16. NEKI METODI ZA ISPITIVANJE REAKCIJE U FUNKCIJI FAKTORA[1]

16.1. Problem ispitivanja i metodi analize

U dosadašnjim izlaganjima radilo se o sagledavanju uticaja različitih tretmana ili njihovih kombinacija na jedinicu ispitivanja u odgovarajućim eksperimentalnim uslovima. U ovom odeljku akcenat je u pronalaženju takvih kombinacija tretmana između faktora koji, prema cilju istraživanja, dovode do maksimalnog ili minimalnog odgovora. Po pravilu, taj je odgovor rezultat nezavisnog uticaja više promenljivih. Na primer, u industrijskim ili hemijskim istraživanjima treba utvrditi koja kombinacija tretmana pojedinih faktora, kao što su temperatura, vreme, čistoća, vlažnost, daje najbolji efekat izražen u čistoći, otpornosti, troškovima itd; ili, koja kombinacija doze đubriva, načina oranja, temperature i vlage daje najbolji prinos; ili, dobijanje odgovora o minimumu holesterola u krvnim sudovima u kombinaciji različitih vrsta lekova (faktori) u različitim dozama itd. U izvesnim, na primer, hemijskim istraživanjima moguće je, na osnovu poznavanja izvesnih zakona i njihove primene, u eksperimentalnim uslovima doći do optimalnih odgovora, iako i tu često postoji doza neizvesnosti ili, drugim rečima, nepreciznosti u očekivanom odgovoru. Ta neizvesnost je izrazitija u drugim vrstama ispitivanja, te je empirijski pristup utoliko pre neophodniji.

Matematički izraz neke zakonitosti koja počiva na izvesnoj teoriji nije problem. To se, često, čini pomoću diferencijalnih jednačina, na osnovu kojih se utvrđuje minimum ili maksimum. Rešenje je tačno gledajući strogo formalno, ali to je *izvedena funkcija*, koja je samo jedna aproksimacija stvarno funkcionalnog odnosa. Naime, tako utvrđena funkcija maksimuma ili minimuma uključuje i pogrešku, rezultat slučajnih kolebanja. Stoga, empirijska istraživanja svode se na aproksimaciju optimuma, na bazi teorijskih pretpostavki.

Ako sa η označimo tačan maksimalan ili minimalan odgovor na bazi nivoa faktora, funkcija tačnog odgovora Φ se izražava sa:

$$\eta = \Phi\,(X_1, X_2, \ldots, X_p)\,. \tag{16.1}$$

Vrednost η je hipotetična veličina uz pretpostavku odsustva eksperimentalne pogreške. Zbog toga, u empirijskim istraživanjima, gde je ta pogreška prisutna, η označavamo sa Y, tako da je:

$$Y_i = \Phi(X_{1i}, X_{2i}, \ldots, X_{pi}) + \varepsilon_i\,, \tag{16.2}$$

gde je: $i = 1, 2, \ldots, n$ broj posmatranja u faktorijalnim ogledima, dok je ε_i deo nekontrolisane varijacije za koju se pretpostavlja da je normalnog rasporeda, $N(0, \sigma^2)$.

Odgovor po 16.1 i 16.2 u ovom kontekstu se naziva površina koja je reakcija u funkciji faktora (response surface).

---

[1] Ovaj odeljak je sa nekim manjim izmenama prenet iz knjige "Planiranje eksperimenata".

Figurativno to može da se zamisli kao jedan planinski vrh sa svojim maksimumom i podnožjem kao minimumom. Eksperiment na osnovu više nezavisnih promenljivih je nešto slično utvrđivanju tačke na toj planini s njenom geografskom širinom i dužinom. Izvodeći ga mi se, praktično, nalazimo u situaciji da kombinacijom nivoa pojedinih faktora dođemo do tačke koja ako nije maksimum blizu je njega. Kako do toga da se dođe stvar je eksperimentalne strategije, kao i materijalnih i tehničkih mogućnosti. U praksi istraživanja beskrajno je veliki broj različitih površina ali isto tako i alternativa za utvrđivanje tačke na eksperimentalnim površinama, što komplikuje čitav problem. On, na žalost, još nije rešen na potpuno zadovoljavajući način i odgovor se postiže na aproksimativnoj osnovi.

Ovde će biti reči o nekim metodama koje su se dosad primenjivale u sagledavanju ovoga problema. Prava funkcija odgovora može da bude vrlo kompleksna, s obzirom na ponašanje nezavisnih promenljivih obično se smatra da dobru aproksimaciju u relativno manjem eksperimentalnom području predstavljaju polinomi X_i. U vezi s tim Mendenhall (1968) daje korisno upoređenje. Pre otkrića Amerike zemlja se smatrala ravnom površinom i izrađivani su odlični planovi do horizonta, a zatim se vršila ekstrapolacija, da bi se na toj osnovi pokrila čitava zemljina površina. Otkrićem Amerike i dokazivanjem da je zemlja okrugla, ovaj način rada se pokazao pogrešan. Što se tiče problema planiranja ogleda, nameću se dve praktične pouke. Prvo, polinomi malog stepena mogu, često, da se upotrebe kao aproksimacija površine u funkciji faktora samo na relativno malom eksperimentalnom području. Drugo, nepravilno je upotrebiti ovu aproksimaciju površine za ekstrapolaciju izvan okvira eksperimentalnog područja.

U opštem slučaju, uzmimo da se na osnovu jednog ogleda proučava efekat različitih nivoa jednog faktora (X_1), čija je funkcija izražena kao $\eta = \Phi(X_1)$. Ova funkcija može da bude 0, 1, 2, 3, ili većeg stepena:

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_{11} X_1^2 + \beta_{111} X_1^3 + \ldots \tag{16.3}$$

Funkcija prvog stepena, dakle, samo na bazi dva parametra (β_0 i β_1) je pravolinijska. Ona koja uključuje i drugi stepen, dakle, tri prva parametra, je parabola itd.

Ako se radi o dva faktora X_1 i X_2 jednačina polinoma je:

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_{11} X_1^2 + \beta_{22} X_2^2 + \beta_{12} X_1 X_2 + \beta_{111} X_1^3 + \ldots \tag{16.4}$$

Stepeni pojedinih nezavisnih promenljivih u jednačini 16.4. su definisani odgovarajućim parametrom β. Tako je uz β_0 1 i to je nulti stepen; uz β_1 i β_2 su X_1 i X_2, i to je prvi stepen; uz β_{11}, β_{22}, i β_{12} su X_1^2, X_2^2, i X_1X_2, dakle, drugi stepen itd. Konstante β su *koeficijenti regresije*, a vrednosti X su *nezavisne promenljive*, β_{11} i β_{22} su kvadratni efekat, dok je β_{12} efekat linearne interakcije dve nezavisne promenljive itd. U principu, ako je jednačina na većem stepenu dobija se bolja aproksimacija. Naša objašnjenja će se odnositi samo na planove koji počivaju na polinomima prvog i drugog stepena.

U traženju optimalnog odgovora na bazi eksperimenata prvog reda, kojima odgovaraju faktorijalni ogledi 2^p i delimični faktorijalni ogledi toga nivoa, metod višestruke regresije je od prvenstvenog značaja.

U opštem slučaju linearne regresije izraženo je funkcijom preko formuli 16.1 i 16.2. U određenom slučaju, na osnovu p nezavisnih promenljivih (X) od n jedinica za svaku nezavisnu promenljivu, i n jedinica za zavisnu promenljivu (Y), treba izračunati parcijalne koeficijente regresije b_j kao ocene od β_j, kao i od parametra a, kao nezavisnog parametra, koji ćemo iz praktičnih razloga pisati kao b_0. Metodom najmanjih kvadrata minimizira se suma kvadrata (13.4):

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - b_0 - b_1X_{1i} - b_2X_{2i} - \dots - b_pX_{pi})^2 .$$

Vrednosti od b_j koje minimiziraju ovaj izraz zadovoljavaju sistem normalnih jednačina dat u (13.5). Ovaj sistem napisaćemo u nešto pojednostavljenijem obliku:

$$\begin{array}{llll}
b_0(\theta\theta) & + b_1(\theta 1) & + \dots + b_p(\theta p) & = (OY) \\
b_0(10) & + b_1(11) & + \dots + b_p(1p) & = (1Y) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
b_0(p\theta) & + b_1(p1) & + \dots + b_p(pp) & = (pY),
\end{array}$$

gde je:

$(jk) = (kj) = \sum_{i=1}^{n} X_{ji}X_{ki}$ = suma proizvoda $j-$te i $k-$te promenljive, X_j i X_k

$(jj) = \sum_{i=1}^{n} X_{ji}^2$ = suma kvadrata $j-$te kolone promenljive X_j

$(jY) = \sum_{i=1}^{n} X_{ji}Y_i$ = suma proizvoda $j-$te kolone promenljive X_j i promenljive Y.

Polazna osnova za izračunavanje suma kvadrata i proizvoda promenljivih je matrica nezavisnih promenljivih (X) i vektor Y.

X					Y
X_{01}	X_{11}	. . .	X_{p1}		Y_1
X_{02}	X_{12}	. . .	X_{p2}		Y_2
.	.		.		.
.	.		.		.
.	.		.		.
X_{0n}	X_{1n}	. . .	X_{pn}		Y_n

Iz ove matrice i vektora obrazuje se suma kvadrata i proizvoda X i proizvoda od X i Y koje obrazuju sistem normalnih jednačina.

