Гравитационная задача N тел

- Математическая постановка задачи

$$\frac{dr_i}{dt} = v_i \quad ,$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{j \neq i}^{N} G m_j \frac{r_j - r_i}{\left| r_j - r_i \right|^3} \quad ,$$

где m_j, r_i, v_i— масса, радиус-вектор и скорость i-го тела соответственно (i изменяется от 1 до N), G — гравитационная постоянная. Массы тел, а также положения и скорости в начальный момент времени считаются известными. Необходимо найти положения и скорости всех частиц в произвольный момент времени.

Гравитационная задача N тел

- Метод численного решения. Алгоритм Верле

$\upsilon_{n+1} \equiv \upsilon(t_n + \Delta t)$ и $x_{n+1} \equiv x(t_n + \Delta t)$, тогда

$$\upsilon_{n+1} = \upsilon_n + a_n \Delta t + O[(\Delta t)^2]$$

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t + \frac{1}{2} a_n (\Delta t)^2 + O[(\Delta t)^3]$$

$$x_{n-1} = x_n - v_n \Delta t + \frac{1}{2} a_n (\Delta t)$$

$$x_{n+1} + x_{n-1} = 2x_n + a_n (\Delta t) + O[(\Delta t)]$$

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + a_n (\Delta t)$$

Гравитационная задача N тел

- Метод численного решения. Алгоритм Верле

Аналогично вычитание разложений в ряд Тейлора для x_{n+1} и x_n дает

$$v_n = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\Delta t}$$

При этом связанная с *алгоритмом Верле* глобальная погрешность имеет третий порядок для координаты и второй порядок для скорости.

Однако скорость не участвует в интегрировании уравнений движения.

Гравитационная задача N тел

- Метод численного решения. Алгоритм Верле

Менее известной, но математически эквивалентной версией алгоритма Верле является схема

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t + \frac{1}{2} a_n (\Delta t)$$

и

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)\Delta t$$

Данная схема называемая *скоростной* формой алгоритма Верле, является самостартующей и не приводит к накоплению погрешности округления.