14. ANALIZA KOVARIJANSE

14.1. Mogućnosti primene analize kovarijanse

U eksperimentalnom radu nastojimo da se pogreška smanji u što većoj meri. To je ona varijansa u ogledu koja se javlja kao rezultat slučajnih, nekontrolisanih i po svojoj prirodi vrlo raznovrsnih činilaca. Da bi se to postiglo, ogledi se postavljaju po raznim planovima. Izbor plana zavisi od zadataka ispitivanja, mada se ima u vidu i u kojoj meri će primena datog plana uticati na smanjenje pogreške. Međutim ponekad se u eksperimentalnom radu, da bi se povećala preciznost ogleda, koriste i izvesna *dopunska obaveštenja* neovisna od rezultata primenjenih tretmana. Ta dopunska obaveštenja omogućuju da se *ne samo sagleda u kojoj meri ona utiču na eksperimenalnu pogrešku nego i na rezultate tretmana.* Metod koji omogućuje povećanje preciznosti ogleda uvođenjem jedne ili više dopunskih informacija poznat je pod imenom *analiza kovarijanse.*

U praktičnom radu analiza kovarijanse se uspešno primenjuje u brojnim slučajevima. Za ilustraciju poći ćemo od jednostavnog primera kako analiza kovarijanse može da se upotrebi za povećanje preciznosti ogleda. Recimo, 6 životinja na slučajan način izabranih primaju jednu vrstu obroka, 6 drugih životinja drugu vrstu itd. Kod takvog ogleda obično se upotrebljava analiza varijanse gde je totalna varijacija podeljena na dva dela; jedan deo proizilazi iz dejstva tretmana, dok je drugi deo rezultat nekontrolisanih činilaca (eksperimentalna pogreška). Ako bi se kod ovakvog ispitivanja raspolagalo i početnom težinom svake životinje pojedinačno, onda bi primenom analize kovarijanse mogla da se poveća preciznost ogleda. Isto tako, i prethodni podaci o starosti mogu da doprinesu povećanju preciznosti eksperimenta. Ili, na primer, kod poljskih ogleda prinos vrlo često zavisi od broja biljaka i, ako se ne želi da zanemari njihov broj, tada je kod upoređivanja pojedinih tretmana poželjno voditi računa i o njihovom broju u svakoj pojedinoj parceli. Dalje, recimo, kod ogleda sa sadnicama, s obzirom na nemogućnost da se u potpunosti izjednače plodnost zemljišta i drugi činioci koji utiču na prinos, ogled se izvodi na biljkama istog zemljišta i izmeri se plod u datoj i prethodnoj godini, s tim što podaci iz prethodne godine mogu da služe za povećanje preciznosti ogleda. To znači da u ovom slučaju prinosi prethodnog jedinstvenog tretmana služe za poboljšanje kvaliteta ogleda. Postoji i čitav niz drugih slučajeva gde je moguće povećati preciznost jednog ogleda na osnovu dodatnih informacija o eskperimentalnim jedinicama.

U ovakvim slučajevima se *dopunsko obaveštenje uzima kao nezavisna promenljiva* *(X)* i dato je za svaku eksperimentalnu jedinicu. Ukoliko se radi o linearnoj zavisnosti regresije X u odnosu na X, uticaj vrednosti (X) otklanja se iz eksperimentalne pogreške. Praktično, analiza kovarijanse *kombinuje* prednosti i dovodi u sklad regresiju i analizu varijanse, dva naširoko upotrebljavana metoda u eksperimentalnom radu.

Eksperimentalna pogreška primenom analize kovarijanse smanjuje se približno na:

$$\sigma_y^2(1 - r^2)\left(1 + \frac{1}{n_p - 2}\right), \tag{14.1}$$

gde je σ_y^2 varijansa pogreške promenljive Y, r^2 koeficijent determinacije a n_p broj stepeni slobode za pogrešku. Ukoliko je r manje od 0,3, smanjenje varijanse pogreške nije tako značajno. Ako se r približava jedinici, smanjenje je znatnije i preciznost ogleda se povećava (Cochran, 1957).

Iz ovog proizilazi da poznavanje izvesne karakteristike koja prati pojavu na koju se primenjuje jedan tretman dovodi, ukoliko se o tome vodi računa, do povećanja preciznosti ogleda, što se postiže i putem odgovarajućeg plana. Dokazano je da ukoliko se varijacije od X bar izjednače u grupama tako da su iste za sve jedinice date grupe ili ponavljanja, tada primena slučajnog blok–sistema ili analize kovarijanse, kad se radi o linearnoj regresiji, dovodi do približno istog povećanja preciznosti.

Važan *preduslov* za uspešnu primenu analize kovarijanse je da primenjeni tretmani nemaju nikakvog uticaja na nezavisno promenljivu (X). U izvesnim ogledima, na primer sa ishranom životinja, ovaj je uslov automatski ispunjen jer se karakteristika X meri pre primene tretmana. Međutim, ponekad se vrednost X meri posle primene tretmana. To je, recimo, slučaj kad pri ispitivanju dejstva nekog tretmana želimo da se prethodno isključi uticaj broja biljaka na prinose. Ako se ovde primeni analiza kovarijanse, time se otklanja jedan deo uticaja samog tretmana, što uveliko menja celu situaciju. Analiza kovarijanse u ovom slučaju ne samo da utiče na izmenu eksperimentalne pogreške već i na prirodu dejstva ispitivanog tretmana. U tom slučaju postoji mogućnost da su veći prinosi, rezultat nekog tretmana, proizašli baš iz činjenice da taj tretman dovodi do povećanja broja biljaka. U takvoj situaciji, primenom analize kovarijanse, ocene ili testiranja vršili bi se na bazi izjednačenog broja biljaka, a to praktično znači da bi se jedan deo dejstva tretmana na ovaj način otklonio.

Jedan alternativan postupak sastoji se u uvođenju *korekcije a priori*. To je kombinacija od Y i X koja se tretira kao novo posmatranje, tj. kao jedna veličina za analizu. Ovaj bi postupak mogao bez teškoća da se primeni u slučajevima kad je dodatna informacija iste prirode kao i glavno posmatranje, a od nje se razlikuje samo zbog uticaja primenjenog tretmana. To je, na primer, početna težina životinja pre primene tretmana. Jedna takva kombinacija može da bude razlika između $(Y - X)$, gde je Y krajnja a X početna težina životinja. Kod ispitivanja na ovakvoj osnovi neophodna je velika opreznost (Fisher, 1958).

Analiza kovarijanse može, isto tako, da se koristi u *izračunavanju izgubljenih jedinica* posmatranja u nekom ogledu (Coons, 1957).

14.2. Principi analize kovarijanse

Prvo ćemo dati slučaj primene analize kovarijanse u potpuno slučajnom ogledu. Ako je broj tretmana k sa n ponavljanja, ukupan broj jedinica je $N = kn$. Treba istaći da za opravdanje čitavog postupka treba da se pođe od sledećih pretpostavki:

a) Nezavisna promenljiva X je *nezavisna* od primenjenih tretmana. Ukoliko nije, tada će otklanjanje uticaja X dovesti do otklanjanja izvesnog dela dejstva tretmana.

b) Zavisna promenljiva Y ima *istu varijansu* za svaki tretman. Ako nije tako, treba da se izvrši transformacija da bi se ovaj uslov ispunio.

c) Veza između X i Y mora da bude *linearna funkcija prvog stepena* $Y = a + bX$. Da bi se to postiglo mogu da se upotrebe odgovarajuće transformacije bilo za X ili za Y.

Posmatraju li se i analiziraju nezavisno jedna od druge X i Y, tada putem analize varijanse njihove sume kvadrata, svaka pojedinačno može da se podeli na dva dela, i to na varijacije između tretmana i unutar tretmana. Izračunavanje totalne varijacije za X i njene dve komponente kod potpuno slučajnog rasporeda prikazano je u tab. 14.1.

TAB. 14.1. Analiza varijanse za X u potpuno slučajnom rasporedu

Izvori varijacije	Suma kvadrata	Stepeni slobode	Sredina kvadrata
Između tretmana	$\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{X}_{i0} - \bar{X}_{00})^2$	$k-1$	$\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{X}_{i0} - \bar{X}_{00})^2$
Unutar tretmana	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_{i0})^2$	$N-k$	$\frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_{i0})^2$
Total	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_{00})^2$	$N-1$	

U ovaj tabeli uzeli smo da je k–broj tretmana, n–broj ponavljanja, N–broj jedinica u ugledu, $\bar{X}_{00}$–totalna sredina ogleda, $\bar{X}_{i0}$–sredina i–tog tretmana, X_{ij}–vrednost jedinice i–tog tretmana i j–tog ponavljanja.

Na isti način se izračunavaju komponente varijacije od Y.

