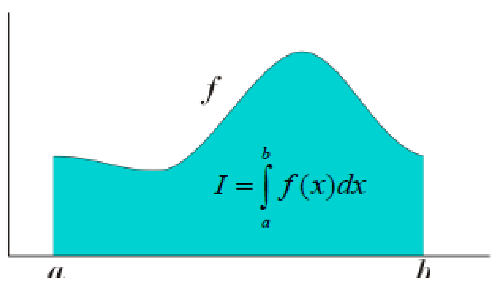
## NUMERICKA INTEGRACIJA

**Izračunavnje odredjenih integrala deo je rešenja mnogih problema u industriji kao i u nauci. Ako je funkcija f(x) komplikovana analitčko rešenje nije uvek moguće.**

**// pribjegava se onda numerickim metodama za izracunavanje odredjenih integrala takvih komplikovanih funkcija.**

Činjenica na koju se oslanjaju numeričke metode za integraciju je to da odredjeni integral predstavlja površinu ispod funkcije f(x) na intevalu [a, b].




**Donja I gornja suma:**

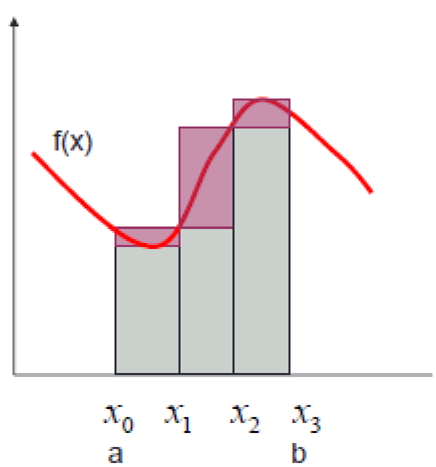
Interval [a, b] delimo na podintervale.

$$\{a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n = b\}$$

$$m_i = \min\{f(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\}$$
$$M_i = \max\{f(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\}$$

*Donja suma* $L(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$

*Gornja suma* $U(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$



Donja suma $L(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i)$

Gornja suma $U(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i)$

Procena integrala $=\dfrac{L+U}{2}$

// procjena integrala preko donje I gornje sume svodi sa na aritmeticku sredinu te dvije vrijednosti za datu funkciju.

**Procene integrala pomoću donje i gornje sume mogu se koristiti samo za MONOTONE funkcije (uvek rastu ili uvek opadaju). Za funkcije koje nisu monotone, odredjivanje minimuma i maksimuma nije uvek jednostavno, pa je tada prikladnije koristiti druge metode za integraciju.**

**// dakle nije moguce uvijek odrediti min I Max funkcija ukoliku je njihov analiticki oblik slozeniji I ukoliko te funkcije nisu monotone.**

# Njutn-Kotesove metode

Kod Njutn-Kotesovih metoda funkciju čiji se integral izračunava aproksimiramo **polinomom stepena n**. Izračunavanje integrala polinoma je jednostavnije.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \left(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n\right)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx a_0(b-a) + a_1\frac{(b^2-a^2)}{2} + \ldots + a_n\frac{(b^{n+1}-a^{n+1})}{n+1}$$

•Ako koristimo polinom **prvog** stepena imamo: **Metodu Trapeza**.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b (a_0 + a_1x)dx$$

•Ako koristimo polinom **drugog** stepena imamo: **Simpsonovu 1/3 metodu**.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right)dx$$

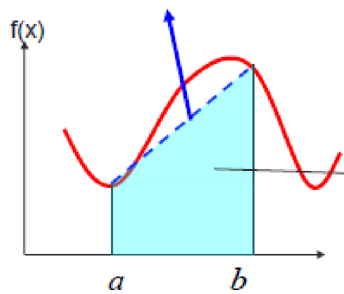
•Ako koristimo polinom **trećeg** stepena imamo: **Simpsonovu 3/8 metodu**.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\right)dx$$

# Metoda Trapeza

• Funkciju f aproksimiramo sa pravom na intervalu [a,b].

$$f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$




$$I=\int_a^b f(x)dx$$

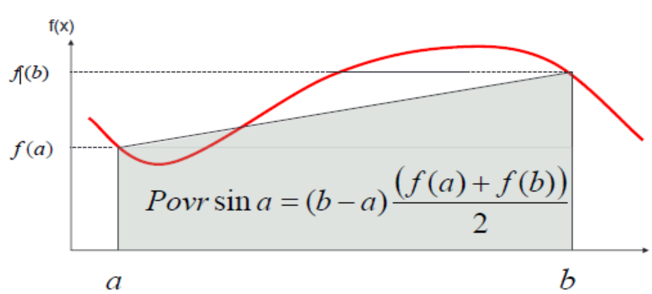
$$I\approx\int_a^b\left(f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)dx$$

$$=\left(f(a)-a\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)x\Big|_a^b$$

$$+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b$$

$$=\boxed{(b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2}}$$

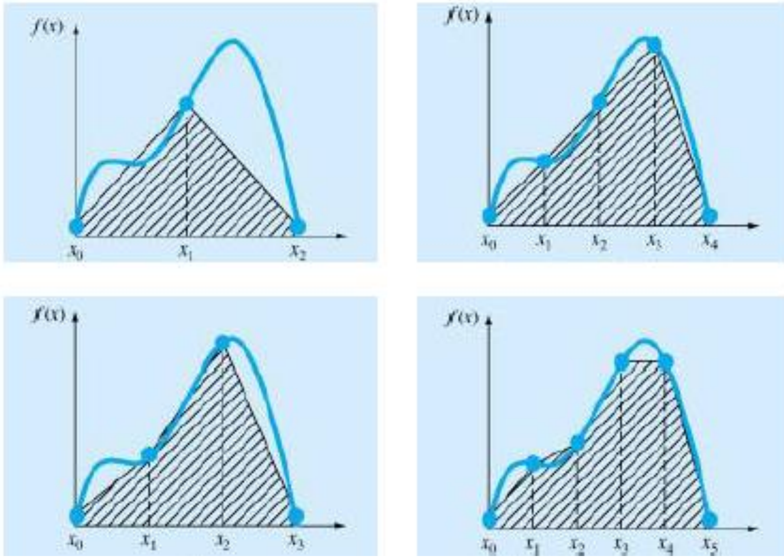
**Metoda trapeza Geometrijska interpretacija**




**Kompozitne metode**

Velika greška kod prethodnog primera ilustruje problem sa metodom trapeza primenjenom na jedan interval. Veća tačnost može se postići upotrebom kompozitnih metoda. Suština kompozitnih metoda je deljenje intervala [a,b] na više podintervala i onda primena metode Trapeza na svaki od podintervala.

- Kompozitna metoda trapeza:



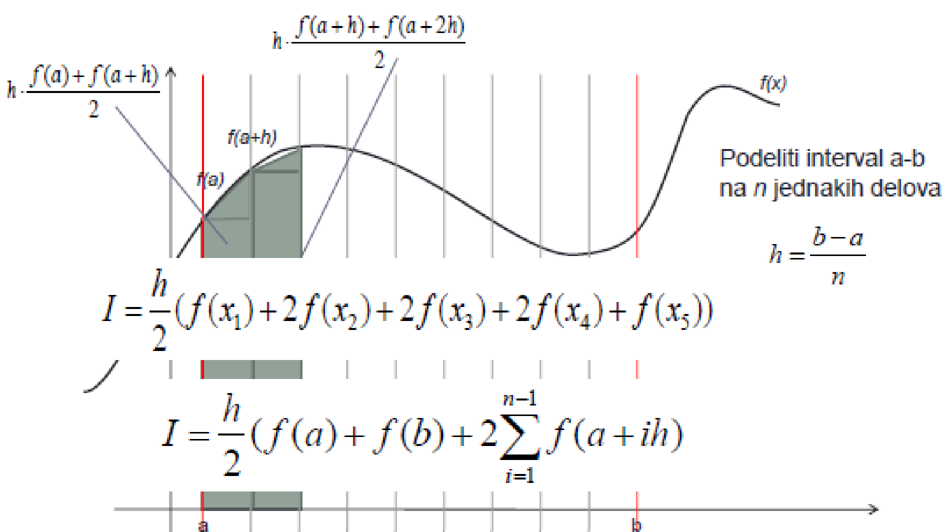

$$h = \frac{b-a}{n} \qquad a = x_0 \quad b = x_n$$

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots\cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

Svaki od integrala izračunavamo pomoću trapezne metode, i tako dobijamo:

$$I = h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$$

$$\boxed{I = \frac{h}{2}\left[ f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]}$$



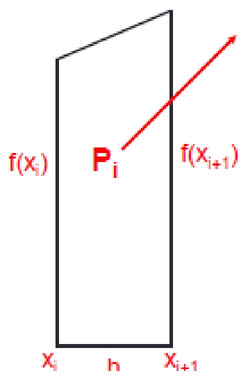

$$I = \frac{h}{2}(f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + f(x_5))$$

$$I = \frac{h}{2}(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)$$

Funkcija se u delu između a i a+h *aproksimira* pravom koja prolazi kroz tačke na krajevima intervala - aproksimacija polinomom prvog stepena

Dakle formula je: $$I = \frac{h}{2}\left[ f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Objasnićemo je posmatranjem jednog od podintervala $[x_i, x_{i+1}]$:




$$P_i = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} h$$

$$I = \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} h$$

$$I = \frac{1}{2} h(f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots$$
$$\ldots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1}) + f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

$$I = \frac{1}{2} h(f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

Metoda trapeza - Greška

Greška kompozitne metode trapeza je: reda $\mathbf{h^2}$ , gde je h veličina podintervala.

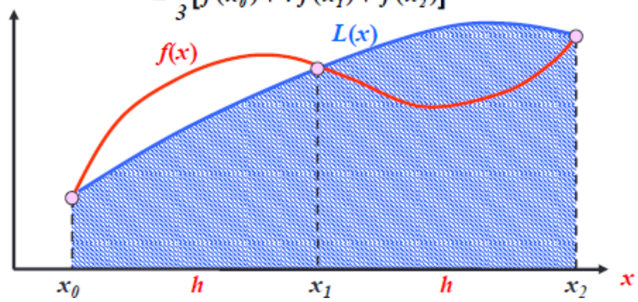
Povezanost greške metoda i veličine podintervala daje nam informaciju o tome, koliko bi trebalo da smanjimo h ako želimo da smanjimo grešku metoda.

# Simpsonova 1/3 metoda:

Funkciju f aproksimiramo polinomom drugog stepena na [a,b].

