

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Organización y Arquitectura de Computadoras

Tarea 03: Lógica Digital

Álvarez Ríos Metztlalli | 423052523

Martínez Jiménez Maitreyi | 320099773

1. Preguntas

1. Demuestra que $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Respuesta

$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot (y \cdot z)) + 0$	Por P2a.
$= (x \cdot (y \cdot z)) + (z \cdot \bar{z})$	Por P5b.
$= (z \cdot \bar{z}) + (x \cdot (y \cdot z))$	Por P3a.
$= (z + (x \cdot (y \cdot z))) \cdot (\bar{z} \cdot (x \cdot (y \cdot z)))$	Por P4b.
$= ((\bar{z} + x) \cdot (z + (y \cdot z))) \cdot (\bar{z} \cdot (x \cdot (y \cdot z)))$	Por P4b.
$= ((\bar{z} + x) \cdot (z + (y \cdot z))) \cdot ((\bar{z} + x) \cdot (\bar{z} + (y \cdot z)))$	Por P4b.
$= ((\bar{z} + x) \cdot (z + (y \cdot z))) \cdot (\bar{z} + (y \cdot z) \cdot (\bar{z} + x))$	Por P3b.
$= ((z + x) \cdot z) \cdot ((\bar{z} + (y \cdot z)) \cdot (\bar{z} + x))$	Por T3a.
$= ((z \cdot (z + x))) \cdot ((\bar{z} + (y \cdot z)) \cdot (\bar{z} + x))$	Por P3b.
$= ((z \cdot (z + x))) \cdot ((\bar{z} + (y \cdot z)) \cdot (\bar{z} + x))$	Por P3b.
$= z \cdot ((\bar{z} + (y \cdot z)) \cdot (\bar{z} + x))$	Por T3b.
$= z \cdot (((\bar{z} + y) \cdot (\bar{z} + x)) \cdot (\bar{z} + x))$	Por P4b.
$= z \cdot ((\bar{z} + x) \cdot ((\bar{z} + y) \cdot 1))$	Por P5a.
$= z \cdot (\bar{z} + y \cdot \bar{z} + x)$	Por P2b.
$= z \cdot (\bar{z} + (y \cdot x))$	Por P4b.
$= ((z \cdot \bar{z}) + (z \cdot (y \cdot x)))$	Por P4a.
$= (z \cdot (y \cdot x)) + (z \cdot \bar{z})$	Por P3a.
$= (z \cdot (y \cdot z)) + 0$	Por P5b.
$= (y \cdot x) \cdot z$	Por P2a.
$= (x \cdot y) \cdot z$	Por P3b.

2. Demuestra si la siguiente igualdad es válida $x(\bar{x} + y) = xy$

Respuesta

Usaremos los postulados de Huntington.

$$\begin{aligned}
 x(\bar{x} + y) &= x(x + y)(\bar{x} + y) \\
 &= x(1)(x + y)(\bar{x} + y) \\
 &= x(x + \bar{x})(x + y)(\bar{x} + y) \\
 &= (x + x)(x + \bar{x})(x + y)(\bar{x} + y) \\
 &= (xy) + (x\bar{x}) \\
 &= (xy) + 0 \\
 &= xy
 \end{aligned}$$

Por T3b. (Absorción.)

Por P2b.

Por P5a.

Por T1a.

Por P4b.

Por P5b.

3. Demuestra si la siguiente igualdad es válida $(x + y)(\bar{x} + z)(y + z) = (x + y)(\bar{x} + z)$

Respuesta

$$\begin{aligned}
 (x + y)(\bar{x} + z)(y + z) &= (x + y)(\bar{x} + z)(y + z) + 0 \\
 &= (x + y)(\bar{x} + z)(y + z) + (x \cdot \bar{x}) \\
 &= (x + y)(\bar{x} + z)(y + z + x)(y + z + \bar{x}) \\
 &= ((x + y) + (1 + z))((\bar{x} + z) + (1 + y)) \\
 &= ((x + y) + 1)((\bar{x} + z) + 1) \\
 &= (x + y)(\bar{x} + z)
 \end{aligned}$$

Por P2a.

Por P5b.

Por P4b.