Za sumu proizvoda X i Y postupak se naziva *analiza kovarijanse* i u opštem slučaju prikazan je u tab. 14.2.

TAB. 14.2. Analiza kovarijanse u potpuno slučajnom rasporedu

Izvori varijacije	Suma proizvoda	Stepeni slobode
Između tretmana	$\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{X}_{i0} - \bar{X}_{00})(\bar{Y}_{i0} - \bar{Y}_{00})$	$k-1$
Unutar tretmana	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_{i0})(Y_{ij} - \bar{Y}_{i0})$	$N-k$
Total	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_{00})(Y_{ij} - \bar{Y}_{00})$	$N-1$

Ceo postupak u opštem slučaju prikazan je u tab. 14.3.

TAB. 14.3. Analiza varijanse i kovarijanse kod potpuno slučajnog ogleda

Izvori varijacije	Stepeni slobode	$\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$
Između tretmana	$k-1$	T_{xx}	T_{xy}	T_{yy}
Unutar tretmana	$N-k$	P_{xx}	P_{xy}	P_{yy}
Total	$N-1$	S_{xx}	S_{xy}	S_{yy}

Tab. 14.3. treba da pruži elemente za izračunavanja koja će omogućiti da se *otkloni uticaj promenljive X na varijansu pogreške od Y, kao i na varijansu tretmana od Y.* Postupak se u praksi svodi na to da se *suma kvadrata totala od Y koriguje za vrednost regresije* i time se istovremeno i ukupan *broj stepeni slobode smanjuje za* 1. Varijacija unutar tretmana od Y se takođe smanjuje za uticaj promenljive X, s tim što je i ovde broj stepeni slobode manji za 1. Korigovana suma kvadrata tretmana dobija se iz razlike između korigovanih suma kvadrata totala i unutar tretmana. Ceo postupak u opštem slučaju prikazan je u tab. 14.4.

Postavlja se pitanje: da li su linearne regresije *iste* za sve grupe tretmana koji se ispituju? Razliku između njih prouzrokuju: nagib, visina i $\sigma^2_{y\cdot x}$ (varijansa regresije). Prvenstveno nas najčešće interesuje visina, tj. da li će sredine tretmana od Y biti iste za datu sredinu od X? U traženju odgovora polazi se od pretpostavke da su uzorci uzeti iz osnovnih skupova sa zajedničkom varijansom σ^2 i da su nagibi regresionih linija isti, što znači da su regresione linije osnovnih skupova paralelne. Ukoliko u pogledu ovih pretpostavki postoji neka sumnja, *homogenost varijansi* moguće je testirati putem F–testa, gde je:

$$F = \frac{\textit{Varijansa regresije}}{\textit{Korigovana varijansa pogreške}}[\,st.\,sl.\ 1\ i\ (N-k-1)]\,. \tag{14.2}$$

TAB. 14.4. Podela P_{yy} i S_{yy} na delove koji se odnose na regresiju i na odstupanja od regresije

	Regresija		Odstupanja od regresije		
	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata
Total	1	$\frac{S^2_{xy}}{S_{xx}}$	$N-2$	$S_{yy}-\frac{S^2_{xy}}{S_{xx}}$	
Varijacija unutar tretmana	1	$\frac{P^2_{xy}}{P_{xx}}$	$N-k-1$	$P_{yy}-\frac{P^2_{xy}}{P_{xx}}$	s^2_P
Varijacija između tretmana			$k-1$	$\left(S_{yy}-\frac{S^2_{xy}}{S_{xx}}\right)-\left(P_{yy}-\frac{P^2_{xy}}{P_{xx}}\right)= = T_{yy}-\frac{S^2_{xy}}{S_{xx}}+\frac{P^2_{xy}}{P_{xx}}$	s^2_T

Primena analize kovarijanse *opravdana* je samo u slučaju kada je izračunato F značajno.

F–test homogenosti varijansi između tretmana i unutar tretmana je:

$$\frac{s_T^2}{s_P^2}[\,st.\,sl.\ (k-1)\ i\ (N-k-1)]\,. \tag{14.3}$$

Matematički *model I* za potpuno slučajni ogled, pod uslovom da su ispunjene navedene pretpostavke, je:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta(X_{ij} - \bar{X}_{00}) + \varepsilon_{ij},\ (\,i = 1,2,...,k;\ j = 1,2,...,n), \tag{14.4}$$

gde je Y_{ij}–prinos j–tog posmatranja i i–tog tretmana, μ–sredina osnovnog skupa, τ_i–dejstvo i–tog tretmana, β–koeficijent linearne regresije, X_{ij}–vrednost j–tog posmatranja i i–tog tretmana od X, $\bar{X}_{00}$–opšta srednja vrednost od X i ε_{ij}: $N(0, \sigma^2)$.

Dati model I može da se napiše i kao:

$$Y_{ij} - \beta(X_{ij} - \bar{X}_{00}) = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}. \tag{14.5}$$

Leva strana ovog izraza predstavlja *korigovanu* vrednost od Y_{ij} za dejstvo linearne regresije. τ_i može da se smatra kao dejstvo tretmana nakon što je izvršena korekcija za linearnu regresiju promenljive X_{ij}. Na taj način analiza kovarijanse omogućuje nam da odstranimo deo tretmana koji se duguje linearnoj vezi sa X_{ij}.

Vrednost od Y posle korekcije za X dobija se na način:

$$Y'_{ij} = Y_{ij} - b(X_{ij} - \bar{X}_{00}). \tag{14.6}$$

Posle toga mogla bi se izvesti analiza varijanse na bazi novih podataka.

Korigovane srednje vrednosti tretmana se izračunavaju po obrascu:

$$\bar{Y}_i' = \bar{Y} - b(\bar{X}_i - \bar{X}_{00})\,. \tag{14.7}$$

Treba podvući da razlika $\bar{Y}_i - \bar{Y}_j'$ tj. razlika između dve korigovane sredine tretmana može da bude i *manja* nego razlika nekorigovanih sredina tretmana. Međutim, smanjenje pogreške u analizi kovarijanse dovodi do toga da i manje razlike između sredina tretmana mogu da budu značajne.

Standardna greška razlike za testiranje razlike između sredina dva korigovana tretmana dobija se prema obrascu:

$$s_D = \sqrt{s_P^2\left[\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} + \frac{(\bar{X}_i - \bar{X}_j)^2}{P_{xx}}\right]}\,. \tag{14.8}$$

Kad se radi o većem broju upoređenja između sredina tretmana, tada jedan *prosek standardne greške razlike* može da se upotrebi za sva upoređenja. Tom prilikom smanjenje u tačnosti nije tako veliko, naročito kad broj stepeni slobode za pogrešku nije manji od 20 i ako suma kvadrata tretmana od X nije značajna. Za tu svrhu prvo se izračunava srednja varijansa pogreške koja će da zameni s_P^2:

$$\bar{s}_P^2 = s_P^2\left[1 + \frac{T_{xx}}{(k-1)P_{xx}}\right]. \tag{14.9}$$

Za testiranje razlike između dve sredine izračunava se prosečna vrednost standardne greške razlike:

$$\bar{s}_D = \sqrt{\bar{s}_P^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}. \tag{14.10}$$

Efikasnost analize kovarijanse može da se utvrdi putem formule:

$$\frac{P_{yy}/(N-k)}{\bar{s}_P^2} \tag{14.11}$$

Indeks iznad 100 govori koliko bi više jedinica trebalo uključiti u ogled da se postigne ista preciznost kao i prilikom primene analize kovarijanse.

14.3. Analiza kovarijanse u ogledu sa potpuno slučajnim rasporedom tretmana

Za ilustraciju uzećemo ogled u kome se ispitivao prirast vezane tovne junadi uz primenu kastracije i hidroksizin hidrohlorida – Tran – *Q* (Institut za stočarstvo, Novi Sad). Pored prosečnog dnevnog prirasta u *kg* (*Y*), date su i početne težine (*X*) za svako june. Ogled je trajao 121 dan i rezultati su prikazani u tab. 14.5.

TAB. 14.5. Rezultati ogleda sa prirastom vezane tovne junadi

Kastrirana		Nekastrirana		Tran–*Q*	
X	Y	*X*	Y	*X*	Y
115	0,91	140	1,27	150	1,32
120	1,06	120	1,47	115	0,82
133	1,06	122	1,34	120	1,18
132	0,97	132	1,12	125	0,90
135	1,22	132	1,03	130	1,47
140	1,36	142	1,23	135	1,37
150	1,30	138	1,34	145	1,35
150	1,39	148	0,96	160	1,39
178	1,35	180	1,45	171	1,35
178	1,31	180	1,32	184	1,25
1.431	11,93	1.434	12,53	1.435	12,40

Analiza kovarijanse prikazana je u tab. 14.6.

