

# TIRO EN DIANA

Gustavo Lozano<sup>1</sup>, Miller Silva<sup>2</sup>, Guillermo Borjas<sup>3</sup>, Mirian Geronimo<sup>4</sup>, Ayrton Coronado<sup>5</sup>

*Facultad de Ciencias<sup>1</sup>, Universidad Nacional de Ingeniería<sup>1</sup>*

Email: glozanoi@uni.pe<sup>1</sup>, miller.silva.m@uni.pe<sup>2</sup>, gborjasc@uni.pe<sup>3</sup>, mgeronimoa@uni.pe<sup>4</sup>,  
acoronadoh@uni.pe<sup>5</sup>

## Resumen

El estudio de las matrices es fundamental para todo aquel que desea sumergirse en el maravilloso mundo de las matemáticas. Las matrices son parte esencial de ésta y son ampliamente usadas en diversas áreas como lo es en el álgebra lineal, el análisis numérico y las probabilidades. Por ejemplo, para modelar el comportamiento de la propagación de un virus “T”, se usa la potenciación de matrices; supongamos que tenemos una población de personas sanas ( $S$ ) e infectadas ( $I$ ) donde las personas sanas tienen un 80 % de probabilidad de no infectarse en 2 días, y que además hay una cura con 1 % de efectividad, estos datos se ordenan en una matriz  $A$ . Luego si empezamos con una población de 99 personas sanas y 1 infectado, dentro de 2 días tendríamos que la nueva población es:

$$\begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,01 \\ 0,2 & 0,99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 99 \\ 1 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 79,21 \\ 20,79 \end{pmatrix}_2,$$

es decir que aproximadamente tendríamos 79 personas sanas y 21 infectadas; y ¿qué pasaría en  $2n$  días?, bueno tendríamos que la población sería  $A^n X_0$ . Es aquí donde comienzan las complicaciones, dado que elevar una matriz a su  $n$ -ésima potencia no es tarea fácil, sin embargo existe una maravillosa herramienta matemática que nos ayudará a simplificar los cálculos; nos referimos a la matriz de Jordan. La matriz de Jordan satisface  $A^n = P J^n P^{-1}$ , lo cual aplicando esto a nuestro problema anterior tendríamos que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,01 \\ 0,2 & 0,99 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -0,05 & -0,71 \\ -1,00 & 0,71 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,79 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -0,05 & -0,71 \\ -1,00 & 0,71 \end{pmatrix}^{-1}$$

ahora si  $n$  es muy grande obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,79 \end{pmatrix}^n \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^n \rightarrow \begin{pmatrix} 0,05 & 0,05 \\ 0,95 & 0,95 \end{pmatrix}$$

finalmente cuando  $n \rightarrow \infty$  la población esperada es:

$$\begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix}_{\infty} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,05 \\ 0,95 & 0,95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 99 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,76 \\ 95,24 \end{pmatrix},$$

esto es, 5 personas sanas y 95 infectadas; ¿increíble verdad?.

Vemos así que *la matriz de Jordan* es muy útil para simplificar operaciones; el desafío es hallarla; para esto es necesario calcular los valores propios de  $A$ , los cuales podemos obtener usando algunos métodos del análisis numérico tales como *el método potencia*, *potencia inversa* y *QR*. Para nuestra suerte ya se conoce la forma general de la potencia  $n$ -ésima de la matriz de Jordan.

Este trabajo se centra en calcular la potencia  $k$ -ésima de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$  (*la matriz de puntuación*), la cual contiene puntuaciones de una prueba de tiro en dianas realizados por un cadete, para esto calcularemos su matriz de Jordan asociada, ayudándonos de los métodos numéricos ya mencionados y algunos otros algoritmos de apoyo para calcular los valores propios y los bloques de Jordan.