	$jk = X'X$		
00	01	. . .	$0p$
10	11	. . .	$1p$
.	.		.
.	.		.
.	.		.
p0	p1	. . .	pp

$jY = X'Y$
$0Y$
$1Y$
.
.
.
pY

Inverzijom matrice $X'X$ dobijaju se Gausovi multiplikatori:

	$C_{jk} = C_{kj} = X'X$		
C_{00}	C_{01}	. . .	C_{0p}
C_{10}	C_{11}	. . .	C_{1p}
.	.		.
.	.		.
.	.		.
C_{p0}	C_{p1}	. . .	C_{pp}

Parcijalni koeficijenti regresije su:

$$b_1 = \sum_{j=0}^{p} C_{jk}(jY).$$

Suma kvadrata regresije je:

$$Q_R = \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \sum_{j=0}^{p} b_j (jY).$$

Suma kvadrata oko regresije je:

$$Q_{VR} = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = (YY) - Q_R,$$

gde je (YY) = suma kvadrata promenljive Y, a varijansa pogreške je:

$$s_p^2 = \frac{1}{n - p - 1} Q_{VR}.$$

Standardna greška koeficijenta b_j je:

$$s_{bj} = \sqrt{C_{jj} s_p^2},$$

dok je vrednost t_j, u t-testu, za $(n - p - 1)$ stepeni slobode:

$$t_j = \frac{b_j}{s_{b_j}}.$$

Rešavanje normalnih jednačina znatno je olakšano kad su nezavisne promenljive međusobno ortogonalne. Tada normalna jednačina za svako b_j se svodi na $b_j\,(jj) = (jY)$, jer sve sume proizvoda (jk) nestaju $(j \neq k)$. Na taj način koeficijenti regresije su:

$$b_j = \frac{(jY)}{(jj)}. \tag{16.5}$$

U ovoj situaciji multiplikatori u inverznoj matrici postaju $C_{jj} / (jj)$; $C_{jk} = 0$. Kod planiranja ogleda poželjno je voditi računa o ortogonalnosti, jer se ovim znatno olakšava statistička analiza.

16.2. Statistička analiza ogleda prvog reda

S dva faktora $A = X_1$ i $B = X_2$ jednačina regresije prvog stepena ili reda glasi:

$$\hat{Y}_i = b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i}. \tag{16.6}$$

Kad je svaki faktor na dva nivoa 2^2, izračunavanje se pojednostavljuje ako se kodiraju nivoi svakog faktora, tako da niži nivo dobija vrednost -1, a viši $+1$. Kodirane vrednosti i kombinacije tretmana prikazene su u tabeli 16.1. zajedno s hipotetičnim odgovorom, koji pruža zavisna promenljiva Y. U produžetku iste tabele date su normalne jednačine, njihova rešenja, kao i inverzija matrice. Na osnovu tih podataka izračunavaju se odgovarajući koeficijenti regresije:

$$b_0 = \frac{330}{4} = 82{,}5; \quad b_1 = \frac{20}{4} = 5; \quad b_2 = -\frac{10}{4} = -2{,}5.$$

Prema tome jednačina regresije je:

$$\hat{Y} = 82{,}5 + 5X_1 - 2{,}5X_2.$$

TAB. 16.1. Dobijanje linearne jednačine za faktorijalni ogled 2^2 u jednom ponavljaju

a) Rezultati ogleda

Tretmani	X_0	X_1	X_2	Y
1	1	−1	−1	80
a	1	1	−1	90
b	1	−1	1	75
ab	1	1	1	85

b) Normalne jednačine

$(jk) = X'X$			$(jY) = X'Y$
4			$330 = T$
	4		$20 = 2A$
		4	$-10 = 2B$

c) Inverzija matrice

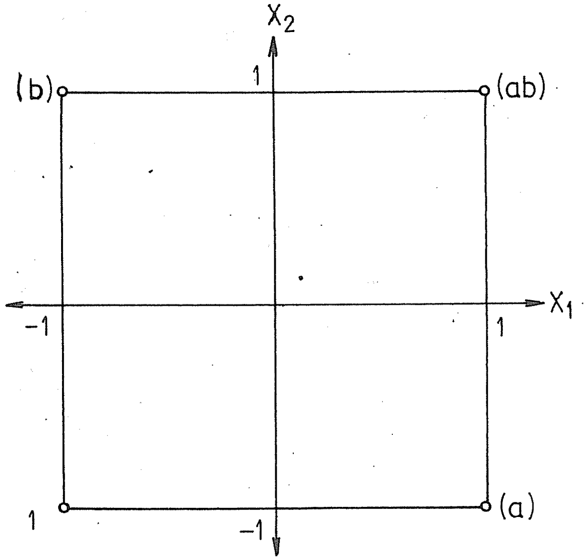
$C_{jk} = X'X^{-1}$		
1/4		
	1/4	
		1/4

Za analizu varijanse suma kvadrata totala (tri stepena slobode) je: $(80)^2 + (90)^2 + (75)^2 + (85^2) - \frac{(330)^2}{4} = 125$; suma kvadrata koja proizlazi iz regresije (dva stepena slobode) je:

$$4b_1^2 + 4b_2^2 = 100 + 25 = 125.$$

Za nedostatak linearnosti (prilagođenosti) ostaje jedan stepen slobode sa sumom kvadrata nula. Ovaj ogled počiva na jednom ponavljanju i nema varibijalnost ni za nedostatak linearnosti, te je neprikladan za stvarno ispitivanje i dat je kao najprostija forma radi ilustracije metoda.

Ako uzmemo da su kombinacije tretmana $1 = (-1, -1)$; $a = (1, -1)$, $b = (-1,1)$ i $ab = (1,1)$, grafički prikaz dat je na slici 16.1.



Sl. 16.1. Faktorijalni ogled 2^2

Ako ogled ima više od jednog ponavljanja, tada može da se izračuna eksperimentalna pogreška i da se izvede test o nedostatku linearnosti. Za ilustraciju uzmimo ogled 2^2 na osnovu dva ponavljanja čiji su rezultati prikazani u tabeli 16.2. Koeficijenti regresije su:

$$b_0 = \frac{186}{8} = 23{,}25; \quad b_1 = \frac{58}{8} = 7{,}25; \quad b_2 = -\frac{54}{8} = -6{,}75,$$

tako da je jednačina regresije:

$$\hat{Y} = 23{,}25 + 7{,}25\,X_1 - 6{,}75\,X_2 .$$

TAB. 16.2. Dobijanje linearne jednačine za faktorijalni ogled 2^2 u dva ponavljanja

a) rezultati ogleda

Tretmani	X_0	X_1	X_2	Y
Ponavljanje I				
I	1	−1	−1	16
a	1	1	−1	48
b	1	−1	1	10
ab	1	1	1	20
Ponavljanje II				
1	1	−1	−1	24
a	1	1	−1	32
b	1	−1	1	14
ab	1	1	1	22

b) Normalne jednačine

$jk = X'X$			$(jY) = X'Y$
8			$186 = T$
	8		$58 = n2A$
		8	$-54 = n2B$

c) Inverzija matrice

$C_{jk} = (X'X)^{-1}$		
1/8		
	1/8	
		1/8

d) Analiza varijanse

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata
Linearna regresija	2	785,0	392,5
Nedostatak linearnosti	1	60,5	60,5
Pogreška	4	170,0	42,5
Ukupno	7	1.015,5	

Suma kvadrata totala je:

$$(16)^2 + (48)^2 + ... + (22)^2 - \frac{(186)^2}{8} = 1.015,5 .$$

Suma kvadrata linearne regresije je:

$$\frac{(58)^2 + (54)^2}{8} = 785,0 .$$

Suma kvadrata nedostatka linearnosti je:

$$\frac{1}{8}[(16 + 24) - (48 + 32) - (10 + 14) + (20 + 22)]^2 = 60{,}5 \ .$$

Suma kvadrata pogreške je:

$$\left[(16)^2 + (24)^2 - \frac{(40)^2}{2}\right] + \ldots + \left[(20)^2 + (22)^2 - \frac{(42)^2}{2}\right] = 170{,}0 \ .$$

Suma kvadrata nedostatka linearnosti odgovora je suma kvadrata interakcije AB.

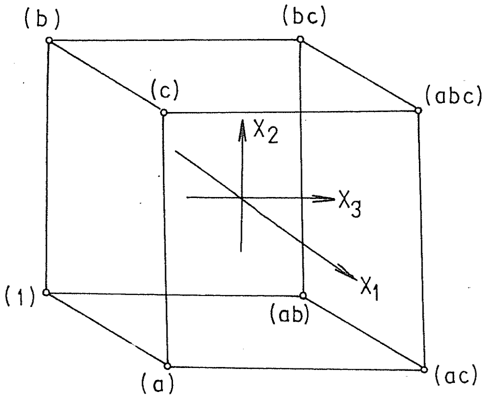
Standardna greška parcijalnog koeficijenta regresije je:

$$s_{b_j} = \sqrt{\frac{1}{8}42{,}5} = 2{,}30.$$

Kad se radi o faktorijalnom ogledu 2^3 jednačina regresije prvog reda je:

$$\hat{Y}_i = b_0 + b_1X_{1i} + b_2X_{2i} + b_3X_{3i} \ . \tag{16.7}$$

Tačke od osam tretmana u ovakvom planu nalaze se u temenima kocke prikazane na slici 16.2.



Sl. 16.2. *Faktorijalni ogled* 2^3

Za dobijanje linearne jednačine upotrebljava se kodirana šema prikazana u tab. 16.3.

U analizi varijanse tri stepena slobode odnose se na linearnu regresiju, a četiri na nedostatak linearnosti. Sume kvadrata na osnovu jednog ponavljanja su:

Suma kvadrata totala je:

$$(Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_8^2) - \frac{T^2}{8}.$$

Suma kvadrata linearne regresije je:

$$\frac{(4A)^2 + (4B)^2 + (4C)^2}{8}.$$

Suma kvadrata nedostatak linearnosti = suma kvadrata totala − suma kvadrata linearne regresije.

Za F−test, kako za linearnost regresije tako i za nedostatak linearnosti, potrebno je imati najmanje dva ponavljanja da bi se tako došlo do varijanse pogreške. Treba istaći da suma kvadrata za nedostatak linearnosti sadrži u sebi dva izvora varijacije. Jedan proizlazi iz slučajnih kolebanja jedinica uzorka a drugi dolazi usled nepodudarnosti promenljive Y u funkciji površine η. F−test ukazuje na značaj poslednje varijabilnosti.