TAB. 14.6. Analiza kovarijanse ogleda sa prirastom vezane tovne junadi

Izvori varicije	Stepeni slobode	Sume kvadrata i proizvoda $\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$	Odstupanja od regresije $\sum y^2 - \frac{\left(\sum xy\right)^2}{\sum x^2}$	Stepeni slobode	Sredina kvadrata
Između tretmana	2	0,8667	0,1183	0,0200			
Unutar tretmana	27	12.837,8000	52,7550	0,9606	0,7438	26	0,0286
Total	29	12.838,6667	52,8733	0,9806	0,7629	28	
Razlika za testiranje između korigovanih sredina tretmana					0,0191	2	0,0096

Za testiranje homogenosti varijansi izračunava se:

$$F = \frac{0,0096}{0,0286} = 0,3357.$$

$F_{(0,05\,;\,2\,i\,26)} = 3,37$. Razlike između sredina tretmana nisu značajne.

Da se ispitivanje izvodilo bez uključenja promenljive X odnos varijansi za Y bio bi:

$$F = \frac{0,0200/2}{0,9606/27} = \frac{0,0100}{0,0356} = 0,2809.$$

Kao što se vidi, efikasnost postignuta uvođenjem X je bez značaja jer se i jedno i drugo izračunato F međusobno malo razlikuju.

Sume kvadrata i proizvoda datih u tab. 14.6. izračunate su na sledeći način:

S_{xx} = suma kvadrata totala za promenljivu $X = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2 - C_{xx}$, (14.12)

gde je C_{xx}–korektivni faktor. Dakle:

$$S_{xx} = (115)^2 + (120)^2 + \ldots + (184)^2 - \frac{(4.300)^2}{(30)} = 629.172 - 616.333,3333 =$$
$$= 12.838,6667,$$

$$T_{xx} = \text{Suma kvadrata tretmana za } X = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} X_{ij}\right)^2}{n} - C_{xx} =$$

$$= \frac{(1.431)^2 + (1.434)^2 + (1.435)^2}{10} - \frac{(4.300)^2}{30} = 0{,}8667, \qquad (14.13)$$

$$P_{xx} = \text{Suma kvadrata pogreške za } X = S_{xx} - T_{xx} =$$

$$= 12.838{,}6667 - 0{,}8667 = 12.837{,}8000, \qquad (14.14)$$

$$S_{yy} = \text{Suma kvadrata za promenljivu } Y = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - C_{yy}, \qquad (14.15)$$

gde je C_{yy} = korektivni faktor. Dakle:

$$S_{yy} = (0{,}91)^2 + (1{,}06)^2 + ... + (1{,}25)^2 - \frac{(36{,}86)^2}{30} = 46{,}2692 - 45{,}2886 = 0{,}9806,$$

$$T_{yy} = \text{Suma kvadrata tretmana za } Y = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}\right)^2}{n} - C_{yy} =$$

$$= \frac{(11{,}93)^2 + (12{,}53)^2 + (12{,}40)^2}{10} - \frac{(36{,}86)^2}{30} = 0{,}0200, \qquad (14.16)$$

$$P_{yy} = \text{Suma kvadrata pogreške za } Y = S_{yy} - T_{yy} = 0{,}9806 - 0{,}0200 = 0{,}9606, \qquad (14.17)$$

$$S_{xy} = \text{Suma proizvoda promenljivih } X \text{ i } Y = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} XY - C_{xy}, \qquad (14.18)$$

gde je C_{xy} = korektivni faktor. Dakle:

$$S_{xy} = (115 \cdot 0{,}91) + (120 \cdot 1{,}06) + ... + (184 \cdot 1{,}25) - \frac{(4.300 \cdot 36{,}86)}{30} =$$

$$= 5.336{,}1400 - 5.283{,}2667 = 52{,}8733,$$

$$T_{xy} = \text{Suma kvadrata proizvoda } X \text{ i } Y \text{ za tretmane} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \sum_{j=1}^{n} Y_{ij}}{n} - C_{xy} =$$

$$= \frac{(1.431 \cdot 11{,}93) + (1.434 \cdot 12{,}53) + (1.435 \cdot 12.40)}{10} -$$

$$- \frac{(4.300 \cdot 36{,}86)}{30} = 0{,}1183 \qquad (14.19)$$

P_{xy} = Suma kvadrata pogreške proizvoda X i Y =

$$= S_{xy} - T_{xy} = 52{,}8733 - 0{,}1183 = 52{,}7550. \qquad (14.20)$$

Za ilustraciju izračunaćemo korigovane sredine tretmana od Y. Kao što smo već naveli (14.7), izračunavanje se izvodi po obrascu:

$$\bar{Y}_i' = \bar{Y}_i - b(\bar{X}_i - \bar{X}_{00}).$$

U našem primeru imamo da je $b = \frac{P_{xy}}{P_{xx}} = \frac{52{,}7550}{12.837{,}8000} = 0{,}0041,$ (14.21)

$$\bar{X}_{00} = 143{,}3333.$$

Nekorigovana sredina prvog tretmana (nekastrirana junad) je $\bar{X}_1 = 143{,}1000$; $\bar{Y}_1 = 1{,}1930$, te je korigovana sredina:

$$\bar{Y}_1' = 1{,}1930 - 0{,}0041(143{,}1000 - 143{,}3333) = 1{,}1920.$$

Na isti način se izračunavaju korigovane sredine i ostalih tretmana.

Standardna greška razlike za upoređenja sredina dva prva po redu korigovana tretmana je:

$$s_D = \sqrt{s_P^2\left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^2}{P_{xx}}\right]} =$$

$$= \sqrt{0{,}0286\left[\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{(143{,}1000 - 143{,}4000)^2}{12.837{,}8000}\right]} = 0{,}0756.$$

Izračunato t je: $t = \frac{1{,}1920 - 1{,}2530}{0{,}0756} = -0{,}8069.$

$t_{(0{,}05\ i\ 26)} = 2{,}056$. Razlika očigledno nije značajna.

Standardna greška razlike koja se može primeniti za upoređenje između sredina svih tretmana je:

$$\bar{s}_P = \sqrt{\bar{s}_P^2\left[1 + \frac{T_{xx}}{(k-1)P_{xx}}\right]} = \sqrt{0{,}0286\left[1 + \frac{0{,}8667}{(3-1)(12.837{,}8)}\right]} = 0{,}169 .$$

$$\bar{s}_D = \sqrt{\bar{s}_P^2\left(\frac{2}{n}\right)} = \sqrt{0{,}0286\left(\frac{2}{10}\right)} = 0{,}0756 .$$

Ona je u ovom primeru ista kao i u slučaju izračunavanja za upoređenje između sredina prva dva tretmana.

14.4. Analiza kovarijanse u slučajnom blok–sistemu

Analiza kovarijanse može se bez većih teškoća primeniti i na druge planove ogleda. Ovde ćemo razmotriti osnove analize kovarijanse u slučajnom blok–sistemu. U takvom planu model glasi:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \rho_j + \beta(X_{ij} - \bar{X}_{00}) + \varepsilon_{ij}, \tag{14.22}$$

gde je μ prava sredina, a τ_i i ρ_j su uticaji blokova i tretmana. Kod slučajnog blok–sistema polazi se od istih pretpostavki kao i u potpuno slučajnom obledu, tj. da je varijansa pogreške ista, odnosno zajednička nakon korigovanja za dejstvo regresije, kao i da je parametar β, koji određuje nagib prave, isti za sve tretmane.

Testiranje linearnosti regresije i homogenosti varijansi se obično ne izvodi nego se ove dve pretpostavke usvajaju a priori.

Analiza kovarijanse u opštem slučaju data je u tab. 14.7.

Za ilustraciju uzećemo rezultate ogleda sa 3 sorte žitarica, u 4 bloka, koji su dati u tab. 14.8 (Wishart, 1950). Ista tabela sadrži podatke i o prinosima odgovarajućih sorti na istim parcelama u prethodnoj godini.

