UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS

EXÁMEN PARCIAL

ÁLGEBRA LINEAL II

Semestre 2018-1

1. a) Sea $V = \mathbb{C}^{nx1}$ con el producto interno $< A, B > = Tr(B^* A)$. Sea $M \in V$ fijo y consideramos el operador lineal $L_M(A) = MA, \forall A$ en V. Halle L_M^*. (2pt)
   b) Sea V un espacio producto interno (su dimensión no necesariamente es finito) y β, γ vectores dados de V. Se tiene el operador lineal sobre V: $T\alpha = < \alpha, \beta > \gamma$. Halle explícitamente T^*. (3pt)

2. Demostrar que las siguientes condiciones sobre un operador lineal $T: V \to V$, V un espacio producto interno de dimensión finita, son equivalentes: (5pt)
   i. $T = S^2$ para algún operador autoadjunto $S: V \to V$.
   ii. $T = M^* M$ para algún operador lineal $M: V \to V$.
   iii. $T = T^*$ y $< Tu, u > \geq 0$, $\forall u \in V$.

3. Sea V y W espacios producto interno de dimensión finita que tienen la misma dimensión. Sea U: $V \to W$ un isomorfismo de productos internos. Demostrar que: (5pt)
   a) La aplicación $\varphi(T) = UTU^{-1}$ es un isomorfismo del espacio vectorial $End(V)$ sobre $End(W)$.
   b) $Traza(UTU^{-1}) = Traza(T)$ para todo T en $End(V)$.
   c) $UT_{\alpha,\beta}U^{-1} = T_{U\alpha,U\beta}$, $T_{\alpha,\beta}(\gamma) = < \gamma, \beta > \alpha$.
   d) Si en $End(V)$ se tiene el P.I $< T_1, T_2 > = Traza(T_1 T_2^*)$ y análogamente para $End(W)$, entonces φ es un isomorfismo de espacios producto interno.

4. Sea $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $V = \mathbb{C}^2$ con el producto interno canónico. La matriz A es de T respecto a la base canónica, $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$ (5pt)
   a) Exprese T en su descomposición espectral.
   b) Exprese A en su forma exponencial ($A = N exp(iH)$).

A. H. G

2 de mayo del 2018