9. SLUČAJNI BLOK–SISTEM I LATINSKI KVADRAT

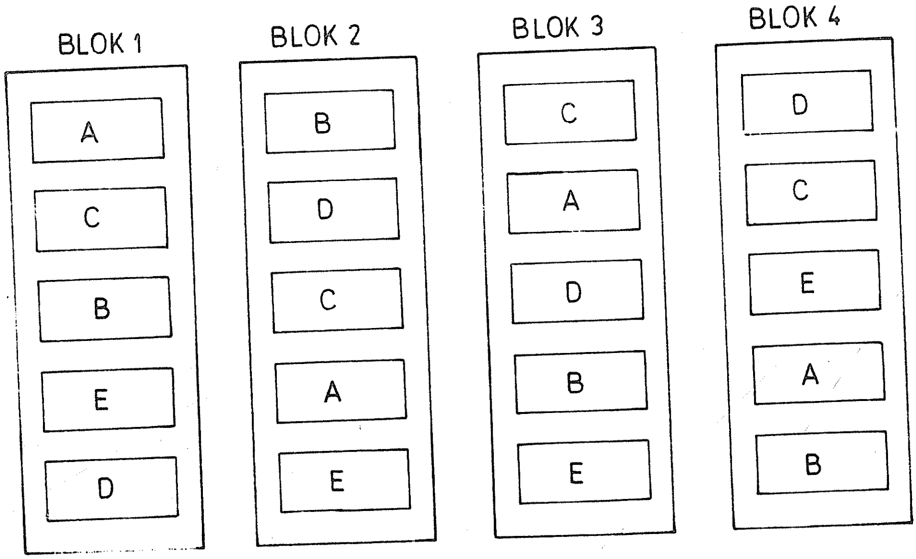
9.1. Ogledi sa dvodimenzionalnom klasifikacijom

Tehnika analize varijanse objašnjena je na slučajevima gde je postojao samo jedan kriterijum klasifikacije jedinica. Kod takvih ogleda totalna varijacija se deli na dve komponente, i to varijacije između i unutar grupa. Prva varijacija proizilazi iz primene različitih tretmana, dok je druga rezultat slučajnih kolebanja unutar svakog uzorka. Ovakvi ogledi su podesni zato što u njih može da se uključi veliki broj tretmana, a broj ponavljanja nije ograničen. Pored toga, njihova statistička analiza je vrlo jednostavna. U ogledima sa potpuno slučajnim rasporedom gubitak podataka o jednoj eksperimentalnoj jedinici nema nekog značajnijeg uticaja na samu vrednost ogleda.

Analiza varijanse se uspešno primenjuje i u ogledima s klasifikacijom jednica po dva i više kriterijuma. Ovom prilikom razmotrićemo njenu primenu kad je u pitanju klasifikacija po dve osnove. Prva osnova su tretmani, dok druga ima obično za cilj povećanje preciznosti ogleda smanjenjem eksperimentalne pogreške. Naime, ako postoji verovatnoća da jedinice ogleda sadrže, pored tretmana, i neke druge sistematske varijacije, opravdano je izdvojiti takvu varijaciju iz eksperimentalne pogreške. Totalna varijacija se u tom slučaju deli na *tri*, umesto na dva dela. Kao primer može se uzeti neki poljski ogled sa sortama. Poznato je da se kod ovakvih ogleda zbog različitog kvaliteta zemljišta pojavljuje veća ili manja neujednačnost u prinosima između pojedinih parcela. Planom ogleda, poznatim pod imenom *slučajni blok–sistem*, varijacije usled heteregenosti tla se izdvajaju u posebnu komponentu. Isto tako, kod ogleda sa životinjama preciznost može da se poveća ako se grupisanje ne vrši samo prema primenjenim tretmanima već i prema rasi, polu, pa čak i po različitim leglima, itd. Prema tome, u ovakvim slučajevima postoje dva kriterijuma za klasifikaciju – tretmani i kontrolisana sistematska varijacija.

Postavlja se pitanje: kako se ostavaruje dvodimenzionalna klasifikacija ogleda? To se postiže tako da se prvo izdvoje homogene grupe ili blokovi prema kriterijumu klasifikacije koji ne proizilazi iz tretmana. Zatim se obično na svaku jedinicu iz grupe primenjuje po jedan tretman tako da obično ima onoliko jedinica u grupi koliko i tretmana. *Broj ponavljanja* tretmana bi tada odgovarao broju grupa. Ovakvim planom se, međutim, ne isključuje mogućnost da se pojedini tretmani primenjuju *dva ili više* puta u jednoj grupi a ostali tretmani samo jedanput. Na taj je način ukupan broj ponavljanja za ove tretmane veći nego za ostale. Važno je istaći da se raspored tretmana po pojedinim jedinicama unutar grupa vrši na *slučajan način*.

Radi ilustracije uzimamo jedan ogled sa pet sorti pšenice, sa četiri ponavljanja, što čini ukupno 20 parcela. Ogledno polje deli se na četiri bloka, svaki od pet parcela sa pet tretmana. To je prikazano na sl. 9.1.



Sl. 9.1. Raspored tretmana u jednom ogledu postavljenom po slučajnom blok–sistemu

Analiza ogleda postavljenog prema slučajnom blok–sistemu nije komplikovana i neće biti otežana ni ako dođe do gubitka jednog bloka ili tretmana. Ako se izgubi jedna ili više parcela, moguće je na određen način izračunati taj gubitak. Kada se ovo ima u vidu, kao i mogućnosti koje slučajan blok–sistem pruža za smanjenje pogreške, može se razumeti njegova rasprostranjena primena u istraživačkom radu.

9.2. Analiza varijanse slučajnog blok–sistema

Iz onog što je rečeno proizilazi da u slučajnom blok–sistemu postoje *dve* kontrolisane varijacije: tretmani i grupe ili blokovi. Doda li se njihovom zbiru varijacija pogreške, dobija se totalna varijacija. Ovaj ogled u opštem slučaju prikazan je u tab. 9.1.

Sume kvadrata potrebne za analizu varijanse izračunavaju se na sledeći način:

Suma kvadrata totala:

$$Q = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{b} (X_{ij} - \bar{X}_{00})^2 = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{b} X_{ij}^2 - \frac{X_{00}^2}{bt} . \tag{9.1}$$

Izraz $\frac{X_{00}^2}{bt}$ je korektivni faktor C.

TAB. 9.1. Opšti slučaj ogleda po slučajnom blok−sistemu

Tretmani, T	Blokovi ili grupe, B 1	2	...	j	...	b	Ukupno	Sredina
1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1j}	...	X_{1b}	X_{10}	$\bar{X}_{10}$
2	X_{21}	X_{22}	...	X_{2j}	...	X_{2b}	X_{20}	$\bar{X}_{20}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮
i	X_{i1}	X_{i2}	...	X_{ij}	...	X_{ib}	X_{i0}	$\bar{X}_{i0}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮
t	X_{t1}	X_{t2}	...	X_{tj}	...	X_{tb}	X_{t0}	$\bar{X}_{t0}$
Ukupno	X_{01}	X_{02}	...	X_{0j}	...	X_{0b}	$\sum_{j=1}^{b} X_{0j} = \sum_{i=1}^{t} X_{i0} = X_{00}$	
Sredina	$\bar{X}_{01}$	$\bar{X}_{02}$	...	$\bar{X}_{0j}$	...	$\bar{X}_{0b}$	$\frac{\sum_{j=1}^{b} \bar{X}_{0j}}{b} = \frac{\sum_{i=1}^{t} \bar{X}_{i0}}{t} = \bar{X}_{00}$	

Suma kvadrata blokova:

$$Q_B = t\sum_{j=1}^{b} (\bar{X}_{0j} - \bar{X}_{00})^2 = \frac{\sum_{j=1}^{b} X_{0j}^2}{t} - C. \tag{9.2}$$

Suma kvadrata tretmana:

$$Q_T = b\sum_{i=1}^{t} (\bar{X}_{i0} - \bar{X}_{00})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{t} X_{i0}^2}{b} - C. \tag{9.3}$$

Suma kvadrata pogreške:

$$Q_P = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{b} (X_{ij} - \bar{X}_{i0} - \bar{X}_{0j} + \bar{X}_{00})^2 = Q - Q_B - Q_T. \tag{9.4}$$

Analiza varijanse slučajnog blok–sistema u opštem slučaju prikazana je u tab. 9.2.

TAB. 9.2. Opšti slučaj analize varijanse slučajnog blok–sistema

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata	Očekivana sredina kvadrata
Blokovi	$b-1$	Q_B	$Q_B/(b-1)$	$\sigma^2+\left[t/(b-1)\right]\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2$
Tretmani	$t-1$	Q_T	$Q_T/(t-1)$	$\sigma^2+\left[b/(t-1)\right]\sum_{i=1}^{t}\alpha_i^2$
Pogreška	$(b-1)(t-1)$	Q_P	$Q_P/[(b-1)(t-1)]$	σ^2
Ukupno	$bt-1$	Q		

Testiranje nulte hipoteze po homogenosti varijansi vrši se putem F–testa ako se podeli:

$$\frac{Q_B/(b-1)}{Q_P/[(b-1)(t-1)]}\,. \tag{9.5}$$

Ukoliko je nulta hipoteza tačna, odnos varijansi je manji od kritične vrednosti u tabelama F–distribucije za $r_1=(b-1)$ i $r_2=(b-1)(t-1)$ stepeni slobode uz odgovarajući prag rizika. Odbacivanje nulte hipoteze ukazuje na opravdanost primene blok–sistema, jer bi u protivnom jedna značajna sistematska varijacija bila uključena u pogrešku.

Od mnogo većeg praktičnog značaja je F–test varijansi:

$$\frac{Q_T/(t-1)}{Q_P/[(b-1)(t-1)]}\,, \tag{9.6}$$

koji ukazuje na eventualno bitno dejstvo tretmana, pošto je i ovde hipoteza da tretmani ne pokazuju značajne razlike.

Određivanje *razmaka poverenja i testiranje razlika između sredina* u slučajnom blok–sistemu postiže se na isti način kao i kod potpuno slučajnog rasporeda.

Za određivanje razmaka poverenja potrebna je *standardna greška* izračunata prema obrascu:

$$s_{\bar{X}}=\sqrt{\frac{Q_P/[(b-1)(t-1)]}{b}}\,. \tag{9.7}$$

Tako se razmak poverenja uz odgovarajući prag rizika nalazi u okviru:

$$\bar{X}_{i0}\pm\ s_{\bar{X}}t_{\alpha}\,; \qquad [\,(st.\,sl.\,(b-1)(t-1)]\,.$$

Za testiranje razlika između dve sredine putem t–testa *standardna greška razlike* je:

$$s_{(\bar{X}_i - \bar{X}_j)} = \sqrt{\frac{2Q_P / [(b-1)(t-1)]}{b}}. \qquad (9.8)$$

Dalje se izračunava:

$$t = \frac{\bar{X}_i - \bar{X}_j}{s_{(\bar{X}_i - \bar{X}_j)}}$$

i upoređuje sa tabelama t–distribucije.

Testiranje razlika između sredina putem Takijevog testa (7.65) izvodi se na isti način kao i kod potpuno slučajnog rasporeda. Kritična razlika je $R = s_{\bar{X}} Q$. Vrednost Q se uzima iz podataka datih u tabeli XV.

Primer. Tab. 9.3. pruža izvod iz jednog većeg ogleda sa novosadskim sortama (*NS*) i sortom "san pastore" uzetom kao kontrola (dr S. Borojević, Institut za poljoprivredna istraživanja, Novi Sad).

TAB. 9.3. Rezultati ogleda sa novosadskim sortama u slučajnom blok–sistemu (*kg/5 m*^{2})

Sorte	Ponavljanje				Ukupno	$\bar{X}$
	1	2	3	4		
NS – 2	3,702	3,762	3,271	3,460	14,195	3,5487
NS – 8	3,184	3,290	2,889	2,855	12,218	3,0545
NS – 10	3,860	3,680	3,460	3,141	14,141	3,5352
NS – 16	4,130	3,373	3,530	3,772	14,805	3,7012
NS – 34	4,403	4,308	3,929	4,055	16,695	4,1737
SP	3,776	3,463	3,311	3,243	13,793	3,4482
Ukupno	23,055	21.876	20,390	20,526	85,847	3,5770

Korektivni faktor $C = \dfrac{85{,}847^2}{24} = 307{,}071.$

Suma kvadrata totala $= 3{,}702^2 + 3{,}762^2 + \ldots + 3{,}243^2 - 307{,}071 = 3{,}875.$

Suma kvadrata blokova $= \dfrac{23{,}055^2 + \ldots + 20{,}526^2}{6} - 307{,}071 = 0{,}789.$

Suma kvadrata tretmana $= \dfrac{14{,}195^2 + 12{,}218^2 + \ldots + 13{,}793^2}{4} - 307{,}071 = 2{,}655.$

Suma kvadrata pogreške $= 3{,}875 - (0{,}789 + 2{,}655) = 0{,}431.$

Analiza varijanse prikazana je u tab. 9.4.

TAB. 9.4. Analiza varijanse ogleda sa novosadskim sortama

Izvori varijacije	Suma kvadrata	Stepeni slobode	Sredina kvadrata	*F*	F–tabela 5%
Blokovi	0,789	3	0,263	9,07	3,29
Tretmani	2,655	5	0,531	18,31	2,90
Pogreška	0,431	15	0,029		
Ukupno	3,875	23			

Kao što se iz tab. 9.4. vidi, i varijansa blokova i varijansa tretmana su značajne s obzirom da je 9,07>3,29 i 18,31>2,9. Da se nije primenio slučajni blok–sistem već slučajan raspored, varijacija blokova bila bi uključena u varijaciju pogreške. Onda bi suma kvadrata pogreške iznosila 0,431 + 0,789 = 1,220; njena varijansa 1,220:18 = 0,068; $F = \frac{0,531}{0,068} = 7,81$. Istina, i ovaj rezultat je značajan, ali u poređenju s onim iz analize varijanse znatno je bliži vrednosti iz tabela.

Standardna greška razlike za testiranje razlika između sredina je:

$$s_{(\bar{X}_i - \bar{X}_j)} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,029}{4}} = 0,12\,,$$

$$NZR_{(0,05)} = 0,12 \cdot 2,131 = 0,256.$$

Standardna greška aritmetičke sredine je:

$$s_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{0,029}{4}} = 0,085\,.$$

Tako razmak poverenja za sortu "san pastore" uz rizik $\alpha = 0,05$ je

$$3,4482 \pm 0,085 \cdot 2,131, \text{ odnosno } 3,4482 \pm 0,181.$$

9.3. Matematički model

U slučajnom blok–sistemu, kao i kod potpuno slučajnog rasporeda, nailazimo na modele I, II i mešoviti model. U daljem izlaganju poći ćemo od matematičkog modela I kod koga se, kao što znamo, pretpostavlja da su u ogled uključeni svi tretmani.

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \tag{9.9}$$

gde je X_{ij}–slučajno promenljiva i–tog tretmana i j–tog bloka ($i = 1, 2,...,t; j = 1, 2, ..., b$), α_i predstavlja dejstvo i–tog tretmana, β_j predstavlja dejstvo j–tog bloka, dok je ε_{ij} slučajno promenljiva osnovnog skupa koja ima za sredinu 0 i σ^2. Prema tome, vrednosti μ, α_i i β_j u modelu I su konstante.

