# 10. FAKTORIJALNI OGLEDI

## 10.1. Pojam faktorijalnih ogleda

Kod mnogih ogleda ne ispituje se samo jedan faktor, na primer različite sorte, već je u ogled uključen još jedan ili više drugih faktora. Taj drugi faktor kod sortnih ogleda mogu da budu različite doze ili vrste veštačkih đubriva, dubina oranja itd. Kod ogleda u stočarstvu različite rase su, recimo,jedan faktor a načini ishrane drugi itd. Ovakvi ogledi kod kojih se istovremeno ispituju *dva ili više faktora* poznati su pod imenom *faktorijalni ogledi.* Oni *ne treba* da se smatraju kao neki posebni planovi ogleda nego samo kao kombinacija dva ili više faktora, svaki sa izvesnim brojem varijanti ili tretmana, koji se isto tako dobro uklapaju u, recimo, plan slučajnog blok–sistema ili latinskog kvadrata.

Uopšte govoreći, reč faktor je ovde upotrebljena da označi izvesne *eksperimentalne uslove* koji mogu da se ispituju kao takvi, na primer jedna vrsta đubriva u različitim dozama, neki insekticid ili fungicid u odgovarajućim dozama, različite sorte ili načini ishrane itd. U jedan faktorijalni ogled uključuju se svi faktori u *svim kombinacijama* njihovih tretmana. Iz ovog proizilazi da od načina izbora tretmana u jednom ogledu zavisi da li će se taj ogled smatrati faktorijalnim ili neće.

Putem faktorijalnih ogleda ispituju se ne samo promene neke pojave usled primene različitog tretmana datog faktora, nego i kako ta pojava reaguje u kombinaciji sa promenom u tretmanu drugog faktora, tj. da li je promena u tretmanu drugog faktora od uticaja na promene u prvom. Ukoliko taj uticaj postoji, govori se o *interakciji* ispitivanih faktora. Na ovaj način znatno se doprinosi efikasnosti eksperimentalnih istraživanja. Ukoliko nema interakcije, individualno se upoređuju tretmani, a ako se u nekoj kombinaciji pojavljuje značajna interakcija, tada se na nju usredsređuje pažnja.

Pre nego što se pređe na dalje izlaganje o faktorijalnim ogledima opredelićemo se za jedan sistem notacije. Slova $a$, $b$ $c$ itd. označavaće odgovarajuće *faktore*, dok ćemo njihove *tretmane ili nivoe* obeležiti sa $a_i$, $b_j$, $c_k$ itd. ($i = 1, 2,...,a$; $j = 1, 2,..., b$; $c = 1, 2,...,k$; itd). Kombinaciju faktora označićemo sa $a_i\, b_j\, c_k$... ili sa *ijk*...

Ako, na primer, uzmemo ogled sa đubrivom sa tri faktora, i to azot ($a$), fosfor ($b$) i kalijuma ($c$), svaki faktor u dve različite doze, tada imamo $2 \times 2 \times 2 = 8$ sledećih kombinacija:

$$
\begin{array}{ll}
a_1\, b_1\, c_1 & a_2\, b_1\, c_1 \\
a_1\, b_1\, c_2 & a_2\, b_1\, c_2 \\
a_1\, b_2\, c_1 & a_2\, b_2\, c_1 \\
a_1\, b_2\, c_2 & a_2\, b_2\, c_2
\end{array}
$$

*gde je* $a_1$ azot sa jednom dozom, $a_2$ azot sa drugom dozom itd.

Lako je uočiti da je na polovini od svih parcela jedan tretman jednog faktora uvek primenjen a na drugoj polovini nije. Ovaj $2 \times 2 \times 2$ faktorijalni ogled može da se napiše i kao $2^3$, što znači da se radi o ogledu sa tri faktora, svaki sa dva tretmana. Isto tako, možemo imati $3 \times 3 \times 3$ ili $3^3$ faktorijalni ogled sa 27 kombinacija ili, recimo, $4 \times 3$ sa 12 kombinacija itd. U ovom poslednjem primeru reč je o dva faktora, i to prvom sa četiri tretmana a drugom sa tri.

Jedna od prednosti faktorijalnih ogleda je postizanje veće *preciznosti* nego da se ispituje svaki faktor posebno. Na primer, u jednom $2^3$ faktorijalnom ogledu postoje tri faktora, svaki sa dva tretmana, tako da imamo osam kombinacija tretmana. Ako se ide na šest ponavljanja, imaćemo ukupno četrdeset osam jedinica ili parcela. Ovaj ogled bi mogao da se izvodi u tri nezavisna ogleda pri čemu bi se svaki faktor ispitivao posebno, a broj parcela za svaki takav ogled iznosi bi 16. S obzirom da su faktori sa po dva tretmana, svaki od njih bi imao 8 jedinica ili ponavljanja. Međutim, kod faktorijalnog ogleda svaki ovaj tretman ima praktično 24 ponavljanja, te se, pored potpunije informacije koju pruža interakcija, povećava i preciznost zbog većeg broja ponavljanja.

Korisno je ukazati i na *ograničenja* faktorijalnih ogleda. Pre svega, veći broj kombinacija faktora zahteva i veći broj jedinica u ogledu. Dovoljno je navesti da samo jedan faktorijalni ogled $4^3$ zahteva u jednom ponavljanju 64 jedinice. Za više faktora i tretmana potreban je i veći broj jedinica, što čini ogled većim, komplikovanijim i skupljim. Osim toga, eksperimentalna pogreška je u ovakvim ogledima manje verodostojan pokazatelj slučajnih varijacija zbog velikih blokova. Ovo ukazuje da treba biti obazriv u *primeni* faktorijalnih ogleda. Ako se to ima u vidu, faktorijalni ogledi su od velike koristi u istraživačkom radu.

## 10.2. Statistička analiza faktorijalnih ogleda

Analiza faktorijalnih ogleda izvodi se analizom varijanse tako da se suma kvadrata tretmana razdvaja na delove koji daju odgovor o uticaju *glavnih efekata A, B, C i njihovim interakcijama*. Ako se radi o dva faktora, glavni efekti su *A* i *B* a interakcija *AB*. Ako su u ogled uključena tri faktora, njihovi glavni efekti su *A, B* i *C* a interakcije su *AB, AC BC* i *ABC* itd.

Pretpostavimo da se radi o faktorijalnom ogledu $2 \times 2$, tj. dva faktora sa po dva tretmana i 5 ponavljanja. Raspored stepeni slobode takvog ogleda je sledeći:

| Izvori varijacije | Stepeni slobode |
|---|---|
| Ponavljanje | 4 |
| Tretmani (*A, B* i *AB*) | 3 |
| Pogreška | 12 |
| Ukupno | 19 |

Stepeni slobode za tretmane ovde mogu da se podele na glavne efekte *A* i *B* i interakciju *AB*, svaki efekt sa po jednim stepenom slobode.

Na isti način sume kvadrata tretmana drugih faktorijalnih ogleda dele se na *sume kvadrata glavnih efekata i interakcija* sa odgovarajućim stepenima slobode.

Za ilustraciju statističke analize jednog faktorijalnog 2 × 2 ogleda u potpuno slučajnom rasporedu sa 5 ponavljanja uzećemo ogled sa ispitivanjem produžnog delovanja superfosfata ($a_1$) i Tomasovog brašna ($a_2$) i njihovog unošenja pri dubini od 15 *cm* ($b_1$) i 35 *cm* ($b_2$) u drugoj godini po primeni đubriva na prinos suve smeše graška i raži (Manojlović, Poljoprivredni fakultet, Novi Sad). Rezultati ogleda u *t/ha* prikazani su u tab. 10.1.

**TAB. 10.1. Rezultati 2 × 2 faktorijalnog ogleda u ispitivanju produžnog delovanja superfosfata i Tomasovog brašna i dubine njihovog unošenja**

| Ponavljanje | $a_1$ | | $a_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $b_1$ | $b_2$ | $b_1$ | $b_2$ |
| 1 | 5,1 | 4,8 | 5,9 | 4,5 |
| 2 | 4,8 | 5,3 | 5,5 | 4,6 |
| 3 | 5,0 | 5,7 | 5,2 | 4,8 |
| 4 | 5,3 | 5,3 | 3,5 | 3,4 |
| 5 | 4,5 | 4,5 | 4,5 | 4,6 |
| Ukupno | 24,7 | 25,6 | 24,6 | 21,9 |
| $\overline{X}$ | 4,94 | 5,12 | 4,92 | 4,38 |

$a_1 = 24,7 + 25,6 = 50,3$

$a_2 = 24,6 + 21,9 = 46,5$

$b_1 = 24,7 + 24,6 = 49,3$

$b_2 = 25,6 + 21,9 = 47,5$

Sume kvadrata za analizu varijanse izračunavaju se na uobičajeni način:

$$\text{Suma kvadrata totala} = (5{,}1)^2 + (4{,}8)^2 + \ldots + (4{,}6)^2 - \frac{(96{,}8)^2}{20} = 7{,}6080.$$

$$\text{Suma kvadrata tretmana} = \frac{(24{,}7)^2 + (25{,}6)^2 + (24{,}6)^2 + (21{,}9)^2}{5} - \frac{(96{,}8)^2}{20} = 1{,}5320.$$

$$\text{Suma kvadrata pogreške} = 7{,}6080 - 1{,}5320 = 6{,}0760.$$

Pored toga, suma kvadrata tretmana dalje se deli na sume kvadrata koje proizilaze iz dejstva glavnih efekata $A$ i $B$ i njihove interakcije $AB$. Izračunavaju se na sledeći način:

$$\text{Suma kvadrata glavnog efekta } A = \frac{(50{,}3)^2 + (46{,}5)^2}{10} - \frac{(96{,}8)^2}{20} = 0{,}7220\,.$$

$$\text{Suma kvadrata glavnog efekta } B = \frac{(49{,}3)^2 + (47{,}5)^2}{10} - \frac{(96{,}8)^2}{20} = 0{,}1620\,.$$

$$\text{Suma kvadrata interakcije } AB = 1{,}5320 - 0{,}7220 - 0{,}1620 = 0{,}6480\,.$$

Na ovaj način dobili smo potrebne sume kvadrata za analizu varijanse prikazane u tab. 10.2.

**TAB. 10. 2. Analiza varijanse 2 × faktorijalnog ogleda iz tab. 10.1.**

| Izvori varijacije | Stepeni slobode | Suma kvadrata | Sredina kvadrata | Očekivana sredina kvadra |
|---|---|---|---|---|
| Tretmani | 3 | 1,5320 | 0,511 | |
| *A* | 1 | 0,7220 | 0,7220 | $\sigma^2 + 10 \sum_{i=1}^{2} \alpha_i^2/1$ |
| *B* | 1 | 0,1620 | 0,1620 | $\sigma^2 + 10 \sum_{j=1}^{2} \beta_j/1$ |
| *AB* | 1 | 0,6480 | 0,6480 | $\sigma^2 + 5 \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} (\alpha\beta)_{ij}/1$ |
| Pogreška | 16 | 6,0760 | 0,380 | $\sigma^2$ |
| Ukupno | 19 | 7,6080 | | |

Sume kvadrata glavnih efekata i interakcije mogu se dobiti i kao rezultat ortogonalnih upoređenja (7.64), gde je:

$$\frac{C_1^2}{n \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2} + \frac{C_2^2}{n \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2} + \frac{C_3^2}{n \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2} = Q_T .$$

Za upoređenje u ovom ogledu je $n = 5$, a $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 = 4$, te je imenitelj $5 \times 4 = 20$. Iz sledećeg pregleda uzeti su podaci za ovo upoređenje:

| $a_1$ | | $a_2$ | |
|---|---|---|---|
| $b_1$ | $b_2$ | $b_1$ | $b_2$ |
| 24,7 | 25,6 | 24,6 | 21,9 |

Prvo upoređenje za glavni efekat *A* je: $1 + 1 - 1 - 1$, pa je:

$$\frac{(24{,}7 + 25{,}6 - 24{,}6 - 21{,}9)^2}{20} = 0{,}722$$

Drugo upoređenje za glavni efekat $B$ je: $1 - 1 + 1 - 1$, te je:

$$\frac{(24{,}7 - 25{,}6 + 24{,}6 - 21{,}9)^2}{20} = 0{,}162\,.$$

Treće upoređenje za interakciju $AB$ je: $1 - 1 - 1 + 1$, te je:

$$\frac{(24{,}7 - 25{,}6 - 24{,}6 + 21{,}9)^2}{20} = 0{,}6480\,.$$

Putem $F-$testa testira se dejstvo glavnih efekata i interakcije, i to:

$$F = \frac{0{,}722}{0{,}380} = 1{,}90\,,$$

$$F = \frac{0{,}162}{0{,}380} = 0{,}43\,,$$

$$F = \frac{0{,}648}{0{,}380} = 1{,}70\,.$$

U tabelama $F-$distribucije za $F_{(0{,}05\,;\ 1\ i\ 16)}$ kritična vrednost je 4,49. Prema tome, ni kod jednog efekta nema osnova za odbacivanje nulte hipoteze.Sada ćemo se, radi ilustracije, zadržati na *interpretiranju rezultata ogleda*, iako treba imati u vidu da ni jedan efekat nije značajan. U tu svrhu poslužićemo se tab. 10.3.

**TAB. 10.3. Srednja vrednost tretmana iz tab. 10.1.**

| Vrsta mineralnog đubriva | Dubina unošenja 15 ($b_1$) | Dubina unošenja 35 ($b_2$) | Aritmetička sredina | $b_1 - b_2$ |
|---|---|---|---|---|
| Superfosfat, $a_1$ | 4,94 | 5,12 | 5,03 | – 0,18 |
| Tomasovo brašno, $a_2$ | 4,92 | 4,38 | 4,65 | 0,54 |
| Aritmetička sredina | 4,93 | 4,75 | 4,84 | |
| $a_1 - a_2$ | 0,02 | 0,74 | | |

Iz ove tabele se vidi da se, kad je upotrebljen superfosfat i pri dubini unošenja od 15 *cm* u poređenju sa dubinom od 35 *cm*, prosečan prinos smanjuje za 0,18 *t/ha*. Međutim, kad je upotrebljeno Tomasovo brašno, razlika u prosečnom prinosu kod dubine od 15 *cm* je veća za 0,54 nego kod dubine unošenja od 35 *cm*. Sa druge strane, upotreba superfosfata pri dubini unošenja od 15 *cm* povećala je prinos za 0,02 *t/ha*, dok je pri dubini unošenja od 35 *cm* ta razlika 0,74.

Rezultati ogleda mogu da se interpretiraju i na drugi način. Pre svega, može se postaviti pitanje: da li su rezultati u primeni pojedinih tretmana nezavisni? Ako je tako, odgovor bi u pogledu dubine unošenja, bez obzira da li je primenjen superfosfat ili Tomasovo brašno, bio isti. Takođe imali bismo isti odgovor na vrstu đubriva nezavisno od dubine unošenja. U najboljem slučaju, kad su upoređenja nezavisna, imamo da je $a_1 - a_2 = 0$ ili $b_1 - b_2 = 0$. Ako je ova hipoteza tačna, kao što je slučaj u našem primeru, neslaganje je rezultat slučajnih varijacija. Kod tačne hipoteze vrednostima razlika: – 0,18, 0,54, 0,02 i 0,74 ne treba pridavati značaj. Sredina razlike od – 0,18 i 0,54 je 0,18 a sredina razlika od 0,02 i 0,74 je 0,38. Ove dve vrednosti predstavljaju glavne efekte dubine unošenja i vrste đubriva. Kod nezavisnosti ova dva faktora možemo da smatramo da dubina unošenja od 15 *cm* daje veći prinos u proseku za 0,18 *t/ha*, a da primena superfosfata daje u proseku veći prinos za 0,38 *t/ha*.

Postoji, međutim, mogućnost da faktori u ogledu nisu nezavisni. To će biti onda kad dubina unošenja dovodi do promene u prinosu, ali ta promena je značajnija uz primenu jednog od đubriva. Može se tako tražiti odgovor da li je dubina unošenja imala značajnijeg uticaja na veći prinos kad je bio superfosfat upotrebljen. Razlika između jednostavnih efekata za dubinu unošenja – 0,18 – 0,54 = – 0,72, odnosno za vrstu đubriva 0,02 – 0,74 = 0,72 pretstavlja interakciju dubina unošenja i vrste đubriva. Ta se razlika ponekad deli sa dva, tj. – 0,72/2 = – 0,36. Interakcija ovde pokazuje određen efekat na rezultate ogleda u ostvarenoj kombinaciji dva faktora.

Da bi se koncept interakcije još bolje shvatio, uzećemo tri različita rezultata ogleda sa dva faktora i svaki sa po tri tretmana, tj. 3 × 3:

| I | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|
| $b_1$ | 12 | 16 | 20 |
| $b_2$ | 16 | 20 | 24 |
| $b_3$ | 20 | 24 | 28 |

| II | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|
| $b_1$ | 26 | 14 | 18 |
| $b_2$ | 29 | 17 | 21 |
| $b_3$ | 34 | 22 | 26 |

| III | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|
| $b_1$ | 15 | 17 | 16 |
| $b_2$ | 19 | 22 | 26 |
| $b_3$ | 24 | 30 | 40 |

U prvom slučaju razlika kod faktora $a$ od jednog do drugog tretmana, tj. između $a_1$ i $a_2$ i $a_3$, iznosi 4, i to kod svakog tretmana faktora $b$. Pošto svaka razlika u ovom primeru iznosi 4, očigledno je da nema interakcije. Drugi primer pokazuje iste razlike od 3 do 5, između tretmana $b_1$ i $b_2$, odnosno $b_2$ i $b_3$ za svaki tretman faktora $a$. Te razlike su 12 i 4 između tretmana $a_1$ i $a_2$, odnosno $a_3$ i $a_2$ za svaki tretman faktora $b$. Ni ovde se ne pojavljuje interakcija. U trećem primeru nema takve pravilnosti u razlikama između pojedinih tretmana, pa ovakvi rezultati sugeriraju moguće postojanje interakcije.

## 10.3. Pretpostavke i komponente varijanse kod ogleda sa dva faktora

Matematički *model I* kod potpuno slučajnog rasporeda sa $a_i$ i $b_j$ tretmana svakog faktora je:

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \tag{10.1}$$

gde je $i = 1,...,a$; $j = 1,...,b$; $k = 1,...,n$. S obzirom da se radi o fiksnim tretmanima jednog i drugog faktora, to je:

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0 \, ; \quad \varepsilon_{ijk} \quad ima \quad N(0, \sigma^2) \, . \tag{10.2}$$

Isto tako, kod interakcije je:

$$\sum_{i=1}^{a} (\alpha \beta)_{ij} = \sum_{j=1}^{a} (\alpha \beta)_{ij} = 0 \, . \tag{10.3}$$

*Kod a* × b faktorijalnog ogleda dobijaju se tri grupe nezavisnih komponenti, i to dva glavna efekta i njihova interakcija plus pogreška.

Statistička analiza ovog $a \times b$ faktorijalnog ogleda u opštem slučaju je:

Suma kvadrata totala:

$$Q = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} X_{ijk}^2 - \frac{(X_{00})^2}{nab} \, . \tag{10.4}$$

Suma kvadrata tretmana:

$$Q_T = \frac{\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} T_{ij}^2}{n} - \frac{(X_{00})^2}{nab} \, . \tag{10.5}$$

Suma kvadrata pogreške:

$$Q_P = Q - Q_T. \tag{10.6}$$

Sume kvadrata efekta $A$, $B$ i interakcije $AB$ dobijaju se na sledeći način:

Suma kvadrata efekta $A$:

$$Q_A = \frac{\sum_{i=1}^{a} A_i^2}{nb} - \frac{(X_{00})^2}{nab} \, . \tag{10.7}$$

Suma kvadrata efekta $B$:

$$Q_B = \frac{\sum_{j=1}^{b} B_j^2}{na} - \frac{(X_{00})^2}{nab} \, . \tag{10.8}$$

Suma kvadrata interakcije $AB$:

$$Q_{AB} = Q_T - Q_A - Q_B, \tag{10.9}$$

gde su:

$X_{00}$ – ukupna vrednost svih posmatranja,

$T_{ij}$ – ukupna vrednost svih posmatranja $i$–tog tretmana faktora $a$ i $j$–tog tretmana faktora $b$,

$A_i$ – vrednost svih posmatranja $a$ faktora $i$–tog tretmana,

$B_j$ – vrednost svih posmatranja $b$ faktora $j$–tog tretmana.

Analiza varijanse data je u tab. 10.4.

**TAB. 10.4. Analiza varijanse $a \times b$ faktorijalnog ogleda**

| Izvori varijacije | Stepeni slobode | Suma kvadrata | Sredina kvadrata |
|---|---|---|---|
| $A$ | $a-1$ | $Q_A$ | $Q_A / (a-1)$ |
| $B$ | $b-1$ | $Q_B$ | $Q_B / (b-1)$ |
| $AB$ | $(a-1)(b-1)$ | $Q_{AB}$ | $Q_{AB} / [(a-1)(b-1)]$ |
| Pogreška | $nab-ab$ | $Q_P$ | $Q_P / (nab-ab)$ |

Komponente varijanse kod četiri moguća modela u $a \times b$ faktorijalnom ogledu pokazuje tab. 10.5.

