1 Independencia de variables aleatorias

Así como tuvimos la noción de independencia de eventos, podemos definir la independencia de las variables aleatorias. Intuitivamente, si dos variables aleatorias X e Y son independientes, entonces conocer el valor de X no da ninguna información sobre el valor de Y y viceversa. La siguiente definición, formaliza esta idea.

Definición 1.1 La variables aleatorias X e Y se dice que son independientes si:

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y),$$

para todo $y \in \mathbb{R}$. En el caso discreto, este caso es equivalente a la condición:

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y),$$

para todo x, y con x en el soporte de X y y en el soporte de Y.

La definición para más variables aleatorias es análogo:

Definición 1.2 La variables aleatorias $X_1, \ldots X_n$ son independientes si:

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \ldots \mathbb{P}(X_n \leq x_n)$$

para todo $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Para infinitas variables aleatorias, decimos que son independientes si cada subconjunto finito de las variables aleatorias es independiente.

Comparando esto con el criterio de independencia de n eventos, puede parecer extraõ que la independencia de $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias requiera sólo una igualdad, mientras que para la independencia de eventos necesitamos verificar la independencia de pares para todos los $\binom{n}{2}$ pares, independencia de a tres paras las $\binom{n}{3}$ triples y así sucesivamente.

Sin embargo, al examinar más detenidamente la definición, vemos que la independencia de variables aleatorias requiere que la igualdad se cumpla para todos los posibles $x_1, \ldots, x_n$ infinitamente muchas condiciones.Si podemos encontrar una única lista de valores $x_1, \ldots, x_n$ para el cuál la igualdad falla, entonces $X_1, \ldots, X_n$ no son independientes.

Ejemplo 1.1 En el lanzamiento de dos dados, si X es el número del primer dado y Y es el número del segundo dado, entonces $X + Y$ no es independiente de $X - Y$. Para ver esto, debes notar que:

$$0 = \mathbb{P}(X + Y = 12, X - Y = -1) \neq \mathbb{P}(X + Y = 12)\mathbb{P}(X - Y = 1) = \frac{1}{36} \cdot \frac{5}{36}.$$

Desde que hemos encontrado un par de valores (s, d), para el cual:

$$\mathbb{P}(X + Y = s, X - Y = -d) \neq \mathbb{P}(X + Y = s)\mathbb{P}(X - Y = d)$$

$X + Y$ y $X - Y$ son dependientes. Esto también tiene sentido intuitivamente: sabiendo que la suma de los dados es 12 nos dice que su diferencia debe ser 0, por lo que los variables aleatorias proporcionan información de cada una de ellas.

Definición 1.3 Las variables que son independientes y tienen las misma distribución, se les llama independientes y idénticamente distribuidas o `i.i.d` o `I.I.D`.

"Independiente" e "idénticamente distribuidos" son dos conceptos a menudo confundidos pero completamente diferentes. Las variables aleatorias son independientes si no proporcionan informaci?n entre sí; se distribuyen de forma idéntica si tienen el mismo PMF (o equivalentemente, el mismo CDF). Si dos variables aleatorias son independientes no tiene nada que ver con que si tienen o no la misma distribución. Podemos tener variables aleatorias:

- Independientes e idénticamente distribuidas: Sea X el resultado del lanzamiento de un dado, y sea Y el resultado del lanzamiento independiente de un segundo de dado . Entonces X e Y son `i.i.d`.
- Independientes y no idénticamente distribuidas: Sea X el resultado del lanzamiento de un dado y sea Y el precio de cierre de la bolsa de valores de Lima (un índice bursátil) en un mes a partir de ahora. Entonces X e Y no proporcionan ninguna información sobre cada una y X e Y no tienen la misma distribución.
- Dependientes e idénticamente distribuidas: Sea X el número de caras en n lanzamientos independientes de una moneda y sea Y el número de sellos en esos mismos n lanzamientos. Entonces X e Y son ambas distribuidas por $\texttt{Binomial}(n, 1/2)$, pero son altamente dependientes: si sabemos X, entonces conocemos Y perfectamente.
- Dependientes y no idénticamente distribuidas: Sea X el indicador de si el partido mayoritario retiene el control de la cámara de Representantes en los Estados Unidos despu?s de las próximas elecciones y sea Y la calificación de favorabilidad promedio del partido mayoritario en las encuestas tomadas a un mes de la elección. Entonces X e Y son dependientes y X e Y no tienen la misma distribución.

2 Variable aleatoria condicionada

Un evento A puede ser condicionado por un evento B diferente y la probabilidad asignada a A puede cambiar, permanecer igual o incluso llegar a cero como resultado de saber que el evento B ocurre. Escribimos anteriormento $\mathbb{P}(A|B)$ como la probabilidad del evento A dado el evento B. Debido a que una variable aleatoria X define eventos en un espacio muestral, se sigue que las probabilidades asignadas a variables aleatorias también pueden cambiar al saber que un cierto evento B ha ocurrido.

