11. ZDRUŽIVANJE, PLAN PODELJENIH PARCELA I DELIMIČNI FAKTORIJALNI OGLEDI

11.1. Princip združivanja

Kad se postavljaju faktorijalni ogledi često želimo da se u ispitivanje uključi veći broj faktora ili tretmana pojedinih faktora u nastojanju da se proširi osnova ispitivanja. Kao što se, međutim, zna kod faktorijalnih ogleda sa porastom broja kombinacija tretmana, ukoliko se ogled izvodi u slučajnom blok – sistemu, raste i veličina blokova. Posledica je veća varijabilnost jedinica unutar blokova koja dovodi do veće eksperimentalne pogreške i tako do manje preciznosti ogleda. Rešenje ovog problema je u *smanjenju veličine blokova* tako da njihov broj jedinica bude manji od ukupnog broja tretmana u ogledu. Ovo smanjenje blokova izvodi se uz žrtvovanje odgovora o izvesnim faktorijalnim efektima, obično interakcijama višeg reda, za koje se zna ili pretpostavlja da bitnije ne utiču na rezultate ogleda. Naime, iskustvo je pokazalo da je efekat interakcije višeg reda u poređenju sa glavnim efektom i interakcijama nižeg reda relativno mali i obično beznačajan. Ovaj princip, kojim se žrtvuju izvesni faktorijalni efekti da bi se povećala preciznost onih efekata od većeg interesa, poznat je pod imenom *združivanje* (confounding). Primenom združivanja uticaj onih efekata koji se žrtvuju uključuje se u *varijaciju blokova* i ne može iz nje da se izdvoji a *varijacija pogreške* se smanjuje usled manjih blokova.

Postoji *veliki broj planova* koji omogućuju združivanje u faktorijalnim ogledima (Cochran, Cox, 1957; Yates, 1958). Za ilustraciju poći ćemo od najprostijeg slučaja jednog 2^2 faktorijalnog ogleda gde postoje četiri kombinacije tretmana: (1), *a, b, ab*. U ranijem objašnjenju statističke analize ovakvog ogleda polazilo se od toga da svaki blok ima četiri tretmana. Uzmimo da su rezultati ogleda u jednom ponavljanju, odnosno bloku, bili sledeći: (1) = 6, $a = 9$, $b = 12$ i $ab = 10$.

Glavni efekti i interakcija su rezultat tri nezavisna upoređenja:

$$A = 1/2[\,-(1) + a - b + ab] = 1/2(-6 + 9 - 12 + 10 = 0{,}5, \qquad (11.1)$$

$$B = 1/2[\,-(1) - a + b + ab] = 1/2(-6 - 9 + 12 + 10) = 3{,}5\,, \qquad (11.2)$$

$$AB = 1/2[\,+(1) - a - b + ab] = 1/2(6 - 9 - 12 + 10) + -2{,}5\,. \qquad (11.3)$$

Uzmimo da, umesto jednog, imamo dva bloka, svaki sa po dve jedinice sa sledećim rasporedom tretmana:

Blok I		Blok II
	(1)		*a*
	ab		*b*

Pretpostavimo da blok I ima veću plodnost, što ima za rezultat povećanje prinosa za, recimo, 5. To će se odraziti i na rezultate ogleda i dobićemo da je u tom bloku (1) = 11, *ab* = 15, a u drugom bloku su prinosi nepromenjeni, tj. $a = 9$, $b = 12$. Glavni efekti i interakcija bi bili:

$$A' = 1/2(-11 + 9 - 12 + 15) = 0{,}5,$$

$$B' = 1/2(-11 - 9 + 12 + 15) = 3{,}5,$$

$$AB' = 1/2(11 - 9 - 12 + 15) = 2{,}5.$$

U poređenju sa rezultatima ogleda s jednim blokom, u ogledu sa dva bloka gde je kod prvog bloka veća plodnost za 5, dobili smo sledeću razliku u rezultatima:

$$A' = A,$$

$$B' = A,$$

$$AB' = AB + 5.$$

Praktično, proizlazi da podela po blokovima nije imala nikakvog uticaja na glavne efekte A i B, dok je interakcija AB povećana za 5 zato što je prinos bloka I veći za 5 od prinosa bloka II. Kaže se da je na taj način interakcija AB združena sa razlikom u plodnosti blokova i ne može da se izdvoji iz varijacije blokova, koja kao sistemska varijacija posebno figurira u analizi varijanse doprinoseći povećanju preciznosti ogleda.

Od *rasporeda tretmana* po blokovima zavisi koji će faktorijalni efekat biti združen. To mogu, na primer, da budu i glavni efekti A ili B:

	A združen	B združen
Blok I	(1) / *b*	(1) / *a*
Blok II	*a* / *ab*	*b* / *ab*

Imaćemo, dakle, združen jedan od faktorijalnih efekata, zavisno od toga koji će par tretmana biti u istom bloku. Ništa se u osnovi ne menja ako se ogled izvodi sa r ponavljanja, tako da ćemo, umesto 2, imati $2r$ blokova. Kod ponavljanja tretmana divizor za dobijanje efekta je $2r$ kao i kod faktorijalnog ogleda 2^2 koji nije združen.

Analiza varijanse 2^2 faktorijalnog ogleda kod koga je interakcija AB združena prikazana je u tab. 11.1.

TAB. 11.1. Analiza varijanse u opštem slučaju 2^2 faktorijalnog ogleda sa združenom interakcijom AB

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata
Blokovi	$2r-1$	Q_B
Tretmani	2	Q_T
A	1	Q_A
B	1	Q_B
Pogreška	$2r-2$	Q_P
Ukupno	$4r-1$	Q

Suma kvadrata između blokova sadrži varijacije koje proizlaze između potpunih ponavljanja sa $r-1$ stepeni slobode i varijacije između blokova jednog ponavljanja, s tim što je u tu sumu kvadrata uključena i interakcija AB.

Suma kvadrata efekata A i B kod analize varijanse na osnovu sredina individualnih upoređenja dobija se:

$$Q_A = r[A]^2, \tag{11.4}$$

$$Q_B = r[B]^2, \tag{11.5}$$

ili na osnovu totala efekta:

$$Q_A = \frac{[A]^2}{4r}, \tag{11.6}$$

$$Q_B = \frac{[B]^2}{4r}. \tag{11.7}$$

11.2. Združivanje u 2^3 faktorijalnom ogledu

Kod 2^3 faktorijalnog ogleda pojavljuje se 8 kombinacija tretmana sa 7 nezavisnih upoređenja, i to 3 glavna efekta A, B i C, tri interakcije prvog reda AB, AC i BC i jedna interakcija drugog reda ABC. Ako, umesto blokova od 8 tretmana, uzmemo blokove sa po 4 tretmana, odgovarajućim rasporedom tretmana po blokovima moguće je uvek združivanjem jednog faktorijalnog efekta doći do odgovora za ostalih 6 faktorijalnih efekata. Radi ilustracije uzećemo raspored tretmana u dva bloka kod koga je interakcija ABC združena i analizu varijanse takvog ogleda daćemo u tab. 11.2.

TAB. 11.2. Šema analize varijanse 2^3 faktorijalnog ogleda u slučajnom blok – sistemu sa združenim efektom ABC

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata
Blokovi	$2r - 1$	Q_B
Tretmani	6	Q_T
A	1	Q_A
B	1	Q_B
C	1	Q_C
AB	1	Q_{AB}
AC	1	Q_{AC}
BC	1	Q_{BC}
Pogreška	$6(r - 1)$	Q_P
Ukupno	$8r - 1$	Q

Faktorijalni efekti, a po potrebi i njihove sume kvadrata, dobijaju se na uobičajeni način, kako je to objašnjeno kod 2^3 faktorijalnog ogleda. Jedina je razlika što je interakcija ABC združena sa blokovima i odgovor na nju se ne može dobiti. Raspored blokova kod združene interakcije je sledeći:

Blok I	Blok II
(1)	a
ab	b
ac	c
bc	abc

Kao što znamo, total interakcije ABC u 2^3 ogledu je rezultat sledećeg upoređenja tretmana:

$$ABC = -(1) + a + b - ab + c - ac - bc + abc.$$

Ako pogledamo raspored tretmana u blokovima gde je interakcija ABC združena, uočićemo da se u bloku I nalaze svi tretmani koji prilikom dobijanja ovog efekta imaju znak $-$, a u bloku II oni tretmani koji imaju znak $+$.

Iz ovog proizlazi da je, ako želimo da izvršimo združivanje bilo kog efekta podelom na dva bloka, potrebno one tretmane koji kod dobijanja odgovarajućeg efekta imaju znak $+$ staviti u jedan blok, a one sa znakom $-$ u drugi. Tako ćemo lako rasporediti tretmane da bismo, recimo, združili glavni efekat od A:

Blok I; (1), b, c, bc,

Blok II; $a, . ab, ac, abc$.

U ovakvom rasporedu svi tretmani faktora a na prvom nivou su u bloku I, a tretmani tog faktora na drugom nivou su u bloku II. Glavni efekat od A mogao bi da se dobije jedino upoređenjem tretmana ova dva bloka, što je bez praktičnog značaja, jer bi se u tom upoređenju pojavljivao i uticaj bloka, pa je, prema tome, glavni efekat od A združen. Kod svih ostalih upoređenja uvek ćemo naći dva tretmana u jednom a dva u drugom bloku, te uticaj blokova na faktorijalne efekte neće doći do izražaja. Podela na blokove i uključivanje uvek istih tretmana u jedan blok a drugih tretmana u drugi ne znači da oni ne treba da su raspoređeni na slučajan način u okviru svakog bloka.

U sprovođenju združivanja u 2^3 faktorijalnom ogledu može se ići još i dalje tako da se jedno ponavljanje umesto dva bloka, uzmu četiri. U tom slučaju, zavisno od rasporeda tretmana u pojedinim blokovima, združuju se tri faktorijalna efekta. Za ilustraciju uzimamo takav raspored tretmana kod koga su efekti A, BC, i ABC združeni. Jasnije će nam biti ako se to prikaže u vidu šeme u tab. 11.3.

Jasno je da su kod ovakvog rasporeda tretmana u četiri bloka efekti A, BC, i ABC združeni, jer se u odgovoru na njih u dva bloka pojavljuju znaci + zajedno, a u druga dva znaci − . U odgovoru na efekte B, C, AC i AB u svakom bloku pojavljuju se znaci + i − zajedno. Prema tome, ti efekti nisu združeni. Ako želimo da združimo neka druga tri efekta u 2^3 ogledu sa 4 bloka u jednom ponavljanju, potrebno je staviti u jedan blok one tretmane koji u odgovoru imaju isti znak.

