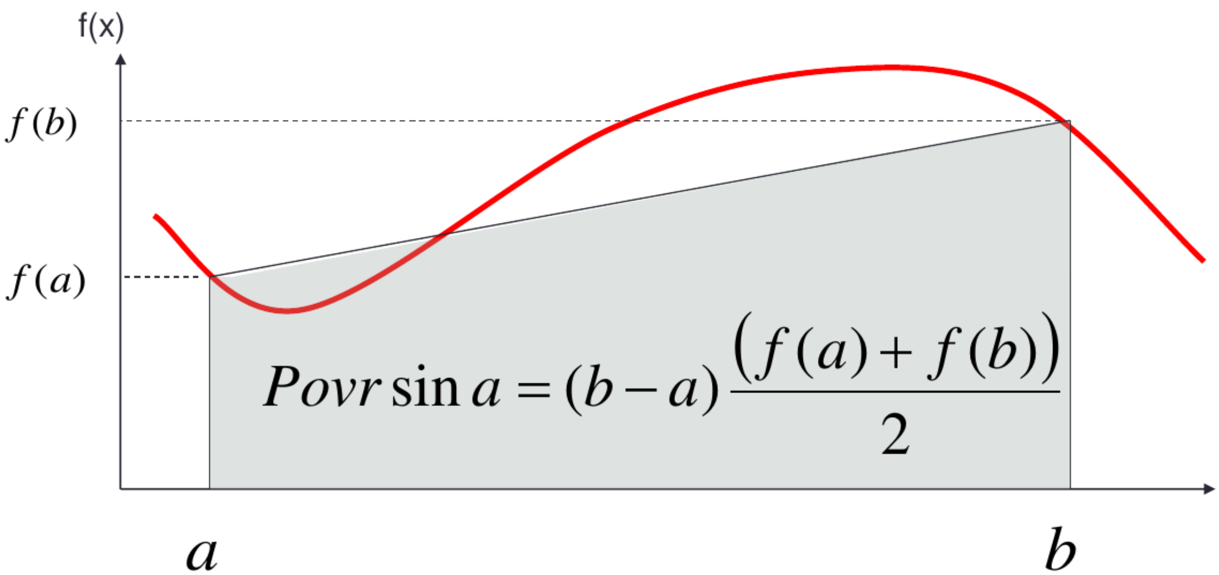
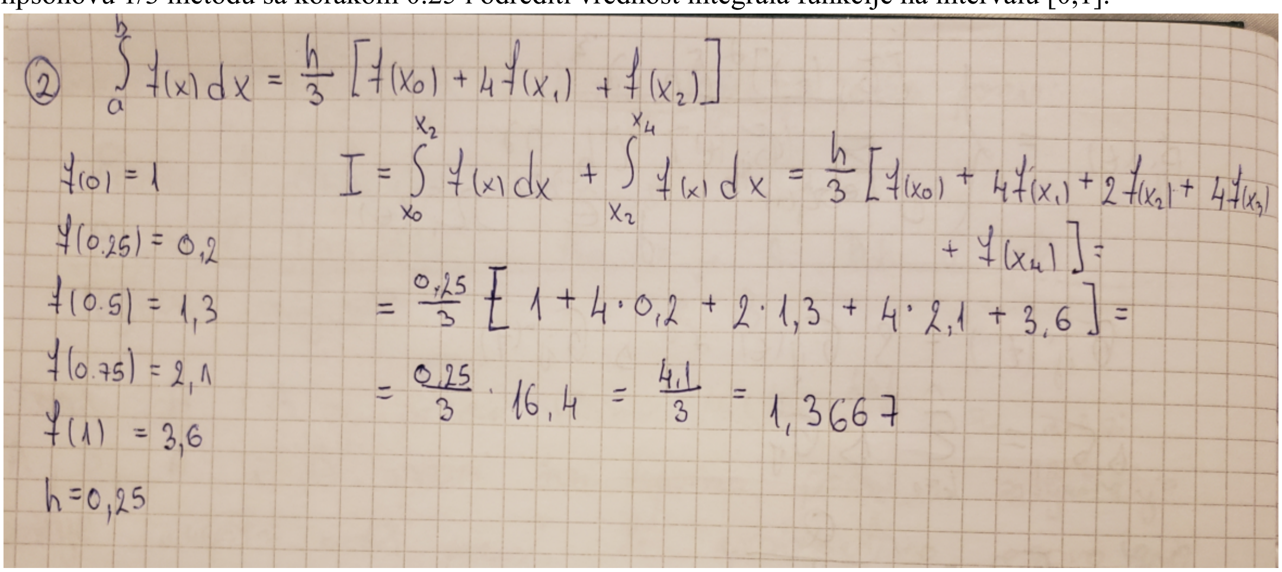
Priprema za 2. kolokvijum

