

U tablicama  $F$ -distribucije traži se odgovarajuća veličina za  $r_1 = 1$  i izračunato  $\hat{r}_2 = 5$ . Izračunato  $F$  je daleko iznad kritične vrednosti u tabelama  $F$ -distribucije. Drugi test je:

$$F = \frac{s^2 + C_1 s_B^2}{s^2} = \frac{0,1694}{0,0111} = 15,2. \quad (7.54)$$

U tabelama je  $F_{(0,05;5,15)} = 2,9$ , te se i ova hipoteza o homogenosti varijansi odbacuje.

## 7.8. Testiranje unapred određenih upoređenja između sredina

Testiranje razlika između sredina do sada smo izvodili putem  $t$ -testa izračunavanjem najmanje značajne razlike (7.16)

$$NZR = t_{\alpha(N - k)} s(\bar{X}_i - \bar{X}_j).$$

Ako je razlika između sredina dva tretmana veća od  $NZR$ , zaključujemo da su razlike značajne. Na primenu ovog postupka ima primedbi, pogotovo ako se radi o više sredina i kad treba da se izvedu sva moguća upoređenja. Onda, naime, postoji mogućnost da se usled slučajnog uticaja neko od ovih upoređenja pokaže kao značajno iako u stvari nije. Treba istaći da  $NZR$  predstavlja ispravan test *samo* onda kada je reč o dva tretmana. Pored toga, preporučuje se upotreba  $NZR$  i u slučajevima upoređenja različitih tretmana jednog ogleda sa standardnim ili kontrolnim tretmanom.

Pored upoređenja sredina putem  $t$ -testa, postoje i drugi načini. Jedan od njih se ponekad upotrebljava – *testiranje unapred određenih upoređenja*. Broj tih upoređenja odgovara broju stepeni slobode za tretmane u analizi varijanse. Postupak se sastoji u razbijanju sume kvadrata tretmana sa  $k - 1$  stepeni slobode na  $k - 1$  sumu kvadrata, svaki sa po jednim stepenom slobode. Svaka suma kvadrata može zatim da se uporedi sa sredinom kvadrata varijacija unutar grupa ili pogreške. Ovo upoređenje je, u stvari, test o značajnosti razlike između *unapred određenih sredina*.

Da bi se shvatio postupak objasnićemo neka *pravila* koja omogućuju ovakva upoređenja. Pre svega, upoređenje se vrši između dve sredine ili između proseka grupe sredina. Međutim, umesto da se uzmu sredine ovih tretmana i utvrde njihove razlike koje služe kao osnova za testiranje, na primer  $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ , uzimaju se *razlike između njihovih totala*, tj.  $T_1 - T_2$ . Isto tako, može da se uporedi i  $\frac{T_1 + T_2}{2} - T_3$ , što znači da se dva tretmana upoređuju sa trećim . . . Ili  $(T_1 + T_2) - (T_3 + T_4)$ ;  $\frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{4} - T_o$  itd. Zatim:  $\frac{T_1 + T_2}{2} - T_3$  i  $\frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{4} - T_o$  mogu da se izraze i kao:  $T_1 + T_2 - 2T_3$ , odnosno  $T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_o$ . Sva ova upoređenja se vrše uz uslov postojanja jednakog broja ponavljanja.

Ova upoređenja nazivaju se *linearnom funkcijom tretmana* ( $T_i$ ) i jednačina:

$$C = \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \dots + \lambda_k T_k, (i = 1, \dots, k), \quad (7.55)$$

gde su  $\lambda_i$  koeficijenti – predstavlja upoređenje između tretmana pod uslovom da je:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0. \quad (7.56)$$

Tako kod upoređenja  $T_1 - T_2$  koeficijenti su  $1 + (-1) = 0$ ; kod upoređenja  $T_1 + T_2 - 2T_3$  koeficijenti su  $1 + 1 - 2 = 0$ ; kod upoređenja  $T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_0$  su  $1 + 1 + 1 + 1 - 4 = 0$  itd.

Ako broj ponavljanja nije jednak, tada je:

$$C = \sum_{i=1}^k n_i \lambda_i T_i \quad (7.57)$$

upoređenje pod uslovom da je:

$$\sum_{i=1}^k n_i \lambda_i = 0. \quad (7.58)$$

Imajući u vidu gornje pravilo za upoređenja između tretmana, tada:

$$\frac{C^2}{n \sum_{i=1}^k \lambda_i^2} \quad (7.59)$$

predstavlja deo sume kvadrata tretmana s jednim stepenom slobode.