Četiri stepena slobode za sumu kvadrata nedostatak linearnosti proizlaze iz interakcija AB, AC, BC i ABC. Proširenjem šeme u tab. 16.3. može se izračunati složenija jednačina regresije:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_i = b_0 + b_1X_{1i} + b_2X_{2i} + b_3X_{3i} + b_{12}X_{1i}X_{2i} + \\ + b_{13}X_{1i}X_{3i} + b_{23}X_{2i}X_{3i} + b_{123}X_{1i}X_{2i}X_{3i}\,.\end{aligned} \tag{16.8}$$

U tom slučaju u analizi varijanse linearna regresija ima sedam stepeni slobode a nedostatak linearnosti više se ne pojavljuje. Parcijalni koeficijenti regresije b_{12}, b_{13}, b_{23} i b_{123} dobijaju se preko interakcija AB, AC, BC i ABC na isti način kao i koeficijenti b_1, b_2 i b_3.

$$\text{Tako je } b_{12} = \frac{4AB}{8} \quad \text{itd.}$$

TAB. 16.3. Izračunavanje linearne jednačine u faktorijalnom ogledu 2^3

Tretmani	X_0	X_1	X_2	X_3	Y
1	1	−1	−1	−1	Y_1
a	1	1	−1	−1	X_2
b	1	−1	1	−1	Y_3
ab	1	1	1	−1	Y_4
c	1	−1	−1	1	Y_5
ac	1	1	−1	1	Y_6
bc	1	−1	1	1	Y_7
abc	1	1	1	1	Y_8
Normalne jednačine		$(jk) = X'X$			$(jY) = X'Y$
	8				T
		8			$4A$
			8		$4B$
				8	$4C$
Inverzija matrice		$C_{jk} = (X'X)^{-1}$			
	1/8				
		1/8			
			1/8		
				1/8	
Koeficijenti regresije:		$b_0 = \frac{T}{8}$;	$b_1 = \frac{4A}{8}$;	$b_2 = \frac{4B}{8}$;	$b_3 = \frac{4C}{8}$.

Jednačina regresije za formiranje površine navedenog tipa obično se ne primenjuje, jer je normalnije doći do jednačine drugog reda, gde je potrebno da svaki faktor ima više od dva nivoa.

Kad se pretpostavlja da nema interakcije između faktora, može se primeniti plan ogleda 2^n u jednom ponavljanju ili, pak delimični faktorijalni ogled. Recimo, da se uzima polovina ponavljanja od jednog 2^3 ogleda s tretmanima: *b, c, ab* i *abc*. Ako se posmatra položaj ovih tačaka na slici 16.2. uočiće se da one predstavljaju temena jednog tetraedara, dok temena preostalih tretmana formiraju drugi tetraedar. Detaljnije objašnjenje o problemima konstrukcije najefikasnijih delimičnih faktorijalnih ogleda pruža Box, 1952.

U izvođenju ovakvih ogleda pojavljuje se problem eksperimentalne pogreške pošto jedno ponavljanje ne omogućuje da se dođe do nje. Rešenje se nalazi u više ponavljanja ili da se za eksperimentalnu pogrešku uzme njena vrednost iz nekog ranijeg ispitivanja, ukoliko ima osnove da se pretpostavi da je ona stabilna.

Kao alternativa ponavljanju standardni 2^n ogledi mogu da se modifikuju, tako da se u kodiranoj skali uključi nekoliko tretmana više s vrednostima 0 i X pored -1 ili 1. U geometrijskom prikazu 2×2 faktorijalnog ogleda na slici 16.1, ako mu se doda jedan takav tretman, njegova tačka će se nalaziti tačno na koordinatnom početku ili *centru* plana. Ovakav plan ne utiče na ortogonalnost koeficijenata regresije, bez obzira na broj ponavljanja tretmana. Jedina je razlika što b_0 tada postaje sredina celog ogleda. Šema ogleda 2^2 za dobijanje linearne jednačine s dodatnim tretmanima prikazana je u tabeli 16.4.

TAB. 16.4. Izračunavanje linearne jednačine u povećanom faktorijalnom ogledu 2^2

Tretmani	X_0	X_1	X_2	Y
1	1	-1	-1	Y_1
a	1	1	-1	Y_2
b	1	-1	1	Y_3
ab	1	1	1	Y_4
c_1	1			Y_{01}
c_2	1			Y_{02}
.	.			.
.	.			.
.	.			.

Koeficijenti regresije su:

$$b_0 = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_{01} + Y_{02} + \dots}{c + 4};$$

$$b_1 = \frac{-Y_1 + Y_2 - Y_3 + Y_4}{4}; \quad b_2 = \frac{-Y_1 - Y_2 + Y_3 + Y_4}{4},$$

gde je c broj tretmana u centru plana.

U analizi varijanse raspored stepeni slobode je:

Izvori varijacije	Stepeni slobode
Linearna regresija	2
Nedostatak linearnosti	2
Pogreška	$c-1$
Ukupno	$4+c-1$

Kao što se vidi, dodati tretmani u centru plana su osnova za eksperimentalnu pogrešku. Nedostatak linearnosti ima dva stepena slobode. Jedan proizlazi iz komponente koja bi se normalno odnosila na interakciju dva faktora, drugi na rezultat varijabiliteta između sredine tretmana na centralnoj tački i sredine ostalih tretmana. Suma kvadrata za ovu poslednju varijabilnost izračunava se na sledeći način:

$$\frac{kc}{k+c}(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)^2,$$

gde je k broj tretmana na osnovu 2^n plana, dok je c broj dodatnih tretmana u centru; $\bar{Y}_1$ je sredina na osnovu k tretmana; $\bar{Y}_2$ je sredina dodatnih tretmana.

Suma kvadrata eksperimentalne pogreške je:

$$\sum_{j=1}^{c}(Y_{0j}-\bar{Y}_2)^2=\sum_{j=1}^{c}Y_{0j}^2-\frac{\left(\sum_{j=1}^{c}Y_{0j}\right)^2}{c}. \tag{16.9}$$

16.3. Ogledi drugog reda

Najprostiji primer ogleda drugog reda je, kada su u ispitivanje uključena dva faktora, svaki na tri nivoa (3^2). Model takvog ogleda je:

$$\eta=\beta_0+\beta_1X_1+\beta_2X_2+\beta_{11}X_1^2+\beta_{22}X_2^2+\beta_{12}X_1X_2. \tag{16.10}$$

Kad su nivoi svakog faktora kodirani sa vrednostima -1, 0, 1, plan dobija izgled dat u tab. 16.5. a njegov geometrijski oblik prikazan je na sl. 16.3.

Parametri b_0, b_1, b_2 itd. izračunavaju se na uobičajeni način.

$$b_0=\frac{5}{9}(0Y)-\frac{1}{3}(11Y)-\frac{1}{3}(22Y),$$

$$b_1=\frac{1}{6}(1Y);\quad b_2=\frac{1}{6}(2Y),$$

$$b_{11}=\frac{1}{2}(11Y)-\frac{1}{3}(0Y);\quad b_{22}=\frac{1}{2}(2YY)-\frac{1}{3}(0Y),$$

$$b_{12}=\frac{1}{4}(12Y).$$

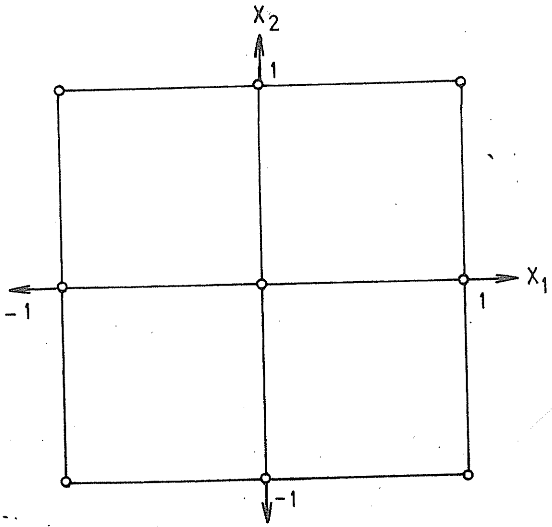
TAB. 16.5. Faktorijalni ogled drugog reda 3^2

Matrica promenljivih X_1 i X_2 i vektor od Y

Redni broj tretmana	X_0	X_1	X_2	X_1^2	X_2^2	X_1X_2	Y
1	1	−1	−1	1	1	1	Y_1
2	1	−1	0	1	0	0	Y_2
3	1	−1	1	1	1	−1	
4	1	0	−1	0	1	0	.
5	1	0	0	0	0	0	.
6	1	0	1	0	1	0	.
7	1	1	−1	1	1	−1	
8	1	1	0	1	0	0	
9	1	1	1	1	1	1	Y_9
	Normalne jednačine $X'X$						$X'Y$
	9	0	0	6	6	0	$0Y$
	0	6	0	0	0	0	$1Y$
	0	0	6	0	0	0	$2Y$
	6	0	0	6	4	0	$11Y$
	6	0	0	4	6	0	$22Y$
	0	0	0	0	0	4	$12Y$
	Inverzija matrice $(X'X)^{-1}$						
	$\frac{5}{9}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	
	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	
	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	
	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	
	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	
	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	

Ovakav palan nije ortogonalan. Uopšte, ortogonalnost između parametara b gubi se u svakom planu drugog reda. Koeficijenti regresije su ocenjeni s nejednakom preciznošću. Tako su koeficijenti b_{11} i b_{22} manje precizni od koeficijenata b_1 i b_2. Ta odstupanja od ortogonalnosti su veća s porastom broja faktora u ogledu. Na primer, ogled 3^3 uključuje 27 tretmana a broj koeficijenata regresije zaključno s drugim redom je 10 i to: 1 nultog reda (b_0), 3 prvog reda (b_1, b_2, b_3), 3 drugog reda (b_{11}, b_{22}, b_{33}), 3 drugog reda na osnovu interakcije (b_{12}, b_{13}, b_{23}). Ogled 3^4 uključuje 81 tretman na osnovu kojih se izračunava 15 koeficijenata regresije itd. Primena delimičnih faktorijalnih ogleda bi mogla da bude rešenje da se ortogonalnost postigne, bar, u približnoj meri.

Da bi se premostile ove teškoće Box, Wilson, (1951) pronašli su neke druge planove drugog reda i nazvali ih *složeni* (composite) *planovi*. U tim planovima broj tretmana nije mnogo veći od broja izračunatih parametara.



Sl. 16.3. *Faktorijalni ogled* 3^2

Primer. Istraživanje izvedeno na oglednom polju Instituta za ratarstvo i povrtarstvo u Srbobranu, na zemljištu tipa černozem imalo je za cilj traženje optimuma prinosa ozimog pivarskog ječma sorte novosadske 183, na bazi azota i semena po jedinici površine. Azot kao jedan faktor (N) primenjen je na tri nivoa 0, 60 i 120 *kg/ha*, a gustina setve (G), drugi faktor, isto tako na tri nivoa 150, 350 i 550 klijavih zrna po m^2. Radi se dakle o 3^2 faktorijalnom ogledu koji je izveden u četiri ponavljanja. Proseci prinosa (*t/ha*) prikazani su u tab. 16.6. Izvedena je sledeća transformacija:

TAB. 16.6. Rezultati dvofaktorijalnog ogleda 3^2 u ispitivanju uticaja azota (N) i gustine setve (G) na prinos pivarskog ozimog ječma sorte novosadska 183.

