Forma Canónica de Jordan

21 de mayo de 2019

1. Forma Canónica de Jordan

1.1. Forma Canónica de Jordan para Operadores Nilpotentes

Definicion 1.1 (Operadores Lineales Nilpotentes) *El operador $T : V \to V$ es nilpotente si $T^p = 0$, para algun $p \in \mathbb{N}$.Además se dice que $k \in \mathbb{N}$, es el indide de nilpotencia de T si:*

$$T^{k-1} \neq 0 \wedge T^k = 0$$

Teorema 1 *Sea $T : V \to V$, V un $\mathbb{C}$ espacio vectorial, $\dim V = n$, T nilpotente de indice q.Luego para $v \in V / T^{q-1}v \neq 0$, tenemos:*

1. *El conjunto $\{T^{q-1}v, T^{q-2}v, \ldots, Tv, v\}$ es LI.*
2. *$S = \left\langle \{T^{q-1}v, T^{q-2}v, \ldots, Tv, v\} \right\rangle$ es invariante por T.*
3. *Existe un subespacio U de V, invariante por T/*

$$V = S \oplus U$$

Prueba

1. $$a_0 v + a_1 Tv + a_2 T^v + \ldots + a_{q-1} T^{q-1} v = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T^{q-1}\left(a_0 v + a_1 Tv + a_2 T^v + \ldots + a_{q-1} T^{q-1} v\right) &= 0 \\ a_0 T^{q-1} v &= 0 \\ a_0 &= 0 \end{aligned}$$

De (1)

$$a_1 Tv + a_2 T^v + \ldots + a_{q-1} T^{q-1} v = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T^{q-2}\left(a_1 Tv + a_2 T^v + \ldots + a_{q-1} T^{q-1} v\right) &= 0 \\ a_1 T^{q-1} v &= 0 \\ a_1 &= 0 \end{aligned}$$

De forma similar , luego tenemos:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{q-1} = 0$$

$$\therefore \{T^{q-1}v, T^{q-2}v, \ldots, Tv, v\}, \quad sonLI$$

2. Sea $u \in S$

$$\Rightarrow u = \sum_{k=0}^{q-1} a_k T^k v$$

$$\Rightarrow Tu = \sum_{k=0}^{q-1} a_k T^{k+1} v = \sum_{k=0}^{q-2} a_k T^{k+1} v \in S$$

$$\therefore T(S) \subset S$$

3. VER

Corolario 1 *Del teorema* (1)

$$\begin{aligned} S &= \left\langle \{T^{q-1}v, T^{q-2}v, \ldots, Tv, v\} \right\rangle \\ &\Rightarrow \dim(S) = q \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} T(S) &= \left\langle \{T^{q-1}v, T^{q-2}v, \ldots, T^2v, Tv\} \right\rangle \\ &\Rightarrow \dim T(S) = q-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^2(S) &= \left\langle \{T^{q-1}v, T^{q-2}v, \ldots, T^3v, T^2v\} \right\rangle \\ &\Rightarrow \dim T^2(S) = q-2 \end{aligned}$$

Inductivamente

$$\begin{aligned} T^r(S) &= \left\langle \{T^{q-1}v, T^{q-2}v, \ldots, T^{r+1}v, T^rv\} \right\rangle \\ &\Rightarrow \dim T^r(S) = q-r \end{aligned}$$

Nota 1 *Como $S = S_1$ es invariante por T, podemos definir el operador T sobre S_1, es decir, $T : S_1 \to S_1$ cuyo indice de nilpotencia es $q_1 = q$. Del teorema* (1)*, $\beta_1 = \{T^{q-1}v, T^{q-2}v, \ldots, Tv, v\}$ es base de S_1. Así*

$$[T]_{\beta_1} = \left[\left[T\left(T^{q_1-1}v\right)\right], \left[T\left(T^{q_1-2}v\right)\right], \left[T\left(T^{q_1-3}v\right)\right], \ldots, \left[T\left(Tv\right)\right], \left[T\left(v\right)\right]\right]$$

$$[T]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = [T_{|S1}]_{\beta_1}$$

Además como $U = U_1$ invariante por T, podemos definir T sobre U_1, $T : U_1 \to U_1$, y volver a aplicar el teorema(1)*, es decir existe S_2 y U_2 subespacios de U_1, invariantes por $T/$*

$$U_1 = S_2 \oplus U_2$$

Repitiendo lo anterior pero con $S = S_2, \exists u \in V / T^{q_2-1}u \neq 0$, donde q_2 es el indice de nilpotencia de $T_{|S} = T : S \to S$, asi:

$$\beta_2 = \left\{T^{q_2-1}u, T^{q_2-2}u, \ldots, Tu, u\right\}$$

$$[T]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = [T_{|S2}]_{\beta_2}$$

Podemos continuar descomponiendo los U_k, por el teorema anterior, hasta obtener:

$$V = S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots \oplus S_k$$

De esto $\beta = \bigcup_{i=1}^{k} \beta_i$ es base de v, donde β_i es base de S_i. Además

$$\begin{bmatrix} \left[T_{|S_1}\right]_{\beta_1} & O & \ldots & O \\ O & \left[T_{|S_2}\right]_{\beta_2} & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \ldots & \left[T_{|S_k}\right]_{\beta_k} \end{bmatrix}$$