### Palabras Clave:

La matriz de Jordan, Método potencia, Método potencia inversa, Método QR, Matriz de puntuación

### Abstract

The study of matrices is fundamental for those who wish to immerse themselves in the wonderful world of mathematics, since matrices are in areas such as Linear Algebra, Numerical Analysis and Probabilities. For example to model the behavior of virus propagation T, it use matrices potentiation, suppose we have a population healthy( $S$ ) and infected( $I$ ), with an 80 % chance that healthy people will not become infected in two days, and also there is a cure with 1 % effectiveness, hese data are ordered in a matrix  $A$ . Then if we have a population of 99 healthy persons and 1 infected person, 2 days later we would have that the new population is:

$$\begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,01 \\ 0,2 & 0,99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 99 \\ 1 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 79,21 \\ 20,79 \end{pmatrix}_2,$$

this is approximately we would have 79 healthy persons and 21 infected persons, and ¿What would happen with the population in 2 days?, well the population would be

$A^n X_0$ . It's here where things get complicated, but we can use a wonderful mathematical tool that would help us simplify the calculations, we are talking about the matrix of Jordan, which satisfies  $A^n = P J^n P^{-1}$ , so we would have:

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,01 \\ 0,2 & 0,99 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -0,05 & -0,71 \\ -1,00 & 0,71 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,79 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -0,05 & -0,71 \\ -1,00 & 0,71 \end{pmatrix}^{-1}$$

Now, if  $n$  is a very large number, we would have:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,79 \end{pmatrix}^n \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^n \rightarrow \begin{pmatrix} 0,05 & 0,05 \\ 0,95 & 0,95 \end{pmatrix}$$

Finally, when  $n \rightarrow \infty$  the expected population is:

$$\begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix}_{\infty} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,05 \\ 0,95 & 0,95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 99 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,76 \\ 95,24 \end{pmatrix},$$

this is 5 healthy persons and 95 persons infected. That's incredible, right?!

So, we see that *Jordan matrix* is very useful to simplify operations; the "complication" is to find it; for this it's necessary to calculate the eigenvalues of  $A$ , this we can do using numerical analysis tools such as *the power method, inverse power and QR*. For our luck we already know the general form of  $J^n$ , with  $J$ : Jordan matrix.

This work focuses on calculating the power  $k$  of a matrix  $A \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$  (*the scoring matrix*), where  $A$  contains the scores of the shooting test of a cadet, for this we will use the Jordan Form and the numerical methods, indicated lines above, to calculate the eigenvalues and blocks' Jordan.

### Keywords:

The matrix of Jordan, The power method , The inverse power method, The method QR, The scoring matrix

# 1. Introducción

En la Academia General Militar de Zaragoza se lleva a cabo la preparación física y técnica de los alumnos o cadetes para la superación de sus respectivos planes de estudio. La creación de hábitos deportivos en los cadetes es fundamental. Es decir, les presentan diferentes deportes militares (orientación, patrullas de tiro, pentatlón militar y concurso de patrullas) y se les inicia en equitación y la defensa personal militar.

Ahora centrémonos solo en el deporte de tiro. Dicha práctica de tiro realizada por los cadetes, consiste en acertar a un objetivo utilizando algún proyectil.

Se hace llamar blanco de tiro (y de manera más general, blanco) al objeto que se desea alcanzar con el proyectil, cuando se hace fuego dirigiendo hacia él la puntería. Si se le «hiere», se dice que «se ha dado en el blanco» o «que se ha hecho blanco».

El blanco de tiro característico es un cuadrado de cartulina con anillos concéntricos que suelen ser de color rojo, negro y blanco. El objetivo de las prácticas de tiro al blanco es alcanzar con series de disparos el centro que lleva un disco pintado de color negro, este recibe el nombre de diana y sirve para marcar de un modo bien visible el sitio adonde se debe dirigir la puntería.

