Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Organización y Arquitectura de Computadoras

Tarea 03: Lógica Digital

Álvarez Ríos Metzitlalli | 423052523

Martínez Jiménez Maitreyi | 320099773

1. Preguntas

1. Demuestra que $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Respuesta

$$
\begin{aligned}
x \cdot (y \cdot z) &= (x \cdot (y \cdot z)) + 0 && \textbf{Por P2a.}\\
&= (x \cdot (y \cdot z)) + (z \cdot \overline{z}) && \textbf{Por P5b.}\\
&= (z \cdot \overline{z}) + (x \cdot (y \cdot z)) && \textbf{Por P3a.}\\
&= (z + (x \cdot (y \cdot z)) \cdot (\overline{z} \cdot (x \cdot (y \cdot z)))) && \textbf{Por P4b.}\\
&= ((\overline{z} + x) \cdot (z + (y \cdot z)) \cdot (\overline{z} \cdot (x \cdot (y \cdot z)))) && \textbf{Por P4b.}\\
&= ((\overline{z} + x) \cdot (z + (\cdot z)) \cdot ((\overline{z} + x) \cdot (\overline{z} + (y \cdot z)))) && \textbf{Por P4b.}\\
&= ((\overline{z} + x) \cdot (z + (y \cdot z)) \cdot (\overline{z} + (y \cdot z) \cdot (\overline{z} + x))) && \textbf{Por P3b.}\\
&= ((z + x) \cdot z) \cdot ((\overline{z} + (y \cdot z) \cdot (\overline{z} + x))) && \textbf{Por T3a.}\\
&= ((z \cdot (z + x)) \cdot ((\overline{z} + (y \cdot z) \cdot (\overline{z} + x))) && \textbf{Por P3b.}\\
&= ((z \cdot (z + x)) \cdot ((\overline{z} + (y \cdot z)) \cdot (\overline{z} + x))) && \textbf{Por P3b.}\\
&= z \cdot ((\overline{z} + (y \cdot z)) \cdot (\overline{z} + x)) && \textbf{Por T3b.}\\
&= z \cdot (((\overline{z} + y) \cdot (\overline{z} + x)) \cdot (\overline{z} + x)) && \textbf{Por P4b.}\\
&= z \cdot ((\overline{z} + x) \cdot ((\overline{z} + y) \cdot 1)) && \textbf{Por P5a.}\\
&= z \cdot (\overline{z} + y \cdot \overline{z} + x) && \textbf{Por P2b.}\\
&= z \cdot (\overline{z} + (y \cdot x)) && \textbf{Por P4b.}\\
&= ((z \cdot \overline{z}) + (z \cdot (y \cdot x))) && \textbf{Por P4a.}\\
&= (z \cdot (y \cdot x)) + (z \cdot \overline{z}) && \textbf{Por P3a.}\\
&= (z \cdot (y \cdot z)) + 0 && \textbf{Por P5b.}\\
&= (y \cdot x) \cdot z && \textbf{Por P2a.}\\
&= (x \cdot y) \cdot z && \textbf{Por P3b.}
\end{aligned}
$$

2. Demuestra si la siguiente igualdad es válida $x(\overline{x}+y) = xy$

Respuesta

Usaremos los postulados de Huntintong.

$$\begin{aligned}
x(\overline{x}+y) &= x(x+y)(\overline{x}+y) && \textbf{Por T3b. (Absorción.)}\\
&= x(1)(x+y)(\overline{x}+y) && \textbf{Por P2b.}\\
&= x(x+\overline{x})(x+y)(\overline{x}+y) && \textbf{Por P5a.}\\
&= (x+x)(x+\overline{x})(x+y)(\overline{x}+y) && \textbf{Por T1a.}\\
&= (xy)+(x\overline{x}) && \textbf{Por P4b.}\\
&= (xy)+0 && \textbf{Por P5b.}\\
&= xy
\end{aligned}$$

3. Demuestra si la siguiente igualdad es válida $(x+y)(\overline{x}+z)(y+z) = (x+y)(\overline{x}+z)$

Respuesta

$$\begin{aligned}
(x+y)(\overline{x}+z)(y+z) &= (x+y)(\overline{x}+z)(y+z)+0 && \textbf{Por P2a.}\\
&= (x+y)(\overline{x}+z)(y+z)+(x\cdot\overline{x}) && \textbf{Por P5b.}\\
&= (x+y)(\overline{x}+z)(y+z+x)(y+z+\overline{x}) && \textbf{Por P4b.}\\
&= ((x+y)+(1+z))((\overline{x}+z)+(1+y)) && \textbf{Por P4b.}\\
&= ((x+y)+1)((\overline{x}+z)+1) && \textbf{Por T2a.}\\
&= (x+y)(\overline{x}+z)
\end{aligned}$$

