0.2 Латински квадрат и огледи са непотпуним блоковима

Распоред третмана према случајном блок систему омогућује већу прецизност огледа. Међутим ако у распореду третмана број колона одговара броју редова, а у свакој колони и реду постоји само једно понављање сваког третамана добија се план огледа познат под именом "Латински квадрат". Овакав план омогућава да се издвоји као посебна компонента једна систематска варијација више. Анализа варијансе сада има редове, колоне и третмане као систематске варијације и погрешку као случајну варијацију. На тај начин се пружа јос већа могућност за смањење погревшке а самим тим и за повећање прецизности огледа.

Латински квадрат може корисно да се примени у многим областима научно-истраживачког рада. На пример, ако је земљиште на коме се изводи оглед неједнаке плодности у два правца и то рецимо плодност опада у правцу север-југ и у правцу исток-запад, тада ће се поставити оглед по плану латинског квадрата, јер он омогућује контролу хетерогености тла у оба правца. Ако се рецимо на таквом земљишту испитују пет сорти са пет понављања, дакле укупно 25 парцела требало би да се постави пет блокова у правцу север-југ и пет блокова у правцу исток-запад, који се у анализи варијансе називају колоне и редови. Поред поменутог услова за постављање латинског квадра тј. да је у сваком реду односно колони заступљен само један третман неопходан је и случајан распоред третмана у оквиру сваког реда и колоне.

Распоред по латинском квадрату је понекад користан чак и када су парцеле положене у једној континуираној линији. У том случају редови се могу узети као блокови поређани један поред другог док се за колоне узима редослед третмана у сваком блоку. То је нарочито корисно ако се из претходног искуства зна да упоредо са правцем размештаја парцела долази до изражаја и хетерогеност земљишта или неки други систематски утицај.

У другим врстама огледа где се примењује латински квадрат редови и колоне одговарају разним изворима систематских варијација. На пример, код једног огледа са исхраном животиња колоне могу одговарати старости, редови раси или почетној тежини. Осим тога, латински квадрат може се употребити и у таквим огледима где је иста експериментална јединица употребљена више пута. На пример, испитује се принос млека група од по три краве са начинима исхране A, B и C:

- прве две недеље једна крава је добила оброк A, друга крава оброк B и трећа крава оброк C;

- друге две недеље прва крава је добила оброк C, друга крава оброк A, а трећа крава оброк B.

На крају сваког периода од по две недеље испитује се принос млека. Поред варијације између третмана, два посебна извора систематских варијација се отклањају оваквим планом и то:

а) између животиња;

б) између временских периода.

Главна препрека широј употреби латинског квадрата је у томе што броју третмана треба да одговара број понављања. Ако је број третмана велики тада велики број понављања нема практичног значаја и зато се латински квадрат већи од 12×12 ретко употребљава. Најчешће се примењују латински квадрати од формата 5×5 до формата 8×8. Код латинског квадрата број третмана треба да одговара броју понављања.

Треба напоменути да велики латински квадрати обично доводе и до веће експерименталне погрешке по јединици, па је и то један од разлога да се њихова употреба не препоручује. С друге стране, мали латински квадрат такође није подесан због малог броја степени слободе за погрешку. На пример:

- код 2×2 квадрата не остаје ниједан степен слободе за погрешку;
- код 3×3 квадрата остају два степена слободе за погрешку;
- код 4×4 квадрата остају шест степена слободе за погрешку;
- итд.

Употреба 3×3 и 4×4 латинског квадрата уместо блок система може да буде оправдана само у случајевима када то доводи до знатног смањења експерименталне погрешке. Латински квадрат формата 2×2 не долази у обзир за практичан рад. Треба напоменути да у један оглед може бити укључено више латинских квадрата.

Математички модел I за латински квадрат је

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \epsilon_{ijk},$$

где

$\epsilon_{ijk} : \mathcal{N}(0, \sigma^2)$;
α_i означава дејство редова на експерименталну јединицу;
β_j означава дејство колона на експерименталну јединицу;
γ_k означава дејство третмана на експерименталну јединицу;
ϵ_{ijk} означава дејство погрешке на експерименталну јединицу;
$i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$.