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{2} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$




$$L(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{neka je } x_0 = a, x_2 = b, x_1 = \dfrac{a+b}{2} \\ h = \dfrac{b-a}{2}, c = \dfrac{x-x_1}{h}, \; dc = \dfrac{dx}{h} \\ \begin{cases} x = x_0 \Rightarrow c = -1 \\ x = x_1 \Rightarrow c = 0 \\ x = x_2 \Rightarrow c = 1 \end{cases} \end{array}\right\} \text{Mapiramo [a,b] na [-1,1]}$$

$$\boxed{L(c) = \frac{c(c-1)}{2} f(x_0) + (1-c^2) f(x_1) + \frac{c(c+1)}{2} f(x_2)}$$

Napomena oko smene c:

Radimo iterpolaciju u tri tačke i tako dobijamo smenu c:

$$(a,-1)\ (\frac{a+b}{2},0)\ (b,1)$$

$$c=\frac{x-\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}$$

$$zamenimo\ a: c=\frac{a-\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}=\frac{\frac{a-b}{2}}{\frac{b-a}{2}}=-1$$

$$zamenimo\ b: c=\frac{b-\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}=\frac{\frac{b-a}{2}}{\frac{b-a}{2}}=1$$

$$zamenimo\ \frac{a+b}{2}: c=\frac{\frac{a+b}{2}-\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}=0$$

$$\boxed{L(c)=\frac{c(c-1)}{2}f(x_0)+(1-c^2)f(x_1)+\frac{c(c+1)}{2}f(x_2)}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\int_{-1}^{1}L(c)dc = f(x_0)\frac{h}{2}\int_{-1}^{1}c(c-1)dc$$

$$+f(x_1)h\int_0^1(1-c^2)dc+f(x_2)\frac{h}{2}\int_{-1}^{1}c(c+1)dc$$

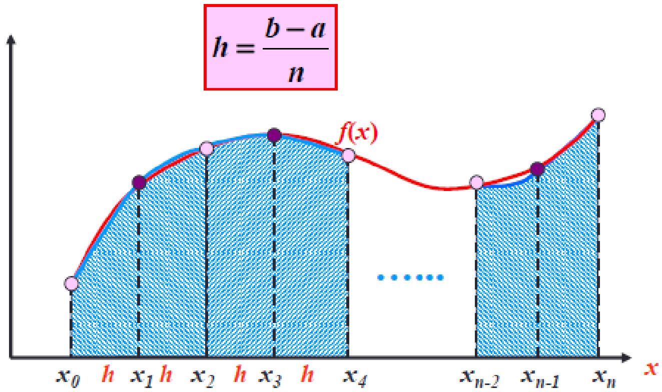
$$=f(x_0)\frac{h}{2}(\frac{c^3}{3}-\frac{c^2}{2})\Big|_{-1}^{1}+f(x_1)h(c-\frac{c^3}{3})\Big|_{-1}^{1}$$

$$+f(x_2)\frac{h}{2}(\frac{c^3}{3}+\frac{c^2}{2})\Big|_{-1}^{1}$$

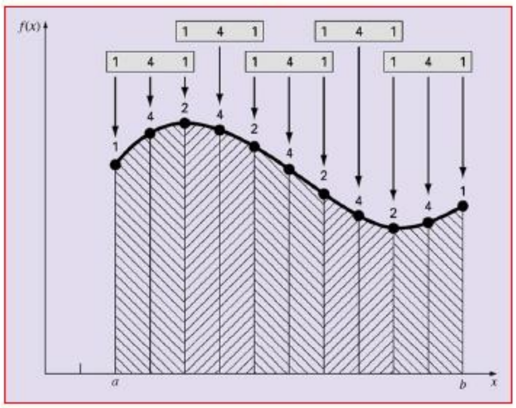
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]}$$

- Komopzitna Simpsonova 1/3 metoda:

Delimo [a,b] na podintervale.




Primenljivo samo ako je broj podintervala (ne tačaka) paran.




- Ako je broj podintervala paran

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

- Koristimo Simpsonovu 1/3 metodu za svaki podinterval

$$I = h\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{3} + h\frac{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)}{3}$$
$$+\cdots + h\frac{f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)}{3}$$

- Za podintervale jednakih dužina imamo:

$$\boxed{I = \frac{h}{3}\left\{ f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n) \right\}}$$

- Izračunavamo integral: $I = \int_0^4 xe^{2x}\,dx$
- **n = 2, h = 2**

$Tacno\ resenje = 5216.926477$

$$I = \frac{h}{3}\left[f(0) + 4f(2) + f(4)\right]$$
$$= \frac{2}{3}\left[0 + 4(2e^4) + 4e^8\right] = 8240.411 \quad \Rightarrow Greska = -57.96\%$$

- **n = 4, h = 1**

$$I = \frac{h}{3}\left[f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + f(4)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[0 + 4(e^2) + 2(2e^4) + 4(3e^6) + 4e^8\right]$$
$$= 5670.975 \quad \Rightarrow Greska = -8.70\%$$

Komopzitna Simpsonova 1/3 metoda - Greška

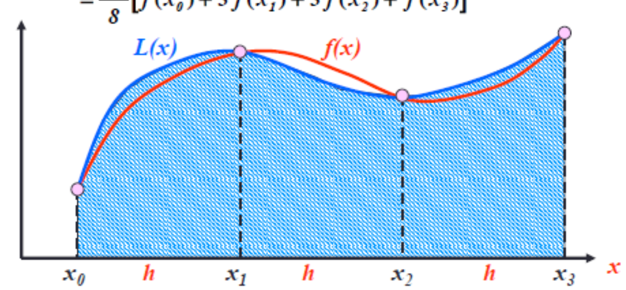
Greška kompozitne metode je: reda $h^4$, gde je h veličina podintervala.

Povezanost greške metoda i veličine podintervala daje nam informaciju o tome, koliko bi trebalo da smanjimo h ako želimo da smanjimo grešku metoda.

**Simpsonova 3/8 metoda:**

- Funkciju f aproksimiramo polinomom trećeg stepena na [a,b].

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{3} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$
$$= \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$



**Njutn-Kotesovi metode za integraciju:**

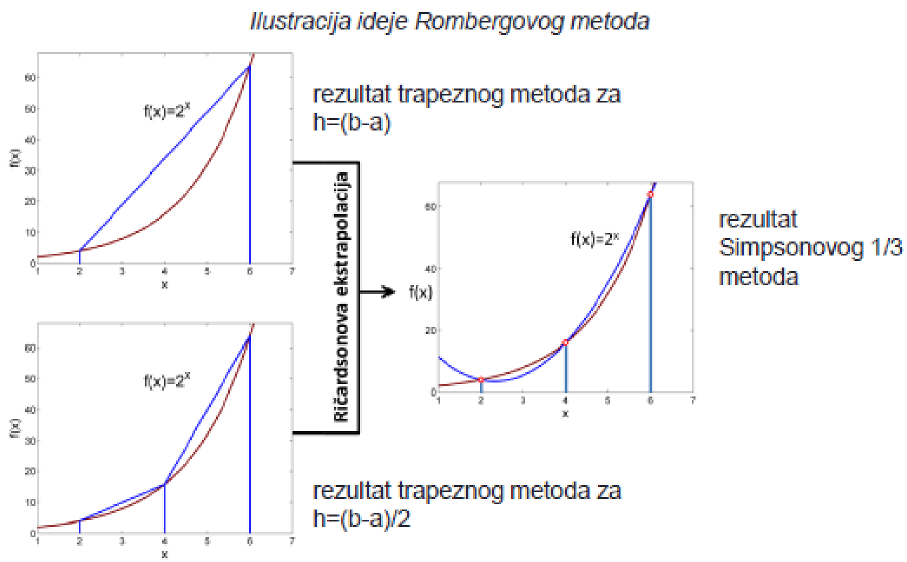
| n | Naziv metode | Forumula | Red greške kompozitne metode |
|---|---|---|---|
| 1 | *Trapez* | $(b-a)\dfrac{f(x_0)+f(x_1)}{2}$ | $h^2$ |
| 2 | *Simpson* 1/3 | $(b-a)\dfrac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{3}$ | $h^4$ |
| 3 | Simpson 3/8 | $(b-a)\dfrac{3(f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3))}{8}$ | $h^4$ |
| 4 | Boole | $(b-a)\dfrac{7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)}{90}$ | $h^6$ |
| 5 | | $(b-a)\dfrac{19f(x_0)+75f(x_1)+50f(x_2)+50f(x_3)+75f(x_4)+19f(x_5)}{288}$ | $h^6$ |

# Rombergov metod

**Do sada prikazane metode integracije su primeri numeričkih metoda koje zavise od koraka primene.** Korak primene kod ovih metoda je h (veličina podintervala) – posle sakog h ponovo primenimo metodu. Metode koje zavise od koraka primene kreiraju se tako da znamo da **kad h teži nuli metod konvergira** (teži tačnom rešenju). Medjutim **male vrednosti h su problematične: zbog grešaka zaokruživanja i računske neefikasnosti**

Pored smanjenja koraka veću tačnost mogli smo da postignemo korišćenjem kompleksnijih formula. Na primer, Simpsonove 3/8 umesto metode trapeza. **Upotreba kompleksnijih formula povaćava računsku složenost, odnosno efikasnost metoda**. Rombergova metoda prevazilazi navedene nedostake, odnosno omogućava povećanje tačnosti bez potrebe za velikim smanjivanjem podintervala ili podizanjem računske složenosti.

**Ideja metode je u kombinovanju dva rezultata metoda manjeg reda tačnosti, na takav način da je dobijeni rezultat jednog reda tačnosti više.** Na primer možemo kombinovati dva rezultata metode trapeza i dobiti rezultat Simpsonove 1/3 metode, bez korišćenja same Simpsonove 1/3 metode. **Kombinovanje dva rezultata metoda manjeg reda tačnosti je realizovano je kroz upotrebu Ričardsonove ekstrapolacije.**




Da bi razumeli Rombergov metod potrebna nam je sledeća jednakost:

$$\int_a^b f(x)dx = R(n-1,0) + a_2h^2 + a_4h^4 + a_6h^6 + \ldots$$

, gde je R(n-1,0) metod trapeza. Jednakost sledi iz Ojler-Maklorenove formule i nećemo je dokazivati.

Rombergova integracija:

Za male vrednosti h konkretno manje od 1 prvi faktor greške tj. h2 je najveći. Nakon toga slede h4, pa h6 itd. To znači da ako uspemo da uklonimo h2 iz naše procene integrala dobijamo rezultat koji ima veću tačnost. Način na koji ćemo to da uradimo dat je u nastavku.

**Ričardsonova ekstrapolacija:**

- Ranije smo videli da greške metoda za integraciju zavise od veličine podintervala h: $I = I(h) + E(h)$
- gde je I, tačno rešenje I(h) rezultat metode, a E(h) greška.
- Za dve prozivoljne veličine podintervala $h_1$ i $h_2$ važi:

$$I = I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2)$$

- Ako posmatramo metodu trapeza imamo:

$$E \cong O(h^2) \;\Rightarrow\; \frac{E(h_1)}{E(h_2)} \cong \frac{h_1^{\,2}}{h_2^{\,2}}$$

**Ričardsonova ekstrapolacija za Rombergov metod – izvodjenje:**

$$E_{1,0} = \frac{1}{4}E_{0,0}$$

$$zamenimo \;\; u \; I = R_{1,0} + E_{1,0} \Rightarrow$$

$$I = R_{1,0} + \frac{1}{4}E_{0,0} \;\; od \; toga \;\; oduzmemo \;\; I = R_{0,0} + E_{0,0} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} I &= R_{1,0} + \frac{1}{4}E_{0,0} \\ I &= R_{0,0} + E_{0,0} \end{aligned}\right\} -$$

$$0 = R_{1,0} - R_{0,0} - \frac{3}{4}E_{0,0} \Rightarrow R_{1,0} - R_{0,0} = \frac{3}{4}E_{0,0} \Rightarrow E_{0,0} = \frac{4}{3}(R_{1,0} - R_{0,0})$$

$$zamenimo \;\; u \; I = R_{0,0} + E_{0,0} \Rightarrow I = R_{0,0} + \frac{4}{3}(R_{1,0} - R_{0,0}) \Rightarrow I = \frac{3R_{0,0} + 4R_{1,0} - 4R_{0,0}}{3} \Rightarrow$$

$$I = \frac{4R_{1,0} - R_{0,0}}{3}$$

Suština prethodnog postupka je u tome da smo eliminisali E0,0 iz I= R0,0+E0,0 Što znači da smo eliminisali najveći faktor greške i time smanjili red greške. Na primer, ako je R računat metodom trapeza, greška reda h2 je eliminisana I sada je najveći faktor greške reda h4.

