

Завдання №2.2

зі статистики випадкових процесів

Горбунов Даніел Денисович
1 курс магістратури
група "Прикладна та теоретична статистика"
Варіант №4

4 березня 2022 р.

Вступ.

У даній роботі розроблені програми для обчислення значень оцінок зсуву та дифузії у лінійній моделі з вінерівським шумом. Перевірено асимптотичні властивості оцінок.

Хід роботи.

Постановка задачі.

Розглянемо модель вигляду

$$X_t = x_0 + \theta f(t) + \sigma W_t,$$

де $W = \{W_t, t \geq 0\}$ – вінерівський процес. Функція $f(t) = t + \sin(2t)$ вважається відомою, $x_0 = 3$. Невідомими вважаються параметри $\theta = 4$, $\sigma = 3$. Розробити програму для знаходження оцінок параметрів θ та σ за спостереженнями траєкторії розв'язку X на відрізку $[0, T]$, у якій для параметра θ реалізувати дві оцінки: оцінку за останнім спостереженням та ОМНК. Змоделювати 1000 траєкторій процесу X , знайти середні та дисперсії оцінок для $T = 10, 50, 100, 200$. Результати оформити у вигляді таблиці. Порівняти якість двох оцінок для параметра θ . Чи підтверджують одержані результати конзистентність оцінок?

Теоретична частина.

Оцінка зсуву за останнім спостереженням.

Оцінка за останнім спостереженням має вигляд:

$$\hat{\theta}_T^{(1)} = \frac{X_T}{f(T)} = \frac{x_0}{f(T)} + \theta + \sigma \cdot \frac{W_T}{f(T)}$$

Чи є $\hat{\theta}_T^{(1)}$ строго конзистентною оцінкою параметра зсуву? Зауважимо, що

$$|f(T)| = |T + \sin(2T)| = T + \sin(2T) \geq T - 1 \geq \varepsilon T, \quad T \geq T_0 = T_0(\varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, 1)$$

А тому оцінка за останнім спостереженням є строго конзистентною оцінкою зсуву. Оцінка є асимптотично незміщеною:

$$\mathbb{E} \left[\hat{\theta}_T^{(1)} \right] = \frac{x_0}{f(T)} + \theta \rightarrow \theta, \quad T \rightarrow +\infty$$

Оскільки f необмежена зверху. Чи буде $\hat{\theta}_T^{(1)}$ асимптотично нормальною оцінкою? Розглянемо

$$\varphi_T \cdot (\hat{\theta}_T^{(1)} - \theta) = \varphi_T \cdot \left(\frac{x_0}{f(T)} + \sigma \cdot \frac{W_T}{f(T)} \right)$$

Поклавши $\varphi_T = f(T)/\sqrt{T}$, маємо

$$\varphi_T \cdot (\hat{\theta}_T^{(1)} - \theta) = \frac{x_0}{\sqrt{T}} + \sigma \cdot \frac{W_T}{\sqrt{T}} \stackrel{d}{=} \frac{x_0}{\sqrt{T}} + \sigma \cdot \eta \rightarrow^W \sigma \cdot \eta \sim N(0, \sigma^2)$$

Отже $\hat{\theta}_T^{(1)}$ є асимптотично нормальною оцінкою з нормуючим множником $\varphi_T = f(T)/\sqrt{T}$.

Оцінка зсуву за методом найменших квадратів.

Оцінка за останнім спостереженням має вигляд:

$$\hat{\theta}_T^{(2)} = \frac{\int_0^T f'(s) dX_s}{\int_0^T (f'(s))^2 ds}$$

Чи є $\hat{\theta}_T^{(2)}$ строго конзистентною оцінкою параметра зсуву? Очевидно, що $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ та відповідний інтеграл необмежений зверху, бо неважко переконатися, що

$$\begin{aligned} \int_0^T (f'(s))^2 ds &= \left| f'(s) = 1 + 2 \cos(2s) \right| = \int_0^T (1 + 2 \cos(2s))^2 ds = \int_0^T (1 + 4 \cos(2s) + 4 \cos^2(2s)) ds = \\ &= T + 4 \left(\int_0^T \cos(2s) ds + \int_0^T \cos^2(2s) ds \right) = T + 2 \cdot \sin(2T) + 2 \cdot T + \frac{\sin(4T)}{2} \end{aligned}$$

Де прості обчислення приводять до наступних результатів:

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos(2s) ds &= \frac{1}{2} \cdot \sin(2s) \Big|_0^T = \frac{\sin(2T)}{2} \\ \int_0^T \cos^2(2s) ds &= \int_0^T \frac{1 + \cos(4s)}{2} ds = \frac{T}{2} + \frac{1}{8} \cdot \sin(4s) \Big|_0^T = \frac{T}{2} + \frac{\sin(4T)}{8} \end{aligned}$$

