Tema 5. DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Introducción. Potencia de una matriz

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Supongamos que se desea calcular A^n: → →

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 21 \\ 42 & 43 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 22 & 21 \\ 42 & 43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 & 85 \\ 170 & 171 \end{pmatrix}$$

Determinar una regla para A^n no resulta inmediato.

Comprobemos, antes de seguir adelante, que $A = MDM^{-1}$, siendo $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y

$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ → Esta última matriz es diagonal.

En efecto, calculando $M^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y multiplicando, se ve que:

$$MDM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left[-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right] = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A$$

Con esto:

$$A^2 = \left(MDM^{-1}\right)\cdot\left(MDM^{-1}\right) = MD^2M^{-1} \rightarrow \text{obsérvese que } M^{-1}\cdot M = I$$

$$A^3 = \left(MDM^{-1}\right)\cdot\left(MD^2M^{-1}\right) = MD^3M^{-1}$$

…

$$A^n = MD^nM^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix}\left[-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right] = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4^n-2 & -4^n+1 \\ -2\cdot 4^n+2 & -2\cdot 4^n-1 \end{pmatrix}$$

Se consigue así calcular A^n.

El problema está en encontrar *M* y *D*.

El proceso que nos facilitará determinar las matrices *M* y *D*, que permitirán hallar la potencia n–ésima de una matriz, se llama diagonalización.

Autovalores y autovectores

- Definición de autovalor: $\lambda \in$ **R** (o a **C**, aunque no lo consideraremos) es un autovalor de una matriz *A*, cuadrada, $n \times n$, si existe un vector $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ (a $\mathbf{E}^n$), $\vec{x} \neq \vec{0}$, tal que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.
- A $\vec{x}$ se le llama autovector asociado a λ.

También se utilizan los nombres valor propio y vector propio, respectivamente, para autovalor y autovector.

Observaciones:

1. Si $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Rightarrow A^2\vec{x} = \lambda A\vec{x} = \lambda^2\vec{x} \Rightarrow \ldots\ A^n\vec{x} = \lambda^n\vec{x}$.

Por tanto, para determinar cómo actúa A^n resulta útil conocer λ y $\vec{x}$, pues el estudio de λ^n es mucho más sencillo.

2. Si $\vec{x}$ es un autovector asociado a λ, entonces $k\vec{x}$ es otro autovector asociado a λ.

En efecto: si $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Rightarrow A(k\vec{x}) = k(A\vec{x}) = k(\lambda\vec{x}) = \lambda(k\vec{x})$.

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\lambda = 4$ es un autovalor si $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

En efecto: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Otros autovectores asociados a $\lambda = 4$ son $\vec{x} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ o $\vec{x} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(Habitualmente se toma el más sencillo, el correspondiente a $k = 1$.)

Cálculo de autovalores. Ecuación característica.

De $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Rightarrow A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \rightarrow$ sistema homogéneo, que tiene solución distinta de la trivial (se buscan $\vec{x} \neq \vec{0}$) cuando $|A - \lambda I| = 0$.

- Es sistema $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ recibe el nombre de autosistema.
- A $|A - \lambda I| = 0$ se le llama ecuación característica.
- $P(\lambda) = |A - \lambda I|$ es un polinomio de grado $n \rightarrow$ se llama polinomio característico.
- Las soluciones de $|A - \lambda I| = 0$, de $P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$, son los valores propios (autovalores) de la matriz *A*.
- Si la matriz *A* es de orden *n*, $P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda. & \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \quad \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$
- Los autovalores no tienen porqué ser distintos. El número de veces que se repite un autovalor es su multiplicidad algebraica.
- Si λ es un autovalor de *A*, una solución no trivial, $\vec{x}$, de $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ es un autovector asociado a ese λ.

Ejemplo: Si $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow |A-\lambda I| = \begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2-5\lambda+4=(\lambda-4)(\lambda-1)$

Los autovalores son: $\lambda = 4$ y $\lambda = 1$.

