0.3 Факторијални огледи

0.3.1 Појам факторијалних огледа

Код многих огледа не испитује се само један фактор, на пример различите сорте, већ је у оглед укључен још један или више других фактора. Тај други фактор код сортних огледа могу бити различите дозе или врсте вештачких ђубрива, дубина орања итд. Код огледа у сточарству различите расе су рецимо један фактор, а начин ишране други итд. Овакви огледи код којих се истовремено испитују два или више фактора познати су под именом факторијални огледи. Они не треба да се сматрају као неки посебни планови огледа него само као комбинација два или више фактора, сваки са извесним бројем варијанти или третмана, који се исто тако добро уклапају у рецимо план случајног блок-система или латинског квадрата.

Уопштено говорећи реч фактор је овде употребљена да означи извесне експерименталне услове, који могу да се испитују као такви, на пример:

- једна врста ђубрива у различитим дозама;
- неки инсектицид или фунгицид у оговарајућим дозама;
- различите сорте;
- различити начини ишране;
- итд.

У један факторијални оглед укључују се сви фактори у свим комбинацијама њихових третмана. Из овог произилази да од начина избора третмана у једном огледу зависи да ли ће се тај оглед сматрати факторијалним или не.

Путем факторијалних огледа испитују се не само промене неке појаве услед примене различитих третмана датог фактора, него и како та појава реагује у комбинацији са променама у третману другог фактора т.ј. да ли је промена у третману другог фактора под утицајем на промене у првом фактору. Уколико тај утицај постоји, говори се о интеракцији испитиваних фактора. На овај начин знатно се доприноси ефикасности експерименталних истраживања. Уколико нема интеракције индивидуално се упоређују третмани, а ако се у некој комбинацији појављује значајна интеракција, тада се на њу усресређује пажња.

Пре него што пређемо на даља излагања о факторијалним огледима определићемо се за један систем ротације. Слова a, b, c, $\ldots$, означаваће одговарајуће факторе, док ћемо њихове третмане и нивое обележити са a_i, b_j, c_k, $i = 1, 2, \ldots, a$; $j = 1, 2, \ldots, b$; $k = 1, 2, \ldots, c$; итд. Комбинацију фактора означићемо са $a_i b_j c_k$ или са ijk.

Ако се на пример узме оглед са ђубривом са три фактора, и то:

(a) азот;

(b) фосфор;

(*c*) калијум.

Сваки фактор у две различите дозе, тада имамо $2 \times 2 \times 2 = 8$ могућих комбинација:

$$
\begin{array}{ccc}
a_1 & b_1 & c_1 \\
a_1 & b_1 & c_2 \\
a_1 & b_2 & c_1 \\
a_1 & b_2 & c_2 \\
\\
a_2 & b_1 & c1 \\
a_2 & b_1 & c2 \\
a_2 & b_2 & c1 \\
a_2 & b_2 & c2
\end{array}
$$

Лако је уочити да је на половини од свих парцела један третман једног фактора увек примењен, а на другој половини није. Овај 2 ш 2 ш 2 факторијални оглед може да се напише и као 2^3, што значи да се ради о огледу са три фактора, сваки са два третмана. Исто тако, можемо имати 3 ш 3 ш 3 ı 16 или 3^3 факторијални оглед са 27 комбинација или, рецимо 4 ш 3 са 12 комбинација.

Једна од предности факторијалних огледа је постизање веће прецизности него да се испитује сваки фактор посебно. На пример, у једном 2^3 факторијалном огледу постоје три фактора, сваки са два третмана, тако да имамо осам комбинација третмана. Ако се иде на шест понављања, имаћемо укупно 48 јединица или парцела. Овај оглед би могао да се изводи у три независна огледа при чему би се сваки фактор испитивао посебно, а број парцела за сваки такав оглед износио би 16. С обзиром да су фактори са по два третмана, сваки од њих би имао 8 јединица или понављања. Међутим, код факторијалног огледаа сваки овај третман има практично 24 понављања, те се, поред потпуније информације коју пружа интеракција, повећава и прецизност због већег броја понављања.

