

Самостійна робота
з дисципліни
”Наближені та асимптотичні методи у
статистиці та фінансах”
Студента 2 курсу магістратури
групи ”Статистика”
Варіант №4

Горбунов Данієл

10 грудня 2022 р.

Зміст

1	Задача №1.	2
1.1	Постановка задачі.	2
1.2	Розв’язання.	2
2	Задача №2.	6
2.1	Постановка задачі.	6
2.2	Розв’язання.	6
3	Задача №3.	10
3.1	Постановка задачі.	10
3.2	Розв’язання.	10

1 Задача №1.

1.1 Постановка задачі.

Нехай $\{W(t), t \in [0, T]\}$ – вінерівський процес. Для заданих функцій $a, b : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ та початкового значення $x_0 \in \mathbb{R}$ довести існування та єдиність розв’язку стохастичного диференціального рівняння

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t), \quad X(0) = x_0, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

Перевірити, чи виконуються умови теореми про точність наближення Ейлера. Написати програму для моделювання наближеного розв’язку за допомогою методу Ейлера для заданого T і діаметра розбиття δ . Побудувати графік, який містить 10 різних траєкторій розв’язку на відрізку $[0, 1]$, використовуючи діаметр розбиття $\delta = 0.01$. Виконати те саме завдання для $\delta = 0.001$. У варіанті №4:

$$a(t, x) = 4^t \ln(1 + x^2), \quad b(t, x) = \frac{t + x}{1 + t^2 + x^2}, \quad x_0 = 4.4$$

1.2 Розв’язання.

Спочатку доведемо, що для стохастичного диференціального рівняння (1) справді існує єдиний розв’язок. Для цього перевіримо виконання умов наступної теореми:

Теорема 1. Нехай коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови:

1. Лінійне зростання: $\forall t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}: |a(t, x)| + |b(t, x)| \leq K(1 + |x|)$,
2. Ліпшицевість: $\forall t \in [0, T], \forall x, y \in \mathbb{R}: |a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|$.

Тоді це рівняння має єдиний розв’язок X . Більше того, $X \in \mathcal{H}_2([0, T])$.

Перевіримо умову лінійного зростання: $\forall t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}$

$$|a(t, x)| = 4^t \ln(1 + x^2) \leq 4^T \ln(1 + x^2) \leq 4^T |x| \leq 4^T (1 + |x|)$$

Обґрунтуємо останній перехід. Розглянемо допоміжну функцію $f(x) = e^x - (1 + x^2)$. Перевіримо, чи $f(x) > 0$ для довільного $x \geq 0$. Відомо, що $f'(x) = e^x - 2x$. Взявши ще одну похідну, отримаємо $f''(x) = e^x - 2$. Тоді $f''(x) = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = \ln(2)$. Отже, коли $x > \ln(2)$, $f'(x)$ зростає, а при $0 \leq x < \ln(2)$ – спадає. Зауважимо, що $f'(\ln(2)) = 2 - 2\ln(2) = 2(1 - \ln(2)) > 0$, оскільки $\ln(2) \in (0, 1)$. Враховуючи проміжки монотонності похідної, маємо що $f'(x) > 0$ для довільного $x \geq 0$. Це значить, що $f(x)$ зростає по $x \geq 0$, звідки знаходимо бажаний результат:

$$\begin{aligned} e^x - (1 + x^2) = f(x) &\geq f(0) = e^0 - (1 + 0^2) = 1 - 1 = 0, \quad x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow e^x \geq 1 + x^2 \Leftrightarrow x \geq \ln(1 + x^2), \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Для коефіцієнта дифузії маємо таке:

$$|b(t, x)| = \left| \frac{t + x}{1 + t^2 + x^2} \right| \leq |t + x| \leq t + |x| \leq T + |x| \leq T(1 + |x|)$$

Таким чином коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умову лінійного зростання.

Залишається дослідити коефіцієнти на ліпшицевість: $\forall t \in [0, T], \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$|a(t, x) - a(t, y)| = 4^t |\ln(1 + x^2) - \ln(1 + y^2)| \leq 4^T |\ln(1 + x^2) - \ln(1 + y^2)| = \dots$$

Тепер зауважимо, що $\varphi(u) = \ln(1 + u^2)$ неперервно диференційовна на \mathbb{R} (зокрема і на інтервалі з кінцями x та y). Тоді, за теоремою Лагранжа, існує проміжна така точка c між x та y , що:

$$|\ln(1 + x^2) - \ln(1 + y^2)| = |\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(c)(x - y)|, \quad \varphi'(c) = \frac{2c}{1 + c^2}$$

Звідси отримаємо

$$\dots = 4^T \frac{2|c|}{1 + c^2} |x - y| \leq 4^T \frac{1 + c^2}{1 + c^2} |x - y| = 4^T |x - y|,$$

Оскільки $(1 - c)^2 = 1 - 2c + c^2 \geq 0$, а тому $1 + c^2 \geq 2c$. Тепер дослідимо коефіцієнт дифузії на ліпшицевість:

$$|b(t, x) - b(t, y)| = \left| \frac{t + x}{1 + t^2 + x^2} - \frac{t + y}{1 + t^2 + y^2} \right| = \dots$$

Для довільного $t \in [0, T]$, функція $b(t, u)$ задовольняє умови теореми Лагранжа, отже існує така проміжна точка c між x та y , що

$$|b(t, x) - b(t, y)| = |b'_u(t, c)(x - y)|, \quad b'_u(t, u) = \frac{(1 + t^2 + u^2) - 2u(t + u)}{(1 + t^2 + u^2)^2}$$

