Modelo de Markowitz

Aplicación de métodos numéricos

-Danahi, Yalidt e Itzel

-César, Bruno y León

Mayo 2020

¿Qué es el Modelo de Markowitz (MM)?

-Modelo financiero cuyo objetivo es encontrar el portafolio de mínima varianza (riesgo) dado un conjunto de acciones.

¿Qué proporción de dinero se debe invertir a cada acción del portafolio?

Supuestos:

- Es para inversionistas aversos al riesgo
- El inversionista se agota su presupuesto
- El rendimiento esperado debe ser positivo

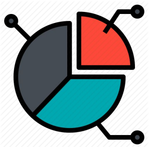
Objetivos

- Implementar solver para Modelo de Markowitz
- Usar datos financieros reales
- Diseño de solver para uso de GPU’s
- Uso de Docker

Elementos de proyecto

Teoría financiera

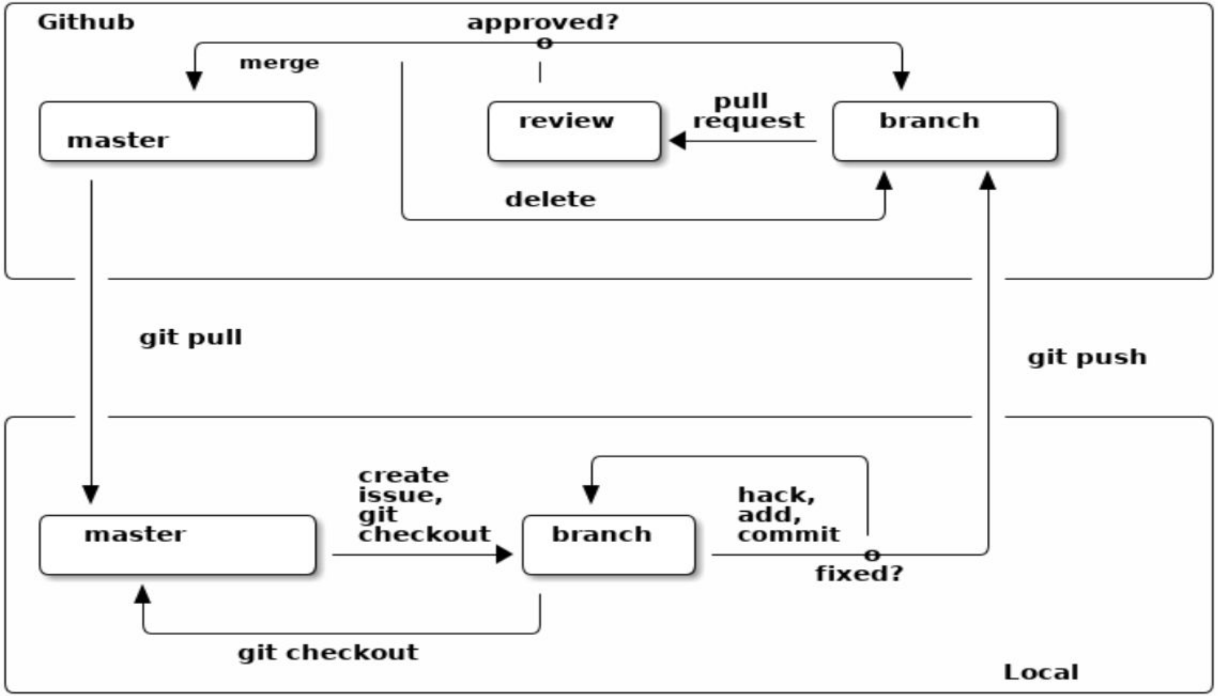
- 50 principales empresas que cotizan en bolsa



Teoría de optimización

- Optimización numérica con restricciones

Flujo de trabajo



MM como problema de optimización (CECO)

$$\min_{w} Var(wX) = \min_{w} w^T \Sigma w$$

$$w^T \cdot \mu = r$$

Rendimiento esperado

$$w^T \cdot \mathbf{1} = 1$$

Suma de pesos = 100%

Restricciones lineales

Ruta 1 de solución (explícita)

Lagrangiano
Optimización con restricciones lineales (CECO)

Multiplicadores
Determinan puntos factibles

Lagrange

Condiciones de primer orden

Estimar mínimo
De ser posible...

