Solucionario del Examen Parcial di Algebra Lineal II
(CM-262A)

1.- a) Se tiene el operador lineal $L_M: V=\mathbb{C}^{n\times 1} \to V$, $L_M(A)=MA$.
Hallando L_M^*:

$$\langle L_M(A), B\rangle = Tr(B^*(MA)) = Tr(MAB^*) = Tr(AB^*M) = Tr(A(M^*B)^*)$$
$$= Tr((M^*B)^*A) = \langle A, M^*B\rangle = \langle A, L_M^* B\rangle, \ \forall\ A, B \text{ en } V.$$
$$\therefore L_M^* B = M^*B.$$

b) Tenemos el operador lineal $T: V\to V$, $T\alpha = \langle \alpha,\beta\rangle\gamma$. Sea $\alpha, \rho \in V$

$\langle T\alpha, \rho\rangle = \langle\langle \alpha,\beta\rangle\gamma, \rho\rangle = \langle\alpha,\beta\rangle\cdot\langle\gamma,\rho\rangle = \langle\alpha, \underbrace{\langle\rho,\gamma\rangle\beta}_{T^*\rho}\rangle$. $T^*\rho = \langle\rho,\alpha\rangle\beta$
es lineal en ρ. $\therefore$ $T^*\rho = \langle\rho,\alpha\rangle\beta$, $T^*: V\to V$.

2.- $i)\Rightarrow ii)$ Inmediato; se tiene $T=S^2$ par $S: V\to V$ autoadjunto
$S=M$ entonces $T=M^*M$

$ii)\Rightarrow iii)$ Se tiene $N=M^*M \Rightarrow N=N^*$ $\therefore$ N autoadjunto.
Ademas $\langle Nu,u\rangle = \langle M^*Mu,u\rangle = \langle Mu,Mu\rangle \geq 0, \forall u\in V$
$\therefore$ N es nonegativo

$iii)\Rightarrow i$ N es autoadjunto, por el teorema espectral, existe una base ortonormal $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ de vectores propios de N. Tenemos $Nu_i=\lambda_i u_i$, $\lambda_i\geq 0$.
Definiendo el operador lineal $S: V\to V$, $S(u_i)=\sqrt{\lambda_i}\,u_i$
$i=1,\dots,n$. Se tiene $[S]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}$, por lo tanto S es autoadjunto. Ademas $S^2(u_i)=\lambda_i u_i = N(u_i)$, $\forall i\in\{1,\dots,n\}$
$\therefore$ $N=S^2$.

3.- a) Como End(V) y End(V) tienen la misma dimension finito es suficiente verificar que $Nu(\varphi)=\{0\}$.
Sea $\varphi(T)=0=UTU^{-1} \Rightarrow T=0$.

b) Sean $\mathcal{B}$ y γ bases de V y W respectivamente y $A=[U]_{\mathcal{B}}^{\gamma}$
$B=[T]_{\mathcal{B}}$ entonces $Traza(UTU^{-1}) = Traza(ABA^{-1}) = Traza(B) = Traza(T)$

c) Sea $\rho \in V$, $(UT_{\alpha,\beta}U^{-1})\rho = UT_{\alpha,\beta}(U^{-1}\rho) = U(\langle U^{-1}\rho,\beta\rangle\alpha) = \langle U^{-1}\rho,\beta\rangle U\alpha =$

$= \langle U^{-1}\rho, U^{-1}(U\beta)\rangle U\alpha = \langle \rho, U\beta\rangle U\alpha = T_{U\alpha,U\beta}(\rho)$

$\therefore UT_{\alpha,\beta}U^{-1} = T_{U\alpha,U\beta}$, U y U^{-1} preservan los P.I.

d) Primero demostrando: $(UTU^{-1})^* = UT^*U^{-1}$. Se debe notar $UTU^{-1} \in End(W)$. Sean ρ, π en W entonces

$\langle UTU^{-1}\rho,\pi\rangle = \langle UTU^{-1}\rho, UU^{-1}\pi\rangle = \langle TU^{-1}\rho, U^{-1}\pi\rangle = \langle U^{-1}\rho, T^*U^{-1}\pi\rangle =$

$= \langle U^{-1}\rho, U^{-1}UT^*U^{-1}\pi\rangle = \langle \rho, UT^*U^{-1}\pi\rangle$, $\forall \rho,\pi$ en W

$\therefore (UTU^{-1})^* = UT^*U^{-1}$ ---- $\oplus$

De esto $\langle \varphi(T),\varphi(S)\rangle = \langle UTU^{-1}, USU^{-1}\rangle = Tr(UTU^{-1}\underline{(USU^{-1})^*})$

De $\oplus$ $= Traza(UTU^{-1}\underline{US^*U^{-1}}) = Traza(UTS^*U^{-1}) \overset{b)}{=} Traza(TS^*) =$

$= \langle T,S\rangle$. φ es un isomorfismo en P.I.

4.- a) Es claro $T(x,y) = (x+iy, ix+y)$, $\rho(T) = \{1+i, 1-i\}$

Los polinomios de Lagrange $f_1(x) = \frac{1}{2i}(x-(1-i))$, $f_2(x) = -\frac{1}{2i}(x-(1+i))$

Luego las proyecciones ortogonales

$P_1 = f_1(T) = \frac{T-(1-i)I}{2i}$, $P_2 = f_2(T) = \frac{T-(1+i)I}{2i}$

$P_1(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)$, $P_2(x,y) = \frac{1}{2}(y-x, x+y)$

$\therefore$ $T = (1+i)P_1 + (1-i)P_2$. T es normal porque A es normal.

b) $A^*A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\end{bmatrix} = N^2 \Rightarrow N = \begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix} \Rightarrow U = N^{-1}A = \begin{bmatrix}\sqrt{2}/2 & i\sqrt{2}/2 \\ i\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{bmatrix}$

$\rho(U) = \{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\}$, $f_1(x) = \frac{i\sqrt{2}}{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)$, $f_2(x) = \frac{i\sqrt{2}}{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}\right)$

$P_1 = f_1(U) = \frac{i\sqrt{2}}{2}\left(U+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}I\right) = \frac{i\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}i}{2} & \sqrt{2}i/2 \\ \sqrt{2}i/2 & \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}i}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/2+i & -1/2 \\ -1/2 & i-1/2\end{bmatrix}$

$P_2 = f_2(U) = i\frac{\sqrt{2}}{2}\left[U+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}I\right] = \frac{i\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{2}-\sqrt{2}i/2 & \sqrt{2}i/2 \\ \sqrt{2}i/2 & \sqrt{2}-\sqrt{2}i/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2+i & -1/2 \\ -1/2 & 1/2+i\end{bmatrix}$

$\therefore$ $U = (-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)P_1 + (-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)P_2$

$= e^{\frac{3\pi}{4}}P_1 + e^{i5\pi/4}$

$\Rightarrow H = 3\pi/4\, P_1 + 5\pi/4\, P_2.$

$\therefore$ $A = \begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix} e^{iH}$

04-05-2018.

A. H. G