Завдання №1.2
зі статистики випадкових процесів

Горбунов Даніел Денисович
1 курс магістратури
група "Прикладна та теоретична статистика"

23 квітня 2022 р.

1 Вступ.

У даній роботі знайдено розв'язок стохастичного диференціального рівняння (далі СДР) зі сталими коефіцієнтами. Застосовано метод Ейлера для наближеного моделювання траєкторій розв'язків СДР. Емпірично перевірено швидкість збіжності наближеного розв'язку за методом Ейлера до справжнього.

2 Хід роботи.

2.1 Постановка задачі.

Нехай $\{W(t),\ t \in [0,T]\}$ – вінерівський процес. Знайти в явному вигляді розв'язок СДР:

$$dX(t) = X(t)dt + 2X(t)dW(t),\ X(0) = 2,\ t \in [0,T]$$

Написати програму для моделювання розв'язку двома способами:

1. За допомогою його явного вигляду;
2. Методом Ейлера.

Для оцінки швидкості збіжності наближень змоделювати 1000 траєкторій розв'язку двома способами та обчислити середньоквадратичне відхилення між ними в точках $t = 1, 10, 20$ при діаметрах розбиття $\delta = 0.1, 0.01, 0.001$. Порівняти результат з оцінкою

$$\mathbb{E}\left[|X(t) - X^n(t)|^2\right] \le C(1 + \mathbb{E}\left[|X(0)|^2\right])\delta_n \tag{1}$$

2.2 Розв'язання задачі.

2.2.1 Розв'язання СДР та моделювання явного розв'язку.

В задачі $a(t,x) = x$, а $b(t,x) = 2x$. Неважко перевірити умови лінійного зростання і Ліпшицевості, що гарантує існування та єдиність розв'язку СДР:

$$|a(t,x)| + |b(t,x)| = 3|x| < 3(1 + |x|),\ |a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| = 3|x - y|$$

Тепер знайдемо явний розв'язок СДР. Застосуємо формулу Іто до процесу $X(t)$ та функції $f(x) = \ln(x)$:

$$df(X(t)) = d\ln(X(t)) = \frac{1}{X(t)}dX(t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{X^2(t)}dX(t) \cdot dX(t)$$

Де $dX(t) \cdot dX(t) = 4X^2(t)dt$. Підставимо все інше у попередній вираз:

$$d\ln(X(t)) = dt + 2dW(t) - 2dt = -dt + 2dW(t)$$

В інтегральній формі останній вираз еквівалентний такому результату:

$$\ln(X(t)) = -t + 2W(t) + C,\ t \in [0, T] \Rightarrow X(t) = e^C e^{2W(t)-t}$$

З початкових умов легко виводимо чому дорівнює стала C:

$$X(0) = e^C = 2 \Rightarrow C = \ln(2)$$

Тому розв'язок СДР існує і єдиний – це геометричний вінерівський процес:

$$X(t) = 2e^{2W(t)-t},\ t \in [0, T]$$

Розв'язок будемо моделювати наступним чином. Нехай для деякої сталої $n \geq 1$ визначимо $\delta_n = \frac{T}{n}$ і розглянемо рівномірне розбиття $t_m^n = m\delta_n$, $m = \overline{0, n}$ на відрізку $[0, T]$. Значення процесу у початкому вузлі (у нульовий момент часу) покладемо рівному початковому значенню, тобто $X(0) = 2$. Далі, значення процесу в наступних вузлах визначимо послідовно, використовуючи властивості приростів вінерівського процесу:

$$X(t_m^n) = X(t_{m-1}^n)e^{2(W(t_m^n)-W(t_{m-1}^n))-(t_m^n-t_{m-1}^n)},\ m = \overline{1, n}$$

Очевидно що це справді дасть значення розв'язку у вузлі t_m^n, бо

$$\begin{aligned} X(t_m^n) &= 2e^{2W(t_m^n)-t_m^n} = \left| W(t_m^n) = W(t_m^n) - W(t_{m-1}^n) + W(t_{m-1}^n) \right| = \\ &= 2e^{2(W(t_m^n)-W(t_{m-1}^n)+W(t_{m-1}^n))-(t_m^n-t_{m-1}^n)-t_{m-1}^n} = \left(2e^{2W(t_{m-1}^n)-t_{m-1}^n}\right) e^{2(W(t_m^n)-W(t_{m-1}^n))-(t_m^n-t_{m-1}^n)} = \\ &= X(t_{m-1}^n)e^{2(W(t_m^n)-W(t_{m-1}^n))-(t_m^n-t_{m-1}^n)},\ m = \overline{1, n} \end{aligned}$$

Запишемо програму для обчислення значень траєкторії розв'язку на вузлах в R:

```
ClosedSolutionSDE <- function(T.val, n)
{
  # Визначимо відстань між вузлами
  delta <- T.val / n
  # Визначимо вузли
  t.nodes <- (0:n) * delta
  # Рекурентне обчислення значень у наступних вузлах
  W.incr <- rnorm(n, mean = 0, sd = sqrt(delta))
  exponent <- cumsum(W.incr)
  X.closed <- 2 * c(1, exp(2 * exponent - t.nodes[-1]))
  # Повертає вузли та значення у явного розв'язку СДР у них
  list(times = t.nodes, values = X.closed)
}
```

Для обчислення траєкторій наближеного розв'язку СДР $X^n(t)$ скористаємося програмною реалізацією методу Ейлера з попередньої роботи.

2.2.2 Моделювання траєкторій процесу, оцінка збіжності у точці.