Kod prethodnog izvoĐenja važilo je E1,0=1/4*E0,0. Ovakav odnos grešaka postižemo tako što u svakoj novoj primeni metode trapeza h delimo sa 2. Dakle R0,0 je metoda trapeza za h1, a R1,0 je metoda trapeza za h1/2. Kod Rombergove metode uzimamo h1=1=20, h2=21, h3=22 itd.

**// SUSTINA KOD OVOGA JE DA SMO KOD METODE TRAPEZA ELIMINISALI $h^2$ kao najveci stepen greske, I sada je greska pretvorena u zavisnost od $h^4$! :D**

- Uopštenjem prethodno izvedne formule

$$I = \frac{4R_{1,0} - R_{0,0}}{3}$$

- dobija se opšta formula za za Rombergov metod je:

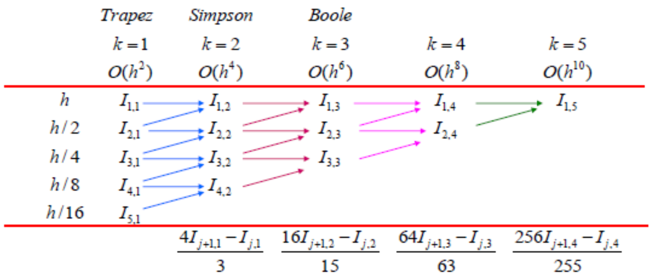
$$\boxed{I_{j,k} \cong \frac{4^k I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^k - 1}}$$

- *j*: nivo tačnosti, j+1 je tačnije od j (više podintervala)
- *k*: nivo metoda, *k=1* je metoda trapeza (O($h^2$)), *k=2* je poboljšanje – greška je(O($h^4$)), za *k=3* je greška O($h^6$) itd.

Uopštenje formule: I = ( 4*R1,0 - R0,0 ) / 3 dobija se ako se Ričardsonova ekstrapolacija primeni na rezultate prethodne ekstrapolacije. Time se kombinovanjem dva rezultata greške reda h4, greška smanjuje na red greške h6 itd. 3

**Rombergov metod korišćenje opšte formule:**

$$\boxed{I_{j,k}=\frac{4^k I_{j+1,k-1}-I_{j,k-1}}{4^k-1};\quad k=1,2,3,\cdots}$$




# Gausova kvadratura

**Karakteristika Njut-Kotesovih metoda je da koriste krajnje tačke intervala tj. a i b**. Na primer kod metode trapeza funkciju aproksimiramo pravom na [a, b]. **Ideja iza Gausove kvadrature je da je za metodu moguće odabrati druge tačke intervala. Cilj je da se tačke odberu tako da se poveća tačnost metode.**

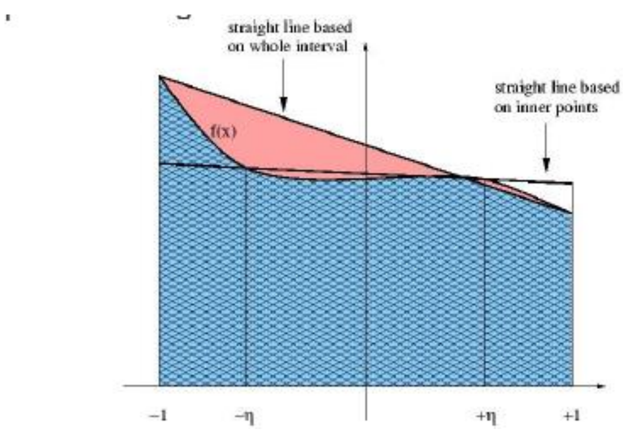
Metodu trapeza možemo predstaviti kao problem određivanja koeficijenata c u:

$$\int_a^b f(x)dx \cong c_1 f(a) + c_2 f(b)$$

Koeficijenti su određeni tako da imamo pravu kroz tačke (a,f(a)) i (b,f(b)).

$$c1=\frac{b-a}{2}\qquad c2=\frac{b-a}{2}$$

Logično pitanje je da li smo mogli da odabremo neke druge dve tačke, osim a i b i tako da dobijemo bolju procenu integrala.




Formalnije, cilj nam je da odredimo koeficijente c1 i c2, kao i tačke x1 i x2 u:

$$I=\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

da dobijemo bolju tačnost od metode trapeza.

Koeficijenti kod Gausove kvadrature za dve tačke se odredjuju tako da njihovom upotrebom dobijamo tačan rezultat za integral bilo kog polinoma trećeg reda:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right)dx \\ &= \left[a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \frac{x^4}{4}\right]_a^b \\ &= a_0(b-a) + a_1\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) + a_2\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) + a_3\left(\frac{b^4-a^4}{4}\right)\end{aligned}$$

## Koeficijenti kod Gausove kvadrature za dve tačke se odredjuju tako da njihovom upotrebom dobijamo tačan rezultat za integral bilo kog polinoma trećeg reda:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

•Zašto na ovaj način odredjujemo koeficijente?

Zato što treba da odredimo 4 koeficijenta (2 tačke i 2 koeficijenta da množimo vrednosti f u tim tačkama). Polinom trećeg stepena ima 4 koeficijenta koji će nam dati 4 potrebne jednačine.

- Iz $I = \int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$ sledi:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= c_1\left(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3\right) + c_2\left(a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3\right) \\ &= a_0(c_1 + c_2) + a_1(c_1 x_1 + c_2 x_2) + a_2\left(c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2\right) + a_3\left(c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3\right)\end{aligned}$$

- Ako izjednačimo ovu i formulu sa prethodnog slajda:

$$\begin{aligned}&a_0(b-a) + a_1\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) + a_2\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) + a_3\left(\frac{b^4-a^4}{4}\right) \\ &= a_0(c_1 + c_2) + a_1(c_1 x_1 + c_2 x_2) + a_2\left(c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2\right) + a_3\left(c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3\right)\end{aligned}$$

Sa obzirom na to da vrednosti a0, a1, a2, a3 moraju da budu proizvoljne (jer želimo tačno rešenje za svaki polinom trećeg stepena), mora da važi:

$$b - a = c_1 + c_2 \qquad \frac{b^2-a^2}{2} = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$\frac{b^3-a^3}{3} = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 \qquad \frac{b^4-a^4}{4} = c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3$$

Prethodni sistem nelinearnih jednačina ima sledeće rešenje:

$$x_1 = \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2} \quad x_2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}$$

$$c_1 = \frac{b-a}{2} \qquad c_2 = \frac{b-a}{2}$$

Na taj način dobijamo Gausovu kvadraturu za dve tačke:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \quad c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}\right) + \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}\right)$$

Gaussova kvadratura za tri tačke:

$$\int_a^b f(x)dx \cong c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

Zahtev je tačno rešenje za svaki polinom stepena 5.

$$\int_a^b \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5\right)dx$$

Za proizvoljni broj tačaka imamo:

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \ldots\ldots + c_n f(x_n)$$

- Vrednosti koeficijenata i tačaka obično su izračunati unapred i dati u tabeli:

Dati koefcijenti i tačke određene su tako da se pomoću njih rešava integral:

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} c_i g(x_i)$$

Za proizvoljno a i b, mora se izvštiti transformacija granica integrala.

| Br. tačaka | Koeficijenti | Tačke |
|---|---|---|
| 2 | $c_1$ = 1.000000000<br>$c_2$ = 1.000000000 | $x_1$ = -0.577350269<br>$x_2$ = 0.577350269 |
| 3 | $c_1$ = 0.555555556<br>$c_2$ = 0.888888889<br>$c_3$ = 0.555555556 | $x_1$ = -0.774596669<br>$x_2$ = 0.000000000<br>$x_3$ = 0.774596669 |
| 4 | $c_1$ = 0.347854845<br>$c_2$ = 0.652145155<br>$c_3$ = 0.652145155<br>$c_4$ = 0.347854845 | $x_1$ = -0.861136312<br>$x_2$ = -0.339981044<br>$x_3$ = 0.339981044<br>$x_4$ = 0.861136312 |
| 5 | $c_1$ = 0.236926885<br>$c_2$ = 0.478628670<br>$c_3$ = 0.568888889<br>$c_4$ = 0.478628670<br>$c_5$ = 0.236926885 | $x_1$ = -0.906179846<br>$x_2$ = -0.538469310<br>$x_3$ = 0.000000000<br>$x_4$ = 0.538469310<br>$x_5$ = 0.906179846 |

Ako su vrednosti u tabeli date za $\int_{-1}^{1} g(x)dx$ kako rešavamo $\int_{a}^{b} f(x)dx$ ?

Problem rešavamo konverzijom granica intervala $[a, b]$ u granice $[-1, 1]$

$$x = mt + c$$

Ako $x = a,$ onda $t = -1$

Ako $x = b,$ onda $t = 1$

m=?, c=?

$$m = \frac{b-a}{2} \qquad c = \frac{b+a}{2}$$

- Tako dobijamo:

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} \quad dx = \frac{b-a}{2}dt$$

- Ako zamenimo vrednosti za x i dx u integral imamo:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)\frac{b-a}{2}dt$$

## NUMERIČKE METODE ZA REŠAVANJE DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA PROBLEM POČETNE VREDNOSTI

**Njutnov drugi zakon kretanja:**

Jednačine kretanja objekta:

$$a = \frac{F}{m}, \quad a - ubrzanje, F - sila; m - masa$$

$$a = Fm$$

Ubrzanje je promena brzine po vremenu:

$$\frac{dv}{dt} = a = \frac{F}{m}, \quad dv - promena\ brzine, dt - promena\ vremena$$

Slično, brzina je promena položaja po vremenu:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad dx - promena\ polozaja, dt - promena\ vremena$$

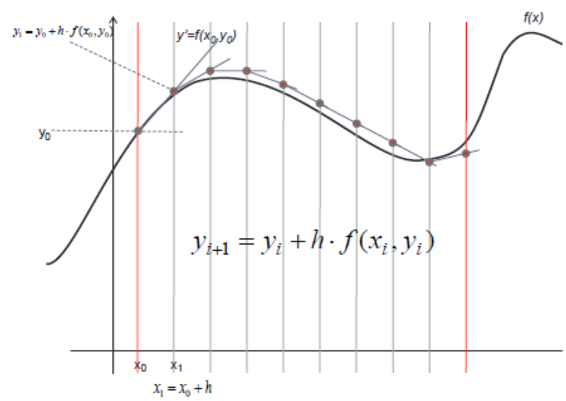
Iz prethodnih jednačina sledi: Ako znamo: masu objekta kao i sliu koja deluje na njega, možemo da predvidimo (odredimo) njegov položaj za dati vremenski trenutak.