При чему је

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k = 0.$$

0.2.1 Статистичка анализа латинског квадрата

Израчунавање сума квадрата за анализу варијансе латинског квадрата слично је израчунавању сума квадрата код случајног блок-система, само што латински квадрат садржи један извор варијације више. Као што се из модела види, поред фиксног μ својственог експерименталног јединици и које, као такво, нема утицаја на суме квадрата, појављују се ефекти α_i, β_j, γ_k и ϵ_{ijk}, чије суме квадрата представљају саставни део тоталне варијације.

Израчунавања за анализу варијансе су приказана у наставку.

Сума квадрата тотала:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (X_{ijk} - \overline{X}_{000})^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ijk}^2 - C,$$

где је

$$C = \frac{X_{000}^2}{n^2};$$

$\overline{X}_{000}$ је тотална средина;

X_{000} је укупна вредност свих јединица.

Сума квадрата редова:

$$Q_R = n \sum_{i=1}^{n} (\overline{X}_{i00} - \overline{X}_{000})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{i00}^2}{n} - C,$$

где је

$\overline{X}_{i00}$ аритметичка средина i-тог реда;

X_{i00} је укупна вредност i-тог реда.

Сума квадрата колона:

$$Q_K = n \sum_{j=1}^{n} (\overline{X}_{0j0} - \overline{X}_{000})^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_{0j0}^2}{n} - C,$$

где је

$\overline{X}_{0j0}$ аритметичка средина j-те колоне;

$\overline{X}_{0j0}$ укупна вредност j-те колоне.

Сума квадрата третмана:

$$Q_T = n \sum_{k=1}^{n} (\overline{X}_{00k} - \overline{X}_{000}) = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_{00k}^2}{n} - C,$$

где је

$\overline{X}_{00k}$ аритметичка средина k-тог третмана;

$\overline{X}_{00k}$ укупна вредност k-тог третмана.

Сума квадрата погрешке:

$$
\begin{aligned}
Q_P =& \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (X_{ijk} - \overline{X}_{i00} - \overline{X}_{0j0} - \overline{X}_{00k} + 2\overline{X}_{000})^2 \\
=& Q - Q_R - Q_K - Q_T.
\end{aligned}
$$

TAB. 9.39. Analiza varijanse latinskog kvadrata u opštem slučaju

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata	Očekivana sredina kvadrata
Redovi	$n-1$	Q_R	$Q_R/(n-1)$	$\sigma^2 + \frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2$
Kolone	$n-1$	Q_K	$Q_K/(n-1)$	$\sigma^2 + \frac{n}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2$
Tretmani	$n-1$	Q_T	$Q_T/(n-1)$	$\sigma^2 + \frac{n}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^2$ ili $n\sigma_k^2$
Pogreška	$(n-1)(n-2)$	Q_P	$Q_P/[(n-1)(n-2)]$	σ^2
Ukupno	n^2-1	Q		

Слика 1: Анализа варијансе латинског квадрата, ТАБ. 9.39, стр. 262 у књизи

У даљем поступку тестирање хомогености огледа се изводи путем F-теста, изводи се на исти начин као и код потпуно случајног распореда или случајног блок-система.

Пример 0.2.1. Оглед са ђубривом на ливадама (Кметијски институт Словеније, Љубљана) је постављен као латински квадрат 4×4. Циљ огледа је био упоређење дејства различитих фосфорних ђубрива, на основу једнаке количине P_2O_5. Реч је о четири третмана:

A = супрефосфат 17%

B = суперфосфат ђ азот у виду нитрофоза;

C = суперфосфат ђ азот ђ калијум у виду нитрофоскала;

D = контрола, неђубрено.

На основу резултата огледа приказаних у Табели 9.40 извршити анализу варијансе латинског квадрата формата 4×4.