U produžetku su data izračunavanja potrebna za analizu kovarijanse:

Suma kvadrata totala za X je:

$$S_{xx} = (54)^2 + (51)^2 + \dots + (41)^2 - \frac{(636)^2}{12} = 514.$$

Suma kvadrata blokova za X je:

$$B_{xx} = \frac{(162)^2 + (186)^2 + (144)^2 + (144)^2}{3} - \frac{(636)^2}{12} = 396.$$

TAB. 14.7. Analiza kovarijanse u slučajnom blok–sistemu

TAB. 14.7 Analiza kovarijanse u slučajnom blok – sistemu

Izvori varijacije	Sume kvadrata i proizvoda			Stepeni slobode	Odstupanje od regresije		
	$\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$		Korigovana suma kvadrata $\sum y^2 - \left(\sum xy\right)^2 / \sum x^2$	Stepeni slobode	Sredina kvadrata
Total	S_{xx}	S_{xy}	S_{yy}	$N-1$			
Ponavljanje	B_{xx}	B_{xy}	B_{yy}	$b-1$			
Tretmani	T_{xx}	T_{xy}	T_{yy}	$k-1$			
Pogreška	P_{xx}	P_{xy}	P_{yy}	$(b-1)(k-1)$	$P'_{yy} = P_{yy} - \frac{P_{xy}^2}{P_{xx}}$	$(b-1)(k-1)-1$	s_P^2
Tretmani + +Pogreška	$T_{xx}+P_{xx}$	$T_{xy}+P_{xy}$	$T_{yy}+P_{yy}$	$b(k-1)$	$(T_{yy}+P_{yy})' = (T_{yy}+P_{yy}) - (T_{xy}+P_{xy})^2/(T_{xx}+P_{xx})$		
Korigovani tretmani					$(T_{yy}+P_{yy})' - P'_{yy} = T'_{yy}$	$k-1$	s_T^2

TAB. 14.8. Rezultati ogleda sa 3 vrste žitarica u slučajnom blok–sistemu

Blokovi		Sorte A	Sorte B	Sorte C	Ukupno
1	X	54	51	57	162
	Y	64	65	72	201
2	X	62	64	60	186
	Y	68	69	70	207
3	X	51	47	46	144
	Y	54	60	57	171
4	X	53	50	41	144
	Y	62	66	61	189
Ukupno	X	220	212	204	636
	Y	248	260	260	768

Suma kvadrata sorti za X je:

$$T_{xx} = \frac{(220)^2 + (212)^2 + (204)^2}{4} - \frac{(636)^2}{12} = 32.$$

Suma kvadrata pogreške za X je:

$$P_{xx} = 514 - 396 - 32 = 86.$$

Suma kvadrata totala za Y je:

$$S_{yy} = (64)^2 + (65)^2 + ... + (61)^2 - \frac{(768)^2}{12} = 324.$$

Suma kvadrata blokova za Y je:

$$B_{yy} = \frac{(201)^2 + (207)^2 + (171)^2 + (189)^2}{3} - \frac{(768)^2}{12} = 252.$$

Suma kvadrata sorti za Y je:

$$T_{yy} = \frac{(248)^2 + (206)^2 + (260)^2}{4} - \frac{(768)^2}{12} = 24.$$

Suma kvadrata pogreške za Y je:

$$P_{yy} = 324 - 252 - 24 = 48.$$

Suma kvadrata totala proizvoda X i Y je:

$$S_{xy} = (54)(64) + (51)(65) + ... + (41)(61) - \frac{(636)(768)}{12} = 286.$$

Suma kvadrata blokova proizvoda X i Y *je:*

$$B_{xy} = \frac{(162)(201) + (186)(207) + (144)(171) + (144)(189)}{3} - \frac{(636)(768)}{12} = 264.$$

Suma kvadrata tretmana proizvoda X i Y je:

$$T_{xy} = \frac{(220)(248) + (212)(260) + (204)(260)}{4} - \frac{(636)(768)}{12} = -24\,.$$

Suma kvadrata pogreške proizvoda X i Y je:

$P_{xy} = 286 - 264 - (-24) = 46.$

Rezultati analize kovarijanse prikazani su u tab. 14.9.

TAB. 14.9. Analiza kovarijanse ogleda u slučajnom blok–sistemu (tab. 14.8.)

Izvori varijacije	Sume kvadrata i prizvoda			Stepeni slobode	Odstupanja od regresije		
	$\sum y^2$	$\sum xy$	$\sum x^2$		Korigovana suma kvadrata $\sum y^2 - (\sum xy)^2/\sum x^2$	Stepeni slobode	Sredina kvadrata
Total,S	324	286	514	11			
Blokovi,B	252	264	396	3			
Tretmani,T	24	−24	32	2			
Pogreška,P	48	46	86	6	23,4	5	4,68
$T + P$	72	22	118	8	67,9	7	
Korigovani tretmani					44,5	2	22,25

Nakon izvršene korekcije sredina kvadrata može se izvesti F–test o homogenosti varijansi:

$$F = \frac{22{,}25}{4{,}68} = 4{,}75.$$

$F_{(0{,}05\,;\,2\,i\,5)} = 5{,}79$. Rezultati ogleda, i pored izvedene korekcije, ne pokazuju značajne razlike. Da korektura nije izvedena izračunato F bi iznosilo:

$$F = \frac{24/2}{48/6} = 1{,}5.$$

$F_{(0{,}05\,;\,2\,i\,6)} = 5{,}14$. Ovo ukazuje da stvarna razlika u prinosima između sorti može da bude prikrivena razlikom u plodnosti između parcela. Konačan zaključak na osnovu samo ovih rezultata ipak ne bi smeo da se izvodi pogotovu što ni posle korekture izračunato F nije značajno.

Upoređenje između korigovanih sredina tretmana izvode se na isti način kao i u slučaju ogleda sa potpuno slučajnim rasporedom.

TAB. 14.10. Analiza kovarijanse kod $n \times n$ latinskog kvadrata

Izvori varijacije	Sume kvadrata i proizvoda			Stepeni slobode	Odstupanje od regresije		
	$\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$		Korigovana suma kvadrata $\sum y^2 - \left(\sum xy\right)^2 / \sum x^2$	Stepeni slobode	Sredina kvadrata
Total	S_{xx}	S_{xy}	S_{yy}	$N-1$			
Redovi	R_{xx}	R_{xy}	R_{yy}	$n-1$			
Kolone	K_{xx}	K_{xy}	K_{yy}	$n-1$			
Tretmani	T_{xx}	T_{xy}	T_{yy}	$n-1$			
Pogreška	P_{xx}	P_{xy}	P_{yy}	$(n-1)(n-2)$	$P'_{yy} = P_{yy} - \frac{P_{xy}^2}{P_{xx}}$	$(n-1)(n-2)-1$	s_P^2
Tretmani + +pogreška	$T_{xx}+P_{xx}$	$T_{xy}+P_{xy}$	$T_{yy}+P_{yy}$	$(n-1)^2$	$(T_{yy}+P_{yy})' = (T_{yy}+P_{yy}) - (T_{xy}+P_{xy})^2 / (T_{xx}+P_{xx})$	$(n-1)^2-1$	
Korigovani tretmani					$(T_{yy}+P_{yy})' - P'_{yy} = T'_{yy}$	$n-1$	s_T^2

TAB 14.10. Analiza kovarijanse kod $n \times n$ latinskog kvadrata

14.5. Analiza kovarijanse kod latinskog kvadrata

U osnovi ništa se ne menja kad je ogled postavljen po latinskom kvadratu. Matematički model u tom slučaju glasi:

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \rho_k + \beta(X_{ijk} - \bar{X}_{00}) + \varepsilon_{ijk}, \tag{14.23}$$

gde je $= 1,..., n; j = 1,..., n; k = 1,..., n.$

Analiza kovarijanse u opštem slučaju kod $n \times n$ latinskog kvadrata prikazana je u tab. 14.10.

Za ilustraciju uzećemo ogled sa sojom (Snedecor, 1959). Ispitivani su prinosi 4 linije soje *A, B, C* i *D*. Kao dodatna komponenta uzet je procenat zaraženih stabljika. Rezultati su prikazani u tab. 14.11.

TAB. 14.11. Procenat zaraženih stabljika (*X*) i prinosi četiri linije soje (*Y*) u ogledu po planu latinskog kvadrata

Redovi	Kolone 1	2	3	4	Ukupno
1. linija	C	*A*	*B*	*D*	
X	4,3	19,3	10,1	14,0	47,7
Y	26,7	21,3	28,3	25,1	101,4
2. linija	A	*B*	*D*	*C*	
X	29,2	34,7	30,2	48,2	142,3
Y	19,7	20,7	20,1	14,7	75,2
3. linija	B	*D*	*C*	*A*	
X	14,0	7,2	6,3	1,0	28,5
Y	26,0	24,9	28,0	28,7	108,6
4. linija	D	*C*	*A*	*B*	
X	8,9	6,7	6,4	5,6	27,6
Y	29,8	29,0	27,3	34,1	120,2
Ukupno					
X	56,4	67,9	53,0	68,8	246,1
Y	102,2	95,9	104,7	102,6	405,4

	Tretmani *A*	*B*	*C*	D
1 *X*	19,3	10,1	4,3	14,0
Y	21,3	28,3	26,7	25,1
2 *X*	29,2	34,7	48,2	30,2
Y	19,7	20,7	14,7	20,1
3 *X*	1,0	14,0	6,3	7,2
Y	28,7	26,0	29,0	24,9
4 *X*	6,4	5,6	6,7	8,9
Y	27,3	34,1	29,0	29,8
Ukupno				
X	55,9	64,4	65,5	60,3
Y	97,0	109,1	99,4	99,9
$\bar{X}$	13,98	16,20	16,38	15,08
$\bar{Y}$	24,25	27,28	24,85	24,98

U produžetku su data izračunavanja za analizu kovarijanse.

