

Solución al modelo de Markowitz del portafolio de mínima varianza dada un rendimiento esperado

29 de Marzo de 2020

Equipo: Danahí Ramos, Yalidt Díaz, Itzel Muñoz, Leon Garay, Bruno González y César Zamora

1 Introducción

En el contexto de finanzas, un problema relevante es definir estrategias que permitan a los inversionista diversificar sus inversiones con el objetivo de minimizar el riesgo de su capital. Típicamente, esto corresponde con que un inversionista tiene interés en un conjunto definido de activos, denominado *portafolio*, sobre el cual la decisión de inversión es la siguiente: saber en que acciones de dicho portafolio invertir y saber que proporción de dinero invertir en dichos activos, considerando que el inversionista es racional y desea obtener un determinado rendimiento $r > 0$.

Sin embargo, es deseable que la elección considere reducir el riesgo inherente al mercado de inversiones, los que se traduce en obtener el portafolio de *mínima varianza*, que en otras palabras significa obtener el portafolio de menor riesgo para inversionistas aversos al riesgo, donde se espera obtener las ponderaciones o proporciones que el inversionista debe invertir en las acciones evaluadas en un vector de todo el conjunto de acciones.

Dentro de la teoría financiera este problema tuvo particular interés en los años 90, siendo estudiado por el economista Harry Markowitz. Su formulación matemática es denominada *Modelo de Markowitz*, misma que se enfoca en los inversionistas aversos al riesgo, buscando la integración del portafolio de mínima varianza (o menor riesgo), en donde el riesgo está determinado por la desviación estándar de los activos o acciones. Con ello en mente, el objetivo del modelo es encontrar la proporción de dinero que cierto inversionista debe invertir en un conjunto de acciones. A estas proporciones se les denota como w_i y son conocidas como *pesos*, mismos que indican el porcentaje a destinar o invertir en las acciones de una acción de cierta empresa.

Esencialmente, la solución de este problema busca la frontera de posibilidades de asignación para invertir y se enfoca en la parte superior de esta frontera porque justamente en esa parte los rendimientos son positivos. Dicha frontera es representada por un función cóncava horizontal y el punto mínimo de esta función representa la varianza más baja posible que se puede lograr para un rendimiento esperado de una cartera determinada. Dados los datos de entrada para los retornos, variaciones y covarianzas esperados, podemos calcular la cartera de variación mínima para cualquier rendimiento esperado.

Considerando todo lo anterior, el presente reporte tiene por objetivos mostrar los resultados obtenidos en este proyecto para dar solución al *Modelo de Markowitz* a través de los siguientes métodos:

- 1) Un solver basado en multiplicadores de Lagrange del problema de optimización con restricciones.
- 2) El método de Newton con restricciones de igualdad a partir de un punto factible.

2 Consideraciones metodológicas

2.1 Definición del problema

Dentro de la teoría financiera, el *Modelo de Markowitz* corresponde con el problema minimizar la siguiente función objetivo junto con una serie de restricciones de tipo lineal:

$$\min_w \frac{1}{2} w^t \Sigma w$$

- Donde w es el vector de pesos de las acciones que puede ser inicializado de forma aleatoria.
- Σ es la matriz de varianzas y covarianzas asociada a los rendimientos de los activos en un periodo de interés.

Este es un problema con restricciones y son las siguientes: * La integración del portafolio en términos de sus pesos otorgue un nivel de retorno esperado $r > 0$ al inversionista, que es prefijado de antemano:

$$w^t \mu = r$$

- Además, se debe agotar todo el presupuesto disponible para diversificar en las acciones del portafolio, lo que en términos de la expresiones de sus pesos redundan, si w denota a la forma vectorial de los pesos w_i de portafolio, entonces la suma de los mismos es igual a 1, lo que puede escribirse como:

$$w^t 1 = 1$$

2.2 Portafolio de activos

La revisión de información para emplear el *Modelo de Markowitz* en una aplicación práctica abarcó la revisión de fuentes públicas y privadas. A efecto de garantizar la replicabilidad de los cálculos, se estimó pertinente apegarse a los siguientes principios:

- Considerar empresas que cotizaran en bolsa -a saber, en NYSE, Bolsa de Nueva York, NASDAQ-Bolsa de Valores Nasdaq, LSE-London Stock Group y SEHK- Bolsa de valores de Hong Kong) y cuya información se pueda consultar públicamente a través de una API o framework ya implementado (se decidió emplear la librería de Python que extrae información de la plataforma Yahoo Finance),
- Emplear precios históricos en un periodo de tiempo amplio, para capturar la variabilidad inherente a la fluctuación de precios de acciones a lo largo del tiempo. En concreto, para considerar el comportamiento histórico de las acciones de dichas empresas, se consideró la información financiera de los últimos 5 años para hacer el análisis (esto es, desde el 1 de enero de 2015 al 30 de abril de 2020).
- Enfocarse en empresas de diversos sectores de la economía, como haría un inversionista experimentado o fondo de inversión en la realidad para diversificar sus inversiones.

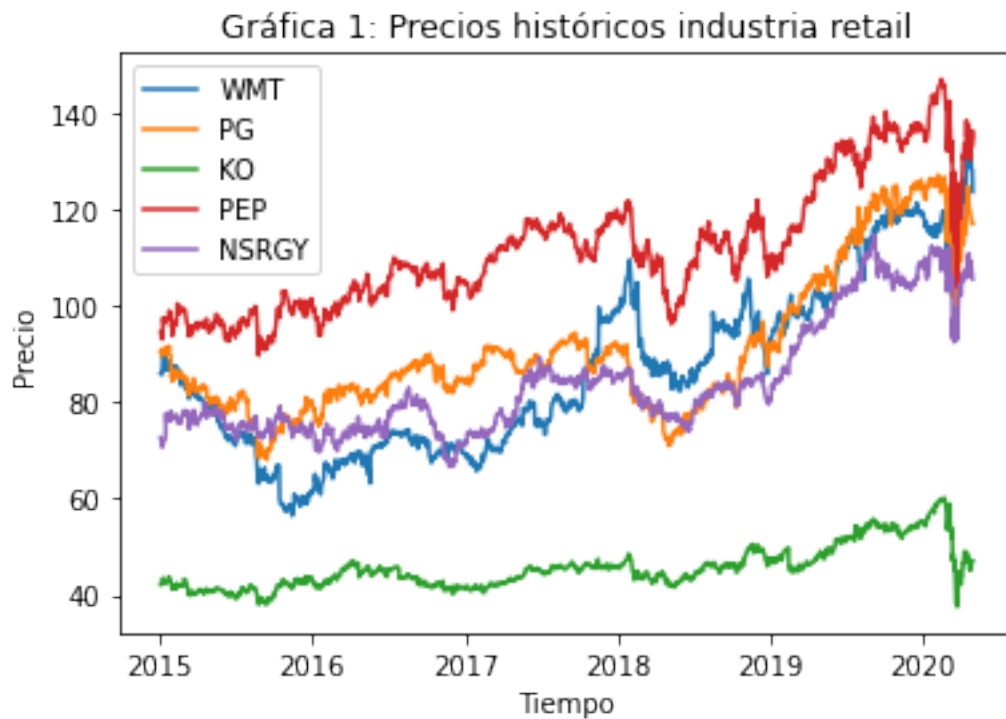
- Considerar únicamente empresas destacados, en este caso bajo el criterio de selección de aquellas que cuentan con mayor participación en el mercado (al momento de realizar este proyecto).