TAB. 11.3. Šema 2^3 faktorijalnog ogleda u 4 bloka sa združenim A, BC i ABC efektima

Tretmani	Faktorijalni efekti						
	B	C	AC	AB	A	BC	ABC
(1)	−	−	+	+	−	+	−
bc	+	+	−	−	−	+	−
ab	+	−	−	+	+	−	−
ac	−	+	+	−	+	−	−
a	−	−	−	−	+	+	+
abc	+	+	+	+	+	+	+
b	+	−	+	−	−	−	+
c	−	+	−	+	−	−	+

Tab 11.4. pruža rezultate jednog 2^3 faktorijalnog ogleda sa ispitivanjem dejstva herbicida na prinose zrna kukuruza kod koga je interakcija drugog reda združena (Institut za poljoprivredna istraživanja, Novi Sad). Faktori u ogledu su sledeći: prvi faktor dve vrste herbicida (h) – a) *AMNHO* – 2, 4 D (h_1) i b) *MCPA* (h_2); drugi faktor vreme primanja (v) – a) pre nicanja (v_1) i b) posle nicanja (v_2); treći faktor (k) – a) dve kopnje i dva prašenja (k_1) i b) proređivanje i dva prašenja (k_2).

TAB. 11.4. Rezultati 2^3 ogleda sa herbicidima (u *t/ha*)

	Ponavljanje							
	1	2	3	4	5	6	Ukupno	$\bar{X}$
Blok →	1	1	1	1	1	1		
$h_1v_1k_1$	6,9	7,2	6,9	6,9	6,9	6,9	41,7	7,0
$h_1v_2k_2$	6,1	6,0	5,9	6,2	6,1	6,0	36,3	6,0
$h_2v_1k_2$	6,4	6,5	6,7	6,2	6,8	6,6	39,2	6,5
$h_2v_2k_1$	6,1	6,0	5,8	6,2	5,7	5,9	35,7	6,0
Ukupno	25,5	25,7	25,3	25,5	25,5	25,4	152,9	
Blok →	2	2	2	2	2	2		
$h_1v_1k_2$	6,6	6,4	6,9	6,5	6,7	6,7	39,8	6,6
$h_1v_2k_1$	5,8	6,0	6,4	6,6	6,2	6,6	37,6	6,3
$h_2v_1k_1$	6,8	6,9	6,8	7,0	6,9	7,0	41,4	6,9
$h_2v_2k_2$	6,0	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	36,6	6,1
Ukupno	25,2	25,7	26,4	26,3	25,7	26,1	155,4	

Statistička analiza ovog ogleda kod koga je interakcija *HKV* združena sa sumom kvadrata blokova data je u tab. 11.5.

TAB. 11.5. Analiza varijanse ogleda sa herbicidima

Izvori varijacije	Stepeni slobode		Suma kvadrata		Sredina kvadrata	
Blokovi	11		0,4073		0,0370	
Između blokova		5		0,0985		0,0197
KHV		1		0,1302		0,1302
Unutar blokova		5		0,1786		0,0357
Tretmani	6		6,1896		1,0316	
K		1		0,4219		0,4219
V		1		5,2669		5,2669
KV		1		0,2852		0,2852
H		1		0,1302		0,1302
HK		1		0,0752		0,0752
HV		1		0,0102		0,0102
Pogreška	30		1,2679		0,0423	
Ukupno	47		7,8648			

Sume kvadrata pojedinih efekata rezultat su ortogonalnih upoređenja pojedinih tretmana i njihovo dobijanje je prikazano u tab. 11.6.

TAB. 11.6. Izračunavanje faktorijalnih efekata u 2^3 ogledu sa herbicidima

Tretmani	Ukupno	Efekti						
		K	*V*	*KV*	H	*HK*	*HV*	KHV
$h_1v_1k_1$	41,7	+	+	+	+	+	+	+
$h_1v_1k_2$	39,8	–	+	–	+	–	+	–
$h_1v_2k_1$	37,6	+	–	–	+	+	–	–
$h_1v_2k_2$	36,3	–	–	+	+	–	–	+
$h_2v_1k_1$	41,4	+	+	+	–	–	–	–
$h_2v_1k_2$	39,2	–	+	–	–	+	–	+
$h_2v_2k_1$	35,7	+	–	–	–	–	+	+
$h_2v_2k_2$	36,6	–	–	+	–	+	+	–
Totali efekta, C_i	308,3	4,5	15,9	3,7	2,5	1,9	–0,7	–2,5
Suma kvadrata efekta, $C_i^2/48$		0,4219	5,2669	0,2852	0,1302	0,0752	0,0102	0,1302

Jedna kontrola se može izvesti tako da se suma tretmana sa znakom plus u tab. 11.6. $h_1v_1k_1$ = 47,1 pomnoži sa brojem tretmana 8 i od tog proizvoda se oduzme ukupna vrednost celog ogleda, tj. 8 · 41,7 – 308,3 = 25,3. Ta vrednost je jednaka sumi totala efekata iz tab. 11.6.

Izračunata *F* su značajna za *K*, *V* i *KV* pošto je $F_{(o,o5\,;\,1\,i\,30)} = 4{,}17$.

Ako se upoređuju tretmani na način koji odgovara efektu združene interakcije *KHV*, potrebno je izvršiti *korekciju* totala ili sredina tretmana. Ta korektura se izvodi tako da se pola razlike između totala ili sredina grupe tretmana upoređenja *HKV* doda totalima, odnosno sredinama, a pola oduzme od grupe totala ili sredina. Ceo postupak za izvođenje korekture najbolje će se videti iz tab. 11.7, gde su sredine tretmana podeljene u dve grupe koje dovode do združivanja interakcije *KHV*.

TAB. 11.7. Izračunavanje korekture kada je interakcija *KHV* združena

Tretmani	Neispravljena sredina	Ispravljena sredina	Tretmani	Neispravljena sredina	Ispravljena sredina
$h_1v_1k_1$	6,95	6,90	$h_1v_1k_2$	6,63	6,68
$h_1v_2k_2$	6,05	6,00	$h_1v_2k_1$	6,27	6,32
$h_2v_1k_2$	6,53	6,48	$h_2v_1k_1$	6,90	6,95
$h_2v_2k_1$	5,95	5,90	$h_2v_2k_2$	6,10	6,15
Sredina grupe	6,370			6,475	
Razlika		0,105			
Ispravka	–0,053			+0,053	

Totalna sredina je ista bez obzira da li se izračunava na bazi ispravljenih ili neispravljenih sredina i iznosi 6,42.

Ova korektura se ne preporučuje kao opšte pravilo, pa je nepravilno da se primeni u slučajevima kad je združena interakcija stvarno značajna. A kako ona ne može da se izdvoji iz sume kvadrata blokova, to samo može da se pođe od pretpostavke da nije značajna. Istina, interakcije većeg reda najčešće nisu značajne i to je razlog da se kod primene združivanja one prve žrtvuju. Treba još napomenuti da korektura za upoređenje interakcija prvog reda ne treba da se vrši s obzirom da se po dva njihova tretmana istog znaka uvek nalaze u jednom, odnosno drugom bloku, što nema uticaja na rezultat.

11.3. Združivanje u 2^n faktorijalnim ogledima

Združivanje je od *posebnog značaja* kod faktorijalnih ogleda sa većim brojem kombinacija tretmana. Zato ćemo ovde izneti pravila za izvođenje združivanja u 2^n faktorijalnim ogledima.

Ako se jedno ponavljanje deli u dva bloka, može da se združi bilo koji faktorijalni efekat. Svaki od dva bloka ima 2^{n-1} tretmana. Ako se ide na četiri bloka u jednom ponavljanju, tako da u svakom bloku ima 2^{n-2} kombinacija, tada su združena tri efekta. Kod osam blokova u jednom ponavljanju ima 2^{n-3} kombinacija tretmana sa sedam združenih efekata. U opštem slučaju 2^k blokova sa 2^{n-k} kombinacija tretmana ima $2^k - 1$ združenih efekata. Ukoliko ima r ponavljanja, ukupan broj blokova je $r2^k$.

U analizi varijanse suma kvadrata blokova uključuje dejstvo združenih efekata. Broj stepeni slobode kod ove komponente varijacije je $r2^k - 1$ i sastoji se iz stepeni slobode koji otpadaju na celokupno ponavljanje $r - 1$ i stepeni slobode koji se odnose na upoređenja unutar blokova jednog ponavljanja $r(2^k - 1)$. Suma kvadrata tretmana deli se na sume kvadrata faktorijalnih efekata koji nisu združeni svaki sa po jednim stepenom slobode, ukupno $2^n - 2^k$ stepeni slobode. Ostatak je suma kvadrata pogreške koja se dobija iz razlike sume kvadrata totala i zbira ostalih varijacija, tj. varijacije tretmana i blokova. Broj stepeni slobode pogreške dobija se iz razlike ukupnog broja stepeni slobode i zbira stepeni slobode blokova i tretmana, a to je: $r(2^n - 1) - r(2^k - 1) - (2^n - 2^k) = (r - 1)(2^n - 2^k)$.

U slučajevima kada se ponavljanje deli na dva bloka, kao što smo već rekli, uvek je moguće združiti jedan efekat i obično se praktikuje da to bude interakcija najvećeg reda. Tom prilikom u jedan blok ulaze tretmani koji u formiranju ovog faktorijalnog efekta imaju znak + a u drugi blok oni tretmani koji imaju znak −.

Kombinacija 2^{n-2} tretmana u četiri bloka ima tri združena efekta. Blokove ćemo označiti sa I,II,III, i IV. Odlučujemo se da prvo združimo jedan faktorijalni efekat. U tom slučaju u dva bloka, recimo I i II, biće uključeni svi tretmani sa znakom + datog efekta, a u blokove III i IV tretmani sa znakom −. Prema tome, upoređenje (I + II − III − IV) je združeno. Drugo upoređenje (I − II − III + IV) sa znakovima + u I i IV, a sa znakovima – u II i III je takođe združeno. I najzad, treće moguće upoređenje je (I – II + III – IV) i uvek je određeno izborom prva dva upoređenja. To praktično znači da se po volji mogu izabrati za združivanje dva efekta, ali je tim izborom automatski određen treći. Treći združeni efekat je tzv. "*generalizovana interakcija*" i dobija se množenjem slova uključenih u dva efekta, uz izostavljanje onih slova koja se pojavljuju dva puta. Na primer, ako smo se odlučili da združimo interakcije *ABCD* i *ABC*, tada je generalizovana interacija *AABBCCD*. Isključenjem slova koja se ponavljaju dva puta dobijemo *D* kao treći efekat koji je združen.