Faktor N	Faktor G	Prinos
0	150	5,56
0	350	6,29
0	550	6,51
60	150	5,69
60	350	6,52
60	550	7,19
120	150	6,65
120	350	6,91
120	550	6,89

$$X_1 = \frac{N - \bar{N}}{\Delta_1}, \quad \text{gde je } \bar{N} = 60 \quad \text{i} \quad \Delta_1 = 60,$$

$$X_2 = \frac{G - \bar{G}}{\Delta_2}, \quad \text{gde je } \bar{G} = 350 \quad \text{i} \quad \Delta_2 = 200.$$

Na ovaj način model analize se svodi na (16.10), dok su matrica promenljivih, normalne jednačine i inverzije matrice $X'X$ dati u tab. 16.5. Na toj osnovi parametri modela (16.10) su:

$$b_0 = \frac{5}{9}(0Y) - \frac{1}{3}(11Y) - \frac{1}{3}(22Y) = \frac{5}{9}(58{,}21) - \frac{1}{3}(38{,}81) - \frac{1}{3}(38{,}49) = 6{,}572222\,,$$

$$b_1 = \frac{1}{6}(1Y) = \frac{1}{6}(2{,}09) = 0{,}348333\,,$$

$$b_2 = \frac{1}{6}(2Y) = \frac{1}{6}(2{,}69) = 0{,}448333\,,$$

$$b_{11} = \frac{1}{2}(11Y) - \frac{1}{3}(0Y) = \frac{1}{2}(38{,}81) - \frac{1}{3}(58{,}21) = 0{,}001667\,,$$

$$b_{22} = \frac{1}{2}(22Y) - \frac{1}{3}(0Y) = \frac{1}{2}(38{,}49) - \frac{1}{3}(58{,}21) = -0{,}158333\,,$$

$$b_{12} = \frac{1}{4}(12Y) = \frac{1}{4}(-0{,}71) = -0{,}1775\,.$$

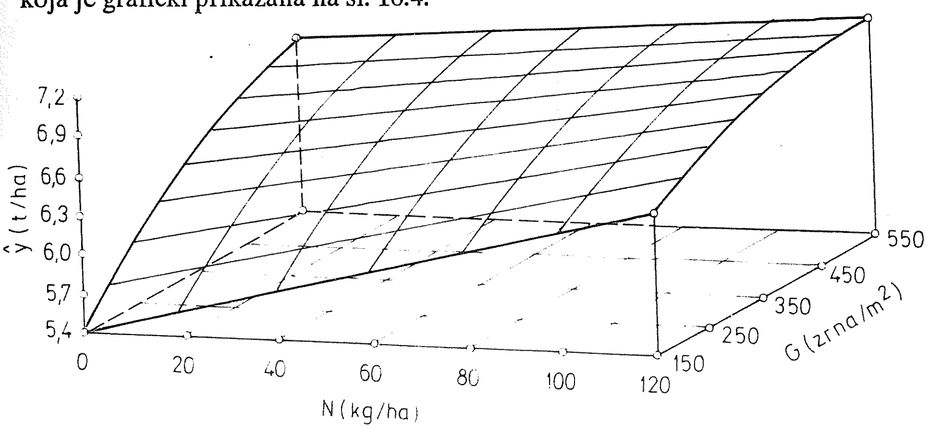
Prema tome ocena optimuma je:

$$\hat{Y} = 6{,}572222 + 0{,}348333X_1 + 0{,}448333X_2 + 0{,}001667X_1^2 - 0{,}158333X_2^2 - 0{,}1775X_1X_2\,.$$

Zamenom X_1 i X_2 sa $\dfrac{N-\bar{N}}{\Delta_1}$ i $\dfrac{G-\bar{G}}{\Delta_2}$ dobija se jednačina:

$$\hat{Y} = 4{,}645454 + 0{,}010927N + 0{,}005900G + 0{,}0000005N^2 - \\ - 0{,}000004G^2 - 0{,}000015NG,$$

koja je grafički prikazana na sl. 16.4.

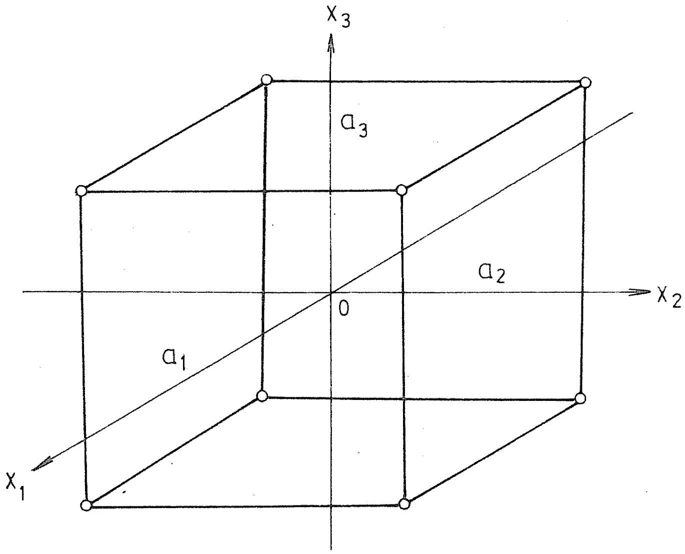


Sl. 16.4. Prinos ozimog pivarskog ječma pri različitim količinama unetog azota (N) i gustine setve (G)

16.4. Složeni i pokretni planovi

Složeni planovi su konstruisani polazeći od 2^n faktorijalnih ogleda, gde su kodirane vrednosti tretmana svakog faktora -1 i 1. Ako se takvom planu doda 2^n kombinacija tretmana duž koordinantnih osa i jedan tretman u njihovom centru, dakle, ukupno $(2n + 1)$ novih tretmana, tada se novi plan naziva *centralni složeni plan*. Broj koordinantnih osa je n i na svakoj se nalaze po dva tretmana. Ako se radi o ogledu s tri faktora broj dodatnih tretmana je $\pm a_1$, $\pm a_2$, $\pm a_3$, plus tretman na tački preseka ovih osa. Na ovaj način ogledi s 3 i 4 faktora na po tri nivoa zahtevaju ukupno 15 i 25 tretmana umesto $3^3 = 27$ i $3^4 = 81$. U opštem slučaju centralni složeni plan zahteva $(2^n + 2n + 1)$ kombinacije tretmana. Kod delimično faktorijalnog ogleda na dva nivoa s interakcijom najvećeg reda uzetom kao opredeljujuće upoređenje, (defining contrast) broj tretmana je $(2^{n-1} + 2n + 1)$.

Konfiguracija tačaka za centralni složeni plan prikazana je na slici 16.5. Tačke na temenima kocke su tretmani standardnog faktorijalnog ogleda 2^3, dok prave X_1, X_2 i X_3 služe za lociranje vrednosti za $\pm a_1$, $\pm a_2$ i $\pm a_3$, ukupno 6 s 0 u centru.



Sl. 16.5. *Centralni složeni plan na bazi faktorijalnog ogleda 2^3*

Jedna od prednosti centralnih složenih planova je da se oni mogu izvoditi na sekvencijalnoj osnovi u dve faze. Tako, jedan ogled može da se izvodi kao faktorijalni 2^3 i da se izračunaju koeficijenti regresije samo za linearni odgovor. Ukoliko test o nelinearnosti regresije pokaže da je ona značajna, drugim rečima da je površina odgovora kriva i da je centar bliže maksimumu, tada se dodaje $2n + 1$ novih kombinacija tretmana i na taj način se ogled kompletira.

Ortogonalnost centralnog složenog plana može se postići izborom odgovarajuće distance od centra $\pm a_1$, $\pm a_2$ +..., čija veličina zavisi od broja faktora. Tako, za osnovne 2^2, 2^3, 2^4 i 2^5 oglede, te vrednosti su ±1, ±1,215, ±1,414 i ±1,6. Za delimično faktorijalni ogled, na bazi $\frac{1}{2}2^5$ tretmana, s interakcijom *ABCDE* uzetom kao opredeljujuće upoređenje vrednosti a je ±1,547. Broj dodatih tretmana za kompletiranje plana ostaje nepromenjen, tj. $(2n + 1)$.

Kod ogleda prvog reda kodirane vrednosti su bile −1 i 1, a u izvesnim slučajevima 0. Kod ogleda drugog reda postizanje ortogonalnosti zahteva druge kodirane vrednosti, izuzev za osnovni plan 2^2, gde je distanca od centralne tačke i ovde ± 1. S praktične tačke gledišta, to normalno ne bi smelo da stvara teškoće. Na primer, kod jednog osnovnog ogleda 2^3 neka je jedan faktor temperatura gde je prvi nivo 80° C, dakle −1 i 1. Dodatni tretmani polazeći od centra plana treba da imaju temperaturu od 85 ±5 · 1,215, odnosno 78,9° C i 91,1° C. Na isti način se dolazi do vrednosti tretmana i drugih faktora. Tabela 16.6. pokazuje centralni složeni plan s dva faktora. Tu se može uočiti da se normalne jednačine iz tabele 16.7. svode na jednačine iz tabele 16.5, tako da inverzija matrice daje iste koeficijente.

TAB. 16.7. Centralni složeni plan s dva faktora

Rezultati ogleda						
Matrica promenljivih X						Y vektor
X_0	X_1	X_2	X_1^2	X_2^2	X_1X_2	
1	−1	−1	1	1	1	Y_1
1	−1	1	1	1	−1	Y_2
1	1	−1	1	1	−1	
1	1	1	1	1	1	.
1	$-a$	0	a^2	0	0	.
1	a	0	a^2	0	0	.
1	0	$-a$	0	a^2	0	
1	0	a	0	a^2	0	
1	0	0	0	0	0	Y_9
Normalne jednačine, $X'X$						$X'Y$
9	0	0	$2(2+a^2)$	$2(2+a^2)$	0	$0Y$
0	$2(2+a^2)$	0	0	0	0	$1Y$
0	0	$2(2+a^2)$	0	0	0	$2Y$
$2(2+a^2)$	0	0	$2(2+a^4)$	4	0	$11Y$
$2(2+a^2)$	0	0	4	$2(2+a^4)$	0	$22Y$
0	0	0	0	0	4	$12Y$

U našem primeru ortogonalnost se postiže kad je $a = 1$.