- Si $\lambda = 4$: $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2-4 & 1\\ 2 & 3-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

  $\Rightarrow \begin{cases}-2x_1+x_2=0\\ 2x_1-x_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=t\\ x_2=2t\end{cases}$ $\rightarrow$ estas serían las componentes de los autovectores asociados: $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ 2t\end{pmatrix}$. En particular, si $t = 1$, $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$.

- Si $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x_1+x_2=0\\ 2x_1+2x_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=t\\ x_2=-t\end{cases}$ $\rightarrow$ estas serían las componentes de los autovectores asociados: $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ -t\end{pmatrix}$.

En particular, si $t = 1$, $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$.

Otro ejemplo: Página 382 de Sydsaeter: 14.12 **b)** $\rightarrow$ $B=\begin{pmatrix}5 & -6 & -6\\ -1 & 4 & 2\\ 3 & -6 & -4\end{pmatrix}$

$\rightarrow |B-\lambda I| = \begin{vmatrix}5-\lambda & -6 & -6\\ -1 & 4-\lambda & 2\\ 3 & -6 & -4-\lambda\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(\lambda-2)^2(\lambda-1)=0 \Rightarrow$ $\lambda = 2$, doble; $\lambda = 1$.

- Si $\lambda = 2$, $(B-\lambda I)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}5-\lambda & -6 & -6\\ -1 & 4-\lambda & 2\\ 3 & -6 & -4-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3 & -6 & -6\\ -1 & 2 & 2\\ 3 & -6 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases}3x-6y-6z=0\\ -x+2y+2z=0\\ 3x-6y-6z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2t+2h\\ y=t\\ z=h\end{cases} \rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\cdot t+\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\cdot h$. Se toma: $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$; $\vec{x}_2=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

En este caso la solución del autosistema depende de dos vectores (es la ecuación de un plano, cuya dimensión es 2): es un subespacio vectorial con multiplicidad geométrica igual a 2.

- Si $\lambda = 1$, $(B-\lambda I)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}4 & -6 & -6\\ -1 & 3 & 2\\ 3 & -6 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}4x-6y-6z=0\\ -x+3y+2z=0\\ 3x-6y-5z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=3t\\ y=-t\\ z=3t\end{cases} \rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 3\end{pmatrix}\cdot t$. Se toma: $\vec{x}_3=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$.

Autovalores de matrices diagonales.

Las matrices diagonales $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & d_n \end{pmatrix}$, cumplen:

1. $|D| = d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n$
2. $D^n = \begin{pmatrix} d_1^{\,n} & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_2^{\,n} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & d_n^{\,n} \end{pmatrix}$
3. La ecuación característica es: $|D - \lambda I| = \begin{vmatrix} d_1 - \lambda & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_2 - \lambda & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & d_n - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = d_1 \\ \lambda_2 = d_2 \\ ... \\ \lambda_n = d_n \end{cases}$

En definitiva, los autovalores de una matriz diagonal son los elementos de esa diagonal.

Ejemplo: Si $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ 1. $|D| = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.   2. $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

3. Los valores propios son: λ = 1, 2 y 3.

Algunas propiedades de los autovalores

1. La suma de los autovalores es igual a la traza de la matriz A.

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$$

2. El producto de los autovalores es igual al determinante de la matriz A.

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n = |A|$$

3. Los autovalores de A son los mismos que los de A^t.

4. Dos matrices A y B son semejantes si existe una matriz M invertible tal que $A = MBM^{-1}$.
Con esto, si dos matrices A y B son semejantes, ambas tienen la misma ecuación característica. Por tanto, los autovalores de A y B son los mismos.
En efecto, si $A = MBM^{-1} \Rightarrow |A - \lambda I| = |MBM^{-1} - \lambda I| = |MBM^{-1} - M\lambda IM^{-1}| =$

$$= |M(B - \lambda I)M^{-1}| = |M| \cdot |B - \lambda I| \cdot |M^{-1}| = |B - \lambda I|$$

5. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ autovalores, distintos entre sí, de A. Si $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_p$ son autovectores no nulos, asociados respectivamente a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, entonces, el conjunto $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_p\}$ es linealmente independiente.

