаються перші n значень процесу X_n та $X(0) = x_0$ – відоме. Знайдемо оцінку параметра зсуву θ за останнім спостереженням:

$$X_n = x_0 + \theta b_n + \sigma R_n \Rightarrow \hat{\theta}_n^{(1)} = \frac{X_n - x_0}{b_n}$$

Чи є побудована оцінка незміщеною? Перезапишемо її у вигляді

$$\hat{\theta}_n^{(1)} = \frac{X_n - x_0}{b_n} = \frac{x_0 + \theta b_n + \sigma R_n - x_0}{b_n} = \theta + \sigma \cdot \frac{R_n}{b_n}$$

Обчислимо її математичне сподівання:

$$\mathbb{E}\left[\hat{\theta}_n^{(1)}\right] = \theta + \sigma \cdot \frac{\mathbb{E}\left[R_n\right]}{b_n} = \theta$$

Отже оцінка є справді незміщеною для θ. Обчислимо дисперсію $\hat{\theta}_n^{(1)}$:

$$\mathbb{D}\left[\hat{\theta}_n^{(1)}\right] = \mathbb{D}\left[\theta + \sigma \cdot \frac{R_n}{b_n}\right] = \sigma^2 \cdot \frac{\mathbb{D}\left[R_n\right]}{b_n^2} = \frac{\sigma^2}{b_n^2} \cdot \sum_{j=1}^{n} \mathbb{D}\left[\varepsilon_j\right] = \frac{\sigma^2}{b_n^2} \cdot n\mathbb{D}\left[\varepsilon_1\right] = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{b_n^2} \cdot n, & \varepsilon_1 \sim N(0,1) \\ \frac{\sigma^2}{b_n^2} \cdot \frac{n}{3}, & \varepsilon_1 \sim U[-1,1] \end{cases}, n \geq 1$$

Чи є $\hat{\theta}_n^{(1)}$ конзистентною? Зауважимо, що

$$|b_n| = b_n = 5n + \frac{1}{n} > 5n, \ \forall n \geq 1$$

А звідси та підсиленого закону великих чисел маємо, що

$$0 \leq \left|\frac{R_n}{b_n}\right| \leq \frac{1}{5} \cdot \left|\frac{R_n}{n}\right| \to^{P1} 0, \ n \to +\infty \Rightarrow \frac{R_n}{b_n} \to^{P1} 0, \ n \to +\infty$$

А тому $\hat{\theta}_n^{(1)}$ – строго конзистентна оцінка. Чи є $\hat{\theta}_n^{(1)}$ асимптотично нормальною? Потрібно довести (або спростити припущення про) існування нормуючої послідовності $\{\varphi_n, \ n \geq 1\}$, за якою справедлива збіжність за розподілом вигляду:

$$\varphi_n \cdot \left(\hat{\theta}_n^{(1)} - \theta\right) \to^{D} \xi_\infty \sim N(0, \mathbb{D}\left[\xi_\infty\right]), \ n \to +\infty$$

Випадкова величина у лівій частині останнього виразу має простіший запис:

$$\varphi_n \cdot \left(\hat{\theta}_n^{(1)} - \theta\right) = \sigma \cdot \frac{\varphi_n}{b_n} \cdot R_n$$

Зауважимо, що $1/b_n \to 0$ при $n \to +\infty$, тому якщо покласти $\varphi_n := b_n \cdot (\sqrt{n\mathbb{D}\left[\varepsilon_1\right]})^{-1}$, то може щось і хороше вийти[1]. У такому разі нормована оцінка матиме вигляд:

$$\sigma \cdot \frac{R_n}{\sqrt{n\mathbb{D}\left[\varepsilon_1\right]}} = \sigma \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j}{\sqrt{n\mathbb{D}\left[\varepsilon_1\right]}}$$

Похибки є н.о.р., причому мають скінченне мат сподівання та дисперсію. Тому виконується класична ЦГТ, і тому нормована оцінка слабко збігається до нормально розподіленої величини:

$$\varphi_n \cdot \left(\hat{\theta}_n^{(1)} - \theta\right) = \sigma \cdot \frac{R_n}{\sqrt{n\mathbb{D}\left[\varepsilon_1\right]}} \to^{D} \xi_\infty \sim N(0, \sigma^2), \ n \to +\infty$$

[1] Можна підібрати іншу сталу у нормуючої послідовності (наприклад не враховувати дисперсію однієї компоненти шуму), бо на практиці можемо і багато чого не знати про природу шуму.

Оцінка зсуву за методом найменших квадратів.

Розглянемо функціонал найменших квадратів:

$$J(\theta) = \sum_{j=1}^{n} (\Delta X_j - \theta \cdot \Delta b_j)^2 \to \min_{\theta \in \mathbb{R}}$$

Обчислимо похідну:

$$J'(\theta) = (-2) \sum_{j=1}^{n} (\Delta X_j - \theta \cdot \Delta b_j) \Delta b_j = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_n^{(2)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \Delta X_j \Delta b_j}{\sum_{j=1}^{n} (\Delta b_j)^2}$$

Чи є $\hat{\theta}_n^{(2)}$ незміщеною? Зауважимо, що прирости можна подати у вигляді:

$$\Delta X_j = X_j - X_{j-1} = x_0 + \theta b_j + \sigma(\varepsilon_j + R_{j-1}) - (x_0 + \theta b_{j-1} + \sigma R_{j-1}) = \theta \cdot \Delta b_j + \sigma \varepsilon_j$$

