solución ②

- Principios de conteo

a) 2^{nm}

b) El número total de números de 6 dígitos es:

$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 9 \times 10^5$ desde que el primer dígito no puede ser cero.

El número de número de 6 dígitos si el cinco es $8 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 8 \times 9^5$.

Así que hay $9 \times 10^5 - 8 \times 9^5 = 427\,608$ números de seis dígitos que contienen el dígito 5.

c) Podemos pensar en un número menos 1,000000 como un número de seis dígitos que empiece con 0 o 0's con esta convención; queda decir que hay 9^6 de eso números sin el número 5.

Por lo tanto la probabilidad deseada es:

$$1 - (9^6/10^6) = 0.469.$$

Solución (3)

a) $3!$

b) ~~$\frac{11!}{3!\,2!\,3!\,3!} = 92$~~ b) $1 - \left(\frac{6!}{6^6}\right) = 0.985$

c) $\left(\frac{8!}{2!\,3!\,3!}\right) / 6^8 = 0.000333$.

d) $\frac{12!}{12^{12}} = 0.000054$.

e) si vemos los libros de matemática como una sóla entidad. La respuesta es $\frac{5! \times 18!}{22!} = 0.00068$.

Solución (4) treinta personas pueden sentarse de $30!$ formas en una mesa redonda. Pero para cada forma si ellos giran 30 veces (todas se mueven una silla hacia la izquierda a la vez) no se crean situaciones nuevas

Así de $\frac{30!}{30} = 29!$ formas 15 parejas casadas pueden sentarse en una mesa redonda.

Si pensamos en cada pareja casada como una sóla entidad y notando que! $\frac{15!}{15} = 14!$ formas tales entidades pueden sentarse en una mesa redonda entonces la 15 parejas pueden sentarse en un mesa redonda en $(2!)^{15} \cdot 14$ veces diferentes porque si las parejas de cada entidad cambian de posición entre ellas se creará una nueva situación.

Entonces la probabilidad ~~deseada~~ pedida es:

$$\frac{(14)!\ (2!)^{15}}{29!} = 3.23 \times 10^{-16}$$

La respuesta a la segunda parte es $\frac{(24)!\ (2!)^{5}}{29!}$

$$= 2.25 \times 10^{-6}$$

Solución 5 Combinaciones

Muestra que el número de maneras diferentes de n objetos indistinguibles puede ser colocado en k cajas distinguibles es

$$\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Sea n los objetos indistinguibles representados por n naranjas idénticas y las k cajas distinguibles como k personas. Queremos contar el número de maneras diferentes que n naranjas idénticas pueden ser dividida entre k personas.

Para hacer esto, agregamos $k-1$ ~~naranjas~~ manzanas a las naranjas.

Entonces tomamos las $n+k-1$ manzanas y naranjas y las alineamos en un orden aleatorio:

Dé todas las naranjas que preceden a la primera manzana a la primera persona, todas las naranjas entre la primera y segunda manzana, todas las naranjas entre la segunda y tercera manzana y así sucesivamente. Se debe tener en cuenta que si, por ejemplo, aparece una manzana al principio en la línea aleatoria, entonces la primera no recibe naranjas, de manera similar si dos manzanas aparecen una al lado de otra, en las posiciones i y $(i+1)$ entonces la persona en la posición $(i+1)$ no recibe naranjas

Este proceso establece una correspondencia uno-uno entre ~~[illegible]~~ el número de maneras en que n naranjas idénticas puedan ser divididas entre k personas. y el número de permutaciones distinguibles de $n+k-1$ naranjas y manzanas de las cuales n ~~son~~ naranjas son idénticas.

Teorema: el número de permutaciones distinguibles de n objetos de k diferentes tipos, donde n_1 son iguales, n_2 son iguales .. n_k son iguales y

$n_k = n_2 + n_1 + \dots n_k$ es

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \dots n_k!}$$

Así. $\dfrac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!} = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$.

En el problema:

a) Si pensamos $x_1, x_2 \dots x_k$ como k cajas, entonces el problema se reduce a dividir ~~de~~ n objetos idénticos en k cajas. Se cumple por el resultado anterior

b) Para $1 \leq i \leq k$, sea $y_i = x_i - 1$. Entonces para cada solución entera positiva $(x_1, x_2 \dots x_k)$ de $x_1 + x_2 + \dots x_k = n$, hay exactamente una solución entera no negativa $(y_1, y_2 \dots y_k)$ de $y_1 + y_2 + \dots y_k = n-k$ y viceversa.

