№9. Непрерывность функций

Навигация

<Все конспекты>
Прошлая:
Следующая:

Оглавление

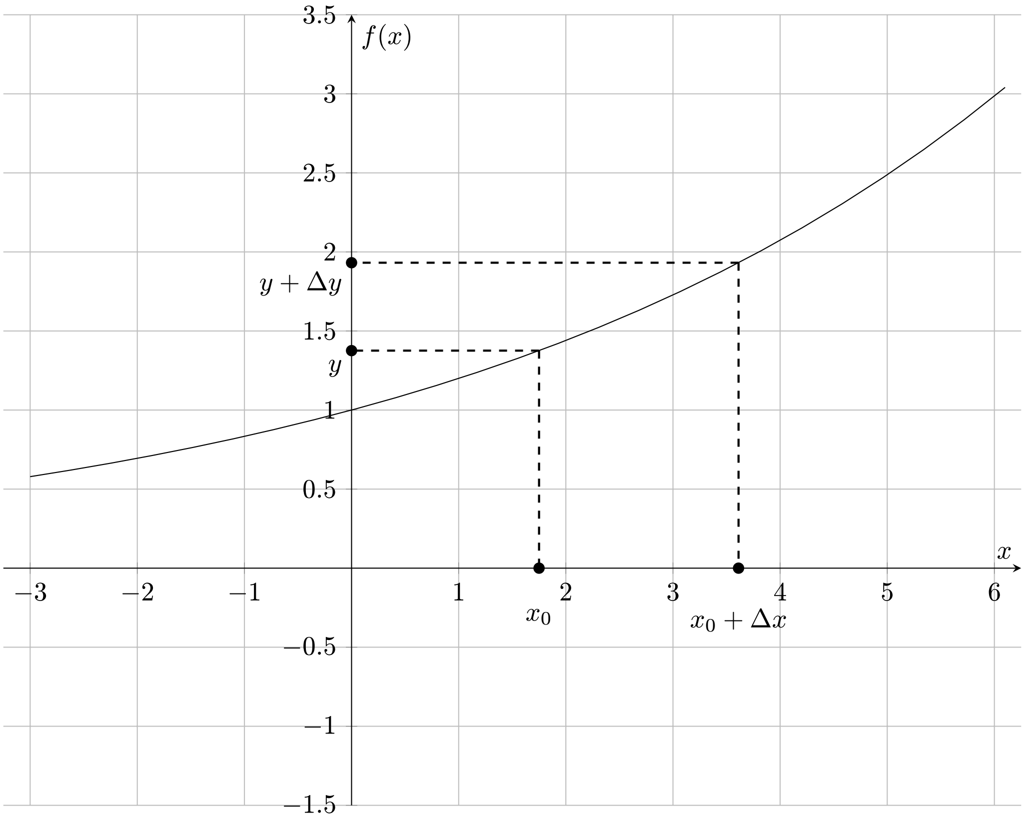
1. План
2. 1. Непрерывность функции в точке.
    1. Пример
    2. Условие непрерывности функции в точке
    3. Классификация точек разрыва
        1. Виды точек разрыва
    4. Свойства функций непрерывных точек
    5. Теорема о непрерывности
3. 2.
    1. Классификация асимптот

План

1. Непрерывность функции в точке. Классификации точки разрыва. Теорема о непрерывности
2. Асимптоты графика функций
3. Непрерывность функции на отрезке

1. Непрерывность функции в точке.