Рад: Анализа варијансе латинског квадрата 4×4 у огледу са ђубривом је приказана у Табели 9.41, на Слици 3.

Лако се могу добити следеће вредности:

- сума квадрата тотала $Q = 302,71$;

TAB. 9.40. Rezultati ogleda sa đubrivom na livadama u latinskom kvadratu 4 × 4

Redovi	Kolone 1	2	3	4	Ukupno
1	17,00 (A)	15,00 (B)	19,50 (D)	26,00 (C)	77,50
2	14,30 (D)	21,20 (A)	22,40 (C)	17,50 (B)	75,40
3	25,00 (C)	13,20 (D)	16,70 (B)	23,30 (A)	78,20
4	13,80 (B)	26,00 (C)	24,00 (A)	17,40 (D)	81,20
Ukupno	70,10	75,40	82,60	84,20	312,30
	Tretmani A	B	C	D	
	17,00	15,00	26,00	19,50	
	21,20	17,50	22,40	14,30	
	23,30	16,70	25,00	13,20	
	24,00	13,80	26,00	17,40	
Ukupno	85,50	63,00	99,40	64,40	
$\bar{X}$	21,37	15,75	24,85	16,10	

Слика 2: Анализа варијансе латинског квадрата, ТАБ. 9.40, стр. 263 у књизи

TAB. 9.41. Analiza varijanse latinskog kvadrata 4 × 4 u ogledu sa đubrivom

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata	Očekivana sredina kvadrata
Redovi	3	4,32	1,440	$\sigma^2 + \frac{4}{3}\sum_{i=1}^{4}\alpha_i^2$
Kolone	3	32,19	10,730	$\sigma^2 + \frac{4}{3}\sum_{j=1}^{4}\beta_j^2$
Tretmani	3	231,04	77,013	$\sigma^2 + \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{4}\gamma_k^2$
Pogreška	6	35,16	5,860	σ^2
Ukupno	15	302,71		

Слика 3: Анализа варијансе латинског квадрата, ТАБ. 9.41, стр. 264 у књизи

- сума квадрата редова $Q_R = 4,32$;
- сума квадрата колона $Q_K = 32,19$;
- сума квадрата третмана $Q_T = 231,04$;
- сума квадрата погрешке $Q_P = 35,16$.

0.2.2 Случајан распоред код латинског квадрата

Латински квадрат се добија када се на случајан начин изабере једна од могућих комбинација квадрата одговарајуће величине. Број комбинација латинског квадрата нагло се повећава са порастом броја третмана:

- латински квадрат 2×2 има 2 могуће комбинације;
- латински квадрат 3×3 има 12 могућих комбинација;
- латински квадрат 4×4 има 576 могућих комбинација;
- латински квадрат 5×5 има 161280 могућих комбинација;
- итд.

Латински квадрати величине од 3×3 до 8×8 су приказани на Слици 4.

TAB. 9.42. Latinski kvadrati

3 × 3

A B C
B C A
C A B

4 × 4

A B C D
B A D C
C D B A
D C A B

A B C D
B C D A
C D A B
D A B C

A B C D
B D A C
C A D B
D C B A

A B C D
B A D C
C D A B
D C B A

5 × 5

A B C D E
B A E C D
C D A E B
D E B A C
E C D B A

6 × 6

A B C D E F
B C F A D E
C F B E A D
D E A B F C
E A D F C B
F D E C B A

7 × 7

A B C D E F G
B C D E F G A
C D E F G A B
D E F G A B C
E F G A B C D
F G A B C D E
G A B C D E F

8 × 8

A B C D E F G H
A C D E F G H A
C D E F G H A B
D E F G H A B C
E F G H A B C D
F G H A B C D E
G H A B C D E F
H A B C D E F G

Слика 4: Латински квадрати, стр. 265 у књизи

Потпунији преглед латинских квадрата дају $Fisher, Yates, 1957$. Већи квадрати од 8×8 могу да се формирају укључивањем нових слова по азбучном реду са порастом броја третмана.