U opštem slučaju, rešavanjem sledeće jednačine po a:

$$2^n - \frac{(2^n + 2a^2)^2}{k} = 0 \qquad (16.11)$$

dobija se vrednost kojom se postiže ortogonalnost plana, pri čemu je $k = 2^n + 2^n + 1$.

Od značaja su *pokretni* (rotatable) planovi drugog reda do kojih su došli Box, Hunter (1958) kao rezultat nastojanja za racionalizacijom ogleda. Oni su razradili ove planove polazeći od izvesnih geometrijskih konfiguracija tačaka u eksperimentalnom području. Pokretni planovi su od interesa u ispitivanju površine kao odgovora na faktore kad se ništa ne zna o mogućem maksimumu izraženom preko jednačine regresije. U tim planovima polazi se od konstantnih varijansi odgovora za svaki tretman koji je na istom odstojanju od centra plana. Ti planovi imaju tzv. "cirkularnu" simteriju i uz to im je sistem normalnih jednačina $(X'X)$ isti, bez obzira kakav je položaj promenljivih osa X.

Najveći praktični značaj imaju *centralni složeni pokretni planovi* koji su, u stvari, centralni složeni planovi s nekoliko tačaka u centru. Ovakva lokacija tačaka omogućuje izračunavanje eksperimentalne pogreške bazirane na broju stepeni slobode tih tačaka. Ukoliko je njihov broj veći utoliko je i standardna greška manja za tretmane (tačke) u centru. Ona naglo raste s udaljenošću tačaka od centra. Ukoliko bi broj tačaka u centru plana bio mali eksperimentalna pogreška za te tačke bi mogla da bude veća u centru nego na periferiji. Zbog toga plan ide za tim da broj centralnih tačaka omogućuje približno istu preciznost, odnosno standardnu grešku za sve tačke na periferiji u radijusu do 1. Na toj osnovi tabela 16.7. prikazuje broj tretmana i njihov položaj u planu zaključno s 6 faktora. Prva grupa tačaka predstavlja 2^n faktorijalni ogled, druga grupa, čiji je broj $2n$ naziva se *zvezda* i sastavni je deo centralnog složenog plana i treća grupa su tačke u centru. Da bi se postigla pokretnost vrednost a treba da je $(2^n)^{1/4}$ ili $(2^{n-1})^{1/4}$ u delimično faktorijalnom ogledu, na bazi polovine ponavljanja. U tabeli 16.8. planovi na osnovu 5 i 6 faktora su delimični faktorijalni ogledi s polovinom ponavljanja.

TAB. 16.8. Sastav i broj tretmana centralnih pokretnih planova drugog reda

Broj faktora	Broj tačaka			Ukupno	Vrednost a
	2^n faktorijalni plan	Zvezda	Centar		
2	4	4	5	13	1,414
3	8	6	6	20	1,682
4	16	8	7	31	2,000
5	16	10	6	32	2,000
6	32	12	9	53	2,378

16.5. Statistička analiza jednog centralnog složenog pokretnog plana

Za ilustraciju uzećemo jedan ogled s dva faktora ili promenljive, čiji je plan prikazan u tabeli 16.9. Plan ogleda pružaju samo kolone vektora X_1 i X_2, dok ostale kolone vektora X_0, X_1^2, X_2^2 i $X_1 X_2$ od matrice X, kao i kolona vektora od Y, su osnova za normalne jednačine. Pomoću vrednosti za XY izračunavaju se koeficijenti regresije na način prikazan pri dnu tabele 16.9.

TAB. 16.9. Centralni složeni pokretni plan s dva faktora

Matrica od X						Vektor od Y
X_0	X_1	X_2	X_1^2	X_2^2	X_1X_2	Y
1	−1	−1	1	1	1	12
1	1	−1	1	1	−1	14
1	−1	1	1	1	−1	13
1	1	1	1	1	1	17
1	−1,414	0	2	0	0	20
1	1,414	0	2	0	0	24
1	0	−1,414	0	2	0	10
1	0	1,414	0	2	0	21
1	0	0	0	0	0	9
1	0	0	0	0	0	24
1	0	0	0	0	0	16
1	0	0	0	0	0	18
1	0	0	0	0	0	22
				Ukupno		220

$X'X$						$X'Y$
13	0	0	8	8	0	$0Y = 220{,}0$
0	8	0	0	0	0	$1Y = 11{,}656$
0	0	8	0	0	0	$2Y = 19{,}554$
8	0	0	12	4	0	$11Y = 144{,}000$
8	0	0	4	12	0	$22Y = 118{,}000$
0	0	0	0	0	4	$12Y = 2{,}000$

$(X'X)^{-1}$					
0,2	0,	0	−0,1	−0,1	0
0	0,125	0	0	0	0
0	0	0,125	0	0	0
−0,1	0	0	0,14375	0,01875	0
−0,1	0	0	0,01875	0,14375	0
0	0	0	0	0	0,25

Koeficijenti regresije:

$$b_0 = 0{,}2(0Y) - 0{,}1\sum(jjY) = 17{,}8\,,$$

$$b_1 = 0{,}125(1Y) = 1{,}457\,,$$

$$b_2 = 0{,}125(2Y) = 2{,}444\,,$$

$$b_{11} = 0{,}125(11Y) + 0{,}01875\sum(jjY) - 0{,}1(0Y) = 0{,}912\,,$$

$$b_{22} = 0{,}125(22Y) + 0{,}01875\sum(jjY) - 0{,}1(0Y) = -2{,}338\,,$$

$$b_{12} = 0{,}25(12Y) = 0{,}50\,.$$

Sume kvadrata za analizu varijanse su:

Suma kvadrata linearnih komponenti je:

$$b_j(jY) = (1{,}457)(11{,}656) + (2{,}442)(19{,}544) = 64{,}734\,.$$

Suma kvadrata kvadratnih komponenti je:

$$b_0(0Y) + \sum b_{jj}(jjY) + \sum b_{jk}(jkY) - \frac{T^2}{N} =$$

$$=(17{,}80)(220{,}0)+[\,(0{,}912)(144{,}0)+(-2{,}338)(118{,}0)] + (0{,}5)(2{,}0) - \frac{(220)^2}{13}=49{,}367\,.$$

Suma kvadrata pogreške je:

$$\sum_{i=9}^{13} Y_i^2 - \frac{T_i^2}{5} = (9^2 + 24^2 + 16^2 + 18^2 + 22^2) - \frac{(89)^2}{5} = 136{,}8\,.$$

Suma kvadrata totala je:

$$\sum_{i=1}^{13} Y_i^2 - \frac{T^2}{13} = (12^2 + 14^2 + \ldots + 22^2) - \frac{(220)^2}{13} = 312{,}923\,.$$

Suma kvadrata nedostatka u linearnom i kvadratnom odgovoru je:

$$312{,}923 - (64{,}73 + 49{,}37 + 136{,}80) = 62{,}02.$$

Analiza varijanse je prikazana u tabeli 16.10 gde je broj tretmana osnovnog plana označan sa k_2 a u centru sa k_1.

TAB. 16.10. Analiza varijanse podataka iz tabele 16.9.

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata
Komponenta prvog reda	$p = 2$	64,73	32,36
Komponenta drugog reda	$\frac{p(p+1)}{2} = 3$	49,37	16,46
Nepodudarnost	$k_2 - \frac{p(p+3)}{2} = 3$	62,02	20,67
Pogreška	$k_1 - 1 = 4$	136,80	34,20
Ukupno	$k_1 + k_2 - 1 = 12$	312,92	

Da bi se olakšalo dobijanje koeficijenata regresije i suma kvadrata, multiplikator faktora 2, 3 i 4 kao i faktora 5 i 6 na osnovu polovine jednog ponavljanja, dati su u tabeli 16.11.

TAB. 16.11. Multiplikatori uz vrednosti $X'Y$ za izračunavanje koeficijenata regresije u centralnom složenom pokretnom planu

Koeficijent regresije	Broj faktora			Broj faktora, 1/2 ponavljanja	
	2	3	4	5	6
b_0	0,2	0,166338	0,142857	0,159091	0,110749
	0,1	0,056791	0,035714	0,034091	0,018738
b_j	0,125	0,073224	0,041667	0,041667	0,023087
b_{jj}	0,125	0,062500	0,031250	0,031250	0,015625
	0,01875	0,006889	0,003720	0,002841	0,001217
	0,1	0,056791	0,035714	0,0349041	0,018738
b_{jk}	0,25	0,125000	0,062500	0,062500	0,031250

Standardne greške koeficijenata regresije izračunavaju se na osnovu istih multiplikatora koji služe za dobijanje samih koeficijenata. Tako za dva faktora te vrednosti su:

$$s_{b_j} = \sqrt{s_P^2 \cdot 0{,}125} = \sqrt{34{,}20 \cdot 0{,}125} = 2{,}07\,,$$

$$s_{b_{jj}} = \sqrt{s_P^2(0{,}125 + 0{,}01875)} = 2{,}21\,,$$

$$s_{b_{jk}} = \sqrt{s_P^2 \cdot 0{,}25} = 2{,}92\,.$$

Na kraju treba napomenuti da se ovi planovi primenjuju u uslovima potpuno slučajnog rasporeda jedinica. O planovima s nepotpunim blokovima biće u produžetku reči.

16.6. Planovi s nepotpunim blokovima

U principu, raspored tretmana u nepotpune blokove treba da doprinese povećanju preciznosti ogleda. Uz to ako se pojedini blokovi primenjuju u vremenskim razmacima, onda statistička analiza, izvedena nakon potpunog završetka ogleda, omogućuje da se eventualni uticaj vremena na rezultate tretmana eliminiše iz eksperimentalne pogreške.

Formiranje blokova najčešće se izvodi polazeći od 2^n faktorijalnog ogleda, gde se u potpunom ponavljanju obrazuje jedan, a kod većeg broja faktora, i dva bloka s dodatkom nekoliko centralnih tačaka (zavisno od plana). Deo ogleda koji sačinjava zvezdu i nekoliko centralnih tačaka, predstavlja dodatni blok. Ovakvim planovima se postiže ortogonalnost blokova s koeficijentima regresije. Uslov je da srednja vrednost odgovora za Y u svakom bloku bude ista i svaki blok uzet posebno je jedan pokretljivi plan prvog reda.