Kad je reč o podeli jednog ponavljanja u 8 blokova, združuje se 7 efekata. Pravilo za izvođenje združivanja u ovakvim ogledima je sledeće: kod 2^n faktorijalnog ogleda podeljenog u 2^{n-k} jedinica ima 2^k blokova u jednom ponavljanju. Moguće je, po volji, uzeti bilo koji od k efekata pod uslovom da ni jedan od njih ne predstavlja generalizovanu interakciju ostalih. Preostalih $2^k - k - 1$ efekata, koji su njihove generalizovane interakcije, automatski su združeni. Tako kod 2^5 faktorijalnog ogleda sa 8 blokova u jednom ponavljanju i četiri tretmana u svakom bloku združuje se 7 efekata. Uzećemo tri nezavisna efekta, i to *A*, *BD*, i *CE*. Njihove generalizovane interakcije su automatski združene: *ABD*,*ACE*,*BDCE* i *ABDCE*. U praksi se javlja problem kako rasporediti tretmane u blokove. To može da se postigne na sledeći način: prvo se sve kombinacije za jedan nezavisni efekat podele na dva dela zavisno da li imaju znak + ili –. Tako kod 2^5 faktorijalnog ogleda 16 tretmana predstavljaće jednu grupu a 16 drugu. Za tu svrhu pogodno je imati proširenu šemu tab. 10.26. Za glavni efekat faktora *A* te grupe su sledeće:

Grupa I	Znakovi za *A*	Znakovi za BD	Grupa II	Znakovi za A	Znakovi za BD
a	+	+	(1)	–	+
ab	+	–	b	–	–
ac	+	+	c	–	+
abc	+	–	bc	–	–
ad	+	–	d	–	–
abd	+	+	bd	–	+
acd	+	–	cd	–	–
abcd	+	+	bcd	–	+
ae	+	+	e	–	+
abe	+	–	be	–	–
ace	+	+	ce	–	+
abce	+	–	bce	–	–
ade	+	–	de	–	–
abde	+	+	bde	–	+
acde	+	–	cde	–	–
abcde	+	+	bcde	–	+

Ovaj pregled sadrži istovremeno i znakove za drugi nezavisni efekat *BD*. U daljem postupku se svaka grupa od 16 tretmana deli na 2 grupe od po 8 tretmana, i to tako da u jednu grupu dolaze tretmani sa znakom + za interakciju *BD*, a u drugu tretmani sa znakom – za istu interakciju. Na taj način će se dobiti 4 grupe sa sledećim rasporedom tretmana:

Grupa I	Znakovi		Grupa II	Znakovi		Grupa III	Znakovi		Grupa IV	Znakovi	
	BD	CE		BD	CE		BD	CE		BD	CE
a	+	+	ab	–	+	(1)	+	+	b	–	+
ac	+	–	abc	–	–	c	+	–	bc	–	–
abd	+	+	ad	–	+	bd	+	+	d	–	+
abcd	+	–	acd	–	–	bcd	+	–	cd	–	–
ac	+	–	abc	–	–	e	+	–	be	–	–
ace	+	+	abce	–	+	ce	+	+	bce	–	+
abde	+	–	ade	–	–	bde	+	–	de	–	–
abcde	+	+	acde	–	+	bcde	+	+	cde	–	+

U tom pregledu uključeni su i znakovi za interakciju *CE*. Dalja podela svake grupe od 8 tretmana na dve grupe od po 4 tretmana vrši se prema znakovima za interakciju *CE*. Jednu grupu sačinjavaju tretmani sa znakom + za tu interakciju, a drugu sa znakom –. Tako se dobija sledećih 8 grupa ili blokova:

a	ac	ab	abc	(1)	c	b	bc
abd	abcd	ad	acd	bd	bcd	d	cd
ace	ae	abce	abe	ce	e	bce	be
abcde	abde	acde	ade	bcde	bde	cde	de

Kod planiranja faktorijalnih ogleda sa združivanjem izvesnih efekata treba voditi računa da to budu oni efekti koji *nisu* od velikog značaja u našim istraživanjima, ali istovremeno ne treba izgubiti iz vida i njihove generalizovane interakcije koje se automatski združuju. Ako se za interakciju ili interakcije pretpostavlja da su značajne, ne bi trebalo združiti ni njihove nezavisne efekte. Ova teškoća može da se ublaži delimičnim združivanjem.

11.4. Delimično združivanje

Združivanje omogućava povećanje preciznosti žrtvovanjem odgovora na jedan ili više faktorijalnih efekata. To je slučaj i kad se ogled izvodi u više ponavljanja jer je ista kombinacija tretmana u okviru pojedinih blokova. Ovde je reč o potpunom združivanju jednog ili više faktorijalnih efekata. Ako bi se, međutim, postupilo tako da se u jednom ponavljanju združi, recimo, jedan ili više faktorijalnih efekata, u drugom ponavaljanju jedan ili više nekih drugih faktorijalnih efekata itd., tada ne bismo imali ni jedan faktorijalni efekat potpuno združen. U takvim slučajevima radi se o *delimičnom združivanju*.

Za ilustraciju uzećemo jedan 2^3 faktorijalni ogled u tri ponavlajanja, svako ponavljanje je dato u dva bloka. Kod prvog ponavljanja združuje se interakcija *ABC*, kod drugog AB, kod trećeg AC, što je dato u sledećem pregledu:

	Ponavljanje I		Ponavljanje II		Ponavljanje III
Blok 1	*abc*, *a*, *b*, *c*	Blok 3	(1), *c*, *ab*, *abc*	Blok 5	(1), *b*, *ac*, *abc*
Blok 2	*ab*, *ac*, *bc*, (1)	Blok 4	*a*, *b*, *ac*, *bc*	Blok 6	*a*, *c*, *ab*, *bc*
	združen ABC		združen AB		združen AC

Kao što se vidi, nijedan faktorijalni efekat nije potpuno združen. Odnos 2/3 je relativna informacija o delimično združenim efektima u odnosu na one koji nisu združeni.

Ostali efekti A, B, C i BC potpuno su slobodni od združivanja i izračunavaju se na uobičajeni način. Uzimamo efekat od:

$$A = \frac{1}{12}[-(1) + a - b + ab - c + ac - bc + abc] .$$

Suma kvadrata je

$$Q_A = 6[A]^2 ,$$

ili na osnovu totala tretmana:

$$Q_A = \frac{[A]^2}{24} .$$

Kod delimično združenih efekata ABC, AB i AC sredine faktorijalnih efekata izračunate su na osnovu samo dva ponavljanja, i to interakcije ABC na osnovu ponavljanja II i III; AB na osnovu ponavljanja I i III i AC na osnovu ponavljanja I i II. Za sredine njihovih efekata koeficijent je, s obzirom na dva ponavljanja, 8 umesto 12. Tako je sredina efekta ABC:

$$ABC = \frac{1}{8}[-(1) + a + b - ab + c - ac - bc + abc] .$$

Za sumu kvadrata koeficijent je 4, odnosno 16, umesto 6 ili 24, kao što je slučaj kod efekata koji su potpuno slobodni od združivanja, Tako je: $Q_{ABC} = 4[ABC]^2$, ili

$Q_{ABC} = \frac{[ABC]^2}{16}$, zavisno od toga da li je u pitanju sredina efekta interakcije ABC ili njen total.

Analiza varijanse 2^3 ogleda sa delimičnim združivanjem efekata ABC, AB i AC u tri ponavljanja prikazana je u tab. 11.8.

TAB. 11.8. Analiza varijanse 2^3 ogleda u delimičnom združivanju

Izvori varijacije	Stepeni slobode		Suma kvadrata	
Blokovi	2		Q_B	
Tretmani	7		Q_T	
A		1		Q_A
B		1		Q_B
C		1		Q_C
AB'		1'		Q'_{AB}
AC'		1'		Q'_{AC}
BC		1		Q_{BC}
ABC'		1'		Q'_{ABC}
Pogreška	14		Q_P	
Ukupno	23		Q	

Znak ' nalazi se pored suma kvadrata onih efekata koji su samo delimično združeni.

Na isti način se može izvesti delimično združivanje i kod drugih faktorijalnih ogleda. Pažnju treba obratiti na *koeficijente* prilikom izračunavanja sredina združenih efekata i njihovih suma kvadrata.

Standardna greška aritmetičke sredine kod delimično združenih efekata je:

$$s_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{s_P^2}{2^{n-1}(r-k)}}, \tag{11.8}$$

gde je k broj ponavljanja u kojima je dotični efekat združen. Kad nema združivanja standardna greška je:

$$s_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{s_P^2}{2^{n-1}r}}. \tag{11.9}$$

Za ilustraciju uzećemo primer 2^3 ogleda sa ispitivanjem herbicida (tab.11.4). Pretpostavimo da je kod tog ogleda u I i II ponavljanju interakcija KH združena u III i IV interakcija HV i u V i VI interakcija KHV. Rezultati ogleda sa ovakvim delimičnim združivanjem dati su u tab. 11.9.

TAB. 11.9. Rezultati 2^3 faktorijalnog ogleda u delimičnom združivanju interakcija *KH, HV* i *KHV*

	Združivanje							
	HK		HV			KHV		
Ponavljanje →	I	II		III	IV		V	VI
Blok →	1	1		1	1		1	1
$h_1v_1k_1$	6,9	7,2	$h_1v_1k_1$	6,9	6,9	$h_1v_1k_1$	6,9	6,9
$h_1v_2k_1$	5,8	6,0	$h_1v_1k_2$	6,9	6,5	$h_1v_2k_2$	6,1	6,0
$h_2v_1k_2$	6,4	6,5	$h_2v_2k_1$	5,8	6,2	$h_2v_1k_2$	6,8	6,6
$h_2v_2k_2$	6,0	6,4	$h_2v_2k_2$	6,3	6,2	$h_2v_2k_1$	5,7	5,9
Ukupno	25,1	26,1		25,9	25,8		25,5	25,4
Blok →	2	2		2	2		2	2
$h_1v_1k_2$	6,6	6,4	$h_1v_2k_1$	6,4	6,6	$h_1v_1k_2$	6,7	6,7
$h_1v_2k_2$	6,1	6,0	$h_1v_2k_2$	5,9	6,2	$h_1v_2k_1$	6,2	6,6
$h_2v_1k_1$	6,8	6,9	$h_2v_1k_1$	6,8	7,0	$h_2v_1k_1$	6,9	7,0
$h_2v_2k_1$	6,1	6,0	$h_2v_1k_2$	6,7	6,2	$h_2v_2k_2$	5,9	5,8
Ukupno	25,6	25,3		25,8	26,0		25,7	26,1

Sume kvadrata onih efekata koji nisu združeni – *K, V, H* i *KV* – dobijaju se kao rezultat ortogonalnih upoređenja suma tretmana iz šest ponavljanja $(C_i)^2/48$. Sume kvadrata onih efekata koji su delimično združeni dobijaju se kao rezultat ortogonalnih upoređenja suma tretmana u ona četiri ponavljanja kod kojih odgovarajući efekat nije združen $(C_i)^2/32$. Podaci za izračunavanje suma kvadrata delimično združenih efekata dati su u tab. 11.10.

TAB. 11.10. Radna tabela za izračunavanje suma kvadrata delimično združenih efekata iz tab. 11.9.