А тому $\int_0^T (f'(s))^2 ds = 3 \cdot T + 2 \cdot \sin(2T) + \frac{\sin(4T)}{2} \rightarrow +\infty$ при $T \rightarrow +\infty$. А тому ОМНК є строго конзистентною оцінкою параметра зсуву. Для доведення незміщеності скористаємося стохастичним зображенням оцінки:

$$\hat{\theta}_T^{(2)} = \theta + \sigma \cdot \frac{\int_0^T f'(s) dW_s}{\int_0^T (f'(s))^2 ds}$$

Враховуючи, що f' – не випадкова функція, тому $\sigma \cdot \int_0^T f'(s) dW_s \sim N\left(0, \sigma^2 \cdot \int_0^T (f'(s))^2 ds\right)$, що і доводить незміщеність. Зокрема з останнього факту можна витягнути нормуючий множник в асимптотичній нормальності $\hat{\theta}_T^{(2)}$:

$$\varphi_T \cdot \left(\hat{\theta}_T^{(2)} - \theta\right) = \varphi_T \cdot \sigma \cdot \frac{\int_0^T f'(s) dW_s}{\int_0^T (f'(s))^2 ds} \stackrel{d}{=} \left| \varphi_T = \left(\int_0^T (f'(s))^2 ds \right)^{1/2} \right| \stackrel{d}{=} \sigma \cdot \eta \sim N(0, \sigma^2)$$

Що доводить асимптотичну нормальність ОМНК.

Оцінка дифузії за допомогою квадратичної варіації.

Оцінка за допомогою квадратичної варіації на бінарному розбитті $t_k^n = k/2^n$, $k = \overline{0, n}$ має вигляд:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{\sum_{j=1}^n \left(X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n}\right)^2}{T}, \quad n \geq 1$$

Чи є $\hat{\sigma}_n^2$ строго конзистентною оцінкою параметра зсуву? Покажемо, що для довільного $T > 0$ функція $f \in C[0, T] \cap BV[0, T]$. Ясно, що довільного $T > 0$, функція $f \in C[0, T]$ як сума двох неперервних функцій. Покажемо, що $f \in BV[0, T]$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| = \sum_{j=0}^{n-1} |f'(\theta_j) \cdot (t_{j+1} - t_j)| \leq 3 \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) = 3 \cdot T < +\infty$$

для довільного розбиття $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T\}$ відрізка $[0, T]$. А тому дана оцінка дифузії є строго конзистентною. Перевіримо незміщеність оцінки врахувавши, що прирости $X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n} \sim N(\theta \cdot (f(t_k^n) - f(t_{k-1}^n)), \sigma^2 \cdot (t_k^n - t_{k-1}^n))$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\hat{\sigma}_n^2] &= \mathbb{E} \left[\frac{\sum_{j=1}^n \left(X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n}\right)^2}{T} \right] = \frac{1}{T} \cdot \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[\left(X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n}\right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \sum_{j=1}^n (\theta^2 \cdot (f(t_k^n) - f(t_{k-1}^n))^2 + \sigma^2 \cdot (t_k^n - t_{k-1}^n)) = \frac{\theta^2}{T} \cdot \sum_{j=1}^n (f(t_k^n) - f(t_{k-1}^n))^2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

Вийде асимптотична незміщеність внаслідок того, що $f \in C^1[0, T]$ для довільного $T > 0$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\theta^2}{T} \cdot \sum_{j=1}^n (f(t_k^n) - f(t_{k-1}^n))^2 \leq \frac{9 \cdot \theta^2}{T} \cdot \sum_{j=1}^n (t_k^n - t_{k-1}^n)^2 \leq \frac{9 \cdot \theta^2}{T} \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |t_j^n - t_{j-1}^n| \cdot \sum_{k=1}^n (t_k^n - t_{k-1}^n) = \\ &= \frac{9 \cdot \theta^2}{T} \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |t_j^n - t_{j-1}^n| \cdot T = 9 \cdot \theta^2 \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |t_j^n - t_{j-1}^n| \rightarrow 0, \quad |t_j^n - t_{j-1}^n| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Практична частина.

Генерування послідовності.