Пусть дана функция $f(x)$ определённая в точке x_0. Дадим приращение Δx. Тогда функция получит приращение Δy



$$\boxed{\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$$

Число Δy, равное $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется приращением функции.
Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если её приращение Δy в этой точке $\to 0$ при $\Delta x \to 0$

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0}$$

Пример

$$y = x^2 \implies \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 =$$

$$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = \boxed{2x_0\Delta x + \Delta x^2} \implies$$

$$\implies \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0\Delta x + \Delta x^2) = 0 \implies \boxed{y = x^2 \text{ непрерывная } \forall x}$$

Определение приращения функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

$$x = x_0 + \Delta x \implies \Delta x = x - x_0$$

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

Условие непрерывности функции в точке

Предел от функции в точке $\exists$, если существуют пределы слева и справа, равные между собой
Таким образом, окончательно получим **условие непрерывности функции в точке:**

$$\boxed{f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)}\ (1)$$

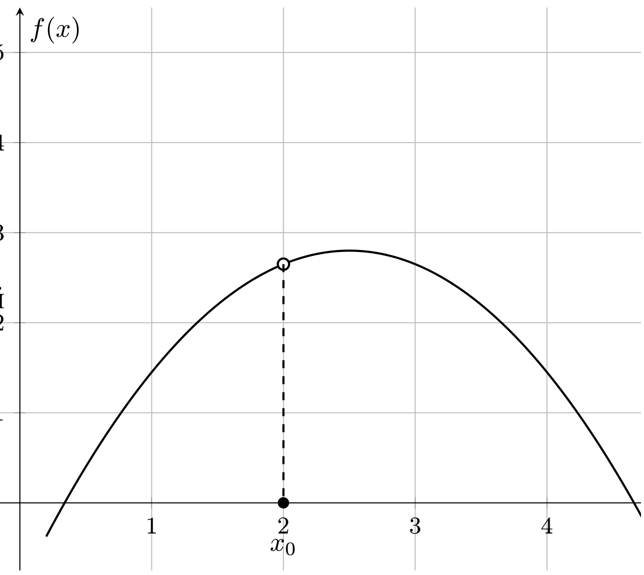
#Определение
Если в точке x_0 нарушается хотя бы одно из равенства (1), то x_0 **- точка разрыва функции**

Классификация точек разрыва

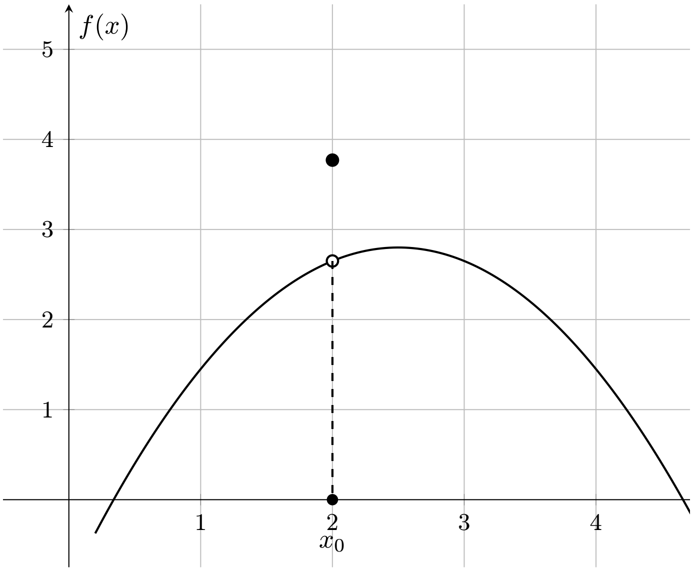
1. Если в точке разрыва x_0 пределы слева и справа $\boxed{\exists}$ **и конечны**, то x_0 - называется **точкой разрыва первого рода**

