№7. Сравнение бесконечно малых функций

‹Все конспекты›
:LiStepBack: Прошлая: №6. Предел функции
:LiStepForward: **Следующая:**

Оглавление

Сравнение бесконечно малых функций

Прошлая лекция:

> ### Сравнение бесконечно малых функций
>
> 1. Если $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то $f(x)$ — бесконечно малая высшего порядка, чем $g(x)$
>   #Обозначение $\boxed{f(x) = o(g(x))}$
> 2. Если $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, то $f(x)$ — бесконечно малая низшего порядка, чем $g(x)$
>   #Обозначение $\boxed{g(x) = o(f(x))}$
> 3. Если $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$, то $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые равного порядка

#Определение

Если для бесконечно малых функций $f(x)$ и $g(x)$ $x \to x_0$ одного порядка получим, что $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = 1$, то бесконечно малые называются эквивалентными

$$\boxed{f(x) \sim g(x), x \to x_0}$$

Таким образом две функции называются эквивалентными, если предел их отношения равен единице

#Утверждение

При вычитании эквивалентных бесконечно малых функций получим бсеконечно малую функцию высшего порядка.

$$\boxed{f(x) \sim g(x), x \to x_0 \implies f(x) - g(x) = o(f(x))}$$

Сравнение бесконечно больших функций

$f(x)$ и $g(x)$ бесконечно большие при $x \to x_0$

1. $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = 0 \implies f(x) \text{ Б. Б. низшего порядка, чем } g(x)$$

2. $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \infty \implies f(x) \text{ Б.Б. высшего порядка, чем } g(x)$$

3. $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = C_{\neq\infty}^{\neq 0} \implies f(x) \text{ и } g(x) \text{ Б.Б. одного порядка}$$

4. $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = 1 \implies f(x) \sim g(x)$$

#Утверждение

При вычитании двух эквивалентных Б.Б функций получим Б.Б низшего порядка или конечную функцию.

Таким образом неопределённость $\{\infty-\infty\}$ означает вычитание эквивалентных Б.Б. функций.

Примеры

#Пример

$\frac{\sqrt{2n^2+1}}{\sqrt{2}n}-\frac{\sqrt{n^2+2}}{n}\overset{\not{\text{экв}}}{\to}\infty$

$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}-\frac{\sqrt{n^2+2}}{n}=\{\infty-\infty\}=\frac{n^2+1-n^2+2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}}=-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}}=-\frac{1}{\infty}=0$

Правило эквивалентности

Любой множитель в пределе можно заменить на эквивалентный

$$f(x)\sim g(x), x\to x_0 \implies \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)^2$$

Слагаемые нельзя поменять на эквивалентные только в двух случаях:

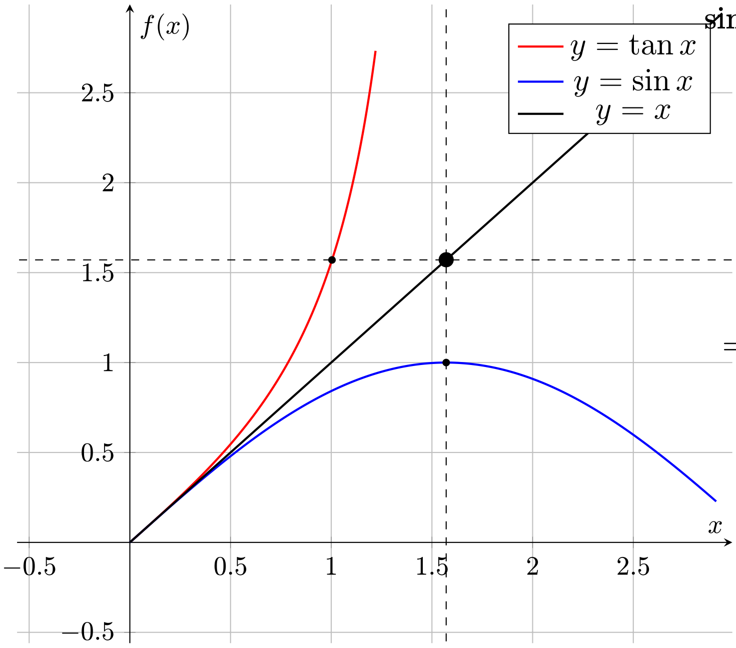
- При вычитании эквивалентных Б.М., т.к получим Б.М. высшего порядка
- При вычитании эквивалентных Б.Б., т.к получим Б.Б. низшего порядка

Пункт IV. Замечательные пределы

I замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=1} \implies \boxed{\sin x = x, x\to 0}$$

#Доказательство



$$\sin x \leq x \leq \tan x \mid \div \sin x$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

$$x \to 0$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq 1 \implies$$

$$\implies \boxed{\frac{x}{\sin x} \to 1, x \to 0}$$

Выведем табличные значения для тригонометрических и обратных тригонометрических функций

$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \implies$

$$\implies \boxed{\text{tg } x \sim x, x \to 0}$$

$$\boxed{\text{ctg } x = \frac{1}{\text{tg } x} \sim \frac{1}{x}, x \to 0}$$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 1 \implies$

$$\implies \boxed{1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, x \to 0}$$