Реалізувати траєкторії процесу X_t можна за допомогою незалежності приростів вінерівського процесу. Розглянувши розбиття $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, можемо будувати реалізацію траєкторії таким чином:

$$X_0 = x_0, X_{t_{j+1}} = X_{t_j} + \Delta X_{t_{j+1}}, j \geq 0, \text{ де } \Delta X_{t_{j+1}} = X_{t_{j+1}} - X_{t_j} = \theta \Delta f(t_{j+1}) + \sigma \Delta W_{t_{j+1}}$$

Опишемо програму для створення траєкторій процесу на двійковому розбитті:

```
f <- function(t)
{
  t + sin(2 * t)
}

generate.x <- function(time, n, x0, theta, sigma)
{
  delta <- time / 2^n
  times <- (0:(2^n)) * delta
  increments.w <- rnorm(2^n, mean = 0, sd = sqrt(delta))
  increments.f <- f(times[-1]) - f(times[-(2^n - 1)])
  cumsum(c(x0, theta * increments.f + sigma * increments.w))
}
```

Обчислення значень оцінок зсуву.

Для оцінки за останнім моментом часу реалізація зовсім проста:

```
theta.est.last <- function(time, X.t)
{
  X.t[length(X.t)] / f(time)
}
```

Для програмної реалізації ОМНК спочатку варто її спростити для заданих параметрів і функції:

$$\hat{\theta}_T^{(2)} = \frac{\int_0^T f'(s) dX_s}{\int_0^T (f'(s))^2 ds}$$

Зі знаменником розібрались "в лоб" раніше. Потрібно розібратися з інтегралом від не випадкової функції по стохастичному процесу X_t . Неважко переконатися у тому, що X_t – гауссів. А тому можна спробувати наближено обчислити за допомогою простих функцій, що наближають f' в $L_2[0, T]$. У ролі такого кандидата можна взяти послідовність простих функцій вигляду:

$$f'_n(t) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \mathbb{1} \left\{ \frac{j}{2^n} \cdot T \leq t < \frac{j+1}{2^n} \cdot T \right\} \cdot f' \left(\frac{j}{2^n} \cdot T \right)$$

Тоді наближена оцінка зсуву за двійковим розбиттям обчислюється за формулою:

$$\hat{\theta}_{T,n}^{(2)} = \frac{\sum_{j=0}^{2^n-1} f' \left(\frac{j}{2^n} \cdot T \right) \cdot \left(X_{\frac{j+1}{2^n} \cdot T} - X_{\frac{j}{2^n} \cdot T} \right)}{3 \cdot T + 2 \cdot \sin(2T) + \frac{\sin(4T)}{2}}$$

З побудови Вінерівського інтеграла для довільних функцій маємо, що $\theta_{T,n}^{(2)} \xrightarrow{L_2} \theta_T^{(2)}$ спрямувавши $T \rightarrow +\infty$. Запишемо програмну реалізацію оцінки:

```
f.prime <- function(t)
{
  1 + 2 * cos(2 * t)
}

theta.est.ls <- function(time, n, X.t)
{
  times <- (0:(2^n - 1)) * time / 2^n
  nominator <- sum(f.prime(times) * diff(X.t))
  denominator <- 3 * time + 2 * sin(2 * time) + sin(4 * time) / 2
  nominator / denominator
}
```

Обчислення значень оцінок дифузії.

Програмна реалізація досить проста, як і завжди:

```
sigma.sq.est <- function(time, X.t)
{
  sum(diff(X.t)^2) / time
}
```

Наближене обчислення математичного сподівання та дисперсії за допомогою моделювання.

Потрібно перевірити, чи справді виконується умова строгої конзистентності на практиці. Для цього будемо оцінювати математичне сподівання та дисперсію оцінки при збільшенні часу T (або кількості вузлів n в оцінці дифузії) будемо за допомогою імітаційного моделювання, а саме:

1. Згенеруємо 1000 траєкторій процесу X_t .
2. За кожною траєкторією підрахуємо значення оцінок.
3. За отриманими масивами зі значень оцінок взяти вибіркове середнє та виправлену вибірккову дисперсію.

Результати моделювання.