Linearnost i konstantan efekat tretmana i blokova dovodi do toga da je:

$$\sum_{i=1}^{t}\alpha_i = 0\,, \qquad \sum_{j=1}^{b}\beta_j = 0\,. \tag{9.10}$$

Otuda je suma kvadrata ostatka, odnosno pogreške, minimum:

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b}(\bar{X}_{00} + t_i + b_j - X_{ij})^2\,,$$

ili:

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b}\left[\bar{X}_{00} + (\bar{X}_{i0} - \bar{X}_{00}) + (\bar{X}_{0j} - \bar{X}_{00}) - X_{ij}\right]^2. \tag{9.11}$$

Razlika između opšte sredine $\bar{X}_{00}$ i vrednosti X_{ij} uključuje i ε_{ij}, tako da je:

$$(\bar{X}_{00} - X_{ij}) = (\bar{X}_{i0} - \bar{X}_{00}) + (\bar{X}_{0j} - \bar{X}_{00}) + \varepsilon_{ij}\,. \tag{9.12}$$

Osnovno je da razlika između $(\bar{X}_{i0} - \bar{X}_{00})$ nije poremećena uticajem blokova, a razlika $(\bar{X}_{0j} - \bar{X}_{00})$ uticajem tretmana. Ove pretpostavke mogu najbolje da se shvate u jednom primeru koji polazi od opšteg slučaja datog u tab. 9.5. Razlika d_{ij} je:

$$d_{ij} = X_{ij} - [\,(\bar{X}_{i0} - \bar{X}_{00}) + (\bar{X}_{0j} - \bar{X}_{00}) + \bar{X}_{00}]\,.$$

Ako uzmemo da je izraz:

$$[\,(\bar{X}_{i0} - \bar{X}_{00}) + (\bar{X}_{0j} - \bar{X}_{00}) + \bar{X}_{00}] = \hat{X}_{ij},$$

tada je:

$$d_{ij} = X_{ij} - \hat{X}_{ij}\,. \tag{9.13}$$

Suma kvadrata ovih razlika jednaka je sumi kvadrata pogreške u analizi varijanse:

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b} d_{ij}^2 = Q_P\,. \tag{9.14}$$

TAB. 9.5. Linearni model ogleda u slučajnom blok–sistemu

Tretmani, T	Blokovi, B					
	1	2	. . .	j	. . .	b
1	X_{11}	X_{12}	. . .	X_{1j}	. . .	X_{1b}
	$\hat{X}_{11}$	$\hat{X}_{12}$	. . .	$\hat{X}_{1j}$	. . .	$\hat{X}_{1b}$
	d_{11}	d_{12}	. . .	d_{1j}	. . .	d_{1b}
2	X_{21}	X_{22}	. . .	X_{2j}	. . .	X_{2b}
.	$\hat{X}_{21}$	$\hat{X}_{22}$	. . .	$\hat{X}_{2j}$	. . .	$\hat{X}_{2b}$
.	d_{21}	d_{22}	. . .	d_{2j}	. . .	d_{2b}
i	X_{i1}	X_{i2}	. . .	X_{ij}	. . .	X_{ib}
.	$\hat{X}_{i1}$	$\hat{X}_{i2}$	. . .	$\hat{X}_{ij}$	. . .	$\hat{X}_{ib}$
.	d_{i1}	d_{i2}	. . .	d_{ij}	. . .	d_{ib}
t	X_{t1}	X_{t2}	. . .	X_{tj}	. . .	X_{tb}
	$\hat{X}_{t1}$	$\hat{X}_{t2}$	. . .	$\hat{X}_{tj}$	. . .	$\hat{X}_{tb}$
	d_{t1}	d_{t2}	. . .	d_{tj}	. . .	d_{tb}

Izvod iz jednog većeg sortnog ogleda sa kukuruzom pruža tab. 9.6. (Poljoprivredna stanica, Požarevac). Ogled je izvođen na parcelama od 20 m^2; razmak redova 100 *cm*; razmak biljaka 50 *cm*; 2 biljke u kućici. Prinos je dat u *t/ha* u suvom zrnu sa 14% vlage.

TAB. 9.6. Rezultati ogleda sa kukuruzom

Hibridi	Blokovi					Ukupno	$\bar{X}_{i0}$	$\bar{X}_{i0} - \bar{X}_{00}$
	1	2	3	4	5			
VI_1	5,0	5,7	4,6	5,2	5,3	25,8	5,16	0,45
VI_2	4,8	5,0	4,5	4,6	5,4	24,3	4,86	0,15
VI_3	4,3	4,2	5,0	4,0	4,2	21,7	4,34	– 0,37
VI_4	4,0	4,9	4,1	5,0	4,4	22,4	4,48	– 0,23
Ukupno	18,1	19,8	18,2	18,8	19,3	94,2		
$\bar{X}_{0j}$	4,52	4,95	4,55	4,70	4,83		4,71	
$(\bar{X}_{0j} - \bar{X}_{00})$	–0,19	0,24	–0,16	–0,01	0,12			

$$C = \frac{94{,}2^2}{20} = 443{,}682 \,.$$

$$\text{Suma kvadrata totala} = (5{,}0)^2 + (5{,}7)^2 + \ldots + (4{,}4)^2 - 443{,}682 = 4{,}658.$$

$$\text{Suma kvadrata blokova} = \frac{(18{,}1)^2 + (19{,}8)^2 + \ldots + (19{,}3)^2}{4} - 443{,}682 = 0{,}523.$$

$$\text{Suma kvadrata tretmana} = \frac{(25{,}8)^2 + (24{,}3)^2 + (21{,}7)^2 + (22{,}4)^2}{5} - 443{,}682 = 2{,}074.$$

$$\text{Suma kvadrata pogreške} = 4{,}658 - (0{,}523 + 2{,}074) = 2{,}061.$$

TAB. 9.7. Analiza varijanse ogleda sa kukuruzom

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata	F
Blokovi	4	0,523	0,131	0,76
Tretmani	3	2,074	0,691	4,02
Pogreška	12	2,061	0,172	
Ukupno	19	4,658		

Analiza varijanse ogleda sa kukuruzom data je u tab. 9.7, a linearni model tog ogleda u tab. 9.8.

Vrednost $\hat{X}_{11}$ u pomenutoj tabeli dobijena je na sledeći način:

$$\hat{X}_{11} = (4{,}52 - 4{,}71) + (5{,}16 - 4{,}71) + 4{,}71 = 4{,}97.$$

Vrednosti 4,52, 5,16 i 4,71 su aritmetičke sredine bloka 1, tretmana VI_1 i opšta sredina. Na isti način izračunate su i ostale $\hat{X}_{ij}$ vrednosti.

Može se zapaziti da je suma razlika d_{ij} po blokovima i po sortama svuda jednaka nuli. Dalje je:

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=}^{5} d_{ij}^2 = 2{,}0612 \,.$$

Ova veličina odgovara sumi kvadrata za pogrešku u analizi varijanse u tab. 9.7.

TAB. 9.8. Linearni model ogleda sa kukuruzom

Tretmani		Blokovi 1	2	3	4	5
VI_1	X_{1j}	5,00	5,70	4,60	5,20	5,30
	$\hat{X}_{1j}$	4,97	5,40	5,00	5,15	5,28
	d_{1j}	0,03	0,30	−0,40	0,05	0,02
VI_2	X_{2j}	4,80	5,00	4,50	4,60	5,40
	$\hat{X}_{2j}$	4,67	5,10	4,70	4,85	4,98
	d_{2j}	0,13	−0,10	−0,20	−0,25	0,42
VI_3	X_{3j}	4,30	4,20	5,00	4,00	4,20
	$\hat{X}_{3j}$	4,15	4,58	4,18	4,33	4,46
	d_{3j}	0,15	−0,38	0,82	−0,33	−0,26
VI_4	X_{4j}	4,00	4,90	4,10	5,00	4,40
	$\hat{X}_{4j}$	4,29	4,72	4,32	4,47	4,60
	d_{4j}	−0,29	0,18	−0,22	0,53	−0,20

9.4. Upoređenja na osnovu individualnih stepeni slobode

Kod slučajnog blok−sistema mogu isto tako da se izvedu *unapred planirana ortogonalna upoređenja*. Tako se dobija $(t - 1)$ upoređenja, svako sa jednim stepenom slobode. Zbir sume kvadrata ovih upoređenja, kao što je već poznato, jednak je sumi kvadrata tretmana.

Za ilustraciju uzećemo ogled sa kukuruzom čija je analiza varijanse data u tab. 9.7. Izbor upoređenja vidi se iz tab. 9.9.

TAB. 9.9. Upoređenja za ogled sa kukuruzom iz tab. 9.6.

Upoređenja	Tretmani VI_1	VI_2	VI_3	VI4
C_1	3	−1	−1	−1
C_2	0	+1	+1	−2
C_3	0	−1	+1	0

Kao što se vidi, izabrana su upoređenja: hibrida VI_1 sa ostala tri hibrida; hibrida VI_2 i VI_3 sa hibridom VI_4 i hibrid VI_3 sa hibridom VI_2. Prema tome:

Suma kvadrata upoređenja C_1 =

$$\frac{[(3)(25,8) + (-1)(24,3) + (-1)(21,7) + (-1)(22,4)]^2}{5 \cdot 12} = \frac{(9)^2}{60} = 1,35 .$$

Suma kvadrata uporeёenja C_2 =

$$\frac{[(+1)(24,3) + (+1)(21,7) + (-2)(22,4)]^2}{5 \cdot 6} = \frac{(1,2)^2}{30} = 0,048.$$

Suma kvadrata upoređenja C_3 =

$$\frac{[(-1)(24,3) + (+1)(21,7)]^2}{5 \cdot 2} = \frac{(-2,6)^2}{10} = 0,676.$$

$$1,350 + 0,048 + 0,676 = 2,074.$$

Analiza varijanse sa sumama kvadrata ortogonalnih upoređenja tretmana data je u tab. 9.10.

TAB. 9.10. Analiza varijanse ogleda sa kukuruzom

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata	Očekivana sredina kvadrata
Blokovi	4	0,523	0,131	$\sigma^2 + \frac{t}{b-1}\sum_{j=1}^{5}\beta_j^2$
Tretmani	3	2,074	0,691	$\sigma^2 + \frac{b}{t-1}\sum_{i=1}^{4}\alpha_i^2$
VI1 prema ostalima	1	1,350	1,350	$\sigma^2 + \frac{n^2}{n\sum_{i=1}^{t}\lambda_i^2}(3\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4)^2$
VI2 i VI3 prema VI4	1	0,048	0,048	$\sigma^2 + \frac{n^2}{n\sum_{i=1}^{t}\lambda_i^2}(\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4)^2$
VI2 prema VI3	1	0,676	0,676	$\sigma^2 + \frac{n^2}{n\sum_{i=1}^{t}\lambda_i^2}(\alpha_3 - \alpha_2)^2$
Pogreška	12	2,061	0,172	σ^2
VI1 prema ostalima	4	0,338	0,085	σ^2
VI2 i VI3 prema VI4	4	0,929	0,232	σ^2
VI2 prema VI3	4	0,794	0,198	σ^2
Ukupno	19	4,658		

Kao što je suma kvadrata tretmana podeljena na sume kvadrata ortogonalnih upoređenja, tako se može i suma kvadrata pogreške *podeliti* na delove koji odgovaraju upoređenjima tretmana. Te sume kvadrata za pogrešku svakog upoređenja date su u tabeli 9.10. Podela sume kvadrata pogreške izvodi se na osnovu odgovarajućih ortogonalnih upoređenja unutar svakog bloka. Ova upoređenja su prikazana u tab. 9.11.

TAB. 9.11. Ortogonalna upoređenja unutar blokova na osnovu podataka iz tab. 9.9.

Blokovi	Upoređenja		
	C_1	C_2	C_3
1	+1,9	+1,1	−0,5
2	+3,0	−0,6	−0,8
3	+0,2	+1,3	+0,5
4	+2,0	−1,4	−0,6
5	+1,9	+0,8	−1,2
Ukupno	+9,0	+1,2	−2,6

Tako, ortogonalno upoređenje C_1 u prvom bloku iznosi (3) (5,0) + (−1)(4,8) + (−1)(4,3) + (−1)(4,0) = 1,9. U drugom bloku je (3)(5,7) + (−1)(5,0) + (−1)(4,2) + (−1)(4,8) = 3,0. Na isti način se došlo do ostalih vrednosti u tab. 9.11.

U daljem postupku se dobija deo sume kvadrata pogreške za odgovarajuća upoređenja.

Suma kvadrata za:

$$C_1 = \frac{1}{12}\left[(1{,}9)^2 + (3{,}0)^2 + (-0{,}2)^2 + (2{,}0)^2 + (1{,}9)^2 - \frac{(9)^2}{5}\right] = 0{,}338\,.$$

Suma kvadrata za:

$$C_2 = \frac{1}{6}\left[(1{,}1)^2 + (-0{,}6)^2 + (1{,}3)^2 + (-1{,}4)^2 + (0{,}8)^2 - \frac{(1{,}2)^2}{5}\right] = 0{,}929\,.$$

Suma kvadrata za:

$$C_3 = \frac{1}{2}\left[(-0{,}5)^2 + (-0{,}8)^2 + (0{,}5)^2 + (-0{,}6)^2 + (-0{,}6)^2 + (-1{,}2)^2 - \frac{(-2{,}6)^2}{5}\right] = 0{,}794\,.$$

Zbir ovih upoređenja je ravan sumi kvadrata pogreške u analizi varijanse tab. 9.10:

$$0{,}338 + 0{,}929 + 0{,}794 = 2{,}061.$$

Imenitelji 12, 6 i 2 su u stvari $\sum_{i=1}^{t} \lambda_i^2$ svakog upoređenja. Kod prvog to je:

$$(+3)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 = 12 \text{ itd.}$$

Ako se ovako raščlane sume kvadrata pogreške, jasno je da će se i $F-$test izvoditi na osnovu suma kvadrata za ortogonalna upoređenja tretmana i odgovarajuće sume kvadrata pogreške tog upoređenja.

Podela sume kvadrata pogreške opravdana je u slučajevima kada postoji sumnja da varijanse slučajno promenljive ε_{ij} nisu homogene. U tom slučaju bi varijansa pogreške σ^2 bila drugačija i za očekivane sredine kvadrata (u tab. 9.10. u koloni "očekivana sredina kvadrata", pošlo se od pretpostavke da je varijansa homogena).

Očekivana suma kvadrata nekog upoređenja sadrži, pored varijanse pogreške u linearnoj kombinaciji, još i deo varijacije koji proizilazi iz dejstva tretmana te kombinacije.

Međutim, ako je broj stepeni slobode za ovako podeljene varijanse pogreške mali, test homogenosti gubi u svojoj osetljivosti (vidi tablicu $F-$distribucije) i ne postiže se željeni efekat. Ovu činjenicu nikako ne treba ispuštati iz vida kad se donosi odluka za podelu sume kvadrata pogreške na delove koji odgovaraju ortogonalnim upoređenjima tretmana. (O ovom problemu videti: Ostle, 1960).

Na osnovu podataka iz tab. 9.10. F vrednosti odnosa ortogonalnih upoređenja tretmana i jedinstvene sume kvadrata pogreške su:

$$F = \frac{1,350}{0,172} = 7,85 ,$$

$$F = \frac{0,048}{0,172} = 0,28 ,$$

$$F = \frac{0,676}{0,172} = 3,93 .$$

$F_{(0,05\,;\,1\,i\,12)} = 4,75$. Prema tome, jedino prvo upoređenje pokazuje značajnu razliku.

Sada ćemo izračunati F vrednosti na osnovu odnosa ortogonalnih upoređenja tretmana i suma kvadrata pogreški koje odgovaraju ovim ortogonalnim upoređenjima.

$$F = \frac{1,350}{0,085} = 15,88 ,$$

$$F = \frac{0,048}{0,232} = 0,21 ,$$

$$F = \frac{0,676}{0,198} = 3,41 .$$

$F_{(0,05\,;\,1\,i\,4)} = 7,71$. I u ovakvoj situaciji jedino je prvo upoređenje značajno.

9.5. Slučajni blok–sistem sa više od jednog posmatranja po eksperimentalnoj jedinici.

Izvesna ispitivanja u slučajnom blok–sistemu vrše se tako da se iz svake jedinice uzimaju poduzorci od dva ili više merenja. Izvodi se, na primer, ogled sa pšenicom u slučajnom blok–sistemu s ciljem da se utvrdi broj zrna po klasu različitih sorti. Umesto da se u svakoj parceli izbroje zrna svakog klasa, što je dugotrajan posao, ispitivanje se obavlja tako da se iz parcela slučajnim putem uzmu poduzorci. Model ovog ogleda je:

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} + \delta_{ijk}, \tag{9.15}$$

$i = 1,...,t; j = 1,..., b;\ k = 1,...,n$; α_i–dejstvo i–tog tretmana; β_j–dejstvo j–tog bloka; ε_{ij} je slučajno promenljiva eksperimentalna jedinica i–tog tretmana i j–tog bloka; $N(0,\sigma^2)$; δ_{ijk} je slučajno promenljiva u k–tom uzorku (eksperimentalna jedinica) ij–tog tretmana i bloka, $N(0,\sigma^2)$.