Розпишемо трохи частинну похідну $b(t, u)$ по u :

$$b'_u(t, u) = \frac{1}{1 + t^2 + u^2} - 2 \frac{u(t + u)}{(1 + t^2 + u^2)^2} \leq 1 - \frac{2u(t + u)}{(1 + t^2 + u^2)^2} \leq 1 - \frac{2ut}{(1 + t^2 + u^2)^2}$$

$$|b'_u(t, u)| \leq \left| 1 - \frac{2ut}{(1 + t^2 + u^2)^2} \right| \leq 1 + \frac{2|u|t}{(1 + t^2 + u^2)^2} \leq 2,$$

Оскільки $2|x|t \leq t^2 + x^2 \leq 1 + 2(t^2 + x^2) + (t^2 + x^2)^2 = (1 + t^2 + x^2)^2$. Виходить, що коефіцієнт дифузії теж задовольняє умову Ліпшиця:

$$\dots = |b'_u(t, c)(x - y)| \leq 2|x - y|$$

Врахувавши попередні результати, можна зробити висновок, що завдяки виконанню умов теореми 1, можна говорити про існування єдиного розв'язку стохастичного диференціального рівняння (1).

Наступною задачею є перевірка умов теореми про точність наближення Ейлера. Нагадаємо теорему:

Теорема 2. Якщо коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови теореми 1 та умову Гельдера: $\forall t, s \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}: |a(t, x) - a(s, x)| + |b(t, x) - b(s, x)| \leq K(1 + |x|)|t - s|^{1/2}$, а початкові умови X_0 та $X_0^{(n)}$ є квадратично-інтегровними, то

$$E[|X(t) - X^{(n)}(t)|^2] \leq C(E[|X(0) - X^{(n)}(0)|^2] + (1 + E[|X(0)|^2]))\delta_n \quad (2)$$

Зокрема, якщо $E[|X(0) - X^{(n)}(0)|^2] \leq C\delta_n$, то $E[|X(t) - X^{(n)}(t)|^2] \leq C(1 + E[|X(0)|^2])\delta_n$.

У теоремі $\delta_n = T/n$,

$$X^{(n)}(t_k) = X^{(n)}(t_{k-1}) + a(t_{k-1}, X^{(n)}(t_{k-1}))\delta_n + b(t_{k-1}, X^{(n)}(t_{k-1}))(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}),$$

$t_k = k\delta_n, k = \overline{0, n}$. Наближення початкової умови $X^{(n)}(0)$ покладемо рівним $X(0) = x_0$.

Попередньо було показано виконання умов теореми 1. Покажемо, що умова Гельдера теж виконується. Для коефіцієнта зсуву:

$$\begin{aligned} |a(t, x) - a(s, x)| &= |\ln(1 + x^2)||4^t - 4^s| \leq (1 + |x|)|4^t - 4^s| = \\ &= (1 + |x|)|e^{\ln(4)t} - e^{\ln(4)s}| = (1 + |x|) \cdot \ln(4)4^c \cdot |t - s| \leq \\ &\leq \ln(4)4^c \cdot \sqrt{T} \cdot (1 + |x|) \cdot |t - s|^{1/2}, \quad t, s \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Аналогічні до викладених при доведенні ліпшищевості кроків, виводимо виконання умови Гельдера для коефіцієнта дифузії: для деякої проміжної точки між s та t

$$\begin{aligned} |b(t, x) - b(s, x)| &= b'_t(v, x)|t - s| \leq \left(1 + \frac{2|x|v}{(1 + t^2 + x^2)^2}\right) |t - s| \leq \\ &\leq (1 + 2|x|v)|t - s| \leq (1 + 2T|x|)|t - s| \leq 2T(1 + |x|) \leq \\ &\leq 2T\sqrt{T}(1 + |x|)|t - s|^{1/2}, \quad t, s \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Умова Гельдера на коефіцієнти рівняння (1) виконується. За теоремою 2, має місце оцінка (2) для усередненої похибки.

Залишається змоделювати траєкторії, використовуючи наближення Ейлера при $\delta_n \in \{0.01, 0.001\}$ (тобто при $n \in \{100, 1000\}$). Прирости Вінерівського процесу, згідно з означенням, можна згенерувати незалежно з розподілу $N(0, \delta_n)$. Відповідний алгоритм для побудови наближеного розв'язку (1) можна реалізувати в R так:

```
# Моделювання траєкторії наближеного розв'язку СДР
# dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t), X(0) = x0, t in [0, T]
# Використовуючи метод Ейлера. Аргументи:
# x0 -- початкова точка розв'язку X(t)
# t -- T, верхній горизонт
# n -- кількість ненульових вузлів на [0, T]
# a, b -- коефіцієнти зсуву та дифузії відповідно
model.euler <- function(x0, t, n, a, b)
{
  # Ініціалізація кроку
  delta.n <- t/n
  x.approx <- numeric(length=n+1)
  # Старт наближення -- це старт розв'язку
  x.approx[1] <- x0
  # Буквально за означенням методу Ейлера
  for(j in 1:n)
  {
    dw <- rnorm(1, mean=0, sd=sqrt(delta.n))
    tk <- (j-1)*delta.n
    a.dt <- a(tk, x.approx[j]) * delta.n
    b.dw <- b(tk, x.approx[j]) * dw
    x.approx[j+1] <- x.approx[j] + a.dt + b.dw
  }
  x.approx
}
```

Змоделюємо по десять траєкторій для кожного з кроків.