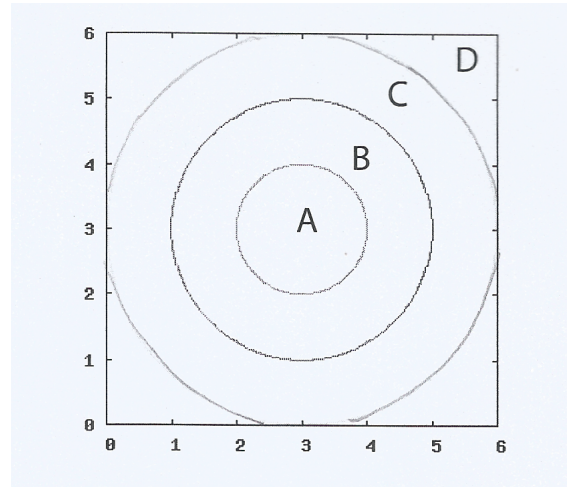


Fig1: Diana que se usará en este trabajo.

En este proyecto analizaremos la práctica de tiro de un cadete en particular. Para este cadete, se dispone de 12 dianas y en cada diana realizará 12 disparos. Las puntuaciones de cada disparo se ordenan en una matriz  $A \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$  (*matriz de puntuación de la semana 1*). Suponiendo que la *matriz de puntuación de la semana n* esta dada por  $A^n$  y la *puntuación final de tiro de la semana n* está dada por la norma de la matriz ( $\|A^n\|_1$  o  $\|A^n\|_\infty$ ), se desea hallar la puntuación final de tiro de la semana 10 usando ambas normas y concluir con qué norma sale más beneficiado el cadete.

La dificultad de este trabajo se centra en encontrar una expresión general para la potencia  $n$ -ésima de la matriz  $A$ , para esto vamos a usar la matriz de Jordan de  $A$  ( $J_A$ ) ya que se cumple  $A^n = P^{-1}J_A^n P$ , donde la potencia  $J_A^n$  es más fácil de hallar comparado a  $A$ .

## 2. Fundamento Teórico

Para dar con la descomposición canónica de Jordan de una matriz debemos introducir algunos conocimientos previos:

**Definición 2.1** (Operadores Lineales Nilpotentes). *El operador  $T : V \rightarrow V$  es nilpotente si  $T^p = 0$ , para algún  $p \in \mathbb{N}$ . Además se dice que  $k \in \mathbb{N}$  es el índice de nilpotencia de  $T$  si*

$$T^{k-1} \neq 0 \wedge T^k = 0$$

**Teorema 2.1.** *Sea  $T : V \rightarrow V$ ,  $V$  un  $\mathbb{C}$  espacio vectorial,  $\dim V = n$ ,  $T$  nilpotente de índice  $q$ . Luego para  $v \in V \mid T^{q-1}v \neq 0$ , tenemos:*

1. *El conjunto  $\{T^{q-1}v, T^{q-2}v, \dots, Tv, v\}$  es L.I.*
2.  *$S = \langle \{T^{q-1}v, T^{q-2}v, \dots, Tv, v\} \rangle$  es invariante por  $T$ .*
3. *Existe un subespacio  $U$  de  $V$ , invariante por  $T$  tal que:*

$$V = S \oplus U$$

**Corolario 2.1.** *Del teorema (2,1)*

$$S = \langle \{T^{q-1}v, T^{q-2}v, \dots, Tv, v\} \rangle \\ \Rightarrow \dim(S) = q$$

*Inductivamente*

$$T^r(S) = \langle \{T^{q-1}v, T^{q-2}v, \dots, T^{r+1}v, T^r v\} \rangle \\ \Rightarrow \dim T^r(S) = q - r$$

**Teorema 2.2.** *Sea  $T : V \rightarrow V$ ,  $\dim V = n$ . Entonces existen  $U, W \subset V$  invariantes por  $T$  tal que :*

- $V = U \oplus W$
- $T|_U : U \rightarrow U$  nilpotente y  $T|_W : W \rightarrow W$  inversible

