Solución de preguntas

Taller de Álgebra

semana 1

POR MILLER SILVA

1.

a) Sean $a, b \in G$, entonces

$$\begin{aligned}
(ab)^2 &= a^2b^2\\
(ab)(ab) &= (aa)(bb)\\
abab &= aabb\\
a^{-1}abab &= a^{-1}aabb\\
bab &= abb\\
babb^{-1} &= abbb^{-1}\\
ba &= ab.
\end{aligned}$$

b) Supongamos que existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que

$$(ab)^j = a^jb^j, (ab)^{j+1} = a^{j+1}b^{j+1} \text{ y } (ab)^{j+2} = a^{j+2}b^{j+2} \quad \forall a, b \in G.$$

Entonces

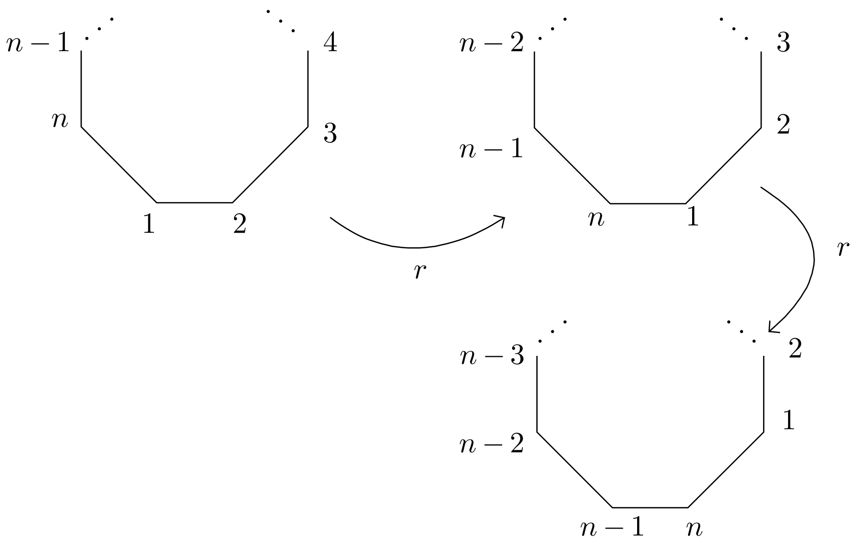
$$\begin{aligned}
(ab)^{j+1} &= a^{j+1}b^{j+1}\\
ab(ab)^j &= aa^jb^jb\\
b(ab)^j &= (ab)^jb && \ldots(\alpha)\\
\\
(ab)^jab &= a\,(ab)^jb\\
(ab)^ja &= a(ab)^j && \ldots(\beta)\\
\\
(ab)^{j+2} &= a^{j+2}b^{j+2}\\
ab(ab)^jab &= aaa^jb^jbb\\
b(ab)^ja &= a(ab)^jb
\end{aligned}$$

ahora usamos α en la izquierda y β en la derecha

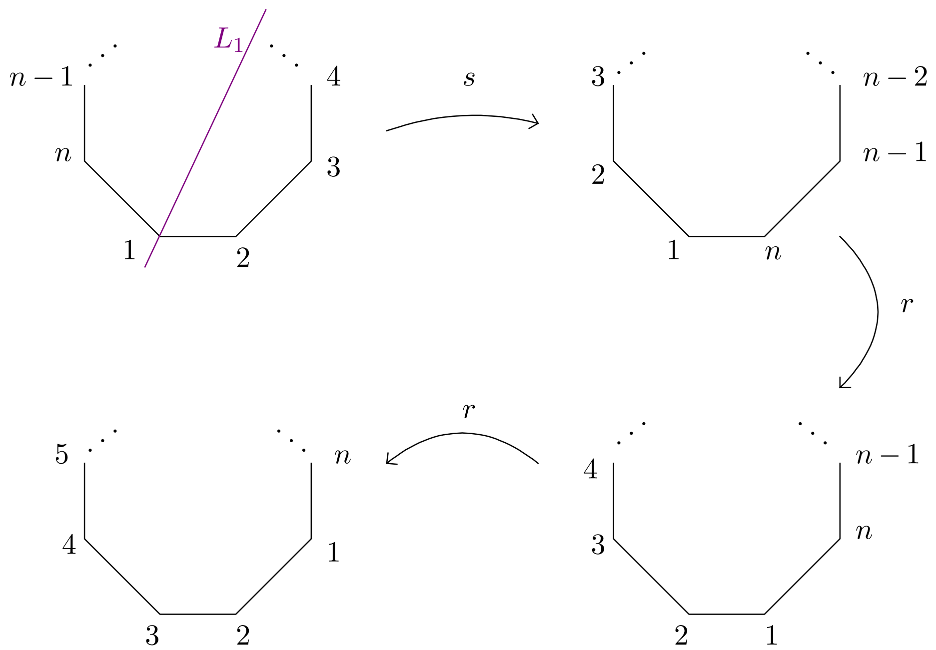
$$(ab)^jba = (ab)^jab$$

$$ba \;=\; ab.$$

2. Notemos lo siguiente, sea P_n un polígono de n lados y rotémoslo $2\pi/n$ de forma antihoraria:



Los vértices mantienen la secuencia inicial en forma antihoraria 1 2 3 … n. Ahora obsevamos que pasa si lo reflejamos respecto a la recta L_1 y luego lo rotamos:



Los vértices ahora mantienen a secuencia antihoraria $1, n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2$.

Por lo tanto si tenemos una simetría de P_n sus vertíces deben seguir, en forma antihoraria, la secuencia $1,2,3,\ldots,n$ o la secuencia $1,n,n-1,n-2,\ldots,3,2$. Es claro que cada simetría lo podemos ver como una permutación $\sigma\colon\{1,\ldots n\}\to\{1,\ldots,n\}$, donde $\sigma(i)=j$ significa que el vértice j se pone en el lugar del vértice i.