Intuitivno, numeričke metode za rešavanje diferencijalnih jednačina primenjuju se na sledeći način:

- Moramo da znamo početne vrednosti; položaja, brzine, mase i sile za objekat.
- Na osnovu tih vrednosti pomerimo se unapred u vremenu (recimo za jednu sekundu)

- Na osnovu dif. jednačina izračunamo brzinu i položaj u tom novom trenutku (zato što se u našoj postavci jedino ove dve vrednosti menjaju po vremenu).
- Na osnovu tih novih vrednosti pomerimo se unapred za još jednu sekundu i nastavljamo postupak...
- Opisani postupak predstavlja Ojlerovu metodu za rešavanje diferencijalnih jednačina.

**Ojlerova metoda:** y' = f(x,y)




U kodu za procenu položaja, Ojlerovu metodu primenjujemo dva puta za isto dt:

- Za procenu položaja
- pozicija = pozicija + dt * brzina;

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

- Za procenu brzine
- brzina = brzina + dt * ( sila / masa );

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

**Diferencijalna jednačina** je jednačina koje povezuje funkciju i njene izvode.

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Cilj: Pronaći funkciju y(x) koja predstavlja rešenje date jednačine.

Način za rešavanje:

- **analitički** – rešenje je tačno ali dosta često nije lako do njega doći
- **numerički** – rešenje je približno ali se do njega lakše dolazi (takodje možemo da rešimo širi spektar jednačina u odnosu na analitički metod).

**Obične diferencijalne jednačine (ODJ)** sadrže jedan ili više običnih izvoda nepoznatih funkcija za nezavisnu promenljivu t.

Primeri :

$$\frac{dv(t)}{dt} - v(t) = e^t$$

x(t): nepoznata funkcija

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 5\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = \cos(t)$$

t: nezavisna promenljiva

**Rešenje diferencijalne jednačine** je funkcija koja zadovoljava jednačinu.

$\mathrm{Primer:}$

$$\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0$$

$\mathrm{Resenje} \quad x(t) = e^{-t}$

Dokaz:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -e^{-t}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = -e^{-t} + e^{-t} = 0$$

**Rešenja običnih diferencijalnih jednačina:** x(t) = cos(2t), predstavlja rjesenje ODJ

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4x(t) = 0$$

Da li je to rešnje jedinstveno?

Sve funkcije oblika $x(t) = \cos(2t + c)$ (gde je $c$ relana konstanta) su resenja.

**Jedinstvenost rešenja -** Da bi specificirali jedinstveno rešenje za ODJ n-tog reda potrebno nam je n uslova.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4x(t) = 0$$

ODJ drugog reda

$$x(0) = a$$
$$\dot{x}(0) = b$$

Potrebna su nam dva uslova da bi specificirali jedinstveno rešenje.

**Dodatni uslovi:**

- **Početni uslovi: Svi uslovi su dati u jednoj tački nezavisne promenljive**
- **Granični uslovi: Uslovi su dati u više tačaka nezavisne promenljive**

Problem početne vrednosti (PPV)

- Svi uslovi su dati u jednoj tački nezavisne promenljive

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-2t}$$

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 2.5$$

iste

Problem graničnih uslova (PGU)

- Uslovi su dati u više tačaka nezavisne promenljive
- Teže za rešavanje od PPV

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-2t}$$

$$x(0) = 1, \quad x(2) = 1.5$$

različite

**Klasifikacija numeričkih metoda - Numeričke metode za rešavanje ODJ:**

- Jedno-koračne metode: Procena rešenja u trenutnom koraku zasnovana je samo na informacijama iz prethodnog koraka.
- Više-koračne metode: Procena rešenja u trenutnom koraku zasnovana je na informacijama iz više prethodnih koraka.

Numeričke metode pružaju mogućnost da dobijemo grafik ili tabelu sa vrednostima nepoznate funkcije. Većina numeričkih metoda za rešavanje ODJ zasnovane su na Tejlorovom redu.

**Metode zasnovane na Tejlorovom redu:**

Problem koji rešavamo je ODJ prvog reda:

$$\boxed{\frac{dy(x)}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0}$$

Procene rešenja u tačkama:

$$y(x_0+h),\ y(x_0+2h),\ y(x_0+3h),\ \ldots.$$

izračunavaju se pomoću razvijanja u Tejlorov red.

**Razvoj u Tejlorov red:** Numerički metod n-tog reda zasnovan Tejlorovom redu koristi Tejlorov red do (n+1)-og člana.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots.$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0+h-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x_0+h-x_0)^2 + O(h^3)$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + O(h^3)$$

**Ojlerov metod:**

$$y(x_0+h) = y(x_0) + h\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}} + O(h^2)$$

*Notacija* :

$$x_n = x_0 + nh, \qquad y_n = y(x_n),$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=x_i,\\ y=y_i}} = f(x_i, y_i)$$

*Ojlerov Metod*

$$y_{i+1} = y_i + h\ f(x_i, y_i)$$

Problem :

Za datu ODJ prvog reda : $\dot{y}(x) = f(x,y)$

sa pocetnim uslovom : $y_0 = y(x_0)$

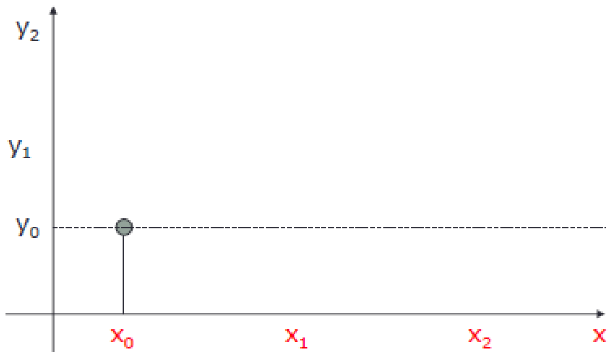
Odrediti : $y_i = y(x_0 + ih) \qquad za\ i = 1,2,\ldots$

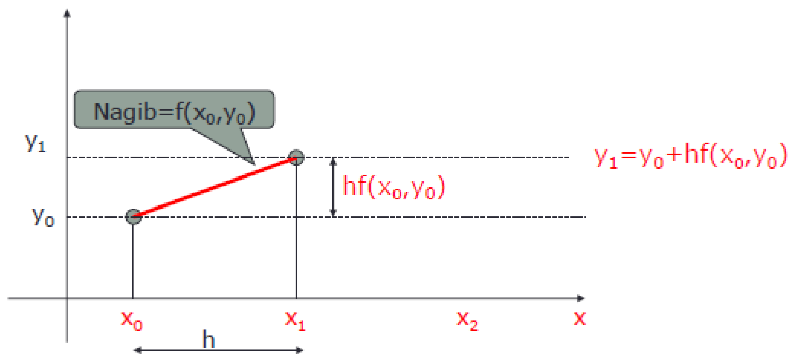
Ojlerov metod :

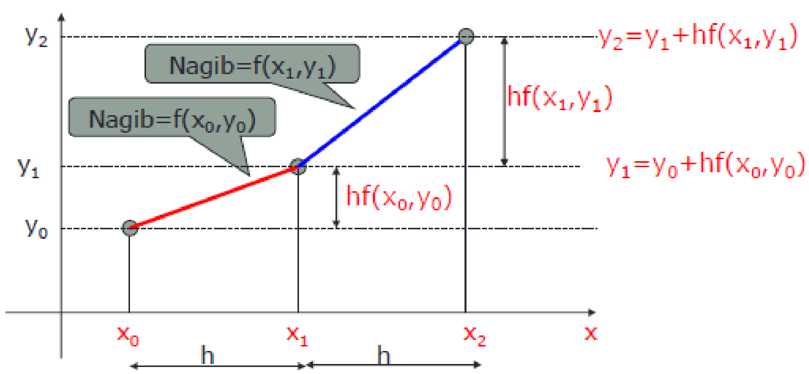
$$y_0 = y(x_0)$$

$$y_{i+1} = y_i + h\ f(x_i, y_i) \qquad za\ i = 1,2,\ldots$$

Geometrijska interpretacija Ojlerovog metoda:




**Greške metoda zasnovanih na Tejlorovom redu**

- Lokalna greška odsecanja: Greška do koje dolazi zbog upotrebe Tejlorovog razvoja u tački x(t+h) odsečenog posle nekog člana u jednom koraku metode.
- Globalna greška odsecanja: Lokalana greška odsecanja akumilarna za sve izvršene korake.
- Greška zaokruživanja: Posledica konačnog broja cifara koje se mogu reprezentovati na računaru. Može se nagomilati ili pojačati tokom izvršavanja svih koraka.

**Numerički metod drugog reda zasnovan Tejlorovom redu:**

$$\boxed{Ako\ je\ dato\ \ \frac{dy(x)}{dx} = f(y,x), \quad y(x_0) = y_0}$$

Metod drugog reda zasnovan na

Tejlorovom redu je oblika :

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2} + O(h^3)$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ se mora odrediti analiticki.

**Numerički metod trećeg reda zasnovan Tejlorovom redu:**

$$\boxed{Ako\ je\ dato\ \ \frac{dy(x)}{dx} = f(y,x), \quad y(x_0) = y_0}$$

Metod treceg reda zasnovan na

Tejlorovom redu je oblika :

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h^3}{3!}\frac{d^3y}{dx^3} + O(h^4)$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ i $\frac{d^3y}{dx^3}$ se moraju odrediti analiticki.

**Numerički metod višeg reda zasnovan Tejlorovom redu:**

$$\boxed{Ako\ je\ dato\ \ \frac{dy(x)}{dx} = f(y,x), \quad y(x_0) = y_0}$$

Metod n - tog reda zasnovan na

Tejlorovom redu je oblika :

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2} + \dots + \frac{h^n}{n!}\frac{d^ny}{dx^n} + O(h^{n+1})$$

$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$ se moraju odrediti analiticki.

Metode višeg reda pružaju veću tačnost od Ojlerovog metoda. Medjutim izvode višeg reda moramo da odredimo analitički.

**Metod srednje tačke I Heunov metod**

Resavamo ODJ prvog reda :

$$\dot{y}(x) = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

- Dve metode koje će biti prikazane u nastavku su oblika:

  $y_{i+1} = y_i + h\,\phi$
- Za Ojlerovu metodu: $\phi = f(x_i, y_i)$
- Drugačije vrednosti za $\phi$ pružaju Metod srednje tačke i Heunov metod.