А тому вигляд оцінки за МНК спрощується до:

$$\hat{\theta}_n^{(2)} = \theta + \sigma \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} (\varepsilon_j \cdot \Delta b_j)}{\sum_{j=1}^{n} (\Delta b_j)^2}$$

В силу центрованості похибок ε_j маємо незміщеність:

$$\mathbb{E}\left[\hat{\theta}_n^{(2)}\right] = \theta + \sigma \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} (\mathbb{E}\left[\varepsilon_j\right] \cdot \Delta b_j)}{\sum_{j=1}^{n} (\Delta b_j)^2} = \theta$$

Чи є $\hat{\theta}_n^{(2)}$ консистентною? Зауважимо, що

$$\Delta b_j = 5 - \frac{1}{j(j-1)} > 4,\ j \geq 2$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\Delta b_j)^2 = \sum_{j=2}^{n} \left(5 - \frac{1}{j(j-1)}\right)^2 + 36 > \sum_{j=2}^{n} 16 + 36 = 16n - 16 + 36 = 16n + 20 > 16n$$

А тому з аналогічних міркувань для $\hat{\theta}_n^{(1)}$ виводимо строгу консистентність оцінки $\hat{\theta}_n^{(2)}$. Чи є $\hat{\theta}_n^{(2)}$ асимптотично нормальною оцінкою? Обчислимо дисперсію $\hat{\theta}_n^{(2)}$:

$$\mathbb{D}\left[\hat{\theta}_n^{(2)}\right] = \sigma^2 \cdot \mathbb{D}\left[\frac{\sum_{j=1}^{n} (\varepsilon_j \cdot \Delta b_j)}{\sum_{j=1}^{n} (\Delta b_j)^2}\right] = \sigma^2 \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{D}\left[\varepsilon_j\right] \cdot (\Delta b_j)^2}{\left(\sum_{j=1}^{n} (\Delta b_j)^2\right)^2} = \frac{\sigma^2 \cdot \mathbb{D}\left[\varepsilon_1\right]}{\sum_{j=1}^{n} (\Delta b_j)^2}$$

Підберемо φ_n для того, щоб виконувалася бажана збіжність. Користуючись теоремою Леві про слабку збіжність, дослідимо поведінку характеристичної функції від $\varphi_n \cdot (\hat{\theta}_n^{(2)} - \theta)$. Спочатку за припущенням про нормальність похибок:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \mathbb{E}\left[\exp\left(it\varphi_n\sigma \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} (\varepsilon_j \cdot \Delta b_j)}{\sum_{j=1}^{n} (\Delta b_j)^2}\right)\right] = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[\exp\left(i(t\varphi_n\sigma)\varepsilon_j \cdot \frac{\Delta b_j}{\sum_{j=1}^{n} (\Delta b_j)^2}\right)\right] =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \exp\left(-\frac{t^2\sigma^2(\Delta b_j)^2\varphi_n^2}{2\left(\sum_{j=1}^{n} (\Delta b_j)^2\right)^2}\right) = \exp\left(-\frac{t^2\sigma^2\varphi_n^2}{2\sum_{j=1}^{n} (\Delta b_j)^2}\right)$$

Якщо покласти φ_n так, щоб $(\varphi_n)^2 \sim \sum_{j=1}^{n} (\Delta b_j)^2$ при $n \to +\infty$, то цим і доведемо асимптотичну нормальність із заданим нормуванням. Наприклад, можна покласти $\varphi_n = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\Delta b_j)^2}$. У такому разі $\varphi_n \cdot (\hat{\theta}_n^{(2)} - \theta) \to^{D} \xi_\infty \sim N(0, \sigma^2)$.

Коли похибки мають рівномірний розподіл, то можна спробувати застосувати ЦГТ для загальної послідовності серій. Дослідимо на слабку збіжність суму:

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_{nj},\ \xi_{nj} = \varepsilon_j \cdot \Delta b_j$$

Чи є $\{\xi_{nj},\ j=\overline{1,n},\ n \geq 1\}$ стандартною послідовністю серій? Очевидно, що це не так, однак вона є загальною. Незалежність компонент випливає з умови, накладені на модель, а результати для математичних сподівань наступні:

$$\mathbb{E}\left[\xi_{nj}\right] = \mathbb{E}\left[\varepsilon_j\right] \cdot \Delta b_j = 0$$
$$\mathbb{D}\left[\xi_{nj}\right] = \mathbb{D}\left[\varepsilon_j\right] \cdot (\Delta b_j)^2 = \frac{1}{3} \cdot (\Delta b_j)^2$$

Покладемо $\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^{n} (\Delta b_k)^2}$. Перевіримо виконання умови Ляпунова для загальної схеми серій. Нехай $\delta = 2$, тоді

$$\mathbb{E}\left[|\xi_{nj}|^{2+\delta}\right] = \mathbb{E}\left[\varepsilon_j^4\right] \cdot (\Delta b_j)^4 = \int_0^1 t^4 dt \cdot (\Delta b_j)^4 = \frac{1}{5} \cdot (\Delta b_j)^4$$

Звідки маємо, що:

$$\frac{1}{\sigma_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\xi_{nj}|^{2+\delta}\right] = \frac{9}{5} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} (\Delta b_j)^4}{\left(\sum_{k=1}^{n} (\Delta b_k)^2\right)^2} = \frac{9}{5} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} (\Delta b_j)^2 \cdot (\Delta b_j)^2}{\left(\sum_{k=1}^{n} (\Delta b_k)^2\right)^2} \leq$$
$$\leq \max_{1 \leq j \leq n} (\Delta b_j)^2 \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} (\Delta b_j)^2}{\left(\sum_{k=1}^{n} (\Delta b_k)^2\right)^2} = \Delta b_1 \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} (\Delta b_k)^2} \to 0,\ n \to +\infty$$