4. Demuestra si la siguiente igualdad es válida $\overline{x\cdot y} = \overline{x}\cdot\overline{y}$

Respuesta

No es válida, podemos ver esto con tablas de verdad, donde:
La tabla de verdad de $\overline{x\cdot y}$

x	y	$x\cdot y$	$\overline{x\cdot y}$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

La tabla de verdad de $\overline{x}\cdot\overline{y}$

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x}\cdot\overline{y}$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Sus tablas de verdad no coinciden. Por lo tanto la igualdad no se cumple.

5. Verifica la siguiente igualdad usando los postulados de Huntintong.

Respuesta

$$F(x, y, z) = x + x(\overline{x} + y) + \overline{x}y = x + y$$

$$\begin{aligned}
x + x(\overline{x} + y) + \overline{x}y &= x + x\overline{x} + xy + \overline{x}y && \textbf{Por P4a.}\\
&= x + 0 + xy + \overline{x}y && \textbf{Por P5b.}\\
&= x + yx + y\overline{x} && \textbf{Por P3b.}\\
&= x + y \cdot (x + \overline{x}) && \textbf{Por P4a.}\\
&= x + y \cdot (1) && \textbf{Por P5a.}\\
&= x + y
\end{aligned}$$

6. Obtén los mintérminos y reduce la siguiente función.

Respuesta

$$F(x, y, z) = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot x + \overline{z} \cdot x + z \cdot x + x \cdot \overline{y} + \overline{z}$$

Observemos que si realizamos conmutatividad tenemos que $x \cdot \overline{x} = 0$ por Complemento, entonces quedaría:
$= 0 \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{z} \cdot x + z \cdot x + x \cdot \overline{y} + \overline{z}$
Por Aniquilación:
$= 0 + \overline{z} \cdot x + z \cdot x + x \cdot \overline{y} + \overline{z}$
Por Identidad:
$= (0 + \overline{z} \cdot x) + z \cdot x + x \cdot \overline{y} + \overline{z}$
$= (\overline{z} \cdot x) + z \cdot x + x \cdot \overline{y} + \overline{z}$
Por Conmutatividad:
$= \overline{z} + \overline{z} \cdot x + z \cdot x + x \cdot \overline{y}$
Por Teorema 3 (Absorción) tomamos a $(\overline{z} + (\overline{z} \cdot x)) = \overline{z}$:
$= \overline{z} + z \cdot x + x \cdot \overline{y}$
Por Teorema de Eliminación:
$= (\overline{z} + (z \cdot x)) + x \cdot \overline{y}$
$= (\overline{z} + x) + x \cdot \overline{y}$
Por Absorción:
$= \overline{z} + (x + x \cdot \overline{y})$
$= \overline{z} + x$

7. Simplifica la siguiente función usando su tabla de verdad asociada y mapas de Karnaugh.

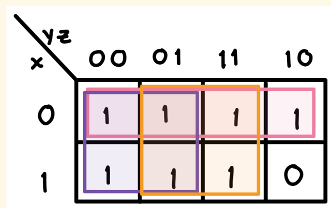
Respuesta

$$F(x, y, z) = \overline{xyz} + \overline{xy}z + \overline{x}y\overline{z} + x\overline{yz} + \overline{x}yz + x\overline{y}z + xyz$$

La tabla de verdad asociada es:

x	y	z	
1	1	1	xyz
1	1	0	
1	0	1	$x\overline{y}z$
1	0	0	$x\overline{y}\overline{z}$
0	1	1	$\overline{x}yz$
0	1	0	$\overline{x}y\overline{z}$
0	0	1	$\overline{x}\overline{y}z$
0	0	0	$\overline{x}\overline{y}\overline{z}$

Su mapa de Karnaugh:



Si reducimos términos obtenemos que:
$\overline{x} + \overline{y} + z$

8. Reduce la siguiente función y da su maxitérminos.

$$F(x, y, z) = (x + \overline{x}z) \cdot (\overline{y} + \overline{z}) \cdot z$$

Respuesta

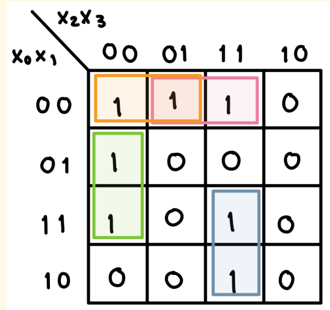
Usamos las propiedades de la álgebra de Boole para simplificar:
$F(x, y, z) = (x + \overline{x}z) \cdot (\overline{y} + \overline{z}) \cdot z$
Por Conmutatividad del producto:
$= (x + \overline{x} \cdot z) \cdot z \cdot (\overline{y} + \overline{z})$
$= (x + \overline{x} \cdot z) \cdot z \cdot (\overline{z} + \overline{y})$
Por Teorema de Eliminación:
$= (x + \overline{x} \cdot z) \cdot (z \cdot \overline{y})$
$= (x + z) \cdot z \cdot y$
Podemos ver $(x + z) \cdot z$ se puede ver como $z \cdot (x + z)$ por conmutatividad.
$= z \cdot (x + z) \cdot \overline{y}$
Por el Teorema 2.2 (Absorción.) podemos ver a $z \cdot (x + z)$ como $z \cdot (z + x)$
$= (z \cdot (z + x)) \cdot y$
Por Teorema 2.2:
$= z \cdot y$

Los maxitérminos:

9. Utilizando Mapas de Karnaugh simplifica la función.

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3) = \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 + \overline{x_0}\,\overline{x_1}x_2x_3 + x_0\overline{x_1}x_2x_3 + x_0x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_0}x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_0x_1x_2x_3$$

Respuesta



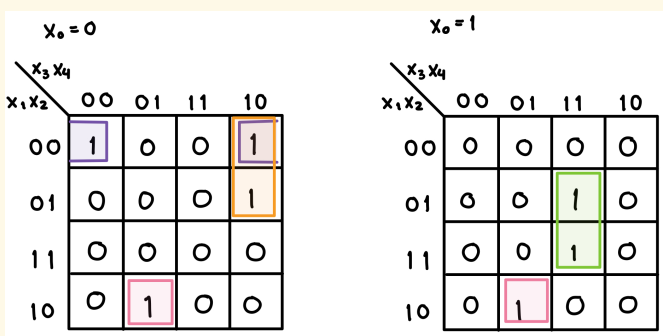
Simplificamos los términos y obtenemos:
$\overline{x_0x_1x_2} + \overline{x_0x_1}x_3 + x_1\overline{x_2x_3} + x_0x_2x_3$

10. Para realizar un Mapa de Karnaugh con más de 5 variables se mencionó que existe más de una forma de representarlo.
Investiga ambos métodos y utiliza el que más se te acomode para reducir la siguiente función.

$$F(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x_0x_1x_2x_3x_4} + \overline{x_0x_1x_2}x_3\overline{x_4} + \overline{x_0x_1}x_2x_3\overline{x_4} + x_0\overline{x_1}x_2x_3x_4 + x_0x_1\overline{x_2x_3}x_4 + \overline{x_0}x_1\overline{x_2x_3}x_4 + x_0x_1x_2x_3x_4$$

Respuesta

Podemos representarlo en dos mapas de 4 variables y tomamos x_0 tal que: en un mapa tendremos que $x_0 = 0$ y en otro $x_0 = 1$ y realizamos las agrupaciones.
Los mapas nos quedarían de la siguiente manera:



Al reducir obtenemos:
$\overline{x_0x_1x_2x_4} + \overline{x_0x_1}x_3\overline{x_4} + x_1\overline{x_2x_3}x_4 + x_0x_2x_3x_4$

11. Utilizando el algoritmo de **Quine-McCluskey** realiza la siguiente reducción.

$$F(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x_0x_1x_2x_3x_4} + \overline{x_0x_1x_2}x_3\overline{x_4} + \overline{x_0}x_1x_2x_3\overline{x_4} + \overline{x_0}x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + x_0\overline{x_1}x_2x_3x_4 + x_0x_1\overline{x_2x_3}x_4 + \overline{x_0}x_1\overline{x_2x_3}x_4 + x_0x_1x_2\overline{x_3}x_4 + x_0x_1x_2x_3x_4$$

Respuesta

Obtenemos la tabla con los mintérminos y les damos una etiqueta por las cadenas de bits.

Minitérmino	Cadena de bits	Etiqueta	Cantidad de 1's
$x_0x_1x_2x_3x_4$	11111	31	5
$x_0x_1x_2\overline{x_3}x_4$	11101	29	4
$x_0\overline{x_1}x_2x_3x_4$	10111	23	4
$x_0x_1\overline{x_2x_3}x_4$	11001	25	3
$\overline{x_0}x_1x_2x_3\overline{x_4}$	01110	14	3
$\overline{x_0}x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4}$	01010	10	2
$\overline{x_0}x_1\overline{x_2x_3}x_4$	01001	9	2
$\overline{x_0x_1x_2}x_3\overline{x_4}$	00010	2	1
$\overline{x_0x_1x_2x_3x_4}$	00000	0	0

Asociamos:
Comparamos los grupo 5 con los del 4, los grupo 4 con el grupo 3, el 3 con el 2, el 2 con el 1 y el 1 con el 0. Si solo difieren entre 1 bit, los asociamos, en otro caso, no.