En concreto, se consideraron 50 empresas, cuya información se resume en el siguiente cuadro:

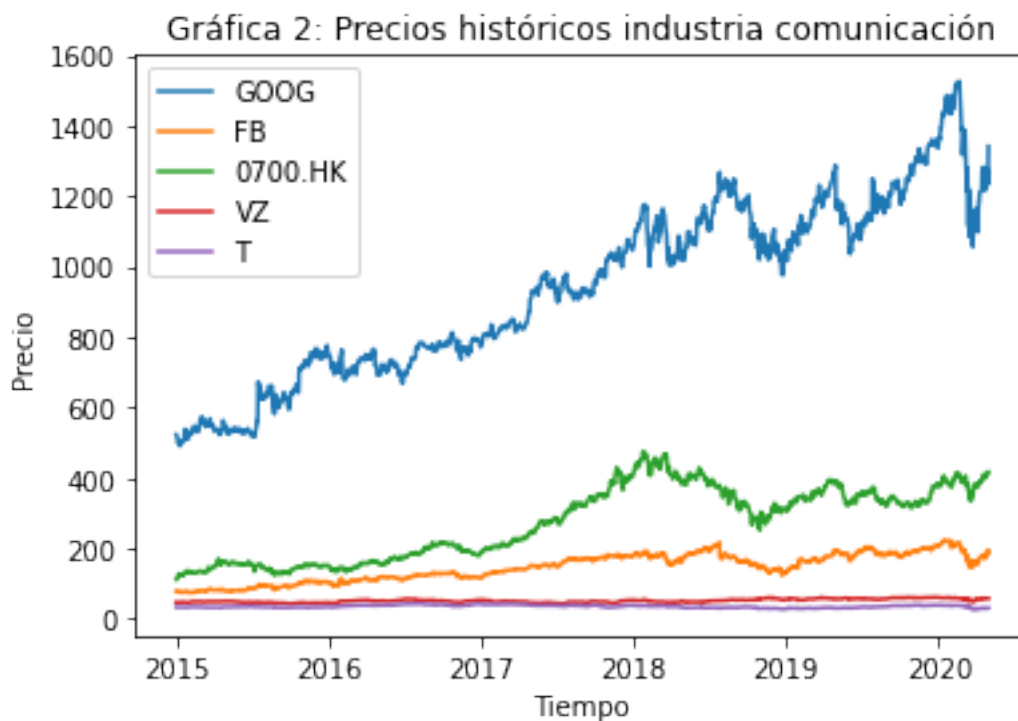
Código Bursátil	Nombre de la empresa	Industria
XOM	Exxon Mobil Corporation	Energía
CVX	Chevron Corporation	Energía
RDSA.AS	Royal Dutch Shell	Energía
RELIANCE.NS	Reliance Industries Limited	Energía
COP	Conoco Phillips	Energía
AMT	American Tower Corporation	Inmobiliaria
CCI	Crown Castle International Corp	Inmobiliaria
PLD	Prologis, Inc	Inmobiliaria
DLR	Digital Realty Trust, Inc	Inmobiliaria
0688.HK	China Overseas Land & Investment Limited	Inmobiliaria
LIN	Linde plc	Materiales
BHP.AX	BHP Group	Materiales
RIO.L	Rio tinto Group	Materiales
AI.PA	L’Air Liquide S.A	Materiales
2010.SR	Saudi Basic Industries	Materiales
LMT	Lockheed Martin Corporation	Materiales Industriales
HON	Honeywell International Inc	Materiales Industriales
UPS	United Parcel Service. Inc	Materiales Industriales
UNP	Union Pacific Corporation	Materiales Industriales
RTX	Raytheon Technologies Corporation	Materiales Industriales
AMZN	Amazon.com, Inc	Consumo Discrecional
BABA	Alibaba Group Holding Limited	Consumo Discrecional
HD	The Home Depot, Inc	Consumo Discrecional
MC.PA	LVMH Louis Vuitton, Société Européenne	Consumo Discrecional
7203.T	Toyota Motor Corporation	Consumo Discrecional
WMT	Walmart Inc	Retail
PG	The Procter & Gamble Company	Retail
KO	The Coca-Cola Company	Retail
PEP	PepsiCo Inc	Retail
NSRGY	Nestlé S.A	Retail
JNJ	Johnson & Johnson	Cuidado Personal
UNH	UnitedHealth Group Incorporated	Cuidado Personal
PFE	Pfizer Inc	Cuidado Personal
MRK	Merk & Co., Inc	Cuidado Personal
RHHBY	Roche Holding AG	Cuidado Personal
VTI	Vanguard Total Stock Market ETF	Financiera
VOO	Vanguard S&P 500 ETF	Financiera
BRK-A	Berkshire Hathaway Inc	Financiera
1398.HK	Industrial and Commercial Bank of China Limited	Financiera
JPM	JPMorgan Chase & Co	Financiera
MSFT	Microsoft Corporation	Tecnología

Código Bursátil	Nombre de la empresa	Industria
AAPL	Apple Inc	Tecnología
V	Visa Inc	Tecnología
005930.KS	Samsung Electronics	Tecnología
MA	Mastercard Incorporated	Tecnología
GOOG	Alphabet Inc	Comunicación
FB	Facebook, Inc	Comunicación
0700.HK	Tencent Holdings Limited	Comunicación
VZ	Verizon Communications Inc	Comunicación
T	AT&T Inc	Comunicación