Отже виконується умова Ляпунова для загальної схеми серій. Звідки маємо, що розподіл нормованої суми слабко збігається до стандартного нормального розподілу:

$$\varphi_n \cdot (\hat{\theta}_n^{(2)} - \theta) = \frac{\sigma}{\sigma_n} \cdot \sum_{j=1} \xi_{nj} \to^W \xi_\infty \sim N(0, \sigma^2)$$

де $\varphi_n = \sqrt{3 \cdot \sum_{j=1}^{n} (\Delta b_j)^2}$. Тобто результат більш-менш аналогічний до випадку з гауссово розподіленими похибками.

Оцінка зсуву та початкового значення процесу.

Припустимо тепер, що окрім невідомого θ стає невідомим початкове значення процесу, тобто x_0. Тоді мінімізацію функціонала МНК треба робити по двом аргументам:

$$J(x_0, \theta) = ((X_1 - x_0) - \theta \cdot b_1)^2 + \sum_{j=2}^{n} (\Delta X_j - \theta \cdot \Delta b_j)^2 \to \min_{x_0 \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}}$$

Обчислимо частинні похідні:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_0} J(x_0, \theta) = (-2) \left(((X_1 - x_0) - \theta \cdot b_1) b_1 + \sum_{j=2}^{n} (\Delta X_j - \theta \cdot \Delta b_j) \Delta b_j \right) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta} J(x_0, \theta) = (-2)((X_1 - x_0) - \theta \cdot b_1) = 0 \end{cases}$$

Розв'яжемо систему відносно невідомих параметрів.

$$\begin{cases} \sum_{j=2}^{n}(\Delta X_j \cdot \Delta b_j) = \theta \cdot \sum_{j=2}^{n}(\Delta b_j)^2 \\ x_0 = X_1 - \theta \cdot b_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\theta}_n = \dfrac{\sum_{j=2}^{n}(\Delta X_j \cdot \Delta b_j)}{\sum_{j=2}^{n}(\Delta b_j)^2} \\ \hat{x}_{0,n} = X_1 - \hat{\theta}_n \cdot b_1 \end{cases}$$

Чи є оцінка $(\hat{\theta}_n, \hat{x}_{0,n})$ незміщеною оцінкою вектора (θ, x_0)? Неважко переконатися, що це справді так, подавши оцінки у стохастичному зображенні:

$$\hat{\theta}_n = \theta + \sigma \cdot \frac{\sum_{j=2}^{n}(\varepsilon_j \cdot \Delta b_j)}{\sum_{j=2}^{n}(\Delta b_j)^2},\ \hat{x}_{0,n} = x_0 + \theta b_1 + \sigma\varepsilon_1 - \left(\theta + \sigma \cdot \frac{\sum_{j=2}^{n}(\varepsilon_j \cdot \Delta b_j)}{\sum_{j=2}^{n}(\Delta b_j)^2}\right) b_1$$

І скориставшися лінійністю математичного сподівання. З попередніх результатів (коли початкове значення було відоме) маємо, що $\hat{\theta}_n$ – строго консистентна оцінка θ, але $\hat{x}_{0,n}$ – не є строго консистентною оцінкою x_0, оскільки $\hat{x}_{0,n} = X_1 - \hat{\theta}_n \cdot b_1 \to^{P1} x_0 + \sigma\varepsilon_1$. Втім, якщо розподіл похибок симетричний, то це не буде проблемою.

Оцінка дифузії.

Припустимо, що x_0 та θ відомі, а потрібно оцінити коефіцієнт дифузії σ. Скористаємось оцінкою вигляду:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n}(\Delta X_k)^2}{n}$$

Для вивчення консистентності $\hat{\sigma}_n^2$, дослідимо на збіжність величину

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(\Delta b_k)^2}{n} \to^{?} b \in [0, +\infty),\ n \to +\infty$$

Згадаємо, що $\Delta b_1 = 5 + 1$, а при $k \geq 2$: $\Delta b_k = 5 + (\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1})$. Підставимо це у величину вище:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(\Delta b_k)^2}{n} = \frac{25n + 11 + \sum_{k=2}^{n}\left(2(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}) + (\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1})^2\right)}{n} =$$
$$= 25 + o(1) + \frac{\sum_{k=2}^{n}\left(2(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}) + (\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1})^2\right)}{n},\ n \to +\infty$$

Для дослідження на збіжність третього доданку, скористаємося теоремою Штольца. Ясно, що для $n > 1$:

$$\frac{\left(\sum_{k=2}^{n} - \sum_{k=2}^{n-1}\right)\left(2(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}) + (\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1})^2\right)}{n - (n-1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)^2 \to 0,\ n \to +\infty$$

Отже існує таке $b := 25$, що є границею вищенаведеної величини при $n \to +\infty$. Звідки виконується строга консистентність для оцінки $(\hat{\sigma}_n^2 - \theta^2 \cdot b) \cdot (\mathbb{E}\,[\varepsilon_1^2])^{-1} \to^{P1} \sigma^2$.

Практична частина.

Генерування послідовності.