Потребно је и указати и на ограничења факторијалних огледа. Пре свега, већи број комбинација фактора захтева и већи број јединица у огледу. Довољно је навести да само један факројални оглед 4^3 захтева у једном понављању 64 јединице. За више фактора и третмана потребан је и већи број јединица, што чини оглед већим, компликованијим, скупљим. Експериментална погрешка је у оваквим огледима мање веродостојан показатељ случајних варијација због великих блокова. На крају, можемо приметити да факторијални оглед има неколико предности. Као прво ефикаснији је, односно захтева мањи број посматрања обележја. Даље, факторијални оглед је неопходан када постоји интеракција како би се избегле грешке настале погрешним закључивањем. На крају, факторијални оглед омогућава израчунавање ефеката једог фактора на више нивоа других фактора, што доприноси релевантном закључивања.

0.3.2 Статистичка анализа факторијалних огледа

Анализа факторијалних огледа изводи се анализом варијансе тако да се сума квадрата третмана раздваја на делове који дају одговор о утицају главних ефеката A, B, C и њиховим интеракцијама. Ако се ради о два фактора, главни ефекти су A и B, а интеракција AB. Ако су у оглед укључена три фактора, њихови главни ефекти су A, B, и C а интеракције су AB, AC, BC и ABC, итд.

Претпоставимо да се ради о факторијалном огледу 2×2, тј. два фактора са по два третмана и 5 понављања. Распоред степени слободе таквог огледа је следећи:

Izvori varijacije	Stepeni slobode
Ponavljanje	4
Tretmani (A, B i AB)	3
Pogreška	12
Ukupno	19

Слика 1: Извори варијације, стр. 274 у књизи

Степени слободе за третмане овде могу да се поделе на главе ефекте A и B и интеракцију AB, за сваки ефект са по једним степеном слободе. На исти начин суме квадрата третмана других факторијалних огледа се деле на суме квадрата главних ефеката и интеракција са одговарајућим степенима слободе. За илустрацију статистичке анализе једног факторијалног 2×2 огледа у потпуно случајном распореду са 5 понављања узећемо оглед са испитивањем продуженог деловања суперфосфата (a_1) и Томасовог брашна ($a2$) и њиховог уношења при дубини од $15cm$ (b_1) и $35cm$ (b_2) у другој години по примени ђубрива на принос суве смеше грашка и ражи. Резултати огледа у t/h_a приказани су у Табели 10.1 на Слици 2.

TAB. 10.1. Rezultati 2 × 2 faktorijalnog ogleda u ispitivanju produžnog delovanja superfosfata i Tomasovog brašna i dubine njihovog unošenja

Ponavljanje	a_1		a_2		
	b_1	b_2	b_1	b_2	
1	5,1	4,8	5,9	4,5	$a_1 = 24{,}7 + 25{,}6 = 50{,}3$
2	4,8	5,3	5,5	4,6	$a_2 = 24{,}6 + 21{,}9 = 46{,}5$
3	5,0	5,7	5,2	4,8	$b_1 = 24{,}7 + 24{,}6 = 49{,}3$
4	5,3	5,3	3,5	3,4	$b_2 = 25{,}6 + 21{,}9 = 47{,}5$
5	4,5	4,5	4,5	4,6	
Ukupno	24,7	25,6	24,6	21,9	
$\overline{X}$	4,94	5,12	4,92	4,38	

Слика 2: Табела 10.1, стр. 275 у књизи

0.3.3 Претпоставке и компоненте варијансе код огледа са два фактора

Математички модел I код код потпуно случајног распореда са a_i и b_j

Suma kvadrata totala = $(5{,}1)^2 + (4{,}8)^2 + \ldots + (4{,}6)^2 - \frac{(96{,}8)^2}{20} = 7{,}6080.$

Suma kvadrata tretmana = $\frac{(24{,}7)^2 + (25{,}6)^2 + (24{,}6)^2 + (21{,}9)^2}{5} - \frac{(96{,}8)^2}{20} = 1{,}5320.$

Suma kvadrata pogreške = $7{,}6080 - 1{,}5320 = 6{,}0760.$

Pored toga, suma kvadrata tretmana dalje se deli na sume kvadrata koje proizilaze iz dejstva glavnih efekata A i B i njihove interakcije AB. Izračunavaju se na sledeći način:

Suma kvadrata glavnog efekta $A = \frac{(50{,}3)^2 + (46{,}5)^2}{10} - \frac{(96{,}8)^2}{20} = 0{,}7220$.