# Metod srednje tačke:

Problem

$$\dot{y}(x) = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

*Metod srednje tacke*

$$y_0 = y(x_0)$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$$

Lokalna greska odsecanja $O(h^3)$

Globalna greska odsecanja $O(h^2)$

Za Ojlerov metod vazi :

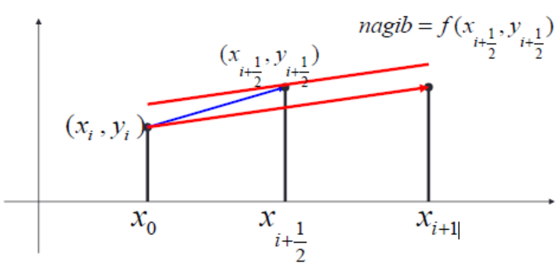
Lokalna greska odsecanja $O(h^2)$

Globalna greska odsecanja $O(h)$

- Koristimo Ojlerov metod da procenimo yi+1/2h u srednjoj tački - xi+1/2h.
- Pomoću tog y izračunavamo nagib u srednjoj tački f (xi+1/2h, yi+1/2h).
- Koristimo taj nagib da bolje procenimo yi+1.

Lokalna greška odsecanja je reda O(h3) (objašnjenje će biti dato u delu predavanja o Runge-Kutta metodama). Ovaj metod je uporediv sa metodama drugog reda zasnovanim na Tjelorovom redu.

- Metod srednje tačke Geometrijska interpretacija




$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i), \qquad y_{i+1} = y_i + h\, f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$$

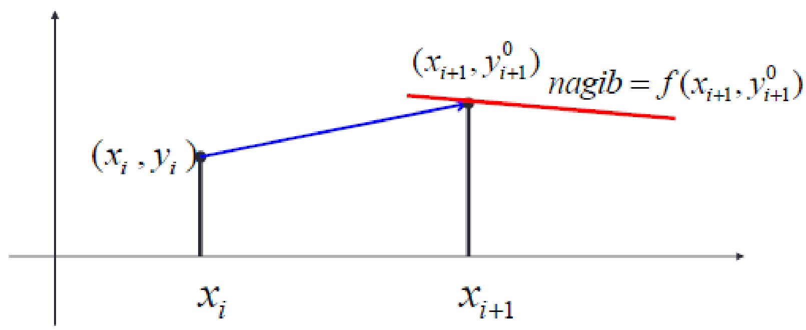
# Heunov metod (prediktor-korektor):

| Problem | *Heunov* Metod |
| --- | --- |
| $\dot{y}(x) = f(x,y)$ | $y_0 = y(x_0)$ |
| $y(x_0) = y_0$ | Prediktor: $y_{i+1}^0 = y_i + h\ f(x_i, y_i)$ |
| | Korektor: $y_{i+1}^1 = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)\right)$ |

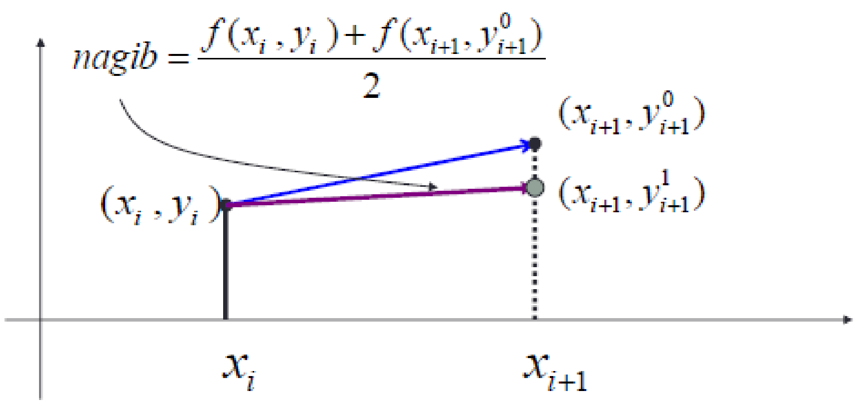
Lokalna *greska od* secanja $\quad O(h^3)$

Globalna *greska od* secanja $\quad O(h^2)$

- Heunov metod (prediktor-korektor) Geometrijska interpretacija




$$y_{i+1}^0 = y_i + h\ f(x_i, y_i)$$




$$y_{i+1}^1 = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)\right)$$

**Prethodne metode komentar**

Ojlerov metod, metod srednje tačke i Heunov metod zasnivaju se na formuli: **$y_{i+1} = y_i + h \times nagib$**

Suštinska razlika medju metodama je način odredjivanja nagiba.

**Poredjenje tri metode**

| Metod | Lokalna greska odsecanja | Globalna greska odsecanja |
|---|---|---|
| Ojlerov metod $\quad y_{i+1} = y_i + h\ f(x_i, y_i)$ | $O(h^2)$ | $O(h)$ |
| Heunov metod<br>Prediktor: $y_{i+1}^0 = y_i + h\ f(x_i, y_i)$<br>Korektor: $y_{i+1}^{k+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^k)\right)$ | $O(h^3)$ | $O(h^2)$ |
| *Srednja tacka* $\quad y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2}\ f(x_i, y_i)$<br>$y_{i+1} = y_i + h\ f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$ | $O(h^3)$ | $O(h^2)$ |

# Runge-Kutta metode

**Motivacija za razvoj Runge-Kutta metoda je postizanje tačnosti metoda višeg reda bez potrebe oredjivanja izvoda višeg reda. Ideja je da se fromula za rešavanje zada pomoću nepoznatih koeficijenata. Koeficijenti se onda odredjuju tako da odgovaraju članovima Tejlorovog reda – bez potrebe za računanjem izvoda. (Ideja je vrlo slična Gausovoj kvadraturi iz metoda za integraciju).**

**Runge-Kutta metod drugog reda**

$$K_1 = h\ f(x_i, y_i)$$
$$K_2 = h\ f(x_i + \alpha h,\ \ y_i + \beta K_1)$$
$$y_{i+1} = y_i + w_1 K_1 + w_2 K_2$$

Problem :

*Odrediti* $\alpha, \beta, w_1, w_2$

tako da $y_{i+1}$ ima sto vecu mogucu tacnost.

**Tejlorov red za funkciju jedne promenljive**

*Tejlorov red do clana stepena n za funkciju f(x)*

$$f(x+h)=\underbrace{\boxed{\sum_{i=0}^{n}\frac{h^i}{i!}f^{(i)}(x)}}_{\text{Aproksimacija}}+\underbrace{\boxed{\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\overline{x})}}_{\text{Greška}}$$

*gde je* $\overline{x}$ *iz* $[x, x+h]$

**Runge-Kutta metod drugog reda – Izvodjenje**

Koristimo razvoj u Tejlorov red
do stepena 2 da resimo ODJ:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

$$y_{i+1}=y_i+h\frac{dy}{dx}+\frac{h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+O(h^3)$$

$$y_{i+1}=y_i+h\,f(x_i,y_i)+\frac{h^2}{2}f'(x_i,y_i)+O(h^3)$$

$f'(x,y)$ za prethodnu formulu dobijamo primenom pravila za diferenciranje funkcije vise promenljivih

$$f'(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}f(x,y)$$

*Zamenimo* $f'(x,y)$ *u fromulu sa prethodnog slajda:*

$$y_{i+1}=y_i+f(x_i,y_i)h+\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}f(x_i,y_i)\right)\frac{h^2}{2}+O(h^3)$$

**Tejlorov red za funkciju dve promenljive**

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)+$$

$$\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)+\dots$$

$$=\underbrace{\boxed{\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(x,y)}}_{aproksimacija}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(\overline{x},\overline{y})}}_{greska}$$

$(\overline{x},\overline{y})$ je *tacka na pravoj od* $(x,y)$ do $(x+h,y+k)$

**Runge-Kutta metod drugog reda – Izvodjenje**

Koristimo razvoj u T red do stepena 2 da rijesimo ODJ

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + O(h^3)$$

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i, y_i) + O(h^3)$$

f’ (x, y) za prethodnu formulu dobijamo primjenom pravila za diferenciranje funkcija vise promjenljivih

$$f'(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y)$$

*Zamenimo* $f'(x, y)$ *u fromulu*

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x_i, y_i)\right)\frac{h^2}{2} + O(h^3)$$

Problem : *Odrediti* $\alpha, \beta, w_1, w_2$

$$K_1 = h\ f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = h\ f(x_i + \alpha h,\ \ y_i + \beta K_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + w_1 K_1 + w_2 K_2$$

Tako da dobijena formula ima tačnost upotrebe prvog i drugog izvoda u Tejlorovom redu.

Ubacimo $K1$ i K2 :

$$y_{i+1} = y_i + w_1 h\, f(x_i, y_i) + w_2 h\, f(x_i + \alpha h,\ \ y_i + \beta K_1)$$

*Razvijamo* $f(x_i + \alpha h,\ y_i + \beta K_1)$ *u Tejlorov red*

$$f(x_i + \alpha h,\ y_i + \beta K_1) = f(x_i, y_i) + \alpha h\frac{\partial f}{\partial x} + \beta K_1\frac{\partial f}{\partial y} + \dots$$

*Zamenimo u formulu sa prethodnog slajda :*

$$y_{i+1} = y_i + w_1 h\, f(x_i, y_i) + w_2 h\left(f(x_i, y_i) + \alpha h\frac{\partial f}{\partial x} + \beta K_1\frac{\partial f}{\partial y} + \dots\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + (w_1 + w_2)h\, f(x_i, y_i) + w_2 h\left(\alpha h\frac{\partial f}{\partial x} + \beta K_1\frac{\partial f}{\partial y} + \dots\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + (w_1 + w_2)h\, f(x_i, y_i) + w_2\alpha h^2\frac{\partial f}{\partial x} + w_2\beta h^2\frac{\partial f}{\partial y} f(x_i, y_i) + \dots$$

$K_1 = h\ f(x_i, y_i)$

Izveli smo dve formule za $y_{i+1}$ :

Formula čije koeficijente određujemo

$$y_{i+1} = y_i + (w_1 + w_2) h\ f(x_i, y_i) + w_2 \alpha h^2 \frac{\partial f}{\partial x} + w_2 \beta h^2 \frac{\partial f}{\partial y} f(x_i, y_i) + \dots$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h + \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x_i, y_i) \right) \frac{h^2}{2} + O(h^3)$$

Tejlorov red do stepena 2

Izjednacavamo clanove formula i dobijamo :

$$w_1 + w_2 = 1, \quad w_2 \alpha = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad w_2 \beta = \frac{1}{2}$$

Ako koeficijenti zadovoljavaju ove jednačine imamo tačnost Tejlorovog reda do stepena 2, bez potrebe da računamo drugi izvod analitički.