Kad testiramo hipotezu o homogenosti kod modela I, imamo tri $F$–testa, i to:

$$F = \frac{Q_A/(a-1)}{Q_P/(nab-ab)}, \tag{10.10}$$

$$F = \frac{Q_B/(b-1)}{Q_P/(nab-ab)}, \tag{10.11}$$

$$F = \frac{Q_{AB}/[(a-1)(b-1)]}{Q_P/(nab-ab)}. \tag{10.12}$$

Veličina $r_1$ zavisi od broja stepeni slobode glavnih efekata i interakcije, a $r_2$ od broja stepeni slobode pogreške.

Kada su u pitanju model II i mešoviti model situacija je nešto drugačija. Kod *modela II* značajnost glavnih efekata *testira se u odnosu na interakciju* koja služi kao imenitelj kod $F$–testa. Tako isto se postupa i kod *mešovitog modela* za one efekte koji su fiksni, a za one koji su slučajno promenljivi $F$–test se izvodi uzimajući varijansu pogreške za imenitelj kao kod modela I. Na osnovu ovoga može da se izvede pravilo koje glasi: *kod testiranja imenitelj treba da sadrži sve komponente izuzev one koja se testira.* To je očigledno kod modela II i efekata koji su slučajne varijacije u mešovitom modelu.

Ako se radi o ogledu sa *dva faktora u slučajnom blok–sistemu*, tada model sadrži jednu komponentu više i glasi:

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \rho_k + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \tag{10.13}$$

gde je $\rho_k$–dejstvo $k$ ponavljanja. U analizi komponenti analize varijanse, tj. u utvrđivanju očekivanih varijansi, varijansa blokova nema praktičnog značaja.

Za ilustraciju ogleda sa dva faktora u potpuno slučajnom rasporedu uzećemo ispitivanja o uticaju načina držanja tovne junadi na prirast uz primenu kastracije i hidroksizina (Institut za stočarstvo, Novi Sad). Ogled je izveden sa 6 grupa, svaka od po 10 grla. Prvi faktor je uključivao tri tretmana: 1) kastrirana i 2) nekastrirana grla i 3) u hrani nije dodavan tran $Q$ (hidroksizin hidrohlorid). Drugi faktor, dva tretmana: 1) vezana i 2) nevezana grla (slobodno držana). Prema tome, radi se o $2 \times 3$ faktorijalnom ogledu. Ogled je trajao 121 dan i prosečan prirast u kg dat je u tab. 10.6.

**TAB. 10.5. Komponente varijansi u 4 modela u $a \times b$ faktorijalnom ogledu**

| Izvori varijacije | Model I | Model II | Mešoviti model, fiksno $A$ | Mešoviti model, fiksno B |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | $\sigma^2 + nb\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2/(a-1)$ | $\sigma^2 + n\sigma_{AB}^2 + nb\sigma_A^2$ | $\sigma^2 + n\sigma_{AB}^2 + \frac{nb}{a-1}\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2$ | $\sigma^2 + nb\sigma_A^2$ |
| $B$ | $\sigma^2 + na\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2/(b-1)$ | $\sigma^2 + n\sigma_{AB}^2 + na\sigma_B^2$ | $\sigma^2 + na\sigma_B^2$ | $\sigma^2 + n\sigma_{AB}^2 + \frac{na}{b-1}\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2$ |
| $AB$ | $\sigma^2 + n\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$ | $\sigma^2 + n\sigma_{AB}^2$ | $\sigma^2 + n\sigma_{AB}^2$ | $\sigma^2 + n\sigma_{AB}^2$ |
| Pogreška | $\sigma^2$ | $\sigma^2$ | $\sigma^2$ | $\sigma^2$ |

TAB. 10.5. Komponente varijansi u 4 modela u $a \times b$ faktorijalnom ogledu

**TAB. 10. 6. Rezultati 2 × 3 faktorijalnog ogleda sa tovnom junadi u potpuno slučajnom rasporedu**

| Ponavljanje | Kastrirana ($a_1$) | | Nekastrirana ($a_2$) | | Nekastrirana Tran $Q(a_3)$ | | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | vezana ($b_1$) | nevezana ($b_2$) | vezana ($b_1$) | nevezana ($b_2$) | vezana ($b_1$) | nevezana ($b_2$) | |
| 1 | 0,91 | 1,39 | 1,27 | 0,58 | 1,32 | 0,88 | 6,35 |
| 2 | 1,06 | 0,82 | 1,47 | 1,47 | 0,82 | 0,74 | 6,38 |
| 3 | 1,06 | 1,09 | 1,34 | 1,00 | 1,18 | 1,17 | 6,84 |
| 4 | 0,97 | 1,13 | 1,12 | 1,09 | 0,90 | 1,17 | 6,38 |
| 5 | 1,22 | 1,02 | 1,03 | 1,17 | 1,47 | 1,22 | 7,13 |
| 6 | 1,36 | 0,63 | 1,23 | 1,22 | 1,37 | 1,26 | 7,07 |
| 7 | 1,30 | 1,32 | 1,34 | 1,13 | 1,35 | 1,41 | 7,85 |
| 8 | 1,39 | 1,58 | 0,96 | 1,07 | 1,39 | 1,19 | 7,58 |
| 9 | 1,35 | 1,12 | 1,45 | 1,31 | 1,35 | 1,45 | 8,03 |
| 10 | 1,31 | 0,97 | 1,32 | 1,51 | 1,25 | 1,13 | 7,49 |
| Ukupno | 11,93 | 11,07 | 12,53 | 11,55 | 12,40 | 11,62 | 71,10 |

Ovde su date izračunate sume kvadrata.

$$C = \frac{(71{,}10)^2}{60} = 84{,}253\,.$$

Suma kvadrata totala = $(0{,}91)^2 + (1{,}06)^2 + \ldots + (1{,}13)^2 - 84{,}253 = 2{,}837$.

$$\text{Suma kvadrata tretmana} = \frac{(11{,}93)^2 + \ldots + (11{,}62)^2}{10} - 84{,}253 = 0{,}152\,.$$

Suma kvadrata pogreške = $2{,}837 - 0{,}152 = 2{,}685$.

$$\text{Suma kvadrata efekta } A = \frac{(23{,}00)^2 + (24{,}08)^2 + (24{,}02)^2}{20} - 84{,}253 = 0{,}037\,.$$

$$\text{Suma kvadrata efekta } B = \frac{(36{,}86)^2 + (34{,}24)^2}{30} - 84{,}253 = 0{,}114\,.$$

Suma kvadrata interakcije $AB = 0{,}152 - 0{,}037 - 0{,}114 = 0{,}001$.

Upoređenje izračunatih vrednosti $F$ za pojedine efekte sa kritičnim vrednostima u tabelama $F-$distribucije pokazuje da u ogledu nema značajnih efekata.

**TAB. 10.7. Analiza varijanse 2 × 3 faktorijalnog ogleda sa tovom junadi**

| Izvori varijacije | Stepeni slobode | Suma kvadrata | Sredina kvadrata | $F$ |
|---|---|---|---|---|
| Tretmani | 5 | 0,152 | 0,0304 | |
| $A$ | 2 | 0,037 | 0,0185 | 0,37 |
| $B$ | 1 | 0,114 | 0,1140 | 2,28 |
| $AB$ | 2 | 0,001 | 0,0005 | 0,01 |
| Pogreška | 54 | 2,685 | 0,050 | |
| Ukupno | 59 | 2,837 | | |

Za *upoređenja* između sredina pojedinih tretmana i olakšanje interpretacije rezultata obično se sastavlja tabela sa podacima o sredinama pojedinih tretmana (tab. 10.8).

**TAB. 10.8. Tabela srednjih vrednosti tretmana ogleda iz tab. 10.6.**

| Faktor $b$ | Faktor a | | | Opšta sredina |
|---|---|---|---|---|
| | Kastrirana | Nekastrirana | Nekastrirana Tran $Q$ | |
| Vezana | 1,19 | 1,25 | 1,24 | 1,22 |
| Nevezana | 1,11 | 1,15 | 1,16 | 1,14 |
| Opšta sredina | 1,15 | 1,20 | 1,20 | 1,18 |

Tab. 10.9. pruža rezultate 4 × 3 faktorijalnog ogleda sa kukuruzom za silažu (dr J. Gotlin, Poljoprivredni fakultet, Zagreb). Ogled je obuhvatio 4 sorte koje ćemo uzeti kao faktor $a$, i to: Arisona ($a_1$), Iowa ($a_2$), Wisconsin ($a_3$), vukovarski zuban ($a_4$) i tri razmaka setve uzeta kao faktor $b$: 70 × 70 $cm$ ($b_1$), 70 × 20 $cm$ ($b_2$), 50 × 30 $cm$ ($b_3$). Prinos zelene mase dat je u $t/ha$.

Izračunate sume kvadrata su sledeće:

$$C = \frac{(369{,}18)^2}{72} = 1.892{,}9705\,.$$

Suma kvadrata totala = $(4{,}72)^2 + (5{,}36)^2 + \ldots + (4{,}93)^2 - 1.892{,}9705 = 45{,}4920$.

Suma kvadrata blokova $= \dfrac{(63{,}70)^2 + \ldots + (55{,}87)^2}{12} - 1.892{,}9705 = 5{,}7105\,.$

Suma kvadrata tretmana =

$$= \frac{(29{,}65)^2 + (32{,}86)^2 + \ldots + (34{,}99)^2}{6} - 1.892{,}9705 = 15{,}9909.$$

Suma kvadrata pogreške = $45{,}4920 - 5{,}7105 - 15{,}9909 = 23{,}7906$.

TAB. 10.9. Rezultati 4 × 3 faktorijalnog ogleda sa kukuruzom za silažu

| Blokovi | $a_1$ | | | $a_2$ | | | $a_3$ | | | $a_4$ | | | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | |
| 1 | 4,72 | 5,36 | 6,08 | 4,63 | 5,02 | 5,58 | 4,85 | 4,96 | 5,47 | 4,82 | 6,34 | 5,87 | 63,70 |
| 2 | 4,39 | 5,55 | 6,14 | 4,67 | 4,19 | 4,86 | 4,88 | 4,90 | 6,51 | 4,94 | 4,74 | 8,13 | 63,90 |
| 3 | 6,00 | 5,46 | 5,83 | 6,24 | 5,03 | 4,66 | 5,92 | 4,80 | 6,87 | 4,76 | 5,13 | 5,20 | 65,90 |
| 4 | 5,12 | 4,85 | 6,20 | 4,00 | 4,07 | 4,66 | 6,08 | 4,44 | 5,93 | 4,73 | 4,51 | 6,26 | 60,85 |
| 5 | 4,73 | 6,11 | 5,40 | 3,72 | 4,56 | 4,50 | 4,18 | 5,73 | 5,42 | 4,12 | 5,89 | 4,60 | 58,96 |
| 6 | 4,69 | 5,53 | 4,88 | 4,12 | 4,07 | 4,22 | 3,70 | 4,62 | 4,96 | 5,35 | 4,80 | 4,93 | 55,87 |
| Ukupno | 29,65 | 32,86 | 34,53 | 27,38 | 26,94 | 28,48 | 29,61 | 29,45 | 35,16 | 28,72 | 31,41 | 34,99 | 369,18 |

TAB. 10.9. Rezultati 4 × 3 faktorijalnog ogleda sa kukuruzom za silažu

Suma kvadrata efekta $A$ (sorte) $= \dfrac{(97{,}04)^2 + \ldots + (95{,}12)^2}{18} - 1.892{,}9705 = 6{,}9086$.

Suma kvadrata efekta $B$ (razmak setve) $=$

$$= \frac{(115{,}36)^2+(120{,}66)^2+(133{,}16)^2}{24} - 1.892{,}9705 = 6{,}9608.$$

Suma kvadrata interakcije $AB$ (sorte × razmak setve) $=$
$= 15{,}9909 - 6{,}9086 - 6{,}9608 = 1{,}1215$.

**TAB. 10.10. Analiza varijanse 4 × 3 faktorijalnog ogleda sa kukuruzom za silažu**

| Izvori varijacije | Stepeni slobode | Suma kvadrata | Sredina kvadrata | Očekivana sredina kvadrata |
|---|---|---|---|---|
| Blokovi | 5 | 5,7105 | 1,1421 | $\sigma^2 + \frac{12}{5}\sum_{k=1}^{6}\rho_k^2$ |
| Sorta, $A$ | 3 | 6,9086 | 2,3028 | $\sigma^2 + \frac{18}{3}\sum_{i=1}^{4}\alpha_i^2$ |
| Razmak setve, $B$ | 2 | 6,9608 | 3,4804 | $\sigma^2 + \frac{24}{2}\sum_{j=1}^{3}\beta_j^2$ |
| Interakcija, $AB$ | 6 | 2,1215 | 0,3536 | $\sigma^2 + \frac{6}{6}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}(\alpha\beta)_{ij}^2$ |
| Pogreška | 55 | 23,7906 | 0,4325 | $\sigma^2$ |
| Ukupno | 71 | 45,4920 | | |

Analiza varijanse prikazana je u tab. 10.10. a izračunate $F$–vrednosti su sledeće:

$$F = \frac{\textit{Sredina kvadrata sorti } (A)}{\textit{Sredina kvadrata pogreske}} = \frac{2{,}3028}{0{,}4325} = 5{,}32\,,$$

$F_{(0{,}05;\ 3\ i\ 55)} = 2{,}78$.

$$F = \frac{\textit{Sredina kvadrata razmaka setve } (B)}{\textit{Sredina kvadrata pogreske}} = \frac{3{,}4804}{0{,}4325} = 8{,}04\,,$$

$F_{(0{,}05;\ 2\ i\ 55)} = 3{,}17$.

$$F = \frac{\textit{Sredina kvadrata interakcije } AB}{\textit{Sredina kvadrata pogreske}} = \frac{0{,}3536}{0{,}4325} = 0{,}82\,,$$

$F_{(0{,}05;\ 6\ i\ 55)} = 2{,}27$.

Upoređenje izračunatih i tabličnih $F$–vrednosti pokazuju da su varijansa sorti i varijansa razlika između setve značajne dok varijansa interakcije nije značajna. Da je interakcija značajna opravdano bi bilo ukazivati na mogući kombinovan uticaj sorti i razmaka setve na prinos. U ovom ogledu to nije slučaj, pa posebni zaključci mogu da se izvedu za tretmane svakog od faktora.

## 10.4. Regresiona analiza dejstva tretmana u ogledima sa dva faktora

U faktorijalnim ogledima jedan ili više faktora mogu da predstavljaju *kvantitativne veličine* date na dva ili više nivoa s *jednakim* numeričkim razmacima između tretmana. U takvoj situaciji sume kvadrata faktorijalnih efekata sa kvantitativnim veličinama mogu se podeliti na komponente koje proizilaze iz *linearne regresije, kvadratne regresije i eventualno regresije većeg stepena*. To se izvodi, kao što smo videli, pomoću *ortogonalnih polinoma* datih u tab. 9.25.

Na primer, u jednom $a \times b$ faktorijalnom ogledu, gde se svaki faktor nalazi na više od dva nivoa, suma kvadrata glavnog efekta $A$ deli se na sume kvadrata linearne regresije $A_{(L)}$, kvadratne regresije $A_{(K)}$ i regresije većeg stepena. Isti je slučaj i sa sumom kvadrata glavnog efekta $B$, tako da se dobiju regresije $B_{(L)}$, $B_{(K)}$ itd. Slično se ostvaruje podela sume kvadrata interakcije $AB$ na sume kvadrata regresija $A_{(L)}B_{(L)}$, $A_{(L)}B_{(K)}$, $A_{(K)}B_{(L)}$, $A_{(K)}B_{(K)}$. Jasno je da broj mogućih podela suma kvadrata na regresione komponente zavisi i od broja nivoa svakog pojedinog faktora. Podela na linearnu i kvadratnu komponentu najčešće zadovoljava praktične ciljeve, pa ako je još uvek ostalo više od dve komponente, one se uzimaju zajedno kao ostatak i obično nisu značajne.

**TAB. 10.11. Sadržaj azota u nadzemnom delu ponika pšenice**

| Temperatura | Đubrivo | Ponavljanje 1 | Ponavljanje 2 | Ponavljanje 3 | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|
| 5°C | *O* | 3,049 | 3,001 | 3,664 | 9,714 |
| | *N* | 4,123 | 4,337 | 4,269 | 12,729 |
| | *NP* | 3,726 | 3,821 | 3,960 | 11,507 |
| | *NK* | 4,066 | 4,319 | 3,985 | 12,370 |
| | *NPK* | 3,869 | 3,722 | 4,107 | 11,698 |
| 10°C | *O* | 3,877 | 3,458 | 3,583 | 10,918 |
| | *N* | 4,823 | 4,594 | 4,795 | 14,212 |
| | *NP* | 4,859 | 5,043 | 4,437 | 14,339 |
| | *NK* | 4,108 | 4,534 | 4,344 | 12,986 |
| | *NPK* | 4,152 | 4,230 | 4,573 | 12,955 |
| 15°C | *O* | 3,738 | 4,003 | 4,166 | 11,907 |
| | *N* | 5,308 | 5,258 | 5,162 | 15,728 |
| | *NP* | 5,031 | 4,900 | 5,280 | 15,211 |
| | *NK* | 5,362 | 5,237 | 5,069 | 15,668 |
| | *NPK* | 5,108 | 4,776 | 5,014 | 14,898 |
| 20°C | *O* | 3,707 | 3,800 | 3,933 | 11,440 |
| | *N* | 4,935 | 4,847 | 5,170 | 14,952 |
| | *NP* | 4,949 | 5,392 | 5,216 | 15,557 |
| | *NK* | 5,138 | 5,204 | 4,991 | 15,333 |
| | *NPK* | 5,116 | 4,905 | 5,128 | 15,149 |
| Ukupno | | 89,044 | 89,381 | 90,846 | 269,271 |

Za ilustraciju regresije kod jednog faktora u faktorijalnom ogledu uzećemo primer prikazan u tab. 10.11. koji daje rezultate ogleda o sadržaju azota u nadzemnom delu ponika pšenice (dr M. Sarić, Institut za poljoprivredna istraživanja, Novi Sad). Podaci su dati u *mg* na 100 grama suve materije. U ogled su uključena dva faktora, i to temperatura (4 nivoa) i đubrivo (5 tretmana), dakle 4 × 5 faktorijalni ogled. Sume kvadrata za analizu varijanse izračunate su na uobičajeni način i date su u tab. 10.12. U cilju lakše interpretacije rezultata ogleda sume tretmana pojedinih kombinacija date su u tab. 10.13.

**TAB. 10.12. Analiza varijanse ogleda o sadržini azota u nadzemnom delu ponika pšenice**

| Izvori varijacije | Stepeni slobode | Suma kvadrata | Sredina kvadrata | $F$ |
|---|---|---|---|---|
| Blokovi, $B$ | 2 | 0,092 | 0,046 | |
| Temperatura, $T$ | 3 | 10,227 | 3,409 | 92,14 |
| Đubrivo, $Đ$ | 4 | 10,525 | 2,631 | 71,11 |
| Interakcija, $TĐ$ | 12 | 1,108 | 0,092 | 2,49 |
| Pogreška, $P$ | 38 | 1,395 | 0,037 | |
| Ukupno | 59 | 23,347 | | |

**TAB. 10.13. Sume tretmana u ogledu o sadržini azota**

| Đubriva | Temperatura | | | | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|
| | 5°C | 10°C | 15°C | 20°C | |
| *O* | 9,714 | 10,918 | 11,907 | 11,440 | 43,979 |
| *N* | 12,729 | 14,212 | 15,728 | 14,952 | 57,621 |
| *NP* | 11,507 | 14,339 | 15,211 | 15,557 | 56,614 |
| *NK* | 12,370 | 12,986 | 15,668 | 15,333 | 56,357 |
| *NPK* | 11,698 | 12,955 | 14,898 | 15,149 | 54,700 |
| Ukupno | 58,018 | 65,410 | 73,412 | 72,431 | 269,271 |

Kao što se vidi iz tab. 10.12. odnos varijansi je značajan kako za glavne efekte tako i za interakciju. Sa porastom temperature rasla je ukupna količina azota što ukazuje na postojanje linearnog trenda. S obzirom da je interakcija značajna, ta pravilnost nije karakteristična za sve tretmane sa đubrivom. Može se uočiti da pri temperaturi od 20°C tretmani koji ne sadrže fosfor ($P$) ispoljavaju manju sadržinu azota nego pri temperaturi od 15°C.

Za izračunavanje regresije za temperature linearno i kvadratno upoređenje izračunato je za svako đubrivo. Koeficijenti za upoređenje uzeti su iz tab. 9.25. Način izvođenja ovih upoređenja dat je u tab. 10.14.