Suma kvadrata totala za X je:

$$S_{xx} = (4{,}3)^2 + (19{,}3)^2 + \ldots + (5{,}6)^2 - \frac{(246{,}1)^2}{16} = 2.680{,}62.$$

Suma kvadrata redova za X je:

$$R_{xx} = \frac{(47{,}7)^2 + \ldots + (27{,}6)^2}{4} - \frac{(246{,}1)^2}{16} = 2.239{,}32.$$

Suma kvadrata kolona za X je:

$$K_{xx} = \frac{(56{,}4)^2 + \ldots + (68{,}8)^2}{4} - \frac{(246{,}1)^2}{16} = 48{,}12.$$

Suma kvadrata sorti za X je:

$$T_{xx} = \frac{(55{,}9)^2 + \ldots + (60{,}3)^2}{4} - \frac{(246{,}1)^2}{16} = 14{,}30.$$

Suma kvadrata pogreške za X je:

$$P_{xx} = 2.680{,}62 - 2.239{,}32 - 48{,}12 - 14{,}30 = 378{,}88.$$

Suma kvadrata totala za Y je:

$$S_{yy} = (26{,}7)^2 + \ldots + (34{,}1)^2 - \frac{(405{,}4)^2}{16} = 360{,}18.$$

Suma kvadrata redova za Y je:

$$R_{yy} = \frac{(101{,}4)^2 + \ldots + (120{,}2)^2}{4} - \frac{(405{,}4)^2}{16} = 272{,}93.$$

Suma kvadrata kolona za Y je:

$$K_{yy} = \frac{(102{,}2)^2 + \ldots + (102{,}6)^2}{4} - \frac{(405{,}4)^2}{16} = 10{,}80.$$

Suma kvadrata sorti za Y je:

$$T_{yy} = \frac{(97{,}0)^2 + \ldots + (99{,}9)^2}{4} - \frac{(405{,}4)^2}{16} = 21{,}22.$$

Suma kvadrta pogreške za Y je:

$$P_{yy} = 360{,}18 - 272{,}93 - 10{,}80 - 21{,}22 = 55{,}23.$$

Suma kvadrata totala proizvoda X i Y je:

$$S_{xy} = (4{,}3)(26{,}7) + ... + (5{,}6)(34{,}1) - \frac{(246{,}1)(405{,}4)}{16} = -883{,}46.$$

Suma kvadrata redova proizvoda X i Y je:

$$R_{xy} = \frac{(47{,}7)(111{,}4) + ... + (27{,}6)(120{,}2)}{4} - \frac{(246{,}1)(405{,}4)}{16} = -747{,}97.$$

Suma kvadrata kolona proizvoda X i Y je:

$$K_{xy} = \frac{(56{,}4)(102{,}2) + ... + (68{,}8)(102{,}6)}{4} - \frac{(246{,}1)(405{,}4)}{16} = -14{,}64.$$

Suma kvadrata sorti proizvoda X i Y je:

$$T_{xy} = \frac{(55{,}9)(97{,}0) + ... + (60{,}3)(99{,}9)}{4} - \frac{(246{,}1)(405{,}4)}{16} = 10{,}19.$$

Suma kvadrata pogreške proizvoda X i Y je:

$$P_{xy} = (-883{,}46) - (-747{,}97) - (-14{,}64) - (10{,}19) = -131{,}04.$$

Analiza kovarijanse prikazana je u tab. 14.12.

TAB. 14.12. Analiza kovarijanse ogleda sa sojom po latinskom kvadratu (tab. 14.11)

Izvori varijacije	Sume kvadrata i prizvoda			Stepeni slobode	Odstupanja od regresije		
	$\sum y^2$	$\sum xy$	$\sum x^2$		Korigovane sume kvad. $\sum y^2 - (\sum xy)^2/\sum x^2$	Stepeni slobode	Sredina kvadrata
Redovi, R	272,93	−747,97	2.239,32	3			
Kolone, K	10,80	−14,64	48,12	3			
Sorte, T	21,22	10,19	14,30	3			
Pogreška, P	55,23	−131,04	378,88	6	9,91	5	1,98
$T + P$	76,45	−120,85	393,18	9	39,30	8	
Korigovani tretmani					29,39	3	9,80

$F-$test homogenosti varijansi:

$$F = \frac{9{,}80}{1{,}98} = 4{,}95; \qquad F_{(0{,}05\,;\,3\,i\,5)} = 5{,}41.$$

14.6. Analiza kovarijanse u faktorijalnim ogledima

Kad su posredi faktorijalni ogledi, tada je, pored korekture za pogrešku, potrebno korigovati i sve glavne efekte i interakcije. Matematički model ovakvog ogleda je:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \gamma_j + (\alpha\gamma)_{ij} + \beta(X_{ijk} - \bar{X}_{00}) + \varepsilon_{ijk}, \qquad (14.24)$$

gde je $i = 1,..., a; j = 1,..., b; k = 1,..., n$.

Šema analize kovarijanse u opštem slučaju jednog $a \times b$ faktorijalnog ogleda prikazana je u tab. 14.13. Izračunavanje potrebnih suma kvadrata dato je u produžetku.

Suma kvadrata totala za promenljivu X je:

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} X_{ijk}^2 - C_{xx}, \qquad (14.25)$$

gde je $C_{xx} = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} X_{ijk}\right)^2}{abn}$ = korektivni faktor.

Suma kvadrata tretmana promenljive X je:

$$T_{xx} = \frac{\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \left(\sum_{k=1}^{n} X_{ijk}\right)^2}{n} - C_{xx}. \qquad (14.26)$$

Suma kvadrata pogreške promenljive X je:

$$P_{xx} = S_{xx} - T_{xx} . \qquad (14.27)$$

Sume kvadrata efekata A, B i interakcije AB za promenljivu X dobijaju se na sledeći način:

Suma kvadrata efekta A promenljive X je:

$$A_{xx} = \frac{\sum_{i=1}^{a} \left(\sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} X_{ijk}\right)^2}{nb} - C_{xx}. \qquad (14.28)$$

Suma kvadrata efekta B promenljive X je:

$$B_{xx} = \frac{\sum_{j=1}^{b} \left(\sum_{i=1}^{a} \sum_{k=1}^{n} X_{ijk}\right)^2}{na} - C_{xx}. \qquad (14.29)$$

TAB. 14.13.Analiza kovarijanse u opštem slučaju kod $a \times b$ faktorijalnog ogleda

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Sume kvadrata i proizvoda			Odstupanja od regresije		
		$\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$	Korigovana suma kvadrata $\sum y^2 - \left(\sum xy\right)^2 / \sum x^2$	Stepeni slobode	Sredina kvadrata
Total	$N-1$	S_{xx}	S_{xy}	S_{yy}			
A	$a-1$	A_{xx}	A_{xy}	A_{yy}			
B	$b-1$	B_{xx}	B_{xy}	B_{yy}			
AB	$(a-1)(b-1)$	AB_{xx}	AB_{xy}	AB_{yy}			
Pogreška	$nab-ab$	P_{xx}	P_{xy}	P_{yy}	$P'_{yy} = P_{yy} - \frac{P^2_{xy}}{P_{xx}}$	(nab − ab) − 1	s^2_P
A + Pogreška	(a − 1)+ +$(nab-ab)$	$A_{xx}+P_{xx}$	$A_{xy}+P_{xy}$	$A_{yy}+P_{yy}$	$(A_{yy}+P_{yy})'=(A_{yy}+P_{yy}) - -(A_{xy}P_{xy})^2/(A_{xx}P_{xx})$	$(a-1)+$ $+(nab-ab)-1$	
Korigovan efekat A					$(A_{yy}+P_{yy})' - P'_{yy} = A'_{yy}$	$(a-1)$	s^2_A
B + Pogreška	(b − 1)+ +$(nab-ab)$	$B_{xx}+P_{xx}$	$B_{xy}+P_{xy}$	$B_{yy}+P_{yy}$	$(B_{yy}+P_{yy})' = (B_{yy}+P_{yy}) - -(B_{xy}+P_{xy})^2/(B_{xx}+P_{xx})$	$(b-1)+$ $+(nab-ab)-1$	
Korigovan efekat B					$(B_{yy}+P_{yy})' - P'_{yy} = B'_{yy}$	$(b-1)$	s^2_B
AB + Pogreška	(a − 1)$(b-1)+$ +$(nab-ab)$	$AB_{xx}+P_{xx}$	$AB_{xy}+P_{xy}$	$AB_{yy}+P_{yy}$	$(AB_{yy}+P_{yy})' = (AB_{yy}+P_{yy}) - -(AB_{xy}+P_{xy})^2/(AB_{xx}+P_{xx})$	$(a-1)(b-1)+$ $+(nab-ab)-1$	
Korigovana interakcija AB					$(AB_{yy}+P_{yy})' - P'_{yy} = AB'_{yy}$	$(a-1)(b-1)$	s^2_{AB}

TAB. 14.13.Analiza kovarijanse u opštem slučaju kod $a \times b$ faktorijalnog ogleda

Suma kvadrata interakcije AB promenljive X je:

$$AB_{XX} = T_{XX} - A_{XX} - B_{XX}. \tag{14.30}$$

Na isti način se dobijaju sume kvadrata promenljive Y.