Латински квадрат 9×9 би садржао:

- први ред попуњен словима A, B, C, …, G, H, I;
- други ред попуњен словима B, C, D, …, H, I, A;
- трећи ред попуњен словима C, D, E, …, I, A, B;
- итд.

Да би се изабрао један распоред третмана за неки оглед потребно је случајно изабрати један могући квадрат приказан на Слици 4 и примењује се следећи поступак:

- за квадрат 3×3 на случајан начин се комбинују редови и колоне квадрата са Слике 4;
- за квадрат 4×4 изабере се на случајан начин један од четири квадрата са Слике 4, а потом се случајно комбинују редови и колоне;

- за квадрат 5×5 и веће квадрате случајно се комбинују, независно једни од других, редови, колоне и третмани.

Код квадрата 3×3 и 4×4 оваквим поступком се изабере један од свих могућих квадрата.

Код 5×5 и већих квадрата такав поступак не осигурава случајан избор из свих могућих квадрата, али се сматра да он и поред тога обезбеђује примену принципа случајности који задовољава и теоријске и практичне претпоставке.

Како се практично врши случајан избор објаснићемо на примеру квадрата 4×4. Користићемо таблицу случајних пермутација од 1 до 9, приказану на Слици 5.

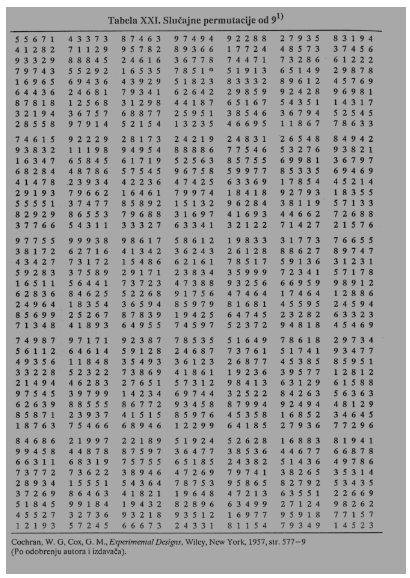

Tabela XXI. Slučajne permutacije od 9[1)]

