№6. Предел функции

‹Все конспекты›

:LiStepBack: Прошлая: №5. Введение в мат. анализ
:LiStepForward: **Следующая:** №7. Сравнение бесконечно малых функций

Оглавление

План

1. Предел функции в точке и на бесконечности, односторонние пределы.
2. Свойства пределов. Виды неопределённости
3. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Их сравнения
4. Замечательные пределы. Таблица эквивалентности бесконечно малых функций
5. Правила раскрытия

Определения

Предел функции в точке

#Определение

Число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0:$

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \epsilon$$

#Пример

Если функция не существует в точке x_0, ($f(x_0)\nexists$), то $\lim_{x \to x_0} f(x) \exists$

#Пример

$$\boxed{y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4}}$$

$$\mathbb{D}(f): x^2 - 4 \neq 0,\ x \neq 2,\ x \neq -2$$

$$x \in (-\infty; 2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} = \{\frac{0}{0}\} = \lim_{x \to -2} \frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{x}{x-2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} = \frac{8}{0}\ ???\ \boxed{+\infty \text{ или } -\infty}$$

Пределы слева и справа

#Определение

- Если $x \to x_0$, $\boxed{\boxed{x > x_0}} \implies a$ - предел функции в (.) x_0 **справа**

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a$$

- Называется **пределом слева**, если $\boxed{\boxed{x < x_0}}$

#Утверждение

$\lim_{x \to x_0} f(x) \exists$, если существуют пределы слева и справа, конечны и **равны между собой.**

Чтобы вычислить пределы слева и справа при делении *ненулевого* числа на ноль, необходимо **знаменатель разложить на множители**.

#Пример

$$y = \frac{x^2+2x}{x^2-4} = \frac{x^2+2x}{(x-2)(x+2)}$$

$$x = 2 \text{ т.р}$$

$$\boxed{f(2+0) = \frac{8}{(2+0-2)(2+0+2)} = \frac{8}{+0\cdot 4} = \boxed{+\infty}} \implies \uparrow$$

$$f(2-0) = \frac{8}{(2-0-2)(2-0+2)} = \frac{8}{-0\cdot 4} = -\infty$$

Предел на бесконечность

Число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\epsilon > 0,\ \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall x > N \implies |f(x) - a| < \epsilon$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a = f(+\infty)$$

Если $\forall x < -N \implies |f(x) - a| < \epsilon$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a = f(-\infty)$$