Виды точек разрыва

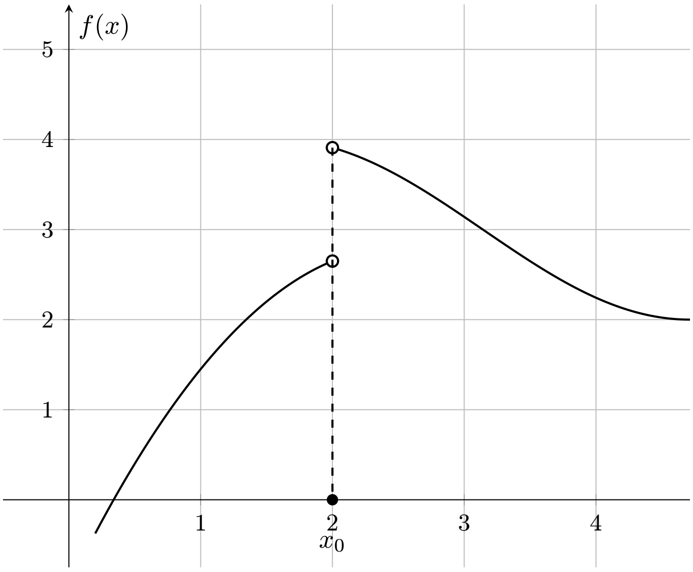
1. **Выколотая точка** — устранимый разрыв. Можно устранить разрыв, **определив значение функции в этой точке**.
   Например,
   $y = \frac{\sin x}{x}, x = 0$ — точка разрыва
   $\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$ — функция стала непрерывной



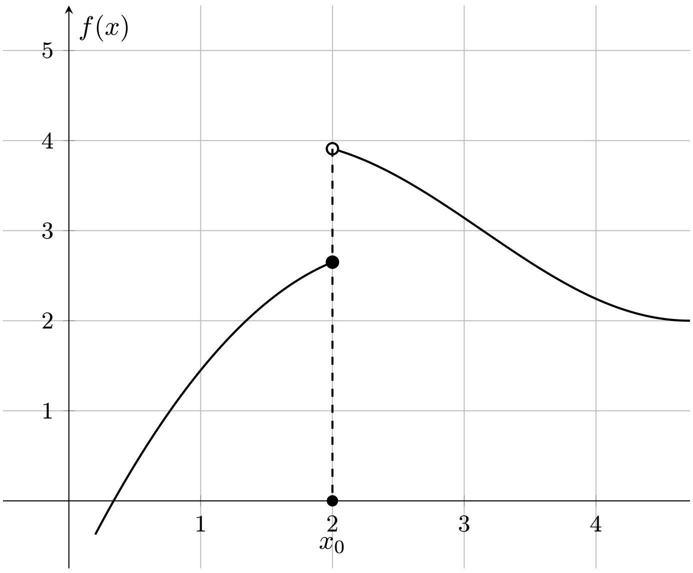
2. Функция в точке разрыва существует и не равна пределу функции в этой точке. График выглядит как в первом случае, только над точкой разрыва есть закрашенная точка



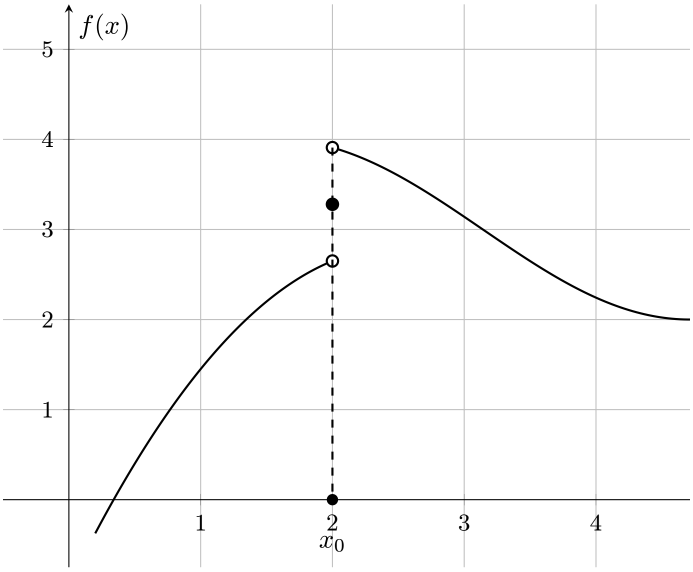
3. **Скачок функции** (вверх/вниз) — различаются пределы слева и справа. $f(x_0)\ \nexists$



4. **Скачок функции** — но функция $f(x_0)\exists$ и предел **слева или справа** равен этому значению



5. **Скачок функции** — $f(x_0)\exists$, но пределы **слева и справа** не равны значению в этой точке'