Kontrola: $9{,}327 + 1{,}332 + 0{,}675 = 10{,}227 + 1{,}108$.

Vrednosti na levoj strani tabele su suma kvadrata regresije svakog đubriva, a vrednosti na desnoj – suma kvadrata temperature i interakcije u analizi varijanse (tab. 10.12).

TAB. 10.14. Regresija za svako đubrivo

a) *linearna*

| Đubriva | Temperatura 5° | 10° | 15° | 20° | $C_i$ | $C_i^2/(3 \cdot 20)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O$ | (−3)( 9,714) | +(−1)(10,918) | +(+1)(11,907) | +(+3)(11,440) | =+ 6,617 | 0,634 |
| $N$ | (−3)(12,729) | +(−1)(14,212) | +(+1)(15,728) | +(+3)(14,952) | =+ 8,185 | 1,116 |
| $NP$ | (−3)(11,507) | +(−1)(14,339) | +(+1)(15,211) | +(+3)(15,557) | =+13,022 | 2,826 |
| $NK$ | (−3)(12,370) | +(−1)(12,986) | +(+1)(15,668) | +(+3)(15,333) | =+11,571 | 2,231 |
| $NPK$ | (−3)(11,698) | +(−1)(12,955) | +(+1)(14,898) | +(+3)(15,149) | =+12,296 | 2,520 |
| Ukupno | (−3)(58,018) | +(−1)(65,410) | +(+1)(73,412) | +(+3)(72,431) | =+51,241 | 9,327 |

b) *kvadratna*

| Đubriva | Temperatura 5° | 10° | 15° | 20° | $C_i$ | $C_i^2/(3 \cdot 4)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O$ | (+1)( 9,714) | +(−1)(10,918) | +(−1)(11,907) | +(+1)(11,440) | =−1,671 | 0,233 |
| $N$ | (+1)(12,729) | +(−1)(14,212) | +(−1)(15,728) | +(+1)(14,952) | =−2,259 | 0,425 |
| $NP$ | (+1)(11,507) | +(−1)(14,339) | +(−1)(15,211) | +(+1)(15,557) | =−2,486 | 0,515 |
| $NK$ | (+1)(12,370) | +(−1)(12,986) | +(−1)(15,668) | +(+1)(15,333) | =−0,951 | 0,075 |
| $NPK$ | (+1)(11,698) | +(−1)(12,955) | +(−1)(14,898) | +(+1)(15,149) | =−1,006 | 0,084 |
| Ukupno | (+1)(58,018) | +(−1)(65,410) | +(−1)(73,412) | +(+1)(72,431) | =−8,373 | 1,332 |

c) *kubna*

| Đubriva | Temperatura 5° | 10° | 15° | 20° | $C_i$ | $C_i^2/(3 \cdot 20)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O$ | (−1)( 9,714) | +(+3)(10,918) | +(−3)(11,907) | +(+1)(11,440) | =−1,241 | 0,026 |
| $N$ | (−1)(12,729) | +(+3)(14,212) | +(−3)(15,728) | +(+1)(14,952) | =−2,325 | 0,090 |
| $NP$ | (−1)(11,507) | +(+3)(14,339) | +(−3)(15,211) | +(+1)(15,557) | =+1,434 | 0,034 |
| $NK$ | (−1)(12,370) | +(+3)(12,986) | +(−3)(15,668) | +(+1)(15,333) | =−5,083 | 0,431 |
| $NPK$ | (−1)(11,698) | +(+3)(12,955) | +(−3)(14,898) | +(+1)(15,149) | =−2,378 | 0,094 |
| Ukupno | (−1)(58,018) | +(+3)(65,410) | +(−3)(73,412) | +(+1)(72,431) | =−9,593 | 0,675 |

TAB. 10.14. Regresija za svako đubrivo

*Suma kvadrata regresije za temperature je:*

$$T_L = \frac{(\sum_{i=1}^{a} C_i)^2}{an \sum_{i=1}^{a} \lambda_i^2} = \frac{(51{,}241)^2}{5 \cdot 3 \cdot 20} = 8{,}752\,, \tag{10.14}$$

$$T_{KV} = \frac{(-8{,}373)^2}{5 \cdot 3 \cdot 4} = 1{,}168\,,$$

$$T_{KU} = \frac{(-9{,}593)^2}{5 \cdot 3 \cdot 20} = 0{,}307\,.$$

Za ova upoređenja važi pravilo: ako imamo $a$ $C_i$ upoređenja, tada je njihov zbir $\sum_{i=1}^{a} C_i$ jednak upoređenju $C_j$ zbira tretmana. Suma kvadrata za $C_j$ upoređenje data je formulom (10.14).

Suma kvadrata interakcije je:

$$\frac{\sum_{i=1}^{a} C_i^2}{n \sum_{i=1}^{a} \lambda_i^2} - \frac{(\sum_{i=1}^{a} C_i)^2}{an \sum_{i=1}^{a} \lambda_i^2}\,. \tag{10.15}$$

U našem primeru suma kvadrata interakcije je:

$$T_L Đ = \frac{(6{,}167)^2 + \dots + (12{,}296)^2}{3 \cdot 20} - 8{,}752 = 9{,}328 - 8{,}752 = 0{,}576,$$

$$T_{KV} Đ = \frac{(-1{,}671)^2 + \dots + (-1{,}006)^2}{3 \cdot 4} - 1{,}168 = 1{,}333 - 1{,}168 = 0{,}615,$$

$$T_{KU} Đ = \frac{(-1{,}241)^2 + \dots + (-2{,}378)^2}{3 \cdot 20} - 0{,}307 = 0{,}675 - 0{,}307 = 0{,}368.$$

Analiza varijanse sa sumom kvadrata regresija data je u tab. 10.15.

S obzirom da su sve tri regresije ($T_L$, $T_{KV}$, $T_{KU}$) značajne, optimalnu temperaturu za sadržinu azota u nadzemnom delu ne treba tražiti van okvira tretmana za temperaturu.

**TAB. 10.15. Analiza varijanse sa sumama kvadrata regresija ogleda o sadržini azota u nadzemnom delu ponika pšenice**

| Izvori varijacije | Stepeni slobode | Suma kvadrata | Sredina kvadrata | $F$ |
|---|---|---|---|---|
| Blokovi, $B$ | 2 | 0,092 | 0,046 | |
| Đubrivo, $Đ$ | 4 | 10,525 | 2,631 | |
| Temperatura, $T$ | 3 | 10,227 | 3,409 | |
| Linearna, $T_L$ | 1 | 8,752 | 8,752 | 236,54 |
| Kvadratna, $T_{KV}$ | 1 | 1,168 | 1,168 | 31,57 |
| Kubna, $T_{KU}$ | 1 | 0,307 | 0,307 | 8,30 |
| Interakcija | 12 | 1,108 | 0,092 | |
| Linearna, $T_LĐ$ | 4 | 0,576 | 0,144 | 3,89 |
| Kvadratna, $T_{KV}Đ$ | 4 | 0,615 | 0,154 | 4,16 |
| Kubna, $T_{KU}Đ$ | 4 | 0,368 | 0,092 | 2,49 |
| Pogreška, $P$ | 38 | 1,395 | 0,037 | |
| Ukupno | 59 | 23,347 | | |

Uzećemo jedan faktorijalni ogled kod koga su oba faktora izražena u numeričkim vrednostima. Radi se o jednom ogledu izvedenom u kombinaciji s tri faktora, i to đubrivo, gustoća setve i sorte (J. Potočanac, 1962). Pošto su kod trećeg faktora u pitanju kvalitativne karakteristike tretmana, to ćemo za ilustraciju uzeti prvo dva faktora (đubrivo i gustoću) kod pšenice sorte "san pastore", svaki na tri nivoa. Varijante gustoće su: 450,600 i 750 sejanih zrna $/m^2$. Doze azotnog đubriva su 66, 101 i 136 *kg/ha*. Ogled je bio postavljen po planu podeljenih parcela. Mi ćemo ga, međutim, ovde uzeti kao obični 3 × 3 faktorijalni ogled sa tri ponavljanja. Rezultati (u $g/m^2$) prikazani su u tab. 10.16.

**TAB. 10.16. Rezultati 3 × 3 faktorijalnog ogleda sa gustoćom setve i đubrivom**

| Gustoća | Đubrivo | Ponavljanje 1 | Ponavljanje 2 | Ponavljanje 3 | Ukupno | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 450 | 66 | 542 | 488 | 556 | 1.586 | |
| | 101 | 530 | 514 | 504 | 1.548 | |
| | 136 | 526 | 492 | 516 | 1.534 | 4.668 |
| 600 | 66 | 529 | 438 | 556 | 1.523 | |
| | 101 | 508 | 508 | 522 | 1.538 | |
| | 136 | 540 | 454 | 530 | 1.524 | 4.585 |
| 750 | 66 | 538 | 506 | 472 | 1.516 | |
| | 101 | 506 | 504 | 468 | 1.478 | |
| | 136 | 540 | 566 | 554 | 1.660 | 4.654 |
| Ukupno | | 4.759 | 4.470 | 4.678 | 13.907 | |

Analiza varijanse prikazana je u tab. 10.17.

**TAB. 10.17. Analiza varijanse ogleda iz tab. 10.16.**

| Izvori varijacije | Stepeni slobode | Suma kvadrata | Sredina kvadrata | $F$ |
|---|---|---|---|---|
| Blokovi | 2 | 4.938,74 | 2.469,37 | |
| Đubrivo, $Đ$ | 2 | 1.336,51 | 668,25 | 0,75 |
| Gustoća, $G$ | 2 | 438,74 | 219,37 | 0,25 |
| Interakcija, $Đ \times G$ | 4 | 5.337,93 | 1.334,48 | 1,50 |
| Pogreška | 16 | 14.225,93 | 889,12 | |
| Ukupno | 26 | 26.277,85 | | |

Iz odnosa $F$ vidi se da nijedna varijansa nije značajna. Ipak, u daljem postupku, za ilustraciju, podelićemo sume kvadrata gustoće i đubriva na sume kvadrata za linearnu i kvadratnu regresiju a sumu kvadrata interakcije na četiri individualne sume kvadrata, tako da će svaka suma kvadrata predstvljati regresiju $Đ_L$ i $Đ_{KV}$ na gustoću. Na taj način se dobijaju sledeće četiri regresije: $G_L Đ_L$, $G_L Đ_{KV}$, $G_{KV} Đ_L$ i $G_{KV} Đ_{KV}$.

Da bi se dobile odgovarajuće regresije poći ćemo od tab. 10.18.

**TAB. 10.18. Suma tretmana u kombinaciji gustoća × đubrivo**

| Gustoća | Đubrivo | | | Ukupno |
|---|---|---|---|---|
| | 66 | 101 | 136 | |
| 450 | 1.586 | 1.548 | 1.534 | 4.668 |
| 600 | 1.523 | 1.538 | 1.524 | 4.585 |
| 750 | 1.516 | 1.478 | 1.660 | 4.654 |
| Ukupno | 4.625 | 4.564 | 4.718 | 13.907 |

$$Đ_L = \frac{[(-1)(4.625) + (0)(4.564) + (+1)(4.718)]^2}{3 \cdot 3[(-1)^2 + (0)^2 + (+1)^2]} = \frac{(93)^2}{3 \cdot 3 \cdot 2} = 480{,}50\,,$$

$$Đ_{KV} = \frac{[(+1)(4.625) + (-2)(4.564) + (+1)(4.718)]^2}{3 \cdot 3[(+1)^2 + (-2)^2 + (+1)^2]} = \frac{(215)^2}{3 \cdot 3 \cdot 6} = 856{,}01\,,$$

$$G_L = \frac{[(-1)(4.668) + (0)(4.585) + (+1)(4.654)]^2}{3 \cdot 3[(-1)^2 + (0)^2 + (+1)^2]} = \frac{(-14)^2}{3 \cdot 3 \cdot 2} = 10{,}89\,,$$

$$G_{KV} = \frac{[(+1)(4.668) + (-2)(4.585) + (+1)(4.654)]^2}{3 \cdot 3[(1)^2 + (-2)^2 + (+1)^2]} = \frac{(152)^2}{3 \cdot 3 \cdot 6} = 427{,}85\,.$$

Da bi se dobila četiri odgovarajuća upoređenja za interakciju $G$ i $Đ$, izračunavamo linearnu i kvadratnu regresiju kod đubriva za svaku gustoću.

Linearna upoređenja za đubrivo:

$(-1)(1.586)+(0)(1.548)+(+1)(1.534)= -52$

$(-1)(1.523)+(0)(1.538)+(+1)(1.524)= +1$

$(-1)(1.516)+(0)(1.478)+(+1)(1.660)=+144$

Ukupno 93

Kvadratna upoređenja za đubrivo:

$(+1)(1.586)+(-2)(1.548)+(+1)(1.534)= +24$

$(+1)(1.523)+(-2)(1.538)+(+1)(1.524)= -29$

$(+1)(1.516)+(-2)(1.478)+(+1)(1.660)=+220$

Ukupno 215

Odgovarajuće sume kvadrata su sledeće:

$$Đ_L G_L = \frac{[(-1)(-52)+(0)(+1)+(+1)(+144)]^2}{3\{[(-1)^2+(0)^2+(+1)^2]\cdot[(-1)^2+(0)^2+(+1)^2]\}} = \frac{(196)^2}{3\cdot 2\cdot 2} = 3.201{,}33,$$

$$Đ_L G_{KV} = \frac{[(+1)(-52)+(-2)(+1)+(+1)(+144)]^2}{3\{[(+1)^2+(0)^2+(+1)^2]\cdot[(+1)^2+(-2)^2+(+1)^2]\}} = \frac{(90)^2}{3\cdot 2\cdot 6} = 225{,}00,$$

$$Đ_{KV} G_L = \frac{[(-1)(+24)+(0)(-29)+(+1)(220)]^2}{3\{[(+1)^2+(-2)^2+(+1)^2]\cdot[(-1)^2+(0)^2+(+1)^2]\}} = \frac{(196)^2}{3\cdot 6\cdot 2} = 1.067{,}11,$$

$$Đ_{KV} G_{KV} = \frac{[(+1)(+24)+(-2)(-29)+(+1)(220)]^2}{3\{[(+1)^2+(-2)^2+(+1)^2]\cdot[(+1)^2+(-2)^2+(+1)^2]\}} = \frac{(302)^2}{3\cdot 6\cdot 6} = 844{,}48.$$

Ova poslednja četiri upoređenja izvode se po pravilu: ako je upoređenje $C_i$ izvedeno, drugo upoređenje $C_j$ može biti izvedeno na upoređenje, $C_i$. Suma kvadrata upoređenja $C_j$ je:

$$\frac{C_j^2}{n\left(\sum_{i=1}^{a}\lambda_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{b}\lambda_j^2\right)}. \tag{10.16}$$

Lako je proveriiti da su zbirovi suma kvadrata ovih poređenja jednaki sumama kvadrata odgovarajućih efekata u analizi varijanse iz tab. 10.17. Najpreglednija predstava o značajnosti ovih upoređenja dobiće se ako se prikažu u tabeli analize varijanse (tab. 10.19).

**TAB. 10.19. Analiza varijanse ogleda sa gustoćom setve i đubrivom**

| Izvori varijacije | Stepeni slobode | | Suma kvadrata | | Sredina kvadrata |
|---|---|---|---|---|---|
| Blokovi | 2 | | 4.938,74 | | 2.469,37 |
| Đubrivo | 2 | | 1.336,51 | | |
| $Đ_L$ | | 1 | | 480,50 | 480,50 |
| $Đ_{KV}$ | | 1 | | 856,01 | 856,01 |
| Gustoća | 2 | | 438,74 | | |
| $G_L$ | | 1 | | 10,89 | 10,89 |
| $G_{KV}$ | | 1 | | 427,85 | 427,85 |
| Interakcija $Đ \times G$ | 4 | | 5.337,93 | | |
| $Đ_L G_L$ | | 1 | | 3.201,33 | 3.201,33 |
| $Đ_L G_{KV}$ | | 1 | | 225,00 | 225,00 |
| $Đ_{KV} G_L$ | | 1 | | 1.067,11 | 1.067,11 |
| $Đ_{KV} G_{KV}$ | | 1 | | 844,48 | 844,48 |
| Pogreška | 16 | | 14.225,93 | | 889,12 |
| Ukupno | 26 | | 26.277,85 | | |

Kod ogleda sa većim brojem faktora ili kombinacija tretmana one regresije koje nisu značajne obično se prikazuju zajedno kao ostatak ili odstupanje od regresije.

## 10.5. Ogledi sa tri faktora

Proširenje na oglede sa tri faktora ne predstavlja posebnu poteškoću i o tom postupku biće ovde reči.

Matematički model u ogledima sa tri faktora kod slučajnog blok–sistema je:

$$X_{ijkl} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + \gamma_l + (\alpha\beta)_{jk} + (\alpha\gamma)_{jl} + (\beta\gamma)_{kl} + (\alpha\beta\gamma)_{jkl} + \varepsilon_{ijkl}, \qquad (10.17)$$

gde je $i = 1,...,r; j = 1,...,a; k = 1,...,b; l = 1,...,c$. Pored $\mu, \rho_i$ i $\varepsilon_{ijkl}$ pojavljuju se tri efekta $A, B$, i $C$ i njihove interakcije $AB, AC, BC$ i $ABC$.

Postupak za izračunavanje suma kvadrata za analizu varijanse ovakvog ogleda koja je data u tab. 10.20. je sledeći:

Suma kvadrata totala:

$$Q = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{c} X_{ijkl}^2 - C, \qquad (10.18)$$

gde je:

$$C = \frac{\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{c} X_{ijkl}\right)^2}{rabc}.$$

**TAB. 10.20. Opšti slučaj analize varijanse ogleda sa 3 faktora u slučajnom blok−sistemu**

| Izvori varijacije | Stepeni slobode | Sredina kvadrata | Očekivana sredina kvadrata, model I |
|---|---|---|---|
| Blokovi | $r-1$ | $Q_R/(r-1)$ | $\sigma^2 + \frac{abc}{(r-1)} \sum_{i=1}^{r} \rho_i^2$ |
| $A$ | a − 1 | $Q_A/(a-1)$ | $\sigma^2 + \frac{rbc}{(a-1)} \sum_{j=1}^{a} \alpha_j^2$ |
| $B$ | b − 1 | $Q_B/(b-1)$ | $\sigma^2 + \frac{rac}{(b-1)} \sum_{k=1}^{b} \beta_k^2$ |
| $C$ | c − 1 | $Q_C/(c-1)$ | $\sigma^2 + \frac{rab}{(c-1)} \sum_{l=1}^{c} \gamma_l^2$ |
| $AB$ | (a − 1)($b-1$) | $Q_{AB}/[(a-1)(b-1)]$ | $\sigma^2 + \frac{rc}{(a-1)(b-1)} \sum_{j=1}^{a} \sum_{k=1}^{b} (\alpha\beta)_{jk}^2$ |
| $AC$ | (a − 1)($c-1$) | $Q_{AC}/[(a-1)(c-1)]$ | $\sigma^2 + \frac{rb}{(a-1)(c-1)} \sum_{j=1}^{a} \sum_{l=1}^{c} (\alpha\gamma)_{jl}^2$ |
| $BC$ | (b − 1)($c-1$) | $Q_{BC}/[(b-1)(c-1)]$ | $\sigma^2 + \frac{ra}{(b-1)(c-1)} \sum_{k=1}^{b} \sum_{l=1}^{c} (\beta\gamma)_{kl}^2$ |
| $ABC$ | (a − 1)($b-1$)($c-1$) | $Q_{ABC}/[(a-1)(b-1)(c-1)]$ | $\sigma^2 + \frac{r}{(a-1)(b-1)(c-1)} \sum_{j=1}^{a} \sum_{k=1}^{b} \sum_{l=1}^{c} (\alpha\beta\gamma)_{jkl}^2$ |
| Pogreška | $(r-1)(abc-1)$ | $Q_P/[(r-1)(abc-1)]$ | $\sigma^2$ |
| Ukupno | $rabc-1$ | | |

TAB. 10.20. Opšti slučaj analize varijanse ogleda sa 3 faktora u slučajnom blok−sistemu

Suma kvadrata blokova:

$$Q_R = \frac{\sum_{i=1}^{r} R_i^2}{abc} - C, \tag{10.19}$$

gde je $R_i$ – ukupna vrednost posmatranja u $i$ – tom bloku.

Suma kvadrata glavnog efekta $A$:

$$Q_A = \frac{\sum_{j=1}^{a} A_j^2}{rbc} - C \tag{10.20}$$

gde je $A_j$ – ukupna vrednost posmatranja faktora $a$ na $j$ – tom nivou.

Suma kvadrata glavnog efekta $B$:

$$Q_B = \frac{\sum_{k=1}^{b} B_k^2}{rac} - C, \tag{10.21}$$

gde je $B_k$ – ukupna vrednost posmatranja faktora $b$ na $k$ – tom nivou.

