Завдання №2.6
зі статистики випадкових процесів

Горбунов Даніел Денисович
1 курс магістратури
група "Прикладна та теоретична статистика"
Варіант №4

13 квітня 2022 р.

Вступ.

У даній роботі розроблена програму для наближеного обчислення значення оцінки зсуву у однорідній дифузійній моделі. Перевірено асимптотичні властивості оцінок.

Хід роботи.

Постановка задачі.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння:

$$dX_t = \theta a(X_t)dt + b(X_t)dW_t,\ X_0 = x_0,\ t \in [0, T],$$

де $W = \{W_t\}_{t\in[0,T]}$ – вінерівський процес, $x_0 = 1$, $\theta = -1$, $a(x) = 1+\sin(2x)$, $b(x) = 2-\cos(x)$. У моделі вважається невідомий параметр зсуву, θ. Довести, що рівняння має єдиний розв'язок. Розробити програму для знаходження оцінки максимальної вірогідності параметра θ за спостереженнями траєкторії розв'язку X на відрізку $[0, T]$. Для $T = 10, 50, 100, 200$ знайти середні та дисперсії оцінок для $B = 1000$ траєкторій процесу X, змодельованих методом Ейлера. Чи підтверджують одеражані результати консистентність оцінки? Розглянути діаметри розбиття: $\delta = 0.1, 0.001, 0.001$.

Теоретична частина.

Існування та єдиність розв'язку СДР.

У моделі розглядаються однорідні коефіцієнти, тобто такі, що не залежать від часу. Тому для того, щоб існував єдиний розв'язок заданого СДР, достатньо довести Ліпшицевість $a(x)$, $b(x)$ (умова лінійного зростання миттєво буде отримана звідси). Користуючись тригонометричними тотожностями, легко виводимо ліпшицевість: $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$|a(x) - a(y)| = |\sin(2x) - \sin(2y)| = 2|\sin(x-y)\cos(x+y)| \le 2|\sin(x-y)| \le 2|x-y|$$
$$|b(x) - b(y)| = |\cos(x) - \cos(y)| = 2|\sin((x-y)/2)\sin((x+y)/2)| \le 2|\sin((x-y)/2)| \le |x-y|$$

А тому за теоремою про існування та єдиність розв'язку СДР, задане рівняння має єдиний розв'язок на $[0, T]$, де $T > 0$ – довільне.

Оцінка зсуву за МНВ.

Використовуючи метод максимальної вірогідності, була запропонована така оцінка параметра зсуву θ:

$$\hat{\theta}_T^{MLE} = \frac{\int\limits_0^T \frac{a(X_s)}{b^2(X_s)} dX_s}{\int\limits_0^T \frac{a^2(X_s)}{b^2(X_s)} ds} = \theta + \frac{\int\limits_0^T \frac{a(X_s)}{b(X_s)} dW_s}{\int\limits_0^T \frac{a^2(X_s)}{b^2(X_s)} ds}$$

Чи є при заданих умовах $\hat{\theta}_T^{MLE}$ строго консистентною? Перевіримо виконання ще однієї умови: потрібно вимагати, щоб $b(x) \neq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, $a(x) \not\equiv 0$, а $\{\frac{1}{b^2(x)}, \frac{a^2(x)}{b^2(x)}, \frac{a^2(x)}{b^4(x)}\} \subset L_1^{loc}(\mathbb{R})$. Очевидно, що $a(x) \not\equiv 0$, $\forall x \in \mathbb{R} : b(x) \geq 1$, а тому для довільного $N > 0$: трійка функцій $\{\frac{1}{b^2(x)}, \frac{a^2(x)}{b^2(x)}, \frac{a^2(x)}{b^4(x)}\} \subset C[-N, N]$, звідки $\{\frac{1}{b^2(x)}, \frac{a^2(x)}{b^2(x)}, \frac{a^2(x)}{b^4(x)}\} \subset R[-N, N]$, що і доводить локальну інтегровність взятої трійки.

Чи буде $\hat{\theta}_T^{MLE}$ асимптотично нормальною оцінкою? А хто знає.

Практична частина.

Генерування траєкторії за методом Ейлера.

Для фіксованого $n \geq 1$ визначимо $\delta_n = \frac{T}{n}$ і розглянемо рівномірне розбиття $t_m^n = m\delta_n$, $m = \overline{0, n}$ на відрізку $[0, T]$. Виберемо початкове значення наближеного розв'язку $X^n(0)$ як наближення початкової умови $X(0)$, тобто $X^n(0) := X(0)$. В інших вузлах значення наближеного розв'язку методом Ейлера визначимо рекурентно:

$$X^n(t_m^n) = X^n(t_{m-1}^n) + a(t_{m-1}^n, X^n(t_{m-1}^n))\delta_n + b(t_{m-1}^n, X^n(t_{m-1}^n))(W(t_m^n) - W(t_{m-1}^n)),\ m = \overline{1, n}$$