Por P4b.

Por T2a.

4. Demuestra si la siguiente igualdad es válida $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$

Respuesta

No es válida, podemos ver esto con tablas de verdad, donde:

La tabla de verdad de $\overline{x \cdot y}$

x	y	$x \cdot y$	$\overline{x \cdot y}$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

La tabla de verdad de $\bar{x} \cdot \bar{y}$

x	y	\bar{x}	\bar{y}	$\bar{x} \cdot \bar{y}$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Sus tablas de verdad no coinciden. Por lo tanto la igualdad no se cumple.

5. Verifica la siguiente igualdad usando los postulados de Huntintong.

Respuesta

$$F(x, y, z) = x + x(\bar{x} + y) + \bar{x}y = x + y$$

$$\begin{aligned} x + x(\bar{x} + y) + \bar{x}y &= x + x\bar{x} + xy + \bar{x}y && \text{Por P4a.} \\ &= x + 0 + xy + \bar{x}y && \text{Por P5b.} \\ &= x + yx + y\bar{x} && \text{Por P3b.} \\ &= x + y \cdot (x + \bar{x}) && \text{Por P4a.} \\ &= x + y \cdot (1) && \text{Por P5a.} \\ &= x + y \end{aligned}$$

6. Obtén los mintérminos y reduce la siguiente función.

Respuesta

$$F(x, y, z) = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot x + \bar{z} \cdot x + z \cdot x + x \cdot \bar{y} + \bar{z}$$

Observemos que si realizamos conmutatividad tenemos que $x \cdot \bar{x} = 0$ por Complemento, entonces quedaría:

$$= 0 \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{z} \cdot x + z \cdot x + x \cdot \bar{y} + \bar{z}$$

Por Aniquilación:

$$= 0 + \bar{z} \cdot x + z \cdot x + x \cdot \bar{y} + \bar{z}$$

Por Identidad:

$$= (0 + \bar{z} \cdot x) + z \cdot x + x \cdot \bar{y} + \bar{z}$$

$$= (\bar{z} \cdot x) + z \cdot x + x \cdot \bar{y} + \bar{z}$$

Por Conmutatividad:

$$= \bar{z} + \bar{z} \cdot x + z \cdot x + x \cdot \bar{y}$$

Por Teorema 3 (Absorción) tomamos a $(\bar{z} + (\bar{z} \cdot x)) = \bar{z}$:

$$= \bar{z} + z \cdot x + x \cdot \bar{y}$$

Por Teorema de Eliminación:

$$= (\bar{z} + (z \cdot x)) + x \cdot \bar{y}$$

$$= (\bar{z} + x) + x \cdot \bar{y}$$

Por Absorción:

$$= \bar{z} + (x + x \cdot \bar{y})$$

$$= \bar{z} + x$$

7. Simplifica la siguiente función usando su tabla de verdad asociada y mapas de Karnaugh.

Respuesta

$$F(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xyz$$

La tabla de verdad asociada es:

x	y	z	
1	1	1	xyz
1	1	0	
1	0	1	$x\bar{y}z$
1	0	0	$x\bar{y}\bar{z}$
0	1	1	$\bar{x}yz$
0	1	0	$\bar{x}y\bar{z}$
0	0	1	$\bar{x}\bar{y}z$
0	0	0	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

Su mapa de Karnaugh:

		yz			
		00	01	11	10
x	0	1	1	1	1
	1	1	1	1	0

Si reducimos términos obtenemos que:

$$\bar{x} + \bar{y} + z$$

8. Reduce la siguiente función y da su maxitérminos.

$$F(x, y, z) = (x + \bar{x}z) \cdot (\bar{y} + \bar{z}) \cdot z$$

Respuesta

Usamos las propiedades de la álgebra de Boole para simplificar:

$$F(x, y, z) = (x + \bar{x}z) \cdot (\bar{y} + \bar{z}) \cdot z$$

Por Conmutatividad del producto:

$$= (x + \bar{x} \cdot z) \cdot z \cdot (\bar{y} + \bar{z})$$

$$= (x + \bar{x} \cdot z) \cdot z \cdot (\bar{z} + \bar{y})$$

Por Teorema de Eliminación:

$$= (x + \bar{x} \cdot z) \cdot (z \cdot \bar{y})$$

$$= (x + z) \cdot z \cdot \bar{y}$$

Podemos ver $(x + z) \cdot z$ se puede ver como $z \cdot (x + z)$ por conmutatividad.