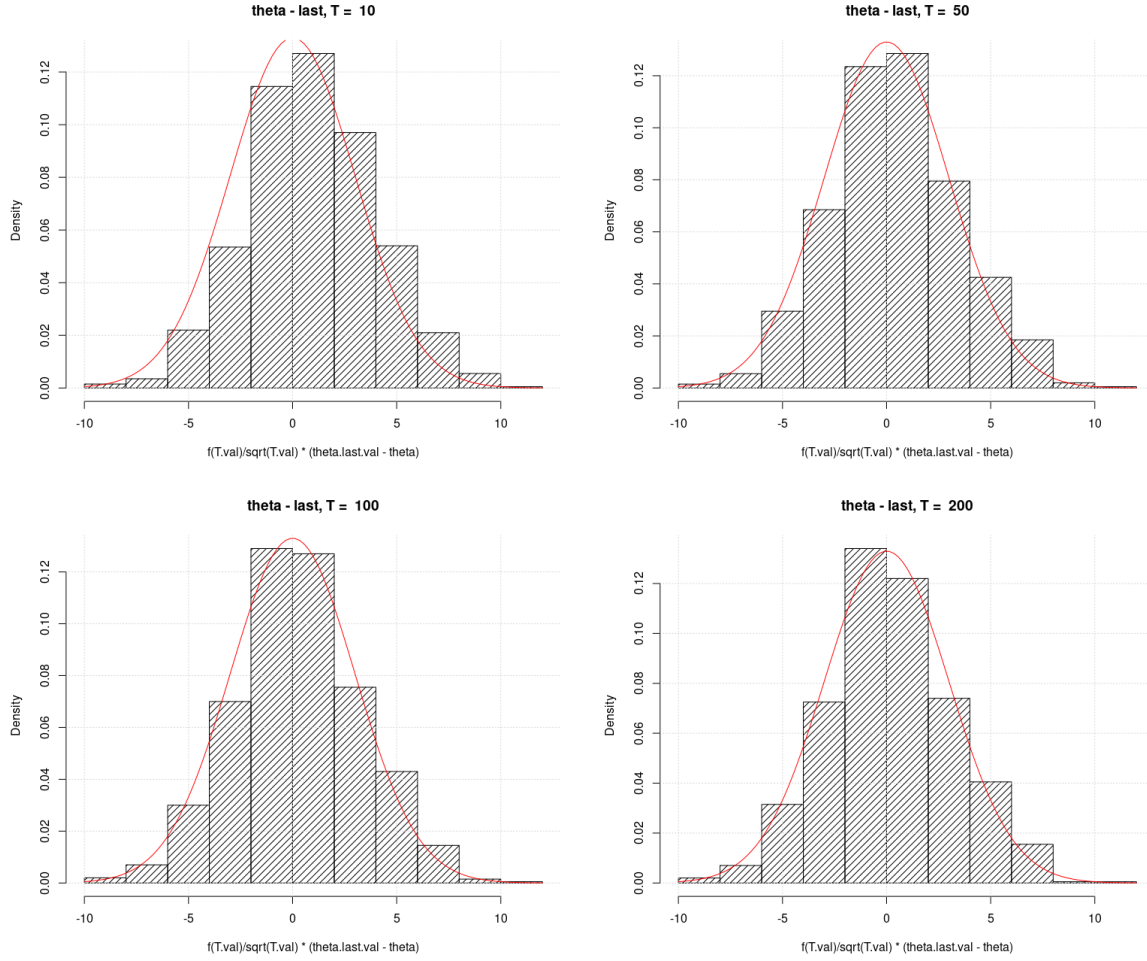


Рис. 1: Гістограми відносних частот для нормованої оцінки зсуву за останнім спостереженням.

Судячи з графічного аналізу розподілу даних, підтверджується доведена асимптотична нормальність.

T	$\approx \mathbb{E} [\hat{\theta}_T^{(1)}]$	$\approx \mathbb{D} [\hat{\theta}_T^{(1)}]$
10	4.272549	0.7757847
50	4.059218	0.1885804
100	4.029273	0.09402511
200	4.014544	0.04659063

Табл. 1: Значення оцінок мат. сподівання, дисперсії $\hat{\theta}_T^{(1)}$ в залежності від T .

За значеннями оцінки математичного сподівання підтверджується незміщеність оцінки, а зменшення її дисперсії свідчить про те, що розподіл вироджується (у розподіл сталої м.н.).