Suma kvadrata glavnog efekta $C$:

$$Q_C = \frac{\sum_{l=1}^{c} C_l^2}{rab} - C, \tag{10.22}$$

gde je $C_l$ – ukupna vrednost posmatranja faktora $c$ na $l$ – tom nivou.

*Interakcije se izračunavaju posrednim putem.* Prvo se izračunavaju sume kvadrata koje predstavljaju celinu suma kvadrata dva glavna efekta i njihovu interakciju, a zatim se iz razlike te sume kvadrata i sume kvadrata glavnih efekata dolazi do sume kvadrata odgovarajuće interakcije. Analogan je postupak i za dobijanje interakcije $ABC$. Naime, izračuna se suma kvadrata koja predstavlja celinu za tri glavna efekta, tri njihove interakcije i interakciju $ABC$, a zatim se iz razlike dolazi do interakcije $ABC$.

Suma kvadrata glavnih efekata $A$ i $B$ i interakcije $AB$:

$$Q_{(AB)} = \frac{\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} (AB_{jk})^2}{rc} - C, \tag{10.23}$$

gde je $\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} (AB_{jk})$ – ukupna vrednost posmatranja datih u tabeli $a \times b$ tako da ta posmatranja predstavljaju pojedinačno faktor $a$ na $j$ – tom nivou i faktor $b$ na $k$ – tom nivou.

Interakcija $AB$:

$$Q_{AB} = Q_{(AB)} - Q_A - Q_B. \tag{10.24}$$

Suma kvadrata glavnih efekata $A$ i $C$ i intrakcije $AC$:

$$Q_{(AC)} = \frac{\sum_{j=1}^{a}\sum_{l=1}^{c}(AC_{jl}^2)}{rb} - C, \tag{10.25}$$

gde je $\sum_{j=1}^{a}\sum_{l=1}^{c}(AC_{jl})$ – ukupna vrednost posmatranja datih u tabeli $a \times c$ tako da ta posmatranja predstavljaju pojedinačno faktor $a$ na $j$–tom nivou i faktor $c$ na $l$–tom nivou.

Interakcija $AC$:

$$Q_{AC} = Q_{(AC)} - Q_A - Q_C \tag{10.26}$$

Suma kvadrata glavnih efekata $B$ i $C$ i interakcije $BC$:

$$Q_{(BC)} = \frac{\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{c}(BC_{kl})^2}{ra} - C, \tag{10.27}$$

gde je $\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{c}(BC_{kl})$ – ukupna vrednost posmatranja datih u tabeli $b \times c$ tako da ta posmatranja predstavljaju pojedinačno faktor $b$ na $k$–tom nivou ali istovremeno i faktor $c$ na $l$–tom nivou.

Interakcija $BC$:

$$Q_{BC} = Q_{(BC)} - Q_B - Q_C. \tag{10.28}$$

Suma kvadrata glavnih efekata $A$, $B$ i $C$ i interakcija $AB$, $AC$, $BC$ i $ABC$:

$$Q_{(ABC)} = \frac{\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{c}(ABC_{jkl})^2}{r} - C, \tag{10.29}$$

$\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{c}(ABC_{jkl})$ – ukupna vrednost posmatranja datih u tabeli $a \times b \times c$ tako da ta posmatranja predstavljaju istovremeno pojedinačno faktor $a$ na $j$–tom nivou, faktor $b$ na $k$–tom nivou i faktor $c$ na $l$–tom nivou.

Interakcija $ABC$:

$$Q_{ABC} = Q_{(ABC)} - Q_A - Q_B - Q_C - Q_{AB} - Q_{BC} \tag{10.30}$$

Suma kvadrata pogreške:

$$Q_P = Q - Q_R - Q_{(ABC)}. \tag{10.31}$$

Ranije je ukazano na razlike u interpretaciji i testiranju značajnosti varijansi zavisno od toga da li se radi o celokupnom broju tretmana obuhvaćenih ogledom ili, pak, oni mogu da se smatraju samo jednim uzorkom iz većeg broja tretmana. Zbog toga je od praktične koristi dati i očekivane sredine kvadrata u modelu I i II, kao i u mešovitom modelu. Očekivane sredine kvadrata u modelu I date su u tab, 10.20. Očekivane sredine kvadrata u modelu II date su u tab. 10. 21, a tab. 10.22. pokazuje mešoviti model.

**TAB. 10.21. Komponente varijanse $a \times b \times c$ faktorijalnog ogleda u slučajnom blok-sistemu; model II**

| Izvori varijacije | Očekivana sredina kvadrata |
|---|---|
| Blokovi | $\sigma^2 + \frac{abc}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\rho_i^2$ |
| $A$ | $\sigma^2 + r\sigma_{ABC}^2 + rc\sigma_{AB}^2 + rb\sigma_{AC}^2 + rbc\sigma_A^2$ |
| $B$ | $\sigma^2 + r\sigma_{ABC}^2 + rc\sigma_{AB}^2 + ra\sigma_{BC}^2 + rac\sigma_B^2$ |
| $C$ | $\sigma^2 + r\sigma_{ABC}^2 + rb\sigma_{AC}^2 + ra\sigma_{BC}^2 + rab\sigma_C^2$ |
| $AB$ | $\sigma^2 + r\sigma_{ABC}^2 + rc\sigma_{AB}^2$ |
| $AC$ | $\sigma^2 + r\sigma_{ABC}^2 + rb\sigma_{AC}^2$ |
| $BC$ | $\sigma^2 + r\sigma_{ABC}^2 + ra\sigma_{BC}^2$ |
| $ABC$ | $\sigma^2 + r\sigma_{ABC}^2$ |
| Pogreška | $\sigma^2$ |

**TAB. 10.22. Komponente varijanse $a \times b \times c$ faktorijalnog ogleda u slučajnom blok-sistemu; mešoviti model gde su $a$ i $b$ fiksni a $c$ slučajno promenljiva**

| Izvori varijacije | Očekivana sredina kvadrata |
|---|---|
| Blokovi | $\sigma^2 + \frac{abc}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\rho_i^2$ |
| $A$ | $\sigma^2 + rb\sigma_{AC}^2 + \frac{rbc}{a-1}\sum_{j=1}^{a}\alpha_j^2$ |
| $B$ | $\sigma^2 + ra\sigma_{BC}^2 + \frac{rac}{b-1}\sum_{k=1}^{b}\beta_k^2$ |
| $C$ | $\sigma^2 + rab\sigma_C^2$ |
| $AB$ | $\sigma^2 + r\sigma_{ABC}^2 + \frac{rc}{(a-1)(b-1)}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}(\alpha\beta)_{jk}^2$ |
| $AC$ | $\sigma^2 + rb\sigma_{AC}^2$ |
| $BC$ | $\sigma^2 + ra\sigma_{BC}^2$ |
| $ABC$ | $\sigma^2 + r\sigma_{ABC}^2$ |
| Pogreška | $\sigma^2$ |

Treba voditi računa o izvesnim pravilima kod utvrđivanja komponenti varijanse, odnosno ocenjivanja vrednosti kvadrata u odgovarajućim modelima. Čitav postupak nije tako komplikovan kao što na prvi pogled izgleda.

Kod modela I treba imati na umu da varijanse glavnih efekata ne sadrže interakciju kao komponentu s obzirom da je:

$$\sum_{j=1}^{a}\alpha_j = \sum_{k=1}^{b}\beta_k = \sum_{l=1}^{c}\gamma_l = 0\,. \tag{10.32}$$

*U modelu I svaka varijansa, pored varijanse pogreške, sadrži još jednu komponentu koja ima uvek isti broj slova latinice.* Izuzetak predstavlja varijansa pogreške. Ukupan broj tih slova jednak je broju faktora plus broj ponavljanja. Kod $a \times b \times c$ faktorijalnog ogleda u slučajnom blok-sistemu ukupan broj slova je uvek četiri (tri za faktore a jedno za ponavljanje). U ovoj notaciji grčka slova označavaju faktore a mala slova latinice tretmane odgovarajućih faktora. Ako je jedno slovo ili više slova u brojitelju, tada se drugo slovo ili slova latinice nalaze u imenitelju zavisno o kojoj se varijansi radi. Za varijansu glavnog efekta $A$ pored $\sigma^2$ imamo komponentu $\frac{rbc}{a-1}\sum_{j=1}^{a}\alpha_j$ . Ovde je $(a - 1)$ u imenitelju jer se radi o glavnom efektu od $A$. Ili, za varijansu interakcije $AB$ pored $\sigma^2$ imamo $\frac{rc}{(a-1)(b-1)}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}(\alpha\beta)_{jk}^2$ gde su $(a - 1)$ $(b - 1)$ u imenitelju jer je u pitanju interakcija $AB$ itd.

Testiranje hipoteze o homogenosti varijansi putem $F$-testa izvodi se deobom svake varijanse, posebno sa varijansom pogreške.

*U modelu II* (tab. 10.21.), gde su tretmani svih faktora slučajno promenljive, za utvrđivanje komponenti varijansi odgovarajućih efekata važi sledeće pravilo: *komponente bilo koje varijanse, izuzev varijanse pogreške, sadrže koeficijente označene malim slovima i indekse obeležene velikim slovima.* Velika slova ili slova u indeksu označavaju odgovarajući izvor varijacije. Indeks u poslednjoj komponenti označava odgovarajući glavni efekt ili interakciju. U svakoj komponenti varijanse u indeksu se nalazi ono slovo ili slova kojima je označena ta varijansa, a to je varijansa glavnog efekta ili interakcije. Kod svake komponente varijanse, izuzev prve po redu i varijanse pogreške, ukupan broj koeficijenata i indeksa je uvek jednak i zavisi, kao i kod modela I, od broja faktora plus ponavljanje. Pravilo je da se, ako se slovo ne nalazi kao koeficijent, obavezno nalazi kao indeks, i obrnuto, ukoliko je slovo u indeksu, ne nalazi se kao koeficijent. Koeficijenti su obeleženi malim slovima i označavaju broj ponavljanja i broj tretmana odgovarajućeg faktora; indeksi su obeleženi velikim slovima i pokazuju odgovarajući faktor koji je glavni efekt (u indeksu jedno slovo) ili interakcija (u indeksu dva ili više slova). Na primer, varijansa glavnog efekta $A$ sastoji se iz pet komponenti. Kod druge komponente koja je udeo interakcije $ABC$ samo je jedno slovo koeficijent dok su tri ostala u indeksu.

*Testiranje hipoteze o homogenosti varijansi je nešto drukčije kod modela II nego kod modela I.* Ako primenimo navedeno pravilo za testiranje u $a \times b \times c$ faktorijalnom ogledu, problem se ne pojavljuje kod testiranja značajnosti varijanse blokova i interakcije $ABC$. Naime, varijansa blokova i interakcija $ABC$ se testiraju tako da se svaka posebno deli sa varijansom pogreške. Dakle:

$$F = \frac{Q_R/(r-1)}{Q_P/[(r-1)(abc-1)]}, \tag{10.33}$$

$$F = \frac{Q_{ABC}/[(a-1)(b-1)(c-1)]}{Q_P/[(r-1)(abc-1)]}. \tag{10.34}$$

Interakcije $AB$, $AC$ i $BC$ testiraju se tako da se njihove varijanse dele sa varijansom interakcije $ABC$.

$$F = \frac{Q_{AB}/[(a-1)(b-1)]}{Q_{ABC}/[(a-1)(b-1)(c-1)]}, \tag{10.35}$$

$$F = \frac{Q_{AC}/[(a-1)(c-1)]}{Q_{ABC}/[(a-1)(b-1)(c-1)]}, \tag{10.36}$$

$$F = \frac{Q_{BC}/[(b-1)(c-1)]}{Q_{ABC}/[(a-1)(b-1)(c-1)]}. \tag{10.37}$$

Za testiranje nulte hipoteze glavnih efekata $A$, $B$ i $C$ tačan test *ne postoji* jer za ove varijanse nema odgovarajućeg imenitelja za odnos varijansi. Umesto toga, preporučuje se *aproksimativni postupak* (Cochran, 1951; Satterthwaite, 1946). Pomoću sledeće formule dobija se aproksimativna $F$-vrednost za testiranje hipoteze $\sigma_A^2 = 0$:

$$F' = \frac{Q_A/(a-1) + Q_{ABC}/[(a-1)(b-1)(c-1)]}{Q_{AB}/[(a-1)(b-1)] + Q_{AC}/[(a-1)(c-1)]}. \tag{10.38}$$

Brojevi stepeni slobode $r_1$ i $r_2$ se izračunavaju po obrascima:

$$r_1' = \frac{\left\{Q_A/(a-1) + Q_{ABC}/[(a-1)(b-1)(c-1)]\right\}^2}{\dfrac{[Q_A/(a-1)]^2}{(a-1)} + \dfrac{\left\{Q_{ABC}/[(a-1)(b-1)(c-1)]\right\}^2}{(a-1)(b-1)(c-1)}}, \tag{10.39}$$

$$r_2' = \frac{\left\{Q_{AB}/[(a-1)(b-1)] + Q_{AC}/[(a-1)(c-1)]\right\}^2}{\dfrac{\left\{Q_{AB}/[(a-1)(b-1)]\right\}^2}{(a-1)(b-1)} + \dfrac{\left\{Q_{AC}/[(a-1)(c-1)]\right\}^2}{(a-1)(c-1)}}. \tag{10.40}$$

Na isti način se testiraju i hipoteze $\sigma_B^2 = 0$ i $\sigma_C^2 = 0$.

Kad je reč o *mešovitom modelu* najbolje je početi od modela II, a zatim primeniti sledeće pravilo: kod svake komponente varijanse odgovarajućeg efekta poći od indeksa i prevideti slovo ili slova koji odgovaraju datom efektu. Posle posmatrati ostatak slova u indeksu i, ako jedno slovo od tih odgovara fiksnom efektu treba potpuno isključiti komponentu. Izuzetak u ovom pravilu su prva i poslednja komponenta.

Držeći se datog pravila,na osnovu tab. 10.21. sačinjena je tab. 10.22, gde su tretmani faktora $a$ i $b$ fiksni a tretmani faktora $c$ slučajno promenljive. Kod glavnog efekta $A$ u modelu II ima pet komponenti varijanse. U drugoj komponenti $r\sigma^2_{ABC}$ indeksi su $ABC$ i, prema pravilu, $A$ se zanemaruje; od preostala dva slova $B$ je fiksno, pa ta komponenta otpada. U sledećoj komponenti, ako zanemarimo $A$, ostaje $B$ koje je fiksno, pa, prema tome, i ova komponenta otpada. Kod četvrte po redu komponente $rb\,\sigma^2_{AC}$, posle zanemarivanja $A$, ostaje $C$ koje je slučajno promenljiva, te ova komponenta ostaje i u mešovitom modelu. Za poslednju komponentu pravilo se ne primenjuje. Na sličan način su utvrđene i komponente ostalih varijansi.

## 10.6. Analiza jednog 3 × 3 × 2 faktorijalnog ogleda

Za primer ćemo uzeti jedan 3 × 3 × 2 faktorijalni ogled sa kukuruzom za silažu (Kmetijski institut Slovenije, Ljubljana). Prvi faktor ($a$) sa 3 tretmana je broj biljaka po *ha*: 70.000 biljaka ($a_1$), 105.800 biljaka ($a_2$), 128.600 biljaka ($a_3$). Drugi faktor ($b$) su 3 doze utrošenog $N$ po *ha*: 50 *kg* ($b_1$), 100 *kg* ($b_2$), 150 *kg* ($b_3$). Treći faktor ($c$) su 2 vremena žetve: pri mlečnoj zrelosti ($c_1$) i pri voštanoj zrelosti ($c_2$). Rezultati ogleda o prinosu suve materije u $kg/7\,m^2$ prikazani su u tab. 10.23.

**TAB. 10.23. Rezultati 3 × 3 × 2 faktorijalnog ogleda sa kukuruzom za silažu**

| Gustina biljke ($a$) | Doze đubriva ($b$) | Vreme žetve ($c$) | Blokovi 1 | 2 | 3 | 4 | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $b_1$ | $c_1$ | 5,28 | 6,66 | 7,78 | 5,78 | 25,50 |
| | | $c_2$ | 8,49 | 8,20 | 8,39 | 8,38 | 33,46 |
| | $b_2$ | $c_1$ | 9,34 | 8,28 | 8,55 | 8,43 | 34,60 |
| | | $c_2$ | 10,34 | 8,86 | 9,81 | 8,96 | 37,97 |
| | $b_3$ | $c_1$ | 9,60 | 10,35 | 9,08 | 9,07 | 38,10 |
| | | $c_2$ | 10,10 | 10,46 | 11,51 | 13,80 | 45,87 |
| $a_2$ | $b_1$ | $c_1$ | 7,10 | 6,33 | 6,76 | 7,34 | 27,53 |
| | | $c_2$ | 8,86 | 9,07 | 9,11 | 9,23 | 36,27 |
| | $b_2$ | $c_1$ | 8,19 | 7,52 | 8,66 | 9,45 | 33,82 |
| | | $c_2$ | 10,17 | 9,73 | 10,97 | 10,27 | 41,14 |
| | $b_3$ | $c_1$ | 9,94 | 9,78 | 9,49 | 8,81 | 38,02 |
| | | $c_2$ | 11,52 | 9,94 | 12,14 | 12,08 | 45,68 |
| $a_3$ | $b_1$ | $c_1$ | 7,08 | 6,98 | 6,67 | 6,71 | 27,44 |
| | | $c_2$ | 6,77 | 7,06 | 8,01 | 8,12 | 29,96 |
| | $b_2$ | $c_1$ | 8,17 | 7,80 | 8,99 | 7,94 | 32,90 |
| | | $c_2$ | 9,70 | 8,37 | 11,26 | 10,14 | 39,47 |
| | $b_3$ | $c_1$ | 11,89 | 9,03 | 10,85 | 8,94 | 40,71 |
| | | $c_2$ | 11,54 | 11,00 | 11,93 | 11,84 | 46,31 |
| Ukupno | | | 164,08 | 155,42 | 169,96 | 165,29 | 654,75 |

Radi lakšeg računanja suma kvadrata glavnih efekata i interakcija u tab. 10.24. date su jedna tabela kombinacija ukupnih vrednosti tretmana za sva tri faktora i tri tabele kombinacija tretmana od po dva faktora.