$$= z \cdot (x + z) \cdot \bar{y}$$

Por el Teorema 2.2 (Absorción.) podemos ver a $z \cdot (x + z)$ como $z \cdot (z + x)$

$$= (z \cdot (z + x)) \cdot \bar{y}$$

Por Teorema 2.2:

$$= z \cdot \bar{y}$$

Los maxitérminos:

Es cuando el valor de la expresión da 0. Que serían cuando $x=0$ y solo cuando $z=1$ y $y=1$.

Notemos que el valor de x no tiene tanta relevancia.

Entonces:

Los maxitérminos son: M_0, M_1, M_2, M_3, M_7 con:

$$M_0 : (0, 0, 0)$$

$$M_1 : (0, 1, 0)$$

$$M_2 : (0, 0, 1)$$

$$M_3 : (0, 1, 1)$$

$$M_7 : (1, 1, 1)$$

9. Utilizando Mapas de Karnaugh simplifica la función.

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3) = \overline{x_0}x_1x_2x_3 + \overline{x_0}x_1x_2x_3 + \overline{x_0}x_1x_2x_3 + x_0\overline{x_1}x_2x_3 + x_0x_1\overline{x_2}x_3 + \overline{x_0}x_1\overline{x_2}x_3 + x_0x_1x_2x_3$$

Respuesta

		x_2x_3			
		00	01	11	10
x_0x_1	00	1	1	1	0
	01	1	0	0	0
	11	1	0	1	0
	10	0	0	1	0

Simplificamos los términos y obtenemos:

$$\overline{x_0}x_1x_2 + \overline{x_0}x_1x_3 + x_1x_2x_3 + x_0x_2x_3$$

10. Para realizar un Mapa de Karnaugh con más de 5 variables se mencionó que existe más de una forma de representarlo.

Investiga ambos métodos y utiliza el que más se te acomode para reducir la siguiente función.

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_0}x_1x_2x_3x_4 + \overline{x_0}x_1x_2x_3\overline{x_4} + \overline{x_0}x_1x_2x_3\overline{x_4} + x_0\overline{x_1}x_2x_3x_4 + x_0x_1\overline{x_2}x_3x_4 + \overline{x_0}x_1\overline{x_2}x_3x_4 + x_0x_1x_2x_3x_4$$

Respuesta

Podemos representarlo en dos mapas de 4 variables y tomamos x_0 tal que: en un mapa tendremos que $x_0 = 0$ y en otro $x_0 = 1$ y realizamos las agrupaciones.

Los mapas nos quedarían de la siguiente manera:

$x_0 = 0$					
		x_3x_4			
		00	01	11	10
x_1x_2	00	1	0	0	1
	01	0	0	0	1
	11	0	0	0	0
	10	0	1	0	0

$x_0 = 1$					
		x_3x_4			
		00	01	11	10
x_1x_2	00	0	0	0	0
	01	0	0	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	1	0	0

Al reducir obtenemos:

$$\overline{x_0x_1x_2x_4} + \overline{x_0x_1x_3x_4} + x_1\overline{x_2x_3x_4} + x_0x_2x_3x_4$$

11. Utilizando el algoritmo de **Quine-McCluskey** realiza la siguiente reducción.

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_0x_1x_2x_3x_4} + \overline{x_0x_1x_2x_3x_4} + \overline{x_0x_1x_2x_3x_4} + \overline{x_0x_1x_2x_3x_4} + \\ x_0\overline{x_1x_2x_3x_4} + x_0x_1\overline{x_2x_3x_4} + \overline{x_0x_1x_2x_3x_4} + x_0x_1x_2\overline{x_3x_4} + x_0x_1x_2x_3x_4$$

Respuesta

Obtenemos la tabla con los minterminos y les damos una etiqueta por las cadenas de bits.