Analiza varijanse ovakvog ogleda u opštem slučaju data je u tab. 9.12.

TAB. 9.12. Analiza varijanse ogleda u slučajnom blok–sistemu sa poduzorcima iz eksperimentalnih jedinica

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata	Očekivana sredina kvadrata
Blokovi	$(b-1)$	Q_B	$Q_B/(b-1)$	$\sigma^2 + n\sigma_P^2 + \frac{nt}{b-1}\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2$
Tretmani	$(t-1)$	Q_T	$Q_T/(t-1)$	$\sigma^2 + n\sigma_P^2 + \frac{nb}{t-1}\sum_{i=1}^{t}\alpha_i^2$
Eksperim. pogreška	$(b-1)(t-1)$	Q_P	$Q_P/[(b-1)(t-1)]$	$\sigma_U^2 + n\sigma_P^2$
Pogreška uzorka	$bt(n-1)$	Q_U	$Q_U/[bt(n-1)]$	σ_U^2
Ukupno	$btn-1$	Q		

Pojedine sume kvadrata izračunavaju se na sledeći način: Korektivni faktor:

$$C = \frac{X_{000}^2}{btn},$$

gde je X_{000} – suma svih posmatranja u ogledu.

Suma kvadrata totala:

$$Q = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} X_{ijk}^2 - C. \tag{9.16}$$

Suma kvadrata eksperimentalnih jedinica (parcela):

$$Q_E = \frac{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b} X_{ij0}^2}{n} - C, \tag{9.17}$$

gde je X_{ij0} = ukupna vrednost svih posmatranja i–tog tretmana i j–tog bloka.

Suma kvadrata pogreške uzorka:

$$Q_U = Q - Q_E \tag{9.18}$$

Suma kvadrata tretmana:

$$Q_T = \frac{\sum_{i=1}^{t} X_{i00}^2}{bn} - C, \tag{9.19}$$

gde je X_{i00} – ukupna vrednost posmatranja i–tog tretmana.

Suma kvadrata blokova:

$$Q_B = \frac{\sum_{j=1}^{b} X_{0j0}^2}{tn} - C, \tag{9.20}$$

gde je X_{0j0}–suma vrednosti posmatranja j–tog bloka.

Suma kvadrata eksperimentalne pogreške:

$$Q_P = Q_E - Q_B - Q_T. \tag{9.21}$$

Za ilustraciju uzećemo primer sa ispitivanjem broja zrna po klasu 5 sorti pšenice u 4 ponavljanja (Institut za poljoprivredna istraživanja, Novi Sad). Sa svake parcele uzete su na slučajan način 3 grupe svaka po 10 klasova i izračunat je prosečan broj zrna po klasu za svaku grupu. Rezultati ogleda dati su u tab. 9.13.

$$C = \frac{(2.139)^2}{60} = 76.255,35 .$$

Suma kvadrata totala = $(34)^2 + (33)^2 + ... + (28)^2 - 76.255,35 = 2.883,65$.

Suma kvadrata parcela = $\frac{(105)^2 + (95)^2 + ... + (80)^2}{3} - 76.255,35 = 2.709,65$.

Suma kvadrata pogreške uzorka = $2.883,65 - 2.709,65 = 174,00$.

Suma kvadrata blokova = $\frac{(527)^2 + (538)^2 + (537)^2 + (537)^2}{15} - 76.255,35 = 5,38$.

Suma kvadrata tretmana = $\frac{(411)^2 + (530)^2 + ... + (303)^2}{12} - 76.255,35 = 2.256,57$.

Suma kvadrata eksperimentalne pogreške = $2.709,65 - 5,38 - 2.256,57 = 447,70$.

TAB. 9.13. Rezultati ogleda sa ispitivanjem broja zrna po klasu raznih sorti pšenice — 3 grupe sa svake parcele

Sorte	Blokovi				Ukupno
	1	2	3	4	
NS−4	34 33 38	31 31 33	33 36 40	33 35 34	
	105	95	109	102	411
Ns−16	41 43 38	41 41 43	50 47 46	46 45 49	
	122	125	143	140	530
Ns−18	32 37 34	43 41 45	36 35 37	38 35 34	
	103	129	108	107	447
Mara	45 42 42	33 37 39	34 35 33	37 33 38	
	129	109	102	108	448
San pastore	23 22 23	24 29 27	25 24 26	28 24 28	
	68	80	75	80	303
Ukupno	527	538	537	537	2.139

TAB. 9.14. Analiza varijanse ogleda iz tab. 9.13.

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata	Očekivana sredina kvadrata
Blokovi	3	5,38	1,79	
Tretmani	4	2.256,57	564,14	$\sigma_U^2 + 3\sigma_P^2 + \frac{12}{4}\sum_{i=1}^{5}\alpha_i^2$
Eksperimentalna pogreška	12	447,70	37,31	$\sigma_U^2 + 3\sigma_P^2$
Pogreška uzorka	40	174,00	4,35	σ_U^2
Ukupno	59	2.883,65		

Testiranje hipoteze o jednakosti tretmana izvodi se na osnovu sledećeg odnosa:

$$F = \frac{564,14}{37,31} = 15,12 .$$

$F_{(0,05\,;\,4\,i\,12)} = 3,26$. Prema tome, tretmani pokazuju značajnu razliku, te se nulta hipoteza odbacuje.

Eksperimentalna pogreška sastoji se iz dve komponente, i to varijacija uzorka plus varijacija parcela. Ocena varijanse eksperimentalne pogreške je:

$$\frac{(S_U^2 + 3s_P^2) - s_U^2}{3} = \frac{37,31 - 4,35}{3} = 10,99 .$$

Varijansa tretmana uključuje još i varijaciju koja proizilazi iz tretmana i ocena tog dela varijanse je:

$$\frac{\left(s_U^2 + 3s_P^2 + 3\sum_{i=1}^{5}\alpha_i^2\right) - s_U^2 + 3s_P^2}{3} = \frac{564,14 - 37,31}{3} = 175,61 .$$

Kod ovih ogleda pojavljuje se problem kad je varijansa eksperimentalne pogreške manja ili nije značajno veća od varijanse pogreške uzorka. U takvoj situaciji neki autori preporučuju spajanje ove dve varijacije i izračunavanje zajedničke varijanse pogreške, $(Q_P + Q_U)/[(b-1)(t-1)] + [bt\,(n-1)]$, koja bi služila kao osnova za testiranje. Tu se polazi od pretpostake o jednakosti dve date varijanse. Međutim, ako ne bi bilo tako, postoji veća mogućnost za odbacivanje nulte hipoteze nego što pretpostavljamo na osnovu odgovarajućeg praga značajnosti. Zbog toga treba biti oprezan kod izvođenja združivanja ovih dveju varijacija. Može se reći da je opasnost da će se pogrešiti manja kad se združivanju uopšte ne pristupa (Paull, 1950).

9.6. Slučajni blok–sistem sa nejednakim brojem ponavljanja tretmana

Ponekad se veći značaj pridaje upoređenju raznih tretmana sa kontrolnim nego njihovom međusobnom upoređenju i tada je pogodno da ogled ima više jedinica, odnosno ponavljanja u kontrolnom nego u ostalim tretmanima. Slučajan blok–sistem može da se primeni i u ovom slučaju tako da je broj jedinica kontrolnog tretmana u svakom bloku isti. Na primer, ako ogled ima četiri tretmana od kojih je jedan standardni i figurira kao kontrolni, taj tretman bi mogao da se ponavlja dva ili tri puta u svakom bloku, dok bi se ostali ponavljali samo jedanput.

Analiza varijanse ovakvog ogleda nije komplikovana i, za razliku od izračunavanja suma kvadrata tretmana kod slučajnog blok–sistema sa jednakim brojem ponavljanja, ovde se suma kvadrata tretmana dobija kada se kvadrirana totalna vrednost svakog tretmana podeli sa njegovim *brojem ponavljanja* u celom ogledu. Logično da je taj broj kod kontrolnog tretmana veći. Od zbira ovih vrednosti na uobičajen način oduzima se korektivni faktor. Suma kvadrata blokova deli se sa brojem jedinica u bloku koji je i u ovakvoj situaciji za svaki blok isti. Prema tome, sume kvadrata za analizu varijanse su sledeće:

$$C = \frac{X_{00}^2}{N},$$

gde je N broj jedinica u ogledu.

$$\text{Suma kvadrata totala} = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{b} X_{ij}^2 - C .$$

$$\text{Suma kvadrata blokova} = \frac{\sum_{j=1}^{b} X_{0j}^2}{a} - C$$, gde je a broj jedinica u bloku.

$$\text{Suma kvadrata tretmana} = \sum_{i=1}^{t} \frac{X_{i0}^2}{b_i} - C,$$ gde je b_i broj jedinica $i-$tog tretmana.

Suma kvadrata pogreške = Suma kvadrata totala – Suma kvadrata blokova – Suma kvadrata tretmana.

Za ilustraciju uzećemo podatke jednog ogleda izvedenog u Rotamstedskoj stanici (Cochran, Cox 1957). Zadatak je bio da se ispita dejstvo četiri zemljišna fumiganta na smanjenje nematoda u zemlji. Fumiganti, dinitrohlorbenzol (*CH*), želirani ugljendisulfid (*CS*) i dva sopstvena preparata "sajmeg" (*CM*) i "sikej" (*SK*) bili su upotrebljeni u jednoj i dvostrukoj dozi, što čini 8 tretmana. Pored toga, kao kontrola uzet je tretman bez fumiganata tako da je bilo ukupno 9 tretmana. Ogled je postavljen kao slučajan blok – sistem sa 4 ponavljanja izuzev kontrolnog tretmana koji se ponavljao 4 puta u svakom bloku. Bilo je prema tome, 4 bloka sa 12 parcela. Fumigant je ubrizgan u proleće posle čega je na parcelama posejan ovas. Nakon žetve, uzet je uzorak od 400 grama zemlje sa svake parcele i u svakom uzorku je izvršeno prebrojavanje cista nematoda. Rezultati toga prebrojavanja dati su u tab. 9.15.

Izračunavanja za analizu varijanse su sledeća:

Korektivni faktor:

$$C = \frac{(14.680)^2}{48} = 4{,}489.633$$

Suma kvadrata totala = $(466)^2 + (590)^2 + \ldots + (292)^2 - 4{,}489.633 = 991.565.$

Suma kvadrata blokova =

$$= \frac{(4.383)^2 + (3.075)^2 + (4.752)^2 + (2.470)^2}{12} - 4{,}489.633 = 289.427.$$

Suma kvadrata tretmana =

$$= \frac{(5.858)^2}{16} + \frac{(1.066)^2 + (1.265)^2 + \ldots + (1.122)^2}{4} - 4{,}489{,}633 = 157.448.$$

Suma kvadrata pogreške = 991.565 – 289.427 – 157.448 = 544.690.

TAB. 9.15. Broj cista nematoda na 400 g zemlje u ogledu sa slučajnim blok–sistemom sa nejednakim brojem ponavljanja

Tretmani	Blokovi				Ukupno
	1	2	3	4	
0	466	590	505	352	
0	219	137	363	254	
0	421	356	563	106	5.858
0	708	212	338	268	
CH_1	398	332	222	114	1.066
CH_2	304	308	561	92	1.265
CS_1	194	221	433	80	928
CS_2	372	166	311	28	877
CM_1	386	176	415	454	1.431
CM_2	379	199	365	298	1.241
CK_1	256	236	268	132	892
CK_2	280	142	408	292	1.122
Ukupno	4.383	3.075	4.752	2.470	14.680

TAB. 9.16. Analiza varijanse ogleda sa ispitivanjem nematoda

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata	F
Blokovi	3	289.427	96.476	6,37
Tretmani	8	157.448	19.681	1,30
Pogreška	36	544.690	15.130	
Ukupno	47	991.565		

$F_{(0,05\,;\,8\,i\,36)} = 2{,}21$. Dakle, tretmani u celini ne pokazuju značajne razlike.

9.7. Efikasnost slučajnog blok–sistema

Kao što smo već istakli, putem slučajnog blok–sistema smanjuje se eksperimentalna pogreška i na taj način povećava preciznost ogleda. To povećanje može, u poređenju sa potpuno slučajnim rasporedom, da se izračuna i pokazatelj predstavlja njegovu efikasnost.

Za sagledavanje efikasnosti najpogodnije je da se pođe od utvrđivanja ekeperimentalne pogreške u uslovima potpune slučajnosti (Kempthorne, 1952). Poći ćemo od postojanja tzv. *fiktivnog tretmana* zajedničkog za sve jedinice. Tako, ako imamo t jedinica u jednom bloku i b blokova, može da postoji k grupa od tb jedinica. Blokovi su grupisani po raznim kriterijumima, uz istovetnost tretmana u svim grupama sa bt jedinica. Na primer, ako je jedinica krava, blokovi se mogu formirati od grupa prema starosti, težini, rasi itd. Statistička analiza omogućuje da se dobiju izvori varijacije dati u tab. 9.17.

TAB. 9.17. Analiza varijanse grupe ogleda sa fiktivnim tretmanom

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Sredina kvadrata
Grupe	$(k-1)$	
Blokovi unutar grupa	$k(b-1)$	B
Unutar blokova	$kb(t-1)$	P
Ukupno	$kbt-1$	

Imajući ovo u vidu, statistička analiza jednog ogleda sa fiktivnim tretmanom je data u tab. 9.18.

TAB. 9.18. Analiza varijanse jednog ogleda sa fiktivnim tretmanom

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata
Blokovi	$b-1$	$B(b-1)$
Unutar blokova	$b(t-1)$	$P(t-1)b$
Ukupno	$bt-1$	$B(b-1)+P(t-1)b$

Da ogled nije izveden sa blokovima varijansa potrebna za upoređenje tretmana bila bi:

$$\frac{B(b-1)+P(t-1)b}{bt-1}. \tag{9.22}$$

Uvođenjem blokova ta varijansa je:

$$\frac{P(t-1)b}{(t-1)b}=P. \tag{9.23}$$

Iz ovog proizilazi: ako bi dva plana ogleda bila primenjena na istim jedinicama, relativna *efikasnost* slučajnog blok–sistema u odnosu na potpuno slučajni raspored bila bi:

$$RE=\frac{B(b-1)+P(t-1)b}{P(bt-1)}. \tag{9.24}$$

Sve ove vrednosti nalaze se u tabeli analize varijanse slučajnog blok sistema. Na primer, u analizi varijanse u tab. 9.4. $B = 0{,}263$, $P = 0{,}029$. *Relativna efikasnost* ovog ogleda je:

$$RE=\frac{0{,}263(4-1)+0{,}029(6-1)4}{0{,}029(24-1)}=\frac{1{,}369}{0{,}667}=2{,}052\,,$$

odnosno 205,2 procenata.

Želimo li da saznamo koliko je ponavljanja potrebno da se dobije ista efikasnost u potpuno slučajnom rasporedu kao i u slučajnom blok–sistemu, postupićemo ovako: prvo ćemo izvršiti zamenu u obrascu relativne efikasnosti (RE):

$$S_R^2=B(b-1)+P(t-1)b\,,$$

$$S_B^2 = P(bt - 1)$$

odnosno:

$$RE = \frac{S_R^2}{S_B^2} .$$

Broj ponavljanja za istu efikasnost u pomenutom primeru je:

$$b' = \frac{bS_R^2}{S_B^2} = \frac{4 \cdot 1{,}369}{0{,}667} = 8{,}21 . \tag{9.25}$$

Treba istaći da se relativna efikasnost slučajnog bloka postiže uprkos smanjenog broja stepeni slobode za pogrešku.

9.8. Određivanje potrebnog broja ponavljanja

Kod izvođenja ogleda često se postavlja pitanje koliki treba da bude broj ponavljanja. Jedan način za dobijanje odgovora je da se pođe od razlike između parova sredina uz upotrebu tabele XII (Harris, Horwitz, Mood, 1948).