Identičnost srednjih vrednosti u dva bloka utvrđuje se na osnovu sledeće jednakosti:

$$\bar{Y}_1 = \bar{Y}_2 = b_0 + \frac{2^n}{2^n + c_1}(b_{jj} + \dots + b_{nn}) = b_0 + \frac{2a^2}{2n + c_2}(b_{jj} + \dots + b_{nn}), \qquad (16.12)$$

gde su c_1 i c_2 brojevi tačaka u centru u jednom i drugom bloku.

Da bi se postigla ortogonalnost potrebno je:

$$a^2 = \frac{2^n(2n + c_2)}{2(2^n + c_1)}. \qquad (16.13)$$

Tako, za ogled s dva faktora broj tačaka je $c_1 = c_2 = 2$, dok je $a^2 = 2$ i srednje vrednosti su:

$$\bar{Y}_1 = \bar{Y}_2 = b_0 + \frac{4}{6}b_{11} + \frac{4}{6}b_{22}. \qquad (16.14)$$

Za tri faktora na osnovu 6 tačaka u centru dobija se:

$$a^2 = \frac{8(6 + c_2)}{2(8 + c_1)}. \qquad (16.15)$$

Međutim, za pokretnost potrebno je $a^2 = 2\sqrt{2}$, odnosno $a = 1{,}682$. Ako se ova vrednost za a zameni u formuli 16.15 dobija se odnos:

$$32\sqrt{2} + (4\sqrt{2})c_1 = 48 + 8c_2$$

i bilo koju vrednost da uzmemo za c_1 i c_2, imajući u vidu da je ukupan broj tačaka u centru 6, ne postiže se jednakost leve i desne strane jednačine. Najpribližnija jednakost će se postići ako se uzme da je $c_1 = 4$ i $c_2 = 2$ i to daje $a^2 = \frac{8(6+2)}{2(8+4)} = \frac{8}{3}$ odnosno $a =$ 1,633.

U ovom slučaju ne može se istovremeno postići pokretnost i ortogonalnost. Obično se izabere ortogonalnost na račun pokretnosti što do izvesne mere smanjuje optimalnu vrednost samog plana. U ovom ogledu od tri faktora moguća je dalja podela bloka na osnovu 2^n na dva ortogonalna bloka, svaki s po dve tačke u centru.

Tabela 16.12. sadrži dva centralna složena plana drugog reda u nepotpunim blokovima za 2 i 3 promenljive (faktora). U praktičnom izračunavanju formira se matrica X i vektor Y, a da se ne vodi računa o blokovima. Do matrice normalnih jednačina $X'X$ i proizvoda $X'Y$ dolazi se na uobičajeni način, a isto tako do inverzije matrice $(X'X)^{-1}$.

Multiplikatori za odgovarajuća izračunavanja koeficijenata regresije takođe su dati u tabeli 16.12.

Sume kvadrata komponenti prvog i drugog reda za analizu varijanse dobijaju se na način prikazan u odeljku 16.5. ne vodeći računa o blokovima. Suma kvadrata blokova izračunava se direktno na uobičajeni način.

TAB. 16.12. Centralni složeni planovi drugog reda u nepotpunim blokovima

Dva faktora			
Blok I		Blok II	
X_1	X_2	X_1	X_2
−1	−1	−1,414	0
1	−1	1,414	0
−1	1	0	−1,414
1	1	0	1,414
0	0	0	0
0	0	0	0

$b_0 = 0{,}25(0Y) - 0{,}125 \sum (jjY)$ $\qquad b_j = 0{,}125(jY)$

$b_{jj} = 0{,}125\ (jjY) + .0{,}03125 \sum (jjY) - 0{,}125\ (0Y)$ $\qquad b_{jk} = 0{,}25(jkY)$

Tri faktora								
Blok I			Blok II			Blok III		
X_1	X_2	X_3	X_1	X_2	X_3	X_1	X_2	X_3
−1	−1	1	−1	−1	−1	−1,633	0	0
1	−1	−1	1	−1	1	1,633	0	0
−1	1	−1	−1	1	1	0	−1,633	0
1	1	1	1	1	−1	0	1,633	0
0	0	0	0	0	0	0	0	−1,633
0	0	0	0	0	0	0	0	1,633
						0	0	0
						0	0	0

$b_0 = 0{,}165385\ (0Y) - 0{,}057692 \sum (jjY)$; $b_j = 0{,}075(jY)$

$b_{jj} = 0{,}070312\ (jjY) + 0{,}005409 \sum (jjY) - 0{,}057692\ (0Y)$; $b_{jk} = 0{,}125(jkY)$

Suma kvadrata blokova je:

$$\sum \frac{B_j^2}{t_j} - \frac{T^2}{N},$$

gde je: t_j—broj jedinica u j—tom bloku.

Suma kvadrata pogreške dobija se na osnovu zbira varijacija između odgovora za tačke u centru i njihovog proseka za svaki blok. Za nepotpune blokove s dva faktora broj stepeni slobode za pogrešku u jednom ponavljanju je 2, s tri faktora, prema planu u tabeli 16.12, taj broj je 6 itd. Suma kvadrata totala izračunava se na uobičajeni način, a na osnovu razlike se dolazi do sume kvadrata za nepodudarnost.

Uzimamo za ilustraciju da se radi o rezultatima ogleda na bazi dve promenljive u dva bloka kako je prikazano u tabeli 16.13. Svaka kolona matrice X pomnožena s odgovarajućom vrednošću vektora Y daje odgovarajuće sume proizvoda $(0Y)$, $(1Y)$,..., $(12Y)$. Na osnovu rešenja datih u tabeli 16.12., izračunati su koeficijenti regresije b_0, b_1, ... ,b_{12}. Sume kvadrata su:

TAB. 16.13. Primer ogleda u nepotpunim blokovima s dva faktora

	X matrica						Y vektor	
	X_0	X_1	X_2	X_1^2	X_2^2	X_1X_2	Y	
Blok I	1	−1	−1	1	1	1	15	
	1	1	−1	1	1	−1	18	
	1	1	1	1	1	1	17	
	1	−1	1	1	1	−1	20	
	1	0	0	0	0	0	25	
	1	0	0	0	0	0	21	116
Blok II	1	−1,414	0	2	0	0	14	
	1	1,414	0	2	0	0	22	
	1	0	−1,414	0	2	0	24	
	1	0	1,414	0	2	0	18	
	1	0	0	0	0	0	20	
	1	0	0	0	0	0	24	122
								238

$X'Y$		Koeficijenti regresije
0Y	238,00	$b_0 = 22{,}50$
1Y	11,31	$b_1 = 1{,}414$
2Y	−4,48	$b_2 = -0{,}560$
11Y	142,00	$b_{11} = -2{,}750$
22Y	154,00	$b_{22} = -1{,}250$
12Y	−6,00	$b_{12} = -1{,}500$

Analiza varijanse

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata
Blokovi	1	3,00	3,0
Kompon. prvog reda	2	18,50	9,25
Kompon. drugog reda	3	60,67	20,22
Nepodudarnost	3	41,50	13,83
Pogreška	2	16,00	8,0
Total	11	139,67	

Suma kvadrata totala je:

$$(15^2 + 18^2 + \ldots + 24^2) - \frac{(238)^2}{12} + 139{,}67.$$

Suma kvadrata komponenti prvog reda je:

$$\sum b_j(jY) = (1{,}414)(11{,}31) + (-0{,}560)(4{,}48) = 18{,}50\,.$$

Suma kvadrata komponenti drugog reda je:

$$\left[b_0(0Y) + \sum b_{jj}(jjY) + b_{jk}(jkY)\right] - \frac{T^2}{N} = \{(22{,}50)(238{,}0) + [\,(-2{,}750)(142{,}00) +$$

$$+ (-1{,}25)(154{,}0)] + (-1{,}50)(-6{,}00) - \frac{(238)^2}{12} = 60{,}67\,.$$

Suma kvadrata blokova je:

$$\frac{1}{6}(116^2 + 122^2) - \frac{(238)^2}{12} = 3{,}00\,.$$

Suma kvadrata pogreške je:

$$\left\{\left[(25^2 + 21^2) - \frac{(46)^2}{2}\right] + \left[(20^2 + 24^2) - \frac{(44)^2}{2}\right]\right\} = 16{,}00\,.$$

Suma kvadrata nepodudarnosti je:

$139,67 - (18{,}50 + 60{,}67 + 3{,}00 + 16{,}00) = 41{,}50.$

Analiza varijanse prikazana je, takođe, u tabeli 16.13. Odgovarajuće standardne greške koeficijenata regresije su:

$s_{b_j} = s_P\sqrt{0{,}125} = 2{,}83 \cdot 0{,}353 = 1{,}00$; $s_{b_{jj}} = 2{,}83\sqrt{0{,}125 + 0{,}03125} = 1{,}12$;

$s_{b_{jk}} = 2{,}83\sqrt{0{,}25} = 1{,}42.$

16.7. Istraživanje optimuma pomoću jednofaktorijalnog metoda

U prethodnim izlaganjima bilo je reči o pronalaženju maksimalne ocene pomoću višestruke regresije. Međutim, problem se često postavlja da se ispita ponašanje odgovora *oko* stvarnog maksimuma, jer se dešava da taj maksimum nije u predelu koji pruža ogled. Ovakva ispitivanja zahtevaju seriju ogleda, kako bi se istraživač progresivno približavao maksimumu. Tu se pojavljuje niz problema praktične i teorijske prirode, što zahteva obazrivost. Pre svega, treba utvrditi koji će se faktori ispitivati, koliko nivoa svakog od njih uključiti u ogled i dimenzije kvantitativnih varijacija. Jedinstvenog recepta za to nema i u praksi se, u tu svrhu, primenjuje više metoda. Jedan faktor u jednom ispitivanju je metod koji se dugo primenjivao.

Primena metoda pretpostavlja da se prethodno oceni optimalna kombinacija polazeći od nivoa faktora. Zatim se, obično, polazi od onog faktora za koji se zna ili očekuje najbolji odgovor. Nivoi toga faktora kombinuju se s početnim nivoima svih drugih faktora uključenih u ispitivanje. Cilj je da se nađe nivo prvog faktora s najboljim odgovorom. Broj nivoa prvog faktora je najmanje tri, iako može da bude četiri ili pet. Obično se ide na nivoe s jednakim razmacima, mada to ne mora da bude uvek najbolje rešenje. Svi ostali faktori su na prvom nivou i odgovor ima oblik parabole. Jednačina regresije je:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_1^2\,.$$

Optimum za X_1 je izražen odnosom $-b_1/2\,b_2$, polazeći da je b_2 negativna vrednost.