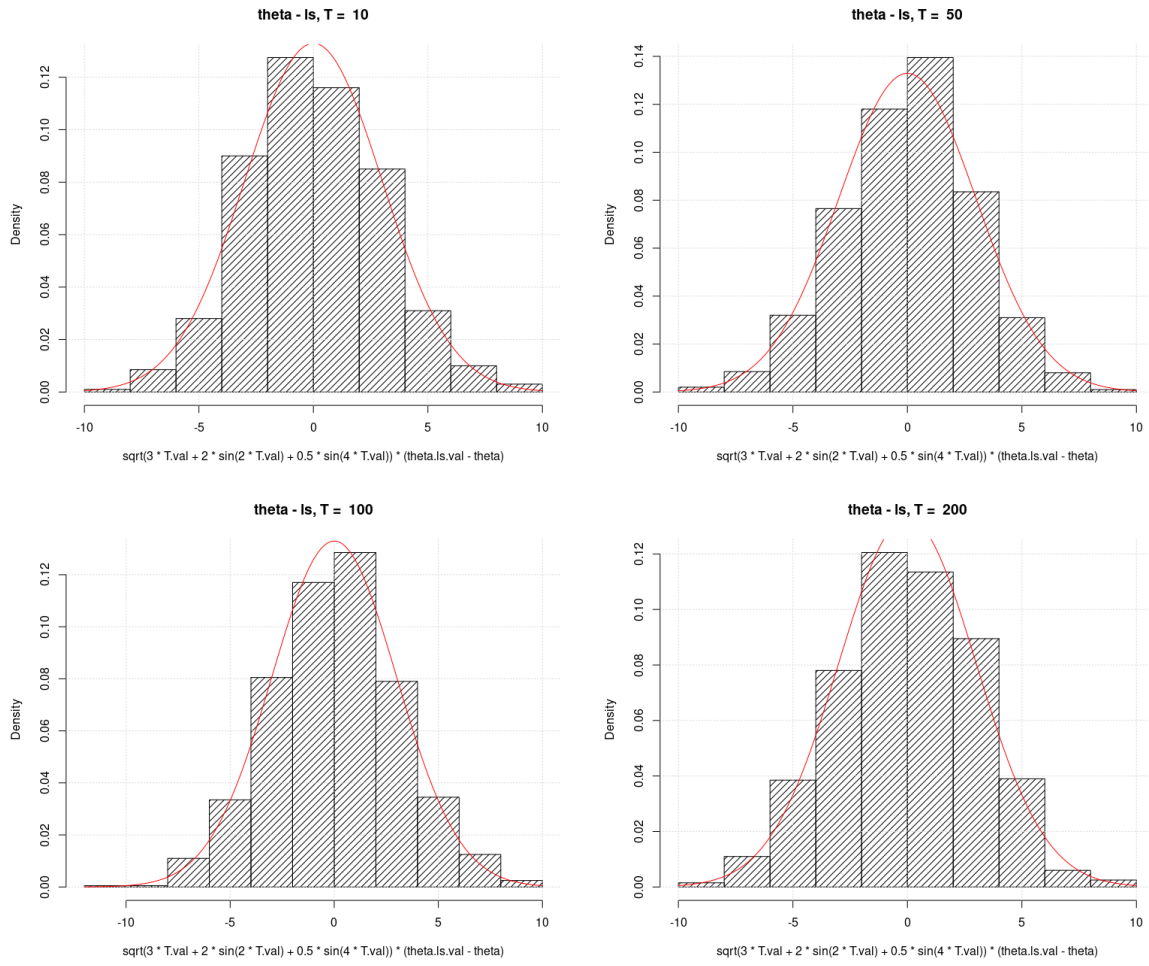


Рис. 2: Гістограми відносних частот для нормованої оцінки зсуву за МНК.

Судячи з графічного аналізу розподілу даних, знову підтверджується доведена асимптотична нормальність.

T	$\approx \mathbb{E} [\hat{\theta}_T^{(2)}]$	$\approx \mathbb{D} [\hat{\theta}_T^{(2)}]$
10	4.007892	0.2721945
50	4.003837	0.05584992
100	4.005256	0.03238297
200	4.001201	0.01567437

Табл. 2: Значення оцінок мат. сподівання, дисперсії $\hat{\theta}_T^{(2)}$ в залежності від T .

Доведені властивості незміщеності та конзистентності підтверджуються і для МНК-оцінки. Зауважимо, що збіжність значень математичного сподівання і дисперсії до бажаних дещо швидша для МНК-оцінки.

Нехай $T = 200$. Перевіримо, чи узгоджується теорія оцінювання дифузії з практикою:

2^n	$\approx \mathbb{E} [\hat{\sigma}_n^2]$	$\approx \mathbb{D} [\hat{\sigma}_n^2]$
2^2	401.9128	3678.898
2^4	182.9525	416.7156
2^6	56.99047	28.9109
2^8	41.65889	5.013842
2^{10}	18.30316	0.5028306
2^{12}	11.33649	0.05878538
2^{16}	9.146619	0.002684993

Табл. 3: Значення оцінок мат. сподівання, дисперсії $\hat{\sigma}_n^2$ в залежності від n .

Конзистентність підтверджується, однак досить повільно затухає зсунутість.

Висновки.

Теорія узгодилася з практикою. МНК-оцінка виявилася найкращою для оцінювання зсуву у розглянутій моделі. Одна з можливих проблем - питання хорошої реалізації алгоритму обчислення оцінки.