Динамическая модель системы. Модель с управлением

Навигация

‹Все конспекты›
⧏ **Прошлая:** №3. Модели систем
⧐ **Следующая:** Методы системных исследований. Принципы системного подхода

Оглавление

Динамическая модель системы

#Определение

Динамическими называют системы, в которых происходят какие бы то ни было изменения со временем.
Динамическими моделями называют модели, отображающие эти изменения.

Уже на этапе «черного ящика» различают 2 этапа динамики системы:

1. Функционирование — подразумевают процессы, которые происходят в системе (и окружающей ее среде), стабильно реализующей фиксированную цель (например, часы, городской транспорт, станок, школа и т.д.).
2. Развитие — называют то, что происходит с системой при изменении ее целей.
    - Характерная черта развития: существующая структура перестает соответствовать новой цели, и для обеспечения новой функции приходится изменять структуру, а иногда и состав системы.

Типы динамических моделей

При математическом моделировании процесс описывается как отображение множества «моментов времени» T на множество «значений» X.

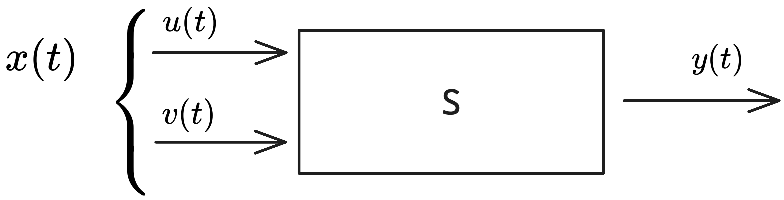
Модель «Черный ящик»

Рассматривая выход $y(t)$ системы как ее реакцию на входы $x(t)$, можно выразить модель «черного ящика» как $y(t) = \Phi[x(t)]$

В этой модели преобразование Φ неизвестно

Входы $x(t)$ делятся на

- $u(t)$ — управляемые входы
- $v(t)$ — неуправляемые входы



Модель «Белого ящика» (Модель с состоянием)

Для описания «белого ящика» вводится понятие состояния системы $z(t)$.

Математическая модель (уровень «белого ящика») — это задание множеств входов X, состояний Z, выходов Y и связей между ними: $X \to Z \to Y$.

Модель описывается двумя отображениями:

1. **Отображение выхода:**
   Определяет текущее значение выхода $y(t)$ на основе текущего состояния $z(t)$

   $$y(t) = \eta(t, z(t))$$

   (Явная зависимость от t введена для учета возможности изменения зависимости со временем)[
2. **Переходное отображение:**
   Описывает связь между входом и состоянием. Состояние $z(t)$ в любой момент t однозначно определяется состоянием z_τ в момент τ и отрезком реализации входа x от τ до t.

   $$\boxed{z(t) = \sigma(t, \tau, z_\tau, x(t), x(\tau))}$$

Классификация на основе математической модели

Конкретизируя множества X, Z, Y и отображения σ, η, можно перейти к моделям различных систем:

- **Дискретные или непрерывные системы**: Если множество T (время) дискретно или непрерывно.
- **Конечный автомат:** Система, у которой множества X, Z, Y дискретной по времени системы имеют конечно число элементов.
  - *Примеры:* все дискретные (цифровые) измерительные, управляющие и вычислительные устройства
- **Линейная система:** X, Y, Z — линейные пространства, а σ и η — линейные операторы.
  - Основное свойство: выполнение **принципа суперпозиции**

    $$[x(t) = x_1(t) + x_2(t)] \to [y(t) = y_1(t) + y_2(t)]$$

- **Гладкие системы:** Линейные системы, где пространства имеют топологическую структуру, а σ и η непрерывны.
  - Это позволяет строго определить понятия анализа (например, сходимость, метрику)
  - Для них переходное отображение σ является общим решением дифференциального уравнения:

    $$\frac{dz}{dt} = f(t, z, x)$$

  - Для дискретных систем:

    $$z(t_{k+1}) = f(t_k, z, x) = \sigma(t_{k+1}, t_k, x(\bullet))$$

- **Стационарные системы:** свойства системы со временем не изменяются.

- Функция η не зависит от времени: $\eta(t, z(t)) = \eta(z(t))$
- Функция σ инварианта к сдвигу во времени τ:

$$\sigma(t, t_0, z, x(\bullet)) = \sigma(t+\tau, t_0+\tau, z, \overline{x}(\bullet))$$

Формальная запись динамической модели

#Определение

Модель может быть записана так:

$$\Sigma : \{x, y, a, t, z, \sigma, \eta, \bar{\eta}\}$$

$$\text{где } x \in X, y \in Y, a \in A, t \in T, z \in Z$$

Обозначения:

- x, X: набор входных воздействий (входов).
- y, Y: набор выходных воздействий (выходов).
- a, A: набор параметров, характеризующих **постоянные** свойства системы.
- z, Z: набор параметров, характеризующих **изменяющиеся** свойства (параметры состояния).
- t, T: параметр (или параметры) процесса в системе.
- σ: правило (функция, оператор) определения параметров состояния z по x, a, t. ($z = \sigma(x, a, t)$).
- η: правило (функция, оператор) определения выходов y по x, a, t, z. ($y = V(x, a, t, z)$).
- $\bar{\eta}$: правило определения y по x, a, t (с исключением z). Получено подстановкой σ в η. ($y = \bar{\eta}(x, a, t)$).