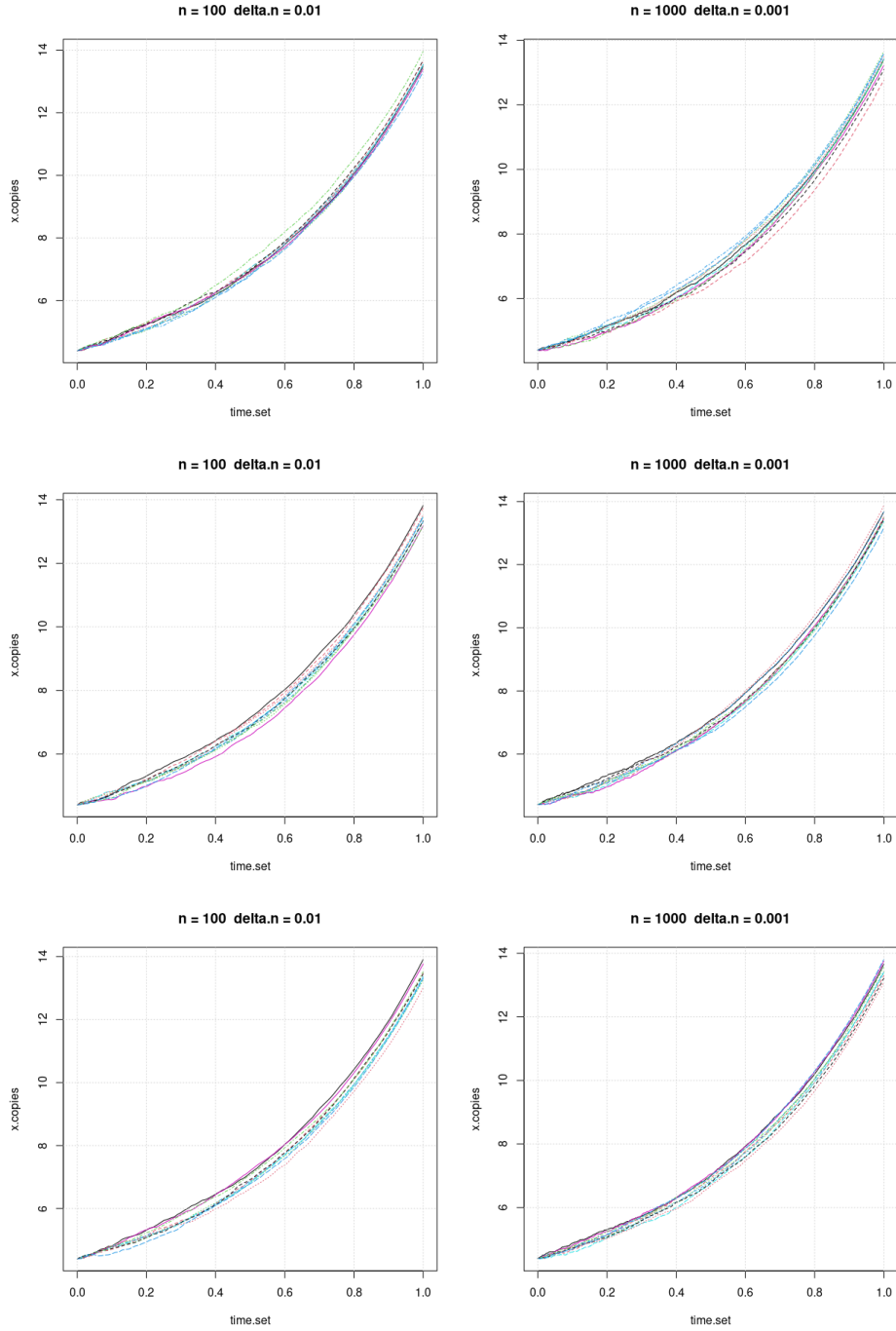


Рис. 1: По десять змодельованих траєкторій наближеного розв'язку СДР (1).

Перше, що кидається в очі, то відносно малий вплив стохастичної компоненти на поведінку процесу. Це справді так, якщо згадати вигляд СДР (1), де перевага надається експоненті при змінах по часу. Зокрема зростання підсилюється логарифмічним множником у тій же часовій частині "нескінченно малого" приросту. Додатковим аргументом у цей же бік є поведінка коефіцієнта дифузії з плином часу (чи збільшенні величини траєкторії), а саме ефект затування для достатньо великих t чи x . Враховуючи попередні міркування, можна вважати, що поведінка змодельованих траєкторій адекватна, метод Ейлера працює в даному випадку.

2 Задача №2.

2.1 Постановка задачі.

Нехай $\{W(t), t \in [0, T]\}$ – вінерівський процес.

1. Для заданих a, b, c, d та x_0 знайти в явному вигляді розв’язок стохастичного диференціального рівняння

$$dX(t) = aX(t)dt + (cX(t) + d)dW(t), \quad X(0) = x_0, \quad t \in [0, T].$$

2. Написати програму для моделювання розв’язку двома способами:

- за допомогою його явного вигляду;
- методом Ейлера.

Для оцінки точності наближень змоделювати 1000 траєкторій розв’язку двома способами та обчислити середнє значення абсолютної похибки в точках $t = 1, 10, 20$ при діаметрах розбиття $\delta = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$. Порівняти результат з теоретичною оцінкою. У варіанті №4:

$$a = 6, c = 0, d = 1.6, x_0 = -3.8$$

2.2 Розв’язання.