Спочатку опишемо функцію, яка б повертала реалізацію випадкового процесу у вищеописаній моделі.

```
# Для повторного відтворення результатів
set.seed(0)

# Функція, яка повертає n-ий член послідовності bn.
# n - вектор з номерів, за якими потрібно обчислити ..
# .. відповідний елемент послідовності.
bn <- function(n) { ifelse(n > 0, 5 * n + 1 / n , 0) }

# Функція, яка повертає реалізацію випадкової послідовності у моделі вигляду:
# X(n) = x0 + theta * b(n) + sigma * R(n), n = 1, 2, ...
# X(0) = x0, b(0) = 0, R(n) = eps(1) + ... + eps(n), R(0) = 0, {eps(j)} - i.i.d.
# n - кількість перших n елементів послідовності (від 1 до n)
# x0 - початкове значення послідовності (в нульовий момент часу)
# theta - параметр зсуву послідовності
# sigma - параметр дифузії послідовності
# bn - перші n членів "трендової" послідовності
# eps - перші n членів "випадкової" послідовності
generate.sequence <- function(x0, theta, sigma, bn, eps)
{
  xn <- x0 + theta * bn + sigma * cumsum(eps)
  xn
}
```

Обчислення значень оцінок зсуву.

Запишемо програмну реалізацію оцінок для невідомого параметра зсуву θ:

```
# Обчислює оцінку за останнім спостереженням
theta.est.last <- function(n, xn, bn, x0)
{
  (xn[n] - x0) / bn[n]
}

# Обчислює оцінку зсуву за МНК
theta.est.ls <- function(n, xn, bn, x0)
{
  delta.b <- diff(c(0, bn))
  delta.x <- diff(c(x0, xn))
  sum(delta.x * delta.b) / sum(delta.b^2)
}
```

Обчислення значень оцінок зсуву та початкового значення.

Запишемо програмну реалізацію оцінок для початкового значення x_0 та зсуву θ:

```
# Обчислює оцінку зсуву та початкового значення за МНК
theta.est.ls.2d <- function(xn, bn)
{
  delta.b <- diff(bn)
  delta.x <- diff(xn)
  theta.ls <- sum(delta.x * delta.b) / sum(delta.b^2)
  x0.est <- xn[1] - theta.ls * bn[1]
  c(theta.ls, x0.est)
}
```

Обчислення значень оцінок дифузії.

Запишемо програмну реалізацію оцінки для дифузії σ:

```
# Обчислює оцінку квадрата дифузії
sigma.estim <- function(n, xn, x0)
{
  delta.x <- diff(c(x0, xn))
  sum(delta.x^2) / n
}
```

Наближене обчислення математичного сподівання та дисперсії за допомогою моделювання.

Потрібно перевірити, чи справді виконується умову строгої консистентності на практиці. Для цього будемо оцінювати математичне сподівання та дисперсію оцінки при збільшенні часу T (або кількості вузлів n в оцінці дифузії) будемо за допомогою імітаційного моделювання, а саме:

1. Згенеруємо 1000 траєкторій процесу X_n.
2. За кожною траєкторією підрахуємо значення оцінок.
3. За отриманими масивами зі значень оцінок взяти вибіркове середнє та виправлену вибіркову дисперсію.

Результати моделювання.

Спочатку наведемо таблицю з наближених значень математичного сподівання та дисперсії $\hat{\theta}_n^{(1)}$ для кожного $n = 50, 100, 200, 500, 1000$.

n	$\approx \mathbb{E}\left[\hat{\theta}_n^{(1)}\right]$	$\approx \mathbb{D}\left[\hat{\theta}_n^{(1)}\right]$	$\approx \mathbb{E}\left[\varphi_n(\hat{\theta}_n^{(1)} - \theta)\right]$	$\approx \mathbb{D}\left[\varphi_n(\hat{\theta}_n^{(1)} - \theta)\right]$
50	0.4029626	0.0041345842	0.10475291	5.169057
100	0.3974145	0.0021961378	-0.12927640	5.490564
200	0.4017333	0.0010697189	0.12256198	5.348648
500	0.3998398	0.0004004294	-0.01790918	5.005375
1000	0.3996378	0.0001935279	-0.05727535	4.838199

Табл. 1: Наближені значення для числових характеристик (зліва направо) оцінки $\hat{\theta}_n^{(1)}$: мат. сподівання, дисперсія, зміщеність, асимптотична дисперсія. Похибки мають гауссів розподіл.

n	$\approx \mathbb{E}\left[\hat{\theta}_n^{(1)}\right]$	$\approx \mathbb{D}\left[\hat{\theta}_n^{(1)}\right]$	$\approx \mathbb{E}\left[\varphi_n(\hat{\theta}_n^{(1)} - \theta)\right]$	$\approx \mathbb{D}\left[\varphi_n(\hat{\theta}_n^{(1)} - \theta)\right]$
50	0.3987917	1.330174e-03	-0.074001359	4.988951
100	0.4002067	6.926136e-04	0.017904241	5.194810
200	0.3996321	3.588634e-04	-0.045063899	5.383005
500	0.3998206	1.347995e-04	-0.034742586	5.054990
1000	0.4000193	6.805658e-05	0.005294381	5.104246

Табл. 2: Наближені значення для числових характеристик (зліва направо) оцінки $\hat{\theta}_n^{(1)}$: мат. сподівання, дисперсія, зміщеність, асимптотична дисперсія. Похибки рівномірно розподілені.