Tretmani	Ukupno	Združivanje *HK*	Združivanje HV	Združivanje KHV
$h_1v_1k_1$	41,7	+27,6	+27,6	+27,9
$h_1v_1k_2$	39,8	−26,8	+26,8	−26,4
$h_1v_2k_1$	37,6	+25,8	−24,2	−25,5
$h_1v_2k_2$	36,3	−24,2	−24,2	+23,5
$h_2v_1k_1$	41,4	−27,7	−27,6	−27,5
$h_2v_1k_2$	39,2	+26,3	−27,2	+26,4
$h_2v_2k_1$	35,7	−23,6	+22,8	+24,0
$h_2v_2k_2$	36,6	+24,2	+24,1	−25,0
	308,3	206,2	204,8	205,6
Ukupno		102,1	103,5	102,7
		308,3	308,3	308,3

Računska kontrola ove tabele data je u poslednja tri reda. U redu "Ukupno" sabrani su totali tretmana bez obzira na predznak. U sledećem redu nalazi se suma tretmana u onim ponavljanjima gde je združen odgovarajući efekat. To je kod združivanja za HK suma I i II ponavljanja $50{,}7 + 51{,}4 = 102{,}1$ itd. Poslednji red odgovara ukupnoj sumi tretmana.

Sume kvadrata delimično združenih efekata su:

$$HK = \frac{(1{,}6)^2}{32} = 0{,}0800 \qquad HV = \frac{(-1{,}6)^2}{32} = 0{,}800$$

$$KHV = \frac{(-2{,}6)^2}{32} = 0{,}2112 .$$

Sume kvadrata ostalih efekata izračunavaju se na uobičajeni način. Analiza varijanse data je u tab. 11.11.

TAB. 11.11. Analiza varijanse 2^3 faktorijalnog ogleda sa delimičnim združivanjem efekata *HK*, *HV* i *KHV*

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata
Blokovi	11	0,0282	0,0026
K	1	0,4219	0,4219
V	1	5,2669	5,2669
KV	1	0,2852	0,2852
H	1	0,1302	0,1302
HK'	1'	0,0800'	0,0800'
HV'	1'	0,0800'	0,0800'
KHV'	1'	0,2112'	0,2112'
Pogreška	29	1,3612	0,0469
Ukupno	47	7,8648	

Efekti K i V su vrlo značajni, dok su interakcije KV i KHV značajne.

11.5. Plan podeljenih parcela

Kod postavljanja ogleda često se jedna parcela ili neka druga jedinica *deli* na izvestan broj manjih parcela ili potparcela da bi se u eksperiment uključio jedan faktor više. Ovo je naročito pogodno kad *priroda* jednog faktora zahteva veće eksperimentalne jedinice; za ispitivanje nekog drugog faktora jedinice mogu da budu i manje. Na primer, kod ogleda kojim želimo da ispitamo kako različita dubina oranja utiče na prinos različitih sorti, potrebno je da eksperimentalne jedinice tog faktora imaju relativno veće površine, dok drugi faktor sorte može da se ispituje i na manjim eksperimentalnim jedinicama. Tada su odgovarajuće dubine oranja glavne parcele, a svaka glavna parcela je podeljena još na dve ili više potparcela za svaku sortu. Takvi ogledi su postavljeni po planu podeljenih parcela (split–plot).

Za ilustraciju uzećemo ogled sa dva faktora postavljen po planu podeljenih parcela. Faktor ispitivanja na celoj parceli označen je sa a, a na podeljenim sa b. Različiti tretmani jednog i drugog faktora su a_i i b_i pa, recimo imamo tri tretmana faktora a i četiri tretmana faktora b. Šema takvog ogleda je sledeća:

	a_0				a_1				a_2			
Blok I	b_1	b_2	b_0	b_3	b_2	b_1	b_3	b_0	b_0	b_3	b_2	b_1

	a_2				a_0				a_1			
Blok II	b_1	b_0	b_3	b_2	b_1	b_3	b_2	b_0	b_3	b_0	b_1	b_2

itd.

Ovaj ogled mogao je da bude postavljen po planu slučajnog blok–sistema sa r blokova ili ponavljanja i 12 tretmana u svakom bloku. Analiza ovakvog ogleda izvršila bi se na način koji se primenjuje kod slučajnog blok–sistema. Priroda ogleda sa podeljenim parcelama, međutim, diktira kod analize drugačiji statistički postupak. Ovde se *analiza varijanse deli na dva dela. Prvi* deo omogućuje testiranje faktora a sa tri tretmana u običnim slučajnim blokovima u kojima su eksperimentalne jedinice cele parcele. Raspored stepeni slobode u ovom delu analize varijanse, u opštem slučaju, je sledeći:

Izvori varijacije	Stepeni slobode
Blokovi	$r - 1$
Efekat A	$a - 1$
Pogreška (a)	$(r - 1)(a - 1)$
Ukupno	$ra - 1$

U *drugom* delu analize varijanse sva upoređenja se vrše unutar glavnih parcela i raspored stepeni slobode je:

Izvori varijacije	Stepeni slobode
Efekat B	$b - 1$
Interakcija AB	$(a - 1)(b - 1)$
Pogreška (b)	$a(r - 1)(b - 1)$
Ukupno	$ra(b - 1)$

Ukupan broj stepeni slobode prvog i drugog dela analize varijanse, odnosno celog ogleda je $(ra - 1) + ra(b - 1) = N - 1$.

Kod analize ogleda sa podeljenim parcelama treba istaći da se obično efekat od B i interakcija AB ocenjuju znatno *preciznije* nego efekat od A. To je normalno kad se zna da je pogreška za A rezultat varijacija unutar blokova, dok je pogreška za B i AB rezultat nekontrolisanih varijacija unutar pojedinih parcela. Uz to postoji veći broj stepeni slobode za pogrešku b nego za a. Zbog toga, kod ogleda sa podeljenim parcelama *u celini* se ne dobija veća preciznost, već se samo povećava preciznost faktora na potparcelama i interakcije na račun faktora na glavnim parcelama. Ovakva svojstva ogleda sa podeljenim parcelama poželjna su kad se efektima faktora na potparcelama i interakciji pridaje *veća* važnost nego efektima faktora na glavnim parcelama.

Ukoliko su uslovi pogodni, preporučljivo je da se raspored glavnih parcela izvrši po latinskom kvadratu. Na taj način se smanjuje varijacija pogreške u dva pravca po kolonama i redovima, što povećava preciznost kod upoređivanja rezultata tretmana iz glavnih parcela. Raspored stepeni slobode u ogledu postavljenom po latinskom kvadratu je sledeći:

Izvori varijacije	Stepeni slobode
Redovi	$r - 1$
Kolone	$r - 1$
A	$a - 1$
Pogreška (a)	$(a - 1)(a - 2)$
Ukupno	$a^2 - 1$
B	$b - 1$
AB	$(a - 1)(b - 1)$
Pogreška (b)	$a(a - 1)(b - 1)$
Sveukupno	$a^2(b - 1)$

Da bi se u ogled uključio još jedan dopunski faktor moguće je svaku potparcelu *podeliti* na još manje potparcele. Tada analiza varijanse ima *tri pogreške*, i to: (a), (b) i (c). Prvi deo analize varijanse uključuje sistematsku varijaciju, tj. varijaciju blokova kod slučajnog blok–sistema ili varijaciju redova i kolona kod latinskog kvadrata, zatim efekat A i pogrešku (a). Drugi deo analize varijanse obuhvata sledeće varijacije: efekat B, interakciju AB i pogrešku (b). Prema tome, u prva dva dela analize varijanse izvori varijacije su isti kao i kod plana sa dva faktora. Najzad, treći deo analize varijanse uključuje sledeće izvore varijacije:

Izvori varijacije	Stepeni slobode
C	$c - 1$
AC	$(a - 1)(c - 1)$
BC	$(b - 1)(c - 1)$
ABC	$(a - 1)(b - 1)(c - 1)$
Pogreška (c)	$ab(r - 1)(c - 1)$

Podela na još manje potparcele je, po pravilu, i dalje moguća.

Ogledi sa podeljenim parcelama, međutim, imaju i izvesne nedostatke, te se preporučuje obazrivost u njihovoj primeni. Tako se ponekad dešava da rezultati tretmana sa glavnih parcela, iako se jako razlikuju, nisu značajni zbog velike pogreške, dok su rezultati tretmana na potparcelama sa relativno manjim razlikama značajni zbog male pogreške. Često se ukazuje da pri upoređenju izvesnih tretmana može da dođe do zabune jer ovi ogledi imaju dve pogreške. (O ogledima po planu podeljenih parcela videti: Kempthorne, 1952).

11.6. Model i analiza ogleda po planu podeljenih parcela

Model ogleda kod plana podeljenih parcela u slučajnom blok–sistemu je:

$$X_{ijk} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \varepsilon_{ij} + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \delta_{ijk}, \tag{11.10}$$

gde je $i = 1,...,r$; $j = 1,...,a$; $k = 1,...,b$; ε_{ij}:$N(0,\sigma_\alpha^2)$; $\delta_{ijk} : N(0,\sigma_\beta^2)$.

Sume kvadrata za analizu varijanse izračunavaju se na sledeći način:

Suma kvadrata totala je:

$$Q = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{a} \sum_{k=1}^{b} X_{ijk}^2 - \frac{\left(X_{00}\right)^2}{rab}. \tag{11.11}$$

Suma kvadrata glavnih parcela je:

$$Q_G = \frac{\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{a} G_{ij}^2}{b} - \frac{\left(X_{00}\right)^2}{rab}. \tag{11.12}$$

Suma kvadrata blokova je:

$$Q_R = \frac{\sum_{i=1}^{r} R_i^2}{ab} - \frac{\left(X_{00}\right)^2}{rab}. \tag{11.13}$$

Suma kvadrata efekta A sa glavnih parcela je:

$$Q_A = \frac{\sum_{j=1}^{a} A_j^2}{rb} - \frac{\left(X_{00}\right)^2}{rab}. \tag{11.14}$$

Suma kvadrata pogreške (a) je:

$$Q_{P(a)} = Q_G - Q_R - Q_A. \tag{11.15}$$

Suma kvadrata efekata A, B i interakcije AB je:

$$Q_{(AB)} = \frac{\sum_{j=1}^{a} \sum_{k=1}^{b} \left(AB_{jk}\right)^2}{r} - \frac{\left(X_{00}\right)^2}{rab}. \tag{11.16}$$

Suma kvadrata efekta B sa potparcela je:

$$Q_B = \frac{\sum_{k=1}^{b} B_k^2}{ra} - \frac{\left(X_{00}\right)^2}{rab}. \tag{11.17}$$

Interakcija AB je:

$$Q_{AB} = Q_{(AB)} - Q_A - Q_B. \tag{11.18}$$

Suma kvadrata pogreške (b) je:

$$Q_{P(b)} = Q - Q_G - Q_B - Q_{AB}. \tag{11.19}$$

Analiza varijanse ogleda po planu podeljenih parcela sa dva faktora prikazana je u tab. 11.12.

