1. Uso de la Forma Canónica de Jordan en cálculos de funciones de matriciales

Dado que en muchas ocaciones es necesario calcular $f(A)$, donde $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to V$ una función y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, esto nos motiva a tratar de calcular $f(A)$ de manera eficiente(e inteligente), es decir en vez de hacer calculos con A, lo que haremos es buscar un matriz equivalente a A, pero tal que los calculos sean muy sencillos(o al menos más sencillos que realizarlos con la matriz original). Asi que esto nos motiva a buscar dicha matriz, por ejemplo:

Si A fuera diagonalizable, entonces existe $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible tal que:

$$A = PDP^{-1}$$

, donde D es una diagonal. Asi $A^k = PD^kP^{-1}$, por lo tanto si requerimos A^k, el calculo sera hecho de manera indirecta, es decir calcular D^k(que es muchisimo más simple) y luego calcular PD^kP^{-1}.

Pero es claro que no todas las matrices son diagonalizables, por lo que es necesario buscar alguna matriz sencilla equivalente con A tal que nos permita respinder sobre cuestiones que involucren a A.

Dicha matriz es la forma canónica de Jordan y está dada por:

$$J(A) = \begin{bmatrix} J(A,\lambda_1) & O & O & \dots & O \\ O & J(A,\lambda_2) & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & J(A,\lambda_k) \end{bmatrix}$$

Donde $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\} \in \wedge(A)$ y $J(A, \lambda_k)$ es el bloque de Jordan esociado a λ_i

Esta matriz está relacionada con A, mediante una matriz $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible tal que:

$$A = QJ(A)Q^{-1}$$

Ahora si nos proponemos a calcular e^A, pero sabemos:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Entonces definimos $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$, si es que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ converge, asi:

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{QJ(A)^kQ^{-1}}{k!} \\ &= Q\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{J(A)^k}{k!}\right)Q^{-1} \\ &= Qe^{J(A)}Q^{-1} \end{aligned}$$

Pero $e^{J(A)}$ es más sencillo que calcular e^A, por lo cual la forma canónica de A, nos facilita de algún modo el trabajo. Del mismo modo podemos calcular $\cos(A)$ o $\sin(A)$:

$$\begin{aligned} & Como \\ sinx &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} \\ cosx &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(4k)!} - \frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!} \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned}\sin(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{A^{4k+3}}{(4k+3)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{QJ(A)^{4k+1}Q^{-1}}{(4k+1)!} - \frac{QJ(A)^{4k+3}Q^{-1}}{(4k+3)!} \\ &= Q\left(\frac{J(A)^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{J(A)^{4k+3}}{(4k+3)!}\right)Q^{-1}\end{aligned}$$

$$\cos(A) = Q\left(\frac{J(A)^{4k}}{(4k)!} - \frac{J(A)^{4k+2}}{(4k+2)!}\right)Q^{-1}$$

Gneneralizando, dada $f \in \mathbb{C}^{\infty}$, entonces;

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \\ \Rightarrow f(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}A^k \\ &= Q\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}J(A)^k\right)Q^{-1}\end{aligned}$$

2. Forma Canónica de Jordan

Teorema 2.1 (Descomposición) *Sea $T: V \to V, \dim V = n$. Entonces existen $U, W \subset V$ invariantes por T tal que:*

1. $V = U \oplus W$
2. $T_{|U}: U \to U$ *nilpotente y* $T_{|W}: W \to W$ *inversible.*

Ver prueba en Jordan-Teoria

Nota 2.1 *Como $T_{|U}: U \to U$ es nilpotente, entonces existe $q \in \mathbb{N}/ \quad \left(T_{|U}\right)^q = 0 \quad \wedge \quad \left(T_{|U}\right)^{q-1} \neq 0$. Ahora hallamos un $v \neq 0/ \left(T_{|U}\right)^{q-1} v \neq 0$. ASi definimos:*

$$\beta = \left\{(T_{|U})^{q-1}v, (T_{|U})^{q-2}v, \ldots, (T_{|U})v, v\right\}$$

Las cual es una base de U. Como W es invariante por T podemos definir $T_{|W}: W \to W$. Y volviendo a aplicar el teorema anterior $\exists u_2, w_2 \subset W$ invariantes por T, tal que:
$W = U_2 \oplus W_2$, tal que $T_{|U_2}: U_2 \to U_2$ nilpotente y $T_{|W_2}: W_2 \to W_2$ inversible.
*Como $T_{|U_2}: U_{2 \to U_2}$ nilpotente, $\exists q_2 \in \mathbb{N}/ \quad (T_{|U_2})^{q2} = 0 \quad \wedge \quad (T_{|U_2})^{q2-1} \neq 0$, además $q_1 = q \geq q_2$ (**VER DEMOSTRACION EN Jordan-Teoria**)*
Ahora hallando un $v_2 \neq 0/ \quad (T_{|U_2})^{q_2-1}v_2 \neq 0$
De esto definimos:

$$\beta_2 = \left\{(T_{|U_2})^{q_2-1}v_2, (T_{|U_2})^{q_2-2}v_2, \ldots, (T_{|U_2})v_2, v_2\right\}$$