1. В остальных случаях x_0 - **точка разрыва второго рода**. То есть, **хотя бы один** из пределов **не существует** или равен ∞.
   Например, функция $f(x) = \sqrt{ax+b}+c$ или функции с асимптотам, у которых предел в точке разрыва $\to\infty$
   Если в **точке разрыва второго рода** хотя бы один из пределов $=\infty$, то она называется точкой бесконечного разрыва (вертикальная асимптота)

Свойства функций непрерывных точек

1. $f(x),\ g(x)$ непрерывны в точке x_0
   1. $f(x)\pm g(x)$ непрерывна в точке x_0
   2. $f(x)\cdot g(x)$ непрерывна в точке x_0
   3. $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0, если $g(x_0)\neq 0$
      Арифметические операции не нарушают непрерывность функции, если не происходит $\div 0$
2. Если функция $g(x)$ непрерывна в точке x_0, а $f(x)$ непрерывна в точке $g(x_0)$
   $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0
   Таким образом, **суперпозиция не нарушает непрерывность функции**

Теорема о непрерывности

#Теорема

Элементарная функция непрерывна в любой внутренней точке её области определения. Таким образом точки разрыва элементарной функции — это **граничные точки её области определения.**

Для неэлементарной функции необходимо **дополнительно исследовать точки стыковки элементарных функций**.

Чтобы найти область определения элементарной функции, необходимо исследовать функцию на 7 ограничений.

1. На ноль делить нельзя (т.к. при умножении на 0 не получим другого числа кроме 0).
   $\frac{1}{f(x)} \implies f(x) \neq 0$
2. Корень чётной степени из отрицательных чисел извлекать нельзя (т.к. при возведении в чётную степень отрицательное число получить невозможно).
   $\sqrt[2n]{f(x)} \implies f(x) \geq 0$
3. Логарифм можно вычислить только от положительного числа (т.к. показательная функции всегда положительны).
   $\log_a f(x) \implies f(x) > 0, a \neq 1, a > 0$
4. $\operatorname{tg} f(x) = \frac{\sin f(x)}{\cos f(x)} \implies \cos f(x) \neq 0, f(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
5. $\operatorname{ctg} f(x) = \frac{\cos f(x)}{\sin f(x)} \implies \sin f(x) \neq 0, f(x) \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$
6. $\arcsin f(x) \implies f(x) \in [-1; 1]$, т.к. $\sin$ имеет значение от -1 до 1
7. $\arccos f(x) \implies f(x) \in [-1; 1]$, т.к. $\cos$ имеет значение от -1 до 1
   В остальных случаях ограничений нет.

2.

#Определение
Прямая линия называется асимптотой, если график функции стремится к этой прямой бесконечно удалённой точке.

Классификация асимптот

1. **В. А. — вертикальные асимптоты**
   #Определение $x = a$ называется В.А. графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов слева или справа, $f(a \pm 0)$ равен бесконечности. Таким образом, В.А. проходят через **точки разрыва второго рода**, имеющие бесконечный разрыв.
   $\implies$ для отыскания В.А. находим **все** **точки разрыва**, как граничные точки области определения, и отбираем из них **точки бесконечного разрыва**.
2. **Г.А. — горизонтальные асимптоты**
   1. **П.Г.А. — правая горизонтальная асимптота**
      #Определение $y = b$ называется П.Г.А. графика функции $y = f(x)$, если существует и конечен предел $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b}$
   2. **Л.Г.А — левая горизонтальная асимптота**
      #Определение $y = b$ Л.Г.А графика $y = f(x)$, если $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

3. **Н.А. — наклонные асимптоты**
    1. **П.Н.А. — правая наклонная асимптота**
       #Определение $y = kx + b$ называется П.Н.А. графика $y = f(x)$, если существуют и конечные пределы.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq_0}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) - kx = b}$$

    2. **Л.Н.А. — левая наклонная асимптота**
       #Определение $y = kx + b$ называется Л.Н.А., если

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) - kx = b}$$