Tiro en diana

Trabajo final del curso de Análisis Numérico I

Gustavo Lozano
Mirian Geronimo
Guillermo Borjas
Miller Silva
Ayrton Coronado

2019

Introducción

Para muchas ramas de la matemática como las ecuaciones diferenciales o procesos estocásticos, resulta de gran utilidad para los desarrollos teóricos y aplicaciones el poder descomponer matrices en la forma $A = PDP^{-1}$ con D diagonal, no todas las matrices son diagonalizables es por eso que haremos uso de la descomposición de Jordan ya que esta es una descomposición que generaliza a la diagonalización y que también tiene la particularidad de facilitar los cálculos.

Funciones de Matrices

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, sabemos:

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} \\ &= P^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J^m}{m!} P \\ &= P^{-1} e^J P \end{aligned}$$

Fundamento Teórico

Sea $T : V \to V$ y $\rho(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Entonces es posible:

$$V = V_1 \oplus V_2 \ldots \oplus V_k \oplus U$$

Donde V_i es el espacio propio asociodo a λ_i. Si β_i es base de $V_i, \quad i = 1 - k$ y β_{k+1} es base de U.Asi $\beta = \bigcup_{i=0}^{k+1} \beta_i$ es base de V. Además:

$$[T]_{\beta_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{q_i \times q_i}, [T]_{\beta_{k+1}} = \begin{bmatrix} a_{11} & * & * & \ldots & * \\ & a_{22} & * & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & * \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Donde q_i es el menor indice tal que $\langle N(T - \lambda_i I)^{q_i} \rangle = \langle N(T - \lambda_i I)^{q_i + 1} \rangle$

Fundamento Teórico

Por lo tanto:

$$[T]_\beta = J(T) = \begin{bmatrix} [T]_{\beta_1} & & & & \\ & [T]_{\beta_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [T]_{\beta_k} & \\ & & & & [T]_{\beta_{k+1}} \end{bmatrix}$$

Fundamento teórico

Como:

$$A = P^{-1}JP \quad , \text{J es la forma canónica de Jordan}$$

Entonces $A^n = P^{-1}J^nP$, además:

$$J^n = \begin{bmatrix} [T]_{\beta_1}^n & & & & \\ & [T]_{\beta_2}^n & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [T]_{\beta_k}^n & \\ & & & & [T]_{\beta_{k+1}}^n \end{bmatrix}$$

Fundamento teórico

$$[T]^n_{\beta_i} = \begin{bmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \cdots & \binom{n}{q_i-1}\lambda^{n-q_i+1} \\ & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \cdots & \binom{n}{q_i-2}\lambda^{n-q_i+2} \\ & & \lambda^n & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \\ & & & & \lambda^n \end{bmatrix} \quad i = 1\text{--}k$$

Análisis

- Agruparemos los puntajes de las practicas de tiro para los Caballeros Cadetes en una matriz A, donde A_{ij} representa la puntuación del tiro $j-$esimo en la $i-$esima diana. Asi obtenemos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Análisis

- Procederemos a calcular la potencia k-esima de la matriz (1), usando la siguiente relación entre $J(A)$ y A.

$$A^k = PJ(A)^k P^{-1}$$

$$A^k = \begin{bmatrix}
-\frac{-s+1}{s-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & s^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{s^k}{s-1} - \frac{1}{s-1} & ks^{(k-1)} & s^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -k & -(-1)^k+1 & \frac{(-1)^k}{2} - 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^k & \frac{-(-1)^k}{2} + 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ks & \frac{ks^2(k-1)}{2} & \frac{ks^3(k-2)(k-1)}{6} & \frac{ks^4(k-3)(k-2)(k-1)}{24} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ks & \frac{ks^2(k-1)}{2} & \frac{s^3(k-2)(k-1)}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ks & \frac{ks^2(k-1)}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ks \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

Análisis

- La matriz de puntuaciones de la semana 10 es (s=5):

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9765625.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2441406.0 & 19531250.0 & 9765625.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & -10.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 50.0 & 1125.0 & 15000.0 & 131250.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 50.0 & 1125.0 & 15000.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 50.0 & 1125.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 50.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Análisis

- Como la puntación final de una semana se obtiene calculando la norma de la matriz. Asi para semana 10 tenemos las siguientes puntuaciones finales(dependen de la norma que se utilice):
  - $\|A^{10}\|_\infty = 31738281.0000000$
  - $\|A^{10}\|_1 = 29296875.0000000$

  $\therefore$ Por lo tanto el Caballero Cadete será beneficiado si su puntuación se calcula con la norma del máximo ($\|.\|_\infty$)

Conclusiones

- Efectivamente el uso de la forma de Hessengber usando el método de QR reduce la cantidad de operaciones de $O(n^3)$ a $O(n^2)$, aumentando la eficiencia en la obtención de los cálculos realizados por la máquina.
- Al calcular la potencia n-ésima de la matriz de jordan, se usó los bloques de jordan, con ello reducimos la cantidad de operaciones realizadas por la máquina.
- El algoritmo implementado para obtener la n-ésima potencia de la matriz de Jordan, puede ser utilizado para calcular funciones de matrices que puedan ser expresados mediante series de Taylor, dado que para esto solo será necesario realizar una sumatoria de su forma de Jordan elevado a un exponente 'k'.

- Si usáramos el método de potencia en una matriz simétrica, su convergencia sería más rápida que en una no simétrica porque el radio de convergencia en una matriz no simétrica es: $O(|\lambda_2/\lambda_1|^m)$ y en una matriz simétrica es $O(|\lambda_2/\lambda_1|^{2m})$.

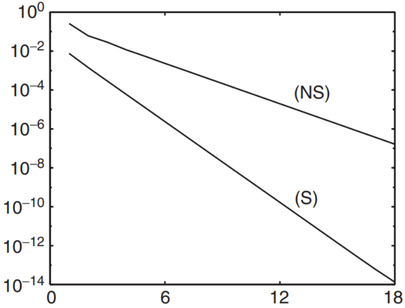

Figura: Convergencia entre un matriz simétrica y una no simétrica

- Nuestra matriz al no ser diagonalizable, generó 6 bloques de Jordan de los cuales uno de ellos depende de la variable 's', esto genera una pérdida en el rendimiento del algoritmo dado que a bloques de mayor tamaño, mayor es la cantidad de cálculos hechos por la máquina.