Ogled u slučajnom blok–sistemu se, recimo, sastoji od b blokova i q ponavljanja, što praktično znači da su b i q izjednačeni. Zatim se na neki način utvrdi varijansa pogreške s_1^2 sa m stepeni slobode. Pored toga, potreban je broj stepeni slobode pogreške u planiranom ogledu, n. Razlika a između sredina osnovnog skupa dva tretmana, da bi se ispoljila sa verovatnoćom $\beta = 0{,}80$ i $\beta = 0{,}95$ na pragu značajnosti od $\alpha = 0{,}05$ u jednom pravcu ili $\alpha = 0{,}10$ u oba pravca, treba da je:

$$a = ks_1\sqrt{\frac{2(n+1)}{q}} . \tag{9.26}$$

Vrednost k se uzima iz tabele XII.

Za ilustraciju koristićemo jedan primer u kome želimo da u slučajnom blok–sistemu uporedimo bilo koje dve sredine tretmana. Procenjeno $s_1^2 = 16$, a $m = 12$, zatim $b = 4$, $t = 5$ i $n = (4 - 1)(5 - 1) = 12$. Tako imamo:

$$a = 1{,}12 \cdot 4\sqrt{\frac{2(12+1)}{4}} = 11{,}422 ,$$

gde je 1,12 vrednost k iz tabele XII za $m = 12$ i $n = 12$. Ukoliko hoćemo da smanjimo razliku između sredina, tj. a, povećaćemo b, odnosno q i tako dobiti smanjenu vrednost za a.

Da bi se došlo do potrebnog broja ponavljanja za dobijanje značajnog rezultata u jednom ogledu Kohran i Koks (Cochran, Cox, 1957) preporučuju tablice Nejmana (Neyman) i saradnika. Ove tablice su date u tabeli XIX.

Tabela je sačinjena tako da verovatnoća za dobijanje značajnog rezultata zavisi od tri faktora: standardne greške σ po jedinici, broja ponavljanja (q) i broja stepeni slobode koje ogled pruža za ocenu varijanse pogreške. Tabela pokazuje najmanji broj ponavljanja za stvarnu razliku između tretmana δ i za stvarnu standardnu grešku pojedinici σ. Ove dve veličine izražene su u procentima od aritmetičke sredine. Tabela XIX daje broj ponavljanja za prag značajnosti od 5% i verovatnoćama od 80% i 90%, kao i za test na pragu od 1% i verovatnoćom od 95%. Prvi procenat je test uz $\alpha = 0{,}05$, odnosno $\alpha = 0{,}01$ rizik i on omogućuje da se sagleda kolika je razlika potrebna između dva tretmana da bi bila značajna na datom pragu, a drugi je verovatnoća da se to ostvari.

Prilikom sastavljanja tabele pošlo se od toga da je broj stepeni slobode za pogrešku $3(q - 1)$, što je slučaj kod slučajnog blok–sistema sa 4 tretmana. Ako ogled ima više od 4 tretmana, podaci tabele se neznatno menjaju. Međutim, ako ogled ima samo 2 do 3 tretmana, tada se radije preporučuje upotreba ranije date formule za utvrđivanje potrebnog broja ponavljanja.

Kad ne bismo koristili formulu ili tabele za utvrđivanje broja ponavljanja, taj broj ne bi trebalo da bude manji od 4, a preporučuje se i nešto veći broj, čak i do 10.

9.9. Slučajan raspored kod ogleda po blok–sistemu

Slučajan raspored kod ogleda sa potpuno slučajnim rasporedom može da se obezbedi pomoću tablica slučajnih permutacija do 16 (tabela XXII), tablica slučajnih brojeva (tabela XI), zatim izvlačenjem dobro izmešanih karata i sl. Bitno je da postupak izbora obezbeđuje strogo *objektivnu proceduru*. (Opširnije o problemima slučajnog rasporeda kod ogleda govori Cox 1958).

Imamo, na primer, tri tretmana i četiri ponavljanja i iz tabele slučajnih permutacija izvučemo sledeće brojeve, uz zanemarivanje brojeva od 13 do 16, jer ogled ima ukupno 12 jedinica:

4, 8, 7, 9, 10, 3, 2, 11, 6, 1, 12 i 5.

Tada se prvi tretman primenjuje na jedinice koje imaju brojeve 4, 8, 7 i 9, drugi tretman na jedinice pod rednim brojem 10, 3, 2, 11 i treći na jedinice 6, 1, 12 i 5. Ukoliko ima više od 16 tretmana, može se upotrebiti tabela slučajnih brojeva.

Kod slučajnog blok–sistema za slučajan raspored možemo isto tako da koristimo tablicu slučajnih permutacija od 9 datu u tabeli XXI. Prvo se jedinice grupišu u blokove ili grupe, a zatim se postiže ponovni slučajan raspored unutar svakog bloka. Ako je ogled od 5 tretmana i 3 bloka s jednim ponavljanjem u svakom bloku, tretmani se mogu označiti sa T_1, T_2, T_3, T_4 i T_5. Prvo treba numerisati parcele u svakom bloku od 1 do 5, pa koristiti tablicu slučajnih permutacija od 9. Na slučajan način odredimo stranu, red i kolonu permutacija od 9. Uzmimo, recimo, prvu stranu, treći red i četvrtu grupu kolona gde brojevi počinju sa 5, 3, 6, 2, 4, 9, 8, 1 i 7. Dalje se iz prve permutacije uzimaju brojevi 5, 3, 2, 4 i 1, a odbacuju ostali, od 6 do 9, pošto imamo samo 5 tretmana. To je red lokacije tretmana u prvom bloku. Tako će T_5 biti primenjen na prvoj parceli prvog bloka, T_3 na drugoj parceli itd. Za drugi blok uzima se naredna permutacija 8, 6, 2, 3, 7, 1, 5, 9 i 4 koja daje sledeći redosled tretmana T_2, T_3, T_1, T_5 i T_4. Na isti način se postupa i kod izbora redosleda tretmana u trećem bloku korišćenjem treće permutacije.

Ako se slučajni blok–sistem sastoji od 9 jedinica i 6 tretmana u svakom bloku tako da se T_1 ponavlja 4 puta, a T_2,..., T_6 samo po jedanput, brojevi 1, 2, 3 i 4 će predstavljati T_1, broj 5–T_2, broj 6–T_3 itd. Kad je prva permutacija 5, 3, 6, 4, 7, 1, 8, 9 i 2, redosled primene tretmana je sledeći: T_2, T_1, T_3, T_1, T_4, T_1, T_5, T_6, T_1.

9.10. Izračunavanje prinosa izgubljene parcele kod slučajnog blok–sistema

Plan ogleda koji je postavljen po slučajnom blok–sistemu, kao što smo videli, vrlo je podesan za sagledavanje uticaja nekog tretmana. Ako se javi gubitak prinosa neke parcele, ili kod ogleda sa životinjama neka životinja ugine, tada, da bi mogla da se primeni analiza varijanse, potrebno je odgovarajućim postupkom izračunati vrednost izgubljene jedinice (Yates, 1933).

Radi ilustracije uzećemo da je u primeru ogleda sa kukuruzom (tab. 9.6.) izgubljena parcela sa hibridom VI_3 u prvom bloku. Rezultati tog ogleda bez vrednosti izgubljene parcele dati su u tab. 9.19.

TAB. 9.19. Ogled sa kukuruzom, jedna izgubljena parcela

Hibridi	Blokovi					Ukupno
	1	2	3	4	5	
VI_1	5,0	5,7	4,6	5,2	5,3	25,8
VI_2	4,8	5,0	4,5	4,6	5,4	24,3
VI_3	(4,1)	4,2	5,0	4,0	4,2	17,4 (21,5)
VI_4	4,0	4,9	4,1	5,0	4,4	22,4
Ukupno	13,8 (17,9)	19,8	18,2	18,8	19,3	89,9 (94,0)

Vrednost jedne izgubljene parcele u slučajnom blok–sistemu izračunava se prema formuli:

$$X\frac{tT + bB - S}{(t-1)(b-1)}, \tag{9.27}$$

gde je X – vrednost izgubljene parcele,

t – broj tretmana,

b – broj blokova,

T – suma vrednosti tretmana sa izgubljenom parcelom,

B – suma vrednosti bloka sa izgubljenom parcelom,

S – suma vrednosti svih poznatih parcela.

U ovom ogledu je $t = 4, b = 5, T = 17{,}4, B = 13{,}8, S = 89{,}9$. Prema tome, vrednost izgubljene parcele iznosi:

$$X = \frac{4 \cdot 17{,}4 + 5 \cdot 13{,}8 - 89{,}9}{(4-1)(5-1)} = 4{,}1 \, .$$

Za vrednost 4,1 potrebno je *korigovati* sumu bloka i sumu tretmana gde je parcela izgubljena, kao i totalnu vrednost ogleda. U tab. 9.19. ta korekcija je prikazana u zagradama. Dalje se pristupa analizi varijanse na uobičajen način, jedino što je broj stepeni slobode za pogrešku i ukupno umanjen za 1.

Pored toga, da bi test bio *nepristrasan*, pristupa se još jednoj ispravci. Reč je o izračunavanju vrednosti koja treba da služi kao korektura sume kvadrata tretmana i dobija se prema sledećoj formuli:

$$\text{Korektura za pristrasnost} = \frac{[B-(t-1)X]^2}{t(t-1)} = \frac{[13{,}8-(4-1)4{,}1]^2}{4(4-1)} = 0{,}2 \, . \qquad (9.28)$$

Izračunavanja za analizu varijanse sa interpolisanom izgubljenom parcelom (tab. 9.20) su sledeća:

$$\text{Suma kvadrata totala} = (5{,}0)^2 + (4{,}8)^2 + \ldots + (4{,}4)^2 - \frac{(94{,}0)^2}{20} = 4{,}860 \, .$$

$$\text{Suma kvadrata blokova} = \frac{(17{,}9)^2 + \ldots + (15{,}3)^2}{4} - \frac{(94{,}0)^2}{20} = 0{,}605 \, .$$

$$\text{Suma kvadrata tretmana} = \frac{(25{,}8)^2 + (24{,}3)^2 + (21{,}5)^2 + (22{,}4)^2}{5} - \frac{(94{,}0)^2}{20} = 2{,}228 \, .$$

$$\text{Suma kvadrata pogreške} = 4{,}860 - 0{,}605 - 2{,}228 = 2{,}027.$$

TAB. 9.20. Analiza varijanse ogleda sa interpolisanom izgubljenom parcelom

Izvori varijacije	Suma kvadrata	Stepeni slobode	Sredina kvadrata
Blokovi	0,605	4	0,151
Tretmani	2,228 − 0,2 = 2,028	3	0,676
Pogreška	2,027	12 − 1 = 11	0,184

Standardna greška razlike za testiranje sredine tretmana sa izgubljenom parcelom i sredine nekog drugog tretmana izračunava se prema sledećoj formuli:

$$s_{(\bar{X}_i - \bar{X}_j)} = \sqrt{\frac{s^2}{b}\left[2 + \frac{t}{(t-1)(b-1)}\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}184}{5}\left[2 + \frac{4}{(4-1)(5-1)}\right]} = 0{,}293 \, . \qquad (9.29)$$

Ako imamo *dve izgubljene parcele* i to, recimo, hibrid VI_3 u prvom bloku i hibrid VI_4 u trećem bloku, podaci ogleda sadržavaće vrednosti date u tab. 9.21.

TAB. 9.21. Ogled sa kukuruzom sa dve izgubljene parcele

Hibridi	Blokovi					Ukupno
	1	2	3	4	5	
VI_1	5,0	5,7	4,6	5,2	5,3	25,8
VI_2	4,8	5,0	4,5	4,6	5,4	24,3
VI_3	*a*	4,2	5,0	4,0	4,2	17,4
VI_4	4,9	4,9	*b*	5,0	4,4	18,3
Ukupno	13,8	19,8	14,1	18,8	19,3	85,8

Da bismo mogli da izračunamo vrednosti izgubljenih parcela najpre ćemo da damo jednu *privremenu vrednost* za izgubljenu parcelu *b* u bloku III, a potom ćemo da izračunamo vrednost izgubljene parcele *a* pomoću formule za izračunavanje jedne izgubljene parcele. Kao privremenu veličinu za *b* uzećemo sredinu prinosa hibrida VI_4 izračunatu na bazi poznatih parcela, koja iznosi 4,6. Sad se može izračunati vrednost za *a*.

$$X_a = \frac{4 \cdot 17{,}4 + 5 \cdot 13{,}8 - (85{,}8 + 4{,}6)}{(4-1)(5-1)} = 4{,}0\,.$$

Dalje se izračunava vrednost izgubljene parcele *b*, s tim što za vrednost parcele a uzimamo već izračunatu veličinu od 4,0 i tako dobijamo:

$$X_b = \frac{4 \cdot 18{,}3 + 5 \cdot 14{,}1 - (85{,}8 + 4{,}0)}{(4-1)(5-1)} = 4{,}5\,.$$

Posle ovog se pristupa ponovnoj interpolaciji za izgubljenu vrednost *a*, s tim što će se za vrednost parcele *b* sada uzeti 4, 5. Ova druga aproksimacija za *a* iznosi:

$$X_a = \frac{4 \cdot 17{,}4 + 5 \cdot 13{,}8 - (85{,}8 + 4{,}5)}{(4- -1)(5-1)} = 4{,}0\,.$$

Druga aproksimacija za *b* daje isti rezultat kao i prva, pa je nećemo ni izračunavati. Pravilo je da se interpolacija produžava dok ne prestane da se pojavljuje razlika u izračunatim vrednostima svake izgubljene parcele od jedne do druge aproksimacije. Na ovaj način se izračunavaju vrednosti za tri i više izgubljenih parcela. Treba napomenuti da je kod analize varijanse u takvim slučajevima broj stepeni slobode za pogrešku i ukupno smanjen za broj izgubljenih parcela.

Kada je više od jedne parcele izgubljeno, *korektura za pristrasnost* vrši se prema sledećoj šemi:

Suma kvadrata totala (na bazi originalnih vrednosti, tj. bez vrednosti izgubljenih parcela)

– suma kvadrata pogreške (izračunata na osnovu interpolisanih izgubljenih vrednosti)
= suma kvadrata blokova + suma kvadrata tretmana

– suma kvadrata blokova (bez vrednosti izgubljenih parcela)
= korigovana suma kvadrata tretmana.

Za podatke iz tab. 9.21. izvršićemo korekturu za pristrasnost. Na osnovu tih podataka dobija se:

Suma kvadrata totala =

$$= (5{,}0)^2 + (4{,}8)^2 + \ldots + (4{,}4)^2 - \frac{(85{,}8)^2}{18} = 4{,}0600.$$

Suma kvadrata blokova =

$$= \frac{(13{,}8)^2 + (14{,}1)^2}{3} + \frac{(19{,}8)^2 + (18{,}8)^2 + (19{,}8)^2}{4} - \frac{(85{,}8)^2}{18} = 0{,}2625\,.$$

Suma kvadrata pogreške izračunata na osnovu interpolisanih podataka sa vrednostima izgubljenih parcela ($X_a = 4{,}0, X_b = 4{,}5$) je 1,9360.

Korektura za pristrasnost sume kvadrata tretmana je:

Suma kvadrata totala (originalni podaci)	4,0600
Suma kvadrata pogreške (interpolisani podaci)	−1,9360
Suma kvadrata blokova (originalni podaci)	−0,2625
Korigovana suma kvadrata tretmana	1,8615

TAB. 9.22. Analiza varijanse ogleda sa kukuruzom sa dve izgubljene parcele

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata
Blokovi	4	0,2625
Tretmani	3	1,8615
Pogreške	10	1,9360

Da nije izvršena korektura za pristrasnost suma kvadrata tretmana na osnovu rezultata ogleda sa izračunatim izgubljenim parcelama iznosila bi 2,17 tako da je vrednost korekture 2,17 − 1,86 = 0,31.