$\therefore$ El número de soluciones enteras positivas de $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ es igual al número de soluciones enteras no negativas de $y_1 + y_2 + \dots + y_k = n-k$, lo que por la parte a) es:

$$\binom{(n-k)+k-1}{n-k} = \binom{n-1}{n-k} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Solución (6) Partamos del teorema de expansión:

· Para un entero $n \geq 0$,

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i.$$

esto permite resultado como:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n}.$$

$$i\binom{n}{i} = \frac{i!\, n!}{i!\,(n-i)!} = \frac{n\,.(n-1)!}{(i-1)!\,(n-i)!} = n\binom{n-1}{i-1}.$$

Así
$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n}$$
$$= n\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots \binom{n-1}{n-1}\right]$$
$$= n\,.\,2^{n-1}.$$

y esto por el resultado que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots \binom{n}{n} = 2^n$$

a) $\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$.

usemos un argumento combinatorio.

sean $A = \{a_1, a_2 \dots a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2 \dots b_n\}$ conjuntos disjuntos

el número de subconjuntos de $A \cup B$ con n elementos es $\binom{2n}{n}$.

Por otro lado, algún subconjunto de $A \cup B$ con n elementos es la unión de un subconjunto de A con i elementos y un subconjunto de B con $n-i$ elementos, para algún $0 \leq i \leq n$.

~~Desde que~~ ~~..~~ ~~..~~ Para cada i hay $\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$ de tales subconjuntos, tenemos que el número total de subconjuntos de $A \cup B$ con n elementos es

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} \quad \text{y como} \quad \binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$$

se cumple el resultado.

∘ El coeficiente de x^n en $(1+x)^{2n}$ es $\binom{2n}{n}$. Su coeficiente en $(1+x)^n(1+x)^n$ es:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \cdots \binom{n}{n}\binom{n}{0}$$

$$= \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$$

dar de que $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ $\quad 0 \le i \le n.$

b) Ejercicio (El lado derecho de la identidad es la expansión binomial de $(1-1)^n = 0$)

c) Usamos el siguiente resultado

$$\binom{n}{r} = \binom{n+1}{r} - \binom{n}{r-1}.$$

<u>usando ese resultado:</u>

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+r}{r}$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n+2}{1} - \binom{n+1}{0} + \binom{n+3}{2} - \binom{n+2}{1} + \binom{n+4}{3} - \binom{n+3}{2} + \dots + \binom{n+r+1}{r} - \binom{n+r}{r-1}$$

$$= \binom{n}{0} - \binom{n+1}{0} + \binom{n+r+1}{r}$$

(Ejercicio) $$= \binom{n+r+1}{r}.$$

d) La identidad expresa que para elegir r pelotas de n pelotas rojas y m pelotas azules, debemos elegir entre r pelotas rojas, 0 pelotas azúles,

$r-1$ " " 1 pelota azúl

⋮

0 rojas r pelotas azúles.

7) A partir de que: $\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1}$

Así la suma dada =

$$\frac{1}{n+1}\left[\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \dots + \binom{n+1}{n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right).$$

solución (9)

Hay $9\times10^3 = 9000$ dígitos de 4 número. De cada 4 Combinaciones del conjunto $\{0,1,2..9\}$ se pueden construir exactamente un número de 4 dígitos ~~tal que~~ en el que el lugar de las unidades es menor, el lugar de las decenas es menor que las centenas y el lugar de las centenas sea menor que el lugar de los miles.

∴ El número de tales dígitos (4 dígitos) es:

$\binom{10}{4} = 210$.

Luego la probabilidad deseada es 0.023333.

solución (10) $\sum_{i=1}^{n} P_{ij}$.

solución (11) a) Sea $B_1 = A_1$ y para $n \geq 2$, $B_n = A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ Entonces $\{B_1, B_2 \dots\}$ es una secuencia de eventos ~~mut~~ mutualmente exclusivos y

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Así

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

desde que $B_n \subseteq A_n$, $n \geq 1$.

b) Por la desigualdad de Boole:

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c)$$

Solución (13) El número total que uno puede escribir n direcciones en n sobres es $n!$. Por lo tanto el espacio muestral contiene $n!$ ptos. Ahora calculamos el número de resultados en el cual al menos un sobre es enviado correctamente.

Para hacer esto, sea E_i el evento en que la i-ésima carta es direccionada correctamente. entonces $E_1 \cup E_2 \ldots E_n$ es el evento en que al menos una letra es direccionada correctamente.