**NOTA:** Como  $T|_U : U \rightarrow U$  es nilpotente entonces existe  $q \in \mathbb{N} \mid (T|_U)^q = 0$  y  $(T|_U)^{q-1} \neq 0$ . Ahora hallamos un  $v \neq 0$  tal que  $(T|_U)^{q-1}v \neq 0$ . Así definimos

$$B_1 = \{(T|_U)^{q-1}v, (T|_U)^{q-2}v, \dots, (T|_U)v, v\},$$

el cual es una base de  $U$ . Como  $W$  es invariante por  $T$  podemos definir  $T|_W : W \rightarrow W$ . Y volviendo a aplicar el teorema anterior  $\exists U_2, W_2 \subset W$  invariantes por  $T$  tal que  $W = U_2 \oplus W_2$ ,  $T|_{U_2} : U_2 \rightarrow U_2$  es nilpotente y  $T|_{W_2} : W_2 \rightarrow W_2$  inversible.

Como  $T|_{U_2} : U_2 \rightarrow U_2$  es nilpotente,  $\exists q_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $(T|_{U_2})^{q_2} = 0$  y  $(T|_{U_2})^{q_2-1} \neq 0$ , además  $q_1 = q \geq q_2$ . Ahora hallando un  $v_2 \neq 0$  tal que  $(T|_{U_2})^{q_2-1}v_2 \neq 0$  se puede definir

$$B_2 = \{(T|_{U_2})^{q_2-1}v_2, (T|_{U_2})^{q_2-2}v_2, \dots, (T|_{U_2})v_2, v_2\}$$

el cual es una base para  $U_2$ . Luego de manera recursiva obtenemos:

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus \dots \oplus U_k,$$

donde  $U_1 = U$ . Luego  $B = \bigcup_{i=1}^k B_i$  es base de  $V$  y además

$$[T]_B = \begin{bmatrix} [T|_{U_1}]_{\beta_1} & O & \dots & O \\ O & [T|_{U_2}]_{\beta_2} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & [T|_{U_k}]_{\beta_k} \end{bmatrix}$$

$$\text{Donde } [T|_{U_j}]_{\beta_j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{q_j \times q_j}$$

**Teorema 2.3** (Forma Canónica de Jordan).

Sea  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial,  $\dim V = n$ ,

$$T : V \rightarrow V$$

un operador lineal,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \Lambda(T)$  y  $n_1, n_2, \dots, n_k$  las multiplicidades algebraicas de los valores propios (respectivamente), entonces:

Existen subespacios  $V_1, V_2, \dots, V_k$  invariantes por  $T$  ( $T(V_i) \subseteq V_i$ ) tales que:

1.  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$
2.  $\dim V_i = n_i, \quad i = 1 - k$
3. El operador  $T - \lambda_i I : V_i \rightarrow V_i$  es nilpotente,  $i = 1 - k$ . (Aquí se aplica la propiedad ya antes mencionada para un operador nilpotente)

Ahora introduciremos algunos métodos numéricos que nos permiten calcular los valores y vectores propios de una matriz, los cuales son necesarios para construir la forma canónica de Jordan de una matriz.

## 2.1. Métodos para calcular valores propios

### 2.1.1. Método potencia

Dada una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , este método calcula el mayor valor propio de  $A$  y el vector propio asociado a este valor propio, mediante iteraciones. Es decir, dada la siguiente relación de recurrencia :

$$q^{(k+1)} = \frac{1}{\phi_k} A q^{(k)}, \quad \text{donde } \phi_k = \|A q^{(k)}\|$$

e inicializando con algún vector  $q^{(0)}$ , al realizar las iteraciones la sucesión converge al autovector asociado al mayor valor propio.