5 5 6 7 1	4 3 3 7 3	8 7 4 6 3	9 7 4 9 4	9 2 2 8 8	2 7 9 3 5	8 3 1 9 4
4 1 2 8 2	7 1 1 2 9	9 5 7 8 2	8 9 3 6 6	1 7 7 2 4	4 8 5 7 3	3 7 4 5 6
9 3 3 2 9	8 8 8 4 5	2 4 6 1 6	3 6 7 7 8	7 4 4 7 1	7 3 2 8 6	6 1 2 2 2
7 9 7 4 3	5 5 2 9 2	1 6 5 3 5	7 8 5 1 9	5 1 9 1 3	6 5 1 4 9	2 9 8 7 8
1 6 9 6 5	6 9 4 3 6	4 3 9 2 9	5 1 8 2 3	8 3 3 3 2	8 9 6 1 2	4 5 7 6 9
6 4 4 3 6	2 4 6 8 1	7 9 3 4 1	6 2 6 4 2	2 9 8 5 9	9 2 4 2 8	9 6 9 8 1
8 7 8 1 8	1 2 5 6 8	3 1 2 9 8	4 4 1 8 7	6 5 1 6 7	5 4 3 5 1	1 4 3 1 7
3 2 1 9 4	3 6 7 5 7	6 8 8 7 7	2 5 9 5 1	3 8 5 4 6	3 6 7 9 4	5 2 5 4 5
2 8 5 5 8	9 7 9 1 4	5 2 1 5 4	1 3 2 3 5	4 6 6 9 5	1 1 8 6 7	7 8 6 3 3
7 4 6 1 5	9 2 2 2 9	2 8 1 7 3	2 4 2 1 9	2 4 8 3 1	2 6 5 4 8	8 4 9 4 2
9 3 8 3 2	1 1 1 9 8	9 4 9 5 4	8 8 8 8 6	7 7 5 4 6	5 3 2 7 6	9 3 8 2 1
1 6 3 4 7	6 5 8 4 5	6 1 7 1 9	5 2 5 6 3	8 5 7 5 5	6 9 9 8 1	3 6 7 9 7
6 8 2 8 4	4 8 7 8 6	5 7 5 4 5	9 6 7 5 8	5 9 9 7 7	8 5 3 3 5	6 9 4 6 9
4 1 4 7 8	2 3 9 3 4	4 2 2 3 6	4 7 4 2 5	6 3 3 6 9	1 7 8 5 4	4 5 2 1 4
2 9 1 9 3	7 9 6 6 2	1 6 4 6 1	7 9 9 7 4	1 8 4 1 8	9 2 7 9 3	1 8 3 5 5
5 5 5 5 1	3 7 4 7 7	8 5 8 9 2	1 5 1 3 2	9 6 2 8 4	3 8 1 1 9	5 7 1 3 3
8 2 9 2 9	8 6 5 5 3	7 9 6 8 8	3 1 6 9 7	4 1 6 9 3	4 4 6 6 2	7 2 6 8 8
3 7 7 6 6	5 4 3 1 1	3 3 3 2 7	6 3 3 4 1	3 2 1 2 2	7 1 4 2 7	2 1 5 7 6
9 7 7 5 5	9 9 9 3 8	9 8 6 1 7	5 8 6 1 2	1 9 8 3 3	3 1 7 7 3	7 6 6 5 5
3 8 1 7 2	6 2 7 1 6	4 1 3 4 2	3 6 2 4 3	2 6 1 2 8	8 8 6 2 7	8 9 7 4 7
4 3 4 2 7	7 3 1 7 2	1 5 4 8 6	6 2 1 6 1	7 8 5 1 7	5 9 1 3 6	3 1 2 3 1
5 9 2 8 3	3 7 5 8 9	2 9 1 7 1	2 3 8 3 4	3 5 9 9 9	7 2 3 4 1	5 7 1 7 8
1 6 5 1 1	5 6 4 4 1	7 3 7 2 3	4 7 3 8 8	9 3 2 5 6	6 6 9 5 9	9 8 9 1 2
6 2 8 3 6	8 4 6 2 5	5 2 2 6 8	9 1 7 5 6	4 7 4 6 4	1 7 4 6 4	1 2 8 8 6
2 4 9 6 4	1 8 3 5 4	3 6 5 9 4	8 5 9 7 9	8 1 6 8 1	4 5 5 9 5	2 4 5 9 4
8 5 6 9 9	2 5 2 6 7	8 7 8 3 9	1 9 4 2 5	6 4 7 4 5	2 3 2 8 2	6 3 3 2 3
7 1 3 4 8	4 1 8 9 3	6 4 9 5 5	7 4 5 9 7	5 2 3 7 2	9 4 8 1 8	4 5 4 6 9
7 4 9 8 7	9 7 1 7 1	9 2 3 8 7	7 8 5 3 5	5 1 6 4 9	7 8 6 1 8	2 9 7 3 4
5 6 1 1 2	6 4 6 1 4	5 9 1 2 8	2 4 6 8 7	7 3 7 6 1	5 1 7 4 1	9 3 4 7 7
4 9 3 5 6	1 1 8 4 8	3 5 4 9 3	3 6 1 2 3	2 6 8 7 7	4 5 3 8 5	8 5 9 5 1
3 3 2 2 8	5 2 3 2 2	7 3 8 6 9	4 1 8 6 1	1 9 2 3 6	3 9 5 7 7	1 2 8 1 2
2 1 4 9 4	4 6 2 8 3	2 7 6 5 1	5 7 3 1 2	9 8 4 1 3	6 3 1 2 9	6 1 5 8 8
9 7 5 4 5	3 9 7 9 9	1 4 2 3 4	6 9 7 4 4	3 2 5 2 2	8 4 2 6 3	5 6 3 6 3
6 2 6 3 9	8 8 5 5 5	8 6 7 7 2	9 3 4 5 8	8 7 9 9 4	9 2 4 9 4	4 8 1 2 9
8 5 8 7 1	2 3 9 3 7	4 1 5 1 5	8 5 9 7 6	4 5 3 5 8	1 6 8 5 2	3 4 6 4 5
1 8 7 6 3	7 5 4 6 6	6 8 9 4 6	1 2 2 9 9	6 4 1 8 5	2 7 9 3 6	7 7 2 9 6
8 4 6 8 6	2 1 9 9 7	2 2 1 8 9	5 1 9 2 4	5 2 6 2 8	1 6 8 8 3	8 1 9 4 1
9 9 4 5 8	4 4 8 7 8	8 7 5 9 7	3 6 4 7 7	3 8 5 3 6	4 4 6 7 7	6 6 8 7 8
6 6 3 1 1	6 8 3 1 9	7 5 7 5 5	6 5 1 8 5	2 4 3 8 2	5 1 4 3 6	4 9 7 8 6
7 3 7 7 2	7 3 6 2 2	3 8 9 4 6	4 7 2 6 9	7 9 7 4 1	3 8 2 6 5	3 5 3 1 4
2 8 9 3 4	1 5 5 5 1	5 4 3 6 4	7 8 7 5 3	9 5 8 6 5	8 2 7 9 2	5 3 4 3 5
3 7 2 6 9	8 6 4 6 3	4 1 8 2 1	1 9 6 4 8	4 7 2 1 3	6 3 5 5 1	2 2 6 6 9
5 1 8 4 5	9 9 1 8 4	1 9 4 3 2	8 2 8 9 6	6 3 4 9 9	2 7 1 2 4	9 8 2 6 2
4 5 5 2 7	3 2 7 3 6	9 3 2 1 8	9 3 5 1 2	1 6 9 7 7	9 5 9 1 8	7 7 1 5 7
1 2 1 9 3	5 7 2 4 5	6 6 6 7 3	2 4 3 3 1	8 1 1 5 4	7 9 3 4 9	1 4 5 2 3

