Forma Canónica de Jordan

24 de mayo de 2019

1. Forma Canónica de Jordan para Operadores Nilpotentes

Definicion 1.1 (Operadores Lineales Nilpotentes) *El operador $T : V \to V$ es nilpotente si $T^p = 0$, para algún $p \in \mathbb{N}$. Además se dice que $k \in \mathbb{N}$, es el índice de nilpotencia de T si:*

$$T^{k-1} \neq 0 \wedge T^k = 0$$

Teorema 1 *Sea $T : V \to V$, V un $\mathbb{C}$ espacio vectorial, $\dim V = n$, T nilpotente de índice q. Luego para $v \in V / T^{q-1}v \neq 0$, tenemos:*

1. *El conjunto $\{T^{q-1}v, T^{q-2}v, \ldots, Tv, v\}$ es LI.*
2. *$S = \left\langle \{T^{q-1}v, T^{q-2}v, \ldots, Tv, v\} \right\rangle$ es invariante por T.*
3. *Existe un subespacio U de V, invariante por T/*

$$V = S \oplus U$$

Prueba

1.
$$a_0 v + a_1 Tv + a_2 T^v + \ldots + a_{q-1}T^{q-1}v = 0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T^{q-1}\left(a_0 v + a_1 Tv + a_2 T^v + \ldots + a_{q-1}T^{q-1}v\right) &= 0 \\ a_0 T^{q-1}v &= 0 \\ a_0 &= 0 \end{aligned}$$

De (1)
$$a_1 Tv + a_2 T^v + \ldots + a_{q-1}T^{q-1}v = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T^{q-2}\left(a_1 Tv + a_2 T^v + \ldots + a_{q-1}T^{q-1}v\right) &= 0 \\ a_1 T^{q-1}v &= 0 \\ a_1 &= 0 \end{aligned}$$

De forma similar tenemos:
$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{q-1} = 0$$
$$\therefore \{T^{q-1}v, T^{q-2}v, \ldots, Tv, v\}, \quad \textit{son LI}$$

2. Sea $u \in S$

$$\Rightarrow u = \sum_{k=0}^{q-1} a_k T^k v$$
$$\Rightarrow Tu = \sum_{k=0}^{q-1} a_k T^{k+1} v = \sum_{k=0}^{q-2} a_k T^{k+1} v \in S$$
$$\therefore T(S) \subset S$$

3. VER

Corolario 1 *Del teorema* (1)

$$\begin{aligned} S &= \left\langle \{T^{q-1}v, T^{q-2}v, \ldots, Tv, v\} \right\rangle \\ &\Rightarrow \dim(S) = q \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} T(S) &= \left\langle \{T^{q-1}v, T^{q-2}v, \ldots, T^2v, Tv\} \right\rangle \\ &\Rightarrow \dim T(S) = q-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^2(S) &= \left\langle \{T^{q-1}v, T^{q-2}v, \ldots, T^3v, T^2v\} \right\rangle \\ &\Rightarrow \dim T^2(S) = q-2 \end{aligned}$$

Inductivamente

$$\begin{aligned} T^r(S) &= \left\langle \{T^{q-1}v, T^{q-2}v, \ldots, T^{r+1}v, T^rv\} \right\rangle \\ &\Rightarrow \dim T^r(S) = q-r \end{aligned}$$

Nota 1 *Como $S = S_1$ es invariante por T, podemos definir el operador T sobre S_1, es decir, $T : S_1 \to S_1$ cuyo indice de nilpotencia es $q_1 = q$. Del teorema* (1)*, $\beta_1 = \{T^{q-1}v, T^{q-2}v, \ldots, Tv, v\}$ es base de S_1. Así*

$$[T]_{\beta_1} = \left[\left[T\left(T^{q_1-1}v\right)\right], \left[T\left(T^{q_1-2}v\right)\right], \left[T\left(T^{q_1-3}v\right)\right], \ldots, \left[T\left(Tv\right)\right], \left[T\left(v\right)\right] \right]$$

$$[T]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = [T_{|S1}]_{\beta_1}$$

Además como $U = U_1$ invariante por T, podemos definir T sobre U_1, $T : U_1 \to U_1$, y volver a aplicar el teorema(1)*, es decir existe S_2 y U_2 subespacios de U_1, invariantes por $T/$*

$$U_1 = S_2 \oplus U_2$$

Repitiendo lo anterior pero con $S = S_2, \exists u \in V / T^{q_2-1}u \neq 0$, donde q_2 es el indice de nilpotencia de $T_{|S} = T : S \to S$, asi:

$$\beta_2 = \left\{T^{q_2-1}u, T^{q_2-2}u, \ldots, Tu, u\right\}$$

$$[T]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = [T_{|S2}]_{\beta_2}$$

Podemos continuar descomponiendo los U_k, por el teorema anterior, hasta obtener:

$$V = S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots \oplus S_k$$

De esto $\beta = \bigcup_{i=1}^{k} \beta_i$ es base de V, donde β_i es base de S_i. Además

$$\begin{bmatrix} \left[T_{|S_1}\right]_{\beta_1} & O & \ldots & O \\ O & \left[T_{|S_2}\right]_{\beta_2} & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \ldots & \left[T_{|S_k}\right]_{\beta_k} \end{bmatrix}$$

Note que el bloque $\left[T_{|S_k}\right]_{\beta_k}$ es más grande (o igual) que el bloque $\left[T_{|S_m}\right]_{\beta_m}$, para $k > m$, pues $q_k \geq q_m$.