### Convergencia del Método Potencia

#### ■ Caso general:

Sea  $\Lambda(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  el espectro de  $A$  y  $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$  multiplicidades geométricas de  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  respectivamente (no necesariamente  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus \dots \oplus V_k$ ,  $V_i$  espacio propio de  $\lambda_i$ ). Sin pérdida de la generalidad, sea:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \dots > |\lambda_k|$$

Ahora sea  $q^{(0)} \in \langle \bigcup_{i=1}^k V_i \rangle$

$$\Rightarrow q^{(0)} = \sum_{i=1}^{m_1} c_i^{(1)} v_i^{(1)} + \sum_{r=1}^k \sum_{j=1}^{m_r} c_j^{(r)} v_j^{(r)}$$

donde  $v_j^{(i)}$ : vector j-ésimo del espacio propio  $v_i$ .

En este caso la sucesión

$$q^{(k+1)} = \frac{1}{\phi_k} A q^{(k)}$$

converge a un múltiplo del vector propio asociado a mayor valor propio.

Ahora, se construye la siguiente sucesión que converge al valor propio  $\lambda_1$ .

$$u^{(k+1)} = \frac{1}{\phi_k} \frac{(A q^{(k)})_j}{q_j^{(k)}} \quad (1)$$

donde  $(A q^{(k)})_j$  es el j-ésimo elemento de  $A q^{(k)}$  y  $q_j^{(k)}$  es el j-ésimo elemento de  $q^{(k)}$ .

Así las ecuaciones (1) y (2) nos servirán para hallar el vector propio y su respectivo valor propio siendo este el máximo.

### **Deflacción**

Luego que se ha obtenido  $\lambda_1$  el autovalor máximo y  $x_1$  su autovector propio asociado mediante el método de la potencia de una matriz  $A^{n \times n}$ , utilizaremos la deflacción para hallar una matriz más simple que tenga los mismos autovalores que  $A$  sin contar el autovalor ya calculado, es decir, el  $\lambda_1$ . Como esta matriz tendrá los mismos autovalores de  $A$  ( sin el  $\lambda_1$ ), podemos aplicarle el método de

la potencia para hallar el siguiente autovalor ( $\lambda_2$ ) y luego volver a aplicar la deflacción para hallar una matriz más simple que contenga los mismos autovalores de  $A$  pero sin  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , con el método de la potencia obtenemos otro autovalor  $\lambda_3$  y así recursivamente encontramos todos los autovalores de  $A$ . Esto sigue el siguiente esquema:

Sea  $x$  un autovector de  $A$  y  $\lambda$  su correspondiente autovalor y sea  $U$  una matriz  $n \times (n - 1)$  tal que  $(x, U)$  sea unitario, ya que  $Ax = \lambda x$  y  $A(x, U) = (Ax, AU)$ , tenemos

$$\begin{aligned} (x, U)^H A(x, U) &= \begin{pmatrix} x^H \\ U^H \end{pmatrix} (\lambda x, AU) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x^H x & x^H AU \\ \lambda U^H x & U^H AU \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora  $x^H x = 1$  y  $x$  es ortogonal a las columnas de  $U$ , es decir,  $U^H x = 0$ . Luego:

$$(x, U)^H A(x, U) = \begin{pmatrix} \lambda & h^H \\ 0 & C \end{pmatrix} \dots (*)$$

Donde  $C = U^H AU$  es de orden  $(n - 1) \times (n - 1)$  y  $h^H = x^H AU$ . Así la matriz(\*) tiene como autovalores a  $\lambda$  y a los autovalores de  $C$  y como esta matriz es semejante a  $A$  tienen los mismos autovalores, por ello sólo bastaría ahora hallar los autovalores de la matriz  $C$ . Ahora, para determinar  $U$  usamos las transformaciones de Householder.

### **Propiedad**

Si  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_1$  su primera componente,  $x \neq 0$ ,

$\sigma = \text{sign}(x_1)\|x\|_2$  donde  $\text{sign}(0) = +1$ , y si  $w = x + \sigma e^{(1)}$  y  $\theta = \frac{1}{2}\|w\|_2^2$ , luego

$$W = I - \frac{1}{\theta}ww^H$$

es la transformación de Householder con  $Wx = -\sigma e^{(1)}$ .