У термінах вказаних коефіцієнтів, маємо таке рівняння:

$$dX(t) = 6X(t)dt + 1.6dW(t) \quad (3)$$

Розглянемо його ”однорідну” частину, тобто без шумової компоненти:

$$dX(t) = 6X(t)dt \Rightarrow d \ln(X(t)) = 6dt \Rightarrow \ln(X(t)) = K + 6t \Rightarrow X(t) = C \exp(6t), \quad C > 0$$

Для знаходження загального розв’язку стохастичного диференціального рівняння (3), скористаємося методом варіації сталої. Припустимо, що загальний розв’язок рівняння має вигляд $X(t) = Ce^{6t}$, де $C = C(t)$ – деякий випадковий процес. Підставимо його в (3), використовуючи формулу Іто:

$$\begin{aligned} dX(t) &= d(C(t)e^{6t}) = 6e^{6t}C(t)dt + dC(t)e^{6t} = 6C(t)e^{6t}dt + 1.6dW(t) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow dC(t)e^{6t} &= 1.6dW(t) \Leftrightarrow dC(t) = 1.6e^{-6t}dW(t) \Rightarrow C(t) = C_0 + 1.6 \int_0^t e^{-6s}dW(s) \end{aligned}$$

В результаті $X(t) = C(t)e^{6t} = (C_0 + 1.6 \int_0^t e^{-6s}dW(s))e^{6t}$. Сталу C_0 знаходимо з початкової умови $X(0) = x_0 = -3.8$:

$$X(0) = (C_0 + 1.6 \cdot 0)e^{6 \cdot 0} = C_0 = -3.8$$

Отже розв’язком задачі Коші буде процес Іто вигляду:

$$X(t) = \left(1.6 \int_0^t e^{-6s}dW(s) - 3.8 \right) e^{6t}, \quad t \in [0, T]$$

Чи справді цей розв’язок задовольняє рівняння (3)?

За допомогою формули Іто для $X(t)$, можна отримати таке:

$$\begin{aligned} dX(t) &= d\left(\left(1.6 \int_0^t e^{-6s} dW(s) - 3.8\right) e^{6t}\right) = \\ &= d(e^{6t}) \left(1.6 \int_0^t e^{-6s} dW(s) - 3.8\right) + d\left(1.6 \int_0^t e^{-6s} dW(s) - 3.8\right) e^{6t} = \\ &= 6e^{6t} \cdot 1.6 \int_0^t e^{-6s} dW(s) dt - 3.8 \cdot 6e^{6t} dt + 1.6e^{-6t} e^{6t} dW(t) = \\ &= \left(6e^{6t} \left(1.6 \int_0^t e^{-6s} dW(s) - 3.8\right) dt + dW(t)\right) = 6X(t)dt + 1.6dW(t) \end{aligned}$$

Таким чином доведена коректність обчислень при знаходженні розв'язку задачі (3). Виконання умов теорем 1 та 2 очевидне для $a(t, x) = 6x$ та $b(t, x) = 1.6$, тому не підлягає детальному розгляду.

У завданні №1 було реалізовано алгоритм побудови траєкторії наближеного розв'язку стохастичного диференціального рівняння. Наступним кроком буде програмна реалізація побудови траєкторії справжнього розв'язку СДР (3), використовуючи його явний вигляд. В R це можна зробити так:

```
# Моделювання траєкторії розв'язку СДР
# dX(t) = 6X(t)dt + 1.6dW(t), X(0) = -3.8
model.solution <- function(t, n)
{
  # Ініціалізація кроку
  delta.n <- t/n
  # Обчислення рівномірної сітки
  time.set.n <- (0:n) * delta.n
  # Стартове значення розв'язку
  x0 <- -3.8
  # Обчислення експоненти
  exp.plus <- exp(6 * time.set.n)
  # Обчислення приростів Вінерівського процесу
  dw <- rnorm(n, mean=0, sd=sqrt(delta.n))
  # Наближене обчислення траєкторії інтеграла Іто
  exp.minus <- 1 / exp.plus[-(n+1)]
  int.wiener <- cumsum(c(0, exp.minus * dw))
  # Побудова траєкторії розв'язку на сітці
  x.approx <- (1.6 * int.wiener - 3.8) * exp.plus
  x.approx
}
```

Інтеграл Іто треба було апроксимувати: одним із варіантів була заміна на відповідний інтеграл Іто від дискретизованого підінтегрального процесу:

$$\eta^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{(t_{k-1}, t_k]}(t) \exp(-6t_{k-1}), \quad t \in [0, T]$$

Залишається змоделювати по 1000 траєкторій за кожним з методів при $\delta \in \{2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}\}$, $T = 20$ (звідки $n = 20 \cdot 2^k$, $k = 3, 4, 5$) і продемонструвати виконання теореми 2 у точках $t \in \{1, 10, 20\}$.

Спочатку зобразимо траєкторії розв'язку та його наближення на $[0, T]$, де $T = 20$.