TAB. 11.12. Opšti slučaj analize varijanse ogleda sa dva faktora po planu podeljenih parcela

Izvori varijacije	Stepen slobode	Sredina kvadrata	Očekivana sredina kvadrata
Glavne parcele			
Blokovi	$r-1$	$Q_R/(r-1)$	$\sigma_b^2 + b\sigma_a^2 + \frac{ab}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\rho_i^2$
A	$a-1$	$Q_A/(a-1)$	$\sigma_b^2 + b\sigma_a^2 + \frac{rb}{a-1}\sum_{j=1}^{a}\alpha_j^2$
Pogreška (a)	$(r-1)(a-1)$	$Q_{P(a)}/\left[(r-1)(a-1)\right]$	$\sigma_b^2 + b\sigma_a^2$
Potparcele			
B	$(b-1)$	$Q_B/(b-1)$	$\sigma_b^2 + \frac{ra}{b-1}\sum_{k=1}^{b}\beta_k^2$
AB	$(a-1)(b-1)$	$Q_{AB}/[(a-1)(b-1)]$	$\sigma_b^2 + \frac{r}{(a-1)(b-1)}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}(\alpha\beta)_{jk}^2$
Pogreška (b)	$a(r-1)(b-1)$	$Q_{P(b)}/\left[a(r-1)(b-1)\right]$	σ_b^2

Testiranje homogenosti varijansi u prvom delu analize varijanse, kao što se vidi iz kolone očekivane sredine kvadrata, vrši se putem F–testa pojedinačnim stavljanjem u odnos varijansi blokova i efekta A prema varijansi pogreške (a), a u drugom delu analize varijanse, varijansi B i AB sa pogreškom (b)

Ako se radi o modelu II ili mešovitom modelu, očekivane sredine kvadrata su date u tab. 11.13.

TAB. 11.13. Očekivane sredine kvadrata u modelu II i mešovitim modelima

Izvori varijacije	Model II	Mešoviti model, a fiksno	Mešoviti model, b fiksno
A	$\sigma_b^2 + b\sigma_a^2 + r\sigma_{AB}^2 + rb\sigma_A^2$	$\sigma_b^2 + b\sigma_a^2 + r\sigma_{AB}^2 + \frac{rb}{a-1}\sum_{j=1}^{a}\alpha_j^2$	$\sigma_b^2 + b\sigma_a^2 + rb\sigma_A^2$
Pogreška (a)	$\sigma_b^2 + b\sigma_a^2$	$\sigma_b^2 + b\sigma_a^2$	$\sigma_b^2 + b\sigma_a^2$
B	$\sigma_b^2 + r\sigma_{AB}^2 + ra\sigma_B^2$	$\sigma_b^2 + ra\sigma_B^2$	$\sigma_b^2 + r\sigma_{AB}^2 + \frac{ra}{b-1}\sum_{k=1}^{b}\beta_k^2$
AB	$\sigma_b^2 + r\sigma_{AB}^2$	$\sigma_b^2 + r\sigma_{AB}^2$	$\sigma_b^2 + r\sigma_{AB}^2$
Pogreška (b)	σ_b^2	σ_b^2	σ_b^2

Iz datih očekivanih sredina kvadrata, ako se radi o modelu II ili mešovitom modelu u kome je faktor b slučajno promenljiva, vidi se da se testiranje homogenosti varijansi tretmana faktora a ne može izvršiti na direktan način. Testiranje se izvodi primenom Satterthwaitovog aproksimativnog postupka o kojem je bilo govora na strani 299.

Kod plana podeljenih parcela, s ozbirom na postojanje dve pogreške, mora se obratiti pažnja i pri *upoređenju sredina* kojih može da bude četiri vrste. Za svaku vrstu upoređenja izračunavaju se na *poseban* način standardne greške razlike. Izračunato t se na uobičajen način upoređuje sa kritičnim vrednostima u tabelama $t-$distribucije. Broj stepeni slobode je onaj koji sadrži pogreška (a) ili (b), već prema tome da li se standardna greška razlike izračunava na osnovu jedne ili druge pogreške.

1) Za upoređenje sredina faktora a ili sredina glavnih parcela standardna greška razlike je:

$$\sqrt{\frac{2s_{P(a)}^2}{rb}}, \tag{11.20}$$

gde je $S_{P(a)}-$varijansa pogreške (a), $r-$broj ponavljanja, $b-$broj potparcela u glavnoj parceli.

2) Za upoređenje sredina faktora (b) ili sredina sa potparcela imamo:

$$\sqrt{\frac{2s_{P(b)}^2}{ra}}, \tag{11.21}$$

gde je $S_{P(b)}-$varijansa pogreške (b), $a-$broj glavnih parcela u jednom ponavljanju.

3) Za upoređenje sredina od b za dati tretman faktora a imamo:

$$\sqrt{\frac{2s_{P(b)}^2}{r}}. \tag{11.22}$$

4) Za upoređenja sredina tretmana faktora a za dati tretman faktora b standardna greška razlike je:

$$\sqrt{\frac{2[(b-1)s^2_{P(b)} + s^2_{P(a)}]}{rb}} \tag{11.23}$$

Pošto $S_{P(a)}$ i $S_{P(b)}$ obično imaju različite stepene slobode, to je i vrednost t iz tabela $t-$ distribucije za svaku varijansu pogreške drukčija. Aproksimativna kritična vrednost t za upoređenje pod brojem 4 je:

$$t = \frac{(b-1)s^2_{P(b)}t_{(b)} + s^2_{P(a)}t_{(a)}}{(b-1)s^2_{P(b)} + s^2_{P(a)}} \tag{11.24}$$

gde je t_b—vrednost t iz tabele za broj stepeni slobode pogreške (b), t_a—vrednost t iz tabele za broj stepeni slobode pogreške (a).

Za ilustraciju uzećemo sortni ogled sa pšenicom u ispitivanju gustine setve (dr S. Borojević, Institut za poljoprivredna istraživanja, Novi Sad). U ogled su uključene četiri sorte i tri gustine 500, 700 i 900 na svakoj parceli. Rezultati ogleda su dati u tab. 11.14.

TAB. 11.14. Rezultati ogleda sa pšenicom i gustinom setve postavljenog po planu podeljenih parcela ($kg/4m^2$)

Sorte	Gustina setve	Blokovi 1	2	3	4	5	Ukupno
San pastore	500	2,47	2,82	2,47	2,71	2,28	12,75
	700	2,77	2,66	2,57	2,82	2,55	13,37
	900	2,76	2,53	2,55	2,85	2,48	13,17
		8,00	8,01	7,59	8,38	7,31	39,29
Mara	500	2,60	2,87	2,33	2,80	2,51	13,11
	700	2,75	2,38	2,42	2,89	2,48	12,92
	900	2,77	2,56	2,61	2,51	2,65	13,10
		8,12	7,81	7,36	8,20	7,64	39,13
Produttore	500	3,07	2,75	3,05	2,84	2,81	14,52
	700	2,95	2,83	3,02	3,08	2,94	14,82
	900	3,06	2,30	2,91	3,05	2,83	14,15
		9,08	7,88	8,98	8,97	8,58	43,49
S−15	500	2,22	2,45	2,26	2,48	2,17	11,58
	700	2,49	2,46	2,24	2,49	2,33	12,01
	900	2,32	2,20	2,53	2,25	2,17	11,47
		7,03	7,11	7,03	7,22	6,67	35,06
Ukupno po gustinama setve	500	10,36	10,89	10,11	10,83	9,77	51,96
	700	10,96	10,33	10,25	11,28	10,30	53,12
	900	10,91	9,59	10,60	10,66	10,13	51,89
Ukupno		32,23	30,81	30,96	32,77	30,20	156,97

Izračunavanja suma kvadrata za analizu varijanse su sledeća:

$$C = \frac{(156{,}97)^2}{60} = 410{,}6597.$$

Suma kvadrata totala $= (2{,}47)^2 + (2{,}82)^2 + ... + (2{,}17)^2 - 410{,}6597 = 3{,}9894.$

Suma kvadrata glavnih parcela, $G =$

$$= \frac{(8{,}00)^2 = (8{,}01)^2 + \ldots + (6{,}67)^2}{3} - 410{,}6597 = 3{,}1430.$$

Suma kvadrata blokova, $R = \dfrac{(32{,}23)^2 + \ldots + (30{,}20)^2}{12} - 410{,}6597 = 0{,}3789.$

Suma kvadrata sorti (glavne parcele), $A =$

$$= \frac{(32{,}29)^2 + \ldots + (35{,}06)^2}{15} - 410{,}6597 = 2{,}3699.$$

Suma kvadrata pogreške $(a) = 3{,}1430 - 0{,}3789 - 2{,}3699 = 0{,}3942.$

Suma kvadrata gustoće setve, $B =$

$$= \frac{(51{,}96)^2 + (53{,}12)^2 + (51{,}89)^2}{20} - 410{,}6597 = 0{,}0477.$$

Suma kvadrata efekata A, B i interakcije $AB =$

$$= \frac{(12{,}75)^2 + (13{,}37)^2 + \ldots + (11{,}47)^2}{5} - 410{,}6597 = 2{,}4922.$$

Suma kvadrata interakcije $AB = 2{,}4922 - 2{,}3699 - 0{,}0477 = 0{,}0746$.

Suma kvadrata pogreške $(b) = 3{,}9894 - 3{,}1430 - 0{,}0477 - 0{,}0746 = 0{,}7241.$

Analiza varijanse prikazana je u tab. 11.15.

TAB. 11.15. Analiza varijanse ogleda sa pšenicom postavljenog po planu podeljenih parcela

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata	F
Blokovi	4	0,3789	0,0947	
Sorte, A	3	2,3699	0,7900	24,09
Pogreška (a)	12	0,3942	0,0328	
Gustoća setve, B	2	0,0477	0,0238	1,05
AB	6	0,0746	0,0124	0,55
Pogreška (b)	32	0,7241	0,0226	
Ukupno	59	3,9894		

Kao što se iz tab. 11.15. vidi, jedino je varijansa sorti značajna.

Za upoređenje razlika između sredina najbolje je sredine prikazati u vidu tabele kao što je tab. 11.16.

TAB. 11.16. Sredine tretmana ogleda sa pšenicom

Gustina	Sorte				Sredina gustoća
	S.pastore	Mara	Produttore	S – 15	
500	2,55	2,62	2,90	2,32	2,60
700	2,67	2,58	2,96	2,40	2,66
900	2,63	2,62	2,83	2,29	2,59
Sredina sorte	2,62	2,61	2,90	2,34	

Za upoređenje sredina sorti standardna greška razlike je:

$$\sqrt{\frac{2s_{P(a)}}{rb}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}0328}{5 \cdot 3}} = \sqrt{0{,}0044} = 0{,}066\,.$$

Za 12 stepeni slobode i $\alpha = 0{,}05$ vrednost t iz tabela je 2,18. Tako je $NZR = 0{,}066 \cdot 2{,}18 = 0{,}144$.

Iz tab.11.16 se vidi da je prinos sorte "Produttore" najveći a sorte S – 15 najmanji. Razlike između sredina sorti "san pastore" i "mara" nisu značajne.