Teorema 2 (Estructura de la matriz de un Operador Lineal) *Sea $T : V \to V$, $dimV = n$, un operador lineal nilpotente de índice q, entonces:*

1. $\exists q_1 = q, q_2, q_3, \ldots, q_r \in \mathbb{N} \diagup \quad q_1 \geq q_2 \geq q_3 \geq \ldots \geq q_r$
2. *HERE SEE, WHAT HAPPEN WITH ALIGN ENVIROMENT*
3. $$T^{q_1}v_1 = T^{q_2}v_2 = \ldots = T^{q_r}v_r = 0$$

Ejemplo 1 *Hallar la forma canónica de Jordan de la matriz nilpotente.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución
Sea $V = \mathbb{R}^{4\times1}$, definiendo $T : V \to V$ como:

$$\begin{aligned} T : V &\to V \\ X &\mapsto TX = AX \end{aligned}$$

Luego $[T]_\beta = A$, $\quad \beta$ base canónica de $\mathbb{R}^{4\times1}$ Hallando el indice de nilpotencia de T(que es igual a hallar el indice de nilpotencia de A)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = 0$$

Por lo tanto el indice de nilpotencia es $q_1 = q = 3$. Hallando $v_1 \in \mathbb{R}^{4\times1} \diagup T^{q_1-1}v_1 \neq 0$

Tomando $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, tenemos $T^{q_1-1}v_1 = T^2v_1 = A^2v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0$

Asi

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\langle \{T^2v_1, Tv_1, v_1\} \right\rangle \\ &= \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle \end{aligned}$$

Luego por *teorema*(1), $\exists U_1 \subset V = \mathbb{R}^{4\times1}$ subspacio invariante por $T \diagup$

$$\mathbb{R}^{4\times1} = V = S_1 \oplus U_1$$

Por lo que $\dim U_1 = 1$, asi $S_2 = U_1$, con índice de nilpotencia $q_2 = 1$.
Hallando $v_2 \in V \diagup T^{q2}v_2 = 0$

Resolviendo $Av = 0$, tenemos $v = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tomando $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, pues $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in S_1$

Finalmente $\beta = \left\{T^2v_1, Tv_1, v_1, v_2\right\}$ es una base para V y

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Forma Canónica de Jordan (general)

Teorema 3 *sea $T : V \to V$ un operador lineal,* $\dim V = n$. *Entonces $\exists\, U, W \subset V$ subspacios invariantes por T/*

1. $V = U \oplus W$
2. $T_{|U} : U \to U$ *es nilpotente y* $T_{|W} : W \to W$ *es inversible.*

Demostración

- Casos triviales
  - T inversible, simplemente tomamos $W = V$ y $U = \emptyset$.
  - T nilpotente, tomamos $W = 0$ y $U = V$.
- Si T no es inversible.

$$\Rightarrow N(T) \neq 0 \Rightarrow N(T^p) \neq 0, \quad p \in \mathbb{N}$$

Por otro lado se cumple:

$$\begin{aligned} &N(I) \subseteq N(T) \subseteq N(T^2) \subseteq \ldots \subseteq N(T^q) \subseteq N(T^{q+1}) \subseteq \ldots \subseteq V \\ &V \supseteq Im(I) \supseteq Im(T) \supseteq Im(T^2) \supseteq \ldots \supseteq Im(T^q) \supseteq Im(T^{q+1}) \supseteq \ldots \end{aligned}$$

Sea $q \in \mathbb{N}$ el menor que cumple $N(T^q) = N(T^{q+1})$

Sea afirma que

$$N(T^q) = N(T^{q+k}), \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Primero demostrando

$$N(T^{q+1}) = N(T^{q+2})$$

($\subseteq$) Directo

($\supseteq$) Sea $u \in N(T^{q+2})$

$$\begin{aligned} T^{q+2}u &= 0 \\ T^{q+1}(Tu) &= 0 \\ Tu \in N(T^{q+1}) &= N(T^q) \\ T^q(Tu) &= 0 \\ T^{q+1}u &= 0 \\ &\Rightarrow u \in N(T^{q+1}) \end{aligned}$$

Probando (2) por inducción matemática.