A este respecto, se puede ilustrar el comportamiento de tales activos a lo largo del periodo comprendido del 1 de enero de 2015 al 30 de abril de 2020, como se muestra en las imágenes:

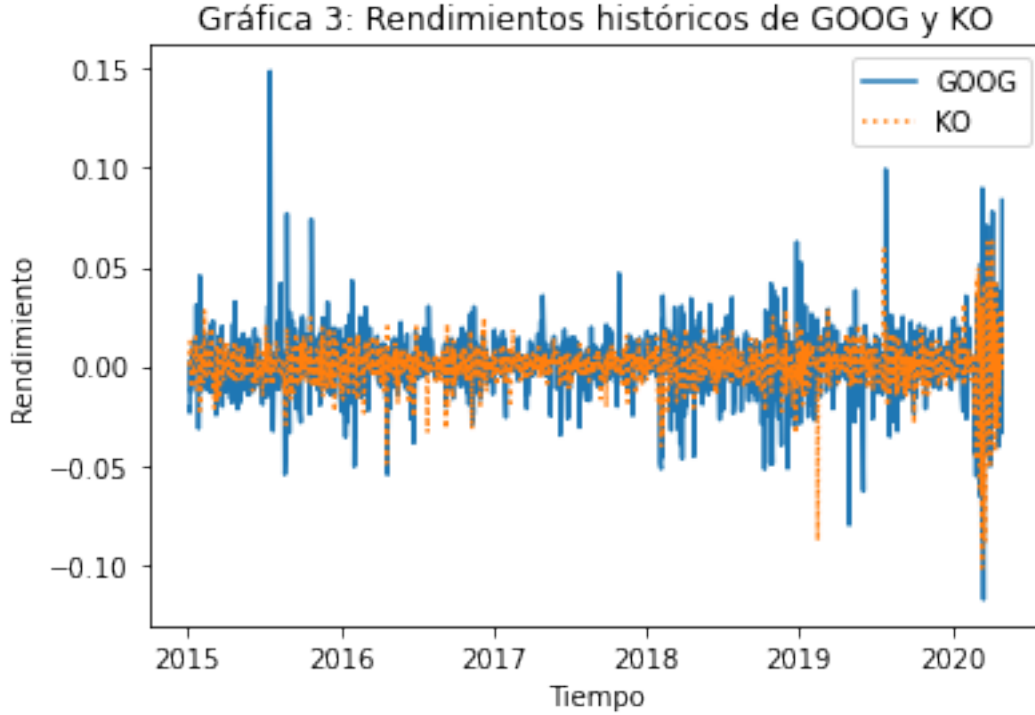


De acuerdo con la gráfica (1), se puede observar que en la industria de *retail* los rendimientos de las acciones presentan variaciones a lo largo del tiempo pero con tendencia positiva. La empresa que presenta mayor variación en estos últimos 5 años es PEP (PesiCo Inc), por lo que no se esperaría que el portafolio óptimo incluya este código bursátil con alta ponderación.



Por otra parte, en la gráfica (2) los rendimientos de la industria de *comunicación* presentan mayor estabilidad (no existe tanta fluctuación a través del tiempo) y del mismo modo la acción de Google (Alphabet Inc) tiene un mayor rendimiento en comparación con las otras de la industria

Es importante mencionar que el comportamiento de la industria en forma global es básicamente el marco de referencia para la empresas, el comportamiento de los rendimientos depende en gran parte del momento económico, al analizar ambas gráficas se puede ver que en el primer trimestre del 2020 prácticamente todas las acciones tuvieron un rendimiento a la baja, pero esta contracción afecto en mayor proporción a la industria del *retail*.



De la gráfica (3) podemos observar que los rendimientos oscilan sobre el cero. Nos interesan los activos que tengan la menor variación en el tiempo y el mayor rendimiento.

2.3 Cálculo de rendimientos del portafolio de activos

En complemento a lo anterior, se realizaron las siguientes consideraciones metodológicas en torno a los rendimientos del portafolio de activos seleccionado:

- Para el cálculo de los rendimientos esperados de cada una de las empresas, se estimó pertinente evaluarlo a través de los precios de cierre diarios a partir de la fórmula del *rendimiento instantáneo* en escala logarítmica:

$$rendimiento = \log \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

Ello para evitar problemas numéricos debidos a la escala de los rendimientos.

- En lo tocante a como se debe determinar el vector de pesos asociado al portafolio de activos W , se consideró relevante pensarlos como una proporción, lo que equivale a que la suma de la entradas sea igual a 1.
- Por otro lado, el rendimiento esperado del portafolio se obtiene haciendo el producto punto del vector de rendimientos medios de los activos en el periodo en cuestión y los pesos del portafolio elegido, cumpliendo los portafolios factibles la restricción

$$r = \mu w^t$$

- Es relevante apuntar que en un entorno de inversión, los pesos pueden ser negativos porque existen las ventas en corto (*short sale*), que implican que los inversores podrían tener una ganancia si tienen algún contrato de préstamo de títulos accionarios, los cuales deben devolver a una fecha futura y podrían devolverlos a un precio menor.
- Finalmente, la matriz de varianzas y covarianzas de los portafolios se calcula como las correspondientes matrices de varianzas y covarianzas rendimientos de las acciones en el periodo de los últimos 5 años para hacer el análisis (es decir, 1 de enero de 2015 al 30 de abril de 2020).
- Cabe destacar que en razón de que la series de tiempo no incluyen fines de semana, puesto que, como regla general del mercado, en tales días no se cotiza en las bolsas.

2.4 Metodologías para encontrar la solución del Modelo de Markowitz

A continuación se procederá a describir las dos metodología abordadas en este proyecto para dar solución al Modelo de Markowitz.

2.4.1 Solver basado en multiplicadores de Lagrange

En este caso, el problema de minimización se aborda calculando la solución analítica del problema de optimización recién descrito, empleando la expresión del Lagrangiano del problema de optimización considerando las respectivas restricciones, aprovechando que la matriz de covarianzas es simétrica y definida positiva. Recordamos al lector que el contexto del problema que nos interesa, la letra r indica el rendimiento esperado por el inversionista que espera recibir con el portafolio de activos estudiados.