Siendo  $\lambda$  el autovalor hallado de  $A$  y  $x$  su respectivo autovector. Construiremos la transformación  $T$  usando la propiedad de modo que:

$$Tx = -\text{sign}(x_1)\|x\|_2 e^{(1)} = -\text{sign}(x_1)e^{(1)}$$

asumiendo además  $\|x\|_2 = 1$ , luego:

$$T^2x = -\text{sign}(x_1)Te^{(1)}$$

ya que  $T$  es unitaria. De aquí se obtiene  $Te^{(1)} = -\text{sign}(x_1)x$ . De esto, la primera columna de  $T$  es el autovector  $-\text{sign}(x_1)x$ . Por lo tanto  $T = (-\text{sign}(x_1)x, U)$  donde  $U$  resulta ser unitario de orden  $n \times (n-1)$ , de esta forma encontramos  $U$ .

Con el método de la potencia y la deflación podremos hallar todos los autovalores de nuestra matriz, así obtenemos la forma canónica de Jordan  $J$ ,  $A = PJP^{-1}$ , donde  $P$  es la matriz de cambio de base (de una base  $B'$  de  $V$  a la base formada por los  $B_i$ , como se mostró anteriormente).

Ahora introduciremos otro método para calcular los autovalores de nuestra matriz  $A^{n \times n}$ .

### 2.1.2. Método QR:

El método QR es un método iterativo que consiste en reducir una matriz a una forma triangular.

Debido a que el número de operaciones que utiliza para una matriz cualquiera es proporcional a  $n^3$ , primero se transformará la matriz a una matriz de Hessenberg de esta manera el número de operaciones que se utilizarán será proporcional a  $n^2$ , así el método será más eficiente.

El algoritmo QR para calcular los autovalores de una matriz  $A$  consiste en dos pasos:

1. Reducción de  $A$  a la forma de Hessenberg.
2. Aplicar la descomposición QR a la forma de Hessenberg obtenida.

Para reducir  $A$  a su forma Hessenberg, empleamos las transformaciones de Householder, dado  $A_1 = A$  una matriz  $n \times n$ . En  $k$ -ésimo paso la matriz tiene la forma:

$$A_k = \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & A_{13}^{(k)} \\ 0 & A_{22}^{(k)} & A_{23}^{(k)} \end{pmatrix}$$

donde  $A_{11}^{(k)}$  es  $k \times (k-1)$ ,  $A_{12}^{(k)}$  es  $k \times 1$ ,  $A_{22}^{(k)}$  es  $(n-k) \times 1$ ,  $A_{13}^{(k)}$  es  $k \times (n-k)$  y  $A_{23}^{(k)}$  es de orden  $(n-k) \times (n-k)$ . Sea la matriz  $H_k$  una matriz de Householder tal que

$$H_k A_{22}^{(k)} = \pm \|A_{22}^{(k)}\| e^{(1)}$$



donde  $e^{(1)}$  es el primer vector unitario en  $\mathbb{R}^{(n-k)}$  y dado

$$U_k = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & H_k \end{pmatrix}$$

Luego,  $A_{k+1} = U_k^H A U_k = U_k A U_k$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & A_{13}^{(k)} H_k \\ 0 & \pm \|A_{22}^{(k)}\| e_1^{(1)} & H_k A_{23}^{(k)} H_k \end{pmatrix}$$

el cual conduce a la matriz de Hessenberg. Finalmente la matriz de Hessenberg es la matriz de la forma:

$$A_{n-1} = U_{n-2}^H U_{n-3}^H \dots U_1^H A U_1 U_2 \dots U_{n-2}$$

Así la matriz  $A_{n-1}$  resulta ser semejante a  $A$ , esto es tiene los mismos autovalores. Una vez obtenida la matriz de Hessenberg  $B$ , se procede a iterar a partir de  $B_0 = B$ ,

$$B_{k-1} = Q_k R_k$$

$$B_k = R_K Q_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

tendiendo  $B_k$  a una matriz triangular superior, cuyos elementos de la diagonal principal son los autovalores de  $A$ .