Ako broj ponavljanja nije isti, a  $C$  je upoređenje između tretmana, suma kvadrata tog upoređenja je:

$$\frac{C^2}{\sum_{i=1}^k n_i \lambda_i^2}. \quad (7.60)$$

Ako imamo dva upoređenja:

$$C_1 = \lambda_{11} T_1 + \lambda_{12} T_2 + \dots + \lambda_{1k} T_k,$$

$$C_2 = \lambda_{21} T_1 + \lambda_{22} T_2 + \dots + \lambda_{2k} T_k, \quad (7.61)$$

kažemo da su *ortogonalna* ako je:

$$\lambda_{11} \lambda_{21} + \lambda_{12} \lambda_{22} + \dots + \lambda_{1k} \lambda_{2k} = 0. \quad (7.62)$$

Kod nejednakog broja ponavljanja dva upoređenja su ortogonalna kad je:

$$n_1 \lambda_{11} \lambda_{21} + n_2 \lambda_{12} \lambda_{22} + \dots + n_k \lambda_{1k} \lambda_{2k} = 0. \quad (7.63)$$

Ako su upoređenja 1 i 2 ortogonalna, tada je suma kvadrata upoređenja 1 s jednim stepenom slobode, kao što smo videli, deo ukupne sume kvadrata tretmana. Ako se želi dalja podela ostatka sume kvadrata tretmana, upoređenje 2 mora da bude ortogonalno s upoređenjem 1, a upoređenje 3 sa upoređenjima 1 i 2 itd. Na taj način smo u mogućnosti da totalnu sumu kvadrata tretmana sa  $k - 1$  stepeni podelimo na  $k - 1$  sumu kvadrata, svaka sa po jednim stepenom slobode.

Na osnovu toga dolazimo do sledećeg *novog pravila*: ako su  $k - 1$  upoređenja međusobno ortogonalna, onda je:

$$\frac{C_1^2}{n \sum_{i=1}^k \lambda_{1i}^2} + \frac{C_2^2}{n \sum_{i=1}^k \lambda_{2i}^2} + \dots + \frac{C_{k-1}^2}{n \sum_{i=1}^k \lambda_{(k-1)i}^2} = \text{Suma kvadrata tretmana.} \quad (7.64)$$

Ovo praktično znači da, kad podemo od upoređenja  $C_1$ , možemo naći dalja ortogonalna upoređenja i doći do daljih  $C_2, \dots, C_{k-1}$  upoređenja. Očigledno, ima niz mogućnosti za *slobodan izbor upoređenja*, sem za upoređenje  $C_{k-1}$  za koje postoji samo jedna mogućnost. Normalno je da se za upoređenja uzimaju ona za koja postoji najveći *interes*. Prema tome, ako se želi da primeni ovaj postupak, izbor upoređenja treba da bude unapred izvršen tako da ona budu međusobno ortogonalna.

Kod ovakvih unapred planiranih upoređenja između tretmana za testiranje značajnosti njihove razlike primenjuje se *F-test*, tako da se sume kvadrata individualnih upoređenja dele sa sumom kvadrata pogreške i kolicičnik upoređuje s tablicama *F-distribucije* za  $r_1$  i  $r_2$  stepeni slobode gde je  $r_1 = 1$ .

Može se reći da su rezultati ovakvih unapred planiranih ortogonalnih upoređenja verodostojniji nego oni koji bi se dobili individualnim upoređenjem između svih sredina.

U primeru iz tab. 7.3. imamo 3 nezavisna upoređenja. Izbor tih upoređenja dat je u tab. 7.17.

TAB. 7.17. Izbor upoređenja za ogled iz tab. 7.3.

Upoređenja	Totali			
	I	II	III	IV
$C_1$	+1	+1	-1	-1
$C_2$	+1	-1	0	0
$C_3$	0	0	+1	-1

Znači, prvo su uradeni tretmani I i II s tretmanima III i IV, zatim tretman I s tretmanom II i naposletku tretman III s tretmanom IV. Tako je:

$$C_1 = (+1)(4.367) + (+1)(4.371) + (-1)(4.228) + (-1)(4.631) = -121.$$

$$\text{Suma kvadrata uporedenja } C_1 = \frac{(-121)^2}{5 \cdot 4} = 732,05.$$

$$\text{Suma kvadrata uporedenja } C_2 = \frac{[(+1)(4.367) + (-1)(4.371)]^2}{5 \cdot 2} = \frac{(-4)^2}{10} = 1,6.$$

$$\text{Suma kvadrata uporedenja } C_3 =$$

$$= \frac{[(+1)(4.228) + (-1)(4.631)]^2}{5 \cdot 2} = \frac{(-403)^2}{10} = 16.240,9.$$

Zbir suma kvadrata ova tri uporedenja je  $732,05 + 1,60 + 16.240,90 = 16.974,55$ . Kao što se vidi, ona je jednaka sumi kvadrata tretmana u analizi varijanse u tab. 7.4.