Suma kvadrata glavnog efekta $B = \frac{(49{,}3)^2 + (47{,}5)^2}{10} - \frac{(96{,}8)^2}{20} = 0{,}1620$.

Suma kvadrata interakcije $AB = 1{,}5320 - 0{,}7220 - 0{,}1620 = 0{,}6480$.

Слика 3: Суме квадрата за анализу варијансе, стр. 275 у књизи

TAB. 10. 2. Analiza varijanse 2 × faktorijalnog ogleda iz tab. 10.1.

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata	Očekivana sredina kvadra
Tretmani	3	1,5320	0,511	
A	1	0,7220	0,7220	$\sigma^2 + 10\sum_{i=1}^{2}\alpha_i^2/1$
B	1	0,1620	0,1620	$\sigma^2 + 10\sum_{j=1}^{2}\beta_j/1$
AB	1	0,6480	0,6480	$\sigma^2 + 5\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(\alpha\beta)_{ij}/1$
Pogreška	16	6,0760	0,380	σ^2
Ukupno	19	7,6080		

Слика 4: Потребне суме квадрата за анализу варијансе, Табела 10.2, стр. 275 у књизи

третмана сваког фактора је

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk},$$

где је

$$i \in \{1, \ldots, a\}; \qquad j \in \{1, \ldots, b\}; \quad k \in \{1, \ldots, n\}.$$

С обзиром да се ради о фиксним третманима једног и другог фактора, то је:

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0;$$
$$\epsilon : \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Sume kvadrata glavnih efekata i interakcije mogu se dobiti i kao rezultat ortogonalnih upoređenja (7.64), gde je:

$$\frac{C_1^2}{n\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2}+\frac{C_2^2}{n\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2}+\frac{C_3^2}{n\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2}=Q_T.$$

Za upoređenje u ovom ogledu je $n=5$, a $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2=4$, te je imenitelj $5\times 4=20$. Iz sledećeg pregleda uzeti su podaci za ovo upoređenje:

a_1		a_2	
b_1	b_2	b_1	b_2
24,7	25,6	24,6	21,9

Prvo upoređenje za glavni efekat A je: $1+1-1-1$, pa je:

$$\frac{(24{,}7+25{,}6-24{,}6-21{,}9)^2}{20}=0{,}722$$

Слика 5: Стр. 276, наставак, у књизи

Drugo upoređenje za glavni efekat B je: $1-1+1-1$, te je:

$$\frac{(24{,}7-25{,}6+24{,}6-21{,}9)^2}{20}=0{,}162\,.$$

Treće upoređenje za interakciju AB je: $1-1-1+1$, te je:

$$\frac{(24{,}7-25{,}6-24{,}6+21{,}9)^2}{20}=0{,}6480\,.$$

Putem $F-$testa testira se dejstvo glavnih efekata i interakcije, i to:

$$F=\frac{0{,}722}{0{,}380}=1{,}90\,,$$

$$F=\frac{0{,}162}{0{,}380}=0{,}43\,,$$

$$F=\frac{0{,}648}{0{,}380}=1{,}70\,.$$

U tabelama $F-$distribucije za $F_{(0{,}05\,;\;1\;i\;16)}$ kritična vrednost je 4,49. Prema tome, ni kod jednog efekta nema osnova za odbacivanje nulte hipoteze.Sada ćemo se, radi ilustracije, zadržati na *interpretiranju rezultata ogleda*, iako treba imati u vidu da ni jedan efekat nije značajan. U tu svrhu poslužićemo se tab. 10.3.

