Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática Ciclo 2018-2

[Cod: CM-334 Curso: Análisis Numérico I]
[Tema: Sistema lineal de ecuaciones. Métodos iterativos.]
[Prof: Luis Roca.]

Laboratorio N^o 5

---

1. Demuestre que si A es diagonalmente dominante y si Q se elige igual que en el método de Jacobi entonces
$$\rho(I - Q^{-1}A) < 1$$

2. Demuestre que si A tiene la propiedad (fila unitaria diagonalmente dominante)
$$a_{ii} = 1 > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (1 \leq i \leq n)$$
entonces el sistema $Ax = b$ se resuelve (en el limite) mediante la siguiente iteración:

   for $k = 1, 2, 3 \ldots$
   for $i = 1, 2, 3 \ldots n$ do
   $x_i \leftarrow x_i + b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$
   end
   end

3. Demuestre que $\rho(A) < 1$ si y solo si $\lim_{k\to\infty} A^k x = 0$ para todo x.

4. Usando Q igual que el método de Gauss-Seidel, demuestre que si A es diagonalmente dominante, entonces $\|I - Q^{-1}A\|_\infty < 1$

5. Sean A una matriz inversible y f una función de la forma $f(z) = \sum_{j=-m}^{m} c_j z^j$. Demuestre que si λ es un valor propio de A, entonces $f(\lambda)$ es un valor propio de $f(A)$.

6. Demuestre que si A es no singular entonces AA^* es definida positiva.

7. Demuestre que si A es definida positiva entonces sus valores propios son positivos.

8. Demuestre que también lo son A^2, A^3, $\ldots$ así como también A^{-1}, A^{-2}, $\ldots$.

9. Demuestre que si $\rho(A) < 1$ entonces $I - A$ es invertible y $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$

10. Programe el método de Gauss-Seidel y pruebelo con los siguientes ejemplos:

$$a)\begin{cases} 3x+y+z=5 \\ x+3y-z=3 \\ 3x+y-5z=-1 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 3x+y+z=5 \\ 3x+y-5z=-1 \\ x+3y-z=1 \end{cases}$$

11. Caracterice a la familia de todas las matrices A no singulares de $n \times n$ para las cuales un paso del algoritmo de Gauss-Seidel resuelve el sistema $Ax = b$, suponiendo que se inicio el proceso con $x = 0$.

12. Use la iteración de Gauss-Seidel en un problema de para el cual

$$A = \begin{bmatrix} 0.96326 & 0.81321 \\ 0.81321 & 0.68654 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0.88824 \\ 0.74988 \end{bmatrix}$$

con vector inicial $(0.33116, 0.70000)^T$

13. Resuelva el problema

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

usando la aceleración de Chebyshev del método de Jacobi.

14. Programe y ponga a prueba el método del gradiente conjugado con la matriz de Hilbert $a_{ij} = (1+i+j)^{-1}$, y $b_i = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$.

15. Resuelva el siguiente sistema a partir de $x = 0$ usando $a)$ Jacobi $b)$ Gauss-Seidel $c)$ Gradiente conjugado

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 & -1 \\ 4 & 3 & -5 & -1 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -27 \\ 14 \\ -17 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Uni, 8 de noviembre de 2018*

*Hecho en LaTeX