Teorijski zadaci

1) Nacrtajte i objasnite geometrijsku interpretaciju Trapezne metode.
Geometrijska interpretacija:



2) Funkcija je zadata skupom tačaka (0,1), (0.25, 0.2), (0.5, 1.3), (0.75, 2.1) i (1, 3.6). Primenite kompozitnu Simpsonovu 1/3 metodu sa korakom 0.25 i odrediti vrednost integrala funkcije na intervalu [0,1].



(2) $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$

$f(0) = 1$

$f(0{,}25) = 0{,}2$

$f(0.5) = 1{,}3$

$f(0.75) = 2{,}1$

$f(1) = 3{,}6$

$h = 0{,}25$

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right] =$$

$$= \frac{0{,}25}{3}\left[1 + 4\cdot 0{,}2 + 2\cdot 1{,}3 + 4\cdot 2{,}1 + 3{,}6\right] =$$

$$= \frac{0{,}25}{3}\cdot 16{,}4 = \frac{4{,}1}{3} = 1{,}3667$$

3) Navedite formulu, geometrijsku interpretaciju i objasnite Ojlerovu metodu.

Kod Ojlerovog metoda koristimo nagib funkcije dat kroz diferencijalnu jednačinu da bi izračunali sledeću vrednost funkcije. Sledeća vrednost udaljena je od prethodne za mali korak h.

Formula:

Za datu ODJ prvog reda : $\dot{y}(x) = f(x,y)$

sa pocetnim uslovom : $y_0 = y(x_0)$

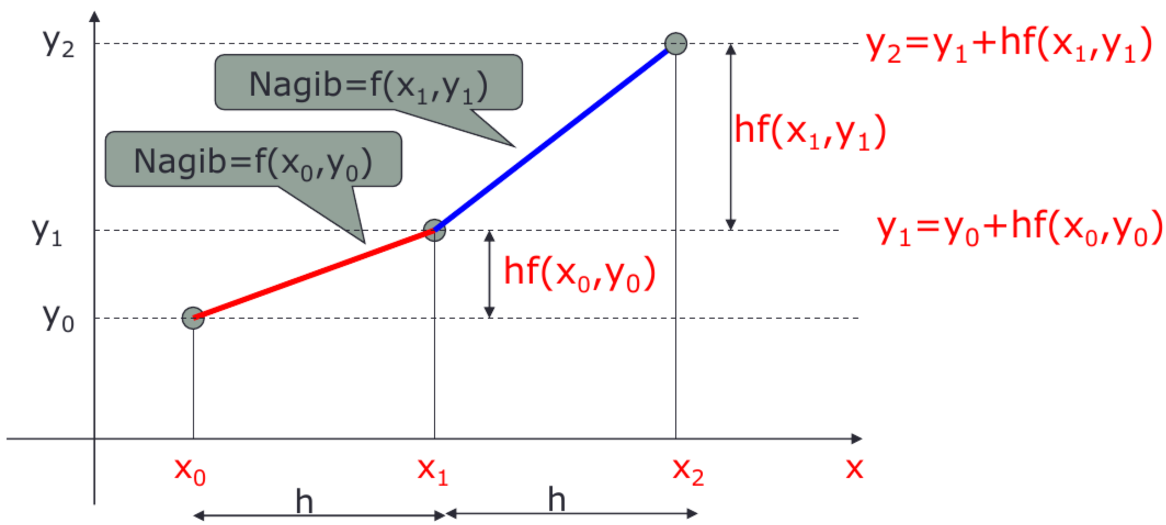
Odrediti : $y_i = y(x_0 + ih)$ $za\ i = 1,2,\ldots$