3 jednacine sa 4 nepoznate $\Rightarrow$ beskonacno mogo resenja

Jedno od mogucih resenja : $\alpha = \beta = 1, \quad w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$

$$K_1 = h\ f(x_i, y_i)$$
$$K_2 = h\ f(x_i + \alpha h, \quad y_i + \beta K_1)$$
$$y_{i+1} = y_i + w_1 K_1 + w_2 K_2$$

Odabrati $\alpha, \beta, w_1, w_2$ tako da :

$$w_1 + w_2 = 1, \ w_2 \alpha = \frac{1}{2} \quad \text{i} \ w_2 \beta = \frac{1}{2}$$

**Odabir α, β, w1 i w2**:

- Odaberemo α = 1, β = 1. W1 = w2 = 1/2. Range – Kutta metod II reda postaje:

$$K_1 = h\ f(x_i, y_i)$$
$$K_2 = h\ f(x_i + h, y_i + K_1)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = y_i + \frac{h}{2}\left( f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0) \right)$$

Runge - Kutta drugog reda

$K_1 = h\ f(x_i, y_i)$

$K_2 = h\ f(x_i + \alpha h,\ y_i + \beta K_1)$

$y_{i+1} = y_i + w_1 K_1 + w_2 K_2$

*Dobili smo Heunov metod sa jednom primenom korektora*

- Odaberemo α = 1/2, β = 1/2. W1 =0, w2 = 1. Range – Kutta metod II reda postaje:

$$K_1 = h\ f(x_i, y_i)$$
$$K_2 = h\ f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2})$$
$$y_{i+1} = y_i + K_2 = y_i + h\ f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2})$$

Runge - Kutta drugog reda

$K_1 = h\ f(x_i, y_i)$

$K_2 = h\ f(x_i + \alpha h,\ y_i + \beta K_1)$

$y_{i+1} = y_i + w_1 K_1 + w_2 K_2$

Dobili smo metod srednje tacke

**Runge-Kutta metode višeg reda**

Sličnim postupkom izvoĐenja u odnosu na RK2 možemo izvesti i RK metode višeg reda. Ove metode imaju veću tačnost od RK2 ali, zahtevaju veći broj računskih operacija.

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{4}h,\ y_i + \frac{1}{4}k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{1}{4}h,\ y_i + \frac{1}{8}k_1 h + \frac{1}{8}k_2 h)$$

$$k_4 = f(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i - \frac{1}{2}k_2 h + k_3 h)$$

$$k_5 = f(x_i + \frac{3}{4}h,\ y_i + \frac{3}{16}k_1 h + \frac{9}{16}k_4 h)$$

$$k_6 = f(x_i + h,\ y_i - \frac{3}{7}k_1 h + \frac{2}{7}k_2 h + \frac{12}{7}k_3 h - \frac{12}{7}k_4 h + \frac{8}{7}k_5 h)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)$$

**Range – Kutta treceg I cetvrtog reda**

Obicno se oznacava sa RK3

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + h,\ y_i - k_1 h + 2k_2 h)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

Lokalna greska odsecanja $O(h^4)$

Globalna greska odsecanja $O(h^3)$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{1}{2}k_2 h)$$

$$k_4 = f(x_i + h,\ y_i + k_3 h)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Lokalna greska odsecanja $O(h^5)$

Globalna greska odsecanja $O(h^4)$

## Runge-Kutta metode Rezime

### Runge-Kutta metode pružaju tačnost metoda T. reda bez potrebe za analitičkim odreĐivanjem izvoda višeg reda. Runge-Kutta drugog reda ima lokalnu grešku odsecanja O(h3), a globalnu O(h2). RK metode višeg reda imaju manju grešku ali su računski zahtevnije.

**NUMERIČKE METODE ZA REŠAVANJE DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA -SISTEMI ODJ -DIF. JEDNAČINE VIŠEG REDA -PROBLEM GRANIČNIH USLOVA**

Rešavanje sistema ODJ prvog reda - Prethodno prikazane numeričke metode (Ojlerova, Runge-Kutta, …) koriste se i za rešavanje sistema ODJ. Za svaku od metoda koristimo njegovu formulu, ali tako da je:

- diferencijalna jednačina vektor jednačina,
- zavisna promenljiva je takodje vektor.

**Ojlerov metod za rešavanje sistema ODJ prvog reda -** Ojlerov metod:

$$\boxed{\frac{dy(x)}{dx} = f(y,x), \quad y(a) = y_a}$$

$$\begin{aligned}
&\textit{Ojlerov metod}: \\
&y(a+h) = y(a) + h\, f(y(a), a) \\
&y(a+2h) = y(a+h) + h\, f(y(a+h), a+h) \\
&y(a+3h) = y(a+2h) + h\, f(y(a+2h), a+2h)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\textit{Dato je } \frac{d\,Y(x)}{dx} = F(Y,x) = \begin{bmatrix} f_1(Y,x) \\ f_2(Y,x) \\ \dots \\ f_n(Y,x) \end{bmatrix}, \quad Y(a) = \begin{bmatrix} y_1(a) \\ y_2(a) \\ \dots \\ y_n(a) \end{bmatrix}}$$

$$\begin{aligned}
&\textit{Ojlerov metod}: \\
&Y(a+h) = Y(a) + h\;\; F(Y(a), a) \\
&Y(a+2h) = Y(a+h) + h\, F(Y(a+h), a+h) \\
&Y(a+3h) = Y(a+2h) + h\, F(Y(a+2h), a+2h)
\end{aligned}$$

- Koristimo istu formulu samo sa vektorima umesto skalara.
- Y je vektor nepoznatih funkcija.
- F(Y,x) je vektor diferencijalnih jednačina.

$$Y(x)=\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{bmatrix} \qquad Y \;\; je\ vektor\ n\times 1$$

$$\frac{d\,Y(x)}{dx}=\begin{bmatrix} \frac{d\,y_1}{dx} \\ \frac{d\,y_2}{dx} \\ \dots \\ \frac{d\,y_n}{dx} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1(Y,x) \\ f_2(Y,x) \\ \dots \\ f_n(Y,x) \end{bmatrix}=F(Y,x)$$

$$Y(a+h)=Y(a)+h\ F(Y(a),a)$$
$$Y(a+2h)=Y(a+h)+h\,F(Y(a+h),a+h)$$
$$Y(a+3h)=Y(a+2h)+h\,F(Y(a+2h),a+2h)$$

**Rešavanje ODJ drugog reda**

Rešavamo datu jednačinu pomoću Ojlerovog metoda za h=0.1:

$$\ddot{x}+2\dot{x}+7x=2$$
$$x(0)=1;\dot{x}(0)=-2$$

Uvodimo nove promenljive : $z_1=x, z_2=\dot{x}$

Na taj nacin dobijamo sistem :

$$\dot{Z}=F(Z)=\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z_2 \\ 2-2z_2-7z_1 \end{bmatrix}, Z(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$F(Z)=\begin{bmatrix} z_2 \\ 2-2z_2-7z_1 \end{bmatrix}, Z(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, h=0.1$$

$$Z(0+0.1)=Z(0)+hF(Z(0))$$
$$=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}+0.1\begin{bmatrix} -2 \\ 2-2(-2)-7(1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.8 \\ -2.1 \end{bmatrix}$$

$$Z(0.2)=Z(0.1)+hF(Z(0.1))$$
$$=\begin{bmatrix} 0.8 \\ -2.1 \end{bmatrix}+0.1\begin{bmatrix} -2.1 \\ 2-2(-2.1)-7(0.8) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.59 \\ -2.04 \end{bmatrix}$$

$$F(Z)=\begin{bmatrix} z_2 \\ 2-2z_2-7z_1 \end{bmatrix}, Z(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, h=0.1$$

$$Z(0.3)=Z(0.2)+hF(Z(0.2))$$
$$=\begin{bmatrix} 0.59 \\ -2.04 \end{bmatrix}+0.1\begin{bmatrix} -2.04 \\ 2-2(-2.04)-7(0.59) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.386 \\ 1.95 \end{bmatrix}$$

interpolacija

| t | z1 |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0.1 | 0.8 |
| 0.2 | 0.59 |
| 0.3 | 0.386 |

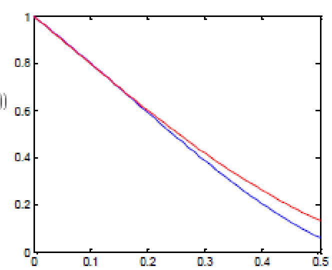
$p(t) = 2.6667t^3 - 1.3t^2 - 1.8967t + 1.0$ $\qquad p(0) = 1$

$p'(t) = 8.0001t^2 - 2.6t - 1.8967$ $\qquad p'(0) = - 1.8967$

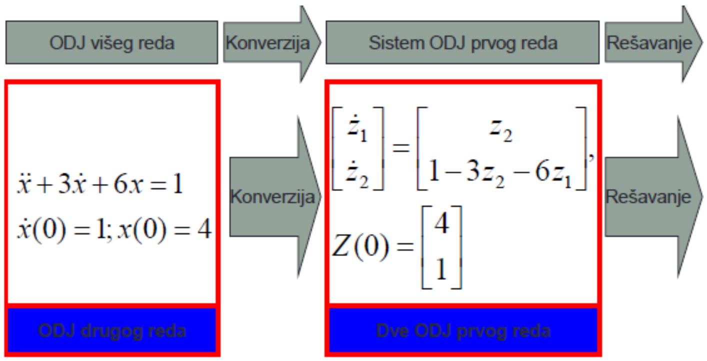
$p''(t) = 16.0002t - 2.6$

Analitičko rešenje (crveno na grafiku):

$$y(x)=\frac{1}{14}\,e^{-x}\left(4\,e^{x}-3\sqrt{6}\,\sin(\sqrt{6}\,x)+10\cos(\sqrt{6}\,x)\right)$$




**Metodologija za rešavanje ODJ višeg reda**




**Konverzija**

1.Uvodimo nove zavisne promenljive. Uzimamo zavisnu promenljivu i sve njene izvode do jednog manje reda od najvećeg. Zamenjujemo ih novim promenljivima.

2.Zapisujemo datu diferencijalnu jednačinu u drugom obliku upotrebom novih zavisnih promenljivih. Takodje dodajemo po jednu jednačinu za svaku novu zavisnu promenljivu.

3.Dobijene jednačine prebacimo u matrični oblik.

**Konverzija – Komentari**

1.Svaku ODJ n-tog reda moguće je konvertovati u sistem n ODJ prvog reda.

2.Konverziju je najjednostavnije prikazati kroz tabelu.

**Rezime**

- **Metode koje se koriste za rešavanje ODJ prvog reda koriste se i za sisteme ODJ. Umesto skalarnih promenljivih i funkcija, koristimo vektor skalara i vektor funkcija.**
- **ODJ višeg reda moguće je konvertovati u sistem ODJ prvog reda.**

<u>**Problem Graničnih Uslova PGU**</u>

**Metod pogadjanja (The Shooting Method) -** Ideja kod ovog metoda ekvivalentna je gadjanju mete: gadjamo više puta**,** svaki put korigujemo ciljanje dok ne pogodimo metu.