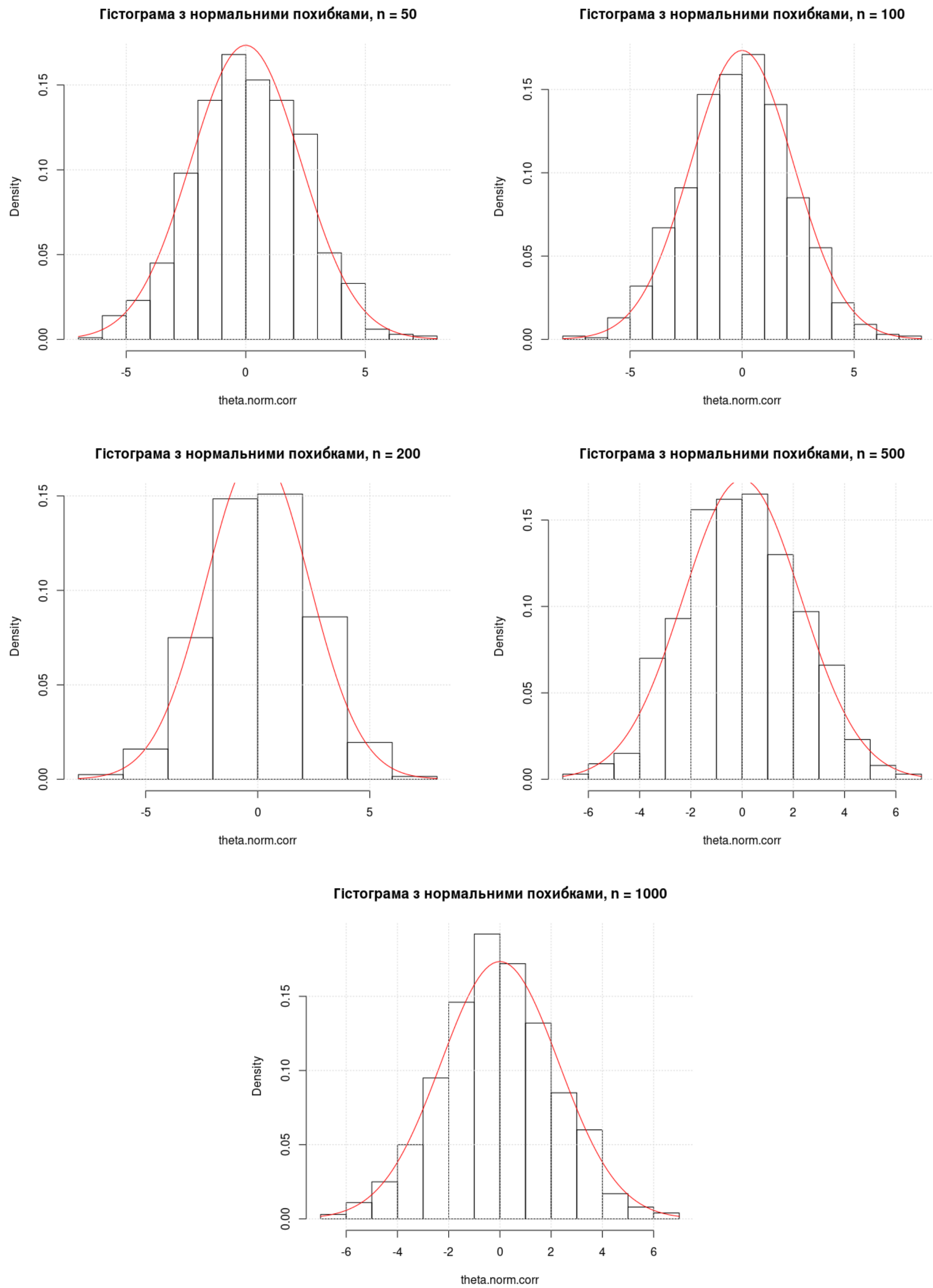

Рис. 1: Гістограми нормованої оцінки $\hat{\theta}_n^{(1)}$ з $\varepsilon_j \sim N(0,1)$.