Покажемо програмну реалізацію побудови траєкторій наближених розв'язків СДР за методом Ейлера в R. Опишемо процедуру у вигляді функції.

```
EulerSolverSDE <- function(T.val, n, a, b, x0)
{
  delta <- T.val / n # Визначимо відстань між вузлами
  t.nodes <- (0:n) * delta # Визначимо вузли
  X.approx <- x0 # Наближення у початковий момент часу
  # Рекурентне обчислення значень у наступних вузлах
  for(j in (1:length(t.nodes))[-1])
  {
    a.prev <- a(t.nodes[j-1], X.approx[j-1])
    b.prev <- b(t.nodes[j-1], X.approx[j-1])
    W.incr <- rnorm(1, mean = 0, sd = sqrt(delta))
    X.next <- X.approx[j-1] + a.prev * delta + b.prev * W.incr
    X.approx <- c(X.approx, X.next)
  }
  # Повертає вузли та значення у наближеного розв'язку СДР у них
  list(times = t.nodes, values = X.approx)
}
```

Обчислення значення оцінки зсуву за МНВ.

На відміну від другої роботи, проблема виникає в обчисленні обох (випадкових) інтегралів:

$$I_1(T) = \int\limits_0^T \frac{a(X_s)}{b^2(X_s)} dX_s,\ I_2(T) = \int\limits_0^T \frac{a^2(X_s)}{b^2(X_s)} ds$$

Наблизимо обидва інтеграли відповідними простими функціями, що апроксимують підінтегральні:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a^l\left(X_{\frac{k-1}{n}\cdot T}\right)}{b^2\left(X_{\frac{k-1}{n}\cdot T}\right)} \cdot \mathbf{1}\left\{\frac{k-1}{n}\cdot T \le t < \frac{k}{n}\cdot T\right\},\ l = 1, 2$$

Тоді наближення для заданих інтегралів матимуть вигляд:

$$I_1(T) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{a\left(X_{\frac{k-1}{n}\cdot T}\right)}{b^2\left(X_{\frac{k-1}{n}\cdot T}\right)} \cdot \left(X_{\frac{k}{n}\cdot T} - X_{\frac{k-1}{n}\cdot T}\right),\ I_2(T) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{a^2\left(X_{\frac{k-1}{n}\cdot T}\right)}{b^2\left(X_{\frac{k-1}{n}\cdot T}\right)} \cdot \frac{1}{N}$$

Програмна реалізація вищенаведених міркувань в R наступна:

```
# Обчислення оцінки для зсуву
nominator <- function(X.traj, a, b)
{
  f <- function(x) { a(1, x) / (b(1, x))^2 }
  sum(f(X.traj[-length(X.traj)]) * diff(X.traj))
}

denominator <- function(X.traj, a, b, delta)
{
  f <- function(x) { (a(1, x) / b(1, x))^2 }
  sum(f(X.traj[-length(X.traj)]) * delta)
}

theta.mle <- function(X.traj, a, b, delta)
{
  nominator(X.traj, a, b) / denominator(X.traj, a, b, delta)
}
```

Наближене обчислення математичного сподівання та дисперсії за допомогою моделювання.

Потрібно перевірити, чи справді виконується умова строгої конзистентності на практиці. Для цього будемо оцінювати математичне сподівання та дисперсію оцінки при збільшенні часу T (або кількості вузлів n) будемо за допомогою імітаційного моделювання, а саме:

1. Згенеруємо 1000 траєкторій процесу X_t.
2. За кожною траєкторією підрахуємо значення оцінок.
3. За отриманими масивами зі значень оцінок взяти вибіркове середнє та виправлену вибіркову дисперсію.

Результати моделювання.

Результати наводимо у вигляді таблиці.

Вибіркові середні по значенням оцінки $\hat{\theta}_T^{MLE}$:				
δ \ T	**10**	**50**	**100**	**200**
0.1	-1.0172926	-0.99446740	-0.99575806	-0.998279483
0.01	-1.0753324	-1.00721892	-1.00652552	-1.003159510
0.001	-1.0600536	-1.01583199	-1.00873447	-1.005148363
Вибіркові дисперсії по значенням оцінки $\hat{\theta}_T^{MLE}$:				
δ \ T	**10**	**50**	**100**	**200**
0.1	0.1626376	0.03376343	0.01611345	0.008262351
0.01	0.1885553	0.03300403	0.01822775	0.008743977
0.001	0.1780645	0.03479323	0.01687158	0.008349471

Як видно, при збільшенні T оцінка зсуву стає більш точною (ближче коливається навколо справжнього значення параметра). Тому можна вважати, що умова уконзистентності оцінки справджується на практиці. Різниці між кількістю вузлів несуттєва, однак у певному наближенні це уточнює значення оцінки.

Висновки.

Оцінка методу максимальної вірогідності працює адекватно та з нею можна отримати хороші результати при малих T та кількості вузлів n.