Sume kvadrata proizvoda X i Y se dobijaju na sledeći način:
Suma kvadrata totala promenljive X i Y je:

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} X_{ijk} Y_{ijk} - C_{xy}, \tag{14.31}$$

gde je:

$$C_{xy} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} X_{ijk}\right)\left(\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)}{nab}.$$

Suma kvadrata tretmana proizvoda X i Y je:

$$T_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \left(\sum_{k=1}^{n} X_{ijk}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)}{n} - C_{xy} . \tag{14.32}$$

Suma kvadrata pogreške proizvoda X i Y je:

$$P_{xy} = S_{xy} - T_{xy}. \tag{14.33}$$

Suma kvadrata efekata A, B i interakcije AB proizvoda X i Y je:
Suma kvadrata efekta A proizvoda X i Y je:

$$A_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{a} \left(\sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)\left(\sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)}{nb} - C_{xy}. \tag{14.34}$$

Suma kvadrata efekta B proizvoda X i Y je:

$$B_{xy} = \frac{\sum_{j=1}^{b} \left(\sum_{i=1}^{a} \sum_{k=1}^{n} X_{ijk}\right)\left(\sum_{i=1}^{a} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)}{na} - C_{xy} . \tag{14.35}$$

Suma kvadrata interakcije AB proizvoda X i Y je:

$$AB_{xy} = T_{xy} - A_{xy} - B_{xy}. \tag{14.36}$$

$F-$test za efekte A i B i interakciju AB izvodi se na uobičajeni način na osnovu korigovanih sredina kvadrata datih u poslednjoj koloni tab. 14.13.

Standardna greška i standardne greške razlike za određivanje razmaka poverenja aritmetičkih sredina i testiranje razlika između sredina pojedinih efekata dobijaju se na sledeći način:

Za razmak poverenja aritmetičkih sredina efekta A standardna greška je:

$$s_{(A)} = \sqrt{s_P^2\left[\frac{1}{nb} + \frac{(\bar{X}_i - \bar{X}_{00})^2}{P_{xx}}\right]}. \tag{14.37}$$

Za testiranje razlika između sredina efekata A standardna greška razlike je:

$$s_{D(A)} = \sqrt{s_P^2\left[\frac{2}{nb} + \frac{(\bar{X}_i - \bar{X}_j)^2}{P_{xx}}\right]}. \tag{14.38}$$

Standardne greške i standardne greške razlike za ostale efekte su:

$$s_{(B)} = \sqrt{s_P^2\left[\frac{1}{na} + \frac{(\bar{X}_j - \bar{X}_{00})^2}{P_{xx}}\right]}, \tag{14.39}$$

$$s_{D(B)} = \sqrt{s_P^2\left[\frac{2}{na} + \frac{(\bar{X}_i - \bar{X}_j)^2}{P_{xx}}\right]}, \tag{14.40}$$

$$s_{(AB)} = \sqrt{s_p^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{00})^2}{P_{xx}}\right]}, \tag{14.41}$$

$$s_{D(AB)} = \sqrt{s_P^2\left[\frac{2}{n} + \frac{(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{i'j'})^2}{P_{xx}}\right]}. \tag{14.42}$$

Za ilustraciju analize kovarijanse u ogledu sa dva faktora u potpuno slučajnom rasporedu uzećemo ispitivanje o uticaju načina držanja tovne junadi na prosečan dnevni prirast uz primenu kastracije i hidroksizina (Institut za stočarstvo, Novi Sad). Ogled je izveden sa 6 grupa, svaka po 10 grla. Prvi faktor je uključivao tri tretmana: 1) kastrirana, 2) nekastrirana, 3) u hrani dodavan Tran $- Q$ (hidroksizin hidrohlorid). Drugi faktor dva tretmana: 1) vezana grla i 2) nevezana grla (slobodno držana). U ovom 2×3 faktorijalnom ogledu kao dopunska varijacija (X) uzeta je početna težina svakog grla. Rezultati ogleda prikazani su u tab. 14.14.

TAB. 14.14. Prosečan dnevni prirast i početna težina junadi u 2 × 3 faktorijalnom ogledu

Ponavljanje		Kastrirana		Nekastrirana		Tran−*Q*	
		vezana	nevezana	vezana	nevezana	vezana	nevezana
1	*X*	115	172	140	100	150	116
	Y	0,91	1,39	1,27	0,58	1,32	0,88
2	*X*	120	92	120	140	115	121
	Y	1,06	0,82	1,47	1,47	0,82	0,74
3	*X*	133	121	122	123	120	126
	Y	1,06	1,09	1,34	1,00	1,18	1,17
4	*X*	132	127	132	125	125	128
	Y	0,97	1,13	1,12	1,09	0,90	1,17
5	*X*	135	130	132	131	130	134
	Y	1,22	1,02	1,03	1,17	1,47	1,22
6	*X*	140	128	142	137	135	137
	Y	1,36	0,63	1,23	1,22	1,37	1,26
7	*X*	150	140	138	140	145	145
	Y	1,30	1,32	1,34	1,13	1,35	1,41
8	*X*	150	165	148	145	160	160
	Y	1,39	1,58	0,96	1,07	1,39	1,19
9	*X*	178	165	180	160	171	172
	Y	1,35	1,12	1,45	1,31	1,35	1,45
10	*X*	178	157	180	192	184	156
	Y	1,31	0,97	1,32	1,51	1,25	1,13
Ukupno	*X*	1.431	1.397	1.434	1.393	1.435	1.395
	Y	11,93	11,07	12,53	11,55	12,40	11,62

Izračunavanja za analizu kovarijanse data su u produžetku:

Suma kvadrata totala promenljive X je:

$$S_{XX} = (115)^2 + (120)^2 + \ldots + (156)^2 - \frac{(8.485)^2}{60} = 27.052,5834.$$

Suma kvadrata tretmana promenljive X je:

$$T_{xx} = \frac{(1.431)^2 + (1.397)^2 + \ldots + (1.395)^2}{10} - \frac{(8.485)^2}{60} = 222,0834.$$

Suma kvadrata pogreške promenljive X je:

$$P_{XX} = 27.052,5834 - 222,0834 = 26.830,5000.$$

Suma kvadrata efekta A (način držanja) promenljive X je:

$$A_{xx} = \frac{(4.300)^2 + (4.185)^2}{30} - \frac{(8.485)^2}{60} = 220,4167.$$

Suma kvadrata efekta B (kastracija) promenljive X je:

$$B_{xx} = \frac{(2.828)^2 + (2.827)^2 + (2.830)^2}{20} - \frac{(8.485)^2}{60} = 0{,}2334.$$

Suma kvadrata interakcije AB promenljive X je:

$(AB)_{xx} + 222{,}0834 - 220{,}4167 - 0{,}2334 = 1{,}4333.$

Suma kvadrata totala promenljive Y je:

$$S_{yy} = (0{,}91)^2 + (1{,}06)^2 + ... + (1{,}13)^2 - \frac{(71{,}10)^2}{60} = 2{,}8367.$$

Suma kvadrata tretmana promenljive Y je:

$$Z_{yy} = \frac{(11{,}93)^2 + (11{,}07)^2 + ... + (11{,}62)^2}{10} - \frac{(71{,}10)^2}{60} = 0{,}1523.$$

Suma kvadrata pogreške promenljive Y je:

$P_{yy} = 2{,}8367 - 0{,}1523 = 2{,}6844.$

Suma kvadrata efekata A (način držanja) promenljive Y je:

$$A_{yy} = \frac{(36{,}86)^2 + (34{,}24)^2}{30} - \frac{(71{,}10)^2}{60} = 0{,}1144.$$

Suma kvadrata efekta B (kastracija) promenljive Y je:

$$B_{yy} = \frac{(23{,}00)^2 + (24{,}08)^2 + (24{,}02)^2}{20} - \frac{(71{,}10)^2}{60} = 0{,}0368.$$

Suma kvadrata interakcije AB promenljive Y je:

$(AB)_{yy} = 0{,}1523 - 0{,}1144 - 0{,}0368 = 0{,}0011.$

Suma kvadrata totala proizvoda promenljivih X i Y je:

$$S_{xy} = (115)(0{,}91) + (120)(1{,}06) + ... + (156)(1{,}13) - \frac{(8.485)(71{,}10)}{60} = 168{,}9250.$$

Suma kvadrata tretmana proizvoda promenljivih X i Y je:

$$T_{xy} = \frac{(1.431)(11{,}93) + (1.397)(11{,}07) + .. + (1.395)(11{,}62)}{10} - \frac{(8.485)(71{,}10)}{60} = 5{,}0440.$$

Suma kvadrata pogreške proizvoda promenljivih X i Y je:

$P_{xy} = 168,9250 - 5,0440 = 163,8810.$

Suma kvadrata efekta A (način držanja) proizvoda promenljivih X i Y je:

$$A_{xy} = \frac{(4.300)(36,86) + (4.185)(34,24)}{30} - \frac{(8.485)(71,10)}{60} = 5,0217.$$

Suma kvadrata efekta B (kastracija) proizvoda promenljivih X i Y je:

$$B_{xy} = \frac{(2.828)(23,00) + (2.827)(24,08) + (2.830)(24,02)}{20} - \frac{(8.485)(71,10)}{60} = 0,013.$$

Suma kvadrata interakcije AB proizvoda promenljivih X i Y je:

$(AB)_{xy} = 5,0400 - 5,0217 - 0,0130 = 0,0093.$

Analiza kovarijanse prikazana je u tab. 14.15.