- 29 con 25
- 29 con 14
- 23 con 25
- 23 con 14
- 25 con 10
- 14 con 9
- 10 con 2
- 9 con 2

En los bits en los que difieren, les vamos a poner un -, y ubicaremos en qué posición se encuentra el -.

Minitérmino	Cadena de bits	Etiqueta	Cantidad de 1's	Asociación	Posición del -
$x_0x_1x_2x_3x_4$	11111	31	5	(31, 29): 111-1	2
$x_0x_1x_2\overline{x_3}x_4$	11101	29	4	(31, 23): 1-111	8
$x_0\overline{x_1}x_2x_3x_4$	10111	23	4	(25, 9): -1001	16
$x_0x_1\overline{x_2x_3}x_4$	11001	25	3	(14,10): 01-10	4
$\overline{x_0}x_1x_2x_3\overline{x_4}$	01110	14	3	(2,0): 000-0	2
$\overline{x_0}x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4}$	01010	10	2		
$\overline{x_0}x_1\overline{x_2x_3}x_4$	01001	9	2		
$\overline{x_0x_1x_2}x_3\overline{x_4}$	00010	2	1		
$\overline{x_0x_1x_2x_3x_4}$	00000	0	0		

Haremos una segunda asociación, de tal forma que vamos a contar cuántos 1s aparecen, compararemos el grupo 4 con el 2 y el 2 con los del 0. En caso de no obtener asociaciones, nos quedamos con las anteriores.

Asociación	Posición del -	2do conteo de 1s
(31,29): 111-1	2	4
(31,23): 1-111	8	4
(25,9): -1001	16	2
(14,10): 01-10	4	2
(2,0): 000-0	2	0

En este caso, no hubo nuevas asociaciones, nos quedamos con la anterior.

Mintérmino	31	29	23	25	14	10	9	2	0
111-1	✓	✓							
1-111	✓		✓						
-1001				✓			✓		
01-10					✓	✓			
000-0								✓	✓

Las expresiones asociadas son:

$$\begin{aligned} 111-1 &= x_0x_1x_2x_4 \\ 1-111 &= x_0x_2x_3x_4 \\ -1001 &= x_1\overline{x_2x_3}x_4 \\ 01-10 &= \overline{x_0}x_1x_3\overline{x_4} \\ 000-0 &= \overline{x_0x_1x_2x_4} \end{aligned}$$

La expresión simplificada es:

$$F(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) = x_0x_1x_2x_4 + x_0x_2x_3x_4 + x_1\overline{x_2x_3}x_4 + \overline{x_0}x_1x_3\overline{x_4} + \overline{x_0x_1x_2x_4}$$

12. Utilizando el algoritmo de **Quine-McCluskey** realiza la siguiente reducción.

$$\begin{aligned} F(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) = {} & \overline{x_0x_1x_2x_3x_4} + \overline{x_0x_1x_2}x_3\overline{x_4} + \overline{x_0x_1}x_2x_3\overline{x_4} + \overline{x_0x_1}x_2x_3x_4 + \overline{x_0}x_1x_2x_3\overline{x_4} + \\ & \overline{x_0}x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + x_0\overline{x_1}x_2x_3x_4 + x_0x_1\overline{x_2x_3}x_4 + \overline{x_0}x_1\overline{x_2x_3}x_4 + x_0x_1x_2\overline{x_3}x_4 + x_0x_1x_2x_3x_4 \end{aligned}$$

Respuesta

Minitérmino	Cadena de bits	Etiqueta	Cantidad de 1's
$x_0x_1x_2x_3x_4$	11111	31	5
$x_0x_1x_2\overline{x_3}x_4$	11101	29	4
$\overline{x_0}x_1\overline{x_2x_3}x_4$	01001		
$x_0\overline{x_1}x_2x_3x_4$	10111		
$x_0x_1\overline{x_2x_3}x_4$	11001		
$\overline{x_0}x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4}$	01010		
$\overline{x_0}x_1x_2x_3\overline{x_4}$			
$\overline{x_0x_1}x_2x_3x_4$			
$\overline{x_0x_1}x_2x_3\overline{x_4}$			
$\overline{x_0x_1x_2}x_3\overline{x_4}$			
$\overline{x_0x_1x_2x_3x_4}$	00000	0	0