Standardna greška razlike kod tretmana gde su dve parcele izgubljene izračunava se na sledeći način: uzme se za 1 ponavljanje datog tretmana gde je i drugi tretman prisutan, za 1/2 gde je vrednost drugog tretmana izgubljena i za 0 gde je vrednost parcele datog tretmana izgubljena. Na primer, za upoređivanje hibrida VI_3 i VI_4 imamo:

Tretmani	Ponavljanje 1	2	3	4	5	
VI_3	0	1	1/2	1	1	=3 1/2
VI_4	1/2	1	0	1	1	=3 1/2

9.11. Ogledi sa životinjama

Slučajan blok–sistem može da se primeni i na oglede sa životinjama. U ogledima sa prasadima, na primer, obično se počinje njihovim izdvajanjem u grupe. Prasad može da se uzme iz više legala, ali broj tretmana treba da je manji od njihovog broja u najmanjem leglu. Tretmani se primenjuju na jedno prase slučajno izabrano iz svakog legla dok se višak prasadi isključuje iz ogleda. Na ovaj način upoređenje sredina je oslobođeno uticaja varijacije koja bi mogla proizići iz razlike u naslednim svojstvima. Ovakvi planovi se, isto tako, mogu primeniti i u laboratorijama kod ogleda sa životinjama. Kada su odabrane životinje za svaki blok, ponovo se pristupa slučajnoj primeni tretmana unutar svakog bloka.

Težina životinja takođe može da služi kao osnova za blokove. Ako je za ogled prethodno odabrano 20 životinja sa 5 tretmana i 4 bloka one prethodno mogu da se sistematizuju po težini od 1 do 20, a zatim životinje od rednog broja 1 do 5 sačinjavaju prvi blok, od 6 do 10 drugi itd. Posle toga se pristupa slučajnoj primeni tretmana u okviru svakog bloka gde životinje imaju približno istu težinu. Ponekad se može dogoditi da prvi i poslednji blok sadrže jednu ili više životinja sa relativno ekstremnom težinom tako da je varijacija u težinama unutar tih blokova značajna. Ovo se može otkloniti ako se za ogled predvidi više životinja nego što je potrebno, pa se onda odbace one sa ekstremnim težinama. Kada je izvršeno grupisanje u blokove, potpuno se zanemaruju početne težine životinja i statistička analiza se vrši kao i kod poljskih ogleda postavljenim prema slučajnom blok–sistemu.

Za ilustraciju uzećemo ogled sa ishranom miševa (Quenouille, 1953). Iz 8 legala uzeto je po 5 miševa za ispitivanje 5 različitih načina ishrane. U ovom ogledu legla su uzeta kao blokovi s ciljem da se izdvoji genetska varijabilnost. Dobitak u težini (g) 4 nedelje posle odbijanja dat je u tab. 9.23.

TAB. 9.23. Rezultati ogleda sa ishranom miševa

Legla	Način ishrane					Ukupno
	A	B	C	D	E	
1	57,0	64,8	70,7	68,3	76,0	336,8
2	55,0	66,6	59,4	67,1	74,5	322,6
3	62,1	69,5	64,5	69,1	76,5	341,7
4	74,5	61,1	74,0	72,7	86,6	368,9
5	86,7	92,8	78,5	90,6	94,7	442,3
6	42,0	51,8	55,8	44,3	43,2	237,1
7	71,9	69,2	63,0	53,8	61,1	319,0
8	51,5	48,6	48,1	40,9	54,4	243,5
Ukupno	500,7	523,4	514,0	506,8	567,0	2.611,9
$\bar{X}$	62,6	65,4	64,2	63,4	70,9	

Izračunavanja za analizu varijanse na bazi podataka tab. 9.23. su sledeća:

$$C = \frac{(2.611,9)^2}{40} = 170.550,54\,.$$

Suma kvadrata totala = $(57,0)^2 + (55,0)^2 + \ldots + (54,4)^2 - 170.550,54 = 7.584,1.$

Suma kvadrata legala = $\dfrac{(336,8)^2 + (322,6)^2 + \ldots + (243,5)^2}{5} - 170.550,54 = 6.099,5.$

Suma kvadrata tretmana = $\dfrac{(500,7)^2 + \ldots + (567,0)^2}{8} - 170.550,54 = 346,9\,.$

Suma kvadrata pogreške = $7.584,1 - 6.099,5 - 346,9 = 1.137,7.$

TAB. 9.24. Analiza varijanse ogleda sa miševima

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata	F
Legla	7	6.099,5	871,4	21,46
Tretmani	4	346,9	86,7	2,13
Pogreška	28	1.137,7	40,6	
Ukupno	39	7.584,1		

9.12. Regresiona analiza dejstva tretmana

Regresionom analizom se razdvajaju sume kvadrata tretmana na linearnu, kvadratnu i komponente većeg stepena. Slična operacija je izvedena kod planiranih ortogonalnih upoređenja gde je suma kvadrata tretmana sa $k - 1$ stepeni slobode podeljena na $k - 1$ ortogonalnih upoređenja, svako sa po jednim stepenom slobode. Ovde *svaka komponenta regresije*, ukoliko se ide na potpunu deobu sume kvadrata tretmana, ima isto tako 1 stepen slobode. Prema tome, *broj* komponenti regresije može da bude $k - 1$, tj. koliko suma kvadrata tretmana u analizi varijanse ima stepeni slobode.

Regresiona analiza na ovaj način može da se primeni u slučajevima kada pojedini tretmani predstavljaju kvantitativne varijacije s *jednakim razmakom*. Predstava o *obliku regresije* ispitivanih tretmana dobiće se testiranjem suma kvadrata pojedinih regresija sa sredinom kvadrata pogreške. U praktičnom radu najčešće se ide na linearnu i kvadratnu regresiju, dok ostatak sume kvadrata obično nema veći značaj i dat je kao jedna celina.

Suma kvadrata pojedinih regresija dobija se pomoću odgovarajućih suma tretmana i *koeficijenata ortogonalnih polinoma* datih u tab. 9.25. Ta tabela sadrži koeficijente do 8 tretmana, odnosno 7 nezavisnih upoređenja.

TAB. 9.25. Ortogonalno polinomni koeficijenti za testiranje regresije (Fisher, Yates, 1957)

Red. broj koeficjenta	$k-1=1$	$k-1=2$		$k-1=3$			$k-1=4$			
	1	1	2	1	2	3	1	2	3	4
1	−1	−1	+1	−3	+1	−1	−2	+2	−1	+1
2	+1	0	−2	−1	−1	+3	−1	−1	+2	−4
3		+1	+1	+1	−1	−3	0	−2	0	+6
4				+3	+1	+1	+1	−1	−2	−4
5							+2	+2	+1	+1
6										
7										
8										

Red. broj koeficjenta	$k-1=5$					$k-1=6$					$k-1=7$				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	−5	+5	−5	+1	−1	−3	+5	−1	+3	−1	−7	+7	−7	+7	−7
2	−3	−1	+7	−3	+5	−2	0	+1	−7	+4	−5	+1	+5	−13	+23
3	−1	−4	+4	+2	−10	−1	−3	+1	+1	−5	−3	−3	+7	−3	−17
4	+1	−4	−4	+2	+10	0	−4	0	+6	0	−1	−5	+3	+9	−15
5	+3	−1	−7	−3	−5	+1	−3	−1	+1	+5	+1	−5	−3	+9	+15
6	+5	+5	+5	+1	+1	+2	0	−1	−7	−4	+3	−3	−7	−3	+17
7						+3	+5	+1	+3	+1	+5	+1	−5	−13	−23
8											+7	+7	+7	+7	+7

Tako se, na primer, suma kvadrata za linearnu regresiju u ogledu sa 3 nezavisna uporeðenja tretmana i n ponavljanja dobija:

$$\frac{[(-3)T_1 + (-1)T_2 + (+1)T_3 + (+3)T_4]^2}{n\sum_{i=1}^{t}\xi_{ik}^2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\xi_{ik}T_i\right)^2}{n\sum_{i=1}^{t}\xi_{ik}^2}. \tag{9.30}$$

gde su ξ_{ik} – polinomni koeficijenti, T_i – ukupne vrednosti pojedinih tretmana, n – broj ponavljanja ili blokova.

Moguće je isto tako *podeliti sumu kvadrata pogreške* na delove koji otpadaju na svaku regresiju. To se postiže kad se za svaki blok izračuna deo odgovarajuće regresije, zatim se te vrednosti zbroje i dobije suma za sve blokove. Od toga se onda oduzima suma kvadrata odgovarajuće regresije. Izračunava se po sledećem obrascu:

$$\sum_{j=1}^{b}\frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\xi_{ik}X_{ij}\right)^2}{\sum_{i=1}^{t}\xi_{ik}^2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\xi_{ik}T_i\right)^2}{n\sum_{i=1}^{t}\xi_{ik}^2}. \tag{9.31}$$

Treba napomenuti da se podela sume kvadrata pogreške za odgovarajuće oblike regresije *retko* u praksi izvodi.

Za primer uzećemo ogled sa rokovima setve pšenice sorte "leonardo" (Institut za poljoprivredna istraživanja, Novi Sad). Ogled je izveden u 8 rokova i 5 blokova. Prva setva je izvedena 5. oktobra, a razmak izmeðu rokova bio je 10 dana. Rezultati i analiza varijanse dati su u tab. 9.26. i 9.27.

Vrednosti iz tabela F–distribucije za testiranje značajnosti sredina kvadrata ili varijansi iz tab. 9.27. su sledeće:

$$F_{(0,05\,;\,7\,i\,28)} = 2,36; \quad F_{(0,05\,;\,1\,i\,28)} = 4,20\,; \quad F_{(0,05\,;\,5\,i\,28)} = 2,56$$

$$F_{(0,05\,;\,1\,i\,4)} = 7,71\,; \quad F_{(0,05\,;\,5\,i\,20)} = 2,71\,.$$

Ako testiramo značajnosti regresije u odnosu na deo pogreške koji na njih otpada, dobijamo sledeće odnose:

$$F = \frac{5.025,94}{21,93} = 229,2\,; \quad F = \frac{610,13}{20,21} = 30,2 \quad \text{i} \quad F = \frac{57,11}{56,41} = 1,01\,.$$

TAB. 9.26. Rezultati ogleda sa rokovima setve sorte "leonardo" u *mc/ha*

Blokovi	Rokovi								Ukupno
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	
1	51,8	48,0	56,0	52,0	49,0	35,0	40,5	20,5	352,8
2	53,4	57,0	69,0	55,0	38,0	30,0	38,0	30,0	370,4
3	58,0	75,0	52,0	56,0	38,0	52,0	40,0	23,0	394,0
4	55,4	62,0	50,0	52,5	51,0	48,0	38,0	14,5	371,4
5	57,0	60,4	64,0	44,0	45,0	38,0	31,5	29,0	358,9
Ukupno	275,6	302,4	291,0	259,5	221,0	203,0	188,0	107,0	1.847,5

TAB. 9.27. Analiza varijanse ogleda sa rokovima setve

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata	*F*
Blokovi	4	124,49	31,12	
Rokovi	7	5.921,62	845,94	18,3
Linearna regresija	1	5.025,94	5.025,94	108,5
Kvadratna regresija	1	610,13	610,13	13,2
Odstupanja od regresije	5	285,55	57,11	1,2
Pogreška	28	1.296,81	46,31	
Za linearnu regresiju	4	87,71	21,93	
Za kvadratnu regresiju	4	80,85	20,21	
Za odstupanje od regresije	20	1.128,25	56,41	
Ukupno	39	7.342,92		

Na ovaj način dolazimo do istog zaključka o značajnosti pojedinih upoređenja kao i kod $F-$testa izvedenog u odnosu na zajedničku pogrešku. Tako su varijanse linearne i kvadratne regresije značajne, dok varijansa odstupanja od regresije nije značajna.

Sume kvadrata linearne i kvadratne regresije dobijene su na sledeći način:

$$Q_{TL} = \frac{1}{5 \cdot 168}[\,(-7)(275{,}6) + (-5)(302{,}4) + \ldots + (+7)(107{,}0)]^{\,2} = \frac{(-2.054{,}7)^2}{840}$$
$$= 5.025{,}94\,.$$

$$Q_{TK} = \frac{1}{5 \cdot 168}[\,(+7)(275{,}6) + (+1)(302{,}4) + \ldots + (+7)(107{,}0)]^{\,2} = \frac{(-715{,}9)^2}{840} =$$
$$= 610{,}13\,.$$

Suma kvadrata odstupanja od regresije je razlika iz:

$$5.921{,}62 - 5.025{,}94 - 610{,}13 = 285{,}55\,.$$

Suma kvadrata pogreški za linearnu i kvadratnu regresiju je $C_i^2/168$:

$$Q_{PL} =$$

$$= \begin{cases} (-7)(51{,}8) + (-5)(48{,}0) + \ldots + (+7)(20{,}5) = -322{,}6 \\ (-7))53{,}4) + (-5)(57{,}0) + \ldots + (+7)(30{,}0) = -392{,}8 \\ (-7)(58{,}0) + (-5)(75{,}0) + \ldots + (+7)(23{,}0) = -438{,}0 \\ (-7)(55{,}4) + (-5)(62{,}0) + \ldots + (+7)(14{,}5) = -413{,}8 \\ (-7)(57{,}0) + (-5)(60{,}4) + \ldots + (+7)(19{,}0) = -487{,}5 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} 619{,}4688 \\ 918{,}4038 \\ 1.141{,}9286 \\ 1.019{,}2288 \\ 1.414{,}6205 \end{array}$$

Ukupno	−2.054,7	5.113,6505
		−5.025,9429
		87,7076

$$Q_{PK} =$$

$$= \begin{cases} (+7)(51{,}8) + (+1)(48{,}0) + \ldots + (+7)(20{,}5) = -183{,}4 \\ (+7)(53{,}4) + (+1)(57{,}0) + \ldots + (+7)(30{,}0) = -\ \ 83{,}2 \\ (+7)(58{,}0) + (+1)(75{,}0) + \ldots + (+7)(23{,}0) = -100{,}0 \\ (+7)(55{,}4) + (+1)(62{,}0) + \ldots + (+7)(14{,}5) = -222{,}2 \\ (+7)(57{,}0) + (+1)(60{,}4) + \ldots + (+7)(19{,}0) = -127{,}1 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} 200{,}2117 \\ 41{,}2038 \\ 59{,}5238 \\ 293{,}8859 \\ 96{,}1572 \end{array}$$

Ukupno	−715,9	690,9824
		−610,1343
		80,8481

Suma kvadrata pogreške za odstupanje od regresije je:

$$1.296{,}81 - 87{,}71 - 80{,}85 = 1.128{,}25$$

Iz rezultata ogleda proizilazi da rokovi setve nemaju samo linearan efekat na prinose, što nagoveštava da optimalno rešenje treba tražiti u okviru ispitivanih tretmana.

9.13. Transformacije

Kod analize varijanse polazi se od izvesnih pretpostavki – osnove za odgovarajući model. Te pretpostavke su zasnovane na slučajnom karakteru varijacije pogreške koja ima normalan raspored čija je sredina nula a standardna devijacija 1, zatim istim varijansama, kao i da nema interakcije između tretmana, što je preduslov za postojanje ortogonalnosti. Ove pretpostavke u svim slučajevima, međutim, nisu zadovoljene, pa se i vrednost analize varijanse dovodi u pitanje. Kad se ovo ustanovi, ponekad je moguće putem transformacije rezultata ogleda doći do uslova za primenu analize varijanse. (Detaljnije o problemima transformacije govore: Bartlett, 1947; Cochran, 1947).

Ima različitih transformacija i njihovo izvođenje zavisi od *prirode podataka*. Na primer, može da se pretpostavi na osnovu ranijeg iskustva, ili na osnovu samog uzorka, da osnovni skup nema oblik normalne distribucije nego raspored koji više odgovara *Poasonovoj distribuciji*. Kod ove druge distribucije varijansa je jednaka srednjoj vrednosti tako da ortogonalnost ne postoji. Da bi varijansa bila 1, ili približna jedinici, *transformacija originalnih podataka* se izvodi putem $\sqrt{X}$ ili kada je vrednost jedinica mala $\sqrt{X+1}$.

Za ilustraciju uzećemo primer o uticaju raznih vrsta herbicida na korove u šećernoj repi (inž. Z. Kosovac, Institut za poljoprivredna istraživanja, Novi Sad). U ogled je uključeno 6 tretmana, i to A = kontrola; $B = A - 875$ (4 *l/ha*); $C = A - 1.014$ (4 *l/ha*); D = Alipur (4 *l/ha*); E = Dalapon (6 *kg/ha*); F = *TCA* (12 *kg/ha*). Rezultati u tab. 9.28. pokazuju masu korova u $g/1\ m^2$.