**Metoda pogadjanja rešavanje PGU**

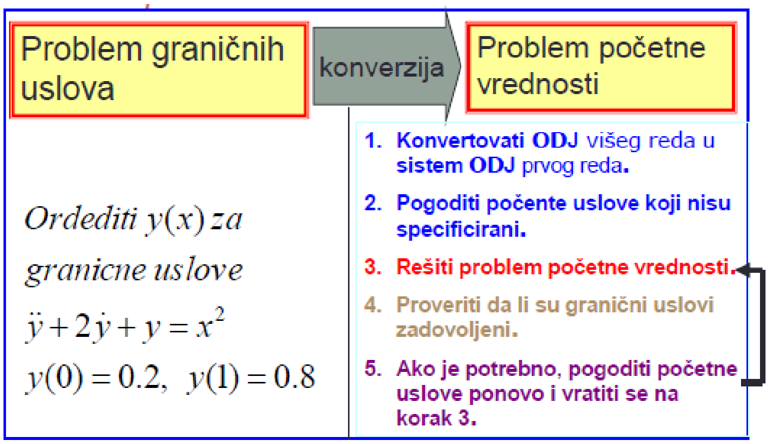
1.PGU konvertujemo u sistem ODJ tj. u PPV.

2.PogaĎamo vrednosti za početne uslove koje nedostaju.

3.Rešavamo problem početne vrednosti.

4.Proveravamo da li su granični uslovi zadovoljeni, ako nisu pogadjamo ponovo.

•*Koristimo interpolaciju da poboljšamo pogotke.*




**Metod pogadjanja Rezime**

1.Pogadjamo vrednosti za početne uslove koje nedostaju.

2.Rešavamo problem početne vrednosti.

3.Provevravamo da li su granični uslovi zadovoljeni, ako nisu pogadjamo ponovo.

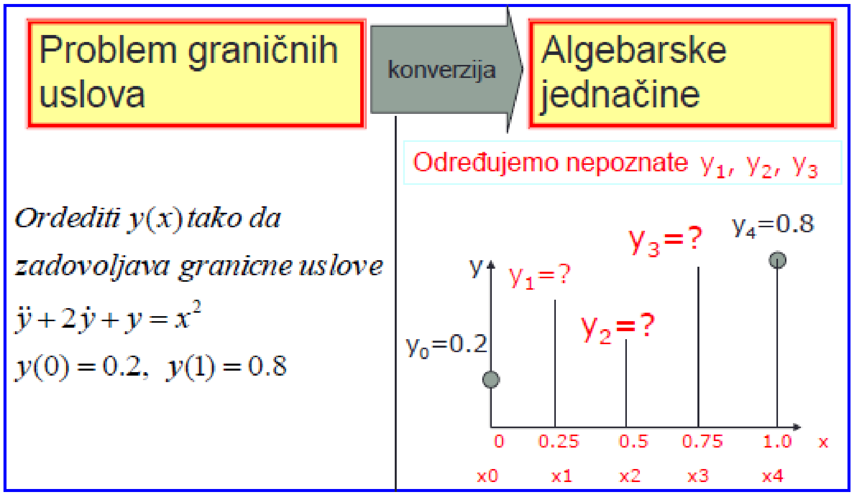
4.Ponavljamo 3. dok granični uslovi ne budu zadovoljeni.

**Karakteristike metoda pogadjanja**

1.Upotreba interpolacije za procenu novih pogodaka ubrzava postupak tj. smanjuje broj potrebnih iteracija.

2.Metod postaje komplikovan i računski zahtevan kod ODJ velikog reda zato što moramo da pogadjamo početne uslove za veliki broj promenljivih.

**Metod konačnih razlika**




- Delimo interval na n podintervala.
- PGU se konvertuje u problem odredjivanja koeficijenata funkcije za zadate tačke.
- Koristimo konačne razlike da aproksimiramo izvode.
- Ta aproksimacija rezultuje sistemom algebarskih jednačina.
- Rešvamo jednačine da bi dobili rešenje PGU.

**ODJ drugog reda PGU**

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=x^2 \quad za \ y(0)=0.2, \qquad y(1)=0.8$$

$$h=0.25$$

Tacke koje koristimo:

$$x_0=0,\ x_1=0.25, x_2=0.5, x_3=0.75, x_4=1$$

$$\frac{dy}{dx}\approx\frac{y(x+h)-y(x)}{h}=\frac{y_{i+1}-y_i}{h}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\approx\frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2}=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=x^2$$

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+2\frac{y_{i+1}-y_i}{h}+y_i=x_i^{\ 2} \quad i=1,2,3$$

$$x_0=0,\ x_1=0.25, x_2=0.5, x_3=0.75, x_4=1$$

$$y_0=0.2,\ y_1=?, y_2=?, y_3=?, \quad y_4=0.8$$

$$16(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})+8(y_{i+1}-y_i)+y_i=x_i^{\ 2}$$

$$24y_{i+1}-39y_i+16y_{i-1}=x_i^{\ 2}$$

$$24y_{i+1} - 39y_i + 16y_{i-1} = x_i^2$$

$$i=1 \quad 24y_2 - 39y_1 + 16y_0 = x_1^2$$

$$i=2 \quad 24y_3 - 39y_2 + 16y_1 = x_2^2$$

$$i=3 \quad 24y_4 - 39y_3 + 16y_2 = x_3^2$$

$y_0$ i $y_4$ su poznati pa ih prebacujemo na drugu stranu

$$\begin{bmatrix} -39 & 24 & 0 \\ 16 & -39 & 24 \\ 0 & 16 & -39 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25^2 - 16(0.2) \\ 0.5^2 \\ 0.75^2 - 24(0.8) \end{bmatrix}$$

$$\text{Re}\,senje \quad y_1 = 0.4791,\ y_2 = 0.6477,\ y_3 = 0.7436$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = x^2$$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + 2\frac{y_{i+1} - y_i}{h} + y_i = x_i^2 \quad i = 1,2,\ldots,100$$

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.01, x_2 = 0.02 \ \ldots \ x_{99} = 0.99, x_{100} = 1$$

$$y_0 = 0.2,\ y_1 = ?, y_2 = ?, \ \ldots \ y_{99} = ?, \ \ y_{100} = 0.8$$

$$10000(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + 200(y_{i+1} - y_i) + y_i = x_i^2$$

$$10200y_{i+1} - 20199y_i + 10000y_{i-1} = x_i^2$$

**Metod konačnih razlika Rezime**

•Biramo tačke koje koristimo tj. delimo interval na n podintervala.

•Koristimo konačne razlike da zamenimo izvode.

•Tako dobijamo sistem algebarskih jednačina.

•Rešavamo jednačine da bi dobili rešenje PGU.

•Moguće je koristiti različite formule za aproksimaciju izvoda.

•Različite formule daju različita rešenja PGU. Sva rešenja su aproksimacije tačnog rešenja PGU.

## NUMERIČKO DIFERENCIRANJE

**Definicija izvoda**

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Tejlorova teorema :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f^{(2)}(x)h^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(x)h^3}{3!} + O(h^4)$$

*Greska*

$$E = O(h^n)$$

**Tri formule za numeričko diferenciranje Konačne razlike**

$$\text{Razlika unapred:} \qquad \frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\text{Razlika unazad:} \qquad \frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$\text{Centralna razlika:} \qquad \frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

**Razlika unapred i unazad Izvodjenje**

$$\text{Razlika unapred:} \quad f(x+h) = f(x) + f'(x)h + O(h^2)$$
$$\Rightarrow f'(x)h = f(x+h) - f(x) + O(h^2)$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

---

$$\text{Razlika unazad:} \quad f(x-h) = f(x) - f'(x)h + O(h^2)$$
$$\Rightarrow f'(x)h = f(x) - f(x-h) + O(h^2)$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$$

**Centralna razlika Izvodjenje**

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f^{(2)}(x)h^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(x)h^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(x)h^4}{4!} + \ldots$$
$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f^{(2)}(x)h^2}{2!} - \frac{f^{(3)}(x)h^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(x)h^4}{4!} + \ldots$$
$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + 2\frac{f^{(3)}(x)h^3}{3!} + \ldots$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

delimo sve sa *h* pa je red ostatka manji za jedan stepen.

**Konačne razlike tačnost**

$$\text{Razlika unapred:} \quad \frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

$$\text{Razlika unazad:} \quad \frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$$

$$\text{Centralna razlika:} \quad \frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

Razlike unapred i unazad imaju tacnost istog reda. Centralna razlika ima bolju tacnost od prethodne dve formule.

**Formule za izvode višeg reda**

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f^{(2)}(x)h^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(x)h^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(x)h^4}{4!} + \ldots$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f^{(2)}(x)h^2}{2!} - \frac{f^{(3)}(x)h^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(x)h^4}{4!} + \ldots$$

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + 2\frac{f^{(2)}(x)h^2}{2!} + 2\frac{f^{(4)}(x)h^4}{4!} + \ldots$$

$$\Rightarrow\ f^{(2)}(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4}$$

Ovo su Centralne razlike,

Moguce je koristiti i druge formule za dobijanje $f^{(2)}(x), f^{(3)}(x)\ldots$

*Tejlorov razvoj se koristi za odredjivanje gresaka drugih fromula.*

**Primjer**

- Koristimo sve tri konačne razlike da odredimo prvi izvod polinoma:

  $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$

  u $x = 0.5$ za dva različita koraka $h = 0.5$ i $h = 0.25$
- Tačan izvod polinoma dobija se jednostavno (koristimo polinom da bi ilustorvali razlike između grešaka metoda):

  $f'(x) = -0.4x^3 - 0.45x^2 - 1.0x - 0.25$

  imamo da je tačno $f'(0.5) = -0.9125$

**Rešenja za h= 0.5**

- $f(0.5) = 0.925$, $f(0) = 1.2$, $f(1.0) = 0.2$
- Razlika unapred:

$f'(0.5) \approx (f(1)-f(0.5))/0.5=(0.2 - 0.925)/0.5 = -1.45$

$|\varepsilon_t| = |(-0.9125+1.45)/-0.9125| = 58.9\%$

- Razlika unazad:

$f'(0.5) \approx (f(0.5)-f(0))/0.5=(0.925 - 1.2)/0.5 = -0.55$

$|\varepsilon_t| = |(-0.9125+0.55)/-0.9125| = 39.7\%$

- Centralna razlika:

$f'(0.5) \approx (f(1)-f(0))/1=(0.2 - 1.2)/1.0 = -1.0$

$|\varepsilon_t| = |(-0.9125+1.0)/-0.9125| = 9.6\%$

**Konačne razlike Komentari**

•Za razliku unapred i unazad greška je reda O(h). Ako prepolovimo h, greška se približno prepolovi.

•Centralna razlika ima bolju tačnost tj. red greške O(h2). Ako prepolovimo h, greška se približno smanji 4 puta.

**Ričardsonova ekstrapolacija**

$$\text{Centralna razlika :} \quad f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

Da li je pomocu nje moguce izvesti bolju formulu?

$$Ako\ su\ f(x)\ i\ x\ fiksirani:$$

konačna razlika se od tačnog izvoda f'(x) razlikuje za grešku (sledi iz )

$$\phi(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$\phi(h) = f'(x) - \overbrace{a_2h^2 - a_4h^4 - a_6h^6 - \ldots}$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + 2\frac{f^{(3)}(x)h^3}{3!} + \ldots$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + 2\frac{f^{(3)}(x)h^2}{3!} + \ldots$$

$$Ako\ su\ f(x)\ i\ x\ fiksirani:$$

$$\phi(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$\phi(h) = f'(x) - a_2h^2 - a_4h^4 - a_6h^6 - \ldots$$

$$\phi(\frac{h}{2}) = f'(x) - a_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 - a_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 - a_6\left(\frac{h}{2}\right)^6 - \ldots$$

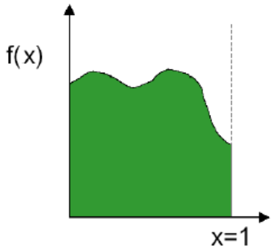
$$\phi(h) - 4\phi(\frac{h}{2}) = -3f'(x) - \frac{3}{4}a_4h^4 - \frac{15}{16}a_6h^6 - \ldots$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4}{3}\phi(h/2) - \frac{1}{3}\phi(h) + O(h^4)$$

Dobili smo aproksimaciju reda greške O($h^4$), pomoću dve aproksimacije reda O($h^2$). Isto kao kod Romberogve integracije.