Solución: Aplicar el método de multiplicadores de Lagrange al problema de optimización convexa (minimización) sujeto a restricciones lineales del Modelo de Markowitz:

- Definimos el Lagrangiano del problema:

$$L(w, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2}w^T \Sigma w + \lambda_1(r - w^T \mu) + \lambda_2(1 - w^T 1_n)$$

- En consecuencia, las condiciones de primer orden que debe satisfacer el punto factible del problema, quedan en función de lo siguiente:

$$\frac{\delta L}{\delta w} = 0_n = \Sigma w - \lambda_1 \mu - \lambda_2 1_n$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda_1} = 0 = r - w^T \mu$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda_2} = 0 = 1 - w^T 1_n$$

- Resolviendo para w en términos de λ_1, λ_2

$$w^* = \lambda_1 \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 \Sigma^{-1} 1_n$$

- Por otro lado, resolviendo para λ_1, λ_2 y sustituyendo para \mathbf{w} se sigue:

$$\begin{aligned} r &= w^T \mu = \lambda_1(\mu^T \Sigma^{-1} \mu) + \lambda_2(\mu^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n) \\ 1 &= w^T \mathbf{1}_n = \lambda_1(\mu^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n) + \lambda_2(\mathbf{1}_n^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n) \end{aligned}$$

Tras una serie de manipulaciones algebraicas se puede ver que las ecuaciones previas pueden ser resueltas de manera analítica el resolver el sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

En donde:

- $a = \mu^T \Sigma^{-1} \mu$,
- $b = \mu^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n$,
- $c = \mathbf{1}_n^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n$

Por otro lado, es de notarse que de acuerdo a la teoría de álgebra lineal se puede calcular de inversa de la matriz recién descrita usando la fórmula:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ac - b^2} \begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Con lo cual, se desprende que

$$\frac{1}{ac - b^2} \begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Tal expresión implica que:

$$\frac{1}{ac - b^2} \begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Lo que equivale a su vez a:

$$\lambda_1 = \frac{1}{ac - b^2} (rc - b)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{ac - b^2} (a - rb)$$

Sustituyendo a, b y c en dichas expresiones se sigue:

$$\lambda_1 = \frac{1}{(\mu^T \Sigma^{-1} \mu)(\mathbf{1}_n^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n) - (\mu^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n)^2} \cdot (r(\mathbf{1}_n^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n) - (\mu^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n))$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{(\mu^T \Sigma^{-1} \mu)(\mu^T \Sigma^{-1} \mu) - (\mu^T \Sigma^{-1} 1_n)^2} \cdot ((\mu^T \Sigma^{-1} \mu) - r(\mu^T \Sigma^{-1} 1_n))$$

De lo anterior, se puede sustituir en la expresión

$$w^* = \lambda_1 \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 \Sigma^{-1} 1_n$$

para obtener explícitamente del Modelo de Markowitz. Con lo cual la solución del sistema de Markowitz se puede encontrar como sigue:

Formamos al vector

$$w^* = w_0 \cdot (\Sigma^{-1} \cdot \mu) + w_1 \cdot (\Sigma^{-1} \cdot 1)$$

* Donde los vectores involucrados tienen las siguientes expresiones:

$$w_0 = \frac{1}{\Delta}(\hat{r} \cdot B - C)$$

$$w_1 = \frac{1}{\Delta}(A - C \cdot r)$$

- Donde:

$$A = \mu^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu \in \mathbb{R}$$

$$B = 1_n^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot 1_n \in \mathbb{R}$$

$$C = 1_n^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu = \mu^T \Sigma^{-1} 1_n \in \mathbb{R}$$

$$\Delta = A \cdot B - C^2 \in \mathbb{R}$$

De todo lo anterior se desprende, que se puede estimar la solución analítica del *Modelo de Markowitz* a través de las ecuaciones recién descritas.

Tales hechos fueron aprovechados en la implementación en la librería Cupy de Python realizada para resolver el *Modelo de Markowitz*.

2.4.2 Solver basado en el método de Newton con restricciones de igualdad

Es relevante destacar que en la teoría de optimización es posible aproximar las soluciones de un problema de optimización sujeto a restricciones lineales, si se cumplen ciertos supuestos:

- La función objetivo es convexa y dos veces continuamente diferenciables,
- El número de restricciones es menor al número de variables y tales restricciones son independientes,

En tal caso, es posible probar que por condiciones necesarias y suficientes de Karush-Kuhn-Tucker (también conocidas como las condiciones KKT o Kuhn-Tucker), es posible observar que la solución del problema de minimización equivale a resolver un problema denominado “dual”. Concretamente se sabe que, existe una equivalencia lógica entre las siguientes proposiciones:

- $x^* \in \text{dom}(f)$ es óptimo
- $\exists \nu^* \in \mathbb{R}^p (Ax^* = b, \nabla f(x^*) + A^T \nu^* = 0)$

Nota: típicamente las ecuaciones involucradas se denominan a través de la siguiente terminología:

- Ecuaciones de factibilidad primal:

$$Ax^* = b$$

- Ecuaciones de factibilidad dual:

$$\nabla f(x^*) + A^T \nu^* = 0$$

Aprovechando lo anterior, se puede extender el método de Newton para resolver las ecuaciones de KKT, de manera que pueda aproximarse la solución del problema de optimización original; ello se basa en los siguientes hechos:

- El punto inicial debe ser factible, es decir debe estar en el dominio de la función objetivo y satisfacer las restricciones lineales.
- El paso de Newton se debe modificar para que satisfaga las conducentes restricciones.
- Lo anterior se puede lograr aproximando la función objetivo, considerando su expansión derivada del teorema de Taylor hasta el término de segundo orden, $\hat{f}(x + \nu^*)$, de modo que puede considerarse un nuevo problema de optimización dado por:

$$\min \hat{f}(x + \nu^*)$$

- El paso de Newton en un punto x , se define como la solución única al problema de minimización cuadrática previo con matriz KKT no singular; el cual se denota específicamente como

$$\Delta x_{nt}$$

y se encuentra en términos de las ecuaciones matriciales:

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_t \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(x) \\ 0 \end{bmatrix}$$

- En este último caso w es la variable óptima dual asociada.

Notas: En este caso, las implementaciones típicamente echan mano de una cantidad conocida como *decremento de Newton* $\lambda(x) = (\Delta x_{nt}^T \nabla^2 f(x) \Delta x_{nt})^{1/2}$, la cual guarda información útil en las búsquedas de direcciones factibles, como las búsquedas de línea y que puede emplearse como criterio de paro en procesos iterativos, como en el que nos ocupa.