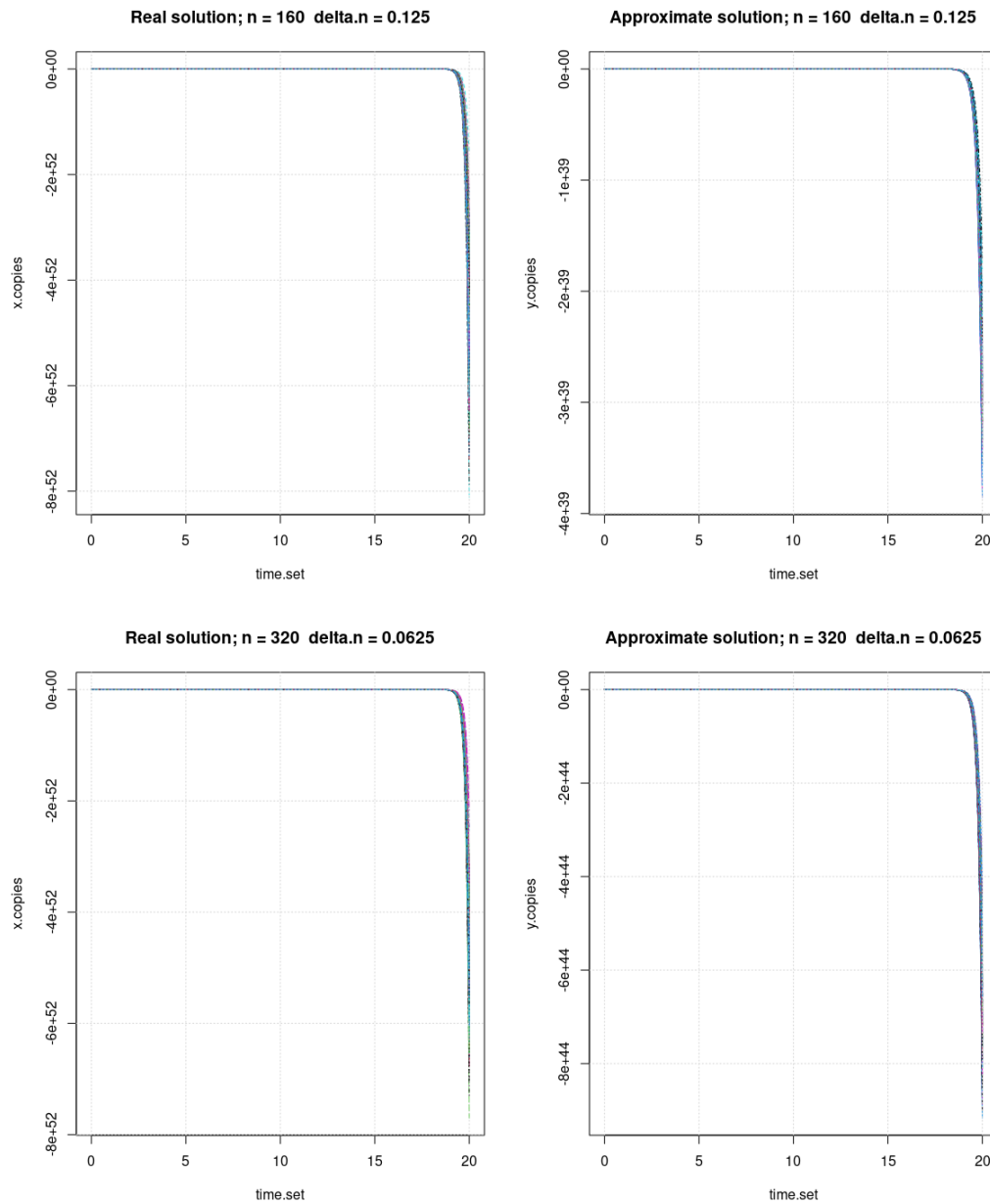


Рис. 2: По 1000 змодельованих траєкторій наближеного розв'язку СДР (1).

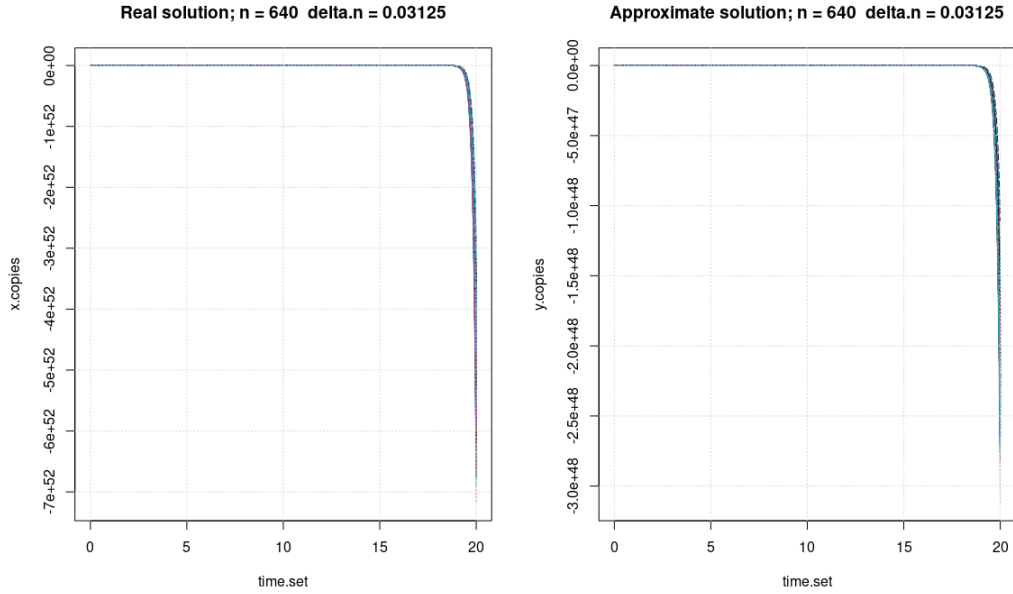


Рис. 3: По 1000 змодельованих траєкторій наближеного розв'язку СДР (1).

З рисунків не дуже добре, але видно (краще треба було звужити розгляд графіків траєкторій на проміжку різкого спадання), що за поведінкою траєкторії наближення добре імітують справжній розв'язок. Хоча варто зауважити, що при збільшенні часової змінної відхилення все-ж таки наявні, ближче до горизонту (якщо додатково звернути на відмітки на осі ординат). Перевіримо, чи виконується теорема про точність методу Ейлера.