La cual es una base de U_2, luego de manera recursiva podemos tener:

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \oplus \ldots U_k$$

, donde $U_1 = U$. Luego $\beta = \bigcup_{i=1}^{k} \beta_i$ es base de V y además:

$$J(A) = \begin{bmatrix} [T_{|U_1}]_{\beta_1} & O & O & \ldots & O \\ O & [T_{|U_2}]_{\beta_2} & O & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \ldots & [T_{|U_k}]_{\beta_k} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$[T_{|U_j}]_{\beta_j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema 2.2 (Forma Canónica de Jordan)

3. Eigenvalue-Eigenvector computation

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, este método calcula el mayor valor propio de A y el vector propio asociado a este vector propio.

3.1. Convergencia del Método Potencia

- Si cada $\lambda \in \wedge(A)$ tieene mutiplicidad 1, luego podemos ordenarlos(los valores propios), de la siguiente forma:

  $$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$$

  Ahora sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ los vectores propios asociados a los valores propios(respectivamente, $Av_i = \lambda_i v_i$). Así $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^{n \times 1}$.Por lo tanto para $q^{(0)} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Por lo tanto para $q^{(0)} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, tenemos:

  $$q^{(0)} = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k$$

  Asi podemos definir la siguiente suceción (la cual probaremos que converge a x1)

  $$q^{(k+1)} = \frac{1}{\phi_k} A q^{(k)}, \quad donde\ \phi_k = \|Aq^{(k)}\|$$

  $$\begin{aligned} q^{(k+1)} &= \frac{1}{\phi_k} A \left(\frac{1}{\phi_{k-1}} A q^{(k-1)} \right) \\ &= \frac{1}{\phi_k \phi_{k-1}} A^2 q^{(k-1)} \\ &= \frac{1}{\phi_k \phi_{k-1} \phi_{k-2}} A^3 q^{(k-2)} \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{\phi_k \phi_{k-1} \dots \phi_0} A^{k+1} q(0) \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} q^{(k+1)} &= \left(\prod_{i=0}^{k} \phi_i^{-1} \right) A^{k+1} q^{(0)} \\ &= \phi A^{k+1} \left(\sum_{j=1} n c_j x_j \right), \quad \phi = \left(\prod_{i=0}^{k} \phi_i^{-1} \right) \\ &= \phi \sum_{j=1} n c_j A^{k+1} x_j \\ &= \phi \sum_{j=1} n c_j \lambda_j^{k+1} x_j \\ &= \phi \lambda_1^{k+1} \left(c_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n} c_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^{k+1} x_j \right) \end{aligned}$$

Como $\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right| < 1, \quad j = 2 - n$, entonces:

$$\lim_{k\to\infty} q^{(k+1)} = \left(\lim_{k\to\infty} \prod_{i=0}^{k} \lambda_j^{k+1}\right)(c_1 x_1 + 0)$$

$$\therefore \quad \lim_{k\to\infty} q(k+1) = c_1 a x_1, \quad \textit{donde} \quad a = \left(\lim_{k\to\infty} \prod_{i=0}^{k} \lambda_j^{k+1}\right)$$

Ahora vamos a construir una sucesión que converja al valor porpio λ_1.

$$u^{(k+1)} = \frac{1}{\phi_k} \frac{(Aq^{(k)})_j}{q_j^{(k)}} \tag{1}$$

donde $(Aq^{(k)})_j$ es el j-esimo elemento de $Aq^{(k)}$ y $q_j^{(k)}$ es el j-esimo elemento de $q^{(k)}$
Vamos a denotar x_{ij} al j-esimo elemento de x_i. Como

$$\begin{aligned} Aq^{(k)} &= \phi_k q^{(k+1)} \\ \Rightarrow Aq_j^{(k)} &= \phi_k q_j^{(k+1)} \\ \Rightarrow u^{(k+1)} &= \frac{1}{\phi_k} \frac{\phi_k (q^{(k+1)})_j}{q_j^{(k)}} = \frac{q_j^{(k+1)}}{q_j^{(k)}} \end{aligned}$$