→ Apunte para una demostración:
Vamos a demostrarlo para $p = 2$. Por tanto, se tienen: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, y $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, ambos vectores no nulos.
Si los vectores fuesen l.d., entonces existen k_1 y k_2, no nulos, tales que $k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 = \vec{0}$.
Por tanto:

$$A(k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2) = A\cdot\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(k_1\vec{x}_1) + A(k_2\vec{x}_2) = k_1 A(\vec{x}_1) + k_2 A(\vec{x}_2) = k_1\lambda_1\vec{x}_1 + k_2\lambda_2\vec{x}_2 = \vec{0} \ (*)$$

De $k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 = \vec{0} \Rightarrow k_1\vec{x}_1 = -k_2\vec{x}_2$. Sustituyendo en (*):

$$\lambda_1(-k_2\vec{x}_2) + k_2\lambda_2\vec{x}_2 = \vec{0} \Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)\cdot k_2\vec{x}_2 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1, \text{ pues } k_2 \neq 0.$$

Lo que contradice la hipótesis inicial de $\lambda_1 \neq \lambda_2$. En consecuencia, el conjunto $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ es linealmente independiente.

Para demostrarlo en general se hace por *inducción*. Se comprueba para $p = 1$, se supone cierto hasta p, y demuestra que también es cierto para $p + 1$.

Diagonalización

Una matriz cuadrada *A*, de orden *n*, se dice que es diagonalizable si existe una matriz invertible *P*, de orden *n*, y una matriz diagonal, tal que $P^{-1}AP = D$.
Otra manera de decirlo es: Una matriz cuadrada *A* es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.

- Diagonalizar una matriz *A* es encontrar las matrices *D* y *P* tales que $A = PDP^{-1}$
- Es evidente que si $P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$

El objetivo es determinar qué matrices son diagonalizables y cómo hallar *P* y *D*.

Teorema. Una matriz cuadrada *A*, de orden *n*, es diagonalizable si y sólo si tiene un conjunto $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ de *n* autovectores linealmente independientes..
En este caso,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = P\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}\cdot P^{-1}$$

donde *P* es la matriz cuyas columnas son los vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son autovalores de *A*. → $P = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n)$.
Nota: La demostración de este teorema puede verse en la p 386 del Sydsaeter.

Ejemplo: Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, vista anteriormente, se tenía:
Autovalores: $\lambda = 4$ y $\lambda = 1$.
Autovectores asociados: Para $\lambda = 4 \rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; Para $\lambda = 1$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Por tanto:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \ldots \Rightarrow P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Puede verse que:

$$P^{-1}AP = D \rightarrow -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Qué matrices son diagonalizables?
Las condiciones exigidas en el teorema anterior pueden concretarse como sigue:

<u>Caso 1. Todos los autovalores son distintos.</u>
Si una matriz cuadrada *A*, de orden *n*, tiene *n* autovalores reales distintos, entonces (como consecuencia de la propiedad 5 de los autovalores) el conjunto $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\}$ es linealmente independiente. Luego, la matriz *A* es diagonalizable.

Puede observarse que si { $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$,..., $\vec{x}_n$ } son l.i. $\Rightarrow$ la matriz $P = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n)$ es inversible. Luego puede escribirse que $PDP^{-1} = A$.

<u>Caso 2. Hay autovalores repetidos (múltiples).</u>
Una matriz cuadrada *A*, de orden *n*, es diagonalizable si y sólo si todos sus autovalores son reales y, además, la multiplicidad geométrica de cada uno coincide con su multiplicidad algebraica.
La multiplicidad algebraica es la del autovalor: solución doble, triple… de la ecuación $P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$.
La multiplicidad geométrica es la de los autovectores respectivos: la dimensión del espacio vectorial solución del autosistema $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$.
Nota: Este resultado no lo demostramos; lo damos por cierto.