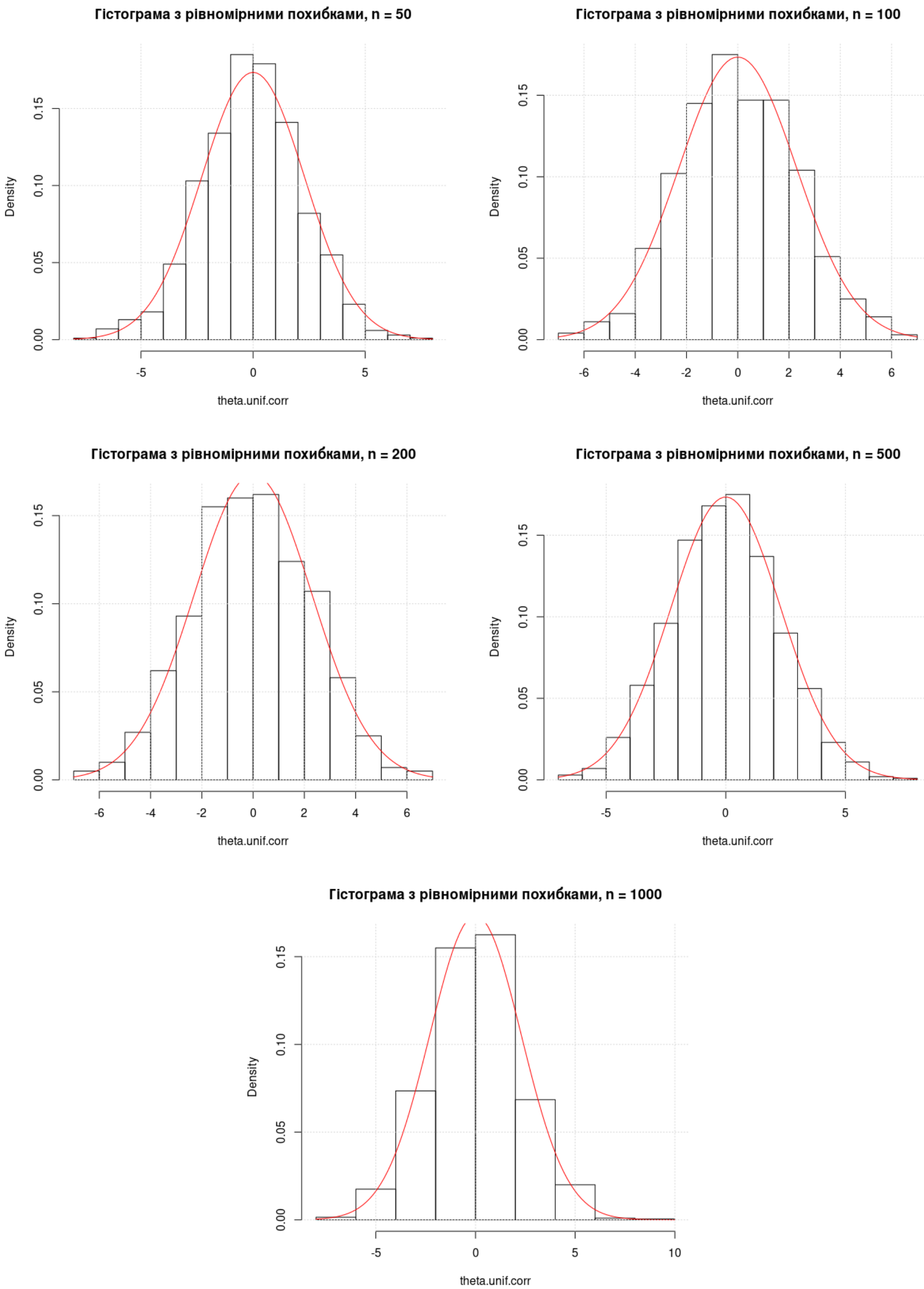

Рис. 2: Гістограми нормованої оцінки $\hat{\theta}_n^{(1)}$ з $\varepsilon_j \sim U[-1, 1]$.

Тепер покажемо таблицю з наближених значень математичного сподівання та дисперсії $\hat{\theta}_n^{(2)}$ для кожного $n = 50, 100, 200, 500, 1000$.

n	$\approx \mathbb{E}\left[\hat{\theta}_n^{(2)}\right]$	$\approx \mathbb{D}\left[\hat{\theta}_n^{(2)}\right]$	$\approx \mathbb{E}\left[\varphi_n(\hat{\theta}_n^{(2)} - \theta)\right]$	$\approx \mathbb{D}\left[\varphi_n(\hat{\theta}_n^{(2)} - \theta)\right]$
50	0.4029792	0.0041339739	0.10539322	5.173626
100	0.3974462	0.0021925716	-0.12772320	5.484477
200	0.4017066	0.0010699897	0.12069276	5.351382
500	0.3998557	0.0004001905	-0.01613129	5.002906
1000	0.3996374	0.0001934757	-0.05733535	4.837143

Табл. 3: Наближені значення для числових характеристик (зліва направо) оцінки $\hat{\theta}_n^{(2)}$: мат. сподівання, дисперсія, зміщеність, асимптотична дисперсія. Похибки мають гауссів розподіл.

n	$\approx \mathbb{E}\left[\hat{\theta}_n^{(2)}\right]$	$\approx \mathbb{D}\left[\hat{\theta}_n^{(2)}\right]$	$\approx \mathbb{E}\left[\varphi_n(\hat{\theta}_n^{(2)} - \theta)\right]$	$\approx \mathbb{D}\left[\varphi_n(\hat{\theta}_n^{(2)} - \theta)\right]$
50	0.3988645	1.330546e-03	-0.069579025	4.995494
100	0.4001860	6.950400e-04	0.016111248	5.215698
200	0.3996344	3.590863e-04	-0.044779718	5.387738
500	0.3998223	1.348560e-04	-0.034422750	5.057629
1000	0.4000217	6.798773e-05	0.005931668	5.099345

Табл. 4: Наближені значення для числових характеристик (зліва направо) оцінки $\hat{\theta}_n^{(2)}$: мат. сподівання, дисперсія, зміщеність, асимптотична дисперсія. Похибки рівномірно розподілені.

