Задача фільтрації
зі статистики випадкових процесів

Горбунов Даніел Денисович
1 курс магістратури
група "Прикладна та теоретична статистика"
Варіант №4

22 квітня 2022 р.

Вступ.

Хід роботи.

Постановка задачі.

Розглянемо модель

$$\begin{cases} dX_1(t) = aX_1(t)dt + bdW_1(t), \\ dX_2(t) = AX_1(t)dt + BdW_2(t), \end{cases}$$

де $a = 1.3$, $b = 0.8$, $A = -1$, $B = 1.5$ – задані сталі, а $W = (W_1, W_2)$ – двовимірний вінерівський процес. Припустимо, що $X_1(0) = X_2(0) = 0$. Змоделювати двовимірний процес $X = (X_1, X_2)$. Знайти оптимальний фільтр $\hat{X}_1$ процесу X_1 за спостереженнями процесу X_2, обчисливши $\sigma_t^2 = \mathbb{E}\left[(X_1(t) - \hat{X}_1(t))^2\right]$ як розв'язок рівняння Ріккаті. Побудувати графік із траєкторіями процесів X_1 та $\hat{X}_1$, зробити висновки про якість оцінки.

Теоретична частина.

Розв'язок системи диференціальних рівнянь.

Знаходження явного вигляду оптимального фільтру.

За теоремою 12.5.1 з [1], процес $m_t = \hat{X}_1(t) = \mathbb{E}\left[X_1(t) \mid \mathcal{F}_t^{X_2}\right]$ – це єдиний розв'язок стохастичного диференціального рівняння

$$dm_t = \left(a - \frac{A^2}{B^2}\sigma_t^2\right) m_t dt + \frac{A}{B^2}\sigma_t^2 dX_2(t),\ m_0 = 0, \tag{1}$$

де $h(t) = \sigma_t^2$ задовольняє рівняння Ріккаті:

$$\frac{dh}{dt} = b^2 + 2ah - \frac{A^2}{B^2}h^2,\ h(0) = 0$$

Розв'яжемо його, припускаючи що $a \cdot b \cdot A \cdot B \neq 0$.

Покладемо $k = \frac{A^2}{B^2}$. Це рівняння з відокремленими змінними, тому можна зробити такий перехід:

$$\frac{dh}{kh^2 - 2ah - b^2} = -dt$$

Потрібно розбити дріб у лівій частині на елементарні. Знайдемо нулі многочлена у знаменнику:

$$D = 4a^2 + 4kb^2 = 4(a^2 + kb^2) > 0 \Rightarrow h_{1,2} = \frac{2a \pm 2\sqrt{a^2 + kb^2}}{2k} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + kb^2}}{k}$$

А тому многочлен допускає розклад: $kh^2 - 2ah - b^2 = (h - h_1)(h - h_2)/B^2$. Методом невизначених коефіцієнтів, знаходимо потрібний розклад для лівої частини:

$$\frac{P}{h - h_1} + \frac{Q}{h - h_2} = \frac{P(h - h_2) + Q(h - h_1)}{(h - h_1)(h - h_2)} = \frac{1}{(h - h_1)(h - h_2)}$$

Тобто маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} P = -Q \\ Ph_2 + Qh_1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = -Q \\ P(h_2 - h_1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q = -\frac{1}{h_1 - h_2} = -c \\ P = \frac{1}{h_1 - h_2} =: c \end{cases}$$

А тому попереднє диференціальне рівняння перепишеться у вигляді:

$$cB^2 \cdot \left(\frac{dh}{h - h_1} - \frac{dh}{h - h_2} \right) = -dt$$

Інтегруємо, звідки маємо

$$cB^2 \cdot (\ln |h - h_1| - \ln |h - h_2|) = cB^2 \cdot \ln \left| \frac{h - h_1}{h - h_2} \right| = -t + R$$

Це еквівалентно рівності:

$$\left| \frac{h - h_1}{h - h_2} \right| = e^{R \cdot \frac{1}{cB^2}} e^{-t \cdot \frac{1}{cB^2}}$$

Визначимо сталу R з початкової умови $h(0) = 0$:

$$\left| \frac{h(0) - h_1}{h(0) - h_2} \right| = \left| \frac{h_1}{h_2} \right| = e^{R \cdot \frac{1}{cB^2}}$$

Звідки розв'язок рівняння Ріккаті знаходиться звідси:

$$\left| \frac{h - h_1}{h - h_2} \right| = \left| \frac{h_1}{h_2} \right| \cdot e^{-t \cdot \frac{1}{cB^2}}$$

Оскільки $h_1/h_2 < 0$, тому можна позбутися від модуля у правій частині:

$$\left| \frac{h - h_1}{h - h_2} \right| = -\frac{h_1}{h_2} \cdot e^{-t \cdot \frac{1}{cB^2}}$$

Отже, знаходимо двох кандидатів на розв'язок:

$$h(t) = \frac{1 \pm e^{-t \cdot \frac{1}{cB^2}}}{\frac{1}{h_1} \pm \frac{1}{h_2} \cdot e^{-t \cdot \frac{1}{cB^2}}}$$

Початкову умову задовольняє лише функція:

$$h(t) = \frac{1 - e^{-t \cdot \frac{1}{cB^2}}}{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \cdot e^{-t \cdot \frac{1}{cB^2}}}$$

А тому вона і є розв'язком рівняння Ріккаті.

Чи справді $\sigma_t^2 = h(t) \geq 0$ для довільного $t \geq 0$? У цьому легко переконатися, оцінивши h_2:

$$kh_2 = \frac{13}{10} - \sqrt{\frac{169}{100} + \frac{100}{225} \cdot \frac{64}{100}} = \frac{13}{10} \cdot \left(1 - \sqrt{1 + \frac{6400 \cdot 169}{225}}\right) < 0$$

Отже знаменник завжди додатний, що і доводить невід'ємність σ_t^2. Для обчислення траєкторії фільтру ми не будемо чисельно розв'язувати (1), що призведе до більших похибок при моделюванні. Натомість, за лемою 12.4.1 з [1], ми скористаємося інтегральною формою для $\hat{X}_1(t)$:

$$\hat{X}_1(t) = \int_0^t G(t,s) dX_2(s),\ t \in [0,T],$$

де ядро $G(t,s)$ визначимо, за лемою 12.5.2 з [1], з умов:

$$G(t,s) = \frac{A}{B}\sigma_s^2 g(t,s),\ g(t,s) = \exp\left(\int_s^t \left(a - \frac{A^2}{B^2}\sigma_u^2\right) du\right),\ s \in [0,T],\ t \in [s,T]$$

Практична частина.

Наближене обчислення математичного сподівання та дисперсії за допомогою моделювання.

Результати моделювання.

Висновки.

Література

[1] Випадкові процеси: теорія, статистика, застосування : підруч- ник / Ю. С. Мішура, К. В. Ральченко, Г. М. Шевченко. – 2-ге вид., випр. і допов. – К. : ВПЦ "Київський університет 2021. – 496 с. Посилання: https://drive.google.com/file/d/1efbbcWFKJ5OmNXlTJL7WuC9kKGKZeLY/view (”клікабельне” посилання)