Za upoređenja sredina gustoća setve standardna greška razlike je:

$$\sqrt{\frac{2s^2_{P(b)}}{ra}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}0226}{5 \cdot 4}} = 0{,}048\,.$$

$t_{(0,05\,;\,32)} = 2{,}04.$

$NZR = 0{,}048 \cdot 2{,}04 = 0{,}098$. Nijedna razlika između gustoća nije značajna.

Za upoređenje sredina gustoća neke sorte standardna greška razlike je:

$$\sqrt{\frac{2s^2_{P(b)}}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}0226}{5}} = 0{,}095,$$

$t_{(0,05\,;\,32)} = 2{,}04\,.$

$NZR = 0{,}095 \cdot 2{,}04 = 0{,}194$. Nijedna razlika nije značajna.

Za upoređenje sredina sorti date gustine standardna greška razlike je:

$$\sqrt{\frac{2[\,(b-1)s^2_{P(b)} + s^2_{P(a)}]}{rb}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (2 \cdot 0{,}0226) + 0{,}0328}{5 \cdot 3}} = 0{,}1020.$$

Kritična vrednost t je:

$$t = \frac{2 \cdot 0{,}0226 \cdot 2{,}04 + 0{,}0328 \cdot 2{,}18}{2 \cdot 0{,}0226 + 0{,}0328} = 2{,}10\,.$$

$NZR = 0{,}1020 \cdot 2{,}10 = 0{,}214$. Ovde se pojavljuju značajne razlike kod svake gustoće različitih sorti sa sličnim zaključkom kao i kod upoređenja sredina sorti.

11.7. Izračunavanje izgubljene parcele kod plana podeljenih parcela i slučajan raspored

Vrednosti izgubljene potparcele izračunavaju se prema sledećem obrascu:

$$X = \frac{r(U) + b(A_jB_k) - (A_j)}{(r-1)(b-1)}\,, \tag{11.25}$$

gde je U–vrednost cele parcele u kojoj je potparcela izgubljena; (A_jB_k)–ukupna vrednost tretmana čija je parcela izgubljena (a_jb_k); A_j–ukupna vrednost glavnih parcela j–tog tretmana od A gde je izgubljena potparcela.

Za ilustraciju pretpostavimo da je izgubljena potparcela za sortu "mara" gustoće 500 u bloku 1 (tab. 11.14.). Tada je $U = 8{,}12 - 2{,}60 = 5{,}52$; $A_jB_k = 13{,}11 - 2{,}60 = 10{,}51$; $A_j = 39{,}13 - 2{,}60 = 36{,}53$. Vrednost izgubljene parcele je:

$$X = \frac{5 \cdot 5{,}52 + 3 \cdot 10{,}51 - 36{,}53}{(5-1)(3-1)} = 2{,}83.$$

Kod analize varijanse broj stepeni slobode za pogrešku (b) *smanjuje se* za 1, kao i broj stepeni slobode celog ogleda. U slučaju kada je neka parcela izgubljena dokazano je da su ostale varijanse, izuzev varijanse pogreške (b), nešto *pristrasne* naviše. Te pristrasnosti su obično beznačajne i mogu se zanemariti, sem u slučajevima kad je gubitak parcele značajan. Predviđaju se i posebne metode kojima se ta pristrasnost koriguje (Anderson, 1946). Ovaj autor daje objašnjenje postupka u slučaju gubitka glavnih parcela.

Slučajan raspored glavnih parcela u ogledu sa podeljenim parcelama, zavisno da li je raspored izvršen po slučajnom blok–sistemu ili latinskom kvadratu, vrši se po pravilima koja se primenjuju kod tih planova. Zatim se pristupa slučajnom rasporedu tretmana u potparcelama svake parcele posebno.

11. 8. Ogledi sa podeljenim potparcelama

Planiranje i analiza ogleda s podeljenim potparcelama primenjuje se kod ogleda sa tri faktora. Potreba da se izračunaju tri pogreške za testiranje značajnosti pojedinih faktora i njihovih interakcija dovodi do složenosti statističke analize, pa je potrebna obazrivost u njenom izvođenju. Model ogleda počiva na sledećoj osnovi:

$$X_{ijkl} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \varepsilon_{ij} + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \delta_{ijk} + \gamma_l + (\alpha\gamma)_{jl} +$$

$$+ (\beta\gamma)_{kl} + (\alpha\beta\gamma)_{jkl} + \xi_{ijkl} \tag{11.26}$$

$(i = 1,...,r;\ j = 1,...,a;\ k = 1,...,b;\ l = 1,...,c);\ \varepsilon_{ij} : N(0,\sigma_a^2);\ \delta_{ijk} : N(0,\sigma_1^2);\ \xi_{ijkl} : N(0,\sigma_2^2),$

gde je ρ_i uticaj i – tog bloka, dok su α_j, β_k i γ_l dejstva tretmana, a $(\alpha\beta)_{jk}$, $(\alpha\gamma)_{jl}$, $(\beta\gamma)_{kl}$ i $(\alpha\beta\gamma)_{jkl}$ su uticaji interakcija. Statistička analiza u funkciji ovog modela može se podeliti u tri dela. Pošto je korektivni faktor jedan prvo će se dati njegovo izračunavanje:

$$C = \frac{\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{c} X_{ijkl}\right)^2}{rabc}$$

Za prvi deo analize varijanse potrebno je izračunati sledeće sume kvadrata:

Suma kvadrata blokova je:

$$Q_R = \frac{\sum_{i=1}^{r} R_i^2}{abc} - C, \tag{11.27}$$

gde je R_i suma tretmana u i – tom bloku nezavisno od veličine parcele, na kojoj su tretmani primenjeni.

Suma kvadrata totala glavnih parcela je:

$$Q_G = \frac{\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{c} G_{kl}^2}{bc} - C. \tag{11.28}$$

Suma kvadrata efekta A je:

$$Q_A = \frac{\sum_{j=1}^{a} A_j^2}{rbc} - C. \tag{11.29}$$

Suma kvadrata pogreške (a) je:

$$Q_{P(a)} = Q_G - Q_R - Q_A. \tag{11.30}$$

Za drugi deo varijanse izračunavaju se:

Suma kvadrata totala potparcela je:

$$Q_{GP} = \frac{\sum_{i=1}^{r} \sum_{l=1}^{c} GP_{il}^2}{rc} - C \tag{11.31}$$

Suma kvadrata efekta B je:

$$Q_B = \frac{\sum_{k=1}^{b} B_k^2}{rac} - C \tag{11.32}$$

Suma kvadrata interakcije $AB + Q_A + Q_B$ je:

$$Q_{(AB)} = \frac{\sum_{j=1}^{a} \sum_{k=1}^{b} (AB)_{jk}^2}{c} - C \tag{11.33}$$

Suma kvadrata interakcije AB je:

$$Q_{AB} = Q_{GP} - Q_A - Q_B \tag{11.34}$$

Suma kvadrata pogreške (b) je:

$$Q_{P(b)} = Q_{(AB)} - Q_G - Q_B - Q_{AB} \tag{11.35}$$

Za treći deo analize varijanse izračunavaju se:

Suma kvadrata efekta C je:

$$Q_C = \frac{\sum_{l=1}^{c} C_l^2}{rab} - C \tag{11.36}$$

Suma kvadrata interakcije $AC + Q_A + Q_C$ je:

$$Q_{(AC)} = \frac{\sum_{j=1}^{a} \sum_{l=1}^{c} (AC)_{jl}^2}{rb} - C \tag{11.37}$$

Suma kvadrata interakcije AC je:

$$Q_{AC} = Q_{(AC)} - Q_A - Q_C \tag{11.38}$$

Suma kvadrata interakcije $BC + Q_B + Q_C$ je:

$$Q_{(BC)} = \frac{\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{c}(BC)_{kl}^2}{ra} - C\,. \tag{11.39}$$

Suma kvadrata interakcije BC je:

$$Q_{BC} = Q_{(BC)} - Q_B - Q_C\,. \tag{11.40}$$

Suma kvadrata interakcije $ABC + Q_{AB} + Q_{AC} + Q_{BC} + Q_A + Q_B + Q_C$ je:

$$Q_{(ABC)} = \frac{\sum_{j=1}^{a}\sum_{b=1}^{k}\sum_{l=1}^{c}(ABC)_{jkl}^2}{r} - C \tag{11.41}$$

Suma kvadrata interakcije ABC je:

$$Q_{ABC} = Q_{(ABC)} - Q_{AB} - Q_{AC} - Q_{BC} - Q_A - Q_B - Q_C\,. \tag{11.42}$$

Suma kvadrata totala je:

$$Q = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{c}X_{ijkl}^2 - C\,. \tag{11.43}$$

Suma kvadrata pogreške (c) je:

$$Q_{P(c)} = Q - Q_{(AB)} - Q_C - Q_{AC} - Q_{BC} - Q_{ABC} \tag{11.43}$$

Šema analize varijanse prikazana je u tab 11.17. dok su standardne greške razlika između aritmetičkih sredina za pojedina upoređenja date u tab 11.18.

Aproksimativne kritične vrednosti t za upoređenja pod rednim brojevima 9,10,11 i 12 dobijaju se na sličan način kao i prilikom upoređenja 4, datog obrascem (11.24) kod ogleda sa podeljenim parcelama.

TAB. 11.17. Šema analize varijanse ogleda sa podeljenim potparcelama

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Sredina kvadrata	Očekivana sredina kvadrata
Glavne parcele			
Blokovi	$(r-1)$	$Q_R/(r-1)$	$\sigma_c^2 + b\sigma_b^2 + a\sigma_a^2 + \frac{abc}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\rho_i^2$
A	$(a-1)$	$Q_A/(a-1)$	$\sigma_c^2 + b\sigma_b^2 + a\sigma_a^2 + \frac{rbc}{a-1}\sum_{j=1}^{a}\alpha_j^2$
Pogreška (*a*)	$(r-1)(a-1)$	$Q_{P(a)}/[(r-1)(a-1)]$	$\sigma_c^2 + b\sigma_b^2 + a\sigma_a^2$
Potparcele			
B	$(b-1)$	$Q_B/(b-1)$	$\sigma_c^2 + b\sigma_b^2 + \frac{rac}{b-1}\sum_{k=1}^{b}\beta_k^2$
AB	$(a-1)(b-1)$	$Q_{AB}/[(a-1)(b-1)]$	$\sigma_c^2 + b\sigma_b^2 ++ \frac{rc}{(a-1)(b-1)}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}(\alpha\beta)_{jk}^2$
Pogreška (*b*)	$a(r-1)(b-1)$	$Q_{P(b)}/[a(r-1)(b-1)]$	$\sigma_c^2 + b\sigma_b^2$
Podeljene parcele			
C	$(c-1)$	$Q_C/(c-1)$	$\sigma_c^2 + \frac{rab}{c-1}\sum_{l=1}^{c}\gamma_l^2$
AC	$(a-1)(c-1)$	$Q_{AC}/[(a-1)(c-1)]$	$\sigma_c^2 + \frac{rb}{(a-1)(c-1)}\sum_{j=1}^{a}\sum_{l=1}^{c}(\alpha\gamma)_{jl}^2$
BC	$(b-1)(c-1)$	$Q_{BC}/[(b-1)(c-1)]$	$\sigma_c^2 + \frac{ra}{(b-1)(c-1)}\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{c}(\beta\gamma)_{kl}^2$
ABC	$(a-1)(b-1)(c-1)$	$Q_{ABC}/[(a-1)(b-1)(c-1)]$	$\sigma_c^2 + \frac{r}{(a-1)(b-1)(c-1)}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{c}(\alpha\beta\gamma)_{jkl}^2$
Pogreška (*c*)	$ab(r-1)(c-1)$	$Q_{P(a)}/[ab(r-1)(c-1)]$	σ_c^2