Minitérmino	Cadena de bits	Etiqueta	Cantidad de 1's
$x_0x_1x_2x_3x_4$	11111	31	5
$x_0x_1x_2\overline{x_3x_4}$	11101	29	4
$x_0\overline{x_1}x_2x_3x_4$	10111	23	4
$x_0x_1\overline{x_2x_3x_4}$	11001	25	3
$\overline{x_0}x_1x_2x_3\overline{x_4}$	01110	14	3
$\overline{x_0}x_1\overline{x_2x_3x_4}$	01010	10	2
$\overline{x_0}x_1x_2\overline{x_3x_4}$	01001	9	2
$\overline{x_0}x_1x_2x_3\overline{x_4}$	00010	2	1
$\overline{x_0}x_1x_2x_3x_4$	00000	0	0

Asociamos:

Comparamos los grupo 5 con los del 4, los grupo 4 con el grupo 3, el 3 con el 2, el 2 con el 1 y el 1 con el 0. Si solo difieren entre 1 bit, los asociamos, en otro caso, no.

- 29 con 25
- 29 con 14
- 23 con 25
- 23 con 14
- 25 con 10
- 14 con 9
- 10 con 2
- 9 con 2

En los bits en los que difieren, les vamos a poner un -, y ubicaremos en qué posición se encuentra el -.

Minitérmino	Cadena de bits	Etiqueta	Cantidad de 1's	Asociación	Posición del -
$x_0x_1x_2x_3x_4$	11111	31	5	(31, 29): 111-1	2
$x_0x_1x_2\overline{x_3x_4}$	11101	29	4	(31, 23): 1-111	8
$x_0\overline{x_1}x_2x_3x_4$	10111	23	4	(25, 9): -1001	16
$x_0x_1\overline{x_2x_3x_4}$	11001	25	3	(14,10): 01-10	4
$\overline{x_0}x_1x_2x_3\overline{x_4}$	01110	14	3	(2,0): 000-0	2
$\overline{x_0}x_1\overline{x_2x_3x_4}$	01010	10	2		
$\overline{x_0}x_1x_2\overline{x_3x_4}$	01001	9	2		
$\overline{x_0}x_1x_2x_3\overline{x_4}$	00010	2	1		
$\overline{x_0}x_1x_2x_3x_4$	00000	0	0		

Haremos una segunda asociación, de tal forma que vamos a contar cuántos 1s aparecen, compararemos el grupo 4 con el 2 y el 2 con los del 0. En caso de no obtener asociaciones, nos quedamos con las anteriores.

Asociación	Posición del -	2do conteo de 1s
(31,29): 111-1	2	4
(31,23): 1-111	8	4
(25,9): -1001	16	2
(14,10): 01-10	4	2
(2,0): 000-0	2	0

En este caso, no hubo nuevas asociaciones, nos quedamos con la anterior.

Mintérmino	31	29	23	25	14	10	9	2	0
111-1	✓	✓							
1-111	✓		✓						
-1001				✓			✓		
01-10					✓	✓			
000-0								✓	✓

Las expresiones asociadas son:

$$111 - 1 = x_0x_1x_2x_4$$

$$1 - 111 = x_0x_2x_3x_4$$

$$-1001 = x_1\overline{x_2}\overline{x_3}x_4$$

$$01 - 10 = \overline{x_0}x_1x_3\overline{x_4}$$

$$000 - 0 = \overline{x_0}x_1x_2\overline{x_4}$$

La expresión simplificada es:

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = x_0x_1x_2x_4 + x_0x_2x_3x_4 + x_1\overline{x_2}\overline{x_3}x_4 + \overline{x_0}x_1x_3\overline{x_4} + \overline{x_0}x_1x_2\overline{x_4}$$

12. Utilizando el algoritmo de **Quine-McCluskey** realiza la siguiente reducción.

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_0}x_1x_2x_3\overline{x_4} + \overline{x_0}x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + \overline{x_0}\overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} + \overline{x_0}x_1x_2x_3x_4 + \overline{x_0}x_1x_2x_3\overline{x_4} + \overline{x_0}x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + x_0\overline{x_1}x_2x_3x_4 + x_0x_1\overline{x_2}\overline{x_3}x_4 + \overline{x_0}x_1\overline{x_2}\overline{x_3}x_4 + x_0x_1x_2\overline{x_3}x_4 + x_0x_1x_2x_3x_4$$