Como

$$q(m) = \phi \lambda_1^{m+1} \left(c_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{m+1} x_i\right), \quad m \in \mathbb{N}$$

En (1)

$$\begin{aligned} u^{(k+1)} &= \frac{\phi \lambda_1^{k+1} \left(c_1 x_{1j} + \sum_{i=2}^{n} c_i \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{k+1} x_{ij}\right)}{\phi \lambda_1^{k} \left(c_1 x_{1j} + \sum_{i=2}^{n} c_i \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{k} x_{ij}\right)} \\ &= \lambda_1 \left[\frac{c_1 x_{1j} + \sum_{i=2}^{n} c_i \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{k+1} x_{ij}}{c_1 x_{1j} + \sum_{i=2}^{n} c_i \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{k} x_{ij}}\right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} u^{k+1} = \lambda_1 \lim_{k\to\infty} \frac{c_1 x_{1j} + \sum_{i=2}^{n} c_i \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{k+1} x_{ij}}{c_1 x_{1j} + \sum_{i=2}^{n} c_i \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{k} x_{ij}} = \lambda_1 \left(\frac{c_1 x_1}{c_1 x_1}\right) = \lambda_1$$

- Caso general

Sea $\wedge(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ y $m_1, m_2, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ mutiplicidades geométricas de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ respectivamente(No necesariamente $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus \ldots \oplus V_k, v_i$ espacio propio de λ_i).
Sin pérdida de la generalidad, sea:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \ldots |\lambda_k|$$

Ahora sea $q^{(0)} \in \left\langle \bigcup_{i=1}^{k} V_i \right\rangle$

$$\Rightarrow \quad q^{(0)} = \sum_{i=1}^{m_1} c_i^{(1)} v_i^{(1)} + \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_r} c_j^{(r)} v_j^{(r)}$$

donde $v_j^{(i)}$: vector j-ésimo del espacio propio v_i. Luego definimos la iteración:

$$\begin{aligned}
q^{(k+1)} &= \frac{1}{\phi_k} A q^{(k)}, \quad \phi_k = ||Aq^{(k)}|| \\
&= \left(\prod_{j=1}^{k} \phi_i^{-1}\right) A^{k+1} q^{(0)}, \quad haciendo: \phi = \left(\prod_{j=1}^{k} \phi_i^{-1}\right) \\
&= \phi A^{k+1} \left(\sum_{i=1}^{m_1} c_i^{(1)} v_i^{(1)} + \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_r} c_j^{(r)} v_j^{(r)} \right) \\
&= \phi \left(\sum_{i=1}^{m_1} c_i^{(1)} \lambda_1^{k+1} v_i^{(1)} + \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_r} c_j^{(r)} \lambda_r^{k+1} v_j^{(r)} \right) \\
&= \phi \lambda_1^{k+1} \left(\sum_{i=1}^{m_1} c_i^{(1)} v_i^{(1)} + \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_r} c_j^{(r)} \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_1}\right)^{k+1} v_j^{(r)} \right) \ldots (**)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} q^{(k+1)} = \lim_{k\to\infty} \left(\prod_{i=1}^{k} \phi_i^{-1}\right) \lambda_1^{k+1} \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{m_1} c_{(i)}^{1} v_i^{(1)} + \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_r} c_j^{(r)} \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_1}\right)^{k+1} v_j^{(r)} \right)$$

$$Haciendo: a = \lim_{k\to\infty} \left(\prod_{i=1}^{k} \phi_i^{-1}\right) \lambda_1^{k+1}, \quad \lim_{k\to\infty} q^{(k+1)} = a \sum_{i=1}^{m_1} c_i^{(1)} v_i^{(1)}$$

Siendo $\sum_{i=1}^{m_1} c_i^{(1)} v_i^{(1)}$ el vector propio asociado a λ_1.

Ahora vamos a construir una sucesión que converja al valor propio λ_1.

$$\mu^{(k+1)} = \frac{1}{\phi_k} \frac{\left(Aq^{(k)}\right)_j}{q_j^{(k)}} = \frac{q_j^{(k+1)}}{q_j^{(k)}}$$

De $(**)$:

$$\mu^{(k+1)} = \frac{\phi \lambda_1^{k+1} \left[\sum_{i=1}^{m_1} c_i^{(1)} v_i^{(1)} + \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_r} c_j^{(r)} \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_1}\right)^{k+1} v_j^{(r)} \right]}{\phi \lambda_1^{k} \left[\sum_{i=1}^{m_1} c_i^{(1)} v_i^{(1)} + \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_r} c_j^{(r)} \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_1}\right)^{r} v_j^{(r)} \right]}$$