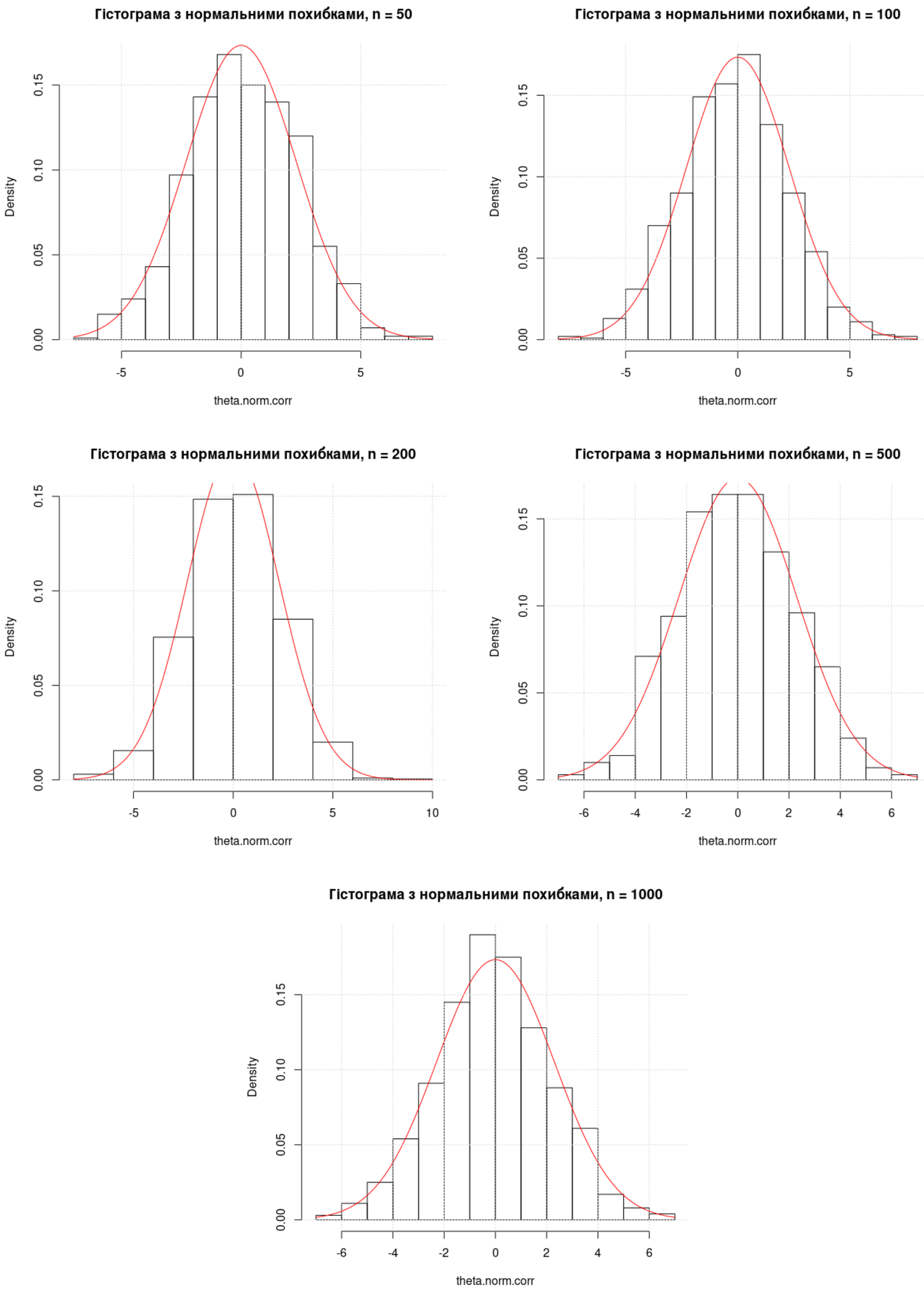

Рис. 3: Гістограми нормованої оцінки $\hat{\theta}_n^{(2)}$ з $\varepsilon_j \sim N(0,1)$.

