Solución de las preguntas del Taller de Álgebra

semana 3

Miller Silva Jhonatan Ancco

1.

a) Sea $q_1 \in \mathbb{Q}$, existen $m, n \in \mathbb{Z}$ con $n > 0$ tal que $q_1 = \frac{m}{n}$. Por el algoritmo de la división existen $c, r \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m = nc + r, 0 \leqslant r < n.$$

Entonces $q_1 = \frac{m}{n} = c + \frac{r}{n}$ con $0 \leqslant \frac{r}{n} < 1$. Luego $q_1 - \frac{r}{n} \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $q_1\mathbb{Z} = \frac{r}{n}\mathbb{Z}$.

b) Sea $q \in \mathbb{Q}$, existen $m, n \in \mathbb{Z}$ con $n \neq 0$ tal que $q = \frac{m}{n}$. Entonces $nq = m \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $n(q\mathbb{Z}) = (nq)\mathbb{Z} = 0\mathbb{Z}$.

c) Sea el grupo multiplicativo $U = \{z \in \mathbb{C}: z^k = 1 \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\}$.

Consideremos el mapa

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{Q} & \rightarrow U \\ & & \dfrac{m}{n} & \mapsto e^{2\pi\frac{m}{n}i} \end{array}$$

φ está bien definida ya que $\left(e^{2\pi\frac{m}{n}i}\right)^n = e^{2m\pi i} = 1$.

- φ es un homomorfismo

  $\varphi\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) = e^{2\pi\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right)i} = e^{2\pi\left(\frac{m}{n}\right)i} e^{2\pi\left(\frac{p}{q}\right)i} = \varphi\left(\frac{m}{n}\right)\varphi\left(\frac{p}{q}\right)$.

- $\ker \varphi = \mathbb{Z}$

  $\frac{m}{n} \in \ker \varphi \Leftrightarrow e^{2\pi\frac{m}{n}i} = 1 \Leftrightarrow \frac{m}{n} \in \mathbb{Z}$

- $\operatorname{Im} \varphi = U$

  Sea $z = |z|e^{\theta i} \in U \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $|z|^k e^{k\theta i} = 1 \Rightarrow |z| = 1$ y $e^{k\theta i} = 1 \Rightarrow k\theta = 2n\pi$ para algún $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \theta = 2\frac{n}{k}\pi \Rightarrow z = e^{2\frac{n}{k}\pi i} = \varphi\left(\frac{n}{k}\right) \in \operatorname{Im} \varphi$.

Por el primer teorema del isomorfismo

$$\frac{\mathbb{Q}}{\ker \varphi} \cong \operatorname{Im} \varphi \equiv \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \cong U.$$

2. Como $H \cap K$ es un subgrupo de H, por el teorema de Lagrange tenemos que

$$\frac{|H|}{|H \cap G|} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{[G: H \cap K]}{[G: H]} = \frac{\frac{|G|}{|H \cap G|}}{\frac{|G|}{|H|}} = \frac{|H|}{|H \cap G|}\frac{|G|}{|G|} = \frac{|H|}{|H \cap G|} \in \mathbb{Z} \Rightarrow [G: H] | [G: H \cap K],$$

de igual manera, $H\cap K$ es un subgrupo de K, entonces $[G\colon K]|[G\colon H\cap K]$. Luego

$$\operatorname{mcm}([G\colon H],[G\colon K])|[G\colon H\cap K]\Rightarrow \operatorname{mcm}(m,n)|[G\colon H\cap K]\Rightarrow \operatorname{mcm}(m,n)\leqslant [G\colon H\cap K].$$

Por otro lado, $HK\subset G\Rightarrow |HK|\leqslant |G|$, luego

$$\frac{|G|}{|H|\,|K|}|HK|\leqslant \frac{|G|}{|H|\,|K|}|G|\Rightarrow \frac{|G|}{\frac{|H|\,|K|}{|HK|}}\leqslant \frac{|G|}{|H|}\frac{|G|}{|K|}\Rightarrow \frac{|G|}{|H\cap K|}\leqslant \frac{|G|}{|H|}\frac{|G|}{|K|}\Rightarrow [G\colon H\cap K]\leqslant mn.$$

Finalmente

$$\operatorname{mcm}(m,n)\leqslant [G\colon H\cap K]\leqslant mn.$$

Y si $(m,n)=1$ entonces

$$mn\leqslant [G\colon H\cap K]\leqslant mn\Rightarrow [G\colon H\cap K]=mn=[G\colon H][G\colon K].$$

3.

a) Consideremos el mapa

$$\begin{array}{rccc}\varphi\colon & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n\\ & a & \mapsto & (\bar{a},\bar{\bar{a}})\end{array}.$$

- φ es un homomorfismo

$$\varphi(a+b)=(\overline{a+b},\overline{\overline{a+b}})=(\bar{a}+\bar{b},\bar{\bar{a}}+\bar{\bar{b}})=(\bar{a},\bar{\bar{a}})+(\bar{b},\bar{\bar{b}})=\varphi(a)+\varphi(b)$$

- $\operatorname{Ker}\varphi=mn\mathbb{Z}$

  $a\in\operatorname{Ker}\varphi\Leftrightarrow\varphi(a)=(\bar{a},\bar{\bar{a}})=(\bar{0},\bar{\bar{0}})\Leftrightarrow a\equiv 0 \bmod m\wedge a\equiv 0 \bmod n\Leftrightarrow a\equiv 0 \bmod \operatorname{mcm}(m,n)=0 \bmod mn\Leftrightarrow a\in mn\mathbb{Z}$