Putem  $F$ -testa za svako uporedenje, tj.  $\frac{732,05}{2.096,62}$ ;  $\frac{1,60}{2.096,62}$  i  $\frac{16.240,90}{2.096,62}$  testiramo značajnost razlike ovih uporedenja. Kritična vrednost u tabelama  $F$ -distribucije je  $F_{(0,05; 1; 16)} = 4,49$ . Jedino  $C_3$  uporedenje pokazuje značajnu razliku jer je izračunato  $F = \frac{16.240,90}{2.096,62} = 7,75$  veće od kritične vrednosti 4,49.

Kada broj ponavljanja nije isti, uporedenja ćemo izvesti na primeru ogleda s nejednakim brojem ponavljanja iz tab. 7.5. S obzirom da se radi o tri tretmana, imamo dva nezavisna uporedenja. Planiramo da uporedimo: a) tretmane I i II grupe sa III grupom, b) tretmane I i II grupe. Tako dobijamo:

$$\text{Suma kvadrata za } C_1 = \frac{[(2)(375) + (2)(236,7) + (-3)(411,3)]^2}{10 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 12 \cdot 9} = 0,613.$$

$$\text{Suma kvadrata za } C_2 = \frac{[(4)(375) + (-5)(236,7) + (0)(411,3)]^2}{10 \cdot 16 + 8 \cdot 25} = 278,256.$$

Zbir sume kvadrata uporedenja  $C_1$  i  $C_2$  jednak je sumi kvadrata tretmana u analizi varijanse tab. 7.6.

Verovatno će se postaviti pitanje kako smo došli do koeficijenta uz sumu kvadrata uporedenja  $C_1$  i  $C_2$ . U odgovoru, poći ćemo od uporedenja  $C_1$  gde se tretmani I i II grupe upoređuju s tretmanom III grupe. Prve dve grupe imaju zajedno 18 jedinica, a treća 12. Da bi se došlo do potrebnih koeficijenata treba uzeti najmanji zajednički sadržatelj brojeva 18 i 12, a to je 36. Broj 18 se sadrži 2 puta u 36, i to je koeficijent za grupe I i II; broj 12 se sadrži 3 puta i koeficijent za III grupu je  $(-3)$ . Na isti način se dolazi do koeficijenta za uporedenje  $C_2$ . Ovde, za brojceve 10 i 8 najmanji zajednički sadržatelj je 40, te su odgovarajući koeficijenti 4 i  $(-5)$ . Imenitelj uporedenja je dobijen po obrascu:

$$\sum_{i=1}^k n_i \lambda_i^2,$$

gde je  $\lambda_i$  koeficijent uporedenja.

Sume kvadrata ovih upoređenja možemo dobiti i na sledeći način:

$$\text{Suma kvadrata za } C_1 = \frac{(375+236,7)^2}{10+8} + \frac{(411,3)^2}{12} - \frac{(1.023)^2}{30} = 0,613.$$

$$\text{Suma kvadrata za } C_2 = \frac{375^2}{10} + \frac{236,7^2}{8} - \frac{(375+236,7)^2}{10+8} = 278,256.$$

### 7.9. Takijev test za upoređenje individualnih sredina

U poslednje vreme za upoređenje sredina primenjuje se Takijev test (Tukey, 1949a). Ovaj test objasnimo uz izvesne modifikacije (Snedecor, 1959). Postupak se svodi na to da se izračuna *značajna razlika R* za prag značajnosti od 5% i s njom se uporede  $\frac{k(k-1)}{2}$  razlike između sredina tretmana u jednom ogledu. Razlike veće od izračunatog R su značajne, dok manje nisu. Vrednost R se dobija po obrascu:

$$R = s_{\bar{X}} Q. \quad (7.65)$$

Standardna devijacija uzorka varijacije unutar grupa ili standardna greška aritmetičke sredine (3.9; 7.13) je  $s_{\bar{X}}$  i izračunava se po obrascu:

$$s_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{s_p^2}{n}},$$

gde je  $n$  broj ponavljanja. Vrednost Q se uzima iz tabele XV. Vrednosti u tabeli XV su date s obzirom na broj tretmana,  $k$ , i broj stepeni slobode pogreške u analizi varijanse.

U tab. 7.3. i 7.4. dati su podaci o prosečnom dnevnom prinosu tovne junadi i analiza varijanse tih podataka. Kako taj oglod ima 4 tretmana, može da se izvede  $\frac{4(4-1)}{2} = 6$  upoređenja datih u tab. 7.18.

TAB. 7.18. Upoređenje tretmana iz tab. 7.3.

Tretmani	$\bar{X}$	$\bar{X}-846$	$\bar{X}-873$	$\bar{X}-874$
4	926	80	53	52
2	874	28	1	—
1	873	27	—	—
3	846	—	—	—

Standardna greška aritmetičke sredine je:

$$s_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{2.096,62}{5}} = 20,47.$$