TAB. 14.15. Analiza kovarijanse 2 × 3 faktorijalnog ogleda iz tab. 14.14.

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Sume kvadrata i prizvoda $\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$	Odstupanja od regresije: Korigovana suma kvadrata $\sum y^2 - (\sum xy)^2 / \sum x^2$	Stepeni slobode	Sredina kvadrata
Total	59	27.052,5834	168,9250	2,8367			
A	1	220,4167	5,0217	0,1144			
B	2	0,2334	0,0130	0,0368			
AB	2	1,4333	0,0093	0,0011			
Pogreška, P	54	26.830,5000	163,8810	2,6844	1,6834	53	0,0318
$A + P$	55	27.050,9167	168,9027	2,7988	1,7442	54	
Korigovani efekat A					0,0608	1	0,0608
$B + P$	56	26.830,7334	163,8940	2,7212	1,7201	55	
Korigovani efekat B					0,0367	2	0,0183
$AB + P$	56	26.831,9333	163,8903	2,6855	1,6845	55	
Korigovana interakcija AB					0,0011	2	0,0005

Putem F–testa dolazimo do zaključka da nijedan efekat nije značajan.

U prethodnom izlaganju o analizi kovarijanse polazilo se od slučajeva uključivanja samo jedne nezavisno promenljive (X). Međutim, analiza kovarijanse, da bi se povećala preciznost ogleda, može da se primeni i u slučajevima kad postoji osnova za uključivanje *dve ili više nezavisnih promenljivih*. Tada se radi o višestrukoj kovarijansi, o čijim će principima analize za dve nezavisne promenljive (X_1, X_2) biti govora o produžetku.

Ako se radi o ogledu u potpuno slučajnom rasporedu, prvo se izračunaju sume kvadrata i proizvoda promenljivih X_1, X_2 i Y. Te vrednosti su prikazane u tab. 14.16.

TAB. 14.16. Sume kvadrata i proizvoda za višestruku kovarijansu u potpuno slučajnom ogledu

Izvori varijacije	$\sum x_1^2$	$\sum x_2^2$	$\sum x_1x_2$	$\sum x_1y$	$\sum x_2y$	$\sum y^2$
Ukupno	S_{x1}	S_{x2}	Sx_1x_2	Sx_1y	Sx_2y	S_{yy}
Između tretmana	T_{x1}	T_{x2}	Tx_1x_2	Tx_1y	Tx_2y	T_{yy}
Unutar tretmana	P_{x1}	P_{x2}	Px_1x_2	Px_1y	Px_2y	P_{yy}

U daljem postupku izračunavaju se parcijalni koeficijenti regresije $b_{y1.2}$ i $b_{y2.1}$, sume kvadrata koje proizilaze iz regresije i odstupanja od regresije kako za pogrešku (varijacija unutar tretmana) tako i za total. Parcijalni koeficijenti regresije dobijaju se po već poznatim obrascima (13.11. i 13.12).

$$b_{y1.2} = \frac{\left(\sum x_2^2\right)\left(\sum x_1y\right) - \left(\sum x_1x_2\right)\left(\sum x_2y\right)}{\left(\sum x_1^2\right)\left(\sum x_2^2\right) - \left(\sum x_1x_2\right)^2},$$

$$b_{y2.1} = \frac{\left(\sum x_1^2\right)\left(\sum x_2y\right) - \left(\sum x_1x_2\right)\left(\sum x_1y\right)}{\left(\sum x_1^2\right)\left(\sum x_2^2\right) - \left(\sum x_1x_2\right)^2}.$$

Suma kvadrata koja proizilazi iz regresije dobija se po obrascu (13.14):

Suma kvadrata regresije = $b_{y1.2}\sum x_1y + b_{y2.1}\sum x_2y$.

Suma kvadrata oko regresije izračunava se iz razlike (13.15):

$\sum y^2 -$ Suma kvadrata regresije.

Na ovaj način izračunati pokazatelji omogućuju da se postavi analiza višestruke kovarijanse. Njen skraćeni vid prikazan je u tab. 14.17.

TAB. 14.17. Analiza višestruke kovarijanse
(sume kvadrata regresije i odstupanja od regresije)

Izvori varijacije	Stepeni slobode	$\sum y^2$	Suma kvadrata regresije	Odstupanje od regresije		
				Suma kvadrata oko regresije	Stepeni slobode	Sredina kvadrata
Tretmani, T	$k-1$	T_{yy}				
Pogreška, P	$N-k$	P_{yy}	P'_{yy}	P''_{yy}	$N-k-2$	s_P^2
Total$(T+P)$	$N-1$	S_{yy}	S'_{yy}	S''_{yy}	$N-1-2$	
Korigovani tretmani				T''_{yy}	$k-1$	s_T^2

Korigovane sredine tretmana dobijaju se prema obrascu:

$$\bar{Y}_i' = \bar{Y}_i - b_{y1.2}(\bar{X}_{1i} - \bar{X}_1) - b_{y2.1}(\bar{X}_{2i} - \bar{X}_2). \tag{14.43}$$

Standardna greška aritmetičke sredine za određivanje razmaka poverenja korigovanih aritmetičkih sredina tretmana izračunava se po obrascu (13.25):

$$s_{\bar{X}}^2 = s_P^2\left[\frac{1}{n} + C_{11}(\bar{X}_{1i} - \bar{X}_1)^2 + C_{22}(\bar{X}_{2i} - \bar{X}_2)^2 + 2C_{12}(\bar{X}_{1i} - \bar{X}_1)(\bar{X}_{2i} - \bar{X}_2)\right],$$

$$s_{\bar{X}} = \sqrt{s_{\bar{X}}^2},$$

gde su C_{11}, C_{22} i C_{12} multiplikatori (formule 13.16; 13.17; 13.18; 13.19) izračunati na sledeći način:

$$C_{11} = \frac{\sum x_2^2}{\left(\sum x_1^2\right)\left(\sum x_2^2\right) - \left(\sum x_1 x_2\right)^2},$$

$$C_{22} = -\frac{\sum x_1^2}{\left(\sum x_1^2\right)\left(\sum x_2^2\right) - \left(\sum x_1 x_2\right)^2},$$

$$C_{12} = -\frac{\sum x_1 x_2}{\left(\sum x_1^2\right)\left(\sum x_2^2\right) - \left(\sum x_1 x_2\right)^2}.$$

Standardna greška razlike za upoređenje korigovanih aritmetičkih sredina dva tretmana dobija se po obrascu:

$$s_D^2 = s_P^2\left[\frac{2}{n} + C_{11}(\bar{X}_{1i} - \bar{X}_{1j})^2 + C_{22}(\bar{X}_{2i} - \bar{X}_{2j})^2 + 2C_{12}(\bar{X}_{1i} - \bar{X}_{1j})(\bar{X}_{2i} - \bar{X}_{2j})\right], \tag{14.44}$$

$$s_D = \sqrt{s_D^2}. \tag{14.45}$$

Standardna greška razlike za upoređenja aritmetičkih sredina svih tretmana izračunava se po obrascu:

$$\bar{s}_D^2 = \frac{s_P^2}{n}\left[\cdot 1 + \frac{C_{11}(T_{x1}) + C_{22}(T_{x2}) + C_{12}(T_{x1x2})}{k-1}\right], \tag{14.46}$$

$$\bar{s}_D = \sqrt{\bar{s}_D^2}. \tag{14.47}$$

TAB. 14.18. Sadržaj $K(X_1)$, $Na(X_2)$ i čistoća soka (Y) u ogledu sa šećernom repom