Para calcular $P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots E_n)$ usamos el principio de inclusión - exclusión

En ese aspecto calculamos las probabilidades de todas las posibles intersecciones de los eventos desde $E_1, \ldots E_n$. agregamos las probabilidades que son se obtienen al intersecar un número impar de eventos y restando todas las probabilidades que son obtenidas al intersecar un número par de eventos.

Por tanto necesitamos conocer el número de elementos de E_i, $E_i \cap E_j$, $E_i \cap E_j \cap E_k$ y así sucesivamente

Ahora E_i contiene $(n-1)!$ puntos, ya que cuando la i-esima carta es direccionada correctamente, hay $(n-1)!$ maneras de direccionar las restantes $n-1$ ~~cartas~~ sobres. Así $P(E_i) = (n-1)!/n!$

De manera similar $E_i \cap E_j$ contiene $(n-2)!$ puntos ya que si el i-ésimo y j-esimo sobre son direccionados correctamente, los restantes $n-2$ sobres pueden ser direccionados en $(n-2)!$ maneras.

Así $P(E_i \cap E_j) = (n-2)!/n!$

De manera idéntica se cumple:

$$P(E_i \cap E_j \cap E_k) = (n-3)!/n! \quad \text{y así} \ldots$$

Ahora calculamos $P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots E_n)$, hay n términos de la forma $P(E_i)$, $\binom{n}{2}$ términos de la forma $P(E_i \cap E_j)$, $\binom{n}{3}$ términos de la forma:

$P(E_i \cap E_j \cap E_k)$ y así...

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = n \frac{(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2} \frac{(n-2)!}{n!} + \ldots +$$

$$(-1)^{n-2}\binom{n}{n-1}\frac{[n-(n-1)]!}{n!} + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}\frac{1}{n!}$$

Esta expresión simplifica a

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

Desde que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n/n!)$ si $n \to \infty$, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} + \ldots$$

$$= 1 - \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} + \ldots\right)$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.632.$$

Por lo tanto, incluso si el número de sobres es muy grande, hay una buena posibilidad de que al menos ~~uno~~ un sobre sea direccionado correctamente.

Problema (18)

Hay 365 posibilidades para los cumpleaños de cada uno de los n estudiantes.

Por tanto el espacio muestral tiene 365^n ptos.

En $365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times [365-(n-1)]$ manera de que dos cumpleaños no coincidan.

Así la probabilidad de que 2 estudiantes no tengan el mismo cumpleaños es

$$P(n) = \frac{365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times [365-(n-1)]}{365^n}$$

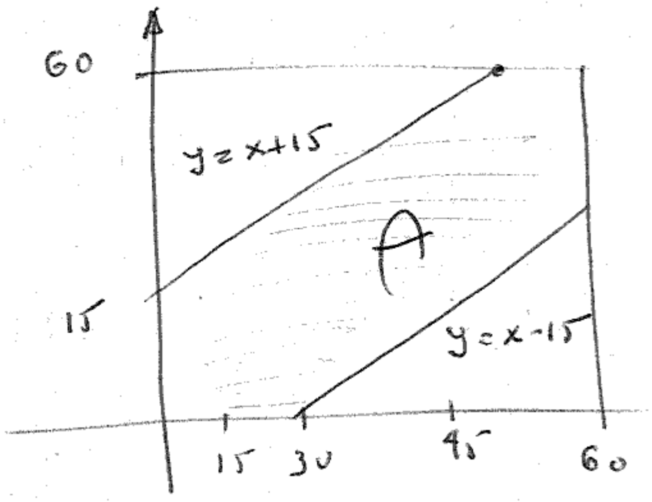
Y por tanto la probabilidad pedida es:

$1 - P(n)$. Para $n = 60$, se tiene 0.995.

Problema (20) cada persona elige el momento de llegada independiente una de otra.

Calculamos la probabilidad de que ambas personas se encuentren. Para el cálculo de la probabilidad buscada tomamos por base la definición geométrica de probabilidad.

Designemos los tiempos de llegada de las dos personas con x e y, respectivamente (por ejemplo, ambos medidos en minutos y fracciones de minutos después de las 12pm) y representamos como puntos en el plano.



El suceso A, consiste en que ambas personas se encuentran, es descrito por medio del conjunto:

$\{(x,y) : 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60, |x-y| \leq 15\}$.

De la figura se tiene $\text{Area}(A) = 60 \cdot 60 - 2 \cdot \frac{45 \times 45}{2}$

y $\text{Area}(E) = 60 \cdot 60$

$$P(A) = \frac{\text{Area}(A)}{\text{Area}(E)} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$

La probabilidad de encuentro con 15 min de espera es, por tanto algo menor que 0.5.