Algoritmo Lagrange (sol. explícita)

$$w^* = w_0 \cdot (\Sigma^{-1} \cdot \mu) + w_1 \cdot (\Sigma^{-1} \cdot 1)$$

$$w_0 = \frac{1}{\Delta}(\hat{r} \cdot B - C)$$

$$w_1 = \frac{1}{\Delta}(A - C \cdot \hat{r})$$

$$\Delta = A \cdot B - C^2$$

$$A = \mu^t \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu$$

$$B = 1^t \cdot \Sigma^{-1} \cdot 1$$

$$C = 1^t \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu$$

Infraestructura

Programación

Desarrollo del código

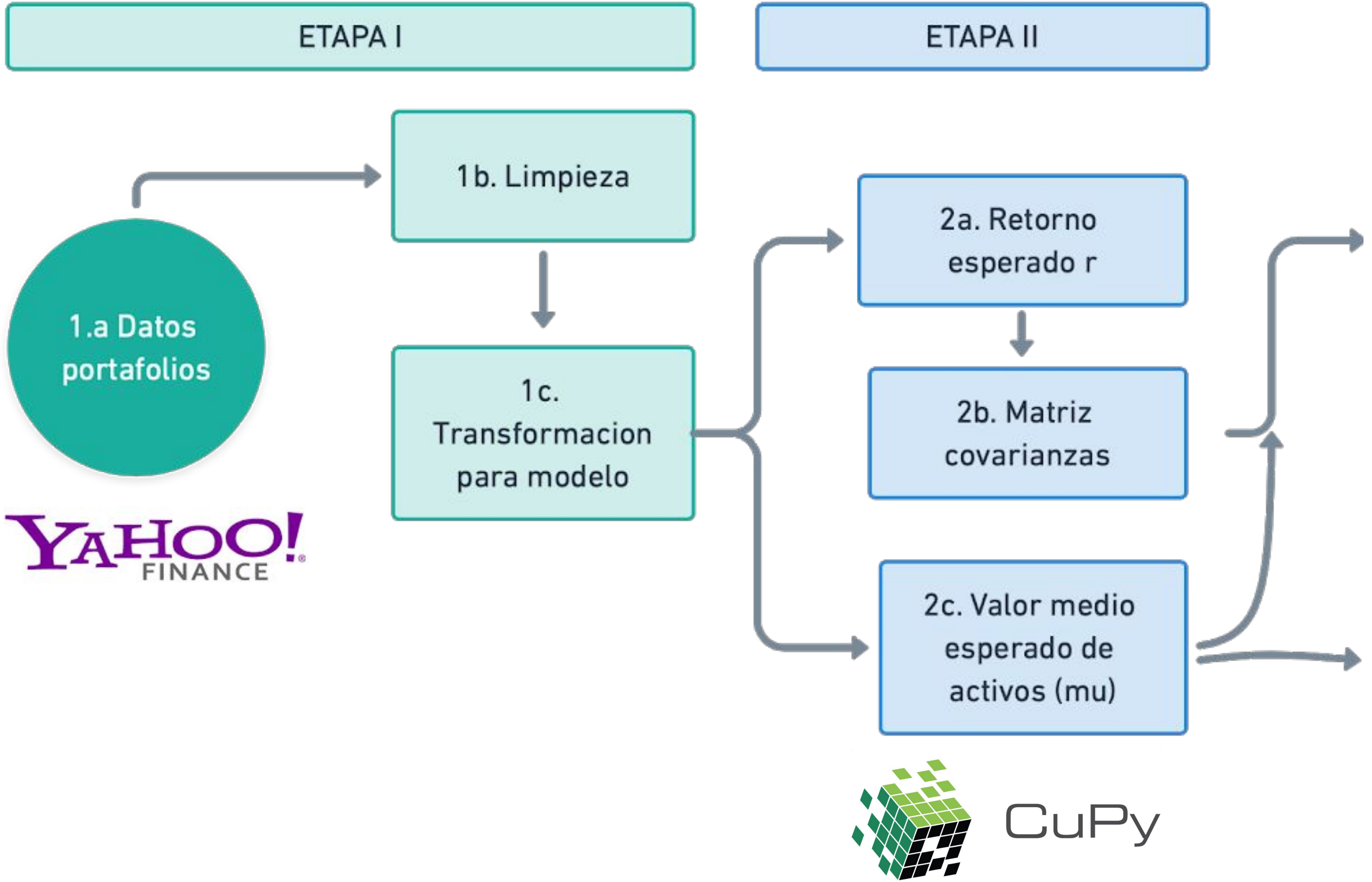
Google Colab
Gratuito
User friendly

Ejecución final

AWS
Estable
Flexible

Máquina: Deep Learning AMI (Ubuntu 18.04) Version 28.1, con tarjeta gráfica NVIDIA
Instancia: Familia GPU, tipo p2.xlarge, 4 vCPUs

Lagrange



ETAPA I
ETAPA II
1b. Limpieza
1.a Datos portafolios
1c. Transformacion para modelo
2a. Retorno esperado r
2b. Matriz covarianzas
2c. Valor medio esperado de activos (mu)
YAHOO! FINANCE
CuPy

ETAPA III

3a. Formacion de vectores con matriz de covarianzas

$\hat{\Sigma}^{-1}1$ $\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mu}$

3b. Formacion de valores A, B, C

$$A = \hat{\mu}^T\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mu}$$
$$B = 1^T\hat{\Sigma}^{-1}1$$
$$C = 1^T\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mu}$$

3c. Formacion de matriz Delta

$$\Delta = AB - C^2$$

3d. Vectores auxiliares

$$w_0 = \frac{1}{\Delta}(\hat{r} \cdot B - C)$$
$$w_1 = \frac{1}{\Delta}(A - C \cdot \hat{r})$$