$\sin x \sim x, x \to \implies x \sim \arcsin x, x \to 0 \implies$

$$\implies \boxed{\arcsin x \sim x, x \to 0}$$

$$\boxed{\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \sim \frac{\pi}{2} - x, x \to 0}$$

$\text{tg } x \sim x, x \to 0, x \sim \text{arctg } x, x \to 0 \implies \boxed{\text{arctg } x \sim x \to 0}$

$\text{arcctg } x = \frac{\pi}{2} - \text{arctg } x \sim \frac{pi}{2} - x$

II замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\{1^\infty\}=e}$$

#Доказательство

Из определения числа e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\{1^\infty\}=e$$

Делаем в В.З.П $\frac{1}{n}$ на x $\implies$

$$\implies \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\{1^\infty\}=e$$

Выведем табличные значения для остальных функций

$$\boxed{e^x-1\sim}\ ((1+x)^{\frac{1}{x}})^x=1+x-1=\boxed{\sim x, x\to 0}$$

$$\boxed{a^x-1\overset{\text{потенциров.}}{\sim}}\ e^{\ln a^x}-1=e^{x\ln a}-1=\boxed{\sim x\ln a, x\to 0}$$

$$\boxed{\ln(1+x)\sim}=x\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)=x\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\sim x\ln e=\boxed{\sim x, x\to 0}$$

$$\boxed{\log_a(1+x)\sim}=\frac{\ln(1+x)}{\ln a}=\boxed{\sim\frac{x}{\ln a}, x\to 0}$$

$$\boxed{(1+x)^a-1\sim}=e^{\ln(1+x)^a}-1=e^{a\ln(1+x)}-1\sim e^{ax}-1\sim\boxed{ax, x\to 0}$$

Таблица эквивалентности Б.М. функций при $f(x)\to 0$

- [ ] $\boxed{\text{доказать}}$!!!!!
- $\boxed{\sin f(x)\sim f(x), f(x)\to 0}$
  Заменим $f(x)$ на t
  $\cos t\le\frac{\sin t}{t}\le 1$
  При $t\to 0$ правая и левая границы сходятся к 1
  $\Downarrow$
  $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$
  $\Downarrow$
  $\sin t\sim t, t\to 0$
  Заменяя t обратно на $f(x)$ мы получаем искомую эквивалентность

- $\boxed{\operatorname{tg} f(x) \sim f(x), f(x) \to 0}$
  $\operatorname{tg} f(x) = \frac{\sin f(x)}{\cos f(x)}$
  При $f(x) \to 0, \cos x \to 1$
  $\Downarrow$
  $\operatorname{tg} f(x) = \frac{\sin f(x)}{1}, f(x) \to 0$
  $\Downarrow$
  $\operatorname{tg} f(x) \sim \sin f(x) \sim f(x), f(x) \to 0$

- $\boxed{1 - \cos f(x) \sim \frac{f^2(x)}{2}, f(x) \to 0}$
  Докажем, что $\frac{1-\cos f(x)}{\frac{f^2(x)}{2}} \to 1$ при $f(x) \to 0$
  Важно, что $1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$
  $t = f(x)$
  $\frac{1-\cos f(x)}{\frac{f^2(x)}{2}} = \frac{2\sin^2 \frac{f(x)}{2}}{\frac{f^2(x)}{x}} = \left(\frac{\sin \frac{f(x)}{2}}{\frac{f(x)}{2}}\right)^2$
  При $f(x) \to 0$ известный предел $\frac{\sin u}{u} \to 1$
  $\Downarrow$
  $\left(\frac{\sin \frac{f(x)}{2}}{\frac{f(x)}{2}}\right)^2 \to 1$
  Отсюда $\frac{1-\cos(f(x))}{\frac{f^2(x)}{2}} \to 1$
  $\Downarrow$
  $1 - \cos f(x) \sim \frac{f^2(x)}{2}, f(x) \to 0$

3. $\arcsin f(x) \sim f(x), f(x) \to 0$
4. $\operatorname{arctg} f(x) \sim f(x), f(x) \to 0$
5. $e^{f(x)} - 1 \sim f(x), f(x) \to 0$
6. $a^{f(x)} - 1 \sim f(x) \cdot \ln a, f(x) \to 0$
7. $\ln(1 + f(x)) \sim f(x), f(x) \to 0$
8. $\log_a(1 + f(x)) \sim \frac{f(x)}{\ln a}, f(x) \to 0$
9. $(1 + f(x))^a - 1 \sim a \cdot f(x), f(x) \to 0$

Сводка из таблиц эквивалентности

- $\sin x \sim x, x \to 0$
- $\operatorname{tg} x \sim x, x \to 0$
- $\operatorname{ctg} x \sim \frac{1}{x}, x \to 0$
- $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, x \to 0$
- $\arcsin x \sim x, x \to 0$
- $\arccos x \sim \frac{\pi}{2} - x, x \to 0$

- $\operatorname{arctg} x \sim x, x \to 0$
- $\operatorname{arcctg} x \sim \frac{\pi}{2} - x, x \to 0$

- $a^x - 1 \sim x \ln a, x \to 0$
- $\log_a (1 + x) \sim \frac{x}{\ln a}, x \to 0$
- $(1 + x)^a - 1 \sim ax, x \to 0$