Series de Neumann

23 de marzo de 2019

1. Introducción

Sea V un espacio vectorial, al cual se le asigna una norma $\|.\|$, decimos que $(V, \|.\|)$ es un espacio lineal normado. La noción de convergencia de una sucesión de vectores $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, \ldots$ se define de la siguiente manera:

$$[v^{(k)}] \to v \quad sii \quad \lim_{k\to\infty} \|v^{(k)} - v\| = 0$$

2. Series de Neumann

Teorema 2.1 *Si A es una matriz $n \times n$ tal que $\|A\| < 1$, entonces A^{-1} es inversible y*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \tag{1}$$

Prueba

Sea

$$\begin{aligned} S_m = (I - A)\sum_{k=0}^{m} A^k &= \sum_{k=0}^{m} A^k - A^{k+1} \\ &= I - A^{m+1} \end{aligned}$$

Vamos a probar que (S_m) converge a I

$$\lim_{m\to\infty} \|S_m - I\| = \lim_{m\to\infty} \|-A^{m+1}\| = \lim_{m\to\infty} \|A^{m+1}\|$$

Pero $\|A^{m+1}\| \leq \|A\|^{m+1}$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} \|S_m - I\| \leq \lim_{m\to\infty} \|A\|^{m+1} = 0 \quad , pues\ \|A\| < 1$$

$$\therefore (S_m) \to I \tag{2}$$

Ahora probemos que $I - A$ es inversible. Supongamos que $I - A$ no es innversible
$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n - \{0\} / \quad (I - A)x = 0$
Ahora tomando $z = \frac{x}{\|x\|}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (I - A)z\|x\| = 0 \\ &\Rightarrow (I - A)z = 0, \quad \|z\| = 1 \\ &\Rightarrow 1 = \|z\| = \|Az\| \leq |A\|\|z\| = \|A\| \\ &\Rightarrow 1 \leq \|A\| \quad (\textbf{contradicción}) \end{aligned}$$

$$\therefore I - A \quad es\ inversible$$

De (2) tenemos $(S_m) = \left((I - A)\sum_{k=0}^{n} A^k\right) \to I$

Por lo tanto $\left(\sum_{k=0}^{m} A^k \to (I - A)^{-1}\right)$, es decir

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

Algoritmo 2.1 *VER COMO HACER LOS SANGRADOS*

Ejemplo 2.1 (Ejercicio de Aplicación) *Use la se serie de Neumann (1) para calcular la inversa de la matriz.*

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}9 & -0{,}2 & -0{,}3 \\ 0{,}1 & 1{,}0 & -0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 1{,}1 \end{bmatrix}$$

Use la norma del máximo

Ver solución en cuaderno Jupyter

Teorema 2.2 *Si A y B son matrices $n \times n$ tal que $\|I - AB\| < 1$, A y B son inversibles. Entonces:*

$$A^{-1} = B\left(\sum_{k=0}^{\infty}(I - AB)^k\right)$$

$$B^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(I - AB)^k\right)A$$

Prueba
Como $\|I - AB\| < 1$, entonces $AB = I - (I - AB)$ es inversible y

$$(AB)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(I - AB)^{-1}$$

Luego

$$A^{-1} = BB^{-1}A^{-1} = B(AB)^{-1} = B\left(\sum_{k=0}^{\infty}(I - AB)^k\right)$$

$$B^{-1} = BA^{-1}A = (AB)^{-1}A = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(I - AB)^k\right)A$$