Для початку перевіримо, чи виконується умова вигляду:

$$|a(t,x) - a(s,x)| + |b(t,x) - b(s,x)| \leq K(1 + |x|)|t - s|^{1/2},\ \forall t, s \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}$$

У термінах функцій a, b з умови задачі маємо:

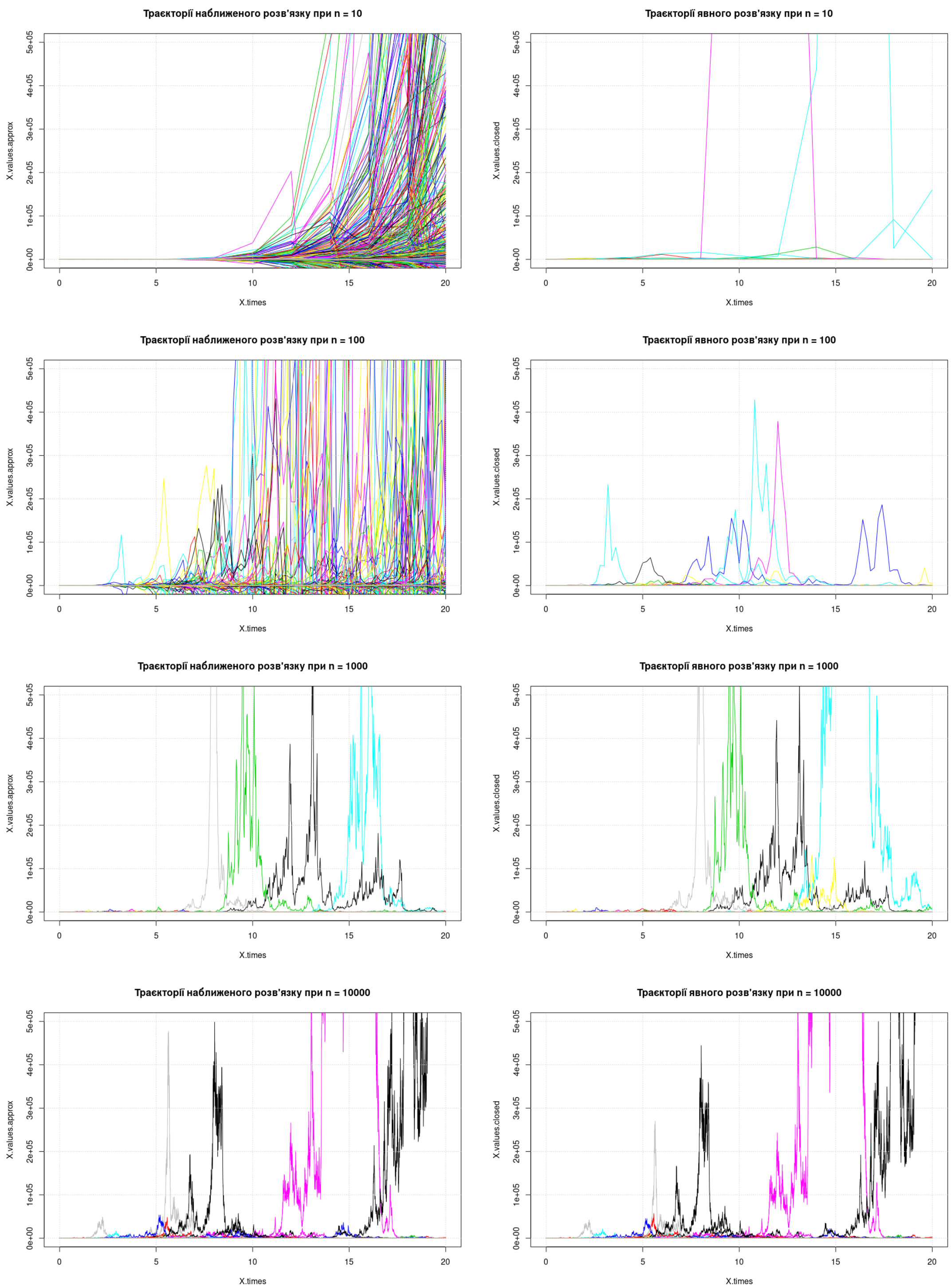
$$|a(t,x) - a(s,x)| + |b(t,x) - b(s,x)| = |x - x| + 2|x - x| = 0 \leq K(1 + |x|)|t - s|^{1/2}, \forall t, s \in [0,T], x \in \mathbb{R}$$

Для довільної сталої $K > 0$. Початкові умови $X(0) = X^n(0) = 2$ квадратично інтегровні як сталі величини. А тому справедлива оцінка вигляду (1). Перевіримо це за допомогою імітаційного моделювання у точках $t = 1, 10, 20$. Логічно моделювати траєкторії процесів на відрізку, що охоплює задачі точки. Наприклад, на $[0, 20]$. Якщо задачі точки не входять у розбиття, обчислимо значення процесу у них використовуючи неперервну інтерполяцію:

$$X^n(t) = X^n(t^n_{m-1}) + a(t^n_{m-1}, X^n(t^n_{m-1}))(t - t^n_{m-1}) + b(t^n_{m-1}, X^n(t^n_{m-1}))(W(t) - W(t^n_{m-1})), t \in [t^n_{m-1}, t^n_m]$$

```
interpolate <- function(t, times, X.values)
{
  n <- length(times)
  m <- times <= t
  j.nearest <- (1:n)[m][sum(m)]
  W.incr <- rnorm(1, mean = 0, sd = sqrt(t - time.idx))
  a.prev <- a(times[j.nearest], X.values[j.nearest])
  b.prev <- b(times[j.nearest], X.values[j.nearest])
  X.values[j.nearest] + a.prev * delta + b.prev * W.incr
}
```

Зобразимо 1000 змодельований траєкторій наближеного та явного розв'язків заданого СДР при $n = 10, 100, 1000, 10000$.



3 Висновки.