3.e Solucion de Markowitz

$$w^* = w_0 \cdot (\Sigma^{-1}\mu) + w_1 \cdot (\Sigma^{-1}1)$$

Lagrange

CuPy

Ruta 2 de solución (aproximada)

Resolver problema
Optimización con
Restricciones lineales

Solución aprox.
Problema dual

Newton

Karush Khun Tucker
Problema dual

Método de Newton para dual
Sol. aproximada
problema original

Algoritmo ruta Newton

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa y $\mathscr{C}^2(\operatorname{dom} f_o)$. $\quad x \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $b \in \mathbb{R}^p$

$$rank(A) = p < n$$

$$\min f_o(x)$$

$$\text{sujeto a:} Ax = b$$

Problema Primal

$$Ax^* = b$$

$$\nabla f_o(x^*) + A^T \nu^* = 0$$

Ecs. factibilidad primal y dual (KKT)

Teorema $x^* \in dom(f_0) \Leftrightarrow \exists \nu \in \mathbb{R}^p (Ax^* = b, A^T \nu + \nabla f_o(x^*) = 0)$

Algoritmo ruta Newton

Teorema de Taylor para segundo orden

$$A(x + \Delta x_{\text{nt}}) = b$$

$$\nabla f_o(x + \Delta x_{\text{nt}}) + A^T w \approx \nabla f_o(x) + \nabla^2 f_o(x) \Delta x_{\text{nt}} + A^T w = 0$$

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f_o(x) & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_{\text{nt}} \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f_o(x) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Algoritmo de Newton con punto inicial para CECO

Dados un **punto inicial** x en $\text{dom} f_o$ con $Ax = b$ y una tolerancia $\epsilon > 0$.