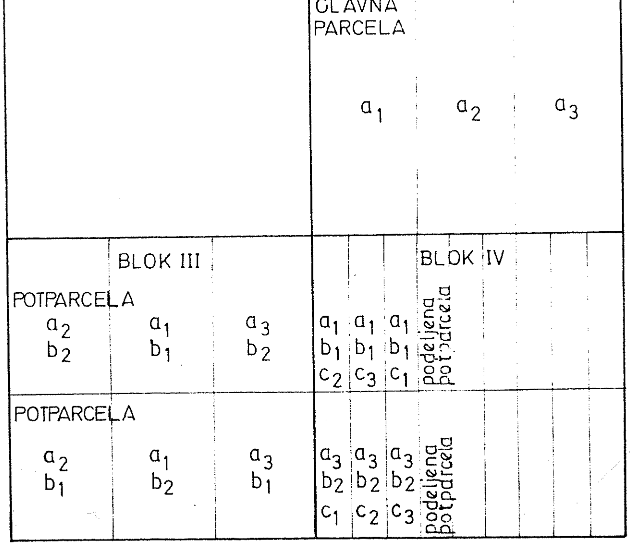
TAB. 11.17. Šema analize varijanse ogleda sa podeljenim potparcelama

TAB. 11.18. Standardne greške razlike između sredina za plan ogleda sa podeljenim potparcelama

Upoređenja sredina tretmana	Standardna greška razlike
1. $(a_0 - a_1)$	$\sqrt{2s^2_{P(a)}/rbc}$
2. $(b_0 - b_1)$	$\sqrt{2s^2_{P(b)}/rac}$
3. $(a_0b_0 - a_0b_1)$	$\sqrt{2s^2_{P(b)}/rc}$
4. $(a_0b_0 - a_1b_0)$ ili $(a_0b_0 - a_1b_1)$	$\sqrt{\left[2(b-1)s^2_{P(a)} + s^2_{P(a)}\right]/rbc}$
5. $(c_0 - c_1)$	$\sqrt{2s^2_{P(c)}/rab}$
6. $(a_0c_0 - a_0c_1)$	$\sqrt{2s^2_{P(c)}/rb}$
7. $(b_0c_0 - b_0c_1)$	$\sqrt{2s^2_{P(c)}/ra}$
8. $(a_0b_0c_0 - a_0b_0c_1)$	$\sqrt{2s^2_{P(c)}/r}$
9. $(b_0c_0 - b_1c_0)$ ili $(b_0c_0 - b_1c_1)$	$\sqrt{2\left[(c-1)s^2_{P(c)} + s^2_{P(b)}\right]/rac}$
10. $(a_0b_0c_0 - a_0b_1c_0)$	$\sqrt{2\left[(c-1)s^2_{P(c)} + s^2_{P(b)}\right]/rc}$
11. $(a_0b_0 - a_1c_0)$ ili $(a_0c_0 - a_1c_1)$	$\sqrt{2\left[(c-1)s^2_{P(c)} + s^2_{P(a)}\right]/rbc}$
12. $(a_0b_0c_0 - a_1b_0c_0)$	$\sqrt{2\left[b(c-1)s^2_{P(c)} + (b-1)s^2_{P(b)} + s^2_{P(a)}\right]/abc}$

11.9. Analiza ogleda s podeljenim potparcelama

Za ilustraciju poslužiće ogled kojim se ispitivala zaštita od virusa koji napada list šećerne repe (Little, Hills, 1975). Kao glavne parcele uzeta su tri datuma setve $a = 3$; na podeljenim parcelama u cilju kontrole virusa lista, polovina glavne parcele je prskana, a polovina nije, $b = 2$; vađenje je izvedeno u tri intervala s razmakom od četiri sedmice, $c = 3$. Ogled je postavljen u četiri bloka s jednim ponavljanjem svakog tretmana, $r = 4$. Šema je prikazana na sl. 11.1. Prinosi su preračunati i dati u vagonima po hektaru (tab. 11.19).



Sl. 11.1. Plan ogleda sa podeljenim potparcelama u ispitivanju zaštite od virusa lista šećerne repe: r=4, a=3, b=2, c=3.

TAB. 11.19. Rezultati ogleda o prinosu šećerne repe (*vag/ha*)

Tretman			Blok				Total	Sredina
A	B	C	I	II	III	IV		
a_1	b_1	c_1	6,42	6,35	5,95	5,50	24,22	6,05
		c_2	7,95	7,38	7,18	6,60	29,11	7,28
		c_3	8,65	9,30	7,28	5,92	31,15	7,79
	b_2	c_1	6,92	7,58	7,55	8,30	30,35	7,59
		c_2	9,50	10,15	8,65	7,75	36,05	9,01
		c_3	10,50	10,90	11,15	10,67	43,22	10.80
a_2	b_1	c_1	7,22	6,18	6,95	5,85	26,20	6,55
		c_2	9,38	7,88	7,75	6,95	31,96	7,99
		c_3	9,60	8,12	7,80	7,45	32,97	8,24
	b_2	c_1	9,50	7,75	7,38	7,67	32,30	8,07
		c_2	9,22	7,98	7,87	8,97	34,04	8,51
		c_3	11,05	10,40	9,72	9,40	40,57	10,14
a_3	b_1	c_1	5,85	6,05	5,30	5,22	22,42	5,60
		c_2	6,32	6,92	5,92	6,07	25,23	6,31
		c_3	7,45	7,48	6,07	5,95	26,95	6,74
	b_2	c_1	5,20	5,75	6,30	5,77	23,02	5,75
		c_2	7,25	8,00	6,62	7,80	29,67	7,42
		c_3	9,15	9,45	8,70	10,05	37,35	9,34
Ukupno			147,13	143,62	134,13	131,89	556,78	

Radne dvodimenzionalne i trodimenzionalne tabele, na osnovu podataka tab. 11.19. koje služe za izračunavanje sume kvadrata date su u tab. 11.20.

TAB. 11.20. Radne tabele za izračunavanje suma kvadrata na osnovu TAB. 11.19.

Blok × a

	Blok 1	2	3	4	Ukupno
a_1	49,94	51,66	47,76	44,74	194,10
a_2	55,97	48,31	47,47	46,29	198,04
a_3	41,22	43,65	38,91	40,86	164,64
Ukupno	147,13	143,62	134,14	131,89	556,78

a × b

	a_1	a_2	a_3	Ukupno
b_1	84,48	91,13	74,60	150,21
b_2	109,62	106,91	90,04	306,57
Ukupno	194,10	198,04	164,64	556,78

Blok × b

	Blok 1	2	3	4	Ukupno
b_1	68,84	65,66	60,20	55,51	250,21
b_2	78,29	77,96	73,94	76,38	306,57
Ukupno	147,13	143,62	134,14	131,89	556,78

a × c

	c_1	c_2	c_3	Ukupno
a_1	54,57	65,16	74,37	194,10
a_2	58,50	66,00	73,54	198,04
a_3	45,44	54,90	64,30	164,64
Ukupno	158,51	186,06	212,21	556,78

b × c

	c_1	c_2	c_3	Ukupno
b_1	72,84	86,30	91,07	250,21
b_2	85,67	99,76	121,14	306,57
Ukupno	158,51	186,06	212,21	556,78

$a \times b \times c$

	a_1		a_2		a_3		Ukupno
	b_1	b_2	b_1	b_2	b_1	b_2	
c_1	24,22	30,35	26,20	32,30	22,42	23,02	158,51
c_2	29,11	36,05	31,96	34,04	25,23	29,67	186,06
c_3	31,15	43,22	32,97	40,57	26,95	37,35	212,21
Ukupno	84,48	109,62	91,13	106,91	74,60	90,04	556,78

$a \times b \times$ Blok

Blok	a_1		a_2		a_3		Ukupno
	b_1	b_2	b_1	b_2	b_1	b_2	
1	23,02	26,92	26,20	29,77	19,62	21,60	147,13
2	23,03	28,63	22,18	26,13	20,45	23,20	143,62
3	20,41	27,35	22,50	24,97	17,29	21,62	134,14
4	18,02	26,72	20,25	26,04	17,24	23,62	131,89
Ukupno	84,48	109,62	91,13	106,91	74,60	90,04	556,78

Korektivni faktor je:

$$C = \frac{(556{,}78)^2}{72} = 4.305{,}61 \,.$$

Sume kadrata za prvi deo analize varijanse su:
Suma kvadrata totala glavnih parcela je:

$$Q_G = \frac{(49{,}44)^2 + (51{,}66)^2 + \ldots + (40{,}86)^2}{6} - 4.305{,}61 = 43{,}7308.$$

Suma kvadrata blokova je:

$$Q_\mathrm{R} = \frac{(147{,}13)^2 + (143{,}62)^2 + (134{,}14)^2 + (131{,}89)^2}{18} - 4.305{,}61 = 8{,}9707 \,.$$

Suma kvadrata efekta A je:

$$Q_\mathrm{A} = \frac{(194{,}10)^2 + (198{,}04)^2 + (164{,}64)^2}{24} - 4.305{,}61 = 27{,}7642 \,.$$

Suma kvadrata pogreške (a) je:

$$Q_{P(a)} = 43{,}7308 - 8{,}9707 - 27{,}7642 = 6{,}9959 \,.$$

Sume kvadrata za drugi deo analize varijanse:
Suma kvadrata totala potparcela je:

$$Q_\mathrm{GP} = \frac{(84{,}48)^2 = (109{,}62)^2 + \ldots + (164{,}64)^2}{12} - 4.305{,}61 = 74{,}4068 \,.$$

Suma kvadrata efekta B je:

$$Q_\mathrm{B} = \frac{(250{,}21)^2 + (306{,}57)^2}{36} - 4.305{,}61 = 44{,}1180 \,.$$

Suma kvadrata interakcije $AB + Q_\mathrm{A} + Q_\mathrm{B}$ je:

$$Q_{(\mathrm{AB})} = \frac{(23{,}02)^2 + (23{,}03)^2 + \ldots + (23{,}62)^2}{3} - 4.305{,}61 = 95{,}2862 \,.$$