Ejemplos:

1. Diagonalización de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\to |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-4) = 0$$

Autovalores: $\lambda = 3$; $\lambda = 1$; $\lambda = 4$.
Los tres autovalores son simples $\Rightarrow$ la matriz es diagonalizable.

- Si $\lambda = 3$,

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \to \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Si $\lambda = 1$,

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \to \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Si $\lambda = 4$,

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \to \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matriz $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. La matriz $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Es fácil comprobar que $PDP^{-1} = A$.

2. Diagonalización de $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\to |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -3 \\ 3 & 2-\lambda & 3 \\ -3 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda-2)^2(\lambda+4)=0$$

Autovalores: $\lambda = 2$, doble (multiplicidad algebraica 2); y $\lambda = -4$, simple.

La matriz A será diagonalizable si la multiplicidad geométrica del sistema $(A-2I)\vec{x} = \vec{0}$ es 2. Veamos:

- Si $\lambda = 2$,

$$(A-2I)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x-3z=0 \\ 3x+3z=0 \\ -3x-3z=0 \end{cases} \Rightarrow \text{(el rango de la matriz de}$$

coeficientes es 1) $\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = h \\ z = -t \end{cases} \to$ (para $t = 1$ y $h = 0$): $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; ($t = 0$, $h = 1$): $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Luego, la multiplicidad geométrica es 2: la solución depende de 2 parámetros. Como coincide con la multiplicidad algebraica, la matriz será diagonalizable.

- Si $\lambda = -4$,

$$(A+4I)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 6 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x-3z=0 \\ 3x+6y+3z=0 \\ -3x+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \to \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. La matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Puede comprobarse que $PDP^{-1} = A$.

<u>Nota</u>. La matriz $B = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$, vista en un ejemplo anterior, cumplía:

Autovalores: $\lambda = 2$, doble; $\lambda = 1$. Autovectores: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Por tanto: $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Diagonalización de $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$

$$\to |A-\lambda I| = \begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 0\\ 0 & -1-\lambda & 1\\ 0 & 4 & 2-\lambda\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda-2)^2(\lambda-3)=0$$

Autovalores: $\lambda = 2$, doble y $\lambda = 3$.

La matriz *A* será diagonalizable si la multiplicidad geométrica del sistema $(A-2I)\vec{x}=\vec{0}$ es 2. Veamos:

- Si $\lambda = 2$,

$$(A-2I)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y=0\\ -3y+z=0\\ 4z=0\end{cases}$$ $\Rightarrow$ (el rango de la matriz de coeficientes es 2: la solución depende de un solo parámetro) $\Rightarrow \begin{cases} x=t\\ y=0\\ z=0\end{cases} \to \vec{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

Como no coincide la multiplicidad geométrica con la algebraica, la matriz dada no es diagonalizable.

<u>Relación de congruencia y diagonalización de matrices simétricas</u>

Definición: Una matriz cuadrada *C* es <u>ortogonal</u> si y sólo si $C^t C = CC^t = I$.
Esto es, una matriz es ortogonal cuando su inversa coincide con su traspuesta: $C^{-1} = C^t$

- Si una matriz es ortogonal sus vectores fila (y sus vectores columna) son ortonormales: tienen módulo 1 y son perpendiculares dos a dos. Por tanto, sus vectores fila (o columna) constituyen una base ortonormal.

La demostración es inmediata. Basta con considerar que $(\vec{F}i)\cdot(\vec{F}i) = 1$ y $(\vec{F}i)\cdot(\vec{F}j) = 0$.

Ejemplo: La matriz $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es ortonormal $\to$ $C \cdot C^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Como puede observarse sus vectores fila con unitarios, y perpendiculares entre sí.

- Si una matriz *C* es ortogonal, entonces $|C| = \pm 1$.

De $C^t C = CC^t = I \Rightarrow |C^t C| = |C^t||C| = 1 \Rightarrow |C|^2 = 1 \Rightarrow |C| = \pm 1$.