IMPORTANTE: El cálculo de  $J(A)^k$ , no lo realizaremos con  $J(A)$ , sino con los bloques de Jordan, pues sabemos:

$$J(A)^k = \begin{bmatrix} J(A, \lambda_1)_{q_1 \times q_1}^k & O & \dots & O \\ O & J(A, \lambda_2)_{q_2 \times q_2}^k & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & J(A, \lambda_m)_{q_m \times q_m}^k \end{bmatrix},$$

donde  $q_i \in \mathbb{N}$  es el menor índice tal que  $Nu < (A - \lambda_i I)^{q_i} > = Nu < (A - \lambda_i I)^{q_i+1} >$ .

Y además tenemos la siguiente relación de recurrencia para calcular la potencia  $k$ -ésima de los bloques de Jordan:

$$J(A, \lambda_i)^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & \binom{k}{1} \lambda^{k-1} & \binom{k}{2} \lambda^{k-2} & \dots & \binom{k}{m-1} \lambda^{k-m+1} \\ & \lambda^k & \binom{k}{1} \lambda^{k-1} & \dots & \binom{k}{m-2} \lambda^{k-m+2} \\ & & \lambda^k & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \binom{k}{1} \lambda^{k-1} \\ & & & & \lambda^k \end{bmatrix}$$

Note que para calcular la potencia  $k$ -ésima de  $J(A, \lambda_i)$ , no tenemos que calcular todos los elementos de  $J(A, \lambda_i)$ , sino solo calcular la primera fila y luego ir recortando el último elemento para fila siguiente.

### 3. Análisis

#### Problema a resolver:

Se programa una práctica de tiros para los cadetes de la academia General Militar de Zaragoza para esto se dispone de 12 días, en cada día se dispara con un fusil HK con ráfagas de 12 disparos. Las puntuaciones según el área donde cae el tiro son las siguientes:

- Disparo fuera de la zona penaliza -1 punto.
- Disparo localizado en la zona D no contabiliza puntos.
- Disparo localizado en la zona C suma 1 punto.
- Disparo localizado en la zona B suma 2 puntos
- Disparo localizado en la zona A, es decir diana, obtiene una bonificación plus que se determina dependiendo de la semana (es una variable, la llamamos  $s$ ).

Las puntuaciones obtenidas por un cadete en su primera práctica de tiro son las siguientes:

- Diana 1: Primer disparo sector C.
- Diana 2: Segundo disparo en diana.
- Diana 3 : Primer y segundo disparo sector C, tercer disparo en diana.

- Diana 4 : Cuarto disparo sector C, sexto disparo sector B.
- Diana 5 : Quinto disparo sector C.
- Diana 6 : Séptimo disparo sector C.
- Diana 7 : Séptimo disparo sector C.
- Diana 8 : Octavo disparo sector C, noveno disparo en diana.
- Diana 9 : Noveno disparo sector C, décimo disparo en diana.
- Diana 10 : Décimo disparo sector C, undécimo disparo en diana.
- Diana 11 : Undécimo disparo sector C, duodécimo disparo en diana.
- Duodécimo disparo sector C.

Los disparos fuera se dieron en :

- Diana 4 : Quinto y séptimo disparo.
- Diana 6 : Sexto disparo.

El resto de disparos se dieron fuera de la zona D.

Las interrogantes a resolver son las siguientes:

1. Construir una matriz ( $A$ ) que recoja los datos obtenidos en la prueba de el cadete.
2. Obtener una expresión general para la potencia  $n$ -ésima de la matriz de  $A$ .