**TAB. 10.24. Radna tabela za izračunavanje suma kvadrata faktorijalnih efekata na osnovu podataka iz tab. 10.23.**

*a) tabela $a \times b \times c$*

| | $a_1$ | | | $a_2$ | | | $a_3$ | | | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | |
| $c_1$ | 25,50 | 34,60 | 38,10 | 27,53 | 33,82 | 38,02 | 27,44 | 32,90 | 40,71 | 298,62 |
| $c_2$ | 33,46 | 37,97 | 45,87 | 36,27 | 41,14 | 45,68 | 29,96 | 39,47 | 46,31 | 356,13 |
| Ukupno | 58,96 | 72,57 | 83,97 | 63,80 | 74,96 | 83,70 | 57,40 | 72,37 | 87,02 | 654,75 |

b) tabela a × *b*

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | Ukupno |
|---|---|---|---|---|
| $b_1$ | 58,96 | 63,80 | 57,40 | 180,16 |
| $b_2$ | 72,57 | 74,96 | 72,37 | 219,90 |
| $b_3$ | 83,97 | 83,70 | 87,02 | 254,69 |
| Ukupno | 215,50 | 222,46 | 216,79 | 654,75 |

*c) tabela $a \times c$*

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | Ukupno |
|---|---|---|---|---|
| $c_1$ | 98,20 | 99,37 | 101,05 | 298,62 |
| $c_2$ | 117,30 | 123,09 | 115,74 | 356,13 |
| Ukupno | 215,50 | 222,46 | 216,79 | 654,75 |

*d) tabela $b \times c$*

| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | Ukupno |
|---|---|---|---|---|
| $c_1$ | 80,47 | 101,32 | 116,83 | 298,62 |
| $c_2$ | 99,69 | 118,58 | 137,86 | 356,13 |
| Ukupno | 180,16 | 319,90 | 254,69 | 654,75 |

U produžetku su data izračunavanja za analizu varijanse:

$$C = \frac{(654{,}75)^2}{72} = 5.954{,}1328.$$

Suma kvadrata totala $= (5{,}28)^2 + (6{,}66)^2 + ... + (11{,}84)^2 - C = 206{,}5731.$

$$\text{Suma kvadrata blokova} = \frac{(164{,}08)^2 + \ldots + (165{,}29)^2}{18} - C = 6{,}1343\,.$$

$$\text{Suma kvadrata tretmana} = \frac{(25{,}50)^2 + \ldots + (46{,}31)^2}{4} - C = 170{,}6233\,.$$

Suma kvadrata pogreške $= 206{,}5731 - 6{,}1343 - 170{,}6233 = 29{,}8155.$

Suma kvadrata glavnog efekta $A$ (gustina biljaka) =

$$= \frac{(215{,}50)^2 + (222{,}46)^2 + (216{,}79)^2}{24} - C = 1{,}1424\,.$$

Suma kvadrata glavnog efekta $B$ (doze đubriva) =

$$= \frac{(180{,}16)^2 + (219{,}90)^2 + (254{,}69)^2}{24} - C = 115{,}8935\,.$$

Suma kvadrata glavnog efekta $C$ (vreme žetve) =

$$= \frac{(298{,}62)^2 + (356{,}13)^2}{36} - C = 45{,}9361\,.$$

Suma kvadrata glavnih efekata $A$ i $B$ i interakcije $AB$ =

$$= \frac{(58{,}96)^2 + (63{,}80)^2 + \ldots + (87{,}02)^2}{8} - C = 120{,}0467\,.$$

Suma kvadrata interakcije $AB = 120{,}0467 - 1{,}1424 - 115{,}8935 = 3{,}0108.$

Suma kvadrata glavnih efekata $A$ i $C$ i interakcije $AC$ =

$$= \frac{(98{,}20)^2 + (99{,}37)^2 + \ldots + (115{,}74)^2}{12} - C = 48{,}7776\,.$$

Suma kvadrata interakcije $AC = 48{,}7776 - 1{,}1424 - 45{,}9361 = 1{,}6991.$

Suma kvadrata glavnih efekata $B$ i $C$ i interakcije $BC$ =

$$= \frac{(80{,}47)^2 + (101{,}32)^2 + \ldots + (137{,}86)^2}{12} - C = 162{,}1259\,.$$

Suma kvadrata interakcije $BC = 162{,}1259 - 115{,}8935 - 45{,}9361 = 0{,}2963.$

Suma kvadrata interakcije $ABC$ =

$= 170{,}6233 - 1{,}1424 - 115{,}8935 - 45{,}9361 - 3{,}0108 - 1{,}6991 - 0{,}2963 = 2{,}6451.$

TAB. 10.25. Analiza varijanse 3 × 3 × 2 faktorijalnog ogleda sa kukuruzom za silažu

| Izvori varijacije | Stepeni slobode | Suma kvadrata | Sredina kvadrata | $F$ |
|---|---|---|---|---|
| Blokovi | 3 | 6,1343 | 2,0448 | 3,4978 |
| Gustina biljke, $A$ | 2 | 1,1424 | 0,5712 | 0,9771 |
| Doza đubriva, $B$ | 2 | 115,8935 | 57,9467 | 99,1220 |
| Vreme zrelosti, $C$ | 1 | 45,9361 | 45,9361 | 78,5770 |
| Interakcija, $AB$ | 4 | 3,0108 | 0,7527 | 1,2875 |
| Interakcija, $AC$ | 2 | 1,6991 | 0,8495 | 1,4531 |
| Interakcija, $BC$ | 2 | 0,2963 | 0,1481 | 0,2533 |
| Interakcija, $ABC$ | 4 | 2,6451 | 0,6613 | 1,1312 |
| Pogreška | 51 | 29,8155 | 0,5846 | |
| Ukupno | 71 | 206,5731 | | |

Jedino glavni efekti doza đubriva i vreme zrelosti pokazuju značajne varijanse. Značajna varijansa blokova nema praktičnog značaja u interpretaciji rezultata ogleda.

Suma kvadrata linearne regresije za doze đubriva je:

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{b} C_i\right)^2}{rac\sum_{i=1}^{b}\lambda_i^2} = \frac{[(-1)(180,16) + (0)(219,90) + (+1)(254,69)]^2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 115,7233\,.$$

Kao što se vidi, najveći deo sume kvadrata doza đubriva otpada na linearnu regresiju, jer je kvadratna regresija 115,8935 - 115,7233 = 0,1702, te je očigledno da nije značajna.To ukazuje da još uvek nije postignut maksimum povećanja utroška đubriva u vezi sa prinosom silažnog kukuruza.

## 10.7. Analiza varijanse u ogledima sa četiri i više faktora

Računski postupak koji je objašnjen i primenjen kod ogleda sa tri faktora bez teškoća se proširuje na oglede sa četiri i više faktora. Tako, ako se radi o ogledu sa četiri faktora u slučajnom blok - sistemu, prvo se izračunavaju suma kvadrata totala, suma kvadrata blokova i suma kvadrata glavnih efekata *A, B, C, D*. Suma kvadrata glavnog efekta *A* je:

$$Q_A = \frac{\sum_{j=1}^{a} A_j^2}{rbcd} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{c}\sum_{m=1}^{d} X_{ijklm}\right)^2}{rabcd}\,. \qquad (10.41)$$

Interakcije između dva faktora koji se ponekad nazivaju i *interakcijama prvog reda* i ovde se dobijaju na posredan način. Izračunava se suma kvadrata njihove interakcije, a zatim se iz razlike te sume kvadrata i već izračunatih suma kvadrata glavnih efekata dobija suma kvadrata odgovarajuće interakcije. Za tu svrhu se načine odgovarajuće tabele sa dva ulaza, na primer $a \times b$ tabela radi dobijanja interakcije AB. Na osnovu podataka te tabele izračuna se:

$$Q_{(AB)} = \frac{\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}(AB_{jk})^2}{rcd} - C. \tag{10.42}$$

Suma kvadrata interakcije *AB* je:

$$Q_{AB} = Q_{(AB)} - Q_A - Q_B \tag{10.43}$$

Na isti način se izračunavaju i ostale interakcije polazeći od tabela: $a \times c, a \times d, b \times c, b \times d$ i $c \times d$.

Za interakciju između tri faktora ili *interakciju drugog reda* polazi se od tabela: $a \times b \times c, a \times b \times d, a \times c \times d$ i $b \times c \times d$.

Za interakciju *ABC*, na primer, izračuna se prvo:

$$Q_{(ABC)} = \frac{\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{c}(ABC_{jkl})^2}{rd} - C. \tag{10.44}$$

Suma kvadrata interakcije *ABC* je:

$$Q_{ABC} = Q_{(ABC)} - Q_A - Q_B - Q_C - Q_{AB} - Q_{AC} - Q_{BC}. \tag{10.45}$$

I najzad, za interakciju između četiri faktora ili *interakciju trećeg reda* potrebno je prethodno načiniti tabelu sa četiri ulaza $a \times b \times c \times d$ a zatim izračunati:

$$Q_{(ABCD)} = \frac{\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{c}\sum_{m=1}^{d}(ABCD_{jklm})^2}{r} - C. \tag{10.46}$$

Suma kvadrata inerakcije *ABCD* je:

$$\begin{aligned} Q_{ABCD} = {} & Q_{(ABCD)} - Q_A - Q_B - Q_C - Q_D - Q_{AB} - Q_{AC} - Q_{AD} \\ & - Q_{BC} - Q_{BD} - Q_{CD} - Q_{ABC} - Q_{ACD} - Q_{ABD} - Q_{BCD}. \end{aligned} \tag{10.47}$$

Stepeni slobode interakcija proizvod su stepeni slobode njihovih glavnih efekata.

## 10.8. $2^3$ faktorijalni ogledi

Kod $2^3$ faktorijalnih ogleda, tj. ogleda kod kojih se ispituje 3 faktora, svaki sa po dva tretmana ili nivoa, obično se primenjuje specijalni računski postupak za izračunavanje glavnih efekata i interakcija koji predstavljaju $(2^3 - 1)$ linearnih i međusobno nezavisnih upoređenja.

Pre nego što pređemo na izlaganje postupka izračunavanja glavnih efekata i interakcija ovakvih ogleda, ukratko ćemo se osvrnuti na uobičajen sistem *notacije. Slova a, b, c označavaju faktore* i svako od njih upotrebljeno je istovremeno za obeležavanje jednog od dva nivoa odgovarajućeg faktora, obično drugog. Na primer, kombinacija tretmana $ab$ u $2^3$ faktorijalnom ogledu označava prisustvo drugog nivoa faktora $a$ i $b$ i odsustvo faktora $c$ na tom nivou, koji je u ovoj kombinaciji na prvom nivou. Kombinacija tretmana svih faktora na prvom nivou obeležava se sa (1). Isto tako, slovo $a$, na primer,označavaće ili sredinu ili total svih posmatranja kod kojih je faktor $a$ na drugom nivou, a ostali faktori na prvom. *Slova A, B, C, odnosno AB, AC, BC i ABC u vezi sa numeričkom vrednošću predstavljaju odnosne glavne efekte i njihove interakcije.*

Za ilustraciju uzećemo slučaj jednog $2^3$ faktorijalnog ogleda kod koga se ispituje dejstvo azotnog, kalijumovog i fosfornog đubriva na prinos neke sorte. Ta tri faktora su $a$, $b$ i $c$, i uzimamo da je prvi nivo bez primene, a drugi sa primenom tretmana datog faktora. Kombinacije osam tretmana su sledeće:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | bez $a$ | bez $b$ | bez $c$ |
| 2 | $a$ | bez $b$ | bez $c$ |
| 3 | bez $a$ | $b$ | bez $c$ |
| 4 | bez $a$ | bez $b$ | $c$ |
| 5 | $a$ | $b$ | bez $c$ |
| 6 | $a$ | bez $b$ | $c$ |
| 7 | bez $a$ | $b$ | $c$ |
| 8 | $a$ | $b$ | $c$ |

Iz ovog pregleda vidi se da se kod *polovine* svih kombinacija tretmana svaki faktor nalazi na prvom a kod druge polovine na drugom nivou. Te kombinacije tretmana su sledeće:

$$(1), a, b, c, ab, ac, bc, abc.$$

*Glavni efekat od A je sredina upoređenja između kombinacija tretmana faktora a na drugom nivou i kombinacija tretmana istog faktora na prvom.* Tako, imamo da je:

$$A = \frac{1}{4r}[\,-(1)+a-b+ab-c+ac-bc+abc]\ , \tag{10.48}$$

gde je $r$-broj ponavljanja. Na sličan način se dobijaju sredine glavnih efekata od $B$ i $C$:

$$B = \frac{1}{4r}[\,-(1)-a+b+ab-c-ac+bc+abc]\ , \tag{10.49}$$

$$C = \frac{1}{4r}[\,-(1)-a-b-ab+c+ac+bc+abc]\ . \tag{10.50}$$

Interakcija $AB$ izračunava se posredno za svaki nivo od $c$.

$$AB \text{ na prvom nivou od } c = \frac{1}{2r}[\,(1)-a-b+ab]\ ,$$

$$AB \text{ na drugom nivou od } c = \frac{1}{2r}[\,c-ac-bc+abc]\ .$$

Interakcija $AB$ je konačno:

$$AB = \frac{1}{4r}[\ (1)-a-b+ab+c-ac-bc+abc]\ . \tag{10.51}$$

Analogno, interakcije $AC$ i $BC$ su:

$$AC = \frac{1}{4r}[\ (1)-a+b-ab-c+ac-bc+abc]\ , \tag{10.52}$$

$$BC = \frac{1}{4r}[\ (1)+a-b-ab-c-ac+bc+abc]\ . \tag{10.53}$$

Interakcija drugog reda $ABC$ je dobijena upoređenjem interakcije $AB$ za svaki nivo faktora $c$, te je:

$$ABC = \frac{1}{4r}[\ -(1)+a+b-ab+c-ac-bc+abc]\ . \tag{10.54}$$

Kao što se vidi, izračunavanje glavnih efekata i interakcija postiže se tako što se vrednosti četiri kombinacije tretmana oduzmu od četiri druge kombinacije tretmana. Prema tome, efekti faktora u $2^3$ faktorijalnom ogledu predstavljaju rezultate četiri upoređenja.

Jasnija predstava o izračunavanju glavnih efekata i interakcija može da se dobije iz tab. 10.26. U ovoj tabeli prvo su uvedeni znaci za tri glavna efekta $A$, $B$ i $C$. Znak plus odgovara faktoru čiji se tretman nalazi na drugom nivou a znak minus na prvom. Interakcija se može izvesti u kombinaciji tretmana dva glavna efekta gde - i - daju +, + i - daju -, + i + daju +. Tako je interakcija $AB$ rezultat kombinacija znakova tretmana glavnih efekata od $A$ i $B$. U daljem postupku kombinacijom znakova interakcije $AB$ i glavnog efekta $C$ dobija se interakcija $ABC$. U prvom redu se nalazi slovo $M$ koje predstavlja opštu sredinu svih tretmana.

**TAB. 10.26. Šema ortogonalnih upoređenja u $2^3$ faktorijalnom ogledu**

| Efekti | Kombinacije tretmana | | | | | | | | Divizor |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | (1) | $a$ | b | ab | c | ac | bc | abc | |
| $M$ | + | + | + | + | + | + | + | + | $8r$ |
| $A$ | − | + | − | + | − | + | − | + | $4r$ |
| $B$ | − | − | + | + | − | − | + | + | $4r$ |
| $AB$ | + | − | − | + | + | − | − | + | $4r$ |
| $C$ | − | − | − | − | + | + | + | + | $4r$ |
| $AC$ | + | − | + | − | − | + | − | + | $4r$ |
| $BC$ | + | + | − | − | − | − | + | + | $4r$ |
| $ABC$ | − | + | + | − | + | − | − | + | $4r$ |

Analiza varijanse $2^3$ faktorijalnog ogleda u slučajnom blok-sistemu prikazana je u tab. 10.27.

*Sume kvadrata glavnih efekata i interakcije u analizi varijanse*, svaka sa po jednim stepenom slobode, lako se dobijaju:

$$Q_A = 2r\,[A]^2, \tag{10.55}$$

$$Q_B = 2r\,[B]^2, \tag{10.56}$$

$$Q_{AB} = 2r\,[AB]^2, \tag{10.57}$$

$$Q_{AC} = 2r\,[AC]^2 \text{ itd.} \tag{10.58}$$

**TAB. 10.27. Analiza varijanse $2^3$ faktorijalnog ogleda u slučajnom blok-sistemu**

| Izvori varijacije | Stepeni slobode | Suma kvadrata | Sredina kvadrata |
|---|---|---|---|
| Blokovi | $r-1$ | $Q_B$ | $Q_B/(r-1)$ |
| Tretmani | 7 | $Q_T$ | $Q_T/7$ |
| $A$ | 1 | $Q_A$ | $Q_A$ |
| $B$ | 1 | $Q_B$ | $Q_B$ |
| $AB$ | 1 | $Q_{AB}$ | $Q_{AB}$ |
| $C$ | 1 | $Q_C$ | $Q_C$ |
| $AC$ | 1 | $Q_{AC}$ | $Q_{AC}$ |
| $BC$ | 1 | $Q_{BC}$ | $Q_{BC}$ |
| $ABC$ | 1 | $Q_{ABC}$ | $Q_{ABC}$ |
| Pogreška | $(r-1)7$ | $Q_P$ | $Q_P/[(r-1)7]$ |
| Ukupno | $r8-1$ | $Q$ | |

Pošto su to ortogonalna upoređenja, suma njihovih kvadrata jednaka je sumi kvadrata tretmana u analizi varijanse.

Ako se uzmu samo faktorijalni totali ili totali tretmana, recimo, za $A$ (10.48):

$$A = [\,-(1)+a-b+ab-c+ac-bc+abc\,],$$

tada se suma kvadrata efekta $A$ u analizi varijanse dobija po obrascu:

$$Q_A = \frac{[A]^2}{r\sum_{i=1}^{i}\lambda_i^2} = \frac{[A]^2}{r8}, \tag{10.59}$$

gde je $r$ – broj ponavljanja. Na isti način se dolazi do suma kvadrata drugih tretmana.

Standardna greška za totale efekata služi kao osnova za testiranje i kod slučajnog blok-sistema se izračunava po obrascu:

$$s_{\overline{X}} = \sqrt{2^3 \cdot rQ_P/[(r-1) \cdot 7]} \;, \tag{10.60}$$

gde je $Q_P/(r - 1)7$ – varijansa pogreške u analizi varijanse.

Za sredine efekata standardna greška je:

$$s_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{Q_P/[(r-1) \cdot 7]}{2r}} \;. \tag{10.61}$$

Za primer ćemo uzeti jedan ogled sa ispitivanje muticaja ishrane krava na prinos mleka. (Institut za stočarstvo, Novi Sad). Ogled je izveden sa 4 grupe, svaka od po 5 grla. Prvi faktor je *a)* ishrana rezancima šećerne repe, *b)* ishrana silažom. Drugi faktor je *a)* frizijska rasa, *b)* domaće šareno govečе. Treći faktor je *a)* prvi period, *b)* drugi period. Naime, nakon 28 dana (prvi period) izvršeno je rotiranje tako da su goveda hranjena silažom 28 dana, a sledećih 28 dana su hranjena rezancima šećerne repe (drugi period). Rezultat ogleda predstavlja količinu mleka u litrima za 28 dana.

**TAB. 10.28. Rezultati ogleda sa ishranom krava**

| Redni broj | Period | Rasa | Način ishrane | Ponavljanje 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 period | frizijska | rezanci | 496,7 | 438,5 | 586,6 | 453,1 | 518,9 | 2.493,8 |
| 2 | | | silaža | 392,3 | 284,2 | 678,9 | 309,4 | 576,2 | 2.241,0 |
| 3 | | domaća šarena | rezanci | 444,9 | 434,2 | 485,9 | 555,5 | 298,9 | 2.219,4 |
| 4 | | | silaža | 496,9 | 409,2 | 411,3 | 307,9 | 438,6 | 2.063,9 |
| 5 | 2 period | frizijska | rezanci | 411,0 | 348,6 | 781,3 | 356,1 | 523,7 | 2.420,7 |
| 6 | | | silaža | 311,2 | 368,2 | 514,9 | 362,6 | 452,8 | 2.009,7 |
| 7 | | domaća šarena | rezanci | 553,1 | 366,2 | 456,6 | 323,2 | 468,6 | 2.167,7 |
| 8 | | | silaža | 286,2 | 365,3 | 279,1 | 382,1 | 204,0 | 1.516,7 |
| Ukupno | | | | | | | | | 17.132,9 |

Analiza varijanse data je u tab. 10.29.

**TAB. 10.29. Analiza varijanse ogleda sa ishranom krava**

| Izvori varijacije | Stepeni slobode | Suma kvadrata | Sredina kvadrata | $F$ |
|---|---|---|---|---|
| Tretmani | 7 | 126.498,19 | 18.071,17 | 1,46 |
| Pogreška | 32 | 396.638,34 | 12.394,95 | |
| Ukupno | 39 | 523.136,53 | | |

$F_{(0,05\,;\ 7\ i\ 32)} = 2{,}32$, te se hipoteza o homogenosti prihvata.

Razbijanje sume kadrata tretmana na sume kvadrata glavnih efekata i interakcije izvedeno je u tab. 10.30. na osnovu šeme iz tab. 10.26.

**TAB. 10.30. Izračunavanje glavnih efekata i interakcija kod ogleda sa kravama**

| Efekti | Kombinacije tretmana | | | | | | | | $C_i$ | $(C_i)^2/40$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | |
| Period, *P* | +2.493,8 | +2.241,0 | +2.219,4 | +2.063,9 | −2.420,7 | −2.009,7 | −2.167,7 | −1.5167,7 | +903,3 | 20.398,77 |
| Rase, *R* | +2.493,8 | +2.241,0 | −2.219,4 | −2.063,9 | +2.420,7 | +2.009,7 | −2.167,7 | −1.516,7 | +1.197,5 | 35.850,16 |
| *PR* | +2.493,8 | +2.241,0 | −2.219,4 | −2.063,9 | −2.420,7 | −2.009,7 | +2.167,7 | +1.516,7 | −294,5 | 2.168,26 |
| Ishrana, *H* | +2.493,8 | −2.241,0 | +2.219,4 | −2.063,9 | +2.420,7 | −2.009,7 | +2.167,7 | −1.516,7 | +1.470,3 | 54.044,55 |
| *PH* | +2.493,8 | −2.241,0 | +2.219,4 | −2.063,9 | −2.420,7 | +2.009,7 | −2.167,7 | +1.516,7 | −653,7 | 10.683,09 |
| *RH* | +2.493,8 | −2.241,0 | −2.219,4 | +2.063,9 | +2.420,7 | −2.009,7 | −2.167,7 | +1.516,7 | −142,7 | 509,08 |
| *PRH* | +2.493,8 | −2.241,0 | −2.219,4 | +2.063,9 | −2.420,7 | +2.009,7 | +2.167,7 | −1.516,7 | +337,3 | 2.844,28 |
| Ukupno | | | | | | | | | | 126.498,19 |

TAB. 10.30. Izračunavanje glavnih efekata i interakcija kod ogleda sa kravama

Analiza varijanse sa podeljenom sumom kvadrata tretmana prikazana je u tab. 10.31. $F_{(0,05\,;\,1\ i\ 32)} = 4{,}15$. Jedino je, dakle, suma kvadrata ishrane značajna.