	$t = 1$	$t = 10$	$t = 20$
$\delta = 2^{-3}$	14.23434	122.70524	242.70524
$\delta = 2^{-4}$	13.69849	122.69308	242.69503
$\delta = 2^{-5}$	12.96066	122.68198	242.69331

Табл. 1: Значення логарифмованої середньоквадратичної похибки у заданих точках t .

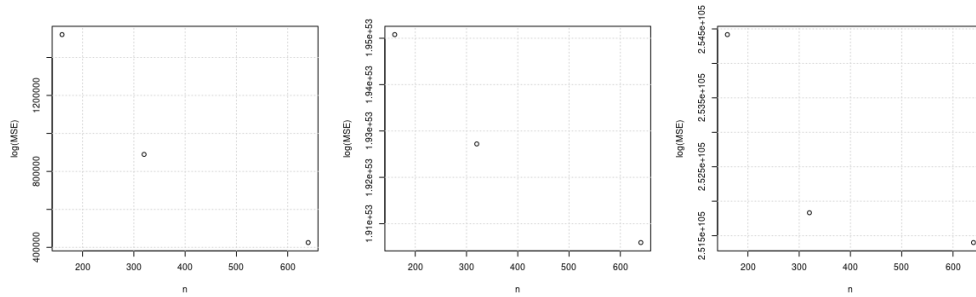


Рис. 4: Середньоквадратична похибка у точках $t = 1, 10, 20$ при збільненні розміру сітки n .

Халтурно, але на око можна припустити, що зменшення середньоквадратичної похибки наближення від справжнього розв'язку можна оцінити зверху функцією вигляду $C(1 + x_0^2)\delta_n$.

3 Задача №3.

3.1 Постановка задачі.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = \theta a(X(t))dt + b(X(t))dW(t), \quad X(0) = x_0, \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

де $W = \{W(t), t \in [0, T]\}$ – вінерівський процес. Функції a та b вважаються відомими, параметр θ – невідомим.

1. Для заданих a та b довести, що рівняння має єдиний розв'язок.
2. Розробити програму для знаходження оцінки методу найменших квадратів та оцінки максимальної вірогідності параметра θ за спостереженнями траєкторії розв'язку X на відрізку $[0, T]$.
3. Для $T = 1, 10, 50, 100$ знайти середні та дисперсії оцінок для 1000 траєкторій процесу X , змодельованих методом Ейлера. Чи підтверджують одержані результати конзистентність оцінок? Яка з двох оцінок краща?

У варіанті №4:

$$a(x) = -1 - 2x, \quad b(x) = 1 - \frac{1}{2} \sin(x), \quad x_0 = -1, \quad \theta = 2$$

3.2 Розв'язання.

Спочатку зауважимо, що коефіцієнти стохастичного диференціального рівняння (4) є однорідними, тобто не залежать від часу $t \in [0, T]$. А тому для доведення існування єдиного розв'язку (4) достатньо довести виконання умови Ліпшиця на коефіцієнти. Дійсно, якщо умова Ліпшиця має місце, тоді

$$\begin{aligned} |a(x)| &= |a(x) - a(0) + a(0)| \leq |a(x) - a(0)| + |a(0)| \leq K|x - 0| + |a(0)| = \\ &= |a(0)| + K|x| \leq \max\{|a(0)|, K\}(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Те саме робиться і для коефіцієнта дифузії, $b(x)$. Отже перевіримо умову Ліпшиця:

$$\begin{aligned} |a(x) - a(y)| &= |-1 - 2x + 1 + 2y| = 2|x - y| \\ |b(x) - b(y)| &= |1 - \frac{1}{2} \sin(x) - 1 + \frac{1}{2} \sin(y)| = \frac{1}{2} |\sin(x) - \sin(y)| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 |\sin((x - y)/2) \cos((x + y)/2)| \leq |\sin((x - y)/2)| \leq \frac{1}{2} |x - y| \end{aligned}$$

Для довільних $x, y \in \mathbb{R}$. Таким чином, ліпшицевість коефіцієнтів доведена, а тому виконуються умови теореми 1 – рівняння (4) справді має єдиний сильний розв'язок.

Наступним етапом є оцінювання невідомого параметра зсуву $\theta \in \mathbb{R}$ у неперервній моделі (4). Розглянемо оцінки методу максимальної правдоподібності (далі ММП) та методу найменших квадратів (МНК).

Спочатку знайдемо оцінку за МНК. Неформально, розглянемо неперервний функціонал втрат:

$$J(\theta) = \int_0^T (dX(t) - \theta a(X(t))dt)^2 \rightarrow \min_{\theta \in \mathbb{R}}$$

Припустимо, що похідну за параметром можна брати, зокрема вносити під знак інтеграла:

$$J'(\theta) = \int_0^T (-2)(dX(t) - \theta a(X(t))dt)a(X(t)) = 0 \Leftrightarrow \int_0^T a(X(t))dX(t) = \theta \int_0^T (a(X(t)))^2 dt$$

Звідки знаходимо критичну точку $\hat{\theta}_{LS} = (\int_0^T a(X(t))dX(t))(\int_0^T (a(X(t)))^2 dt)^{-1}$. Отримана критична точка $\hat{\theta}_{LS}$ неформального функціонала $J(\theta)$ називається оцінкою параметра зсуву за МНК у неперервному часі.