Suma kvadrata interakcije AB je:

$$Q_\mathrm{AB} = 74{,}4068 - 27{,}7642 - 44{,}1180 = 2{,}5246 \,.$$

Suma kvadrata pogreške (b) je:

$$Q_{P(b)} = 95{,}2862 - 43{,}7308 - 44{,}1180 - 2{,}5246 = 4{,}9128\,.$$

Sume kvadrata za treći deo analize varijanse:

Suma kvadrata efekta C je:

$$Q_C = \frac{(158{,}51)^2 + (186{,}06)^2 + (212{,}21)^2}{24} - 4.305{,}61 = 60{,}0911\,.$$

Suma kvadrata interakcije $AC + Q_A + Q_C$ je:

$$Q_{(AC)} = \frac{(54{,}57)^2 + (65{,}16)^2 + \ldots + (64{,}30)^2}{8} - 4.305{,}61 = 88{,}6753\,.$$

Suma kvadrata interakcije AC je:

$$Q_{AC} = 88{,}6753 - 27{,}7642 - 60{,}0911 = 0{,}8200\,.$$

Suma kvadrata interakcije $BC + Q_B + Q_C$ je:

$$Q_{(BC)} = \frac{(72{,}84)^2 + (86{,}30)^2 + \ldots + (121{,}14)^2}{12} - 4.305{,}61 = 112{,}1739\,.$$

Suma kvadrata interakcije BC je:

$$Q_{BC} = 112{,}1739 - 44{,}1180 - 60{,}0911 = 7{,}9648\,.$$

Suma kvadrata interakcije $ABC + Q_{AB} + Q_{AC} + Q_{BC} + Q_A + Q_B + Q_C$ je:

$$Q_{(ABC)} = \frac{(24{,}22)^2 + (29{,}11)^2 + \ldots + (37{,}35)^2}{4} - 4.305{,}61 = 146{,}0448\,.$$

Suma kvadrata interakcije ABC je:

$$\begin{aligned} Q_{ABC} = {} & 146{,}0448 - 2{,}5246 - 0{,}8200 - 7{,}9648 - \\ & - 27{,}7642 - 44{,}1180 - 60{,}0911 = 2{,}7621\,. \end{aligned}$$

Suma kvadrata totala je:

$$Q = (6{,}42)^2 + (6{,}35)^2 + \ldots + (10{,}05)^2 - 4.305{,}61 = 177{,}4756\,.$$

Suma kvadrata pogreške (c) je:

$$Q_{P(c)} = 177{,}4756 - 95{,}2862 - 60{,}0911 - 0{,}8200 - 7{,}9648 - 2{,}7621 = 10{,}5514\,.$$

Analiza varijanse data je u tab. 11.21.

TAB. 11.21. Analiza varijanse ogleda sa podeljenim potparcelama na osnovu podataka iz tab. 11.19

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata	F–odnos
Blokovi	3	8,9707	2,9902	2,56
A	2	27,7642	13,8821	11,91
Pogreška (a)	6	6,9959	1,1660	
B	1	44,1180	44,1180	80,81
AB	2	2,5246	1,2623	2,31
Pogreška (b)	9	4,9128	0,5459	
C	2	60,0911	30,0455	102,51
AC	4	0,8200	0,2050	0,70
BC	2	7,9648	3,9824	13,59
ABC	4	2,7621	0,6905	2,35
Pogreška (c)	36	10,5514	0,2931	
Ukupno	71	177,4756		

11.10. Delimični faktorijalni ogledi

Kao što je i u prethodnom odeljku istaknuto ogledi s velikim brojem faktora stvaraju problem, kako s gledišta preciznosti tako i troškova. Jedno rešenje je stvaranje više blokova u jednom ponavljanju i združivanje izvesnih efekata, prvenstveno interakcija većeg reda. Drugo rešenje problema je u primeni delimičnih faktorijalnih ogleda. Na primer, u ogledu 2^5 ima 32 kombinacije tretmana. Ako se tretmani jednog ponavljanja podele u 4 bloka združuju se tri efekta. Ako se umesto 4 bloka uzme samo jedan s osam tretmana u više ponavljanja, onda se radi o *delimičnom faktorijalnom ogledu* (fractional replication). Osnovni cilj ovakvih ogleda je da se omogući istovremeno ispitivanje većeg broja faktora a da se ne primene sve kombinacije tretmana. Time se žrtvuje potpuni odgovor na neke efekte ili, pak, dobijaju odgovori zajedno za dva ili više efekata.

Ovakvi ogledi primenjivali su se u različitim oblastima istraživačkog rada. Ipak, treba istaći da su najprikaldniji za primenu u ogledima s kraćim trajanjem. Tada su ogledi, obično, manji po obimu, ali zato češći, te se, na taj način, postiže veća ekonomija u sredstvima. Pošto se ovakvim ogledima dosta gubi u preciznosti ispitivanih efekata, njihovo ponavljanje u drukčijim kombinacijama može u znatnoj meri da to nadomesti. Nastojanja su usredsređena na to da se podesnim planom osiguraju, bar, odgovori na glavne efekte i interakcije prvog reda. Pogreška treba da ima relativno dovoljan broj stepeni slobode da bi se omogućila verodostojna ocena ispitavnih efekata. Imajući u vidu komplikovanost izvođenja analize i kompleksnost interpretacije rezultata, delimične faktorijalne oglede treba primenjivati s dosta opreznosti.

Ilustracija delimičnih faktorijalnih ogleda će se dati na jednom prostom primeru. Uzećemo 2^3 ogled s 8 tretmana, od kojih će samo *a, b, c* i *abc* biti u jednom bloku, *a* kombinacija tretmana ab, ac, bc i 1 u drugom. To će imati za posledicu združivanje interakcije ABC. Inače, prva grupa tretmana kod izračunavanja ove interakcije ima znak + a druga − . Prema tome, kad se za ispitivanje izaberu prva 4 tretmana u jednom bloku, ili druga 4 u drugom, obaveštenje o interakciji ABC je potpuno izgubljeno.

Usredsredimo se sada na a, b, c i abc tretmane u jednom bloku. Oni treba da daju odgovore na glavne efekte i interakcije prvog reda. Tako, ako uporedimo tretmane faktora C na drugom nivou s tretmanima istog faktora na prvom, glavni efekt za C je rezultat sledećeg upoređenja:

$$C = \frac{1}{2}[\,(c) + (abc) - (b) - (a)]\,.$$

Slično je i za glavne efekte A i B. Sva tri ova upoređenja su međusobno ortogonalna i nezavisna.

Ako se želi izračunati interakcija AB, na osnovu navedena 4 tretmana, nema druge mogućnosti nego da se upoređenje izvodi na istoj osnovi kao i za glavni efekat C, tj:

$$AB = \frac{1}{2}[\,(c) + (abc) - (b) - (a)]\,.$$

Na taj način odgovor na C ne može se izdvojiti iz odgovora na AB, niti odgovor na AB iz odgovora na C. Oni su dati *zajedno* (aliases). Isto tako, u ovom primeru su zajedno dati odgovori na efekte A i BC i na efekte B i AC. Za interakciju ABC kaže se da je *opredeljujuće upoređenje* (defining contrast).

U ovakvoj situaciji očigledno je da se ne može doći do verodostojne ocene o glavnom efektu C, kao i o drugim glavnim efektima, a da se ne zna nešto više o interakcijama s kojima su oni u zajednici. To saznanje treba da proizilazi izvan okvira eksperimentalnih rezultata. Na primer, smatramo da se interakcija AB može da zanemari, tj. da njen uticaj statistički nije značajan, iako je u datom ogledu glavni efekt C značajan, onda je to jedna indikacija. Razumljivo je da pored ove pretpostavke o interakciji treba imati verodostojnu ocenu eksperimentalne pogreške koja ne može počivati na samo jednom ponavljanju.

Prethodno objašnjenje odnosilo se samo na situaciju kad je u opredeljujućem upoređenju ABC, kod ogleda 2^3, uzet blok s tretmanima a, b, c i abc. Kakva bi bila situacija da je uzet drugi blok s tretmanima bc, ab, ac i (1)? Efekat C bi se dobio iz sledećeg upoređenja:

$$C = \frac{1}{2}[\,(bc) + (ac) - (ab) - (1)]\,.$$

Interakcija AB je i ovde zajednička s efektom C, ali s izmenjenim znakom. Naime, ta interakcija je:

$$AB = \frac{1}{2}[\,(ab) + (1) - (bc) - (ab)]\,.$$

Tako da je ovde $C = -AB$, umesto $C = AB$, kao u prvom slučaju.

Kakve su posledice na interpretaciju rezultata u jednom i drugom slučaju? Ako bi se upotrebio prvi blok sa zajedničkim kontrastom $C = AB$ i tretmanom *ab* davao bolji rezultat nego pojedinačni tretmani *a* i *b*, interakcija AB bi bila značajna. Odgovor i na efekat C bi u takvoj situaciji bio statistički značajan. U uslovima stvarne značajnosti i efekta C, taj odgovor bi bio u celini još značajniji. U drugom slučaju, kod $C = -AB$, nezavisna značajnost jednog i drugog efekta u ovom kontekstu deluje neutrališuće i u celini smanjuje značajnost upoređenja.

Da bi se izbegla ovakva situacija, normalno je da se ogled ne izvodi kad postoji pretpostavka o značajnosti oba zajednička efekta. Ako se, ipak, dođe do nekog rezultata, koji se nije očekivao, ponavljanje eksperimenta s drugom kombinacijom tretmana može da bude od koristi u pravilnoj interpretaciji rezultata.

U ovom sistemu zajednički efekat pronalazi se polazeći od opredeljujućeg upoređenja. Ako je to interakcija ABC zajednički efekat za A je $ABC \times A = A^2BC = BC$. Pravilo je da se svaki dobijeni izraz na kvadrat izostavlja.

Ponekad može da bude korisno da se zajednička upoređenja u delimičnim faktorijalnim ogledima prikažu u vidu jedne tabele sa znakovima + i − . Identičnost znakova za pojedine efekte istovremeno ukazuje i na njihovo zajedništvo. Na toj osnovi za 2^3 ogled s interakcijom ABC kao opredeljujućim upoređenjem zajednički efekti se mogu identifikovati pomoću tabele 11.22. Interakcije u donjem delu tabele dobijene su umnoškom znakova njihovih glavnih efekata. Na primer, za $A = BC$ znakovi su isti itd.

TAB. 11.22. Upoređenja na bazi polovine ponavljanja u ogledu 2^3 gde je i interakcija ABC opredeljujuće upoređenje

Efekti	Tretmani			
	a	b	c	abc
A	+	−	−	+
B	−	+	−	+
C	−	−	+	+
AB	−	−	+	+
AC	−	+	−	+
BC	+	−	−	+

Kad se ima u vidu, pre svega, složenost interpretacije rezultata, delimične faktorijalne oglede treba primenjivati vrlo obazrivo. Za detaljnija objašnjenja konstrukcije i analize delimičnih faktorijalnih ogleda konsultovati: Cochran, Cox, 1951; Hadživuković, 1977. Inače, na ove planove prvi je skrenuo pažnju Finney, 1946.