- $k = 1$ Cumple
- Suponiendo valido para k$\left(N\left(T^q\right) = N\left(T^{q+k}\right)\right)$
- Para $k+1$, debemos probar $N\left(T^q\right) = N\left(T^{q+k+1}\right)$

  ($\subseteq$) Directo

  ($\supseteq$) Sea $u \in N\left(T^{q+k+1}\right)$

$$\begin{aligned} T^{q+k+1}u &= 0 \\ T^{q+k}(Tu) &= 0 \\ Tu \in N(T^{q+k}) &= N(T^q) \\ T^q(Tu) &= T^{q+1}u = 0 \\ u \in N(T^{q+1}) &= N(T^q) \end{aligned}$$

Ahora tomamos $U = N(T^q) \wedge W = Im(T^q) = T^qV$

- U invariante por T

$$T(U) \subseteq N(T^{q+1}) = N(T^q) = U$$

- W invariante por T Sea $u \in W = T^qV$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists v \in V / T^q v = u \\ &\Rightarrow Tu = T(T^q v) = T^q(Tu) \in T^qV = W \end{aligned}$$

$$\therefore T(W) \subseteq W$$

Afirmamos que la suma $U + W$ es suma directa, pues si $v \in U \cap W$, entonces:

$$\begin{aligned} \Rightarrow v \in N(T^q) \quad &\wedge \quad v \in T^qV = W \\ \Rightarrow T^q v = 0 \quad &\wedge \quad \exists w \in V / v = T^q w \\ T^{2q} w &= T^q v = 0 \\ \Rightarrow w \in N(T^{2q}) &= N(T^q) \\ \Rightarrow T^q w &= 0 = v \end{aligned}$$

Por el teorema de la dimensión en $T^q : V \to V$, tenemos:

$$\dim V = \dim T^qV + \dim N(T^q) = \dim(T^qV \oplus N(T^q)) = \dim(U \oplus W)$$

Por lo que $V = T^qV \oplus N(T^q) = U \oplus W$.

Finalmente probemos que $T_{|U} : U \to U$ es nilpotente y $T_{|W} : W \to W$ es inverśible.

- $T_{|U} : U \to U$ nilpotente. Como $q \in \mathbb{N}$, es el mínimo tal que $N(T^q) = N(T^{q+1})$
  Entonces $N(T^{q-1}) \neq 0$, pues si $N(T^{q-1}) = 0$ implicaria que $N(T^q) = 0$. Para probar esto supongamos que $N(T^q) \neq 0$.

$$\exists v \in N(T^q), v \neq 0 / \quad T^q v = 0$$

$$\begin{aligned} T^{q-1}(Tv) &= 0 \\ Tv \in N(T^{q-1}) &= \{0\} \\ Tv &= 0 \\ &v \in N(T) \subseteq N(T^{q-1}) \\ &v \in N(T^{q-1}) \end{aligned}$$

  Contradice que $N(T^{q-1}) = 0$, por lo que $N(T^q) = 0$

$$\Rightarrow N(T^{q-1}) = N(T^q) \tag{3}$$

  Pero (3), contradice la minimalidad de $q \in \mathbb{N}$

$$\therefore N(T^{q-1}) \neq 0$$

  Así tenemos $T^q v = 0, \quad \forall v \in U \quad \wedge \quad \exists u \in U / \quad T^{q-1} u \neq 0$

$$\Rightarrow T_{|U}^{q-1} \neq 0 \quad \wedge \quad T_U^q = 0$$

  $\therefore T_{|U}$ es nilpotente de indice q.

- $T_{|W} : W \to W$ inversible. Sea $v \in N(T_{|W}) \subseteq W = T^qV$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow Tv = 0 \\ &pero\ v \in T^q(V) \\ &\Rightarrow \exists u \in V / \quad T^q u = v \\ &T^{q+1} u = 0 \\ &\Rightarrow u \in N(T^{q+1}) = N(T^q) \\ &\Rightarrow T^q u = 0 = v \end{aligned}$$

  Por lo que $N(T_{|W}) = 0$, asi $T_{|W}$ es inversible.

Teorema 4 (Unicidad de la decomposicion de T) *La descompocisión de T es una nilpotente y en una inversible es única.*

Prueba(pendiente)

Teorema 5 (Forma Canónica de Jordan) *Sea V un $\mathbb{C}$ espacio vectorial,* $\dim V = n$*,* $T : V \to V$ *un operador lineal y* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \wedge(T)$ *y* $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *las multiplicidades algebraicas de los valores propios(respectivamenete), entonces:*

Existen subespacios $V_1, V_2, \ldots, v_k$ *invariantes por* T $(T(V_i) \subseteq V_i)$ /

1. $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$
2. $\dim V_i n_i, \quad i = 1 - k$
3. *El operador* $T - \lambda_i I : V_i \to V_i$ *es nilpotenete,* $i = 1 - k$.