

№8. Неопределённости

Навигация ↺

[«Все конспекты»](#)

◀ Прошлая:

▶ Следующая:

☰ Оглавление

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x}$

1. [Примеры](#)

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$

1. [Примеры](#)

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x}$

1. [Пример](#)

2.
$$\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = 0 \cdot \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \boxed{\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = \boxed{0}$$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{\frac{1}{x}}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^0}$

1. [II замечательный предел](#)

2. [Примеры](#)

6. $\lim_{x \rightarrow 0} x^0$, $\lim_{x \rightarrow 0} 0^x$

7. [Операция потенцирования по основанию e](#)

I. $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$

I. Классическое правило

1. Делим столбиком на $x - x_0$

2. Разность корней квадратных умножаем и делим на сопряжённое уравнение. Разность (сумму) корней кубических умножаем и делим на неполный квадрат суммы (разности) (№10).

II. Правило эквивалентности

Необходимо в числителе и знаменателе воспользоваться таблицей эквивалентности бесконечно малых функций

Если $x \rightarrow x_0 \neq 0$, то необходимо сделать замену $t = x - x_0 \Rightarrow x = t + x_0$

III. Правило Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Примеры

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 4x + 1} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \dots$$

1. Классическое правило

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} = 2x - 1$$

$$\frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} = 3x - 1$$

⇓

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{3x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

2. Правило эквивалентности

$$x \rightarrow 1 \Rightarrow x - 1 \rightarrow 0 \Rightarrow [t = x - 1] \Rightarrow [x = t + 1, t \rightarrow 0]$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(t+1)^2 - 3(t+1) + 1}{3(t+1)^2 - 4(t+1) + 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2((1+t)^2 - 1) - 3((1+t) - 1)}{3((1+t)^2 - 1) - 4((1+t) - 1)}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 2 \cdot t - 3t}{3 \cdot 2 \cdot t - 4t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2t} = \frac{1}{2}$$

3. Правило Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - 3x + 1)'}{(3x^2 - 4x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 3}{6x - 4} = \frac{4 - 3}{6 - 4} = \frac{1}{2}$$

II. $\{\frac{\infty}{\infty}\}$ **I. Классическое правило**

Необходимо числитель и знаменатель разделить на слагаемые знаменателя, содержащую бесконечно большую высшего порядка.

II. Правило эквивалентности**Использовать в типовом запрещено**

Сумма, эквивалентная слагаемому, содержащему бесконечно большую высшего порядка.

III. Правило Лопиталя

Остаётся прежним и для $\{\frac{\infty}{\infty}\}$

Примеры

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{4x^2 - 5x + 1}$$

1. Классическое правило

$$\boxed{\dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2}}{\frac{4x^2 - 5x + 1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} \boxed{= \frac{3}{4}}$$

2. Правило эквивалентности

$$\boxed{\dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{4x^2} = \frac{3}{4}}$$

3. Правило Лопиталя

$$\boxed{\dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 4}{8x - 5} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}}$$

III. $\{0 \cdot \infty\}$

Необходимо один из множителей перенести в знаменатель и раскрыть неопределённость $\{\frac{0}{0}\}$ или $\{\frac{\infty}{\infty}\}$.

Пример

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = 0 \cdot \ln(+0) = \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}}$$

Правило Лопитала

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'} = \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}$$

VI. $\{\infty - \infty\}$

Необходимо используя тождественные преобразования (приведение к общему знаменателю) используя формулы сокращённого умножения и т.д. привести к неопределённости $\{\frac{\infty}{\infty}\}$

V. $\{1^\infty\}$

Необходимо используя **II замечательный предел** привести к неопределённости $\{\frac{0}{0}\}$ или $\{\frac{\infty}{\infty}\}$

II замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1^\infty = e = 2.71$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty = 2.7$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} (1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = \{1^\infty\} = e}$$

Примеры

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+4} \right)^{3x-1} = \{1^\infty \implies \text{II. замечательный предел}\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+3}{2x+4} - 1 \right)^{3x-1} \stackrel{\text{к общему знам.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+3-2x-4}{2x+4} \right)^{3x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{2x+4} \right)^{3x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{2x+4} \right)^{\frac{2x+4}{-1} \cdot \frac{-1}{2x+4} \cdot (3x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-3x+1}{2x+4}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\frac{-3x+1}{1}}{2+\frac{4}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{3}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{e^3}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} ((\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}) = \{1^\infty\} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos(x) - 1)^{\operatorname{ctg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos(x) - 1)^{\frac{1}{\cos(x)-1}}]^{\frac{\cos(x)-1}{1} \cdot \operatorname{ctg}^2 x} = e^{\frac{(c)}{c}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-(1-\cos(x))}{\operatorname{tg}^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

VI, VII $\{0^0\}, \{\infty^0\}$

После потенцирования $\Rightarrow \{0 \cdot \infty\} \Rightarrow \left\{ \frac{0}{0} \right\}$ или $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} \Rightarrow$ Правило Лопитала

В 5 типовом расчёте необходимо знать предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \{\infty^0\} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln n^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} \stackrel{\text{Правило Лопитала}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

\Downarrow

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Операция потенцирования по основанию e

$$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

После потенцирования получаем **сложную показательную функцию**. Поэтому функция $y = f(x)^{g(x)}$ называется **сложно показательной функцией**