Con todos los elementos anteriores, nos encontramos en condiciones de describir el Algoritmo del método de Newton para un problema de optimización con restricciones de igualdad:

Algoritmo del método de Newton para un problema de optimización con restricciones de igualdad

- Repetir hasta alcanzar convergencia:
 1. Calcular el paso y decremento de Newton,

$$x_{nt}^T, \lambda(x)$$

2. *Revisar criterio de paro:* terminar método si

$$\frac{\lambda(x)}{2} \leq \epsilon$$

3. *Búsqueda de línea:* elegir el método de paso por backtracking line search,

4. Actualizar: $x + t\Delta x_{nt}$

Método de Newton para Modelo de Markowitz

Para el problema de optimización derivado del modelo en concreto, se cumplen las hipótesis que permiten aplicar el solver previamente descrito. Cabe destacar que las restricciones lineales se pueden representar por $Aw = b$ en donde, si μ es el vector de rendimientos medios

$$A = \begin{bmatrix} \mu^T \\ 1_n^T \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix}$$

De manera particular, ello implica que se puede obtener un punto factible para tales restricciones lineales, resolviendo las ecuaciones normales del sistema inducido por estas, es decir, encontrando la solución de

$$A^T A w = A^T b$$

Tales hechos fueron aprovechados en la implementación en la librería Cupy de Python realizada para resolver el *Modelo de Markowitz*

2.4.3 Implementaciones

El detalle de las implementaciones realizadas se puede conocer a través de los siguientes vínculos:

https://github.com/czammar/MNO_finalproject/tree/master/notebooks/Programacion

3 Resultados

En esta sección se abordan los resultados obtenidos para el portafolio de activos descrito previamente, empleando las implementaciones que permiten encontrar la solución del modelo

3.1 Comparativo de solver basado en multiplicadores de Lagrange y método de Newton

A continuación se muestra el comparativo entre los resultados obtenido con:

- a) el solver basado en los multiplicadores de Lagrange y
- b) el solver con el método de Newton usando las aproximaciones con diferencias finitas y funciones simbólicas para representar las expresiones de derivadas que se involucran en su implementación,

Cabe destacar que para su elaboración se consideraron las siguientes hipótesis: i) se decidió variar el valor del rendimiento r en un rango de 0.4 a 1, ii) se muestra la distancia entre ambas soluciones de w inducida por la norma 2 y la distancia inducida por la norma 1, iii) además se acompaña del retorno bajo ambos métodos de solución del Modelo de Markowitz, mostrando que cumple las restricciones lineales asociadas y iv) la varianza correspondiente para las soluciones obtenidas con dichas metodologías.

Soluciones de método de Lagrange (L) vs Newton usando diferencias finitas (N_{df})

Dist. $\ \cdot\ _2$	Dist. $\ \cdot\ _1$	retorno		varianza L	varianza N_{df}
		retorno L	N_{df}		
0.0645058	0.11023	0.4	0.4	9.39769e-05	9.39799e-05
0.0743461	0.129647	0.5	0.5	0.000125748	0.000125752
0.0392947	0.0666025	0.6	0.6	0.000165024	0.000165025
23.7828	40.5029	0.7	0.7	0.000211806	0.000668028
30.3446	50.4783	0.8	0.8	0.000266093	0.000842447
23.8339	37.833	0.9	0.9	0.000327885	0.000675752
35.7687	72.2307	1	1	0.000397184	0.00309617

De lo anterior, se desprenden los siguientes hallazgos:

- La diferencia entre las soluciones aumenta conforme aumenta el rendimiento deseado.
- A pesar del aumento en la diferencia, ambas soluciones cumplen con las restricciones deseadas.
- La solución es mejor usando el solver basado en los multiplicadores de Lagrange.

Soluciones de método de Lagrange (L) vs Newton usando funciones simbólicas para derivadas (N_{fs})

Ahora mostramos el mismo comparativo, pero ahora entre el modelo con multiplicadores de Lagrange y el algoritmo de Newton usando las expresiones de las derivadas de a través de funciones simbólicas (véase el código de la implementación para mayor detalle):

Dist. $\ \cdot\ _2$	Dist. $\ \cdot\ _1$	retorno		varianza L	varianza N_{fs}
		retorno L	N_{fs}		
1.41113e-11	6.57346e-11	0.4	0.4	9.39764e-05	9.39764e-05
1.62202e-11	7.96734e-11	0.5	0.5	0.000125748	0.000125748
1.57851e-11	6.93323e-11	0.6	0.6	0.000165025	0.000165025
2.45899e-11	1.03308e-10	0.7	0.7	0.000211807	0.000211807
2.32235e-11	9.36646e-11	0.8	0.8	0.000266095	0.000266095
2.23753e-11	9.86439e-11	0.9	0.9	0.000327889	0.000327889
2.74735e-11	1.19941e-10	1	1	0.000397188	0.000397188

Por lo anterior podemos concluir que en las hipótesis de este segundo comparativo:

- La diferencia entre las soluciones aumenta conforme aumenta el rendimiento deseado, pero en una magnitud mucho menor que con diferencias finitas.
- Ambas soluciones siguen cumpliendo con las restricciones deseadas.
- El riesgo con el solver usando los multiplicadores de Lagrange es prácticamente el mismo que el del solver con el método de Newton.
- Aparentemente, las soluciones estimadas por ambos solvers son muy cercanas.

Además, de tales comparativos se puede afirmar que el riesgo con el solver usando los multipli-

cadores de Lagrange siempre es igual o menor que el del solver con el método de Newton utilizando diferencias finitas y es igual con diferencias simbólicas

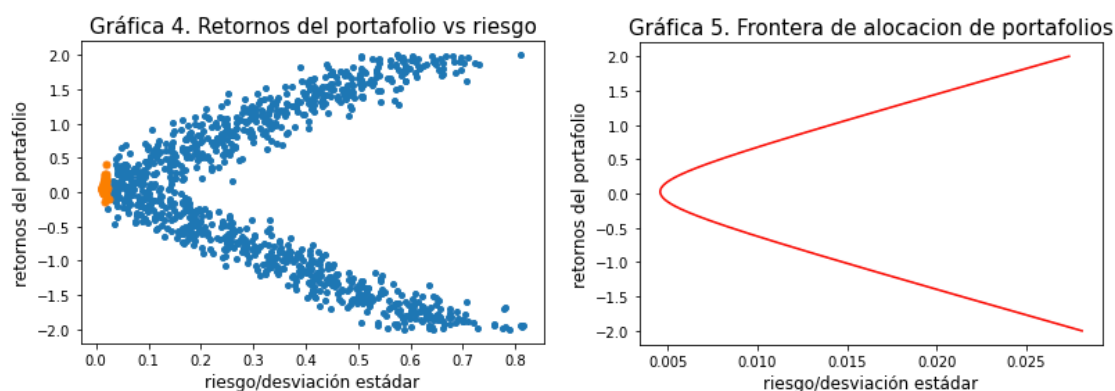
3.2 Comparativo de varianza obtenida con diferentes retornos

Dados los resultados mostrados en el comparativo anterior, en este caso se decidió emplear el solver basado en multiplicadores de Lagrange. Por otra parte, para este experimento el interés reside en mostrar el comportamiento de la expresión de varianza

$$w^T \Sigma w$$

al modificar el valor del rendimiento r en un rango de $(-1,1)$.