TAB. 9.28. Uticaj herbicida na korove u šećernoj repi

Blokovi	Tretmani A	B	C	D	E	F	Ukupno
1	520	268	162	120	142	35	1.247
2	530	270	164	121	149	30	1.264
3	530	280	152	126	140	35	1.263
4	490	269	148	111	141	24	1.183
5	457	278	258	120	149	25	1.187
Ukupno	2.527	1.365	784	598	721	149	6.144

Pre nego što pristupimo analizi podataka izvršićemo transformaciju izvlačenjem kvadratnog korena iz svake vrednosti, tj. $\sqrt{X}$. Rezultati su dati u tab. 9.29.

TAB. 9.29. Transformacija rezultata ogleda o uticaju herbicida

Blokovi	Tretmani A	B	C	D	E	F	Ukupno
1	22,80	16,37	12,73	10,92	11,92	5,92	80,69
2	23,02	16,43	12,81	11,00	12,21	5,48	80,95
3	23,02	16,73	12,33	11,22	11,83	5,92	81,05
4	22,14	16,40	12,17	10,54	11,87	4,90	78,02
5	21,38	16,67	12,57	10,95	12,21	5,00	78,78
Ukupno	112,36	82,60	62,61	54,66	60,04	27,22	399,49
$\bar{X}$	22,47	16,52	12,52	10,93	12,01	5,44	13,32

Analiza varijanse transformisanih podataka data u tab. 9.30 ukazuje na značajnost varijacija tretmana.

TAB. 9.30. Analiza varijanse ogleda o uticaju herbicida na korov

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata	*F*
Blokovi	4	1,3063	0,3266	2,68
Tretmani	5	820,4554	164,0911	1.348,32
Pogreška	20	2,4350	0,1217	
Ukupno	29	824,1967		

Testiranje značajnosti razlike između sredina pojedinih tretmana izvodi se na uobičajeni način.

Ako se radi o podacima koji predstavljaju *proporciju ili procenat*, distribucija je bliža *binomnoj*. U toj situaciji *transformacija arcsin* $\sqrt{procenat}$ dovodi do konstantnih varijansi. Da bi ova transformacija mogla da se izvede u tabeli XX su date vrednosti arcsin čiji je argument kvadratni koren iz procenta.

U produžetku se nalazi primer o ispitivanju naklonosti *Otiorrhynchus lavandus Germ*. prema nekim sortama vinove loze (Institut za vinogradarstvo i voćarstvo, Sremski Karlovci). Ogled je izveden u periodu od 21. IV do 23. IV 1963. godine. U svakom ponavljanju uzeto je 20 insekata kojima je za period od 48 časova pružen dovoljan broj okaca, s tim da se usmere na odgovarajuću sortu. Podatke o procentima oštećenih okaca svake sorte daje tab. 9.31

TAB. 9.31. Procenat oštećenih okaca u ogledu sa ispitivanjem naklonosti *Otiorrhynchus lavandus Germ.*

Sorte	Ponavljanje		
	1	2	3
Furmint (A)	20,0	17,4	18,5
Crvena dinka (B)	4,0	24,0	38,1
Traminac (C)	15,4	29,2	44,0
Italijanski rizling (D)	17,4	9,7	9,1
Afuz–ali (E)	27,8	46,1	44,4
Crvena šasla (F)	33,3	5,5	17,6
Riparia partalis (G)	5,5	35,0	11,1
Rupestris di Lot (H)	6,7	23,1	11,1

Transformacija arcsin $\sqrt{procenat}$ izvedena je pomoću tabele XX i podaci su dati u tab. 9.32.

TAB. 9.32. Arcsin $\sqrt{procenat}$ transformacija podataka iz tab. 9.31.

Ponavljanja	Sorte								Ukupno
	A	B	C	D	E	F	G	H	
1	26,6	11,5	23,1	24,7	31,8	35,2	13,6	15,0	181,5
2	24,7	29,3	32,7	18,1	42,8	13,6	36,3	28,7	226,2
3	25,5	38,1	41,5	17,6	41,8	24,8	19,5	19,5	228,3
Ukupno	76,8	78,9	97,3	60,4	116,4	73,6	69,4	63,2	636,0
$\bar{X}$	25,60	26,30	32,43	20,13	38,80	24,53	23,13	21,06	26,50

TAB. 9.33. Analiza varijanse podataka iz tab. 9.32.

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata	F
Ponavljanja	2	174,70	87,35	
Tretmani	7	817,81	116,83	1,52
Pogreška	14	1.077,55	76,97	
Ukupno	23	2.070,06		

$F_{(0,05\,;\,7\,i\,14)} = 2{,}77$, pa, prema tome, razlike između tretmana u celini nisu značajne jer je 1,52 < 2,77.

Ako i uporedimo sredine putem Takijevog testa (7.65). dobijamo kritičnu vrednost:

$$R = 4{,}99\sqrt{\frac{76{,}97}{3}} = 25{,}27\,.$$

Nijedna razlika između sredina u tab. 9.32. ne dostiže kritičnu vrednost R.

Ponovna transformacija u procente srednjh vrednosti tretmana tab. 9.32. daje sledeće rezultate:

Tretmani	A	B	C	D	E	F	G	H
$\bar{X}$	25,60	26,30	32,43	20,13	38,80	24,53	23,13	21,06
$\bar{X}$ u procentima	18,70	19,60	28,80	11,80	39,30	17,20	15,40	12,90

U situaciji kad su *sredine uzoraka proporcionalne svojim razmacima ili standardnim devijacijama*, što praktično znači da imaju približne koeficijente varijacije, primenjuje se *logaritamska transformacija*. Ovde se uzimaju logaritmi vrednosti X, a onda se pristupa analizi varijanse.

Za primer ćemo uzeti rezultate prebrojavanja četiri vrste planktona u šest izvlačenja, svako sa po dve mreže (Snedecor, 1959)(tab. 9.34).

TAB. 9.34. Rezultati prebrojavanja četiri vrste planktona

Prebrojavanje	Broj planktona po vrstama			
	A	B	C	D
1	895	1.520	43.300	11.000
2	540	1.610	28.800	8.600
3	1.020	1.900	28.800	8.260
4	470	1.350	34.600	9.830
5	428	980	27.800	7.600
6	620	1.710	32.800	9.650
7	760	1.930	28.100	8.900
8	537	1.960	18.900	6.060
9	845	1.840	31.400	10.200
10	1.050	2.410	39.500	15.500
11	387	1.520	29.000	9. 250
12	497	1 .685	22.300	7.900
$\bar{X}$	671	1.701	30.775	9.396
σ	233,9	356,6	6.688,7	2.326,1
V	34,86	20,96	21,73	24,76

Iz koeficijenta varijacije V vidi se da je relativan varijabilitet podataka dosta ujednačen, što nalaže da se primeni logaritamska transformacija. Podaci ove transformacije prikazani su u tab. 9.35.

TAB. 9.35. Logaritamska transformacija podataka iz tab. 9.34.

Prebrojavanje	Vrste planktona			
	A	B	C	D
1	2,95	3,18	4,64	4,04
2	2,73	3,21	4,52	3,93
3	3,01	3,28	4,46	3,92
4	2,67	3,13	4,54	3,99
5	2,63	2,99	4,44	3,88
6	2,79	3,23	4,52	3,98
7	2,88	3,29	4,45	3,95
8	2,73	3,29	4,28	3,78
9	2,93	3,26	4,50	4,01
10	3,02	3,38	4,60	4,19
11	2,59	3,18	4,46	3,97
12	2,70	3,23	4,35	3,90
$\bar{X}$	2,802	3,221	4,480	3,962
σ	0,150	0,098	0,099	0,099
V	5,35	3,04	2,21	2,50

Očigledno je da posle transformisanja standardne devijacije nisu više proporcionalne sredinama, pa i koeficijenti varijacije relativno više variraju nego koeficijenti varijacije originalnih podataka.

Analiza varijanse transformisanih podataka prikazana je u tab. 9.36.

TAB. 9.36. Analiza varijanse logaritama iz tab. 9.35.

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata	F
Izvlačenje	11	0,3387	0,0308	
Vrsta planktona	3	20,2070	6,7357	962,243
Pogreška	33	0,2300	0,0070	
Ukupno	47	20,7757		

Iz izračunatog F jasno se vidi da su razlike između vrsta planktona vrlo značajne. Za testiranje razlike između sredina izračunavamo:

$$R = 3{,}84\sqrt{\frac{0{,}0070}{12}} = 0{,}092\,.$$

Sve razlike između sredina logaritma iz tab. 9.35. su značajne, što, drugim rečima, znači da su i razlike između planktona značajne. Ako izvršimo antilogaritmovanje sredina logaritama pojedinih vrsta planktona, rezultati su $A = 634$, $B = 1.663$, $C = 30.200$, $D = 9.162$. Ove vrednosti predstavljaju geometrijske sredine datih vrsta planktona.

9.14. Test aditivnosti

Aditivnost je jedan od preduslova za primenu analize varijanse. Ako postoje eksperimentalni rezultati koji ne ispunjavaju ovaj preduslov onda, zavisno od karaktera podataka, mogu da se vrše različite transformacije. Ukoliko ova pretpostavka nije ispunjena, matematički model je:

$$X_{\mathrm{ij}} = \mu + \alpha_{\mathrm{i}} + \beta_{\mathrm{j}} + (\alpha\beta)_{\mathrm{ij}} + \varepsilon_{\mathrm{ij}}. \tag{9.32}$$

Nova komponenta modela $(\alpha\beta)_{\mathrm{ij}}$, rezultat *interakcije*, uključena je u pogrešku analize varijanse tako da se ova više ne može upotrebiti za upoređenje tretmana.

Izveden je *test neaditivnosti* (Tukey, 1949 b). Postupak se ogleda u tome da se iz sume kvadrata pogreške izdvoji suma kvadrata s jednim stepenom slobode koja je značajna ako nema aditivnosti. Ova suma kvadrata sa jednim stepenom slobode se dobija prema obrascu.

$$\text{Neaditivnost} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b} X_{ij}(\bar{X}_{0j} - \bar{X}_{00})(\bar{X}_{i0} - \bar{X}_{00}\right]^2}{\left[\sum_{j=1}^{b}(\bar{X}_{0j} - \bar{X}_{00})^2\right]\left[\sum_{i=1}^{t}(\bar{X}_{i0} - \bar{X}_{00})^2\right]}\,. \tag{9.33}$$

Za ilustraciju praktičnog izračunavanja ove sume kvadrata uzećemo primer o uticaju raznih vrsta herbicida na korove u šećernoj repi iz tab. 9.28. i prikazati ga u tab. 9.37.

TAB. 9.37. Izračunaanje sume kvadrata za test aditivnosti
(podaci iz tab. 9.28)

Blokovi	Tretmani A	B	C	D	E	F	X_{oj}	$\bar{X}_{oj}$	$(\bar{X}_{oj} - \bar{X}_{00}) = d_j$	d_j^2	$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{b} X_{ij} d_i = p_j$
1	520	268	162	120	142	35	1.247	207,83	3,03	9,18	141.859,40
2	530	270	164	121	149	30	1.264	210,67	5,87	34,46	145.271,40
3	530	280	152	126	140	35	1.263	210,50	5,70	32,49	145.773,80
4	490	269	148	111	141	24	1.183	197,17	−7,63	58,22	136.334,00
5	457	278	158	120	149	25	1.187	197,83	−6,97	48,58	125.121,40
X_{io}	2.527	1.365	784	598	721	149	6.144			$\sum d_j^2 = 182,93$	
$\bar{X}_{i0}$	505,40	273,00	156,80	119,60	144,20	29,80	$\bar{X}_{00} = 204,80$				
$(\bar{X}_{i0} - \bar{X}_{00}) = d_i$	300,60	68,20	−48,00	−85,20	−60,60	−175,00					
d_i^2	90.360,36	4.651,24	2.304,00	7.259,04	3.672,36	30.625,00	$\sum d_i^2 = 138.872,00$				

$p_1 = (520)(300{,}60) + (268)(68{,}20) + ... + (35)(-175{,}00) = 141.859{,}40,$
$p_2 = (530)(300{,}60) + (270)(68{,}20) + ... + (30)(-175{,}00) = 145{,}271{,}40,$

.

.

.

$p_5 = (457)(300{,}60) + (278)(68{,}20) + ... + (25)(-175{,}00) = 125{,}121{,}40,$

$$p = \sum d_j p_j = (3{,}03)(141.859{,}40) + (5{,}87)(145.271{,}40) + ... + (-6{,}97)(125.121{,}40) =$$
$$= 201.163{,}18.$$

$$\text{Suma kvadrata za neaditivnost} = \frac{\left[\sum\sum X_{ij}(\bar{X}_{0j} - \bar{X}_{00})(\bar{X}_{i0} - \bar{X}_{00})\right]^2}{\left[\sum (\bar{X}_{0j} - \bar{X}_{00})^2\right]\left[\sum (\bar{X}_{i0} - \bar{X}_{00})^2\right]} =$$

$$= \frac{p}{\left(\sum d_j^2\right)\left(\sum d_i^2\right)} = \frac{(201.163{,}18)^2}{182{,}93 \cdot 138.872{,}00} = 1.592{,}93\,.$$

TAB. 9.38. Analiza varijanse podataka iz tab. 9.37.

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata	F
Blokovi	4	1.097,47		
Tretmani	5	694.360,00		
Neaditivnost	1	1.592,93	1.592,93	15,73
Ostatak	19	1.924,40	101,28	
Ukupno	29	698.974,80		

Ostatak u analizi varijanse za testiranje aditivnosti dobija se iz razlike sume kvadrata pogeške i sume kvadrata za neaditivnost.

Izračunato $F = 15{,}73$ je značajno jer je kritična vrednost u tabelama $F_{(0{,}05\,;\,1\,i\,19)} = 4{,}38$. Praktičan zaključak je da su podaci iz tab. 9.37. neaditivni i analiza varijanse ne bi mogla da se primeni pa je potrebno izvršiti transformaciju. Primenili smo $\sqrt{X}$ transformaciju i dobili podatke u tab. 9.29. na osnovu kojih su izračunate sume kvadrata za analizu varijanse. Kod tako datih podataka izračunato F kod testiranja aditivnosti iznosi 0,38. Ova vrednost nije značajna, te se hipoteza o aditivnosti prihvata. Drugim rečima, bilo je opravdano primeniti transformaciju.

9.15. Latinski kvadrat

Raspored tretmana prema slučajnom blok–sistemu, videli smo, omogućuje veću preciznost ogleda. Ali, ako u rasporedu tretmana broj kolona odgovara broju redova, a u svakoj koloni i redu postoji samo jedno ponavljanje svakog tretmana, dobija se plan ogleda poznat pod imenom latinski kvadrat. Ovakav plan omogućuje da se izdvoji kao posebna komponenta jedna sistematska varijacija više. Analiza varijanse sada ima redove, kolone i tretmane kao sistematske i pogrešku kao slučajnu varijaciju. Na taj se način pruža još veća mogućnost za smanjenje pogreške a samim tim i za povećanje preciznosti ogleda.

Latinski kvadrat može korisno da se primeni u mnogim oblastima naučno istraživačkog rada. Na primer, ako je zemljište na kome se izvodi ogled, nejednake plodnosti u dva pravca, i to recimo, plodnost opada u pravcu sever–jug i u pravcu istok–zapad, tada će se postaviti ogled po planu latinskog kvadrata, jer on omogućuje kontrolu heterogenosti tla u oba pravca. Ako se, recimo, na takvom zemljištu ispituje 5 sorti sa 5 ponavljanja, dakle ukupno 25 parcela, trebalo bi da se postavi 5 blokova u pravcu sever–jug i 5 u pravcu istok–zapad koji se u analizi varijanse nazivaju kolone i redovi. Pored pomenutog uslova za postavljanje latinskog kvadrata, tj. da je u svakom redu, odnosno koloni zastupljen samo jedan tretman, neophodan je i slučajan raspored tretmana u okviru svakog reda i kolone.