Testiranje značajnosti glavnih efekata i interakcija može da se izvede na osnovu totala njihovih efekata datih u tab. 10.30, kolona $C_i$. Za tu svrhu izračunava se:

$$s_{\overline{X}} = \sqrt{2^3 \cdot 5 \cdot 12.394{,}95} = 704{,}1\,.$$

**TAB. 10.31. Analiza varijanse sa podeljenom sumom kvadrata tretmana u ogledu sa kravama**

| Izvori varijacije | Stepeni slobode | Suma kvadrata | Sredina kvadrata | $F$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 1 | 20.398,77 | 20.398,77 | 1,65 |
| $R$ | 1 | 35.850,16 | 35.850,16 | 2,89 |
| $PR$ | 1 | 2.168,26 | 2.168,26 | 0,17 |
| $H$ | 1 | 54.044,55 | 54.044,55 | 4,36 |
| $PH$ | 1 | 10.683,09 | 10.683,09 | 0,86 |
| $RH$ | 1 | 509,08 | 509,08 | 0,04 |
| $PRH$ | 1 | 2.844,28 | 2.844,28 | 0,23 |
| Pogreška | 32 | 396.638,34 | 12.394,95 | |
| Ukupno | 39 | 523.136,53 | | |

Iz tabele $t$-distribucije uzima se kritična vrednost za 32 stepena slobode i $\alpha = 0{,}05$ koja iznosi 2,04. Efekti totala, da bi bili značajni, treba da imaju vrednost $704{,}1 \cdot 2{,}04 = 1.436{,}36$. Iz tab. 10.30. vidi se da jedino efekat ishrane ima veći total od kritičnog.

Da su, umesto totala pojedinih tretmana, uzete njihove sredine za ortogonalno upoređenje u tab. 10.30, tada bi se izračunala:

$$s_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{12.394{,}95}{2 \cdot 5}} = 35{,}2$$

a potom kritična vrednost $35{,}2 \cdot 2{,}04 = 71{,}8$. Testiranje bi se izvodilo upoređivanjem efekata sredina sa kritičnom vrednošću 71,8. Efekti ili upoređenja veća od 71,8 značajna su a manja nisu. U primeru to bi opet bio efekat ishrane, $H$.

## 10.9. $2^n$ faktorijalni ogledi

Pomenuti postupak za izračunavanje efekata faktora bez teškoća se primenjuje na kombinacije $n$ faktora, svaki na dva nivoa. Tom prilikom pojaviće se $n$ glavnih efekata zatim $n(n-1)/2$ interakcija prvog reda u kombinacijama dva faktora, $n(n-1)(n-2)/6$ interakcija drugog reda u kombinacijama tri faktora itd. Broj interakcija odgovarajućeg reda u $2^n$ faktorijalnom ogledu dobiće se razvojem binomnog obrasca $(1+1)^n$, gde koeficijenti, izuzev prvog, pokazuju po redosledu broj interakcija drugog, trećeg do $n$-tog reda. Tako, kod $2^6$ faktorijalnog ogleda razvojem binoma $(1+1)^6$ dobijamo koeficijente 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. Prema tome, imaćemo 6 glavnih efekata, 15 interakcija prvog reda itd. Na kraju imamo jednu interakciju 5-og reda koja predstavlja kombinaciju 6 faktora.

Jedan $2^n$ faktorijalni ogled ima $(2^n - 1)$ ortogonalnih upoređenja. Drugim rečima, suma kvadrata tretmana razbija se na $2^n - 1$ suma kvadrata, svaka sa pojednim stepenom slobode.

Dobijanje glavnih efekata i interakcija u funkciji sredina ili totala pojedinih tretmana može da se izvede sastavljanjem šeme kao u tab. 10.26. Takva šema imaće $2^n$ redova za sredinu i efekte faktora.

Pravilo za sastavljanje šeme je sledeće: prvo se uvode znaci za svaki glavni efekat posebno. Znak + dobija onaj tretman koji ima dati faktor na drugom nivou, i to je malo slovo tog faktora; znak – dobijaju oni tretmani koji ga nemaju. Interakcije se dobijaju umnoškom znakova tretmana glavnih efekata.Ako je reč o interakciji prvog reda, tada se množe znakovi dva glavna efekta; za interakciju drugog reda množe se znakovi tri glavna efekta, ili se znakovi jedne interakcije prvog reda, koja uključuje date faktorè, množe se znakovima glavnog efekta trećeg faktora. Tako, interakcija trećeg reda $ABCD$ može da se dobije množenjem znakova glavnih efekata $A$, $B$, $C$ i $D$, ali, isto tako, i množenjem znakova interakcija $AB$ i $CD$ ili $ABC$ i $D$.

Divizor za dobijanje opšte sredine je $2^n \cdot r$ ($r$ = broj ponavljanja), a divizor za dobijanje sredina efekata je $2^{n-1} \cdot r$.

Do određenih efekata može se doći i na jedan drugi način. Opštu sredinu možemo izraziti kao:

$$M = \frac{1}{r2^n}(a+1)(b+1)(c+1)\ldots \tag{10.62}$$

Analogno, glavne efekte i interakcije izražavamo kao:

$$\frac{1}{r2^{n-1}}(a\pm1)(b\pm1)(c\pm1)\ldots \tag{10.63}$$

Efekti će se dobiti tako što će izrazi u zagradama imati znak za one efekte izražene odgovarajućim velikim slovima. Ostali izrazi u zagradama imaće znak +. Tako, glavni efekat od $A$ je:

$$A = \frac{1}{r2^{n-1}}(a-1)(b+1)(c+1)\ldots \tag{10.64}$$

Ili interakcija $AC$ je:

$$AC = \frac{1}{r2^{n-1}}(a-1)(b+1)(c-1)\ldots \tag{10.65}$$

Međusobnim množenjem znakova u zagradama dobijamo efekte u funkciji rezultata tretmana kao i ranije. U opštem slučaju je:

$$\frac{1}{r2^{n-1}}\left[\pm(1)\pm a\pm b\pm ab\pm c\pm ac\pm bc\pm abc\ldots\right]. \tag{10.66}$$

Za glavni efekat od $A$ to je:

$$\frac{1}{r2^{n-1}}[-(1)+a-b+ab-c+ac-bc+abc...]. \qquad (10.67)$$

U svakom faktorijalnom efektu polovina kombinacija tretmana ima znak + a druga polovina znak −. Isti znak imaju oni tretmani (jedna polovina) koji uključuju parna slova odgovarajućeg faktora a drugi znak ostali tretmani (druga polovina). Za ilustraciju uzećemo jedan $2^5$ ogled koji ima *a, b, c, d* i *e* faktore sa 32 kombinacije. Za dobijanje efekata bilo kog faktora 16 tretmana ima znak + a 16 znak −. Tako, recimo, na osnovu rezultata tretmana želimo da dobijemo interakciju *ABCD*. Ovde se ponavljaju četiri slova *a, b, c* i *d*.

Kombinacije sa parnim slovima uključenim u interakciju *ABCD* su: (1), *ab, ac, ad, bc, bd, cd* i *abcd*. Svakoj od ovih 8 kombinacija treba dodati slovo *e* koje nije uključeno u datu interakciju i tako će se dobiti 16 tretmana sa znakom +:

| | |
|---|---|
| (1) | e |
| *ab* | abe |
| *ac* | ace |
| *ad* | ade |
| *bc* | bce |
| *bd* | bde |
| *cd* | cde |
| *abcd* | abcde |

Ostalih 16 tretmana su neparna slova iz interakcije *ABCD*. Njima treba dodati malo slovo *e* koje nije uključeno u interakciju. Svi tretmani imaju znak −.:

| | |
|---|---|
| *a* | ae |
| *b* | be |
| *c* | ce |
| *d* | de |
| *abc* | abce |
| *abd* | abde |
| *acd* | acde |
| *bcd* | bcde |

Kad se efekti izračunavaju iz totala, divizor je $r2^{n-1}$, a ako se izračunavaju iz sredina, divizor je $2^{n-1}$.

U analizi varijanse sume kvadrata pojedinih faktorijalnih efekata, svaki sa po jednim stepenom slobode, dobićemo na sledeći način:

$$Q_A = r2^{n-2}[A]^2, \qquad (10.68)$$

$$Q_B = r2^{n-2}[B]^2, \qquad (10.69)$$

$$Q_{ABCD} = r2^{n-2}[ABCD]^2. \qquad (10.70)$$

Kada se radi o totalima efekata, recimo:

$$A = -(1) + a - b + ab - c + ac - bc + abc..., \tag{10.71}$$

tada je suma kvadrata:

$$Q_A = \frac{[A]^2}{r2^n}. \tag{10.72}$$

Na isti način dobijaju se sume kvadrata za ostale efekte, recimo:

$$Q_B = \frac{[B]^2}{r2^n}, \tag{10.73}$$

$$Q_{ABCD} = \frac{[ABCD]^2}{r2^n}. \tag{10.74}$$

## 10.10. Metod za praktično izračunavanje faktorijalnih efekata

Jedan metod za izračunavanje faktorijalnih efekata dao je Jejts (Yates, 1958). Izračunavanje se izvodi *bez upotrebe algebarskih znakova* i vrlo je praktično kod ogleda sa većim brojem faktora i postojanja kontrole, tj. jedinica bez primene tretmana. Naime, ogledi $2^n$ se vrlo često izvode tako da je svaki faktor na dva nivoa (primena i bez primene). Šema izračunavanja prikazana je na primeru jednog $2^3$ ogleda u tab. 10.32. Postupak kod sistematizacije tretmana je sledeći: prvo dolazi tretman gde su svi faktori na prvom nivou, zatim po redu tretmani *a, b, ab, c, ac, bc, abc*. Uvođenju svakog novog slova sledi i njegova kombinacija sa svim prethodnim slovima ili kombinacijama tretmana. U koloni 1 tab. 10.32 u prva četiri reda unosi se zbir parova tretmana koji dolaze po redosledu. Tako, u prvom redu je $[a+(1)]$, u drugom $(ab + b)$ itd. U drugoj polovini redova je razlika tih parova, tj. $(a - 1)$, $(ab - b)$ itd. Isti postupak primenjuje se za dobijanje vrednosti u koloni 2 a na osnovu podataka kolone 1; kolona tri dobija se na osnovu zbira, odnosno razlike podataka kolone 2. Prvi red kolone 3 odgovara totalnoj vrednosti svih tretmana dok ostali redovi ove kolone pokazuju totale faktorijalnih efekata. Na kraju, poslednja kolona pokazuje sredine efekata dobijene tako što se vrednost u koloni 3 u prvom redu deli sa 8 $r$ za dobijanje opšte sredine a u ostalim redovima sa 4r za dobijanje sredina faktorijalnih efekata.

Ukoliko se radi o $n$ faktora, broj kombinacija tretmana je $2^n$; broj numerisanih kolona u radnoj tabeli je $n$; divizor za opštu sredinu je $2^n r$ a za sredine efekata $2^{n-1} r$.

Ovaj metod omogućuje da se *etapno kontrolišu računske operacije* i na taj način se blagovremeno mogu uočiti pogreške kod obračuna. Ova kontrola je naročito korisna kod većih faktorijalnih ogleda. Počinje se od kolone "total kombinacije tretmana" i posebno se zbroje totali sa neparnim rednim brojem, posebno totali sa parnim rednim brojem. Na osnovu tab. 10.32 imamo:

**TAB. 10.32. Šema za izračunavanje faktorijalnih efekata kod jednog $2^3$ ogleda**

| Redni broj | Total kombinacije tretmana | (1) | (2) | (3) | Sredine efekata |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $a + (1)$ | $(a + 1)(b + 1)$ | $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$ | $\frac{1}{8r}(a + 1)(b + 1)(c + 1) = M$ |
| 2 | $a$ | $ab + b = b(a + 1)$ | $c(a + 1)(b + 1)$ | $(a - 1)(b + 1)(c + 1)$ | $\frac{1}{4r}(a - 1)(b + 1)(c + 1) = A$ |
| 3 | $b$ | $ac + c = c(a + 1)$ | $(a - 1)(b + 1)$ | $(a + 1)(b - 1)(c + 1)$ | $\frac{1}{4r}(a + 1)(b - 1)(c + 1) = B$ |
| 4 | $ab$ | $abc + bc = bc(a + 1)$ | $c(a - 1)(b + 1)$ | $(a - 1)(b - 1)(c + 1)$ | $\frac{1}{4r}(a - 1)(b - 1)(c + 1) = AB$ |
| 5 | $c$ | $a - (1)$ | $(a + 1)(b - 1)$ | $(a + 1)(b + 1)(c - 1)$ | $\frac{1}{4r}(a + 1)(b + 1)(c - 1) = C$ |
| 6 | $ac$ | $ab - b = b(a - 1)$ | $c(a + 1)(b - 1)$ | $(a - 1)(b + 1)(c - 1)$ | $\frac{1}{4r}(a - 1)(b + 1)(c - 1) = AC$ |
| 7 | $bc$ | $ac - c = c(a - 1)$ | $(a - 1)(b - 1)$ | $(a + 1)(b - 1)(c - 1)$ | $\frac{1}{4r}(a + 1)(b - 1)(c - 1) = BC$ |
| 8 | $abc$ | $abc - bc = bc(a - 1)$ | $c(a - 1)(b - 1)$ | $(a - 1)(b - 1)(c - 1)$ | $\frac{1}{4r}(a - 1)(b - 1)(c - 1) = ABC$ |

TAB. 10.32. Šema za izračunavanje faktorijalnih efekata kod jednog $2^3$ ogleda

Neparni totali: $(1) + b + c + bc = NT$.

Parni totali: $a + ab + ac + abc = PT$.

To isto treba da se uradi kod vrednosti kolone 1, tj. posebno zbrojiti neparne i posebno parne vrednosti.

Neparne vrednosti kolone 1:

$(a + 1) + (ac + c) + (a - 1) + (ac - c) = N1$.

Parne vrednosti kolone 1:

$(ab + b)+(abc + bc)+(ab - b)+(abc - bc) = P1$.

Istovremeno treba sabrati prva četiri reda kolone 1:

$$(a + 1)+(ab + b)+(ac + c)+(abc + bc) = \overset{4}{\underset{i=1}{K1}},$$

gde smo za $\overset{4}{\underset{i=1}{K1}}$ označili prva četiri reda prve kolone. Kontrola se izvodi tako što je $K1 = NT + PT$. Sledeća kontrola se izvodi zbrajanjem prva četiri reda kolone 2:

$$(a + 1)(b + 1)+c(a + 1)(b + 1)+(a - 1)(b + 1) + c(a - 1)(b + 1) = \overset{4}{\underset{i=1}{K2}}.$$

Zatim se kontroliše jednakost $\overset{4}{\underset{i=1}{K2}} = N1 + P1$ ili:

$$\overset{4}{\underset{i=1}{K2}} - \overset{4}{\underset{i=1}{K1}} = PT-NT$$

U daljem postupku izračunava se suma neparnih i parnih vrednosti kolone 2, kao i suma prva četiri reda kolone 3.

Neparne vrednosti kolone 2:

$(a + 1)(b + 1) + (a - 1)(b + 1) + (a + 1)(b - 1) + (a - 1)(b - 1) = N2$.

Parne vrednosti kolone 2:

$c(a+1)(b+1)+c(a-1)(b+1)+c(a+1)(b-1)+c(a-1)(b-1) = P2$.

Suma prva četiri reda kolone 3:

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) + (a - 1)(b + 1)(c + 1) +$$
$$+ (a + 1)(b - 1)(c + 1) + (a - 1)(b - 1)(c + 1) = \overset{4}{\underset{i=1}{K3}}.$$

I ovde postoji jednakost:

$$\overset{4}{\underset{i=1}{K3}} = N2+P2.$$

Ili:

$$\overset{4}{\underset{i=1}{K3}} - \overset{4}{\underset{i=1}{K2}} = P1-N1.$$

Pored ovog načina, kontrola se može izvesti zbrajanjem suma kvadrata glavnih efekata i interakcija, i ona treba da je jednaka sumi kvadrata tretmana u analizi varijanse.

Za ilustraciju uzećemo Jejtsov primer. To je klasični $2^3$ ogled sa ispitivanjem uticaja đubriva na prinos krompira. Faktori su tri vrste đubriva: azot ($N$), kalij ($K$), stajnjak ($D$). Dva nivoa svakog faktora su sa primenom datog đubriva i bez njega. I kao što smo već ranije kazali, kad je faktor na drugom nivou biće označen, a na prvom neće biti. Rezultati ogleda u 4 ponavljanja i analiza varijanse dati su u tab. 10.33 i 10.34.

**TAB. 10.33. Rezultati $2^3$ faktorijalnog ogleda sa đubrivom**

| Tretmani | Ponavljanja 1 | 2 | 3 | 4 | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 101 | 106 | 87 | 131 | 425 |
| *n* | 106 | 89 | 128 | 103 | 426 |
| *k* | 265 | 272 | 279 | 302 | 1.118 |
| *nk* | 291 | 306 | 334 | 272 | 1.203 |
| *d* | 312 | 324 | 323 | 324 | 1.283 |
| *nd* | 373 | 338 | 324 | 361 | 1.396 |
| *kd* | 398 | 407 | 423 | 445 | 1.673 |
| *nkd* | 450 | 449 | 471 | 437 | 1.807 |
| Ukupno | 2.296 | 2.291 | 2.369 | 2.375 | 9.331 |

**TAB. 10.34. Analiza varijanse $2^3$ ogleda sa đubrivom**

| Izvori varijacije | Stepeni slobode | Suma kvadrata | Sredina kvadrata | *F* |
|---|---|---|---|---|
| Blokovi | 3 | 774,1 | 258,0 | |
| Tretmani | 7 | 458.718,0 | 65.531,1 | 188,85 |
| Pogreška | 21 | 7.287,6 | 347,0 | |
| Ukupno | 31 | 466.779,7 | | |

Kao što se na osnovu izračunatog *F* vidi, varijanse tretmana su značajne. Izračunavanje faktorijalnih efekata totala prikazano je u tab. 10.35.

**TAB. 10.35. Izračunavanje efekata tretmana**

| Tretmani | Ukupno | (1) | (2) | (3) | Efekti totala |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 425 | 851 | 3.171 | 9.331 | Ukupno |
| *n* | 426 | 2.321 | 6.159 | 333* | *N* |
| *k* | 1.118 | 2.679 | 86 | 2.271* | *K* |
| *nk* | 1.203 | 3.480 | 247 | 105 | *NK* |
| Ukupno | | 9.331 | 9.664 | 12.040 | |
| *d* | 1.283 | 1 | 1.470 | 2.987* | *D* |
| *nd* | 1.396 | 85 | 801 | 161 | *ND* |
| *kd* | 1.673 | 113 | 84 | −669* | *KD* |
| *nkd* | 1.807 | 134 | 21 | −63 | *NKD* |
| Neparni totali | 4.499 | 3.644 | 4.812 | 13.920 | |
| Parni totali | 4.832 | 6.020 | 7.228 | 536 | |
| Ukupno | 9.331 | 9.664 | 12.040 | 14.456 | |

Efekti totala prikazani su u koloni 3 tab. 10.35. Za dobijanje kritične vrednosti radi testiranja njihove značajnosti prvo se izračunava (10.60):

$$s_{\bar{X}} = \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 347} = 105{,}4\,,$$

a zatim se ta vrednost množi sa veličinom $t$ iz tabele $t-$distribucije za 21 stepen slobode koja za $\alpha = 0{,}05$ iznosi 2,08. Prema tome, kritična vrednost je $105{,}4 \cdot 2{,}08 = 219{,}2$. Veću vrednost od ove imaju efekti $N$, $K$, $D$ i $KD$, pa se oni mogu smatrati značajnim. U tab. 10.35. ti efekti su obeleženi zvezdicom.

## 10.11. Analiza većeg broja ogleda

U dosadašnjem izlaganju o raznim planovima ogleda uvek se radilo o ispitivanjima koja su izvođena na *jednom mestu* sa određenim trajanjem. Potrebe istraživačkog rada, međutim, nalažu da se isti ogledi izvode na *više različitih mesta* ili da se *ponavljaju u nekoliko vremenskih perioda*, ili, pak, da to bude *kombinacija i jednog i drugog slučaja*. Takvim ogledima se proširuje vrednost zaključaka o mogućnosti uspešne primene izvesnih tretmana, s obzirom na lokaciju ili uticaj vremenskog faktora.

Ukoliko se ogled izvodi na više mesta, ili u više perioda, prvenstveno nas zanima da li su razlike u tretmanima *iste i značajne* bez obzira na mesto ili period. Ako su iste time se dokazuje superiornost jednog ili više tretmana. No, ako razlike nisu iste, interakcija će biti značajna, što će ukazivati da su izvesni tretmani značajni u jednim a drugi u drugim uslovima.

Ogledi na više mesta ili u više sezona mogu da se smatraju *faktorijalnim,* gde su različita mesta jedan a periodi drugi faktor. Ovi faktori mogu da se uzmu i kao fiksni i kao promenljivi, što, s obzirom na izbor modela, nalaže različitu interpretaciju rezultata. Obično, ni mesta ni sezone nisu uzeti na slučajan način, ali se, i pored toga, često smatraju kao slučajno promenljive.