Kod drugog eksperimenta tretman prvog faktora ili promenljiva utvrđuju se na nivou optimuma, drugi faktor je sad na više nivoa a ostali faktori su na početnom nivou. Cilj drugog ogleda je da se pronađe optimum za X_2. Tako se izvodi broj analiza ogleda zavisno od broja faktora. Na ovaj način se dolazi do optimalne kombinacije za jednu tačku (tretman) na osnovu svih ispitivanih faktora i time se završava prva runda ispitivanja.

Ukoliko je ovako dobijeni optimum približan optimumu u preliminarnom istraživanju, onda to potvrđuje da neko vredno pažnje poboljšanje nije postignuto i ispitivanje se dalje ne produžava. Ako, pak, dođe do neke bitnije promene u maksimumu, onda se pristupa drugoj rundi ogleda. I ovde se počinje s prvom promenljivom (faktor) na više nivoa u kombinaciji s optimumima za sve ostale promenljive dobijene u prvoj rundi ispitivanja. U drugom ogledu dobijeni maksimum za prvu promenljivu iz prvog ogleda uzima se u kombinaciji s nivoima druge promenljive i maksimumima tretmana svakog faktora na osnovu prve runde. U ovim ogledima polazi se od pretpostavke da je eksperimentalna pogreška mala ili, još bolje, da je unapred poznata, s obzirom da broj jedinica u ogledu nije veliki.

U daljem postupku moguće su različite modifikacije metoda od kojih se jedna sastoji da se za početak treće runde izvrši promena svih promenljivih X proporcionalno za razliku između optimuma za svako X_j na kraju prve i druge runde. Modifikaciju metoda je izveo i Brooks (1959) polazeći od četiri nivoa prve promenljive i maksimuma na bazi jednačine trećeg stepena. Primena ovog metoda ne isključuje eliminisanje nekog od faktora u docnijim ispitivanjima, ako nisu imali značajnog uticaja na maksimum u prethodnim rundama. U dosadašnjoj praksi čestu primenu imao je metod *najvećeg uspona* (steepest ascent) o kojem će biti reči u daljem tekstu.

16.8. Metod najvećeg uspona

Osnove ovog metoda postavio je Hotelling (1941), ali su ga detaljnije razradili Box, Wilson (1951), tako da se on, obično, njima pripisuje. U principu, metod polazi od jednog ogleda s faktorima na dva nivoa ili delimično faktorijalnog ogleda s centralnom tačkom za koju se pretpostavlja da se nalazi oko maksimuma. Na ove podatke primenjuje se analiza regresije, s ciljem da se utvrdi u kom pravcu se treba kretati da bi se poboljšao rezultat na najefikasniji način, što se zove pravac najvećeg uspona. Obično su nivoi pojedinih faktora dati u jednakim kvantitativnim razmacima, dok ne dođe do pada u usponu. Ovaj novi prostor služi kao osnova novog ogleda itd. Kao i kod jednofaktorijalnog metoda rezultati svakog prethodnog ogleda služe kao polazna osnova za sledeći.

Kad se postavi prvi ogled izračunava se jednačina prvog reda, koja je jedna aproksimacija u blizini početne tačke. Ogled mora da bude planiran tako da pruži obaveštenje o nepodudarnosti za šta je potrebno obezbediti izvestan broj stepeni slobode. Ako se pogreška ne zna od ranije, plan ogleda, takođe, treba da osigura izvestan broj stepeni slobode za njenu ocenu. To se, kao što smo videli, postiže proširenjem ogleda s još nekoliko tačaka u centru ili, pak, ponavljanjem osnovnog plana.

Za ilustraciju pretpostavimo da se radi o ogledu s dva faktora: viskoznost i vreme. Cilj je da se istraži jačina nagriženosti u procesu fuzije silicijuma za poluprovodnike. Svaki faktor je na dva nivoa pa je to ogled 2^2. Dva nivoa viskoznosti su 40 i 60, a dva nivoa vremena (u sekundama) su 20 i 26. Upotrebimo kodirane vrednosti:

X_1 Viskoznost		X_2 Vreme	
−1	40	−1	20
1	60	1	26

Centar ispitivanja za viskoznost je 50 a za vreme 23 i na tom nivou se očekuje optimum reakcije za početak. Standardnim postupkom izračunati su koeficijenti regresije, tako da je jednačina:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 = 18{,}5 + 2X_1 + 6X_2\,.$$

Ovde ćemo pretpostaviti da se već zna ocena standardne greške i da nepodudarnost nije značajna. Nakon ovog potrebno je pomeriti rejon istraživanja u pravcu u kome se očekuje da će se povećati reakcija, odnosno omogućiti dobijanje maksimuma za vrednost Y.

Normalno se kreće od centra prvog ogleda (0,0,...,0) u pracvu P koji će imati koordinate $X'_1, X'_2,...,X'_p$. U opštem slučaju u traženju maksimuma jednačina prvog reda:

$$\eta = \Phi(X_1,X_2,...,X_p) = \beta_0 + \beta_0X_1 + \beta_2X_2 + ... + \beta_pX_p \qquad (16.16)$$

postaje:

$$\eta = \Phi(X'_1,X'_2,...,X'_p) = \beta_0 + \beta_1X'_1 + \beta_2X'_2 + ... + \beta_pX'_p\,. \qquad (16.17)$$

Odstojanje od 0 do p definisano kao:

$$r = \sqrt{X'^2_1 + X'^2_2 + \ldots + X'^2_p} \qquad (16.18)$$

predstavlja *korak najvećeg uspona*. Maksimalne vrednosti od X_j se dobijaju u polasku od tačke P na osnovu parcijalnih izvoda od Φ u odnosu na X_j:

$$X_j = C\frac{dF}{dX_j}, \qquad (16.19)$$

gde je C konstanta koja zavisi direktno od p i izračunava se prema obrascu:

$$C = \frac{r}{\sqrt{\sum\left(\frac{d\Phi}{dX_j}\right)^2}}. \qquad (16.20)$$

Parcijalni izvodi se izračunavaju na osnovu prvog ogleda. Kad se radi o linearnoj jednačini navedeni parcijalni izvodi se svode na parcijalne koeficijente regresije za svako X_j:

$$\frac{d\Phi}{dX_j} = b_j. \tag{16.21}$$

U našem primeru u funkciji datog koda linearna jednačina prvog reda ima parcijalne koeficijente regresije: $b_1 = 2, b_2 = 6$. Na osnovu ovih podataka izračunavaju se koraci najvećeg uspona prikazani u tabeli 16.14.

U prvom redu su dati koeficijenti regresije koji pokazuju odgovarajuće nagibe prave, uz pretpostavku da se efekti drugog i većeg stepena mogu zanemariti. Na ovaj način, za promenu svake dve jedinice kod X_1 promenljiva X_2 se menja za 6 jedinica. Izraženo u originalnim jedinicama ta promena je $2 \cdot 10 = 20$ i $6 \cdot 3 = 18$ i data je u trećem redu tabele. Na osnovu ovih vrednosti istovremeno se sagledava i pravac najvećeg uspona. On se obično izražava u jedinici jedne promenljive, recimo, prve, X_1. Za X_2 taj odnos je 0,9 i dat je u četvrtom redu. Koraci, proizvoljno utvrđeni, u pravcu najvećeg uspona dati su u redovima 6, 7 i 8. Prethodno, red 5 sadrži početni nivo u centru prvog plana. U poslednjoj koloni unete su izračunate vrednosti za $\hat{Y}$ koje se dobijaju na osnovu jednačine regresije prvobitnog plana i kodiranih vrednosti za X_j u pravcu najvećeg uspona. Tako, predviđanje za 34,5 je izračunato na osnovu $X_1 = 2$ i $X_2 = 2$ itd.

TAB. 16.14. Izračunavanje koraka najvećeg uspona

Redni broj	Indikacija	X_1	X_2	$\hat{Y}$
1	Parametri b_j	2	6	
2	Jedinica	10	3	
3	b_j jedinica	20	18	
4	Promena u odnosu na X_1	1	0,9	
5	Početni nivo	50	23	18,5
6	Koraci najvećeg uspona za različite nivoe	60	26	26,5
7	Koraci najvećeg uspona za različite nivoe	70	29	34,5
8	Koraci najvećeg uspona za različite nivoe	80	32	42,5

Dalja istraživanja izvode se da se utvrdi da li se kombinacija faktora na novim nivoima približava predviđenoj vrednosti $\hat{Y}$. Drugim rečima, treba testirati kombinaciju tretmana na nivou 70 za viskoznost i na nivou 29 za vreme. Ako su rezultati u skladu s predviđanjima, novi test se izvodi u tački 80 i 32 itd. Pri ovim eksperimentima važna je veličina koraka koji zavise od subjektivne ocene istraživača. Ako je korak mali potrebno je više testova u pravcu najvećeg uspona, a ako je on pak veliki onda postoji opasnost da se neka tačka preskoči, odnosno kombinacija tretmana u kojoj leži optimalan odgovor. Po pravilu, testovi će se izvoditi sve dok se ne pojavi značajna razlika između dobijenog odgovora na osnovu ogleda i izračunatog predviđanja. Kad se stigne do te tačke, po potrebi, izvodi se novi ogled 2^n s početkom na toj tački, nakon čega se izračunava novi korak najvećeg uspona na način prikazan u tabeli 16.14.

U slučaju da je varijansa za nepodudarnost značajna, to pokazuje da u reonu u kome se izvodilo ispitivanje jednačina prvog stepena ne odgovara, te je potrebno tražiti optimum pomoću jednačine drugog stepena, odnosno kvadratne jednačine. Videli smo da se ogled 2^n mogao proširiti u plan drugog stepena pomoću centralnog složenog i centralnog složenog pokretnog plana u potpuno slučajnom rasporedu ili u nepotpunim blokovima. Ovi ogledi omogućavaju testiranje nepodudarnosti i ocenu eksperimentalne pogreške. U ovom kontekstu može da se pojavi jedna druga situacija. Naime, da je već kod prvog ogleda dostignut uspon, što se da zaključiti na osnovu malih koeficijenata regresije. Tada je, takođe, potrebno primeniti jednačinu drugog stepena kao bolju aproksimaciju odgovora da bi se videlo da li je stvarno dostignut maksimum ili samo jedan "nabor".