Raspored po latinskom kvadratu je ponekad koristan čak i kada su parcele položene u jednoj *kontinuiranoj liniji*. U tom slučaju redovi se mogu uzeti kao blokovi poređani jedan pored drugog, dok se za kolone uzima redosled tretmana u svakom bloku. To je naročito korisno ako se iz prethodnog iskustva zna da uporedo sa pravcem razmeštaja parcela dolazi do izražaja i heterogenost zemljišta ili neki drugi sistematski uticaj. Za ilustraciju, tretmani A, B, C, D i E dati su u vidu uobičajenog latinskog kvadrata primenjivanog kod poljskih ogleda i u vidu jedne kontinuirane linije.

D	A	E	B	C
E	B	C	D	A
A	D	B	C	E
C	E	D	A	B
B	C	A	E	D

DAEBC EBCDA ADBCE CEDAB BCAED

U drugim vrstama ogleda gde se primenjuje latinski kvadrat redovi i kolone odgovaraju raznim izvorima sistematskih varijacija. Tako, kod jednog ogleda sa ishranom životinja kolone mogu da odgovaraju starosti a redovi rasi, ili pak početnoj težini. Osim toga, latinski kvadrat može da se upotrebi i u takvim ogledima gde je ista eksperimentalna jedinica upotrebljena više puta. Ispituje se, recimo, prinos mleka grupa od po tri krave sa načinima ishrane A, B, C. Prve dve nedelje jedna krava je dobijala obrok A, druga B i treća C. Druge dve nedelje prva krava dobija obrok C, druga A a treća B itd. Na kraju svakog perioda od dve nedelje ispituje se prinos mleka. Pored varijacije između tretmana, dva posebna izvora sistematskih varijacija se otklanjaju ovakvim planom, i to između životinja i između vremenskih perioda.

Glavna prepreka široj upotrebi latinskog kvadrata je u tome što broju tretmana treba da odgovara broj ponavljanja. Ako je broj tretmana veliki, tada tako veliki broj ponavljanja nema praktičnog značaja i zato se latinski kvadrat veći od 12 × 12 retko upotrebljava. Najčešće se primenjuju latinski kvadrati od 5 x 5 do 8 x 8.

Treba napomenuti da veliki latinski kvadrati obično dovode i do veće eksperimentalne pogreške po jedinici, pa je i to jedan od razloga da se njihova upotreba ne preporučuje. S druge strane, mali latinski kvadrat takođe nije podesan zbog malog broja stepeni slobode za pogrešku. Tako, kod 2 × 2 kvadrata ne ostaje ni jedan stepen slobode za pogrešku; kod 3 × 3 kvadrata ostaju 2 stepena slobode, kod 4 ×4 kvadrata 6 stepena slobode itd. Upotreba 3 × 3 i 4 × 4 latinskog kvadrata, umesto slučajnog blok–sistema, može da bude opravdana samo u slučajevima kada to dovodi do znatnog smanjenja eksperimentalne pogreške. Latinski kvadrat 2 × 2 ne dolazi u obzir za praktičan rad. Treba napomenuti da u jedan ogled može biti uključeno više latinskih kvadrata.

Matematički model I za latinski kvadrat je:

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}, \tag{9.34}$$

gde je $i = 1,...,n; j = 1,...,n; k = 1,...,n$; ε_{ijk}: $N(0,\sigma^2)$ i gde α_i, β_j, γ_k i ε_{ijk} označavaju dejstvo redova, kolona, tretmana i pogreške na eksperimentalnu jedinicu. S obzirom da je reč o modelu I, imamo:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k = 0\,. \tag{9.35}$$

9.16. Statistička analiza latinskog kvadrata

Izračunavanje suma kvadrata za analizu varijanse latinskog kvadrata slično je izračunavanju suma kvadrata kod slučajnog blok–sistema, samo što latinski kvadrat sadrži jedan izvor varijacije više. Kao što se iz modela vidi, pored fiksnog μ svojstvenog eksperimentalnoj jedinici i koje, kao takvo, nema uticaja na sume kvadrata, pojavljuju se efekti α_i, β_j, γ_k i ε_{ijk} čije sume kvadrata predstavljaju sastavni deo totalne varijacije.

Izračunavanja za analizu varijanse su sledeća:

Suma kvadrata totala:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (X_{ijk} - \bar{X}_{000})^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ijk}^2 - C\,, \tag{9.36}$$

gde je $C = \dfrac{X_{000}^2}{n^2}$; $\bar{X}_{000}$ je totalna sredina a X_{000} ukupna vrednost svih jedinica.

Suma kvadrata redova:

$$Q_R = n\sum_{i=1}^{n} (\bar{X}_{i00} - \bar{X}_{000})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{i00}^2}{n} - C\,, \tag{9.37}$$

gde su $\bar{X}_{i00}$ i X_{i00} sredina i ukupna vrednost i–tog reda.

Suma kvadrata kolona:

$$Q_K = n\sum_{j=1}^{n}(\bar{X}_{0j0} - \bar{X}_{000})^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_{0j0}^2}{n} - C, \tag{9.38}$$

gde su $\bar{X}_{0j0}$ i X_{0j0} sredina i ukupna vrednost $j-$te kolone.

Suma kvadrata tretmana:

$$Q_T = n\sum_{k=1}^{n}(\bar{X}_{00k} - \bar{X}_{000})^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_{00k}^2}{n} - C, \tag{9.39}$$

gde su $\bar{X}_{00k}$ i X_{00k} sredina i ukupna vrednost $k-$tog tretmana.

Suma kvadrata pogreške:

$$Q_P = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_{ijk} - \bar{X}_{i00} - \bar{X}_{0j0} - \bar{X}_{00k} + 2\bar{X}_{000})^2 = Q - Q_R - Q_K - Q_T \cdot \tag{9.40}$$

TAB. 9.39. Analiza varijanse latinskog kvadrata u opštem slučaju

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata	Očekivana sredina kvadrata
Redovi	$n-1$	Q_R	$Q_R/(n-1)$	$\sigma^2 + \frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2$
Kolone	$n-1$	Q_K	$Q_K/(n-1)$	$\sigma^2 + \frac{n}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2$
Tretmani	$n-1$	Q_T	$Q_T/(n-1)$	$\sigma^2 + \frac{n}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^2$ ili $n\sigma_k^2$
Pogreška	$(n-1)(n-2)$	Q_P	$Q_P/[(n-1)(n-2)]$	σ^2
Ukupno	n^2-1	Q		

U daljem postupku testiranje homogenosti ogleda putem $F-$testa, slično razlici između sredina tretmana, izvodi se na isti način kao i kod potpuno slučajnog rasporeda ili slučajnog blok–sistema.

Za ilustraciju uzećemo primer ogleda sa đubrivom na livadama (Kmetijski institut Slovenije, Ljubljana) koji je postavljen kao latinski kvadrat 4 × 4. Cilj ogleda je bio upoređenje dejstva različitih fosfornih đubriva na osnovu jednake količine P_2O_5. Reč je o četiri sledeća tretmana A = superfosfat 17%; B = superfosfat + azot u vidu nitrofoza; C = superfosfat + azot + kalijum u vidu nitrofoskala; D = kontrola, neđubreno. Rezultati ogleda (5 × 5) = 25 m^2/kg prikazani su u tab.9.40. a analiza varijanse u tab. 9.41.

TAB. 9.40. Rezultati ogleda sa đubrivom na livadama u latinskom kvadratu 4 × 4

Redovi	Kolone 1	Kolone 2	Kolone 3	Kolone 4	Ukupno
1	17,00 (A)	15,00 (B)	19,50 (D)	26,00 (C)	77,50
2	14,30 (D)	21,20 (A)	22,40 (C)	17,50 (B)	75,40
3	25,00 (C)	13,20 (D)	16,70 (B)	23,30 (A)	78,20
4	13,80 (B)	26,00 (C)	24,00 (A)	17,40 (D)	81,20
Ukupno	70,10	75,40	82,60	84,20	312,30

	Tretmani A	Tretmani B	Tretmani C	Tretmani D
	17,00	15,00	26,00	19,50
	21,20	17,50	22,40	14,30
	23,30	16,70	25,00	13,20
	24,00	13,80	26,00	17,40
Ukupno	85,50	63,00	99,40	64,40
$\bar{X}$	21,37	15,75	24,85	16,10

Korektivni faktor:

$$C = \frac{(312{,}30)^2}{16} = 6.095{,}70 .$$

Suma kvadrata totala = $(17{,}00)^2 + (15{,}00)^2 + ... + (17{,}40)^2 - 6.095{,}70 = 302{,}71$.

$$\text{Suma kvadrata kolona} = \frac{(70{,}10)^2 + (75{,}40)^2 + (82{,}60)^2 + (84{,}20)^2}{4} - 6.095{,}70 = 32{,}19.$$

$$\text{Suma kvadrata redova} = \frac{(77{,}50)^2 + (75{,}40)^2 + (78{,}20)^2 + (81{,}20)^2}{4} - 6.095{,}70 = 4{,}32.$$

$$\text{Suma kvadr. tretmana} = \frac{(85{,}5)^2 + (63{,}00)^2 + (99{,}40)^2 + (64{,}40)^2}{4} - 6.095{,}70 = 231{,}04.$$

Suma kvadrata pogreške = 302,71 − 32,19 − 4,32 − 231,04 = 35,16.

TAB. 9.41. Analiza varijanse latinskog kvadrata 4 × 4 u ogledu sa đubrivom

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata	Očekivana sredina kvadrata
Redovi	3	4,32	1,440	$\sigma^2 + \frac{4}{3}\sum_{i=1}^{4} \alpha_i^2$
Kolone	3	32,19	10,730	$\sigma^2 + \frac{4}{3}\sum_{j=1}^{4} \beta_j^2$
Tretmani	3	231,04	77,013	$\sigma^2 + \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{4} \gamma_k^2$
Pogreška	6	35,16	5,860	σ^2
Ukupno	15	302,71		

9.17. Slučajan raspored kod latinskog kvadrata

Latinski kvadrat se dobija kada se na *slučajan način* izabere jedna od mogućih kombinacija kvadrata odgovarajuće veličine. *Broj kombinacija* latinskog kvadrata naglo se povećava sa porastom broja tretmana. Tako imamo da:

latinski kvadrat 2 × 2 ima 2 moguće kombinacije,

latinski kvadrat 3 × 3 ima 12 mogućih kombinacija,

latinski kvadrat 4 × 4 ima 576 mogućih kombinacija,

latinski kvadrat 5 × 5 ima 161.280 mogućih kombinacija itd.

Latinske kvadrate veličine od 3 × 3 do 8 × 8 pruža tab. 9.42. (Potpuniji pregled latinskih kvadrata daju: Fisher, Yates, 1957). Veći kvadrati od 8 × 8 mogu da se formiraju uključivanjem novih slova po azbučnom redu sa porastom broja tretmana. Tako latinski kvadrat 9 × 9 može da se napiše počinjući slovima A, B, C,..., G, H, I za prvi red; B, C, D,..., H, I, A za drugi, red; C, D, E,..., I, A, B za treći red itd. Iz tab. 9.42. vidi se da su prvi red i prva kolona latinskih kvadrata dati prema azbučnom redu.

Da bi se izabrao jedan raspored tretmana za neki ogled potrebno je slučajno izabrati jedan mogući kvadrat. Počinje se odgovarajućim kvadratom u tab. 9.42. i postupak se sastoji u sledećem:

a) Za 3 × 3 na slučajan način se kombinuju redovi i kolone kvadrata iz tab. 9.42.

b) Za kvadrat 4 × 4 izabere se na slučajan način jedan od četiri kvadrata iz tab. 9.42. a potom se slučajno kombinuju redovi i kolone.

c) Za 5 × 5 i veće kvadrate slučajno se kombinuju, nezavisno jedni od drugih, redovi, kolone i tretmani.

TAB. 9.42. Latinski kvadrati

3 × 3

A	B	C
B	C	A
C	A	B

4 × 4

A	B	C	D		A	B	C	D		A	B	C	D		A	B	C	D
B	A	D	C		B	C	D	A		B	D	A	C		B	A	D	C
C	D	B	A		C	D	A	B		C	A	D	B		C	D	A	B
D	C	A	B		D	A	B	C		D	C	B	A		D	C	B	A

5 × 5

A	B	C	D	E
B	A	E	C	D
C	D	A	E	B
D	E	B	A	C
E	C	D	B	A

6 × 6

A	B	C	D	E	F
B	C	F	A	D	E
C	F	B	E	A	D
D	E	A	B	F	C
E	A	D	F	C	B
F	D	E	C	B	A

7 × 7

A	B	C	D	E	F	G
B	C	D	E	F	G	A
C	D	E	F	G	A	B
D	E	F	G	A	B	C
E	F	G	A	B	C	D
F	G	A	B	C	D	E
G	A	B	C	D	E	F

8 × 8

A	B	C	D	E	F	G	H
A	C	D	E	F	G	H	A
C	D	E	F	G	H	A	B
D	E	F	G	H	A	B	C
E	F	G	H	A	B	C	D
F	G	H	A	B	C	D	E
G	H	A	B	C	D	E	F
H	A	B	C	D	E	F	G

Kod kvadrata 3 × 3 i 4 × 4 ovakvim postupkom se izabere jedan od svih mogućih kvadrata. Kod 5 × 5 i većih kvadrata taj postupak ne osigurava slučajan izbor iz svih mogućih kvadrata, ali se smatra da on, i pored toga, obezbeđuje primenu principa slučajnosti koji zadovoljava i teorijske i praktične pretpostavke.

Kako se praktično vrši slučajan izbor objasnićemo na primeru jednog latinskog kvadrata 4 × 4. Za tu svrhu poslužićemo se tablicama slučajnih permutacija od 1 do 9 (tabela XXI). Pretpostavimo da su prve permutacije 3, 2, 4, 1; 3, 1, 4, 2; 1, 4, 2, 3, pošto su prethodno isključeni brojevi od 5 do 9. Prvi broj prve permutacije je 3 tako da ćemo početi sa trećim kvadratom iz tab. 9.42:

A	B	C	D
B	D	A	C
C	A	D	B
D	C	B	A

Dalje permutujemo redove prema drugoj permutaciji 3, 1, 4, 2, što znači da ćemo na prvo mesto staviti treći red prednjeg kvadrata, na drugo mesto prvi red itd. Na taj način dobijamo sledeći kvadrat:

3	C	A	D	B
1	A	B	C	D
4	D	C	B	A
2	B	D	A	C

Na kraju se permutuju kolone prema trećoj permutaciji 1, 4, 2, 3. Na prvo mesto stavljamo prvu kolonu ovog novog kvadrata, na drugo mesto četvrtu itd.

1	4	2	3
C	B	A	D
A	D	B	C
D	A	C	B
B	C	D	A

Ako je u pitanju veći kvadrat, recimo 6 × 6, tada su potrebne slučajne permutacije brojeva od 1 do 6. Prva permutacija se upotrebljava da se permutuju redovi kvadrata 6 × 6 iz tab. 9.42. Druga permutacije za permutovanje kolona na način kao kod kvadrata 4 × 4. Najzad, treća permutacija se upotrebljava za permutovanje kolona tretmana A, B,..., F, gde je 1 tretman A, 2 tretman B, 3 tretman C itd.

Ako se ogled sastoji od više latinskih kvadrata, izbor svakog od njih vrši se nezavisno i slučajno.

9.18. Izračunavanje vrednosti izgubljene parcele kod latinskog kvadrata

Za izračunavanje vrednosti jedne izgubljene parcele kod latinskog kvadrata primenjuje se sledeća formula:

$$X = \frac{t(R + K + T) - 2S}{(t-1)(t-2)}, \tag{9.41}$$

gde je X–vrednost izgubljene parcele.

R, K i T su sume poznatih prinosa redova, kolona i tretmana, gde je izgubljena parcela,

t–broj tretmana,

S–ukupan prinos svih poznatih parcela.