- $\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$

  Sea $(\bar{a},\bar{\bar{b}})\in\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$. Como $(m,n)=1$, existen $x,y\in\mathbb{Z}$ tal que $xm+yn=1$. Luego

$$xma+yna=a\quad\text{y}\quad xmb+ynb=b\quad\Rightarrow\quad\overline{yna}=\bar{a}\quad\text{y}\quad\overline{\overline{xmb}}=\bar{\bar{b}}.$$

  Defino $z=yna+xmb\in\mathbb{Z}$, entonces $\varphi(z)=(\overline{yna},\overline{\overline{xmb}})=(\bar{a},\bar{\bar{b}})\in\operatorname{Im}\varphi$.

Por el primer teorema del isomorfismo

$$\frac{\mathbb{Z}}{\ker\varphi}\cong\operatorname{Im}\varphi\Rightarrow\frac{\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}}\cong\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n\Rightarrow\mathbb{Z}_{mn}\cong\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n.$$

b) Sea los grupos A y $D_{2n}=\{1,r,\ldots,r^n,s,sr,\ldots,sr^{n-1}\}$ donde

$$A=\left\{\begin{pmatrix}\pm\bar{1} & \bar{k}\\ \bar{0} & \bar{1}\end{pmatrix}\colon\bar{k}\in\mathbb{Z}_n\right\}.$$

Definimos el mapa

$$\begin{array}{cccc} f & : & A & \rightarrow & D_{2_n} \\ & & \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{k} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} & \mapsto & r^k \\ & & \begin{pmatrix} -\bar{1} & \bar{k} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} & \mapsto & s r^{-(k-1)} \end{array}$$

- f está bien definida

  Sea $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $\bar{k_1} = \bar{k_2}$, entonces $n | k_1 - k_2 \Rightarrow r^{k_1 - k_2} = 1 \Rightarrow r^{k_1} = r^{k_2}$. Luego

  $$f\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{k_1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = r^{k_1} = r^{k_2} = f\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{k_2} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix},$$

  $$f\begin{pmatrix} -\bar{1} & \bar{k_1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = s r^{-(k_1-1)} = s r r^{-k_1} = s r r^{-k_2} = s r^{-(k_2-1)} = f\begin{pmatrix} -\bar{1} & \bar{k_2} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

- f es homomorfismo

  $$f\left[\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{k} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{m} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix} \bar{1} & \overline{m+k} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = r^{m+k} = r^k r^m = f\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{k} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} f\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{m} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix},$$

  $$f\left[\begin{pmatrix} -\bar{1} & \bar{k} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\bar{1} & \bar{m} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix} \bar{1} & \overline{-m+k} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = r^{k-m} = r^{k-1-(m-1)} =$$

  $$r^{k-1} s s r^{-(m-1)} = s r^{-(k-1)} s r^{-(m-1)} = f\begin{pmatrix} -\bar{1} & \bar{k} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} f\begin{pmatrix} -\bar{1} & \bar{m} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix},$$

  $$f\left[\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{k} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\bar{1} & \bar{m} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix} -\bar{1} & \overline{m+k} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = s r^{-(m+k-1)} = s r^{-k} r^{-(m-1)}$$

  $$= r^k s r^{-(m-1)} = f\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{k} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} f\begin{pmatrix} -\bar{1} & \bar{m} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix},$$

  $$f\left[\begin{pmatrix} -\bar{1} & \bar{m} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{k} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix} -\bar{1} & \overline{-k+m} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = s r^{-(m-k-1)} = s r^{-(m-1)} r^k$$

  $$= f\begin{pmatrix} -\bar{1} & \bar{m} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} f\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{k} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

- f es sobreyectiva

  Un elemento de D_{2n} tienen la forma r^k o $s r^k$, en ambos casos conseguimos pre-imágenes

  $$f\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{k} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = r^k,\ f\begin{pmatrix} -\bar{1} & \overline{-k+1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = s r^k.$$

- f es inyectiva

  Sea $x \in \operatorname{Ker} f$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{k} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$ o $x = \begin{pmatrix} -\bar{1} & \bar{k} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$. Veamos ambos casos

  1. $1 = f(x) = f\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{k} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = r^k \Rightarrow n | k \Rightarrow \bar{k} = \bar{0} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$

2. $1 = f(x) = f\begin{pmatrix} -\bar{1} & \bar{k} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = s r^{-(k-1)} \Rightarrow s = r^{k-1} (\Rightarrow\Leftarrow)$

Entonces $\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \right\}$.

Por lo tanto f es un isomorfismo $\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} \pm\bar{1} & \bar{k} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} : \bar{k} \in \mathbb{Z}_n \right\} \cong D_{2n}$.

4. Como $[G\colon H]$ y $[G\colon K]$ son coprimos entonces, por el ejercicio 2, $[G\colon H \cap K] = [G\colon H][G\colon K]$

$$\frac{|G|}{|H \cap K|} = \frac{|G|}{|H|}\frac{|G|}{|K|} \Rightarrow \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = |G| \Rightarrow |HK| = |G| \Rightarrow HK = G,$$

ya que $HK \subset G$.