Repetir el siguiente bloque para $k = 0, 1, 2, ...$

1. Calcular la dirección de descenso de Newton Δx_{nt} y el decremento de Newton al cuadrado: $\lambda^2(x)$.
2. Criterio de paro: finalizar el método si $\frac{\lambda^2(x)}{2} \leq \epsilon$.
3. Búsqueda de línea. Elegir un tamaño de paso $t > 0$ (usar el cálculo de $\lambda^2(x)$ del paso anterior).
4. Hacer la actualización: $x = x + t\Delta x_{\text{nt}}$.

hasta convergencia (satisfacer criterio de paro).

Decremento de Newton

$$\lambda(x) = (\Delta x_{\text{nt}}^T \nabla^2 f_o(x) \Delta x_{\text{nt}})^{1/2}$$

¿Cómo determinamos un punto inicial para MM?

Restricciones lineales

$$w^T \cdot \mu = r$$

Rendimiento esperado

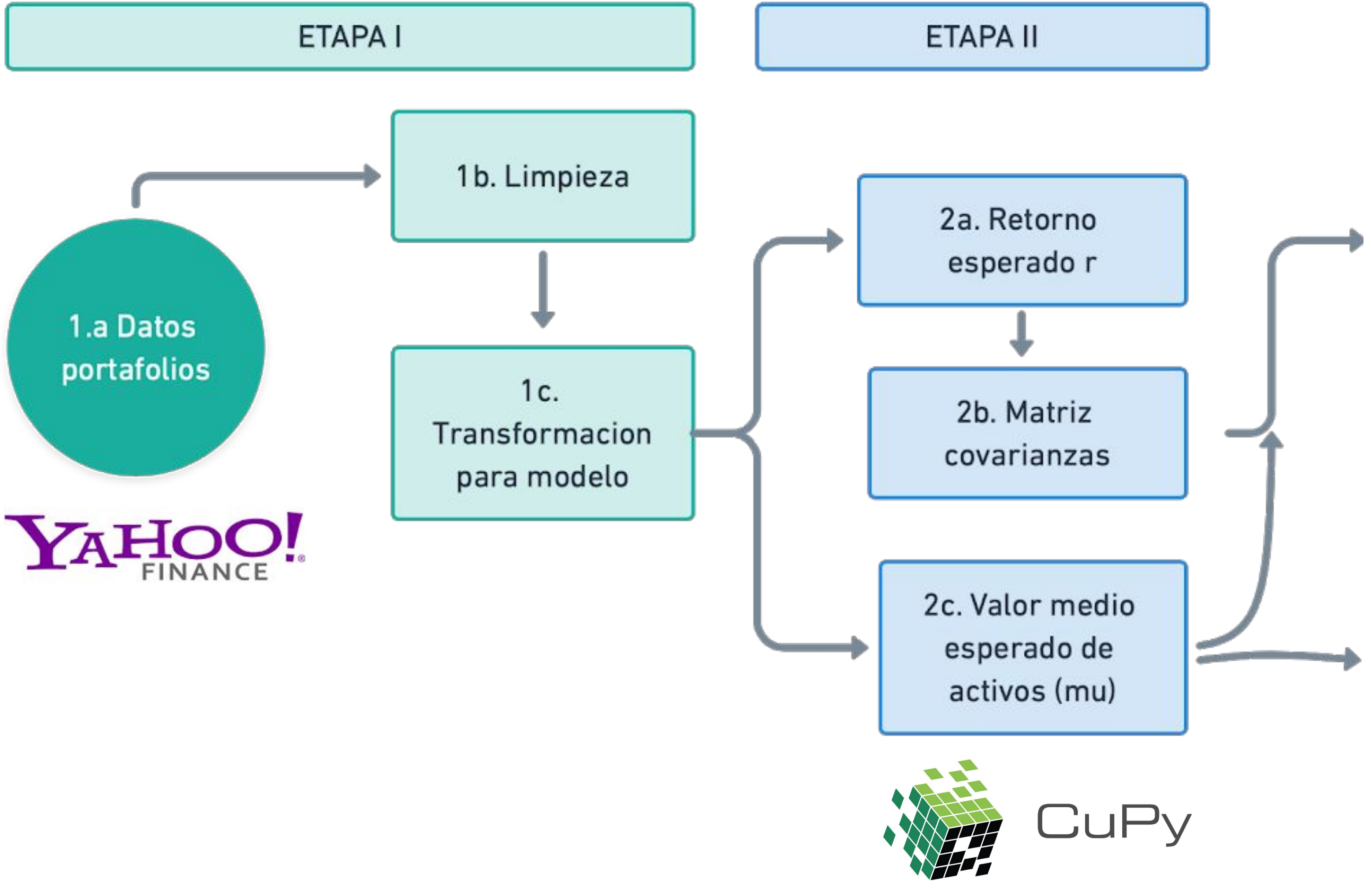
$$w^T \cdot \mathbf{1} = 1$$