Тепер знайдемо оцінку за допомогою ММП. Для цього варто розглянути дві гіпотези на параметр зсуву:

$$\mathbf{H}_0 : \theta = 0, \mathbf{H}_{\theta_0} : \theta = \theta_0, |\theta_0| > 0$$

Якщо виконується \mathbf{H}_0 , то процес $B(t) = W(t) + \theta \int_0^t \frac{a(X(s))}{b(X(s))} ds \in$ Вінерівським процесом на $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbf{P}_0)$. З іншого боку, $W(t) \stackrel{d}{=} B(t) - \theta \int_0^t \frac{a(X(s))}{b(X(s))} ds \in$ Вінерівським у просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbf{P}_{\theta_0})$. За теоремою Гірсанова,

$$\left. \frac{d\mathbf{P}_0}{d\mathbf{P}_{\theta_0}} \right|_{\mathcal{F}_T} = \exp \left(-\theta_0 \int_0^T \frac{a(X(s))}{b(X(s))} dW(s) - \frac{\theta_0^2}{2} \int_0^T \frac{(a(X(s)))^2}{(b(X(s)))^2} ds \right) > 0$$

Строга додатність похідної Радона-Никодима ймовірнісних мір означає їхню еквівалентність, тобто $\mathbf{P}_0 \sim \mathbf{P}_{\theta_0}$. А тому "обернена" похідна отримується обертання експоненти:

$$\left. \frac{d\mathbf{P}_{\theta_0}}{d\mathbf{P}_0} \right|_{\mathcal{F}_T} = \exp \left(\theta_0 \int_0^T \frac{a(X(s))}{b(X(s))} dW(s) + \frac{\theta_0^2}{2} \int_0^T \frac{(a(X(s)))^2}{(b(X(s)))^2} ds \right) \quad (5)$$

Побудова оцінки ММП у випадку неперервного часу базується на максимізації (5) по $\theta \in \mathbb{R}$. Експонента збільшується при збільшенні її степеня, тому достатньо розглянути екстремальну задачу вигляду:

$$\theta_0 \int_0^T \frac{a(X(s))}{b(X(s))} dW(s) + \frac{\theta_0^2}{2} \int_0^T \frac{(a(X(s)))^2}{(b(X(s)))^2} ds \rightarrow \max_{\theta_0 \in \mathbb{R}}$$

Зауважимо, що останній вираз можна переписати за допомогою рівняння (4):

$$\begin{aligned} & \theta_0 \int_0^T \frac{a(X(s))}{(b(X(s)))^2} b(X(s)) dW(s) + (1-1)\theta_0 \int_0^T \frac{a(X(s))}{(b(X(s)))^2} \theta_0 a(X(s)) ds + \frac{\theta_0^2}{2} \int_0^T \frac{(a(X(s)))^2}{(b(X(s)))^2} ds = \\ & = \theta_0 \int_0^T \frac{a(X(s))}{(b(X(s)))^2} dX(s) - \frac{\theta_0^2}{2} \int_0^T \frac{(a(X(s)))^2}{(b(X(s)))^2} ds \rightarrow \max_{\theta \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

Слід зауважити, що $X(s)$ у попередньому виразі слід розуміти як сталі значення (тобто як фіксована вибірка), оптимізація робиться лише по θ_0 як окрема змінна. Нескладно побачити параболу у тому ж виразі, тому точка максимуму єдина і має вигляд:

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{\int_0^T \frac{a(X(s))}{(b(X(s)))^2} dX(s)}{\int_0^T \frac{(a(X(s)))^2}{(b(X(s)))^2} ds}$$

Отримана точка $\hat{\theta}_{ML}$ називається оцінкою параметра зсуву за ММП у неперервному часі.

У ході знаходження оцінки за ММП загубився ще один крок. Чи справді $\int_0^T \frac{(a(X(s)))^2}{(b(X(s)))^2} ds < +\infty$ майже напевно?

Неважко побачити наступне:

$$\frac{(a(x))^2}{(b(x))^2} = \left(\frac{1+2x}{1-\sin(x)/2} \right)^2 \leq \left(\frac{1+2x}{1-1/2} \right)^2 = 2(1+2x)^2 \in C[0, T] \Rightarrow 2(1+2x)^2 \in R[0, T], \forall T > 0$$

А тому $(a(x)/b(x))^2 \in R[0, T]$ для довільного $T > 0$. Оскільки коефіцієнти в (4) є неперервними, то траєкторії розв'язку $X(t)$ неперервні на $[0, T]$ майже напевно. Таким чином, $(a(X(t))/b(X(t)))^2$ інтегровна на $[0, T]$ майже напевно. Все гаразд.

Наступне питання для розгляду є обчислення оцінок $\hat{\theta}_{LS}$ та $\hat{\theta}_{ML}$, маючи дискретизовану версію спостережень процесу $\{X(t_k), t_k = \frac{k}{n}T, k = \overline{0, n}\}$. Відомо, що інтеграли Іто апроксимуються відповідними інтегралами від простих процесів. Тому, наприклад, інтеграли в оцінці ММП можна наближено обчислити сумами вигляду:

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{a(X(s))}{(b(X(s)))^2} dX(s) &\approx \sum_{k=1}^n \frac{a(X(t_{k-1}))}{(b(X(t_{k-1})))^2} (X(t_k) - X(t_{k-1})) \\ \int_0^T \frac{(a(X(s)))^2}{(b(X(s)))^2} ds &\approx \sum_{k=1}^n \left(\frac{a(X(t_{k-1}))}{b(X(t_{k-1}))} \right)^2 \delta_n \end{aligned}$$