El evento $[X = x]$ contiene todos los resultados que son asignados por la variable aleatoria X al número real x y su probabilidad, $\mathbb{P}(X = x)$, es igual a la suma de las probabilidades de estos resultados. Sabiendo que un evento B ha ocurrido se puede alterar $\mathbb{P}(X = x)$, para todos los valores posibles de x. La probabilidad condicional $\mathbb{P}(X = x|B)$, se define cuando $\mathbb{P}(B) > 0$.

Cuando la variable aleatoria X es discreta, $\mathbb{P}(X = x|B)$ se denomina función de masa de probabilidad condicional de X y se denota como $p_{X|B}(x)$. De nuestra definición previa de probabilidad condicional para dos eventos, podemos escribir:

$$p_{X|B}(x) = \frac{\mathbb{P}([X = x] \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

En muchos ejemplos, el evento $[X = x]$ está contenido en el evento B o su intersección de $[X = x]$ y B es el evento nulo. En el primer caso tenemos:

$$p_{X|B}(x) = \frac{p_X(x)}{\mathbb{P}(B)} \text{ si } [X = x] \subset B$$

Mientras que el segundo caso tenemos : $[X = x] \cap B = \emptyset$ y así $p_{X|B}(x) = 0$.

Estos conceptos se trasladan de manera natural a variables aleatorias que son continuas. Para una variable aleatoria continua X y un evento B, podemos escribir:

$$f_{X|B}(x)dx = \mathbb{P}(x < X \leq x + dx|B) = \frac{\mathbb{P}([x < X \leq x + dx] \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Así

$$f_{X|B}(x) = \begin{cases} f_X(x)/\mathbb{P}(B) & \text{si } [X = x] \subset B \\ 0 & \text{si } [X = x] \cap B = \emptyset \end{cases}$$

Ejemplo 2.1 Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de puntos obtenidos cuando se lanzan dos dados. La función de masa de probabilidad para X es:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_X(x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Sea B el evento de que el lanzamiento da un número par de puntos en uno de los dados y un número impar en el otro dado. Se sigue que el evento B contiene 18 resultados. Cada resultado es un par con la propiedad de que el primero puede ser cualquiera de los seis números, pero el segundo debe ser uno de los tres números pares (si el primero es impar) o uno de tres números impares (si el primero es par). Como todos los resultados son igualmente probables, tenemos que $\mathbb{P}(B) = 1/2$.

Dado este evento calculamos la función de masa de probabilidad condicional $p_{X|B}$. Desde que la intersección de B y $[X = x]$, cuando x es un número par es vacío, se sigue que la probabilidad de que la suma siendo un número par es cero.

Para valores impares de x, el evento $[X = x]$ está enteramente contenido dentro del evento B. Por tanto si resumimos, todos estos resultados, tenemos que la función de masa de probabilidad condicional es obtenida como:

$$p_{X|B}(x) = \begin{cases} p_X(x)/\mathbb{P}(B), & x = 3, 5, 7, 9, 11, \\ 0 & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

y es presentada en forma tabular de la siguiente manera:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_{X\|B}(x_i)$	0	2/18	0	4/18	0	6/18	0	4/18	0	2/18	0

Si $B_i, i = 1, 2, \ldots, n$ es un conjunto mutualmente exclusivos y colectivamente exhaustivos (espacio de eventos), entonces se cumple:

$$p_X(x) = \sum_{i=1}^{n} p_{X|B_i}(x)\mathbb{P}(B_i)$$

El resultado se sigue, de aplicar la ley de Probabilidad de Total al evento $[X = x]$.

Ejemplo 2.2 Sea X una variable aleatoria con función densidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} (1/2)e^{-x/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Sea B el evento que $X < 1$ y deseamos encontrar $f_{X|X<1}(x)$. Para ello, calculemos $\mathbb{P}(X < 1)$ como:

$$\mathbb{P}(X < 1) = \int_0^1 (1/2)e^{-x/2}dx = -e^{-x/2}\Big|_0^1 = 1 - e^{-1/2}.$$

La función densidad de probabilidad condicional de X es entonces dado por:

$$\begin{aligned} f_{X|X<1}(x) &= \begin{cases} f_X(x)/\mathbb{P}(X<1) & \text{para } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (1/2)e^{-x/2}/(1-e^{-1/2}) & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \end{aligned}$$

La función de distribución acumulativa condicional, $F_{X|B}(x|B)$, de una variable aleatoria X, dado que B ha ocurrido, es definida como:

$$F_{X|B}(x|B) = \frac{\mathbb{P}(X \leq x, B)}{\mathbb{P}(B)}$$

donde $(X \leq x, B)$ es la intersección de los eventos $[X \leq x]$ y B. Además se tiene que:

$$F_{X|B}(-\infty|B) = 0 \ \text{ y } \ F_{X|B}(\infty|B) = 1$$

También:

$$\mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2|B) = F_{X|B}(x_2|B) - F_{X|B}(x_1|B) = \frac{\mathbb{P}([x_1 < X \leq x_2], B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

La función densidad condicional, puede ser obtenida como la derivada:

$$f_{X|B}(x|B) = \frac{d}{dx}F_{X|B}(x|B)$$

que debe ser no negativa y debe tener un área igual a 1.