3. Suponiendo que la matriz de puntuación del cadete en la semana k se obtiene con la potencia k-ésima de la matriz A, calcular la matriz de puntuaciones obtenidas por dicho cadete en la semana 10 de curso, sabiendo que la bonificación en esa semana es de 5 puntos.
4. La puntuación final en tiro de una se-

mana se obtiene calculando la norma de la matriz. Considerando que las normas utilizadas son  $\|A\|_\infty$  y  $\|A\|_1$ . Calcular la puntuación final que obtendría el cadete en la semana 10 del curso (bonificación diana 5 puntos) si se aplica cada una de las normas anteriores. ¿Con qué norma saldría beneficiado?.

### Solución:

[click aquí para ver los algoritmos](#)

- Agruparemos los puntajes de las practicas de tiro para los Caballeros Cadetes en una matriz A, donde  $A_{ij}$  representa la puntuación del tiro j-ésimo en la i-ésima diana. Así obtenemos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

- A continuación procederemos a calcular la potencia k-esima de la matriz (1), de forma indirecta, es decir calcularemos la matriz de jordan de la matriz A. Y usando la siguiente relación entre  $J(A)$  y A.

$$A^k = PJ(A)^kP^{-1}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} -\frac{s+1}{s-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{s^k}{s-1} - \frac{1}{s-1} & ks^{(k-1)} & s^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -k & -(-1)^k + 1 & \frac{(-1)^k}{2} - 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^k & \frac{-(-1)^k}{2} + 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ks & \frac{ks^2(k-1)}{2} & \frac{ks^3(k-2)(k-1)}{6} & \frac{ks^4(k-3)(k-2)(k-1)}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ks & \frac{ks^2(k-1)}{2} & \frac{s^3(k-2)(k-1)}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ks & \frac{ks^2(k-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ks \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Como la matriz de puntuación del Caballero Cadete en tiro la semana k se obtiene con la potencia k de la matriz obtenida en la primera práctica A Entonces la matriz de puntuaciones de la semana 10 es:

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9765625.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2441406.0 & 19531250.0 & 9765625.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & -10.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 50.0 & 1125.0 & 15000.0 & 131250.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 50.0 & 1125.0 & 15000.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 50.0 & 1125.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 50.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Como la puntuación final de una semana se obtiene calculando la norma de la matriz. Asi para semana 10 tenemos las siguientes puntuaciones finales(dependen de la norma que se utilice):

- $\|A^{10}\|_{\infty} = 31738281,00000000$
- $\|A^{10}\|_1 = 29296875,00000000$

∴ Por lo tanto el Caballero Cadete será beneficiado si su puntuación se calcula con la norma del máximo ( $\|\cdot\|_{\infty}$ )

## 4. Conclusiones

1. El uso de múltiples algoritmos efectivamente aumentan la eficiencia para la obtención de los cálculos, dado que se logra reducir la cantidad de operaciones realizadas por la máquina.
2. Para la obtención de la n-ésima potencia, los cálculos fueron hechos a partir

de los bloques de Jordan, tomando como referencia la primera fila de valores y haciendo unas sencillas modificaciones para obtener las demás, mejorando así el tiempo de ejecución del algoritmo.

3. El algoritmo implementado para obtener la n-ésima potencia de la matriz de

Jordan, puede ser utilizado para calcular funciones de matrices que puedan ser expresados mediante series de Taylor, dado que para esto sólo sería nece-

sario realizar una sumatoria de su forma de Jordan elevado a un exponente 'k'.

- 
1. Azmy S Ackleh. *Classical and modern numerical analysis*, Chapman & Hall/CRC (2010).
  2. David Kincaid, Ward Cheney. *Numerical Analysis Mathematics of Scientific Computing*, 3rd edition (2002).
  3. Claus Fuhrer, Jan Erik Solem, Olivier Verdier. *Scientific Computing with Python 3*, 2nd edition(2017).