Cochran, W. G, Cox, G. M., *Experimental Designs*, Wiley, New York, 1957, str. 577–9
(Po odobrenju autora i izdavača).

Слика 5: Латински квадрати, стр. 558 у књизи

Искључимо бројеве од 5 до 9, а затим претпоставимо да су прве пермутације:

$$3, 2, 4, 1; \qquad 3, 1, 4, 2; \qquad 1, 4, 2, 3.$$

Пошто је први број у пермутацији 3 почећемо са трећим квадратом са Слике 9.42.

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ B & D & A & C \\ C & A & D & B \\ D & C & B & A \end{array}$$

Даље пермутујемо редове према другој пермутацији

$$3, 1, 4, 2,$$

што значи да ћемо:

- на прво место ставити трећи ред последњег квадрата;
- на друго место први ред;
- итд.

На тај начин добијамо следећи квадрат:

$$\begin{array}{ccccc} 3 & C & A & D & B \\ 1 & A & B & C & D \\ 4 & D & C & B & A \\ 2 & B & D & A & C \end{array}$$

На крају се пермутују колоне према трећој пермутацији:

$$1, 4, 2, 3.$$

Сада:

- на прво место стављамо прву колону овог новог квадрата;
- на друго место стављамо четврту колону овог новог квадрата;
- итд.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 2 & 3 \\ C & B & A & D \\ A & D & B & C \\ D & A & C & B \\ B & C & D & A \end{array}$$

Ако је у питању већи квадрат, рецимо 6×6, тада су потребне случајне пермутације бројева од 1 до 6:

- прва пермутација се употребљава да се пермутују редови квадрата 6×6 из табеле са Слике 4;
- друга пермутација се употребљава за пермутовање колона на начин као код квадрата 4×4;
- трећа пермутација се употребљава за пермутовање колона третмана A, B, $\ldots$, F, где је
  - 1 третман A;

- 2 третман B;
- 3 третман C;
- итд.