Програмна реалізація наближеного підрахунку оцінки МНК в R може бути такою:

```
# Наближене обчислення випадкового інтеграла у чисельнику
numerator.ls <- function(x.sample, a, b)
{
  f <- function(x) { a(1, x) }
  sum(f(x.sample[-length(x.sample)])) * diff(x.sample))
}

# Наближене обчислення випадкового інтеграла у знаменнику
denominator.ls <- function(x.sample, a, b, delta)
{
  f <- function(x) { a(1, x)^2 }
  sum(f(x.sample[-length(x.sample)])) * delta
}

# Підрахунок оцінки методу найменших квадратів
estim.ls <- function(x.sample, a, b, delta)
{
  N <- numerator.ls(x.sample, a, b)
  D <- denominator.ls(x.sample, a, b, delta)
  N / D
}
```

Аналогічними міркуваннями можна наблизити підрахунок оцінки ММП в R:

```
# Наближене обчислення випадкового інтеграла у чисельнику
numerator.ml <- function(x.sample, a, b)
{
  f <- function(x) { a(1, x) / b(1, x)^2 }
  sum(f(x.sample[-length(x.sample)])) * diff(x.sample))
}

# Наближене обчислення випадкового інтеграла у знаменнику
denominator.ml <- function(x.sample, a, b, delta)
{
  f <- function(x) { (a(1, x) / b(1, x))^2 }
  sum(f(x.sample[-length(x.sample)])) * delta
}

# Підрахунок оцінки методу максимальної правдоподібності
estim.ml <- function(x.sample, a, b, delta)
{
  N <- numerator.ml(x.sample, a, b)
  D <- denominator.ml(x.sample, a, b, delta)
  N / D
}
```

Ключовим етапом залишається дослідження оцінки на асимптотичні властивості. Однак перш ніж цим зайнятися, постає питання: які властивості мають оцінки за розглянутими методами?

Чи є оцінки незміщеними? Можна перезаписати оцінки, виділивши невідомий параметр зсуву:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{LS} &= \frac{\int_0^T a(X(t))dX(t)}{\int_0^T (a(X(t)))^2 dt} = \frac{\theta \int_0^T (a(X(t)))^2 dt + \int_0^T a(X(t))b(X(t))dW(t)}{\int_0^T (a(X(t)))^2 dt} = \\ &= \theta + \frac{\int_0^T a(X(t))b(X(t))dW(t)}{\int_0^T (a(X(t)))^2 dt}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{ML} &= \frac{\int_0^T a(X(t))/(b(X(t)))^2 dX(t)}{\int_0^T (a(X(t))/b(X(t)))^2 dt} = \frac{\theta \int_0^T (a(X(t))/b(X(t)))^2 dt + \int_0^T a(X(t))/b(X(t))dW(t)}{\int_0^T (a(X(t))/b(X(t)))^2 dt} = \\ &= \theta + \frac{\int_0^T a(X(t))/b(X(t))dW(t)}{\int_0^T (a(X(t))/b(X(t)))^2 dt}\end{aligned}$$

Виділені доданки необов'язково мають нульове мат сподівання, тому про незміщеність говорити не можна. Чи є оцінки конзистентними? Зауважимо, що $|b(x)| \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ та

$$\int_0^T (a(X(s))b(X(s)))^2 ds \geq \int_0^T (a(X(s)))^2 (1 - 1/2)^2 ds = (1/4) \int_0^T (a(X(s)))^2 ds \xrightarrow{P^1} +\infty$$

Внаслідок необмеженості $(a(x))^2$ зверху. Таким чином, $\hat{\theta}_{LS}$ – сильно конзистентна оцінка зсуву. Зокрема $\hat{\theta}_{ML}$ теж буде сильно конзистентною оцінкою зсуву з аналогічних міркувань (грубо кажучи, $b(x)$ можна оцінити сталою, далі посилатися на необмеженість $a(x)$).

Залишається перевірити конзистентність на практиці. Практична частина розуміє в собі моделювання по 1000 траєкторій процесу X , змодельованих методом Ейлера. Далі, обчислюються оцінки на кожній з траєкторій. Після цього, обчислюються вибіркові середні та дисперсії при $T = 1, 10, 50, 100$. Процедура робиться для різних кроків дискретизації $\delta = \{0.01, 0.001\}$ в схемі наближення Ейлера.

Далі демонструються результати оцінювання зсуву за оцінками МНК та ММП:

Bias	T = 1	T = 10	T = 20	T = 100
step = 0.01	0.9965164	0.08059002	0.0201751	0*
step = 0.001	0.8014464	0.09909539	0.05038181	0.003995685
Variance	T = 1	T = 10	T = 20	T = 100
step = 0.01	3.6171648	0.16532129	0.05505527	0*
step = 0.001	3.0576561	0.20665445	0.09954089	0.015545083

Табл. 2: Оцінки зміщення та дисперсії для $\hat{\theta}_{LS}$.

Bias	T = 1	T = 10	T = 20	T = 100
step = 0.01	0.9523437	0.06542532	0.009704207	0*
step = 0.001	0.7596476	0.09218841	0.04623393	0.003192063
Variance	T = 1	T = 10	T = 20	T = 100
step = 0.01	3.559624	0.14288653	0.040468367	0*
step = 0.001	3.029669	0.17203978	0.07971662	0.01192191

Табл. 3: Оцінки зміщення та дисперсії для $\hat{\theta}_{ML}$.

Єдина проблема виникла при моделюванні процесу з на дальньому горизонті при невеликому кроці дискретизації ($\delta = 0.01$). Можливо це зумовлене штучним збільшенням дисперсії. Тому доцільно зменшувати крок дискретизації при збільшенні часового проміжку.

З головного, то варто зазначити, що конзистентність справджується практично: зміщення та дисперсія згасають при віддаленні горизонту вперед. Можна звернути увагу на те, що зміщення та дисперсії вийшли трохи менші для $\hat{\theta}_{ML}$ порівняно з $\hat{\theta}_{LS}$.