Al respecto, los resultados obtenidos se resumen mediante la siguiente gráfica:



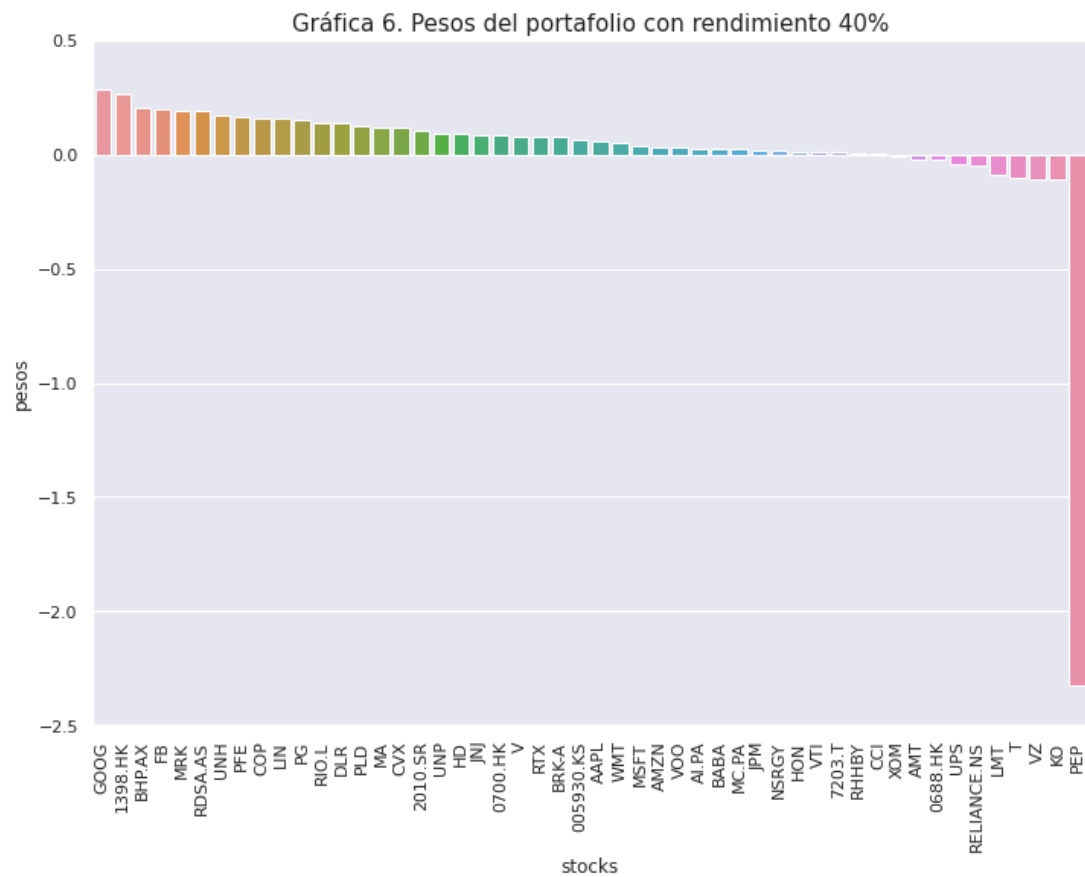
De lo anterior, se desprenden los siguientes hallazgos:

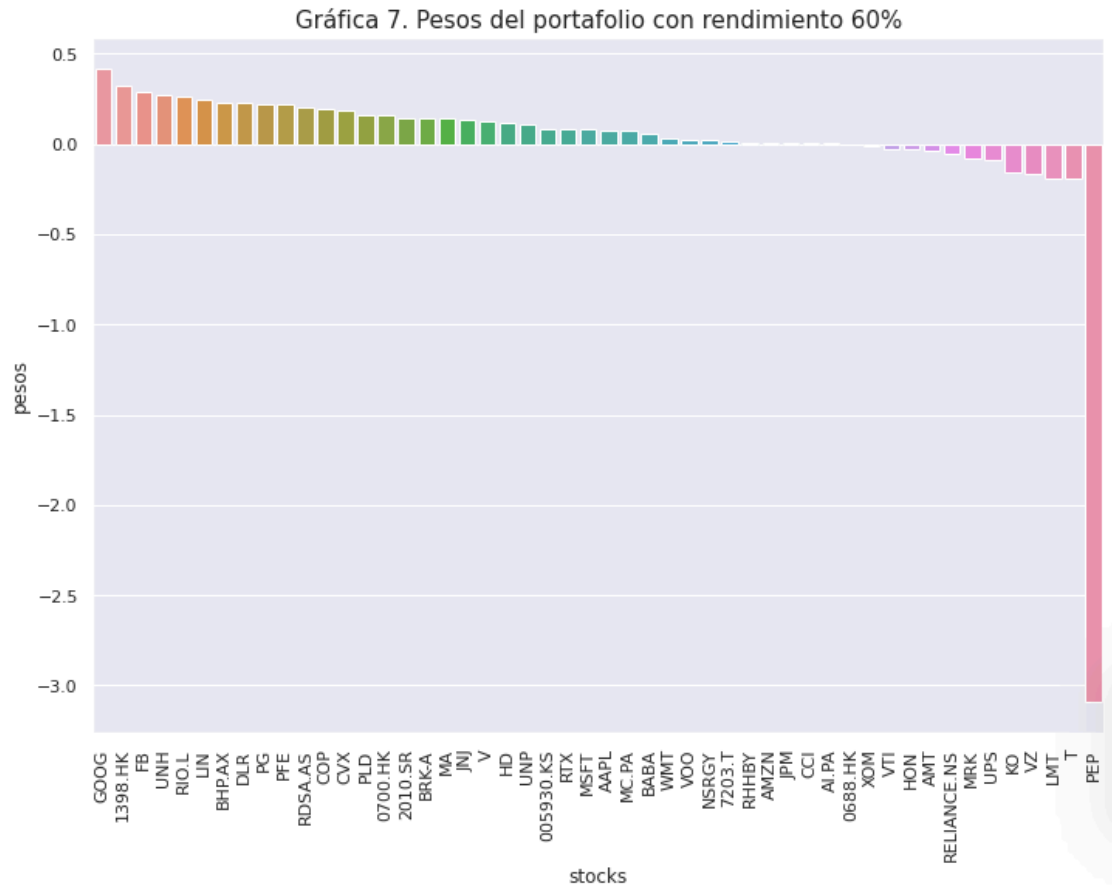
- Se cumple la premisa financiera que señala : “a mayor riesgo mayor rendimiento”, ya que al aumentar el rendimiento en un rango de $(-1, 1)$ se obtuvo que conforme éste va incrementando el riesgo es mayor sobre el portafolio de activos, que básicamente se conoce como *trade-off*.
- Los puntos eficientes en la frontera son aquellos que están en la curva roja, se podría decir que en esos puntos el inversionista agota su presupuesto, pero en nuestro problema de optimización se busca agotar el presupuesto y del mismo modo minimizar el riesgo/varianza de los activos.
- Todas las carteras que se encuentran por arriba de la frontera de varianza mínima (a partir de los portafolios color naranja) proporcionan las mejores combinaciones de riesgo-rendimiento y, por lo tanto, son candidatos a portafolio óptimo.