Blokovi		Tretmani						Ukupno
		A	B	C	D	E	F	
	X_1	1,726	2,097	1,292	1,758	1,605	1,608	10,086
1	X_2	0,189	0,260	0,211	0,255	0,189	0,189	1,293
	Y	91,690	90,590	93,500	91,700	92,320	92,100	551,900
	X_1	1,659	1,860	1,593	1,593	2,166	1,633	10,504
2	X_2	0,259	0,281	0,257	0,279	0,315	0,284	1,675
	Y	91,800	91,160	91,880	92,130	90,610	92,170	549,750
	X_1	2,017	1,532	1,847	1,850	1,780	2,310	11,336
3	X_2	0,328	0,245	0,287	0,253	0,220	0,418	1,751
	Y	90,820	92,470	91,230	91,640	91,770	89,710	547,640
	X_1	2,020	2,080	2,081	2,252	2,121	2,489	13,043
4	X_2	0,457	0,287	0,390	0,289	0,336	0,287	2,046
	Y	90,470	90,640	90,110	90,360	90,230	89,740	541,550
	X_1	7,422	7,569	6,813	7,453	7,672	8,040	44,969
Ukupno	X_2	1,233	1,073	1,145	1,076	1,060	1,178	6,765
	Y	364,780	364,860	366,720	365,830	364,930	363,720	2.190,840
	$\bar{X}_1$	1,855	1,892	1,703	1,863	1,918	2,010	1,874
Sredine	$\bar{X}_2$	0,308	0,268	0,287	0,269	0,265	0,294	0,282
	$\bar{Y}$	91,195	91,215	91,680	91,457	91,232	90,930	91,285

Na istom principu izvodi se statistička analiza ogleda u koji je uključeno tri ili više nezavisnih promenljivih.

Primer. Za ilustraciju uzećemo ogled sa šest različitih načina đubrenja šećerne repe manganom pri ispitivanju čistoće soka (zavisno promenljiva Y) koja je data u %. Radi se o sledećim tretmanima: A – kontrola; B – folijarna ishrana (9 *kg/ha*); C – folijarna ishrana (18 *kg/ha*); D – đubrenje zemljišta – biljke (9 *kg/ha*); E – đubrenje zemljišta – biljke (18 *kg/ha*); F – kombinovana primena (18 *kg/ha*). Prva nezavisna promenljiva (X_1) je sadržaj kalijuma (u *g/100 g* šećera), a druga nezavisna promenljiva (X_2) je sadržaj natrijuma (u *g/100 g* šećera). Ogled je postavljen po planu slučajnog blok–sistema u četiri bloka ili ponavljanja svakog tretmana. (Podaci su dobijeni ljubaznošću J.H.A. Dunwoodya iz Statističkog odeljenja Ogledne stanice u Rotamstedu, Engleska). Rezultati ogleda prikazani su u tab. 14.18 a sume kvadrata i proizvoda u tab. 14.19.

TAB. 14.19. Sume kvadrata i proizvoda za višestruku kovarijansu izračunate na osnovu podataka iz tab. 14.18.

Izvori varijacije	$\sum x_1^2$	$\sum x_2^2$	$\sum x_1x_2$	$\sum x_1y$	$\sum x_2y$	$\sum y^2$
Blokovi	0,854580	0,047826	0,186149	−2,908317	−0,648544	9,944750
Tretmani	0,201630	0,006042	−0,001482	−0,477847	−0,022035	1,310250
Pogreška	0,883750	0,052470	0,092874	−2,851821	−0,405946	10,075600
Ukupno	1,939960	0,106338	0,277541	−6,237985	−1,076525	21,330600

Primenom obrazaca 13.11 i 13.12, na osnovu suma kvadrata i proizvoda pogreški izračunati su parametri $b_{y1.2}$ i $b_{y2.1}$:

$$b_{y1.2} = \frac{(0{,}052470)(-2{,}851821) - (0{,}092874)(-0{,}405946)}{(0{,}883750)(0{,}052470) - (0{,}092874)^2} = -2{,}965531,$$

$$b_{y2.1} = \frac{(0{,}883750)(-0{,}405946) - (0{,}092874)(-2{,}851821)}{(0{,}883750)(0{,}052470) - (0{,}092874)^2} = -2{,}487587.$$

Gausovi multiplikatori, izračunati na osnovu formula 13.16; 13.17; 13.18 i 13.19, iznose:

$$C_{11} = 1{,}390117; C_{12} = -2{,}460564; C_{22} = 23{,}413697.$$

Suma kvadrata regresije za pogrešku (formula 13.14) = (−2,965531)(−2,851821) + (−2,487587)(−0,405946) = 9,466988.

Suma kvadrata oko regresije = 10,075600 − 9,466988 = 0,608612.

Za testiranje hipoteza $\beta_{y1.2} = 0$ i $\beta_{y2.1} = 0$ izračunavaju se standardne greške koeficijenata regresije (13.20; 13.21):

$$s_{by2.1} = \sqrt{0{,}046816 \cdot 1{,}390117} = 0{,}255107,$$

$$s_{by2.1} = \sqrt{0{,}046816 \cdot 23{,}413697} = 1{,}046964.$$

Zatim se izvodi $t-$test (13.22; 13.23):

$$t_1 = \frac{-2{,}965531}{0{,}255107} = -11{,}62;$$

$$t_2 = \frac{-2{,}487587}{1{,}046964} = -2{,}38.$$

Izračunate vrednosti t pokazuju da je koeficijent regresije $b_{y1.2}$ vrlo značajan a koeficijent $b_{y2.1}$ značajan.

Za izvođenje $F-$testa na isti način potrebno je, kao i u tab. 14.17, izračunati sumu kvadrata oko regresije na bazi suma kvadrata i proizvoda tretmana i pogreške. Na toj osnovi se ponovo izračunavaju parametri $b_{y1.2}$ i $b_{y2.1}$. Tako izračunata suma kvadrata oko regresije za tretmane + pogreška iznosi 0,742472. Korigovana suma kvadrata tretmana se dobija iz razlike sume kvadrata oko regresije za tretmane + pogreška i suma kvadrata oko regresije za pogrešku. Rezultati tog izračunavanja, kao i $F-$test, prikazani su u tab. 14.20.

TAB. 14.20. Izračunavanje suma kvadrata oko regresije u analizi kovarijanse na osnovu podataka tab. 14.18.

Izvori varijacije	Sume kvadrata oko regresije	Stepeni slobode	Sredina kvadrata	F
Tretmani + Pogreška	0,742472	21		
Pogreška	0,608612	13	0,046816	
Korigovana suma kvadrata tretmana	0,133860	5	0,026772	0,57

Izračunata F vrednost, 0,57, nije značajna, pošto tablična vrednost za 5 i 13 stepeni slobode, za prag značajnosti od 5%, iznosi 3,02.

$F-$odnos između sredina kvadrata tretmana i pogreške za zavisno promenljivu Y na osnovu podataka tab. 14.19 iznosi:

$$F = \frac{1{,}310250 \cdot 15}{10{,}075600 \cdot 5} = 0{,}39.$$

Korigovane sredine procenta čistoće soka za svaki tretman izračunavaju se primenom formule 14.43. Tako za tretman A (kontrola) korigovana sredina iznosi:

$$\bar{Y}_A' = 91{,}195 - (-2{,}965531)(1{,}855 - 1{,}874) - (-2{,}487587)(0{,}308.- 0{,}282) = 91{,}203.$$

Korigovane sredine za ostale tretmane iznose $\bar{Y}_B' = 91{,}234$; $\bar{Y}_C' = 91{,}185$; $\bar{Y}_D' = 91{,}392$; $\bar{Y}_E' = 91{,}320$; $\bar{Y}_F' = 91{,}363$.

Varijansa i standardna greška razlike za upoređenje tretmana A i B primenom obrazaca 14.44 i 14.45 iznosi:

$$s_D^2 = 0{,}046816[\,0{,}50 + 1{,}390117(1{,}855 - 1{,}892)^2 + 23{,}413697(0{,}308 - 0{,}268)^2 + \\ + 2(-2{,}460564)(1{,}855 - 1{,}892)(0{,}308 - 0{,}268)] = 0{,}025591,$$

$$s_D = \sqrt{0{,}025591} = 0{,}160.$$

Za ovo upoređenje izračunava se vrednost t:

$$t = \frac{91{,}203 - 92{,}234}{0{,}160} = \frac{0{,}031}{0{,}160} = 0{,}194.$$

Upoređenje nije značajno s obzirom da je u tabelama t–distribucije $t_{0,05(13)}$ = 2,16. To se moglo i očekivati, pošto ni F–odnos na osnovu tab. 14.20. isto tako, nije značajan. Na kraju se može zaključiti da primenom analize kovarijanse nismo, u ovom slučaju, bitnije povećali preciznost upoređenja čistoće soka pri različitim tretmanima.