Suma de pesos = 100%

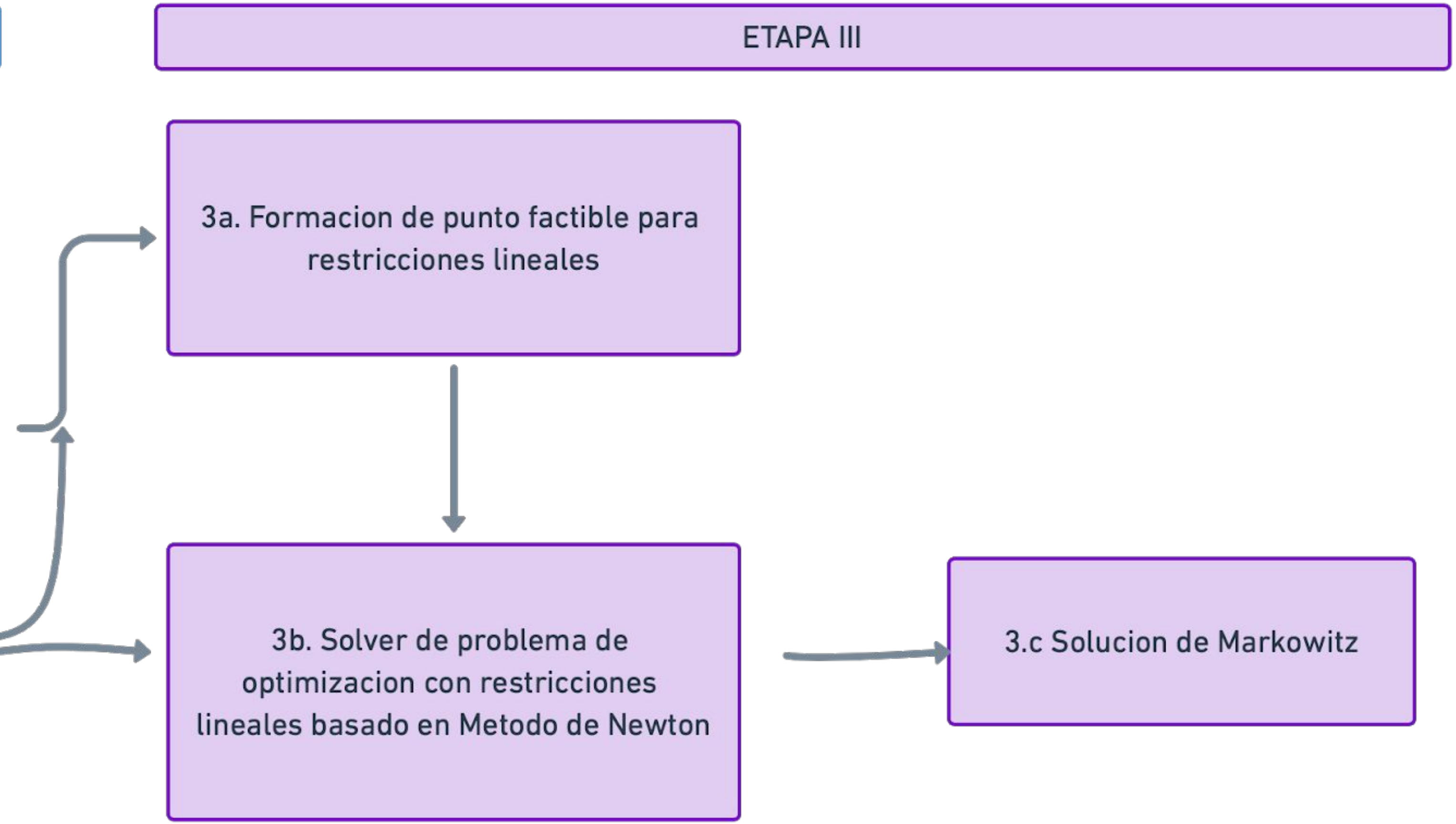
Ecuaciones normales

$$Ax = b \Rightarrow A^T A x = A^T b$$

Newton


ETAPA I
ETAPA II
1b. Limpieza
1.a Datos portafolios
YAHOO! FINANCE
1c. Transformacion para modelo
2a. Retorno esperado r
2b. Matriz covarianzas
2c. Valor medio esperado de activos (mu)
CuPy

Newton


ETAPA III
3a. Formacion de punto factible para restricciones lineales
3b. Solver de problema de optimizacion con restricciones lineales basado en Metodo de Newton
3.c Solucion de Markowitz

Resultados

1) Comparación de métodos variando el rendimiento (0.4 a 1) con ***funciones simbólicas*** para las derivadas

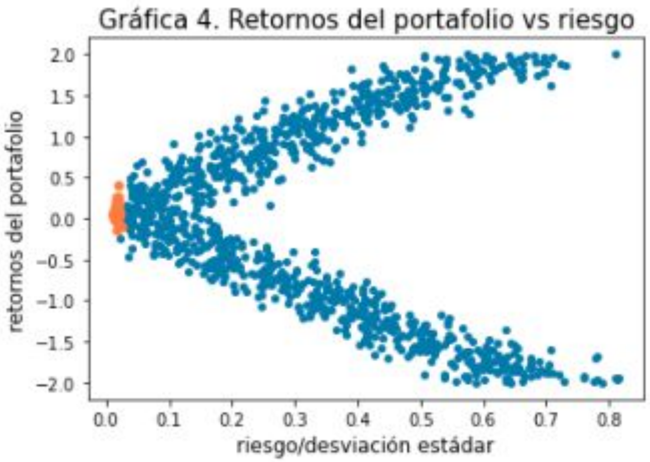
Dist. $\|\|\cdot\|\|_2$	Dist. $\|\|\cdot\|\|_1$	retorno L	retorno N_{fs}	varianza L	varianza N_{fs}
1.41113e-11	6.57346e-11	0.4	0.4	9.39764e-05	9.39764e-05
1.62202e-11	7.96734e-11	0.5	0.5	0.000125748	0.000125748
1.57851e-11	6.93323e-11	0.6	0.6	0.000165025	0.000165025
2.45899e-11	1.03308e-10	0.7	0.7	0.000211807	0.000211807
2.32235e-11	9.36646e-11	0.8	0.8	0.000266095	0.000266095
2.23753e-11	9.86439e-11	0.9	0.9	0.000327889	0.000327889
2.74735e-11	1.19941e-10	1	1	0.000397188	0.000397188

Observaciones:

- La diferencia entre los métodos aumenta conforme aumenta el rendimiento esperado
- El riesgo es el mismo al solucionar con ambos métodos con funciones simbólica.
- Al usar diferencias finitas el riesgo usualmente es menor con el método de ***Lagrange***

Resultados

2) Evaluación de varianza con diferentes retornos esperados



Observaciones:

- Se encontró la formación de la frontera del modelo teórico de Markowitz

  Portafolios a partir del punto naranja son eficientes (r>0)
- Se comprueba la teoría *" A mayor riesgo mayor rendimiento" (trade-off)*

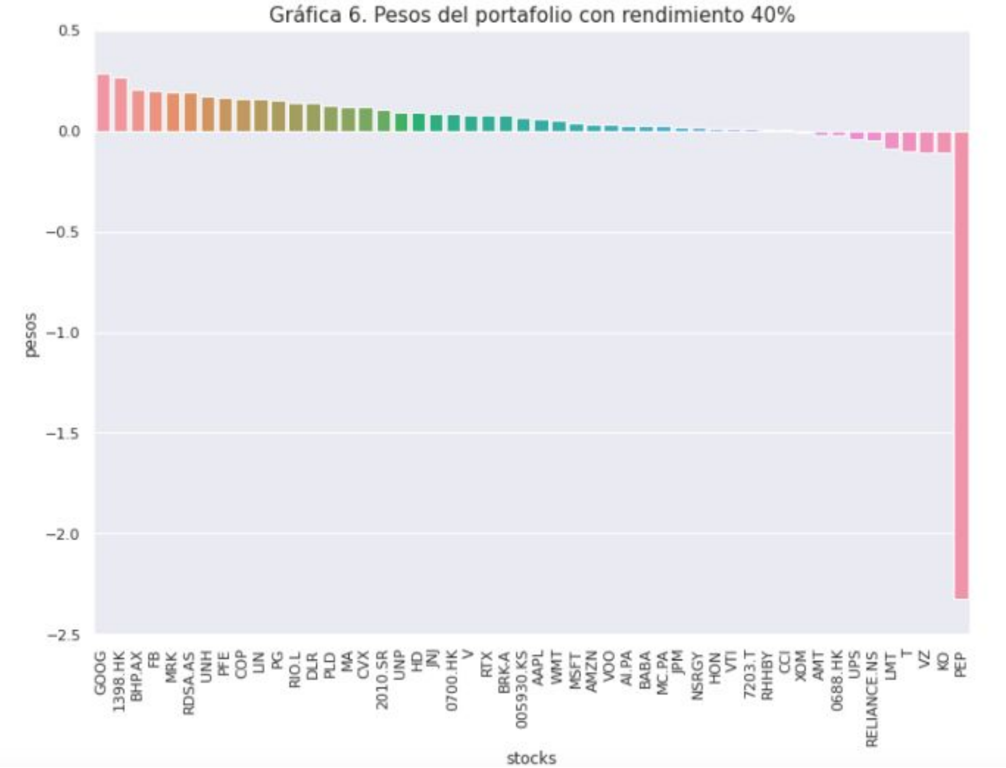
Resultados

3) Evaluación del portafolio con cambios en el retorno esperado (0,1)

Observaciones:

- Las acciones que tienen mayor asignación son Google y Commercial Bank of China.

- Existen pesos negativos porque se permiten *Ventas en Corto*



Conclusiones

- Se encontró la frontera eficiente de portafolios óptimos con datos reales -> a partir del PMV

- El método que arrojó mejores resultados fue *Lagrange*

- PMV es para inversionistas conservadores-> poco riesgo o variabilidad en las acciones.

- Este modelo podría ser útil ante momentos económicos adversos.

Referencias

Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. J. (2011). Investments. New York:McGraw-Hill/Irwin.https://www.niceideas.ch/airxcell_doc/doc/userGuide/portfolio_optimTheory.html

Topics in mathematics with applications in finance, MIT 18.S096, Lecture 14 Portfolio Theory, Fall 2013, Dr. Kempthorne, https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-s096-topics-in-mathematics-with-applications-in-finance-fall-2013/lecture-notes/MIT18_S096F13_lecnote14.pdf

Notas del curso de Métodos Numéricos y Optimización, ITAM, Moreno Palacios Erick, 2020 https://drive.google.com/file/d/12L7rOCgW7NEKI_xJbIGZz05XXVrOaPBz/view