Ако се оглед састоји од више латинских квадрата, избор сваког од њих се врши независно и случајно.

0.2.3 Израчунавање вредности изгубљене парцеле код латинског квадрата

За израчунавање вредности једне изгубљене парцеле код латинског квадрата примењује се следећа формула

$$X = \frac{t(R+K+T)-2S}{(t-1)(t-2)},$$

где су

R, K и T суме познатих приноса
редова, колона и третмана
где је изгубљена парцела
t број третмана
S укупан принос свих познатих парцела.

Коректура за пристрасност која се одузима од суме квадрата третмана израчунава се према следећој формули

$$\frac{(S-K-R-(t-1)T)^2}{((t-1)(t-2))^2}.$$

Код латинског квадрата, као и код случајног блок-система, уколико је једна парцела изгубљена укупан број степени слободе и број степени слободе за погрешку смањује се за један.

Стандардна грешка разлике за упоређивање аритметичке средине са једном изгубљеном парцелом и аритметичке средине где су подаци потпуни израчунава се према формули

$$S_{(\overline{X}_i-\overline{X}_j)} = \sqrt{S^2\left(\frac{2}{t}+\frac{1}{(t-1)(t-2)}\right)}.$$

Треба истаћи да број понављања једног третмана за стандардну грешку може да се промени од једног до другог упоређења.

0.2.4 Ефикасност латинског квадрата

Применом латинског квадрата смањује се експериментална погрешка и тиме повећава прецизност огледа. Повећање релативне ефикасности латинског квадрата у поређењу са потпуно случајним распоредом или случајним блок-системом може да се утврди применом одговарајућих образаца за један и други случај. Тако се његова релативна ефикасност у поређењу са случајним распоредом утврђује применом обрасца:

$$RE = \frac{Q_K/(n-1) + Q_R/(n-1) + (n-1)Q_P/((n-1)(n-2))}{(n+1)Q_P/((n-1)(n-2))}$$

У поређењу са случајним блок-системом, када су редови узети за блокове, релативна ефикасност је

$$RE = \frac{Q_R/(n-1) + (n-1)Q_P/((n-1)(n-2))}{nQ_P/((n-1)(n-2))}$$

Постоји извесна нелогичност у релативној ефикасности када су редови узети за блокове $(0,811)$. Такав однос, услед мале варијансе за редове, доводи до тога да је чак и ефикасност у поређењу са потпуно случајним распоредом релативно незнатна.

О ефикасности потпуно случајног распореда у односу на случајни блок-систем и латински квадрат код пољских огледа говори $Yates, 1935$.

0.2.5 Огледи са непотпуним блоковима

Код случајног блок-система и латинског квадрата сваки третман се понавља у сваком блоку најмање једанпут. Међутим, примена оваквих планова је релативно ограничена јер сувише велики број третмана може негативно да се одрази на експерименталну погрешку. Ради тога, а често и из техничких разлога, у блокове се не укључују сви третмани, тако да је експерименталних јединица у блоковима мањи од броја третмана, па се ни тестирање разлика не може заснивати на срединама третмана. Уколико желимо да елиминишемо утицај блокова, сваку средину третмана треба кориговати за ефекат блокова у којима се дати третман појављује.

У оваквим случајевима, третмани се распоређују према плановима непотпуних блок-система. Планирање оваквих огледа треба да обезбеде што већу прецизност испитиваних третмана и да прецизност код упоређивања појединачних парова третмана буде увек иста. Овакви планови се називају балансирани непотпуни блокови. Следећа табела пружа нам пример плана једноставно балансираног непотпуног блок-система, који има 5 третмана у случајним блоковима од по 3 третмана са по 6 понављања:

Блокови	Третмани
1	4 5 1
2	4 2 5
3	2 4 1
4	5 3 1
5	3 4 5
6	2 3 1
7	3 1 4
8	3 5 2
9	2 3 4
10	5 1 2

Овај распоред третмана има следеће карактеристике:

1) сваки блок садржи исти број јединица, односно третмана;

2) сваки третман се понавља подједнак број пута;

3) ако узмемо ма која два третмана и избројимо колико пута се јављају заједно у истом блоку, видећемо да је тај број исти као и за било који други пар третмана. На пример, третмани 2 и 4 се појављују заједно 3 пута у блоковима 2, 3 и 9. На основу оваквог плана укупан број експерименталних јединица може да се добије на два начина:

   – број третмана пута број понављања сваког третмана;

   – број блокова пута број јединица у сваком блоку.