Congruencia
Definición de <u>congruencia</u>: Una matriz cuadrada *A* es <u>congruente</u> con otra matriz *B* si y sólo si existe una matriz ortogonal *C* tal que $A = CBC^{-1}$

- Cuando la matriz *B* es diagonal ($B \equiv D$), se dice que *A* es diagonalizable mediante congruencias.

Esto es: *A* es diagonalizable por (mediante) congruencias $\Leftrightarrow$ $A = CDC^{-1}$, siendo *C* ortogonal y *D* diagonal.

Ejemplo: Veamos que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable por congruencias.

$\to$ $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = 0$ $\Rightarrow$ Los autovalores son: $\lambda = 0$ y $\lambda = 2$.

- Si $\lambda = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases} \to$

Autovector $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. El segundo es unitario.

- Si $\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \to$

Autovector $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. El segundo es unitario.

Los vectores $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ son perpendiculares.

La matriz de paso puede ser $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Pero también lo puede ser $C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Como la matriz *C* es ortogonal, la diagonalización de *A* por congruencias es: $A = CDC^{-1}$.

Esto es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Congruencia y matrices simétricas
Las matrices simétricas cumplen:
1. El polinomio característico $P(\lambda) = |A - \lambda I|$, de toda matriz simétrica *A*, tiene solamente raíces reales. Por tanto, todos los autovalores de *A* son reales.
2. La dimensión algebraica de un autovalor coincide con la multiplicidad geométrica de los autovalores asociados.
3. Los autovectores asociados a dos autovalores distintos son ortogonales. Esto es si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, sus autovectores asociados $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ verifican que $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = 0$.
4. En general, cualesquiera dos autovectores propios son ortogonales. (Esto es, los autovectores asociados a valores propios múltiples también cumplen la propiedad 2.)

Como todo vector puede normalizarse (encontrar un vector de módulo 1 y con la misma dirección que el dado), siempre puede hallarse una matriz de paso, *P*, que sea ortogonal.

Todo lo anterior conduce al siguiente teorema:

Teorema espectral para matrices simétricas.
Toda matriz simétrica es congruente con alguna matriz diagonal. Dicho de otra manera: toda matriz simétrica *A* es diagonalizable ortogonalmente.

Para el caso de autovalores simples es inmediato puesto que la matriz es diagonalizable con seguridad. Por tanto, basta con normalizar la matriz de paso.
Para el caso de autovalores múltiples la demostración requiere conocimientos avanzados de Álgebra → se encuentra en muchos manuales de Álgebra superior.

Ejemplo:

1. Diagonalización de la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\to |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(\lambda-2)^2(\lambda-5) = 0$$

Autovalores: $\lambda = 2$, doble; $\lambda = 5$.

- Si $\lambda = 2$,

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{x + y + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = h \\ z = -t - h \end{cases} \to$$

(para $t = 1$, $h = 1$) $\to \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; (para $t = 1$, $h = -1$) $\to \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Si λ = 5,

$$(A-\lambda I)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \to \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como puede verse fácilmente los autovectores $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ y $\vec{x}_3$ son ortogonales entre sí.
Normalizándolos se obtiene:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Por tanto:

La matriz $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. La matriz $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

La inversa, P^{-1}, es la traspuesta de *P*.
Es fácil comprobar que $PDP^{-1} = A$.

2. Diagonalización de la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

$\to |A-\lambda I| = 0 \Rightarrow -(\lambda-6)(\lambda-8)(\lambda-3)=0$
Autovalores: λ = 6, λ = 8; λ = 3.

Si λ = 6, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; Si λ = 8, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; Si λ = 3, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Como puede verse fácilmente los autovectores $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ y $\vec{x}_3$ son ortogonales entre sí.
Normalizándolos se obtiene:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Por tanto: $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Se cumple que $PDP^{-1} = A$.
Nota. La coincidencia de las dos matrices *P* de los ejemplos anteriores es eso, una coincidencia.