LISTA DE EJERCICIOS - ÁLGEBRA

GEM - 2021

Caleb - Michaell

Pregunta 1. Sea G un grupo abeliano, pruebe que el conjunto

$$T(G) = \{g \in G : |g| < \infty\}$$

es un subgrupo de G denominado el **subgrupo de torsión**. De un ejemplo donde $T(G)$ no sea subgrupo. Halle $T(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n)$.

Pregunta 2. Un grupo abeliano se denomina **divisible** si para todo $a \in G$ y k un entero no nulo exite $x \in A$ tal que $x^k = a$.

a) $(\mathbb{Q}, +)$ es divisible.

b) Si G es finito, no es divisible.

c) Sean A, B grupos abelianos, pruebe que $A \times B$ es divisible si y solo si A y B son divisibles.

Pregunta 3. Sea G un grupo abeliano de orden pq con $(p, q) = 1$. Pruebe que si existen $a, b \in G$ tales que $|a| = p$ y $|b| = q$ entonces G es cíclico.

Daniel - Cristopher

Pregunta 1. Pruebe los siguientes items:

a) Para $a, b \in \mathbb{R}$ definimos $\tau_{ab}(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que el conjunto

$$G = \{\tau_{ab} : a \neq 0\}$$

es un grupo con la composición de funciones.

b) Pruebe que el subconjunto $H = \{\tau_{ab} \in G : a \in \mathbb{Q}\}$ es un subgrupo de G.

Pregunta 2. Sea G un grupo, definimos el **centro** de G como el conjunto:

$$Z(G) = \{g \in G \,|\, gx = xg, \forall x \in G\}$$

a) Pruebe que $Z(G) \leq G$.

b) Sea $H \leq G$ un subgrupo abeliano, pruebe que $\langle H \cup Z(G) \rangle$ es abeliano.

Pregunta 3. Si G es un grupo infinito, pruebe que es cíclico si y solo si es isomorfo a cada uno de sus subgrupos propios.

Guido - Jhonatan

Pregunta 1. Sean $H, K \leq G$, denotaremos $H \vee K = \langle H \cup K \rangle$. Pruebe que si G es un grupo abeliano entonces:

$$H \vee K = \{ab \,|\, a \in H, b \in K\}$$

¿Qué sucede si G no es abeliano? de un ejemplo.

Pregunta 2. Resuelva los siguientes items:

a) Halle todos los subgrupos de $\mathbb{Z}_{45}$.

b) Si $x \in G$ con $|x| = |G| < \infty$ entonces $G = \langle x \rangle$.

c) Pruebe que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ no es cíclico.

Pregunta 3. Si G es cíclico y solo tiene un generador pruebe que $|G| \leq 2$.

Juan Paucar - Marco

Pregunta 1. Diga si los siguientes subconjuntos son grupos:

a) $\{a + ia : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$.

b) Dado $n \in \mathbb{N}$, $\left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : (b, n) = 1\right\}$.

c) El subconjunto de $2-$ciclos en S_n con $n \geq 3$.

d) Los números pares con el 0 en $\mathbb{Z}$.

Pregunta 2. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos, si $|f(a)|$ es finito pruebe que $|a|$ es finito o $|f(a)|$ divide a $|a|$.

Pregunta 3. Un isomorfismo de un grupo a si mismo, se denomina un **automorfismo**. El conjunto de todos los autormorfismo de un grupo G forma un grupo con la composición de funciones y se denota por $\mathrm{Aut}(G)$. Pruebe que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ es isomorfo a $(\mathbb{Z}^{\times}, \cdot)$. (Sugerencia: considere el mapa $f \mapsto f(\overline{1})$ y pruebe que es un isomorfismo.)

Miller

Pregunta 1. Sea G un grupo con $|G| = n > 2$, pruebe que no existe subgrupo H tal que $|H| = n - 1$. ¿Existirá un subgrupo con $n - 2$ elementos?

Pregunta 2. Sea $Z_n = \langle r \rangle \leq D_{2n}$, para $a \in \mathbb{Z}$ definimos $\sigma_a : Z_n \to Z_n$ por:

$$\sigma_a(x) = x^a$$

a) σ es un isomorfismo si y solo si $(a, n) = 1$.

b) $\sigma_a = \sigma_b$ si y solo si $a \equiv b(\text{mod} n)$.

c) Un isomorfismo de un grupo a si mismo, se denomina un **automorfismo**. Pruebe que el conjunto de todos los automorfismos de un grupo G, denotado por $\text{Aut}(G)$, es un grupo con la composición de funciones.

d) El mapa $\overline{a} \mapsto \sigma_a$ es un isomorfismo entre $(\mathbb{Z}_n)^\times$ y $\text{Aut}(Z_n)$. Concluya que $\text{Aut}(Z_n)$ es un grupo abeliano.

Pregunta 3. Si G es un grupo que solo tiene un número finito de subgrupos, pruebe que es finito.