

## №8. Неопределённости

Навигация ↗

[<Все конспекты>](#)[◀ Прошлая:](#)[▶ Следующая:](#) Оглавление

1. [I.  \$\lim\_{x \rightarrow 0} \frac{0}{0}\$](#) 
  1. [Примеры](#)
2. [II.  \$\lim\_{x \rightarrow \infty} \frac{\infty}{\infty}\$](#) 
  1. [Примеры](#)
3. [III.  \$\lim\_{x \rightarrow 0} 0 \cdot \infty\$](#) 
  1. [Пример](#)
  2. 
$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = 0 \cdot \ln(+0) = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow +0} x \cdot \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{\infty}{\infty}}{\frac{\infty}{\infty}}}$$

$$\overset{\text{Правило Лопиталья}}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow +0} -x = 0$$
4. [VI.  \$\lim\_{x \rightarrow \infty} \frac{\infty}{\infty}\$](#)
5. [V.  \$\lim\_{x \rightarrow \infty} 1^{\infty}\$](#) 
  1. [II замечательный предел](#)
  2. [Примеры](#)
6. [VI, VII  \$\lim\_{x \rightarrow 0} 0^0, \lim\_{x \rightarrow \infty} \infty^0\$](#)
7. [Операция потенцирования по основанию  \$e\$](#)

I.  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ 

## I. Классическое правило

1. Делим столбиком на  $x - x_0$

2. Разность корней квадратных умножаем и делим на сопряжённое уравнение. Разность (сумму) корней кубических умножаем и делим на неполный квадрат суммы (разности) (№10).

## II. Правило эквивалентности

Необходимо в числителе и знаменателе воспользоваться [таблицей эквивалентности бесконечно малых функций](#)

Если  $x \rightarrow x_0 \neq 0$ , то необходимо сделать замену  $t = x - x_0 \implies x = t + x_0$

## III. Правило Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

## Примеры

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 4x + 1} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \dots$$

### 1. Классическое правило

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} = 2x - 1$$

$$\frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} = 3x - 1$$

$\Downarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{3x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

### 2. Правило эквивалентности

$$x \rightarrow 1 \implies x - 1 \rightarrow 0 \implies t = x - 1 \implies x = t + 1, t \rightarrow 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(t+1)^2 - 3(t+1) + 1}{3(t+1)^2 - 4(t+1) + 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2((1+t)^2 - 1) - 3((1+t) - 1)}{3((1+t)^2 - 1) - 4((1+t) - 1)}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 2 \cdot t - 3t}{3 \cdot 2 \cdot t - 4t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2t} = \frac{1}{2}$$

### 3. Правило Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - 3x + 1)'}{(3x^2 - 4x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 3}{6x - 4} = \frac{4 - 3}{6 - 4} = \frac{1}{2}$$

II.  $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ 

## I. Классическое правило

Необходимо числитель и знаменатель разделить на слагаемые знаменателя, содержащую бесконечно большую высшего порядка.

## II. Правило эквивалентности

**Использовать в типовом запрещено**

Сумма, эквивалентная слагаемому, содержащему бесконечно большую высшего порядка.

## III. Правило Лопиталя

Остаётся прежним и для  $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$

## Примеры

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{4x^2 - 5x + 1}$$

## 1. Классическое правило

$$\boxed{\dots =} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2}}{\frac{4x^2 - 5x + 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} \boxed{= \frac{3}{4}}$$

## 2. Правило эквивалентности

$$\boxed{\dots =} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{4x^2} \boxed{= \frac{3}{4}}$$

## 3. Правило Лопиталя

$$\boxed{\dots =} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 4}{8x - 5} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

III.  $\{0 \cdot \infty\}$

Необходимо один из множителей перенести в знаменатель и раскрыть неопределённость  $\left\{\frac{0}{0}\right\}$  или  $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ .

### Пример

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x} = 0 \cdot \ln(+0) = \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} \xrightarrow{\text{Правило Лопиталя}} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'} = \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \frac{1}{-x^{-2}}$$

### VI. $\{\infty - \infty\}$

Необходимо используя тождественные преобразования (приведение к общему знаменателю) используя формулы сокращённого умножения и т.д. привести к неопределённости  $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$

### V. $\{1^\infty\}$

Необходимо используя II замечательный предел привести к неопределённости  $\left\{\frac{0}{0}\right\}$  или  $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$

### II замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1^\infty = e = 2.71$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty = 2.7$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = \{1^\infty\} = e}$$

### Примеры

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+4}\right)^{3x-1} &= \{1^\infty\} \Rightarrow \text{II. замечательный предел} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\overset{\text{к общему знам.}}{2x+3} - 2x-4}{2x+4} - 1\right)^{3x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+3-2x-4}{2x+4}\right)^{3x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{2x+4}\right)^{3x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{2x+4}\right)^{\frac{2x+4}{-1} \cdot \frac{-1}{2x+4} \cdot (3x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-3x+1}{2x+4}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-3x+\frac{1}{x}}{2+\frac{4}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{3}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{e^3}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} ((\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}) = \{1^\infty\} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos(x) - 1)^{\operatorname{ctg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + (\cos(x) - 1) \frac{1}{\cos(x) - 1} \right]^{\frac{\cos(x) - 1}{1} \cdot \operatorname{ctg}^2 x} = e^{\frac{(\operatorname{ctg}^2 x)(\cos(x) - 1)}{1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-(1 - \cos(x))}{\operatorname{ctg}^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

## VI, VII $\{0^0\}, \{\infty^0\}$

После потенцирования  $\Rightarrow \{0 \cdot \infty\} \Rightarrow \left\{\frac{0}{0}\right\}$  или  $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} \Rightarrow$  **Правило Лопиталя**

В 5 типовом расчёте необходимо знать предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \{\infty^0\} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln n^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} \stackrel{\text{Правило Лопиталя}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1}$$

## Операция потенцирования по основанию $e$

$$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

После потенцирования получаем **сложную показательную функцию**. Поэтому функция  $y = f(x)^{g(x)}$  называется **сложно показательной функцией**