Ojlerov metod :

$$y_0 = y(x_0)$$

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i) \qquad za\ i = 1,2,\ldots$$

Geometrijska interpretacija:



4) Objasnite ideju Runge-Kutta metoda.

Motivacija za razvoj Runge-Kutta metoda je postizanje tačnosti metoda višeg reda bez potrebe oređivanja izvoda višeg reda. Ideja je da se fromula za rešavanje zada pomoću nepoznatih koeficijenata. Koeficijenti se onda određuju tako da odgovaraju članovima Tejlorovog reda – bez potrebe za računanjem izvoda.

5) Dat je sledeći problem. Rešite ga primenom bar dve iteracije metoda drugog reda zasnovanom na Tejlorovom razvoju. (Napomena: drugi izvod treba da odredite analitički).

$$\frac{dx}{dt} + 3x^3 - t = 1 \quad x(0) = 1 \quad h = 0.3$$

(5) $\frac{dx}{dt} + 3x^3 - t = 1$

$x(0) = 1$

$h = 0.3$

$$\frac{dx}{dt} = 1 - 3x^3 + t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 - 9x^2\frac{dx}{dt} + 1 = 1 - 9x^2\left(1 - 3x^3 + t\right)$$

$$x_{i+1} = x_i + h\frac{dx}{dt} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$x_{i+1} = x_i + h\left(1 - 3x_i^3 + t_i\right) + \frac{h^2}{2}\left(1 - 9x_i^2 + 27x_i^5 - 9x_i^2 t_i\right)$$

Korak 1:

$t_1 = t_0 + h = 0.3$

$x_1 = 1 + 0.3\left(1 - 3 + 0\right) + \frac{0.09}{2}\left(1 - 9 + 27 - \cancel{90}\right)$

$= 1 - 0.6 + 0.045 \cdot 19$

$= 1.255$

Korak 2:

$x_2 = 1.255 + 0.3 \cdot \left(1 - 3 \cdot (1.255)^3 + 0.3\right) + \frac{0.09}{2}\left(1 - 9 \cdot (1.255)^2 + 27(1.255)^5 - 9(1.255)^2 \cdot 0.3\right)$

6) Izvštiti konverziju date diferencijalne jednačine drugog reda u sistem jednačina prvog reda:

$$\ddot{y} - 4y + 4x = 0$$
$$y(0) = 0,\ \ y(1) = 2$$

(6) $\ddot{y} - 4y + 4x = 0$

$y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 2$

$y_1 = y$

$y_2 = \dot{y}$

$\dot{y}_1 = y_2$

$\dot{y}_2 - 4y_1 + 4x = 0 \Rightarrow \dot{y}_2 = 4y_1 - 4x$

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ 4y_1 - 4x \end{bmatrix} \qquad Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ ? \end{bmatrix}$$

7) Objasnite metod pogađanja (shooting) za rešavanje PGU

PGU konvertujemo u sistem ODJ tj. u PPV. U dobijenom sistemu nedostaju neki od počenih uslova. Pogađamo vrednosti za početne uslove koje nedostaju. Rešavamo problem početne vrednosti. Proveravamo da li su granični uslovi zadovoljeni, ako nisu pogađamo ponovo. Koristimo interpolaciju da poboljšamo pogotke.