   У литератури се могу наћи планови балансираних непотпуних блокова који испуњавају претходне услове и односе се на већи или мањи број третмана и понављања, односно блокова и јединица у блоку.

Статистичка анализа треба да омогући кориговање средине сваког третмана за дејство блокова у којима се ти третмани не јављају.

Другачији план се примењује у случајевима када оглед одговара латинском квадрату. Тада се могу појавити две ситуације:

1) број третмана у једном правцу (било колоне или редови) је мањи од укупног броја третмана;

2) број третмана је мањи у оба правца.

Уколико је рестрикција извршена само у једном правцу, добије се тзв. $Judenov(Youden)$ квадрат или непотпуни латински квадрат. Следећа табела даје пример таквог квадрата пре случајног избора за 7 третмана:

Редови	Колоне
1	1 2 4
2	2 3 5
3	3 4 6
4	4 5 7
5	5 6 1
6	6 7 2
7	7 1 3

Случајан избор се изводи по правилима која се примењују за латински квадрат док се сам план може конструисати само у ограниченом броју случајева.

Међутим, ако, ни у погледу редова, ни колона, не може да се постигне да њихов број одговара броју третмана, приступа се другачијем распореду. Најједноставнији је план када је број третмана по редовима једнак броју третмана по колонама. Тада је цео оглед састављен из више квадрата. Уколико је испуњен услов да се сваки третман појављује само једанпут у сваком квадрату и да се сваки пар третмана налази исти број пута у истом реду или колони једног квадрата, такве планове називамо балансирани *latis* – квадрати. Једноставни пример може се поставити распоредом 9 третмана у два 3×3 квадрата:

I квадрат			II квадрат
1	2	3	1 6 8
4	5	6	9 2 4
7	8	9	5 7 3

Из овога се лако може уочити да се на пример, третмани 7 и 8 појављују само једнапут и то у трећем реду првог квадрата итд.

Ова објашњења односила су се на балансиране непотпуне блок – огледе. У пракси, међутим, нарочито у случајевима великог броја третмана, ти планови често не могу да служе потребама испитивања, па се примењују тзв. делимично балансирани и непотпуни блокови. Овакви планови се употребљавају и онда када желимо да нека упоређења буду прецизнија од других. То би се могло постићи тако да се у појединим блоковима један третман појављује једанпут или више пута, док то не би био случај са другим третманима. Такав би распоред могао да се начини ако је примарно упоређење једног изабраног третмана са осталим, а од мањег значаја међусобно упоређивање осталих третмана.

Специјални случај делимично балансираних непотпуних блокова јавља се у ситуацији када је број јединица по једном блоку већи од броја третмана.

За велики број третмана употребљавају се специјални *latis* – планови. Постоје делимично балансирани квадрати, троструки, четвороструки, кубни и правоугли *latis* планови. Сви ови планови се разликују по својим карактеристикама. Основни им је циљ да се у један оглед омогући укључивање великог броја третмана, а да се не употребљавају и сувише велики блокови. Овакви планови имају нарочито практичан значај у селекцији биља, где су се прво и развили. Статистичка анализа таквих огледа је по правилу доста компликована. Потпуније објашњење огледа са непотпуним блоковима дају Cox, 1958; $Kempthorne$, 1952.

0.2.6 Литература

Хаџивуковић, С. (1991): Статистички методи с применом у пољопривредним и биолошким истраживањима, Друго проширено издање, Пољопривредни факултет, Нови Сад.