Ahora veamos cuántas simetrías hay, sea $\sigma\colon\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}$ una simetría tal que $\sigma(1)=i$, si $i=1$ como σ es simetría entonces $\sigma(2)=2$ o $\sigma(2)=n$. Luego

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & \boxed{\sigma(1)=1} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\boxed{\sigma(2)=2} \arrow[d] & & \boxed{\sigma(2)=n} \arrow[d] \\
\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix} & & \sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & n & n-1 & \ldots & 2 \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

si $i\neq 1$ entonces $\sigma(2)=i+1$ o $\sigma(2)=i-1$, luego

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & \boxed{\sigma(1)=i} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\boxed{\sigma(2)=i+1} \arrow[d] & & \boxed{\sigma(2)=i-1} \arrow[d] \\
\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ i & i+1 & i+2 & \ldots & i+(n-1) \end{pmatrix} & & \sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & i+1 & \ldots & n \\ i & i-1 & \ldots & 1 & n & \ldots & i+1 \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

Entonces basta conocer $\sigma(1)$ y $\sigma(2)$ para determinar toda la simetría, $\sigma(1)$ tiene n opciones $\{1,2,\ldots,n\}$ y para cada elección de $\sigma(1)$, $\sigma(2)$ tiene 2 opciones, entonces hay en total $n\times 2=2n$ simetrías.

Veamos explícitamente cuáles son estas simetrías. Consideremos las siguientes simetrías de P_n:

$$1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}, r=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n & 1 & \ldots & n-1 \end{pmatrix}, s=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & n & \ldots & 2 \end{pmatrix}$$

luego $r^2,\ldots,r^{n-1},sr,\ldots,sr^{n-1}$ también son simetrías y todos distintos, además son $2n$ permutaciones, entonces

$D_{2n}=\{1,r,\ldots,r^{n-1},s,sr,\ldots,sr^{n-1}\}$ es el conjunto de todas las simetrías de P_n

Para probar que D_{2n} es un subgrupo con la operación composición, hagamos lo siguiente:

$$
\begin{array}{|c|}\hline 11^{-1}=1\\\hline r1^{-1}=r\\\hline \vdots\\\hline r^{n-1}1^{-1}=r^{n-1}\\\hline s1^{-1}=s\\\hline sr1^{-1}=sr\\\hline \vdots\\\hline sr^{n-1}1^{-1}=sr^{n-1}\\\hline \end{array},
\begin{array}{|c|}\hline 1r^{-1}=r^{n-1}\\\hline rr^{-1}=1\\\hline \vdots\\\hline r^{n-1}r^{-1}=r^{n-2}\\\hline sr^{-1}=sr^{n-1}\\\hline srr^{-1}=s\\\hline \vdots\\\hline sr^{n-1}r^{-1}=sr^{n-2}\\\hline \end{array},\ldots,
\begin{array}{|c|}\hline 1(r^{n-1})^{-1}=r\\\hline r\,(r^{n-1})^{-1}=r^2\\\hline \vdots\\\hline r^{n-1}(r^{n-1})^{-1}=1\\\hline s\,(r^{n-1})^{-1}=sr\\\hline sr\,(r^{n-1})^{-1}=sr^2\\\hline \vdots\\\hline sr^{n-1}(r^{n-1})^{-1}=s\\\hline \end{array},\ldots,
$$

$$
\begin{array}{|c|}\hline 1(s)^{-1}=s\\\hline r\,(s)^{-1}=sr^{\,n-1}\\\hline \vdots\\\hline r^{n-1}(s)^{-1}=sr\\\hline s\,(s)^{-1}=1\\\hline sr\,(s)^{-1}=r^{n-1}\\\hline \vdots\\\hline sr^{n-1}(s)^{-1}=r\\\hline \end{array},
\begin{array}{|c|}\hline 1(sr)^{-1}=sr\\\hline r\,(sr)^{-1}=s\\\hline \vdots\\\hline r^{n-1}(sr)^{-1}=sr^2\\\hline s\,(sr)^{-1}=r\\\hline sr\,(sr)^{-1}=1\\\hline \vdots\\\hline sr^{n-1}(sr)^{-1}=r^2\\\hline \end{array},\ldots,
\begin{array}{|c|}\hline 1(sr^{n-1})^{-1}=sr^{n-1}\\\hline r\,(sr^{n-1})^{-1}=sr^{n-2}\\\hline \vdots\\\hline r^{n-1}(sr^{n-1})^{-1}=s\\\hline s\,(sr^{n-1})^{-1}=r^{n-1}\\\hline sr\,(sr^{n-1})^{-1}=r^{n-2}\\\hline \vdots\\\hline sr^{n-1}(sr^{n-1})^{-1}=1\\\hline \end{array}.
$$

Luego de las tablas se tiene que para todo $x, y \in D_{2n}$ se cumple $x \circ y^{-1} \in D_{2n}$. Como S_n es un grupo, entonces D_{2n} es un subgrupo de S_n.

3. El grupo lineal general 2 es el conjunto

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \det(A) \neq 0\}$$

con la multiplicación usual de matrices «·».

Sea

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, c \neq 0 \right\} \neq \emptyset (I_2 \in G).$$

Como $\det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) = ac \neq 0$, entonces $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Sean $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{smallmatrix}\right) \in G$, luego

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a' b'} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c' & -b' \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \frac{1}{a' b'} \begin{pmatrix} ac' & -ab' + ba' \\ 0 & ca' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{ac'}{a' b'} & -\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} \\ 0 & \frac{c}{b'} \end{pmatrix} \in G.$$

Por lo tanto $G \leqslant \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.