*Analiza većeg broja ogleda i interpretacija njihovih rezultata* stvara često dosta teškoća, pa je potrebno ukazati na izvesne probleme u vezi s njihovim izvođenjem. Pre svega, nešto o tehnici analize. Ako se ogled izvodi u više godina ili na više mesta, rezultati svake godine ili svakog mesta mogu da se posmatraju i kao individualni ogled sa odgovarajućom interpretacijom rezultata. Analiza varijanse ovakvog ogleda, ako je izveđen u slučajnom blok–sistemu, ima sledeće komponente varijacije: blokovi, tretmani i pogreška. Međutim, ako se radi o seriji višegodišnjih ogleda, analiza varijanse je drugačija i prikazana je u tab. 10.36.

Analiza varijanse ima isti izgled i kod ogleda izvođenog na više mesta, samo što u analizi varijanse, umesto godina $G$, figurira mesto $M$, odnosno interakcija $T \times M$.

Za sume kvadrata blokova i pogreške u tab. 10.36. uzima se zbir odgovarajućih suma kvadrata pojedinačnih ogleda. Suma kvadrata tretmana pojedinačnih ogleda jednaka je zbiru suma kvadrata tretmana i sume kvadrata interakcije u analizi varijanse serije ogleda. Pored toga, u analizi varijanse serije ogleda pojavljuje se u sumi kvadrata godina kao dodatna komponenta.

**TAB. 10.36. Analiza varijanse višegodišnjeg ogleda u opštem slučaju**

| Izvori varijacije | Stepeni slobode | Suma kvadrata | Sredina kvadrata |
|---|---|---|---|
| Blokovi, $B$ | $g(b-1)$ | $Q_B$ | $Q_B/g(b-1)$ |
| Tretmani, $T$ | $(t-1)$ | $Q_T$ | $Q_T/(t-1)$ |
| Godine, $G$ | $(g-1)$ | $Q_G$ | $Q_G/(g-1)$ |
| $T \times G$ | $(t-1)(g-1)$ | $Q_{TG}$ | $Q_{TG}/[(t-1)(g-1)]$ |
| Pogreška | $g(b-1)(t-1)$ | $Q_P$ | $Q_P/[g(b-1)(t-1)]$ |
| Ukupno | $btg-1$ | $Q$ | |

Matematički model I višegodišnjeg ogleda u potpuno slučajnom rasporedu je:

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \bar{\varepsilon}_{ijk} \tag{10.75}$$

gde $\alpha_i$ i $\beta_j$ predstavljaju efekte tretmana i godine, a $(\alpha\beta)_{ij}$ je interakcija; $\bar{\varepsilon}_{ijk}$ je prosečna vrednost slučajne promenljive $k-$te jedinice $i-$tog tretmana i $j-$te godine.

Ukoliko se u interpretaciji polazi od *modela II ili mešovitog modela*, što je čest slučaj, tada bi za uspešnu statističku analizu bilo potrebno da su prethodno ispunjeni izvesni uslovi. Naime, kod takvih modela polazi se od pretpostavke o slučajnom karakteru interakcije, $N\ (0, \sigma^2)$. Ova pretpostavka često se dovodi u sumnju, pošto tretmani mogu da dosta neujednačeno variraju iz godine u godinu. U takvoj situaciji, odgovor na $F-$test sredine kvadrata tretmana i sredine kvadrata interakcije je nešto deformisan. Kritična vrednost iz tabela $F-$distribucije je, zapravo,nešto niža nego što bi u stvari trebalo kada bi uslov o jednakosti varijansi tretmana bio ispunjen.

Jedan od načina da se suočimo s ovim problemom je da se suma kvadrata tretmana podeli na sume kvadrata ortogonalnih upoređenja koja su interesantna u ispitivanju. Isto tako, suma kvadrata interakcije deli se na sume kvadrata koje odgovaraju tim ortogonalnim upoređenjima. Pored toga, putem Bartletovog testa moguće je testirati jednakost $\sigma^2_{TG}$ (Bartlett, 1937).

**TAB. 10.37. Očekivana suma kvadrata u višegodišnjem ogledu gde je godina uzeta kao slučajno promenljiva**

| Izvori varijacije | Očekivana sredina kvadrata |
|---|---|
| Tretmani, $T$ | $\sigma^2 + n\sigma^2_{TG} + \frac{nb}{a-1}\sum_{i=1}^{a}(\alpha_i - \bar{\alpha})^2$ |
| Godina, $G$ | $\sigma^2 + na\sigma^2_G$ |
| Interakcija, $TG$ | $\sigma^2 + n\sigma^2_{TG}$ |
| Pogreška | $\sigma^2$ |

Analiza varijanse polazi i od toga da je varijansa pogreške ($\sigma^2$) homogena, tj. da je ista za sve oglede. Ispunjenje ove pretpostavke dovedeno je u pitanje ukoliko su slučajne varijacije jače po godinama ili po mestima. Bartletov test je način da se sagleda da li postoji homogenost varijanse pogreške.

Kada se imaju u vidu ove napomene o pretpostavkama za varijanse interakcije i pogreške i utvrdi postojanje homogenosti, tada se sa više sigurnosti mogu da interpretiraju rezultati i izvode zaključci. (O problemima serije ogleda iscrpnija razmatranja mogu da se nađu kod: Cochran, Cox, 1957; Vessereau, 1960).

Rezultate ogleda sa 7 sorti krompira izvedenog u 1958. i 1959. godini pruža tab. 10.38. (Kmetijski institut Slovenije, Ljubljana). Ogled je izveden u 5 ponavljanja i svi prinosi su u *kg/25 m*$^2$.

**TAB. 10.38. Rezultati ogleda sa krompirom u 1958. i 1959. godini.**

| Ponavljanje | | Sorte | | | | | | | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 01*K* | 02*K* | 03K | 04*K* | 05*K* | 06*K* | Standard | |
| 1958 | 1 | 67,7 | 106,1 | 77,9 | 78,7 | 64,5 | 93,5 | 94,8 | 583,2 |
| | 2 | 67,7 | 88,4 | 78,1 | 76,2 | 69,2 | 85,4 | 81,1 | 546,1 |
| | 3 | 65,5 | 97,9 | 78,2 | 88,9 | 81,3 | 90,0 | 92,1 | 593,9 |
| | 4 | 67,4 | 105,3 | 68,8 | 88,2 | 81,5 | 80,4 | 81,6 | 573,2 |
| | 5 | 48,9 | 97,7 | 78,3 | 81,4 | 72,5 | 84,1 | 90,8 | 553,7 |
| Ukupno | | 317,2 | 495,4 | 381,3 | 413,4 | 369,0 | 433,4 | 440,4 | 2.850,1 |
| $\bar{X}$ | | 63,4 | 99,1 | 76,3 | 82,7 | 73,8 | 86,7 | 88,1 | 81,4 |
| 1959 | 1 | 82,9 | 87,1 | 66,6 | 77,2 | 47,8 | 84,5 | 81,2 | 527,3 |
| | 2 | 87,0 | 83,1 | 75,1 | 71,9 | 52,1 | 77,8 | 79,5 | 526,5 |
| | 3 | 80,1 | 90,9 | 76,1 | 69,8 | 43,3 | 77,9 | 78,1 | 516,2 |
| | 4 | 80,8 | 81,9 | 68,3 | 73,6 | 60,4 | 81,6 | 83,9 | 530,5 |
| | 5 | 87,1 | 91,5 | 70,0 | 70,3 | 70,8 | 78,0 | 79,8 | 547,5 |
| Ukupno | | 417,9 | 434,5 | 356,1 | 362,8 | 274,4 | 399,8 | 402,5 | 2.648,0 |
| $\bar{X}$ | | 83,6 | 86,9 | 71,2 | 72,6 | 54,9 | 80,0 | 80,5 | 75,7 |
| Totali za 1958. i 1959. | | 735,1 | 929,9 | 737,4 | 776,2 | 643,4 | 833,2 | 842,9 | 5.498,1 |

Sume kvadrata za analizu varijanse svake godine posebno su izračunate na uobičajeni način i prikazane za obe godine u tab. 10.39.

**TAB. 10.39. Sume kvadrata ogleda sa krompirom za 1958. i 1959. godinu**

| Godina | Blokovi | Sorte | Pogreška | Ukupno |
|---|---|---|---|---|
| 1958 | 227,52 | 3.967,28 | 933,30 | 5.128,10 |
| 1959 | 73,67 | 3.460,56 | 684,58 | 4.218,81 |
| Ukupno | 301,19 | 7.427,84 | 1.617,88 | 9.346,91 |

Za analizu varijanse rezultata za 1958. i 1959. godinu u celini izračunavamo sledeće sume kvadrata:

$$C = \frac{(5.498,1)^2}{70} = 431.844,34 .$$

$$\text{Suma kvadrat totala} = (67,7)^2 + (106,1)^2 + \ldots + (79,8)^2 - C = 9.930,39.$$

$$\text{Suma kvadrata godina, } G = \frac{(2.850,1)^2 + (2.648,0)^2}{35} - C = 583,49 .$$

$$\text{Suma kvadrata sorti, } T = \frac{(735,1)^2 + \ldots + (842,9)^2}{10} - C = 5.155,40 .$$

$$\text{Suma kvadrata sorti po godinama} = \frac{(317,2)^2 + \ldots + (402,5)^2}{5} - C = 8.011,32 .$$

$$\text{Suma kvadrata sorte} \times \text{godine, } TG = 8.011,32 - 5.155,40 - 583,49 = 2.272,43.$$

Sume kvadrata za blokove i pogrešku uzeti su iz tab. 10.39.

**TAB. 10.40. Analiza varijanse dvogodišnjeg ogleda sa krompirom**

| Izvori varijacije | Stepeni slobode | Suma kvadrata | Sredina kvadrata | $F$ |
|---|---|---|---|---|
| Blokovi | 8 | 301,19 | 37,65 | |
| Sorte, $T$ | 6 | 5.155,40 | 859,23 | 25,49 |
| Godine, $G$ | 1 | 583,49 | 583,49 | 17,31 |
| Interakcija, $TG$ | 6 | 2.272,43 | 378,74 | 11,24 |
| Pogreška | 48 | 1.617,88 | 33,71 | |
| Ukupno | 69 | 9.930,39 | | |

$F_{(0,05;\ 6\ i\ 48)} = 2,30$; $F_{(0,05;\ 1\ i\ 48)} = 4,04$ . Proizilazi da su sorte, godine i interakcije značajni.

## 10.12. Višegodišnji ogledi na više mesta

Ogledi se često izvode na više mesta i u ponavljanju od više godina. Takvi ogledi mogu da se smatraju kao ogledi sa *tri faktora*: jedan faktor su tretmani, drugi godine i treći mesta. Analiza varijanse ovakvog ogleda data je u tab. 10.41.

Za sume kvadrata blokova i pogreške u analizi varijanse tab. 10.41. uzimaju se zbirovi sume kvadrata blokova i sume kvadrata pogreški pojedinačnih ogleda za svako mesto i svaku godinu. Zbir sume kvadrata tretmana pojedinačnih ogleda jednak je zbiru sume kvadrata tretmana i sume kvadrata interakcija *TG, TM, TGM* u analizi varijanse tab. 10.41. Analiza varijanse u tab. 10.41. sadrži još i sledeće izvore varijacije: godine, *G*, mesta, *M* i interakciju, *GM*. Za zbir sume kvadrata ova poslednja tri efekta povećava se suma kvadrata totala u tab. 10.41. upoređena sa sumom kvadrata totala pojedinačnih ogleda.

**TAB. 10.41.Analiza varijanse višegodišnjeg ogleda na više mesta u opštem slučaju**

| Izvori varijacije | Stepeni slobode | Suma kvadrata | Sredina kvadrata |
|---|---|---|---|
| Blokovi, *B* | $mg(b-1)$ | $Q_B$ | $Q_B/[mg(b-1)]$ |
| Tretmani, *T* | $t-1$ | $Q_T$ | $Q_T/(t-1)$ |
| Godine, *G* | $g-1$ | $Q_G$ | $Q_G/(g-1)$ |
| Mesta, *M* | $m-1$ | $Q_M$ | $Q_M/(m-1)$ |
| *TG* | $(t-1)(g-1)$ | $Q_{TG}$ | $Q_{TG}/[(t-1)(g-1)]$ |
| *TM* | $(t-1)(m-1)$ | $Q_{TM}$ | $Q_{TM}/[(t-1)(m-1)]$ |
| *GM* | $(g-1)(m-1)$ | $Q_{GM}$ | $Q_{GM}/[(g-1)(m-1)]$ |
| *TGM* | $(t-1)(g-1)(m-1)$ | $Q_{TGM}$ | $Q_{TGM}/[(t-1)(g-1)(m-1)]$ |
| *Pogreška* | $gm(b-1)(t-1)$ | $Q_P$ | $Q_P/[gm(b-1)(t-1)]$ |
| Ukupno | $btgm-1$ | $Q$ | |

Matematički model I ovakvog ogleda je proširen i izgleda ovako:

$$X_{ijlk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{il} + (\beta\gamma)_{jl} + (\alpha\beta\gamma)_{ijl} + \bar{\varepsilon}_{ijkl}, \qquad (10.76)$$

gde su $\alpha_i$, $\beta_j$ i $\gamma_l$ dejstva tretmana, godina i mesta, a ostalo su njihove interakcije plus sredina osnovnog skupa ($\mu$) i $\bar{\varepsilon}_{ijkl}$ je prosečna vrednost slučajne promenljive, koja ima za sredinu 0 i $\sigma^2$.

Problem verodostojne statističke analize i interpretacije rezultata ovakvih ogleda postaje još složeniji. Naime, u osnovi analize ovih ogleda, pored datih napomena, najčešće je pretpostavka o slučajnom izboru godina i mesta koji se smatraju uzorcima iz osnovnog skupa. Ova pretpostavka se dosta osporava pa time i valjanost zaključaka na osnovu rezultata analize. I pored toga, statistička analiza ovih ogleda često se izvodi, kao i kod ponavljanja ogleda u više godina ili više mesta, tj. uz pretpostavku slučajnog karaktera godina i mesta i fiksnog karaktera tretmana. U takvoj situaciji pretpostavlja se da sve komponente u matematičkom modelu, izuzev tretmana i opšte sredine, imaju normalan raspored čija je sredina nula i varijansa 1.

Očekivane sredine kvadrata ovakvog ogleda prikazane su u tab. 10.42.

Iz očekivane sredine kvadrata proizilazi da se testiranje značajnosti interakcije *TGM* izvodi pomoću količnika iz njene varijanse i varijanse pogreške. Testiranje značajnosti interakcija prvog reda *TG, TM, GM* se izvodi na osnovu njihovog odnosa prema interakciji *TGM*. Problem se komplikuje kod testiranja glavnih efekata. Postupak sugeriran na strani 299 može i ovde da se primeni.

**TAB. 10.42. Očekivane sredine kvadrata kod višegodišnjih ogleda na više mesta**

| Izvori varijacije | Očekivana sredina kvadrata |
|---|---|
| Blokovi, $B$ | |
| Tretmani, $T$ | $\sigma^2+b\sigma^2_{TGM}+bm\sigma^2_{TG}+bg\sigma^2_{TM}+\frac{bmg}{t-1}\sum_{i=1}^{t}(\alpha_i-\bar{\alpha})^2$ |
| Godina, $G$ | $\sigma^2+b\sigma^2_{TGM}+bm\sigma^2_{TG}+bt\sigma^2_{GM}+btm\sigma^2_{G}$ |
| Mesto, $M$ | $\sigma^2+b\sigma^2_{TGM}+bg\sigma^2_{TM}+bt\sigma^2_{GM}+btg\sigma^2_{M}$ |
| $TG$ | $\sigma^2+b\sigma^2_{TGM}+bm\sigma^2_{TG}$ |
| TM | $\sigma^2+b\sigma^2_{TGM}+bg\sigma^2_{TM}$ |
| GM | $\sigma^2+b\sigma^2_{TGM}+bt\sigma^2_{GM}$ |
| TGM | $\sigma^2+b\sigma^2_{TGM}$ |
| Pogreška | $\sigma^2$ |

Nakon izvođenja analize ogleda predstoji interpretacija rezultata. U toj interpretaciji težište je na sagledavanju dejstva tretmana i njihovih interakcija.

Za ilustraciju uzećemo rezultate ogleda sa 5 sorti pšenice i 4 ponavljanja na Rimskim Šančevima, Srbobranu i Zemunu. Ogledi su izvođeni 1959/60, 1960/61. i 1961/62. godine (Institut za poljoprivredna istraživanja, Novi Sad, Poljoprivredni fakultet, Zemun). Ovi ogledi nisu izvođeni pod potpuno istim agrotehničkim uslovima, što je svakako uticalo i na njihove rezultate. Zbog toga, ovaj primer treba uzeti samo kao ilustraciju metoda. Rezultati su prikazani u tab. 10.43.

Rezultati u celini prikazani u tab. 10.43. mogli bi se isto tako uzeti i analizirati kao pojedinačni ogledi, tj. kao ogledi izvođeni samo na jednom mestu u tri godine,ili pak na tri mesta u toku jedne godine.

Analiza varijanse pojedinačnih ogleda po mestima i godinama data je u tab. 10.44. Za izvođenje analize varijanse ogleda u celini izračunava se:

$$C=\frac{(9.961,22)^2}{180}=551.255,0216.$$

Suma kvadrata totala $= 67,72^2 + 70,28^2 + ... + 25,00^2 - 551.255,0216 =$
$= 613.478,8012 - 551.255,0216 = 62.223,7796.$

Za izračunavanje glavnih efekata i interakcije između pojedinih faktora najbolje je sastaviti kombinovane tabele sa dva ulaza za interakcije prvog reda i jednu tabelu sa tri ulaza za interakciju drugog reda. One su date u tab. 10.45, 10.46, 10.47, 10.48. i 10.49.

Analiza varijanse ogleda u celini data je u tab. 10.50.

**TAB. 10.43. Rezultati ogleda sa pšenicom na tri mesta i za tri godine (u *t/ha*)**

| | 1959/60 | | | | | 1960/61 | | | | | 1961/62 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | Ukupno | 1 | 2 | 3 | 4 | Ukupno | 1 | 2 | 3 | 4 | Ukupno |
| *R.Šančevi* | | | | | | | | | | | | | | | |
| S.Pastore | 6,8 | 6,7 | 6,8 | 6,8 | 27,1 | 6,5 | 4,6 | 6,2 | 6,8 | 24,1 | 6,0 | 5,6 | 6,0 | 5,4 | 23,0 |
| E.de Choisy | 7,0 | 8,0 | 7,3 | 7,7 | 30,0 | 4,6 | 6,0 | 6,3 | 6,0 | 22,9 | 6,9 | 6,5 | 7,1 | 6,4 | 26,9 |
| Leonardo | 7,1 | 7,3 | 7,4 | 7,4 | 29,2 | 5,8 | 5,4 | 6,8 | 6,5 | 24,5 | 6,0 | 6,1 | 6,6 | 5,9 | 24,6 |
| Leone | 3,7 | 6,4 | 6,0 | 6,2 | 22,3 | 5,2 | 5,3 | 7,0 | 5,2 | 22,7 | 5,9 | 6,1 | 6,4 | 5,7 | 24,1 |
| Marimp−3 | 6,2 | 7,5 | 6,4 | 6,3 | 26,4 | 6,0 | 5,5 | 5,5 | 6,5 | 23,5 | 6,0 | 5,6 | 5,7 | 6,2 | 23,5 |
| | 30,8 | 35,9 | 33,9 | 34,4 | 135,0 | 28,1 | 26,8 | 31,8 | 31,0 | 117,7 | 30,8 | 29,9 | 31,8 | 29,6 | 122,1 |
| *Srbobran* | | | | | | | | | | | | | | | |
| S. Pastore | 7,2 | 7,9 | 5,6 | 7,7 | 28,4 | 6,2 | 6,6 | 6,5 | 7,4 | 26,7 | 7,6 | 6,7 | 6,8 | 7,3 | 28,4 |
| E. de Choisy | 7,6 | 7,6 | 7,8 | 7,4 | 30,4 | 6,9 | 6,6 | 5,2 | 6,9 | 25,6 | 7,1 | 7,5 | 7,5 | 8,0 | 30,1 |
| Leonardo | 8,6 | 8,6 | 8,6 | 8,2 | 34,0 | 7,2 | 7,7 | 6,6 | 5,3 | 26,8 | 7,0 | 7,5 | 6,8 | 7,4 | 28,7 |
| Leone | 8,0 | 7,0 | 8,0 | 8,1 | 31,1 | 5,6 | 6,2 | 6,7 | 5,4 | 23,9 | 5,8 | 6,3 | 7,4 | 6,9 | 26,4 |
| Marimp−3 | 8,1 | 7,8 | 5,5 | 7,4 | 28,8 | 6,4 | 6,4 | 7,4 | 7,0 | 27,2 | 7,2 | 7,8 | 6,8 | 7,4 | 29,2 |
| | 39,5 | 38,9 | 35,5 | 38,8 | 152,7 | 32,3 | 35,5 | 32,4 | 32,0 | 130,2 | 34,7 | 35,8 | 35,3 | 37,0 | 142,8 |
| *Zemun* | | | | | | | | | | | | | | | |
| S. Pastore | 3,8 | 4,1 | 3,8 | 3,8 | 15,5 | 3,9 | 2,4 | 3,7 | 3,9 | 13,9 | 3,1 | 3,0 | 2,0 | 3,4 | 11,5 |
| E. de Choisy | 4,9 | 3,8 | 3,9 | 5,4 | 18,0 | 4,6 | 4,0 | 2,1 | 5,1 | 15,8 | 3,1 | 2,8 | 2,1 | 2,6 | 10,6 |
| Leonardo | 2,9 | 2,2 | 3,0 | 3,2 | 11,3 | 4,6 | 4,4 | 3,6 | 2,9 | 15,5 | 2,6 | 2,5 | 1,7 | 3,4 | 10,2 |
| Leone | 3,8 | 4,5 | 2,4 | 2,4 | 13,1 | 3,8 | 3,6 | 3,4 | 4,2 | 15,0 | 2,2 | 1,5 | 1,7 | 2,2 | 7,6 |
| Marimp−3 | 3,0 | 5,5 | 2,6 | 2,7 | 13,8 | 3,8 | 3,0 | 3,9 | 3,0 | 13,7 | 2,5 | 2,5 | 1,7 | 2,5 | 9,2 |
| | 18,4 | 20,1 | 15,7 | 17,5 | 71,7 | 20,7 | 17,4 | 16,7 | 19,1 | 73,9 | 13,5 | 12,3 | 9,2 | 14,1 | 49,1 |
| Ukupno | 88,7 | 94,9 | 85,1 | 90,7 | 359,4 | 81,1 | 77,7 | 80,9 | 82,1 | 321,8 | 79,0 | 78,0 | 76,3 | 80,7 | 314,0 |