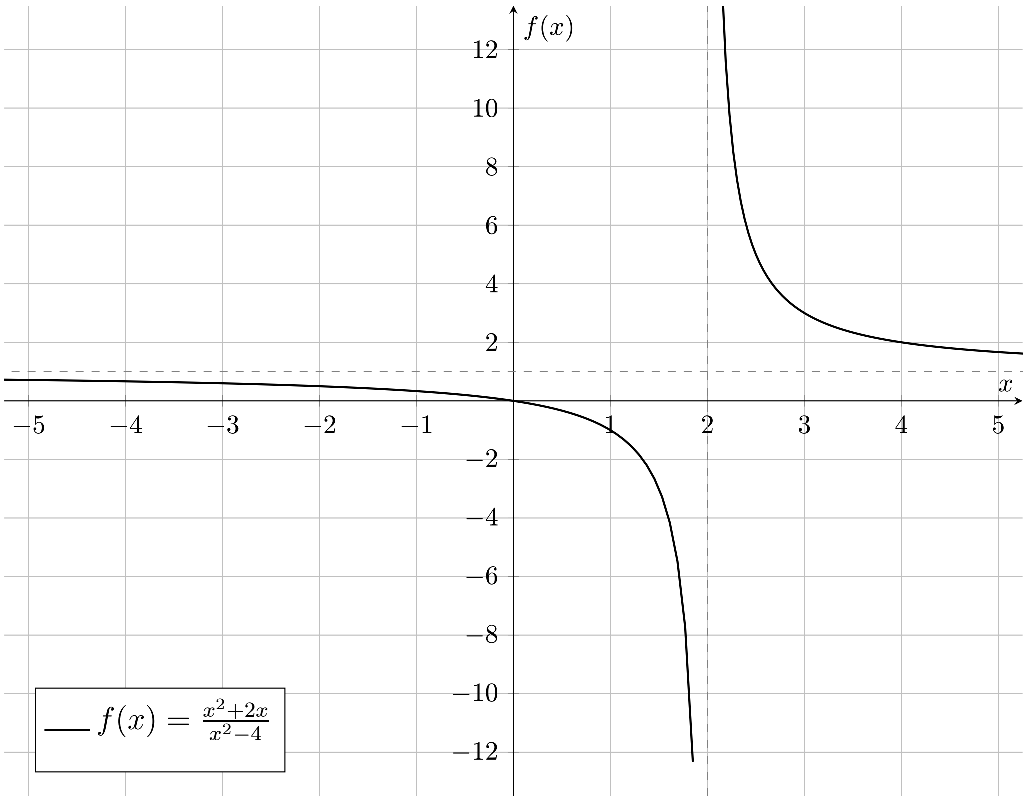
#Пример

$$f(+\infty) = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty} = \frac{x^2+2x}{x^2-4}, \text{К. П.} = \lim_{x\to\infty} = \frac{1+\frac{2}{x}^{=0}}{1-\frac{4}{x^2}^{=0}} = 1 \implies y = 1, \text{ПГА}$$

$$f(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{2}{x}^{=0}}{1-\frac{4}{x^2}^{=0}} = 1 \implies y = 1, \text{ЛГА}$$

Построим график функции $y = \frac{x^2+2x}{x^2-4}$

№6. Предел функции



Свойства пределов

#Свойства

1. Постоянный множитель можно вынести за знак предела

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} Cf(x) = C\lim_{x\to x_0} f(x)}$$

2. Предел от суммы или разности равен сумме или разности пределов

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)}$$

Исключение: $\{\infty - \infty\}$

3. Предел произведения равен произведению пределов

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)}$$

Исключение: $\{0 \cdot \infty\}$

4. Предел от частного равен частному пределу

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}}$$

Исключения: $\{\frac{0}{0}\}, \frac{A}{0}, \{\frac{\infty}{\infty}\}$

5. Предел от степени

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} = (\lim_{x\to x_0} f(x))^{\lim_{x\to x_0} g(x)}}$$

Исключения: $\{0^0\}, \{1^\infty\}, \{\infty^0\}$

6. Предел от сложной функции

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x))}$$

#Примечание

Все неопределённости (на данный момент)

$$\left\{\frac{0}{0}\right\}, \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}, \{0\cdot\infty\}, \{\infty-\infty\}, \{1^\infty\}, \{0^0\}, \{\infty^0\}$$

Бесконечно большие и бесконечно малые функции

- $f(x)$ бесконечно малое при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$
- $f(x)$ бесконечно большое при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$

Утверждения

#Теорема #Утверждение

1. При делении не бесконечно большой функции на бесконечно большую функцию мы получим бесконечно малую

$$\left\{\frac{1}{\infty} = 0\right\} \implies \left\{\frac{1}{\text{б.б}} = \text{б.м}\right\}$$

2. При делении не бесконечно малой функции на бесконечно малую функцию мы получим бесконечно большую

$$\left\{\frac{1}{0}=\infty\right\} \implies \left\{\frac{1}{\text{б.м}}=\text{б.б}\right\}$$

Сравнение бесконечно малых функций

1. Если $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, то $f(x)$ — бесконечно малая высшего порядка, чем $g(x)$
   #Обозначение $\boxed{f(x)=o(g(x))}$
2. Если $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$, то $f(x)$ — бесконечно малая низшего порядка, чем $g(x)$
   #Обозначение $\boxed{g(x)=o(f(x))}$
3. Если $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=C\neq 0$, то $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые равного порядка

Замечательные пределы #Примечание

Классические замечательные пределы при $x\to 0$:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$
4. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$