Realizamos la tabla y organizamos según su índice:

Respuesta

Minitérmino	Cadena de bits	Etiqueta	Cantidad de 1's
$x_0x_1x_2x_3x_4$	11111	31	5
$x_0x_1x_2\bar{x}_3x_4$	11101	29	4
$x_0\bar{x}_1x_2x_3x_4$	10111	23	4
$x_0x_1\bar{x}_2x_3x_4$	11001	25	3
$\bar{x}_0x_1x_2x_3\bar{x}_4$	01110	14	3
$\bar{x}_0\bar{x}_1x_2x_3x_4$	00111	7	3
$\bar{x}_0x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	01010	10	2
$\bar{x}_0x_1x_2\bar{x}_3x_4$	01001	9	2
$\bar{x}_0\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$	00110	6	2
$\bar{x}_0x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	00010	2	1
$\bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	00000	0	0

Asociamos:

Comparamos los del grupo 5 con los del 4, los del 4 con los del 3, los del 3 con los del 2, los del 2 con los del 1 y del 1 con el del 0. Si difieren en un solo bit, entonces lo agregamos y cambiamos ese bit que cambia por un -. En caso de que difiera en más no lo agregamos a la tabla.

Minitérmino	Cadena de bits	Etiqueta	Cantidad de 1's	Asociaciones	Posición del -
$x_0x_1x_2x_3x_4$	11111	31	5	(31,29): 111-1	2
$x_0x_1x_2\bar{x}_3x_4$	11101	29	4	(31,23):1-111	8
$x_0\bar{x}_1x_2x_3x_4$	10111	23	4	(25,9): -1001	16
$x_0x_1\bar{x}_2x_3x_4$	11001	25	3	(23,7): -0111	16
$\bar{x}_0x_1x_2x_3\bar{x}_4$	01110	14	3	(14,10): 01-10	4
$\bar{x}_0\bar{x}_1x_2x_3x_4$	00111	7	3	(2,6): 00-10	4
$\bar{x}_0x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	01010	10	2	(2,0): 000-0	2
$\bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	01001	9	2	(2,10): 0-010	8
$\bar{x}_0x_1x_2x_3\bar{x}_4$	00110	6	2	(6,7): 0011-	1
$\bar{x}_0x_1\bar{x}_2x_3x_4$	00010	2	1		
$\bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	00000	0	0		

Vamos a asociar de nuevo los de la 5ta columna, compararemos cuántos 1s tienen para comparar los grupos.

Asociación	Posición del -	2do conteo de 1s
(31,29): 111-1	2	4
(31,23): 1-111	8	4
(23,7): -0111	16	3
(25,9): -1001	16	2
(14,10): 01-10	4	2
(6,7): 0011-	1	2
(2,6): 00-10	4	1
(2,10): 0-010	8	1
(2,0): 000-0	2	0

Nos generó una nueva asociación entre:

- (14,10): 01-10 con (2,6): 00-10 entonces quedarían: 0—10

Tabla de reducción final:

Mintérmino	31	29	23	25	14	7	10	9	6	2	0
111-1	✓	✓									
1-111	✓		✓								
-0111			✓			✓					
-1001				✓				✓			
0011-						✓			✓		
0--10					✓		✓		✓	✓	
0-010							✓			✓	
000-0										✓	✓

Obtenemos las expresiones asociadas:

$$111-1 = x_0x_1x_2x_4$$

$$-0111 = \overline{x_1}x_2x_3x_4$$

$$-1001 = x_1\overline{x_2}\overline{x_3}x_4$$

$$0--10 = \overline{x_0}x_3\overline{x_4}$$

$$000-0 = \overline{x_0x_1x_2x_4}$$

La expresión simplificada es:

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = x_0x_1x_2x_4 + \overline{x_1}x_2x_3x_4 + x_1\overline{x_2}\overline{x_3}x_4 + \overline{x_0}x_3\overline{x_4} + \overline{x_0x_1x_2x_4}$$

2. Referencias.

- Mapas de Karnaugh de 5 variables.