Korektura za pristrasnost koja se oduzima od sume kvadrata tretmana izračunava se prema sledećoj formuli:

$$\text{Korektura za pristrasnost} = \frac{[S - K - R - (t-1)T]^2}{[(t-1)(t-2)]^2}. \tag{9.42}$$

Kod latinskog kvadrata, kao i kod slučajnog blok–sistema, ukoliko je *jedna parcela izgubljena ukupan broj stepeni slobode i broj stepeni slobode za pogrešku smanjuje se za jedan.*

Standardna greška razlike za upoređivanje sredine sa jednom izgubljenom parcelom i sredine gde su podaci potpuni izračunava se prema sledećoj formuli:

$$s_{(\bar{X}_i - \bar{X}_j)} = \sqrt{s^2\left[\frac{2}{t} + \frac{1}{(t-1)(t-2)}\right]} \tag{9.43}$$

Za ilustraciju pretpostavimo da je u primeru u tab. 9.40. parcela u prvom redu i drugoj koloni sa vrednošću od 15,00 izgubljena. Tada je $R = 77{,}50 - 15{,}00 = 62{,}50$; $K = 75{,}40 - 15{,}00 = 60{,}40$; $T = 63{,}00 - 15{,}00 = 48{,}00$; $S = 312{,}30 - 15{,}00 = 297{,}30$. Vrednost izgubljene parcele je:

$$X = \frac{4(62{,}50 + 60{,}40 + 48{,}00) - 2 \cdot 297{,}30}{(4-1)(4-2)} = 14{,}8 .$$

$$\text{Korektura za pristrasnost} = \frac{[\,297{,}30 - 60{,}40 - 62{,}5 - (4-1)48{,}00]^2}{[\,(4-1)(4-2)]^2} = 25{,}671 .$$

Nakon pronalaženja vrednosti za izgubljenu parcelu pristupa se izračunavanju suma kvadrata za analizu varijanse prikazanu u tab. 9.43.

TAB. 9.43. Analiza varijanse u slučaju gubitka jedne parcele kod ogleda po tab. 9.40.

Izvori varijacije	Suma kvadrata	Stepeni slobode	Sredina kvadrata
Redovi	4,38	3	1,46
Kolone	32,46	3	10,82
Tretmani	232,55 – 15,67 = 206,88	3	68,96
Pogreška	35,15	5	7,03

Standardna greška razlike za upoređenje tretmana B sa nekim drugim tretmanom je:

$$s_{(\bar{X}_i - \bar{X}_j)} = \sqrt{7{,}03\left[\frac{2}{4} + \frac{1}{(4-1)(4-2)}\right]} = 2{,}17 .$$

Kada su dve ili više parcela izgubljene, može da se primeni sledeći aproksimativan postupak.

Imamo, recimo, *dve izgubljene parcele* i označimo ih sa X_a i X_b. Potrebno je prvo izračunati vrednost izgubljene parcele X_a. Za tu svrhu privremeno može da se interpoliše za izgubljenu parcelu X_b totalna sredina celog ogleda izračunata na bazi vrednosti poznatih parcela. Za izračunavanje vrednosti izgubljene parcele X_a primenjuje se formula za jednu izgubljenu parcelu latinskog kvadrata. Tako izračunatu vrednost X_a koristimo da dođemo do vrednosti izgubljene parcele X_b. Po završetku ove prve aproksimacije, pristupa se, na osnovu izračunatih podataka, novoj aproksimaciji za X_a i X_b. Može se pristupiti i daljim aproksimacijama. Međutim, smatra se da tačan rezultat daju i dve aproksimacije. U takvim slučajevima broj stepeni slobode za pogrešku, kao i ukupan broj stepeni slobode, smanjuje se za broj izgubljenih parcela.

Pretpostavimo da je u primeru datom u tab. 9.40. došlo do gubitka parcele u prvom redu i drugoj koloni (15,00) i parcele u trećem redu i četvrtoj koloni (23,30). Rezultati ogleda iz tab. 9.40. sa 2 izgubljene parcele dati su u tab. 9.44.

TAB. 9.44. Ogled sa đubrenjem livada u latinskom kvadratu 4 × 4 sa dve izgubljene parcele

Kolone	Redovi 1	2	3	4	Ukupno
1	17,00 (A)	*a* (B)	19,50 (D)	26,00 (C)	62,50
2	14,30 (D)	21,20 (A)	22,40 (C)	17,50 (B)	75,40
3	25,00 (C)	13,20 (D)	16,70 (B)	*b* (A)	54,90
4	13,80 (B)	26,00 (C)	24,00 (A)	17,40 (D)	81,20
Ukupno	70,10	60,40	82,60	60,90	274,00

Izračunate vrednosti su: $X_a = 18{,}59$, $X_b = 24{,}23$. Za početnu vrednost X_b uzeta je opšta sredina poznatih parcela, $\frac{274}{14} = 19{,}57$. Da bi se izvršila korektura za pristrasnost u sumi kvadrata tretmana prethodno se mora izvesti nekoliko operacija. Prvo, iz analize varijanse latinskog kvadrata sa interpolisanim izgubljenim vrednostima uzimamo vrednost sume kvadrata pogreške. U našem primeru ona iznosi $Q_{PL} = 42{,}28$.

Drugo, tab. 9.44. uzima se kao slučajni blok–sistem i po formuli za izračunavanje izgubljene parcele za taj plan ogleda izračunavaju se izgubljene parcele koje iznose $X_a = 22{,}11$ i $X_b = 18{,}56$. Treće, iz analize varijanse ovako pretpostavljenog slučajnog blok–sistema sa interpolisanim vrednostima za izgubljene parcele uzima se suma kvadrata pogreške, $Q_{PB} = 229{,}32$. Korigovana suma kvadrata tretmana predstavlja razliku između $Q_{PB} - Q_{PL} = 229{,}32 - 42{,}28 = 187{,}04$. Nekorigovana suma kvadrata tretmana u latinskom kvadratu sa interpolisanim izgubljenim parcelama je 209,59, te razlika $209{,}59 - 187{,}04 = 22{,}55$ predstavlja korekturu za pristrasnost. Sada može da se postavi analiza varijanse (tab. 9.45).

TAB. 9.45. Analiza varijanse latinskog kvadrata 4 × 4 u ogledu sa đubrenjem livada u slučaju gubitka dve parcele

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata	Očekivana sredina kvadrata
Tretmani	3	187,04	62,34	$\sigma^2 + \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{4}\gamma_k^2$
Pogreška	4	42,28	10,57	σ^2

Standardne greške razlike za testiranje razlika između sredina sa izgubljenim parcelama izračunavaju se po jednom aproksimativnom metodu (Cochran, Cox, 1957). Uzmimo da na osnovu podataka jednog latinskog kvadrata želimo da testiramo sredine prinosa A i B kod kojih su bile izgubljene parcele. Svako ponavljanje tretmana A dobija 1 u slučaju da se data vrednost tretmana B nalazi i u odgovarajućoj koloni i u odgovarajućem redu. Ako odgovarajuća vrednost za B nedostaje bilo u koloni ili redu, tada A ima vrednost 2/3, a ukoliko vrednot B nedostaje i u datoj koloni i u datom redu, tada A ima za vrednost 1/3. Kada nedostaje A, vrednost ponavljanja je 0. Ovo može najlakše da se shvati iz jednog primera latinskog kvadrata 5 × 5 sa tri izgubljene parcele označene u zagradama u sledećem rasporedu:

D	(A)	E	(B)	C
E	B	C	D	(A)
A	D	B	C	E
C	E	D	A	B
B	C	A	E	D

Uzmimo prvo tretman A polazeći od prvog reda, a zatim tretman B tako da dobijemo:

$$A: \; 0 + 0 + 1 + 2/3 + 1 = 2\,2/3,$$

$$B: \; 0 + 1/3 + 1 + 2/3 + 1 = 3.$$

Standardna greška razlike između sredina izračunava se prema sledećoj formuli:

$$s_{(\bar{X}_i - \bar{X}_j)} = \sqrt{s^2\left(\frac{1}{2\,2/3} + \frac{1}{3}\right)} \,. \qquad (9.44)$$

Treba istaći da broj ponavljanja jednog tretmana za standardnu grešku može da se promeni od jednog do drugog upoređenja.

9.19. Efikasnost latinskog kvadrata

Primenom latinskog kvadrata *smanjuje se eksperimentalna pogreška* i time povećava preciznost ogleda. Povećanje *relativne efikasnosti* latinskog kvadrata u poređenju sa potpuno slučajnim rasporedom ili slučajnim blok–sistemom može da se utvrdi primenom odgovarajućih obrazaca za jedan i drugi slučaj. Tako se njegova relativna efikasnost u poređenju sa potpuno slučajnim rasporedom utvrđuje primenom sledećeg obrasca:

$$RE = \frac{Q_K/(n-1) + Q_R/(n-1) + (n-1)Q_P/[\,(n-1)(n-2)]}{(n+1)Q_P/[\,(n-1)(n-2)]} \,. \qquad (9.45)$$

Na osnovu podataka analize varijanse u tab. 9.41. relativna efikasnost iznosi:

$$RE = \frac{10{,}730 + 1{,}440 + (4-1)(5{,}860)}{(4+1)(5{,}860)} = 1{,}015 \text{ ili } 101{,}5\%.$$

U poređenju sa slučajnim blok–sistemom, kada su redovi uzeti za blokove, relativna efikasnost je:

$$RE = \frac{Q_R/(n-1) + (n-1)Q_P/[\,(n-1)(n-2)]}{nQ_P/[\,(n-1)(n-2)]} \,. \qquad (9.46)$$

Za iste podatke iz tab. 9.41, ako su redovi uzeti za blokove, relativna efikasnost je:

$$RE = \frac{1{,}440 + (4-1)(5{,}860)}{4 \cdot 5{,}860} = 0{,}811 \text{ ili } 81{,}1\%.$$

Ako su kolone uzete za blokove, relativna efikasnost je:

$$RE = \frac{10{,}730 + (4-1)(5{,}860)}{4 \cdot 5{,}860} = 1{,}208 \text{ ili } 120{,}8\%.$$

Postoji izvesna nelogičnost u relativnoj efikasnosti kad su redovi uzeti za blokove (0,811). Takav odnos, usled male varijanse za redove, dovodi do toga da je čak i efikasnost u poređenju sa potpuno slučajnim rasporedom relativno neznatna. (O efikasnosti potpuno slučajnog rasporeda u odnosu na slučajni blok–sistem i latinski kvadrat kod poljskih ogleda govori Yates, 1935).

9.20. Ogledi sa nepotpunim blokovima

Kod slučajnog blok–sistema i latinskog kvadrata svaki tretman se ponavlja u svakom bloku najmanje jedanput. Međutim, primena ovakvih planova je relativno ograničena jer suviše veliki broj tretmana može da se negativno odrazi na eksperimentalnu pogrešku. Radi toga, a često i iz tehničkih razloga, u blokove se ne uključuju svi tretmani, tako da je broj eksperimentalnih jedinica u blokovima manji od broja tretmana pa se ni testiranje razlika ne može zasnivati na sredinama tretmana. Ukoliko želimo da uticaj blokova eliminišemo, svaku sredinu tretmana treba korigovati za efekat blokova u kojima se dati tretman ne pojavljuje.

U ovakvim slučajevima tretmani se raporeduju prema *planovima nepotpunih blok–sistema*. Planiranja ovakvih ogleda treba da obezbede što veću preciznost ispitivanih tretmana i da preciznost kod upoređivanja pojedinačnih parova tretmana bude uvek ista. Ovakvi planovi se nazivaju *balansirani nepotpuni blokovi*. Sledeća tabela pruža nam primer plana jednostavno balansiranog nepotpunog blok–sistema, koji ima 5 tretmana u slučajnim blokovima od po 3 tretmana sa 6 ponavljanja:

Blokovi	Tretmani		
1	4	5	1
2	4	2	5
3	2	4	1
4	5	3	1
5	3	4	5
6	2	3	1
7	3	1	4
8	3	5	2
9	2	3	4
10	5	1	2

Ovaj raspored tretmana ima sledeće karakteristike:

1) svaki blok sadrži isti broj jedinica, odnosno tretmana;

2) svaki se tretman ponavlja podjednak broj puta;

3) ako uzmemo ma koja dva tretmana i izbrojimo koliko se puta javljaju zajedno u istom bloku, videćemo da je taj broj isti kao i za bilo koji drugi par tretmana. Na primer, tretmani 2 i 4 pojavljuju se zajedno 3 puta u blokovima 2, 3 i 9. Na osnovu ovakvog plana ukupan broj eksperimentalnih jedinica može da se dobije na dva načina: broj tretmana puta broj ponavljanja svakog tretmana, ili broj blokova puta broj jedinica u svakom bloku. U literaturi se mogu naći planovi balansiranih nepotpunih blokova koji ispunjavaju prethodne uslove i odnose se na veći ili manji broj tretmana i ponavljanja, odnosno blokova i jedinica u bloku.

Statistička analiza treba da omogući korigovanje sredine svakog tretmana za dejstvo blokova u kojima se ti tretmani ne javljaju.

Drukčiji plan se primenjuje u slučajevima kada ogled odgovara latinskom kvadratu. Tada se mogu pojaviti dve situacije: da je broj tretmana u jednom pravcu (bilo kolone ili redovi) manji od ukupnog broja tretmana, ili da je taj broj manji u oba pravca. Ukoliko je restrikcija izvršena samo u jednom pravcu, dobije se tzv. *Judenov* (Youden) *kvadrat ili nepotpuni latinski kvadrat*. Sledeća tabela daje primer takvog kvadrata pre slučajnog izbora za 7 tretmana:

Redovi	Kolone
1	1 2 4
2	2 3 5
3	3 4 6
4	4 5 7
5	5 6 1
6	6 7 2
7	7 1 3

Slučajan izbor se izvodi po pravilima koja se primenjuju za latinski kvadrat dok se sàm plan može konstruisati samo u ograničenom broju slučajeva.

Ako, međutim, ni u pogledu redova ni kolona ne može da se postigne da njihov broj odgovara broju tretmana, pristupa se drugačijem rasporedu. Najjednostavniji je plan kada je broj tretmana po redovima jednak broju tretmana po kolonama. Tada je ceo ogled sastavljen iz više kvadrata. Ukoliko je ispunjen uslov da se svaki tretman pojavljuje samo jedanput u svakom kvadratu i da se svaki par tretmana nalazi isti broj puta u istom redu ili koloni jednog kvadrata, takve planove nazivamo *balansirani latis – kvadrati*. Jednostavni primer može se postaviti rasporedom 9 tretmana u dva 3 × 3 kvadrata:

I kvadrat	II kvadrat
1 2 3	1 6 8
4 5 6	9 2 4
7 8 9	5 7 3

Iz ovoga se lako može uočiti da se, na primer, tretmani 7 i 8 pojavljuju samo jedanput, i to u trećem redu prvog kvadrata itd.

Ova objašnjenja odnosila su se na balansirane nepotpune blok – oglede. U praksi, međutim, naročito u slučajevima velikog broja tretmana, ti planovi često ne mogu da služe potrebama ispitivanja pa se primenjuju tzv. *delimično balansirani i nepotpuni blokovi*. Ovakvi planovi se upotrebljavaju i onda kada kad želimo da neka upoređenja budu preciznija od drugih. To bi se moglo postići tako da se u pojedinim blokovima jedan tretman pojavljuje jedanput ili više puta, dok to ne bi bio slučaj sa drugim tretmanima. Takav bi raspored mogao da se načini ako je primarno upoređenje jednog izabranog tretmana sa ostalim, a od manjeg značaja međusobno upoređivanje ostalih tretmana.

Specijalni slučaj delimično balansiranih nepotpunih blokova javlja se u situaciji kada je broj jedinica po jednom bloku veći od broja tretmana.

Za veliki broj tretmana upotrebljavaju se specijalni *latis – planovi*. Postoje delimično balansirani kvadrati, trostruki, četvorostruki, kubni i pravougli latis planovi. Svi ovi planovi se razlikuju po svojim karakteristikama. Osnovni im je cilj da se u jedan ogled omogući uključivanje velikog broja tretmana, a da se ne upotrebljavaju i suviše veliki blokovi. Ovakvi planovi imaju naročito praktičan značaj u selekciji bilja, gde su se prvo i razvili. Statistička analiza takvih ogleda je po pravilu dosta komplikovana. (Potpunije objašnjenje ogleda sa nepotpunim blokovima daju : Cox, 1958; Kempthorne, 1952).