U kompleksnijim istraživanjima s više faktora, na osnovu rezultata prvog ogleda, može da se izvrši izmena u prvobitnim nivoima nekog od faktora, ako se utvrdi da je njegov efekat mali u poređenju s ostalim. To može da ima više uzroka. Tako, veličina početnog nivoa toga faktora je mala te njegov efekat ne dolazi do izražaja. Ili, pak, njegovi nivoi su nezavisni od uticaja ostalih faktora. U prvom slučaju, verovatno, treba da se promeni veličina nivoa, a u drugom ni ta promena ne bi imala uticaja.

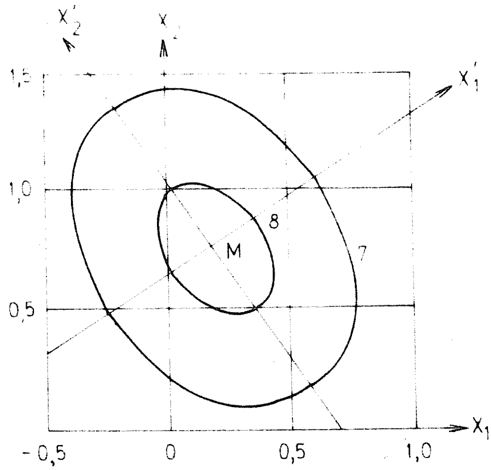
16.9. Kanonska analiza

Često se u konkretnim slučajevima pokušava i s jednačinom drugog stepena, čak i onda kad se preko jednačine prvog stepena dobije odgovor koji je blizu maksimuma. Jednačina drugog stepena omogućava da se utvrdi oblik površine odgovora. Na taj način se ukazuje na alternativna rešenja kombinacije tretmana, kojima se postiže odgovor blizu optimalnoga, što je ponekad i od praktičnog značaja. Da bi se olakšalo interpretiranje rezultata na bazi jednačine drugog stepena ona se često izražava u kanonskom obliku. Da bi se shvatio koncept i njegova primena u praksi uzećemo hipotetični primer (Anderson, McLean, 1974). Radi se o ogledu 3^2, čija je kvadratna jednačina regresije dobijena na uobičajeni način i glasi:

$$\hat{Y} = 6 + 3X_1 + 5X_2 - 4X_1^2 - 3X_2^2 - 2X_1X_2. \tag{16.22}$$

Da bi se mogla izvesti bolja interpretacija rezultata, koji proizlaze iz ove jednačine korisno je videti kakve su *konture površine* odgovora. Tako, za dobijanje konture za odgovor $\hat{Y} = 8$, potrebno je da sve tačke u planu daju 8, na osnovu jednačine. U tu svrhu izvršićemo zamenu za X_1 i doći do kvadratne jednačine za X_2. Takođe, dolazi se i do kvadratne jednačine od X_1 na osnovu X_2. Rešenje na ovoj osnovi za nešto veći broj tačaka omogućuje utvrđivanje konturnog dijagrama. To se, isto tako, može učiniti i za druge visine odgovora. Konture površine za 7 i 8 prikazane su u dijagramu 16.6.

Ovako se dobijaju konture površine i u drugim slučajevima na osnovu ogleda 3^2. Te konture nisu potpuno precizne, pre svega, zbog eventualne razlike između jednačine drugog reda i prave površine, što se izražava preko sume kvadrata nepodudarnosti u analizi varijanse. Na nepreciznost utiče i eksperimentalna pogreška. Stoga, u prvom ogledu konturnu površinu treba uzeti s opreznošću. Geometrijski prikaz površine odgovora može još da se izvede i kod tri faktora u obliku stereograma.



Sl. 16.6. Konture površine

Za više od tri faktora geometrijsko prikazivanje nije moguće. Kanonska forma jednačine olakšava problem i omogućava geometrijsko prikazivanje u konturnom obliku na bazi jednačine drugog stepena s većim brojem faktora.

Da bi se došlo do kanonske jednačine potrebno je izračunati maksimum za $\hat{Y}$. To se izvodi diferenciranjem osnovne jednačine drugog stepena u odnosu na X_1 i X_2 a zatim se rešavanjem dolazi do vrednosti za X_1 i X_2. Tako je:

$$\frac{d\hat{Y}}{dX_1} = b_1 + 2b_{11}X_1 + b_{12}X_2 = 0\,,$$

$$\frac{d\hat{Y}}{dX_2} = b_2 + 2b_{22}X_2 + b_{12}X_1 = 0\,.$$

Na osnovu jednačine 16.22. obrazuju se dve normalne jednačine:

$$\frac{d\hat{Y}}{dX_1} = 3 - 8X_1 - 2X_2 = 0\,,$$

$$\frac{d\hat{Y}}{dX_2} = 5 - 2X_1 - 6X_2 = 0\,.$$

Rešavanjem ovih jednačina dobijaju se: $X_1 = \frac{2}{11}\, i\, X_2 = \frac{17}{22}$. Neka su to koordinate, s kojima je određena tačka M (sl. 16.6). Obeležimo ih s X_{1M} i X_{2M}. Zamenom u jednačini 16.22. dobija se maksimum ili stacionarna vrednost:

$$\hat{Y}_M = b_0 + \frac{1}{2}(b_1X_{1M} + b_2X_{2M}) = 6 + \frac{1}{2}\left(3\frac{2}{11} + 5\frac{17}{22}\right) = 8{,}2.$$

Dalje je potrebno izvesti transformaciju promenljivih X_1 i X_2 s centrom 0 u centar M (stacionarna vrednost). Determinante sledećeg oblika postavljaju se na osnovu jednačine 16.22.

$$\begin{vmatrix} b_{11} - B & \frac{1}{2}b_{11} \\ \frac{1}{2}b_{12} & b_{22} - B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 - B & -1 \\ -1 & -3 - B \end{vmatrix}$$

Kvadratna jednačina je:

$$B^2 + 7B + 11 = 0\,,$$

i njena dva rešenja su $B = -4{,}62$ i $-2{,}38$. Ove dve vrednosti su koeficijenti $B_{11} = -4{,}62$ i $B_{22} = -2{,}38$.

Opšta formula kanonske jednačine za dva faktora je:

$$\hat{Y} = \hat{Y}_M + B_{11}X'^2_1 + B_{22}X'^2_2, \tag{16.23}$$

gde su X'_1 i X'_2 transferisane promenljive X_1 i X_2 s koordinantnog početka 0 na početak M, tako da je:

$$X'_1 = X_1 - X_{1M} \text{ i } X'_2 = X_2 - X_{2M}.$$

U navedenom primeru kanonska jednačina je:

$$\hat{Y} = 8{,}2 - 4{,}62X'^2_1 - 2{,}38X'^2_2.$$

Zbog njene interpretacije zgodnije je vrednost $\hat{Y}_M$ prebaciti na levu stranu, tako da je:

$$\hat{Y} - 8{,}2 = -4{,}62X'^2_1 - 2{,}38X'^2_2.$$

S obzirom da su B_{11} i B_{22} negativne vrednosti, svaka promena duž osa X'_1 i X'_2 udaljuje nas od maksimuma. Može se samo uočiti na osnovu slike 16.6. da je pad u vrednosti odgovora nešto ubrzaniji duž ose X_1 nego X_2, jer je kontura površine elipsastog oblika. Objašnjenje veze između novog i starog koordinantnog sistema pruža Myers (1971).

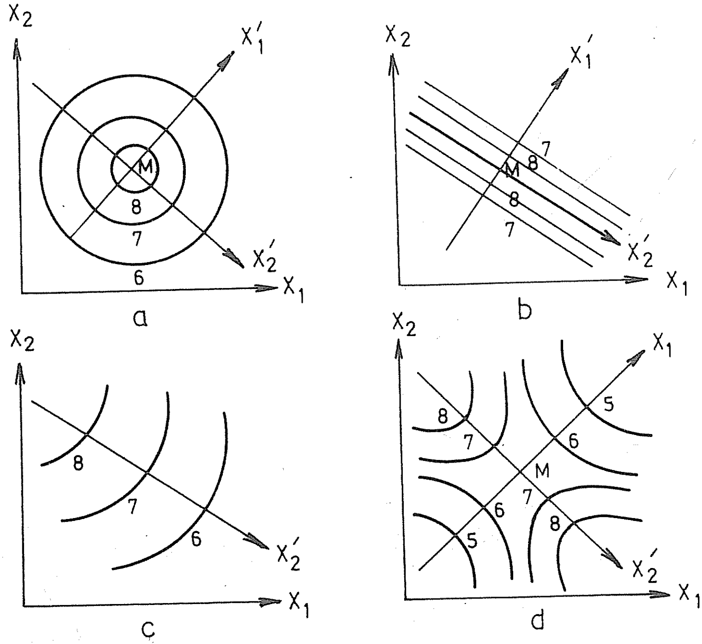
Nekoliko primera drukčijih kontura površine prikazano je na sl. 16.7. Tako, na sl. 16.7a kontura površine odražava situaciju kad su B_{11} i B_{22} skoro identične veličine. Slika 16.7b pokazuje situaciju kad je B_{11} negativna vrednost a B_{22} je nula, tj:

$$\hat{Y} - \hat{Y}_M = B_{11}X'^2_1.$$

Ovde je $\hat{Y}_M$ odgovor na bilo kojoj tački duž ose X'_2. Sl. 16.7c pokazuje situaciju kad je:

$$\hat{Y} - \hat{Y}_M = B_{11} X'^2_1 + B_{22} X'_2 ,$$

gde je B_{11} negativna vrednost, a B_{22} je koeficijent koji pokazuje relativan porast u odgovoru duž X'_2 ose.



Sl. 16.7. Neke konture površina odgovora

Situacija na slici 16.7d nastupiće kad je B_{11} pozitivna a B_{22} negativna veličina. U praksi se, ipak, ređe susreću konture površina 16.7b i 16.7c nego 16.7a i 16.7d ili, pak, 16.6. Treba istaći da kanonska jednačina pruža obaveštenje samo za površinu u domenu plana i da ne može da se generalizuje i na druge rejone, zato su potrebna dalja ispitivanja.