#Примечание

Число составляющих в записи может быть разным. Могут быть добавлены **случайные входные воздействия** (как часть x) или **управления** (для целенаправленных систем)

Модель с управлением

#Определение

Система Σ — конечная совокупность (E) элементов и некоторого регулирующего устройства (R).
Регулирующее устройство (R) устанавливает связи между элементами (e_i) и управляет этими связями, создавая неделимую единицу функционирования.

$$\Sigma = \{E; R\}, \text{ где } \{e_i\}_1^N = E$$

Функционирование F системы Σ — это процесс последовательный во времени T по переработке входной Iвх в выходную Iвых информации.

Математическое определение модели с управлением

#Определение

Система Σ работает под воздействием управляющих сигналов от R во времени T.
Формально система задается как упорядоченная последовательность (вектор, кортеж):

$$\Sigma = (T, X, \Omega, Y, V, H, G, F, Z)$$

Компоненты вектора:

- T: ось времени.
- X: множество входной информации.
- Ω: оператор ввода, множество входных воздействий ($\omega \in \Omega$).
- Y: множество результатов.
- V: множество выходных воздействий.

Функциональные факторы (преобразование X в Y):

- G: алгоритм, функция выхода.
- H: функция поведения системы (при использовании Z), функция перехода.
- F: функция управления (изменяющая как G, так и H).
- Z: множество внутренних состояний или ресурсов.

Отображения:

$$G : (X \times Z) \to Y$$

$$H : (X \times Z) \rightarrow Z$$

$$F : (X \times Z \times T) \rightarrow (G \times H)$$

$$\Omega : T \rightarrow X$$

$$V : T \rightarrow Y$$

Определение свойств систем по параметрам

Перечисленные параметры $(T, X, G, H, F, Z, ...)$ определяют следующие свойства системы:

1. **Энарная функция**: система определяется более чем одним фактором.
2. **Наличие** T: системы могут быть непрерывные, дискретные, динамические и статические
3. **Наличие** X, Ω, Y, V: система реализована и связана с внешней средой
4. **Наличие** G: процесс преобразования X в Y может быть формализован
5. **Наличие** H, Z: система имеет свой конкретный способ поведения, которые влияет на G и на получение конкретного результата Y.
6. **Наличие** F: система может быть самоуправляемой, самоуправляющей, саморегулируемой.
7. **Наличие** E (элементов): системы бывают простые и сложные

Характеристики системы

Сложность системы определяется как структурная и функциональная сложность.

Функциональная сложность C_F — количество шагов (счетных и логических), требуемых для реализации конкретно заданной функции F.

$$C_F = (H^* L)K$$

- L — логическая глубина вычислений (длина самой длинной цепочки...).
- H — степень параллелизма вычислений (работ).
- K — степень сложности реализации (если система еще не реализована K=1).

Структурная сложность C_S — ...метрическая величина, определяющая количество элементов и количество связей системы.

$$C_S = m/n(n-1)$$

- m — число реализованных связей в системе.
- n — общее число элементов в системе.

Сложность С — ...метрическая величина, ставящаяся в соответствие структурно-функциональному составу системы.

Надежность R — напрямую зависит от сложности. ...способность системы сохранять заданные свойства поведения при наличии внешних и внутренних воздействий, т.е.:

- а) быть устойчивой в смысле функционирования.
- б) быть помехозащищенной....
- $R = f(T^H, TT, P(t_i, t_{i+1}), \Delta(t_i, t_{i+1}))$, где:
  - T^H — время нормальной работы системы.
  - TT — среднее время безотказной работы.
  - $P(\Delta t)$ — вероятность безотказной работы в интервале Δt.
  - $\Delta(t_i, t_{i+1})$ — средний поток отказов.

Эффективность Э — метрическая величина, определяющая способность системы хорошо выполнять заданную работу.

- Вычисляется через функционал качества Φ и функцию управления.
- $$\Phi(X, Z_o, \Delta t, \omega) = Y \approx Э$$
  - X — начальные данные (ввод).
  - Z_o — начальное состояние (ресурсы).
  - ω — входные воздействия.

Качество управления J — это некоторая метрическая величина, определяющая минимально допустимый интервал времени Δt_{min}, необходимый для завершения работы системы

$$J(X, Z_0, Z_i, g, \omega) = \{\Delta t_i\}$$

Дополнительные характеристики:

1. **Пропускная способность П**
2. **Универсальность U** (если $U \to 1$, то ... низкая надежность)
3. **Степень иерархичности J**