Завдання №1.1
зі статистики випадкових процесів

Горбунов Даніел Денисович
1 курс магістратури
група "Прикладна та теоретична статистика"

23 квітня 2022 р.

1 Вступ.

У даній роботі перевірено умови існування та єдиності розв'язку заданого стохастичного диференціального рівняння (далі СДР) із невипадковими початковими умовами. Застосовано метод Ейлера для наближеного моделювання траєкторій розв'язків СДР.

2 Хід роботи.

2.1 Постановка задачі.

Нехай $\{W(t), t \in [0,T]\}$ – вінерівський процес. Для заданих $a, b : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та початкового значення $x_0 \in \mathbb{R}$ довести існування та єдиність розв'язку стохастичного диференціального рівняння:

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t),\ X(0) = x_0,\ t \in [0,T]$$
$$a(t,x) = \sqrt{x^2 + 5t}, b(t,x) = 2x\ln(1+2t),\ x_0 = 0,5$$

Написати програму для моделювання наближеного розв'язку за допомогою методу Ейлера для заданого T і діаметра розбиття δ. Побудувати графік, який містить 10 різних траєкторій розв'язку на відрізку $[0,1]$, використовуючи діаметр розбиття $\delta = 0,01$. Виконати те саме завдання для $\delta = 0,001$.

2.2 Розв'язання задачі.

2.2.1 Існування та єдиність розв'язку.

Перевіримо умову лінійного зростання: $\forall t \in [0,T]$ та $\forall x \in \mathbb{R}$ ми зауважимо, що $\ln(1+2t)$ є зростаючою по t функцією, а тому

$$\ln(1+2t) \leq \ln(1+2T) \Rightarrow |b(t,x)| = 2|x|\ln(1+2t) \leq 2\ln(1+2T)|x| \leq 4T|x|$$

Для оцінки $\sqrt{x^2+5t}$ скористаємося нерівністю Мінковського для сум. Нагадаємо, що для довільного $p \geq 1$ виконується:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ де } a_j, b_j \in \mathbb{R}$$

Покладемо $n = 2$, $a_1 = x$, $a_2 = 0$ та $b_1 = 0, b_2 = \sqrt{5t}$, а $p = 2$. Тоді маємо оцінку:

$$\sqrt{x^2 + 5t} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{5t})^2} \le |x| + \sqrt{5t} \le |x| + \sqrt{5T}$$

Комбінуємо отримані оцінки:

$$|a(t,x)| + |b(t,x)| = \sqrt{x^2 + 5t} + 2|x|\ln(1+2t) \le \sqrt{5T} + (1+4T)|x| = \sqrt{1+4T} + (1+4T)|x| =$$
$$= (1+4T)\left(\frac{1}{\sqrt{1+4T}} + |x|\right) \le K(1+|x|),\ K := (1+4T)$$

Отже умова лінійного зростання виконана. Перевіримо Ліпшицевість: $\forall t \in [0,T]$ та $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$|b(t,x) - b(t,y)| = 2\ln(1+2t)|x-y| \le 2\ln(1+2T)|x-y| \le 4T|x-y|$$

Далі, оцінимо абсолютний приріст для $a(t,x)$:

$$|a(t,x) - a(t,y)| = \left|\sqrt{x^2 + (\sqrt{5t})^2} - \sqrt{y^2 + (\sqrt{5t})^2}\right| \le |x-y|$$

Комбінуємо оцінки, маємо Ліпшицевість:

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \le K|x-y|,\ K := (1+4T)$$

Отже умова лінійного зростання та Ліпшицевість виконана для a, b, а тому (за теоремою) існує єдиний розв'язок СДР. А тому є сенс шукати наближений розв'язок за допомогою методу Ейлера.

2.2.2 Метод Ейлера.

Для фіксованого $n \ge 1$ визначимо $\delta_n = \frac{T}{n}$ і розглянемо рівномірне розбиття $t_m^n = m\delta_n$, $m = \overline{0,n}$ на відрізку $[0,T]$. Виберемо початкове значення наближеного розв'язку $X^n(0)$ як наближення початкової умови $X(0)$, тобто $X^n(0) := X(0)$. В інших вузлах значення наближеного розв'язку методом Ейлера визначимо рекурентно:

$$X^n(t_m^n) = X^n(t_{m-1}^n) + a(t_{m-1}^n, X^n(t_{m-1}^n))\delta_n + b(t_{m-1}^n, X^n(t_{m-1}^n))(W(t_m^n) - W(t_{m-1}^n)),\ m = \overline{1,n}$$

Покажемо програмну реалізацію побудови траєкторій наближених розв'язків СДР за методом Ейлера в R. Опишемо процедуру у вигляді функції.

```
EulerSolverSDE <- function(T.val, n, a, b, x0)
{
  delta <- T.val / n # Визначимо відстань між вузлами
  t.nodes <- (0:n) * delta # Визначимо вузли
  X.approx <- x0 # Наближення у початковий момент часу
  # Рекурентне обчислення значень у наступних вузлах
  for(j in (1:length(t.nodes))[-1])
  {
    a.prev <- a(t.nodes[j-1], X.approx[j-1])
    b.prev <- b(t.nodes[j-1], X.approx[j-1])
    W.incr <- rnorm(1, mean = 0, sd = sqrt(delta))
    X.next <- X.approx[j-1] + a.prev * delta + b.prev * W.incr
    X.approx <- c(X.approx, X.next)
  }
  # Повертає вузли та значення у наближеного розв'язку СДР у них
  list(times = t.nodes, values = X.approx)
}
```