TAB. 10.43. Rezultati ogleda sa pšenicom na tri mesta i za tri godine (u *t/ha*)

**TAB. 10.44. Analiza varijanse ogleda uzetih pojedinačno na osnovu podataka iz tab. 10.43.**

| Mesto | Godina | Blokovi | Sorte | Pogreška | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|
| Rimski Šančevi | 1959/60 | 2,7540 | 9,0750 | 3,7610 | 15,5900 |
| | 1960/61 | 3,3535 | 0,5880 | 5,5440 | 9,4855 |
| | 1961/62 | 0,5895 | 2,2870 | 0,7930 | 3,6695 |
| Srbobran | 1959/60 | 1,9655 | 4,9780 | 6,4020 | 13,3455 |
| | 1960/61 | 0,2580 | 1,7830 | 7,4970 | 9,5380 |
| | 1961/62 | 0,5720 | 1,8730 | 2,6830 | 5,1280 |
| Zemun | 1959/60 | 2,0175 | 6,4530 | 9,4350 | 17,9055 |
| | 1960/61 | 1,9295 | 0,8870 | 7,7130 | 10,5295 |
| | 1961/62 | 2,8575 | 2,2220 | 1,0900 | 6,1695 |
| Ukupno | | 16,2970 | 30,1460 | 44,9180 | 91,3610 |

**TAB. 10.45. Blokovi × sorte (Totali na osnovu 9 podataka iz tab.10.43.)**

| Sorte | Blokovi | | | | Ukupno | Sredina |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| San pastore | 51,1 | 47,6 | 47,4 | 52,5 | 198,6 | 5,5 |
| Etoil de Choisy | 52,7 | 52,8 | 49,3 | 55,5 | 210,3 | 5,8 |
| Leonardo | 51,8 | 51,7 | 51,1 | 50,2 | 204,8 | 5,7 |
| Leone | 44,0 | 46,9 | 49,0 | 46,3 | 186,2 | 5,2 |
| Marimp – 3 | 49,2 | 51,6 | 45,5 | 49,0 | 195,3 | 5,4 |
| Ukupno | 248,8 | 250,6 | 242,3 | 253,5 | 995,2 | |
| Sredina | 5,5 | 5,6 | 5,4 | 5,6 | | 5,5 |

**TAB. 10.46. Mesta × godine (Totali na osnovu 20 podataka iz tab. 10.43.)**

| Mesto | 1959/60 | 1960/61 | 1961/62 | Ukupno | Sredina |
|---|---|---|---|---|---|
| Rimski Šančevi | 135,0 | 117,7 | 122,1 | 374,8 | 6,2 |
| Srbobran | 252,7 | 130,2 | 142,8 | 425,7 | 7,1 |
| Zemun | 71,7 | 73,9 | 49,1 | 194,7 | 3,2 |
| Ukupno | 359,4 | 321,8 | 314,0 | 995,2 | |
| Sredina | 6,0 | 5,4 | 5,2 | | 5,5 |

$$\text{Suma kvadrata sorti, } T = \frac{198{,}6^2 + \ldots + 195{,}3^2}{36} - 5.502{,}3502 = 9{,}4170\,.$$

$$\text{Suma kvadrata mesta, } M = \frac{374{,}8^2 + 425{,}7^2 + 194{,}7^2}{60} - 5.502{,}3502 = 491{,}0434\,.$$

$$\text{Suma kvadrata godina, } G = \frac{359{,}4^2 + 321{,}8^2 + 314{,}0^2}{60} - 5.502{,}3502 = 19{,}6431\,.$$

Suma kvadrata sorti (T), mesta (M) i interakcije (TM) =

$$= \frac{74{,}2^2 + \ldots + 36{,}7^2}{12} - 5.502{,}3502 = 504{,}4998\,.$$

Suma kvadrata interakcije sorte × mesta, TM = 504,4998 - 9,4170 - 49,0434 = 4,0394 .

Suma kvadrata sorti (T), godina (G) i interakcije (TG) =

$$= \frac{71{,}0^2 + \ldots + 61{,}9^2}{12} - 5.502{,}3502 = 31{,}9364\,.$$

Suma kvadrata interakcije sorte × godine, TG = 31,9364 – 9,4170 – 19,6431 = 2,8763.

Suma kvadrata mesta (M), godine (G) i interakcije (MG) =

$$= \frac{135{,}0^2 + \ldots + 49{,}1^2}{20} - 5.502{,}3502 = 530{,}6888\,.$$

**TAB. 10.47. Sorte × mesta (Totali na osnovu 12 podataka iz tab. 10.43.)**

| Sorte | Rimski Šančevi | Srbobran | Zemun | Ukupno |
|---|---|---|---|---|
| San pastore | 74,2 | 83,5 | 40,9 | 198,6 |
| Etoile de Choisy | 79,8 | 86,1 | 44,4 | 210,3 |
| Leonardo | 78,3 | 89,5 | 37,0 | 204,8 |
| Leone | 69,1 | 81,4 | 35,7 | 186,2 |
| Marimp – 3 | 73,4 | 85,2 | 36,7 | 195,3 |
| Ukupno | 374,8 | 425,7 | 194,7 | 995,2 |

**TAB. 10.48. Sorte × godine (Totali na osnovu 12 podataka iz tab. 10.43.)**

| Sorte | 1959/60 | 1960/61 | 1961/62 | Ukupno |
|---|---|---|---|---|
| San pastore | 71,0 | 64,7 | 62,9 | 198,6 |
| Etoile de Choisy | 78,4 | 64,3 | 67,6 | 210,3 |
| Leonardo | 74,5 | 66,8 | 63,5 | 204,8 |
| Leone | 66,5 | 61,6 | 58,1 | 186,2 |
| Marimp – 3 | 69,0 | 64,4 | 61,9 | 195,3 |
| Ukupno | 359,4 | 321,8 | 314,0 | 995,2 |

Suma kvadrata interakcije mesta × godine, $MG$ =

$$= 530{,}6888 - 491{,}0434 - 19{,}6431 = 20{,}0023.$$

Suma kvadrata sorti ($T$), mesta ($M$), godina ($G$), interakcija ($TM$), ($TG$) i

$$(MG) = \frac{27{,}1^2 + 24{,}1^2 + \ldots + 9{,}2^2}{4} - 5.502{,}3502 = 560{,}8348.$$

Suma kvadrata interakcije sorte $\times$ mesta $\times$ godine, $TGM$ =

$$= 560{,}8348 - 9{,}4170 - 491{,}0434 - 19{,}6431 - 4{,}0394 - 2{,}8763 - 20{,}0023 = 13{,}8133.$$

Ako uzmemo da se radi o mešovitom modelu kod koga su tretmani uzeti kao fiksni, a mesta i godine kao slučajno promenljive, tada ćemo $F$–testove izvoditi prema tab. 10.42. Sredina kvadrata interakcije drugog reda ($TMG$) deli se sa sredinom kvadrata pogreške, tj.:

**TAB. 10.49. Sorte × mesta × godine (Totali na osnovu 4 podatka iz tab. 10.43.)**

| Sorte | Mesto | Godina | Ukupno | Sorte | Mesto | Godina | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| San pastore | Rimski Šančevi | 1959/60 | 27,1 | Leone | Rimski Šančevi | 1959/60 | 22,3 |
| | | 1960/61 | 24,1 | | | 1960/61 | 22,7 |
| | | 1961/62 | 23,0 | | | 1961/62 | 24,1 |
| | Srbobran | 1959/60 | 28,4 | | Srbobran | 1959/60 | 31,1 |
| | | 1960/61 | 26,7 | | | 1960/61 | 23,9 |
| | | 1961/62 | 28,4 | | | 1961/62 | 26,4 |
| | Zemun | 1959/60 | 15,5 | | Zemun | 1959/60 | 13,1 |
| | | 1960/61 | 13,9 | | | 1960/61 | 15,0 |
| | | 1961/62 | 11,5 | | | 1961/62 | 7,6 |
| Etoile de Choisy | Rimski Šančevi | 1959/60 | 30,0 | Marimp-3 | Rimski Šančevi | 1959/60 | 26,4 |
| | | 1960/61 | 22,9 | | | 1960/61 | 23,5 |
| | | 1961/62 | 26,9 | | | 1961/62 | 23,5 |
| | Srbobran | 1959/60 | 3 0,4 | | Srbobran | 1959/60 | 28 ,8 |
| | | 1960/61 | 25,6 | | | 1960/61 | 27,2 |
| | | 1961/62 | 30,1 | | | 1961/62 | 29,2 |
| | Zemun | 1959/60 | 18,0 | | Zemun | 1959/60 | 13,8 |
| | | 1960/61 | 15,8 | | | 1960/61 | 13,7 |
| | | 1961/62 | 10,6 | | | 1961/62 | 9,2 |
| Leonardo | Rimski Šančevi | 1959/60 | 19,2 | | | | |
| | | 1960/61 | 24,5 | | | | |
| | | 1961/62 | 24,6 | | | | |
| | Srbobran | 1959/60 | 34,0 | | | | |
| | | 1960/61 | 26,8 | | | | |
| | | 1961/62 | 28,7 | | | | |
| | Zemun | 1959/60 | 11 ,3 | | | | |
| | | 1960/61 | 15,5 | | | | |
| | | 1961/62 | 10,2 | | | | |

**TAB. 10.50. Analiza varijanse ogleda sa pšenicom izdvojenog u toku tri godine na tri mesta**

| Izvori varijacije | Stepeni slobode | Suma kvadrata | Sredina kvadrata |
|---|---|---|---|
| Blokovi | 27 | 16,2970 | 0,6036 |
| Sorte, T | 4 | 9,4170 | 2,3542 |
| Mesta,M | 2 | 491,0434 | 245,5217 |
| Godine, G | 2 | 19,6431 | 9,8215 |
| TM | 8 | 4,0394 | 0,5049 |
| TG | 8 | 2,8763 | 0,1095 |
| MG | 4 | 20,0023 | 5,0006 |
| TMG | 16 | 13,8133 | 0,8633 |
| Pogreška | 108 | 44, 9180 | 0,4159 |
| Ukupno | 179 | 622,0498 | |

$$F = \frac{Q_{TGM}/[\,(t-1)(g-1)(m-1)]}{Q_P/[\,gm(b-1)(t-1)]} = \frac{0{,}8633}{0{,}4159} = 2{,}07\,.$$

Ovaj odnos je značajan na pragu značajnosti od 0,05, ali ne na pragu 0,01 i nema nekog praktičnog značaja u interpretaciji rezultata. Izračunata F za interakcije TM i TG su:

$$F = \frac{Q_{TM}/[\,(t-1)(m-1)]}{Q_{TMG}/[\,(t-1)(g-1)(m-1)]} = \frac{0{,}5049}{0{,}8633} = 0{,}58\,,$$

$$F = \frac{Q_{TG}/[\,(t-1)(m-1)]}{Q_{TMG}/[\,(t-1)(g-1)(m-1)]} = \frac{0{,}1095}{0{,}8633} = 0{,}13\,,$$

$$F_{(0{,}05\,;\ 8\ i\ 16)} = 2{,}59\,.$$

Za testiranje sredine kvadrata tretmana primenićemo Satterthwaiteov aproksimativni postupak (10.38):

$$F' = \frac{Q_T/(t-1)+Q_{TMG}/[\,(t-1)(m-1)(g-1)]}{Q_{TM}/[\,(t-1)(m-1)]+Q_{TG}/[\,(t-1)(g-1)]} = \frac{2{,}3542+0{,}8633}{0{,}5049+0{,}1095} = 5{,}85\,.$$

Zatim se izračunavaju $r_1$' i $r_2$' (10.39, 10.40):

$$r_1' = \frac{\{Q_T/(t-1) + Q_{TMG}/[\,(t-1)(m-1)(g-1)]\}^2}{\frac{[Q_T/(t-1)]^2}{(t-1)} + \frac{\{Q_{TMG}/[\,(t-1)(m-1)(g-1)]\}^2}{(t-1)(m-1)(g-1)}} = \frac{(2{,}3542+0{,}8633)^2}{\frac{(2{,}3542)^2}{4}+\frac{(0{,}8633)^2}{16}} = 7{,}23,$$

$$r_2' = \frac{\{Q_{TM}/[\,(t-1)(m-1)] + Q_{TG}/[\,(t-1)(g-1)]\}^2}{\frac{\{Q_{TM}/[\,(t-1)(m-1)]\}^2}{(t-1)(m-1)} + \frac{\{Q_{TG}/[\,(t-1)(g-1)]\}^2}{(t-1)(g-1)}} = \frac{(0{,}5049 + 0{,}1095)^2}{\frac{(0{,}5049)^2}{8}+\frac{(0{,}1095)^2}{8}} = 11{,}31\,.$$

$F_{(0{,}05\,;\ 7\ i\ 11)} = 3{,}01$. Rezultati testa ukazuju da su efekti tretmana u celini značajni.

## 10.13. Ogledi s višegodišnjim zasadima

Ogledi s višegodišnjim zasadima stvaraju dodatne probleme u poređenju s jednogodišnjim. Posebna teškoća je kad se ispitivanje vrši na ograničenom broju relativno velikih stabala koja su neujednačena po genetskoj kompoziciji i zbog toga daju nejednake prinose. Dodatni problem je ako su stabla različite starosti. Pošto gustina nije velika može se očekivati da ih ne bude veliki broj u parceli. Ako bi se htelo da u parceli bude veći broj zasada, onda bi njenu površinu trebalo povećati. To bi moglo da dovede do porasta varijabiliteta u prinosu usled razlike u plodnosti zemljišta i neutrališe razlike među tretmanima. Korenov sistem je jedan od faktora o kome treba voditi računa. To ponekad nameće potrebu da se zasade granična stabla i stvori zaštitni pojas. Na prinos značajno utiču: održavanje, nega, prskanja, rezidba, berba itd. Problem su i vremenski uslovi koji se menjaju iz godine u godinu. Važan faktor u evaluaciji konačnog efekta su kako kvantitet tako i kvalitet. Ovo su neki od momenata istaknuti radi toga da se ukaže na specifičnost ogleda višegodišnjih zasada. Pre nego što se pristupi ogledu s višegodišnjim zasadima, treba tražiti odgovor na tri važna pitanja: da li postoje praktični uslovi da se ogled izvede; da li takav ogled ima odgovarajuću statističku osnovu; da li je primenjeni tretman zaista od značaja u postavljenom zadatku (Pearce, 1953). O problemima postavljanja i izvođenja ovakvih ogleda govori i Paterson (1939).

Najveći broj ogleda sa zasadima se normalno produžuje na više godina i tako dolazi do serije periodičnih rezultata. Međutim, može se očekivati da rezultati jednog perioda ne budu nezavisni od prethodnog/prethodnih. Ogled se može analizirati kao dvofaktorijalni. Specifičnost ogleda s višegodišnjim sadnicima je u tome što se slučajan raspored ne može da menja, tako da se prinosi dobijaju sa istih parcela i od istih zasada. Da bi se ova teškoća prevazišla obuhvataju se ukupni prinosi tretmana za period od više godina koje služe kao osnova za analizu.

Primer. Podaci tab. 10.51. pokazuju prinos grožđa ($kg/m^2$) sorte talijanski rizling za $t = 4$, različite lozne podloge. Ogled je izveden u tri ponavljanja. Podaci obuhvataju $g = 4$ godišnja perioda (D. Paprić, izvod iz doktorske teze, Poljoprivredni fakultet, Novi Sad).

U istoj tabeli prikazana je analiza varijanse u jednodimenzionalnoj klasifikaciji. Na ovakvoj osnovi nema značajne razlike između podloga, s obzirom na malu vrednost $F-$odnosa.

Interesantno je ogled analizirati i kao dvofaktorijalni, gde će podloge služiti kao jedan faktor, a godine kao drugi. Ovde individualni godišnji podaci služe kao osnova analize. Postupak analize neće ovde biti prikazan, jer je objašnjen u odeljku 10.3. Analiza varijanse je prikazana u tab. 10.52. U ovoj analizi, s obzirom na $F-$odnose, prisutna je statistički značajna razlika između tretmana, a visoko značajna između godina. I komponente regresije (poglavlje 9.12.) su visoko značajne, što ukazuje na izrazit varijabilitet u prinosima od jedne do druge godine.

**TAB. 10.51. Prinos grožđa ($kg/m^2$) sorte talijanski rizling na različitim loznim podlogama**

| Ponavljanje | Godina | Tretmani (podloge) | | | Rupestris di lot | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Kober 5BB | Telcki 8B | 5 × B 41B | | |
| I | 1980 | 1,56 | 2,47 | 1,76 | 1,73 | 7,52 |
| | 1981 | 0,57 | 0,41 | 0,84 | 0,32 | 2,14 |
| | 1982 | 1,04 | 1,72 | 0,97 | 0,82 | 4,55 |
| | 1983 | 0,54 | 0,99 | 1,50 | 0,44 | 3,47 |
| | Ukupno | 3,71 | 5,59 | 5,07 | 3,31 | 17,68 |
| II | 1980 | 2,43 | 1,54 | 2,47 | 1,70 | 8,14 |
| | 1981 | 0,72 | 0,30 | 1,29 | 1,26 | 3,57 |
| | 1982 | 1,65 | 0,93 | 1,32 | 0,88 | 4,78 |
| | 1983 | 1,04 | 0,78 | 1,02 | 0,91 | 3,75 |
| | Ukupno | 5,84 | 3,55 | 6,10 | 4,75 | 20,24 |
| III | 1980 | 1,52 | 1,78 | 2,87 | 1,70 | 7,87 |
| | 1981 | 0,23 | 0,78 | 0,13 | 0,91 | 2,85 |
| | 1982 | 1,41 | 1,93 | 1,65 | 1,13 | 6,12 |
| | 1983 | 0,55 | 0,71 | 1,02 | 1,07 | 3,35 |
| | Ukupno | 3,71 | 5,20 | 6,47 | 4,81 | 20,19 |
| Ukupno | | 13,26 | 14,34 | 17,64 | 12,87 | 58,11 |

Analiza varijanse

| Izvori varijacije | Stepeni slobode | Suma kvadrata | Sredina kvadrata | $F$–odnos |
|---|---|---|---|---|
| Tretmani | 3 | 1,1731 | 0,3910 | 0,27 |
| Pogreška | 8 | 11,3841 | 1,4230 | |
| Ukupno | 11 | 12,5572 | | |

**TAB. 10.52. Analiza varijanse ogleda o prinosu grožđa na osnovu tab. 10.51.**

| Izvori varijacije | Stepeni slobode | Suma kvadrata | Sredina kvadrata | $F$–odnos |
|---|---|---|---|---|
| Tretmani, $T$ | 3 | 1,1731 | 0,3910 | 3,09 |
| Godine, $G$ | 3 | 11,0974 | 3,6991 | 29,24 |
| Linearna regresija | 1 | 4,2640 | 4,2640 | 33,67 |
| Kvadratna regresija | 1 | 2,1210 | 2,1210 | 16,76 |
| Kubna regresija | 1 | 4,7124 | 4,7124 | 37,23 |
| Interakcija $TXG$ | 9 | 1,0799 | 0,1199 | 0,95 |
| Pogreška | 32 | 4,0493 | 0,1265 | |
| Ukupno | 47 | 17,3997 | | |