3.3 Comparativo de valores de pesos del portafolio obtenida con diferentes retornos

En este caso nuevamente se decidió emplear el solver basado en multiplicadores de Lagrange. Aquí, el interés reside en mostrar el comportamiento de los pesos a los largo del portafolio al modificar el valor del rendimiento r en un rango de $(0, 1)$.

Al respecto, los resultados obtenidos se resumen mediante las siguientes gráficas de 2 escenarios con diferentes rendimientos:





De lo anterior, se desprenden los siguientes hallazgos:

- En la gráfica 6, se obtienen los pesos del portafolio evaluado con un rendimiento referencia de 40%, y se observa que los activos que requieren mayor asignación de inversión son GOOG (Alphabet Inc) y 1398.HK (Industrial and Commercial Bank of China Limited) en 0.28454 y 0.26264 respectivamente. Y el modelo recomienda que el inversionista tome una posición corta en las acciones de PEP (PesiCo Inc) en -2.32468, debido a que en el modelo se asume que existen *ventas en corto*, esto implicaría que se recomienda comprar acciones PEP para cubrir una deuda de títulos a un precio menor.
- Del mismo modo, cuando se incrementa el rendimiento a 60% (Gráfica 7) las acciones de GOOG y 1398.HK se mantienen como las mayores proporciones, ya que se acoplan para tener un riesgo moderado para el modelo.
- Otro dato importante a señalar es que estos rendimientos del portafolio 40% y 60% respectivamente, si se compararan con una tasa de libre riesgo $r_f = 5.7\%$ por ejemplo de Cetes a 28 días, se puede concluir que son comparables porque justamente ambas opciones de inversión son de bajo riesgo y no ofrecen una prima de riesgo. Es por eso que este modelo es para inversionistas conservadores, los cuales desean tener certeza de sus flujos futuros.

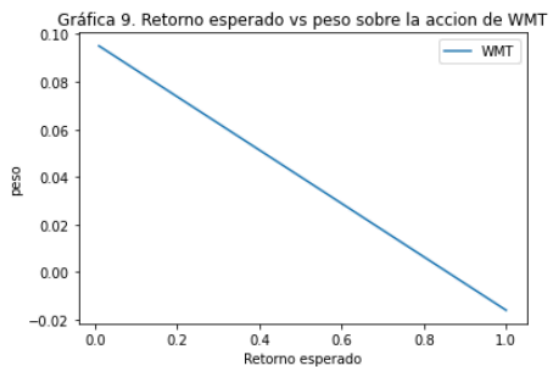
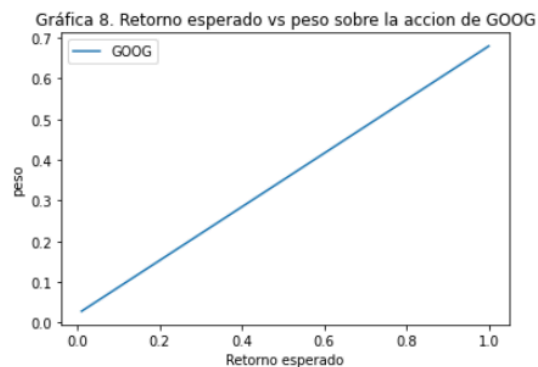
3.4 Comparativo de valores de pesos de determinado activo del portafolio obtenida con diferentes retornos

Nuevamente se decidió emplear el solver basado en multiplicadores de Lagrange. En este experimento el interés reside en mostrar el comportamiento de los pesos del portafolio que se localizan

en un activo específico al modificar el valor del rendimiento r en un rango de $[0.01,1]$.

En concreto, los activos elegidos fueron GOOG y KO.

Al respecto, los resultados obtenidos se resumen mediante las siguientes gráficas:



De lo anterior, se desprenden los siguientes hallazgos:

- La figura (3) representa la relación lineal que existe entre el peso destinado a la acción de GOOG (Alphabet Inc), la cual resulta ser *positiva* porque a mayor rendimiento esperado del inversionista mayor es el peso que se debe destinar a esta acción, ya que su variabilidad es moderada y con tendencia positiva.
- En el caso contrario, las acciones de KO (The Coco-Cola Company) mostraban cierta estabilidad en la figura (1) pero su rendimiento no es tan alto en comparación con las otras acciones de la industria por lo que el portafolio de *Markowitz* no tomaría estas acciones con un peso positivo, justamente por eso aquí la relación es negativa, ya que representa la alocaación de un activo de una **posición corta**.

