



[Cod: CM-334 Curso: Análisis Numérico I ]

[Tema: Condicionamiento. Factorización LU]

[Prof: Luis Roca G.]

## Laboratorio N° 2

1. Ejecute el siguiente código para calcular el número de condición de una matriz:

```
import numpy as np
### numero de condicion #####
from numpy import linalg as LA
a = np.array([[1, 0, -1], [0, 1, 0], [1, 0, 1]])
LA.cond(a)
LA.cond(a, 'fro')
LA.cond(a, np.inf)
LA.cond(a, -np.inf)
LA.cond(a, 1)
LA.cond(a, -1)
LA.cond(a, 2)
```

2. Considere el polinomio de Wilkinson  $w(x) = \prod_{r=1}^{20} (x-r) = x^{20} - 210x^{19} + \dots + 20!$  y lleve a cabo el siguiente experimento numérico:

```
w_roots=np.arange(1,21)
W=np.poly(w_roots)
perturb=np.zeros_like(W)
perturb[1]=1e-7
W_perturb = W + perturb
perturbed_roots=np.roots(W_perturb)
w_roots = np.sort(w_roots)
perturbed_roots = np.sort(perturbed_roots)
print((LA.norm(perturbed_roots-w_roots)/
      LA.norm(perturb))
```

Grafique las raíces de  $w$  y las raíces perturbadas. Finalmente mejore el cálculo de los coeficientes del polinomio de Wilkinson usando multiplicación anidada.

3. Cree un programa que realice el siguiente experimento: Perturbe  $w(x)$  reemplazando el coeficiente  $a_i$  con  $a_i * r_i$ , donde  $r_i$  es una variable aleatoria de distribución normal centrada en 1 y varianza  $e^{-10}$ . Realice 100 experimentos y grafique las raíces perturbadas y exactas. Por ejemplo para crear una matriz 3 de media nula y desv. estandar 0.1 usamos:

```
mu, sigma = 0, 0.1
s = np.random.normal(mu, sigma, (3,2))
```

4. Explore la cancelación catastrófica  $a - b$ , cuando  $a \approx b$

```
print(np.sqrt(1e20+1)-np.sqrt(1e20))
print(1/(np.sqrt(1e20+1)+np.sqrt(1e20)))
```

5. Analizar si los cálculos que involucran las siguientes funciones están bien condicionados:

- a)  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto x/2.$
- b)  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}.$
- c)  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} : (x_1, x_2) \mapsto x_1 - x_2.$

6. Sean  $x_1, \dots, x_m$ , puntos equiespaciados de  $[-1, 1]$ . Considere la matriz de Vandermonde

$m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & |x| & |x|^2 & |x|^3 & \dots & |x|^{n-1} \end{bmatrix}$$

grafique  $\|A\|_\infty$  en escala semilogaritmica, para  $n = 1, 2, \dots, 30$ ,  $m = 2n - 1$

7. Considere  $A$  una matriz aleatoria  $m \times m$  cuyas entradas son muestras de la distribución normal con media cero y desviación estándar  $m^{-1/2}$ .

a) Grafique  $\|A\|_2$  para  $m = 8, 16, 32, 64, \dots$ , ¿se observa algún valor límite?.

b) Repita el experimento para matrices de tipo triangular superior.

8. Calcule y grafique las sucesiones:

a)  $r_0 = 1, r_n = \frac{1}{3}r_{n-1}$

b)  $p_0 = 1, p_1 = \frac{1}{3}, p_n = \frac{4}{3}p_{n-1} - \frac{1}{3}p_{n-2}$

c)  $q_0 = 1, q_1 = \frac{1}{3}, q_n = \frac{10}{3}q_{n-1} - q_{n-2}$

9. Investigue la propagación de errores de los siguientes esquemas que aproximan  $x_n = (1/3^n)_{n \geq 0}$ :

a)  $r_0 = 0.99996, r_n = \frac{1}{3}r_{n-1}$

b)  $p_0 = 1, p_1 = 0.33332, p_n = \frac{4}{3}p_{n-1} - \frac{1}{3}p_{n-2}$

c)  $q_0 = 1, q_1 = 0.33332, q_n = \frac{10}{3}q_{n-1} - q_{n-2}$

10. Investigue la propagación de errores de los siguientes esquemas que aproximan  $x_n = (1/2^n)_{n \geq 0}$ :

a)  $r_0 = 0.994, r_n = \frac{1}{2}r_{n-1}$

b)  $p_0 = 1, p_1 = 0.497, p_n = \frac{3}{2}p_{n-1} - \frac{1}{2}p_{n-2}$

c)  $q_0 = 1, q_1 = 0.497, q_n = \frac{5}{2}q_{n-1} - q_{n-2}$

11. Las integrales exponenciales son las funciones  $E_n$ ,

$$E_n(x) = \int_1^\infty (e^{xt}t^n)^{-1} dt \quad (n \geq 0, x > 0)$$

y satisface la relación  $nE_{n+1}(x) = e^{-x} - xE_n(x)$ . Analice la estabilidad de este esquema.

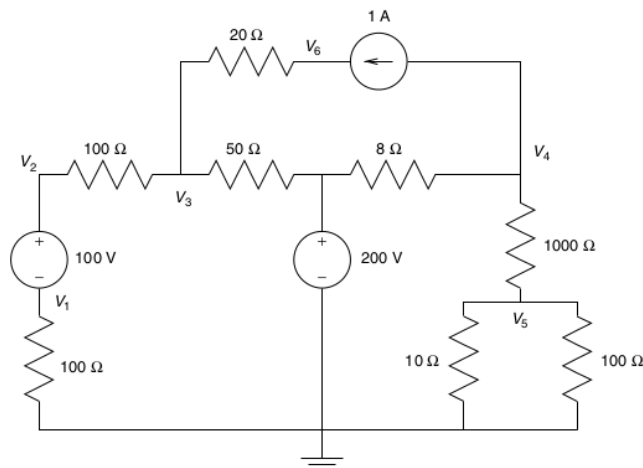
12. Programe el método de factorización LU y aplíquelo la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

13. Programe el método de eliminación gaussiana y aplíquelo para obtener la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1/2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1/2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

14. Considere el circuito DC mostrado en la figura, escriba las ecuaciones para los voltaje sen los nodos  $V_1, V_2, \dots, V_6$ . Programe la eliminación gaussiana con factorización LU y sustitución para resolver el sistema, es decir si  $A = LU$  entonces resolver  $Ax = b$  es equivalente a resolver  $Ly = b, Ux = y$



---

\*Hecho en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X