Métodos Iterativos para la Solución de Sistema de Ecuaciones

16 de abril de 2019

1. Conceptos Previos

Definición 1.1 (Radio Espectral) *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, el radio espectral de A es denotado por $\rho(A)$ y se define como:*

$$\rho(A) = \text{máx}\,\{|\lambda|/p_A(\lambda) = 0\}$$

Definición 1.2 (Diagonalmente dominante) *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A es diagonamlmente dominante si:*

$$|a_{ij}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1 - n$$

Teorema 1.1 *La función llamada radio espectral satisface la ecución:*

$$\rho(A) = \inf_{\|\cdot\|} \|A\|$$

En la cual el infimo se toma sobre todas las normas matriciales subordinadas.

Teorema 1.2 *Sea las iteraciones $x^{(k)} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ dadas por*

$$x^{(k)} = Gx^{(k-1)} + c$$

donde $c \in \mathbb{R}^{n\times 1}, G \in \mathbb{R}^{n\times n}$.Dichas iteraciones convergen a $(I - G)^{-1}c$, paar cualquier valor para $x^{(0)}$ si y solo si $\rho(G) < 1$.

Prueba

$(\Leftrightarrow)$

$$\begin{aligned}
x^{(k)} &= Gx^{(k-1)} + c \\
&= G\left(Gx^{(k-2)} + c\right) + c \\
&\vdots \\
&= G^k x^{(0)} + \sum_{i=0}^{k-1} G^i c
\end{aligned}$$

Como $\rho(G) = \inf_{\|.\|} \|G\| < 1 \Rightarrow \exists \|.\|_\star / \|G\|_\star < 1$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \|G\|_\star^k = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \|G^k x^{(0)}\| = 0$$

$\therefore G^k x^{(0)}$ es una sucesión convergente a 0 De igual modo como $\|G\|_\star < 1$, por la serie de Neuman

$$(I - G)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} G^k$$

Por lo tanto la serie $S_m = \sum_{i=0}^{m} G^i c$ converge a $(I-G)^{-1}c$ Por lo que $x^{(k)}$ converge, finalmente

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = (I-G)^{-1}c$$

$(\Rightarrow)$

Corolario 1.2.1 *La iteraciones*

$$Qx^{(k)} = (Q-A)x^{(k)} + b \tag{1}$$

converge a la solución del sistema $Ax = b$, para cualquier $x^{(0)}$ con la condición $\rho(I - Q^{-1}A) < 1$.

Prueba

Podemos expresar (1) como

$$x^{(k)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k-1)} + Q^{-1}b$$

Como $\rho(G) < 1$, entonces $x^{(k)}$ converge a $(I-G)^{-1}c$ con $G = I - Q^{-1}A$ y $c = Q^{-1}b$.Es decir:

$$\begin{aligned}
x^{(k)} \to (I-G)^{-1}c &= \big(I - (I - Q^{-1}A)\big)^{-1}\big(Q^{-1}b\big) \\
&= (Q^{-1}A)^{-1}(Q^{-1}b) \\
&= (A^{-1}Q)(Q^{-1}b) \\
&= A^{-1}b = x
\end{aligned}$$

Por los tanto x^k converge a la solución del sistema $Ax = b$.

2. Métodos Iterativos

2.1. Método de Richardson

2.2. Método de Jacobi

2.3. Método de Gauss-Seidel

2.4. Método de SOR