Побудуємо 10 траєкторій розв'язку на відрізку $[0,1]$ з діаметром розбиття $\delta = 0,01$. Отже кількість вузлів у розбитті дорівнює $n + 1 = \frac{T}{\delta} + 1 = 100 + 1 = 101$. Якщо $\delta = 0,001$, то ясно, що кількість всього 1001. Оскільки траєкторії будуються лише на вузлах, то інтерполяцію не використовуємо.

```
# a(t,x) та b(t,x) з умови задачі
a <- function(t, x)
{
  sqrt(x^2 + 5*t)
}

b <- function(t, x)
{
  2*x*log(1 + 2*t)
}

# Для повторного відтворення результатів
set.seed(0)

n <- 100
x0 <- 0.5
B <- 10

# Знаходимо 10 різних траєкторій
X.times <- c()
X.values <- c()
for(k in 1:B)
{
  approx.result <- EulerSolverSDE(1, n, a, b, x0)
  X.times <- c(X.times, approx.result$times)
  X.values <- c(X.values, approx.result$values)
}
# Малюємо траєкторії
plot(X.times[1:(n+1)], X.values[1:(n + 1)], xlab = "t", ylab = "X(t)",
     type = "l", col = 1, ylim = c(min(X.values), max(X.values)),
     main = paste("Траєкторії наближеного розв'яку X(t), delta =", 1/n))
for(k in (1:B)[-1])
{
  idx <- ((n + 1)*(k-1)+1):((n + 1)*k)
  lines(X.times[idx], X.values[idx], type = "l", col = k)
}
```

Далі покажемо графіки траєкторій для розбиттів $\delta = 0,01$ та $\delta = 0,001$.

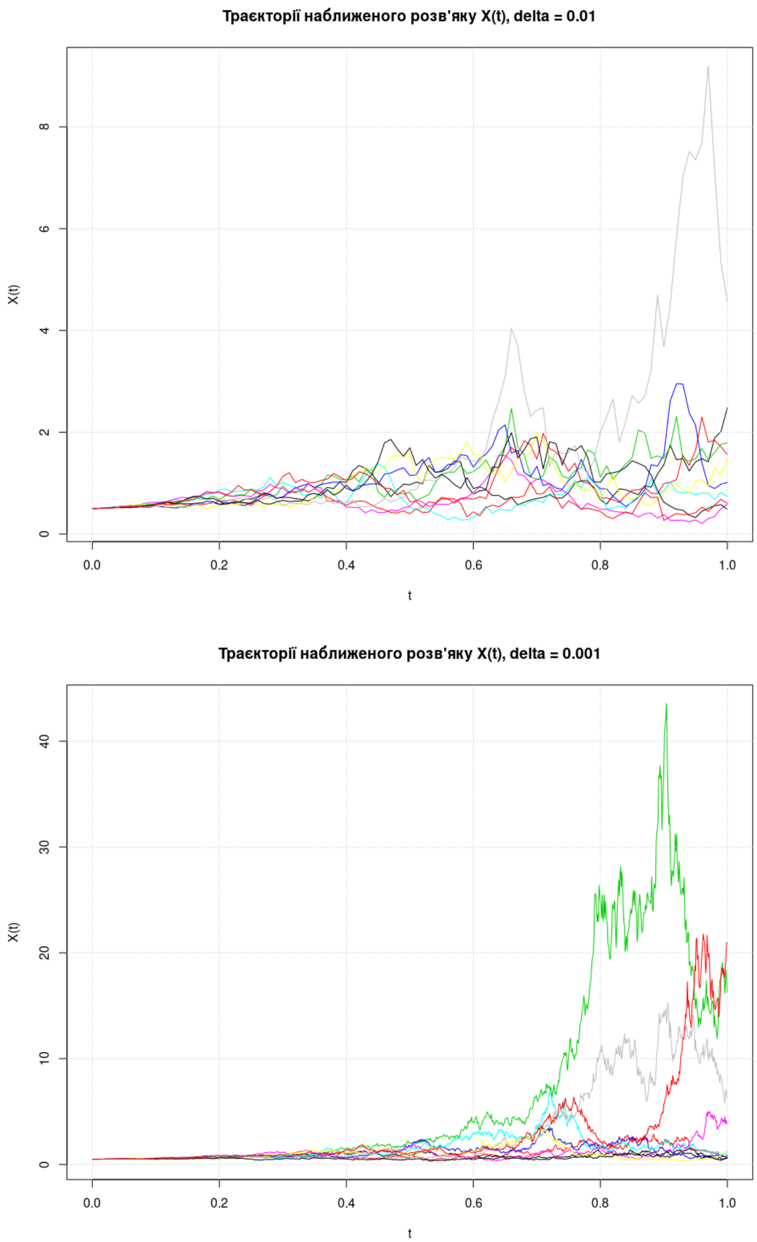

Рис. 1: Траєкторії наближеного розв'язку СДР у вузлах при $\delta = 0,01$ та $\delta = 0,001$.

3 Висновки.

Метод Ейлера, здається, працює?