4 Conclusiones

4.1 Generales

- Este proyecto se encargó de realizar dos implementaciones que permiten resolver el **Modelo de Markowitz** a través en la librería CuPy del lenguaje Python empleando dos métodos: 1) uno basado en multiplicadores de Lagrange y 2) otro basado en el método de Newton para aproximar numéricamente la solución de un problema de optimización con restricciones lineales de igualdad,
- El **método de multiplicadores de Lagrange** puede ser útil para resolver problemas de optimización que surgen en diferentes contextos como el área de finanzas,
- El **método de Newton** se puede extender para aproximar numéricamente la solución de un problema de optimización con restricciones lineales de igualdad, junto con las condiciones KKT, así como con técnicas clásicas de otros métodos iterativos, tales como el backtraking y la búsqueda de línea.
- Cupy es un framework sumamente útil de Python que nos permite aprovechar las capacidades de tarjetas GPU para resolver problemas de cómputo científico, con una curva de aprendizaje muy pequeña si ya se conocen herramientas como Numpy,

- Las herramientas de cómputo en la nube (AWS) y los entornos de virtualización (Docker) se pueden aprovechar en nuestro beneficio para resolver problemas complejos, con soluciones que pueden ser compartidas y replicadas fácilmente a través de estos medios.
- Sin perjuicio de lo anterior, también se considera relevante destacar una serie de experiencias y aprendizajes obtenidas en el desarrollo de este proyecto.

4.2 Contexto Financiero

- Un punto importante a resaltar es la construcción de la frontera eficiente de posibles portafolios, la cual se obtuvo con datos reales y concuerda con la teórica financiera. De igual manera, se encontró el punto que minimiza dicha función (portafolio de mínima varianza) y se concluyó que todos los posibles puntos de la frontera por encima del **PMV** son óptimos dependiendo de las preferencias de los inversionistas.
- De acuerdo con el análisis se observó que las acciones de una empresa pueden tener gran variabilidad a lo largo de tiempo. No obstante, es importante destacar que este riesgo no siempre depende directamente del desempeño de la empresa, en muchas ocasiones es ocasionado por factores exógenos y esto es de alguna manera un precio que las empresas están dispuestas a pagar por entrar a cotizar a cierta bolsa de valores, debido a que cuando una empresa desea realizar su OPI (Oferta pública inicial) forma parte del conjunto del mercado de valores y su precio también depende de las **expectativas de los inversores**.
- En el caso del supuesto que permite *short sales* se confirmó que en la solución del **PMV** es posible tener ciertas acciones con pesos negativos y esto no significa que no se deba invertir en esos activos, más bien es necesario ver que posición le conviene al inversionista respecto a esas acciones, debido a que, en caso de que el inversor tenga un pasivo de títulos accionarios implicaría que sus obligaciones futuras pueden disminuir por que se espera que ese activo tenga un rendimiento negativo.
- En tiempos actuales con gran incertidumbre en la economía se considera muy valioso tener este modelo implementado. La incertidumbre siempre ha estado presente en los mercados, pero en momentos económicos adversos se puede generar mayor inseguridad en las decisiones de los individuos y más aún en las decisiones de inversión, por lo cual esta es una buena herramienta para aquellas personas que desean tener una idea detallada de como invertir.

4.3 Sobre teoría e implementación

- Aunque la teoría puede tener resultados sólidos sobre temas de métodos numéricos, se requiere tiempo y discusión para aterrizar el proceso creativo en código realista. Sin embargo, una buena base teórica y visión para el proceso de programación son claves para el éxito de los proyectos
- El diseño de un buen método para implementar un algoritmo es crucial,
- Sin embargo, siempre hay más de una solución posible para un problema que puede arrojar resultados confiables,
- No se puede pensar solo en el diseño de la implementación, sin tener en cuenta la infraestructura necesaria para lograrlo. AWS y Docker son alternativas formidables para usar GPU's sin tanto dolor!!
- Se requiere aprender estrategias y herramientas de software/hardware para bajar tiempos, mejorar pruebas y demás que aseguren el éxito de los proyectos,

- Siempre es necesario correr pruebas sobre el código, aunque se piense que la implementación funciona bien.

4.4 Sobre trabajo en equipo y Github

- Github puede ser una gran herramienta para el desarrollo colaborativo,
- Es fácil asignar tareas y resolver conflictos usando flujos basados en branches de Github,
- Se pueden obtener parámetros del desempeño de todos el proyecto y de los individuos que participan a través de las interfaces de Github,
- Aún con lo anterior, pueden ocurrir errores si las personas no se comunican con claridad y si no se tiene claridad de los objetivos del proyecto,
- El trabajo en equipo necesita compromiso y tiempo de los integrantes, además de que el project manager tenga suficiente visión para organizar al equipo en harás de conseguir las metas del proyecto.

5 Referencias

Para el lector interesado a continuación se muestran una serie de referencias consultadas para el desarrollo de este proyecto.

5.1 Teoría financiera

- Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. J. (2011). Investments. New York:McGraw-Hill/Irwin.https://www.niceideas.ch/airxcell_doc/doc/userGuide/portfolio_optimTheory.html
- Topics in mathematics with applications in finance, MIT 18.S096, Lecture 14 Portfolio Theory, Fall 2013, Dr. Kempthorne, https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-s096-topics-in-mathematics-with-applications-in-finance-fall-2013/lecture-notes/MIT18_S096F13_lecnote14.pdf

5.2 Optimización

- S. P. Boyd, L. Vandenberghe, Convex Optimization, Cambridge University Press, 2009
- Notas del curso de Métodos Numéricos y Optimización, ITAM, Erick Palacios Moreno, 2020 https://drive.google.com/file/d/12L7rOCgW7NEKl_xJbIGZz05XXVrOaPBz/view

5.3 Implementaciones de otros autores usadas para el proyecto

- Algoritmos para optimización con restricciones de igualdad, ecuaciones lineales del curso MNO 2020 (para método de Newton) desarrolladas por Erick Palacios Moreno: [Liga de github](#)
- Dockefile con para GPU's y Cupy del curso MNO 2020 desarrolladas por Erick Palacios Moreno: [Liga de github](#)

6 Anexo: Infraestructura

En este proyecto se utilizaron diferentes herramientas para desarrollar el código, permitiendo poder utilizar CuPy sin la necesidad de que los integrantes contaran con una máquina propia con GPU.

Para ello, se utilizó Google Colab para el desarrollo del código pues es gratuito, de muy fácil acceso y user friendly. Si bien, en este caso los recursos que ofrece Google Colab fueron suficientes para el problema a resolver, se dio un paso más al ejecutarlos en una instancia de AWS.

Para realizar la ejecución en la instancia de AWS, se eligió una máquina con tarjeta gráfica NVIDIA, en ella se construyó una imagen de Docker para tener el software necesario para poder ejecutar la implementación del modelo de Markowitz. Finalmente se levantó un contenedor a partir de la imagen de Docker y de esta forma se ejecutó el código desarrollado, en AWS.

De esta manera, se tienen dos alternativas para la ejecución de los códigos, Google Colab y AWS.