## MONTE KARLO INTEGRACIJA

**Numerička integracija –** Kako izracunati integral funkcije f(x)?



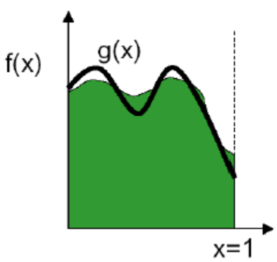

$$\int_0^1 f(x)dx = ?$$

Metode koje smo učili

•Aproksimiramo f(x) fukcjiom g(x), pa integralimo g(x):

- •metoda trapeza - g(x) je prava
- •Simpsonova metoda - g(x) je parabola,
- •....

•Napomenućemo da su ove metode determinstičke, više primena istog algoritma na isti problem uvek daju isti rezultat.




$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$$

Ove metode su jednostavne za impelmentaciju i imaju dobru tačnost. Međutim, ne predstavljaju dobro rešenje za višestruke integrale:

$$\int_{\ldots\ldots} \int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

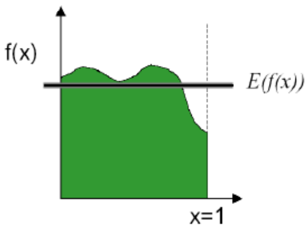
**Višestruki integrali**

Problem sa ranije predstavljenim metodama ilustrovaćemo na primeru rešavanja dvostrukog integrala pomoću metode trapeza.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{y-x} dydx$$

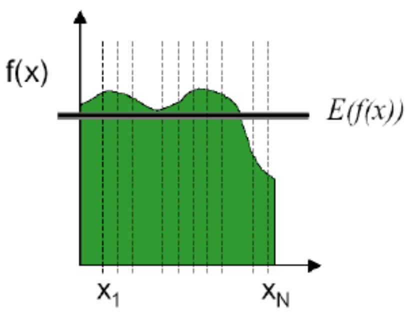
### Monte Karlo metoda

Monte Karlo (Monte Carlo, MC) metoda predstavlja alternativu prethodim metodama i prevazilazi problem ogromnog broja potrebnih tačaka. Generalna ideja: proceniti podintegralnu funkcijom prosekom funkcije f(x).




$$\int_0^1 f(x)dx = E(f(x))$$

Prosek procenjujemo odabriom N tačaka Tako dobijamo stohastičku metodu, svaka primena daje različit rezultat u zavisnosti od odabranih tačaka.




$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

$$E(x) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Monte Karlo integracija koristi Teoremu Srednje Vrednosti za integrale:

$$f_{avg} = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$$

Gde je favg prosečna vrednost funkcije f(x) na [a,b].

### Teorema srednje vrednosti za integrale – Intuicija

Podelimo interval [a,b] na jednake podintervale i iz svakog uzmemo po jednu tačku. Izračunamo vrednost funkcije u tim tačkama i uzmemo prosek.

$$f_{avg} = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{N-1}) + f(x_N)}{N}$$

$$f_{avg} = \frac{f(x_1) + f(x_{12}) + \cdots + f(x_{N-1}) + f(x_N)}{N} * \frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$f_{avg} = \frac{\sum f(x_i)\,\Delta x}{N\Delta x}$$

$$lim\,\Delta x = 0$$

$$f_{avg} = \frac{I}{b-a}$$

$$f_{avg}(b-a) = I$$

**Monte Karlo metoda**

Transformacijom prethodne formule imamo:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f_{avg}$$

To znači da integral možemo da odredimo ako znamo prosek funkcije f(x). Osnovna ideja Monte Karlo metode je da prosek funkcije f(x) procenjujemo na osnovu uzorka od N slučajno odabranih tačaka iz [a,b]

$$f_{avg} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

Na taj način dolazimo do formule za Monte Karlo integraciju:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

, gde su xi uniformno distribuirani slučanjni brojevi iz [a,b], a N je veličina uzorka.

Logično je zaključiti da se povećanjem veličine uzorka (N) dobija tačnije rešenje integrala. Formalno se može pokazati da važi:

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Im} = I$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad \mathrm{Im} = (b-a)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

**Greška**

Greška Monte Karlo metode predstavlja standardnu devijaciju procene proseka δ:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) < f > \pm\sigma$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) < f > \pm\sqrt{\frac{< f^2 > - < f >^2}{N}}$$

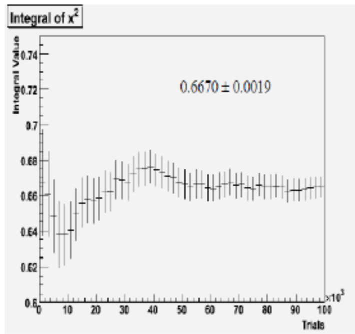
$$< f > = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

- Vidimo da je greška proporicionalna sa $\frac{1}{\sqrt{N}}$

- Red greške od $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ znači da moramo da N povećamo 4 puta da bi grešku (st. devijaciju) smanjili 2 puta.

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx \approx 2\langle x^2 \rangle \pm 2\sqrt{\frac{\langle (x^2)^2 \rangle - \langle x^2 \rangle^2}{N}}$$




**Poređenje sa determinističkim metodama**

Podsetimo se da su greške determinističkih metoda reda:

- Trapez O(h)
- Simpson O(h2)
- itd.

•Pošto je h=(b-a)/N imamo da su greške proporcionalne sa:

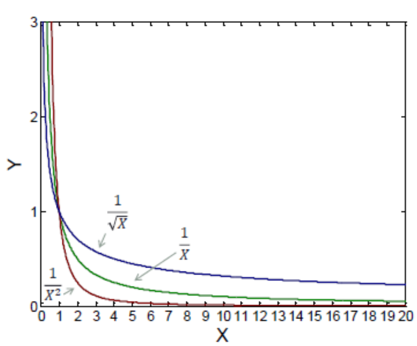
- Trapez O(N-1)
- Simpson O(N-2)
- itd.

• Iz prethonog možemo primentiti da je:  Greška Monte Karlo metode veća od detrminističkih metoda.

• To je zato što je N broj tačaka koje koristimo i N>1 pa važi:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} > \frac{1}{N}$$

**Grafički prikaz redova grešaka za Trapeznu, Simpsonovu i MC metodu**



**Zašto koristiti MC metodu**

Zašto korisiti MC metodu kad ima veću grešku? Razlog je određivanje višestrukih integrala. Determinstičke metode zahtevaju Nd tačaka za d-dimenzioni integral. Kod MC metode N ne zavisi od dimenzije d. To znači da ne moramo da povećamo odabrano N (npr. 10000) koje smo koristili za jednostruki da bi rešili dvostruki, trostruki itd. integral.

**Prednost MC metode**

Nezavisnost broja tačaka od dimenzionalnosti čini MC metodu pogodnu za određivanje višestrukih integrala. Obično je potreban veliki broj N da bi MC metoda bila tačna. Zato prednosti MC postaju vidljive kada je d≥6~8.

**Poređenje sa determinističkim metodama**

Problem određivanja zapremine M-dimenzione sfere. Za determinističku metodu upotrebljena je 21 tačka (20 podintervala) po dimenziji. Za MC metodu je broj odabranih tačaka 105. Mereno je vreme izvršavanja.

| | numerical | | MC | | |
|---|---|---|---|---|---|
| M | time | result | time | result | Correct |
| ---- | ---- | ------ | ---- | ------ | ------- |
| 2 | 0.00 | 3.1524 | 0.01 | 3.1435 | 3.1415 |
| 3 | 0.00 | 4.1737 | 0.07 | 4.1896 | 4.1887 |
| 4 | 0.00 | 4.9023 | 0.08 | 4.9330 | 4.9348 |
| 5 | 0.02 | 5.2381 | 0.10 | 5.2787 | 5.2637 |
| 6 | 0.30 | 5.1451 | 0.13 | 5.1748 | 5.1677 |
| 7 | 5.02 | 4.6704 | 0.15 | 4.7098 | 4.7247 |
| 8 | 89.9 | 3.9595 | 0.17 | 4.0479 | 4.0587 |
| 9 | 1320 | 3.3998 | 0.20 | 3.3191 | 3.2985 |

Vidimo da je za M<6 determistička metoda relativno brza, ali kasnije postaje dosta sporija. Brzina i tačnost MC metode veoma malo variraju sa porastom broja dimenzija.

**Monte Karlo metoda opšta formula za N dimenzija**

$$I = \int_D f(\bar{x})dx$$

$$I_m = V\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\bar{x}_i),\ gde\ je\ V = \int_D dx$$

- D je domen integracije u n dimenzija
- $\bar{x}$ je n dimenzioni vektor
- $I_m$ = Monte Carlo procena integrala
- N = broj tačaka
- $x_1, x_2, \ldots, x_N$ su uniformno distribuirani slučajni brojevi iz intevala [a,b].

**Opšta formula - problem**

Iz opšte formule za MC metod vidimo da moramo da izračunamo integral

$$V = \int_D dx$$

, za domen D koji nam je dat (Napomena: u 1-d V=(b-a) ). Ako je D jednostavnog oblika V možemo lako odrediti (numerički ili analitički). Međutim D je obično komplikovan. Potreban nam je novi metod.

**Metod pogodaka i promašaja (hit and miss)**

Ovaj metod predstavlja grubu verziju MC metode. Služi za određivanje površine nepravilnih tela. Ideja je da ako imamo komplikovani domen D, pronađemo jednostavniji domen A koji sadrži D. A mora da bude takav da se njegova površina može jednostavno odrediti. Generišemo N slučajnih brojeva iz domena A. Brojimo koliko njih je završilo u D i tu vrednost označimo sa Nd. Površina D je onda

$$P_D \approx \frac{N_D}{N} P_A$$

**Izmena MC metode**

Hit and Miss metod koristimo za opštu MC metodu na sledeći način. Pronalazimo jednostavniji domen A koji sadrži D. Definišemo karakterističnu funkciju za A i D na sledeći način:

$$g(x) = \begin{Bmatrix} 1, x \in D \\ 0, x \in A \wedge x \notin D \end{Bmatrix}$$

MC metod onda primenjujemo na sledeći način:

$$I = \int_D f(\bar{x}) dx = \int_A f(\bar{x}) g(\bar{x}) dx$$

$$I_m = \frac{\int_A dx}{N} \sum_{i=1}^{N} f(\bar{x}_i) g(\bar{x}_i)$$