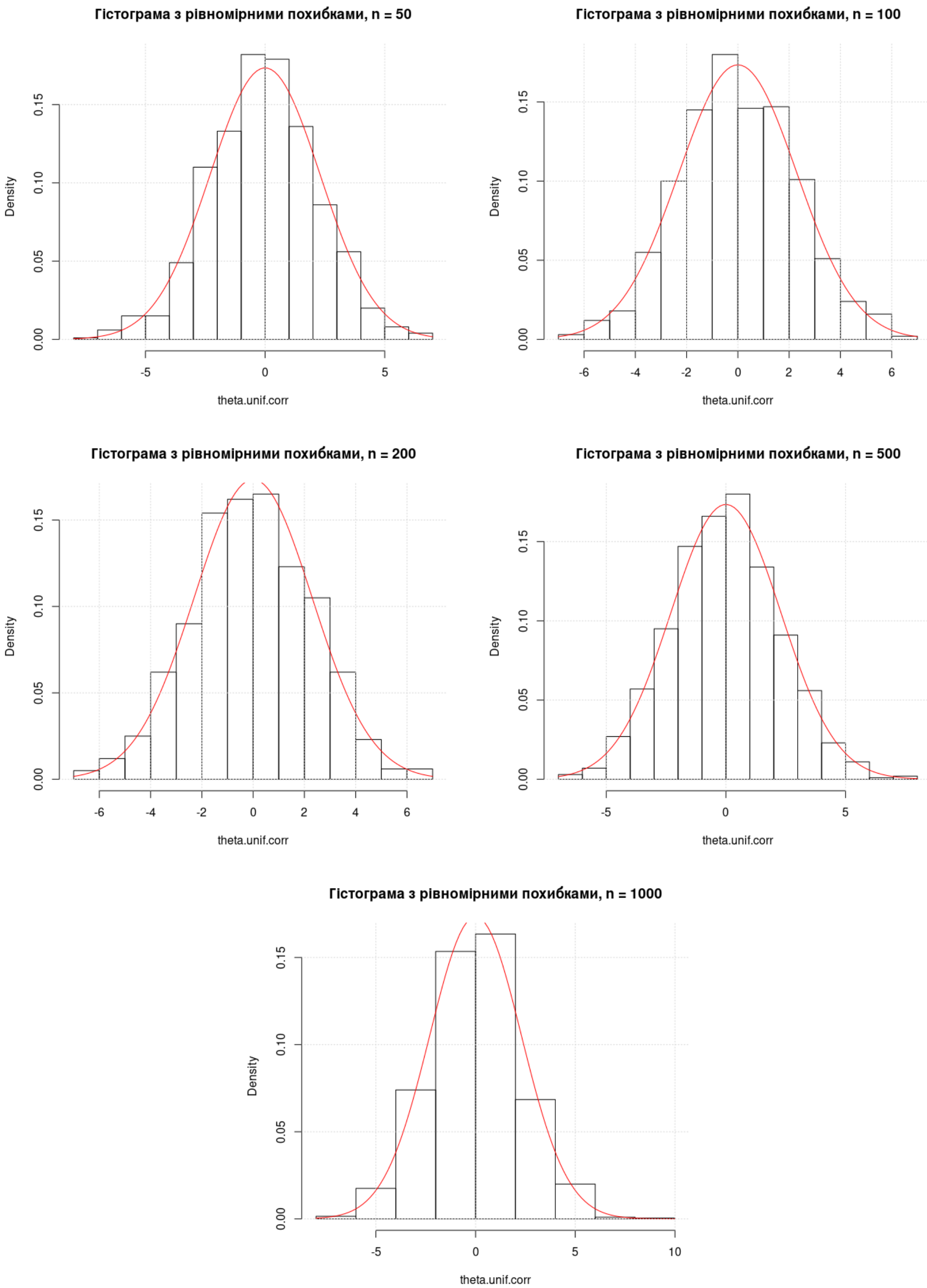

Рис. 4: Гістограми нормованої оцінки $\hat{\theta}_n^{(2)}$ з $\varepsilon_j \sim U[-1,1]$.

Розглянемо наближені значення математичного сподівання та дисперсії $\hat{\theta}_n$ та $\hat{x}_{0,n} - X_1$:

n	$\approx \mathbb{E}\left[\hat{\theta}_n\right]$	$\approx \mathbb{D}\left[\hat{\theta}_n\right]$
50	0.4029499	0.0042479934
100	0.3972572	0.0022399048
200	0.4018528	0.0010742795
500	0.3998001	0.0004021477
1000	0.3996354	0.0001935486

n	$\approx \mathbb{E}\left[\hat{\theta}_n\right]$	$\approx \mathbb{D}\left[\hat{\theta}_n\right]$
50	0.3985317	1.370791e-03
100	0.4002996	6.927884e-04
200	0.3996523	3.578801e-04
500	0.3998241	1.352427e-04
1000	0.4000162	6.837052e-05

Табл. 5: Наближені значення для числових характеристик (зліва направо) оцінки $\hat{\theta}_n$: мат. сподівання, дисперсія. Похибки нормально (зліва) та рівномірно (справа) розподілені.

n	$\approx \mathbb{E}\left[\hat{x}_{0,n} - X_1\right]$	$\approx \mathbb{D}\left[\hat{x}_{0,n} - X_1\right]$
50	-2.417700	0.15292776
100	-2.383543	0.08063657
200	-2.411117	0.03867406
500	-2.398801	0.01447732
1000	-2.397813	0.00696775

n	$\approx \mathbb{E}\left[\hat{x}_{0,n} - X_1\right]$	$\approx \mathbb{D}\left[\hat{x}_{0,n} - X_1\right]$
50	-2.391190	0.049348479
100	-2.401798	0.024940381
200	-2.397914	0.012883684
500	-2.398944	0.004868736
1000	-2.400097	0.002461339

Табл. 6: Наближені значення для числових характеристик (зліва направо) величини $\hat{x}_{0,n} - X_1$: мат. сподівання, дисперсія. Похибки нормально (зліва) та рівномірно (справа) розподілені.

Залишається продемонструвати наближені значення для $(\sigma_n^2 - \theta^2 \cdot b) \cdot (\mathbb{E}\left[\varepsilon_1^2\right])^{-1}$:

n	$\approx \mathbb{E}\left[(\sigma_n^2 - \theta^2 \cdot b) \cdot (\mathbb{E}\left[\varepsilon_1^2\right])^{-1}\right]$	$\approx \mathbb{D}\left[(\sigma_n^2 - \theta^2 \cdot b) \cdot (\mathbb{E}\left[\varepsilon_1^2\right])^{-1}\right]$
50	5.383957	2.7264187
100	5.216669	1.3538800
200	5.307990	0.7105780
500	5.295178	0.2805996
1000	5.275644	0.1333848

n	$\approx \mathbb{E}\left[(\sigma_n^2 - \theta^2 \cdot b) \cdot (\mathbb{E}\left[\varepsilon_1^2\right])^{-1}\right]$	$\approx \mathbb{D}\left[(\sigma_n^2 - \theta^2 \cdot b) \cdot (\mathbb{E}\left[\varepsilon_1^2\right])^{-1}\right]$
50	5.262328	5.2927221
100	5.291218	2.7003897
200	5.272941	1.3832875
500	5.289135	0.5320027
1000	5.285688	0.2712082

Табл. 7: Наближені значення для числових характеристик (зліва направо) нормованої оцінки $\hat{\sigma}_n^2$: мат. сподівання, дисперсія. Похибки нормально (зверху) та рівномірно (знизу) розподілені.

Висновки.

Грубо кажучи, теорія узгодилася з практикою. Те, що хотіли від оцінок, те й працює.