Слика 6: Стр. 277 у књизи

Исто тако код интеракције је

$$\sum_{i=1}^{a}(\alpha\beta)_{ij}=\sum_{j=1}^{a}(\alpha\beta)_{ij}=0.$$

Када су у питања II модел и мешовити модел ситуација је нешто другачија. Код модела II значајност главних ефеката тестира се у односу на интеракцију која служи као именитељ код F-теста. Исто тако се поступа и код мешовитог модела за оне ефекте који су фиксни, а за оне који су случајно промењљиви F-тест се изводи узимајући варијансу погрешке за

TAB. 10.3. Srednja vrednost tretmana iz tab. 10.1.

Vrsta mineralnog đubriva	Dubina unošenja 15 (b_1)	Dubina unošenja 35 (b_2)	Aritmetička sredina	$b_1 - b_2$
Superfosfat, a_1	4,94	5,12	5,03	– 0,18
Tomasovo brašno, a_2	4,92	4,38	4,65	0,54
Aritmetička sredina	4,93	4,75	4,84	
$a_1 - a_2$	0,02	0,74		

Iz ove tabele se vidi da se, kad je upotrebljen superfosfat i pri dubini unošenja od 15 *cm* u poređenju sa dubinom od 35 *cm*, prosečan prinos smanjuje za 0,18 *t/ha*. Međutim, kad je upotrebljeno Tomasovo brašno, razlika u prosečnom prinosu kod dubine od 15 *cm* je veća za 0,54 nego kod dubine unošenja od 35 *cm*. Sa druge strane, upotreba superfosfata pri dubini unošenja od 15 *cm* povećala je prinos za 0,02 *t/ha*, dok je pri dubini unošenja od 35 *cm* ta razlika 0,74.

Rezultati ogleda mogu da se interpretiraju i na drugi način. Pre svega, može se postaviti pitanje: da li su rezultati u primeni pojedinih tretmana nezavisni? Ako je tako, odgovor bi u pogledu dubine unošenja, bez obzira da li je primenjen superfosfat ili Tomasovo brašno, bio isti. Takođe imali bismo isti odgovor na vrstu đubriva nezavisno

Слика 7: Стр. 277, наставак, у књизи

od dubine unošenja. U najboljem slučaju, kad su upoređenja nezavisna, imamo da je $a_1 - a_2 = 0$ ili $b_1 - b_2 = 0$. Ako je ova hipoteza tačna, kao što je slučaj u našem primeru, neslaganje je rezultat slučajnih varijacija. Kod tačne hipoteze vrednostima razlika: – 0,18, 0,54, 0,02 i 0,74 ne treba pridavati značaj. Sredina razlike od – 0,18 i 0,54 je 0,18 a sredina razlika od 0,02 i 0,74 je 0,38. Ove dve vrednosti predstavljaju glavne efekte dubine unošenja i vrste đubriva. Kod nezavisnosti ova dva faktora možemo da smatramo da dubina unošenja od 15 *cm* daje veći prinos u proseku za 0,18 *t/ha*, a da primena superfosfata daje u proseku veći prinos za 0,38 *t/ha*.

Postoji, međutim, mogućnost da faktori u ogledu nisu nezavisni. To će biti onda kad dubina unošenja dovodi do promene u prinosu, ali ta promena je značajnija uz primenu jednog od đubriva. Može se tako tražiti odgovor da li je dubina unošenja imala značajnijeg uticaja na veći prinos kad je bio superfosfat upotrebljen. Razlika između jednostavnih efekata za dubinu unošenja – 0,18 – 0,54 = – 0,72, odnosno za vrstu đubriva 0,02 – 0,74 = 0,72 pretstavlja interakciju dubina unošenja i vrste đubriva. Ta se razlika ponekad deli sa dva, tj. – 0,72/2 = – 0,36. Interakcija ovde pokazuje određen efekat na rezultate ogleda u ostvarenoj kombinaciji dva faktora.

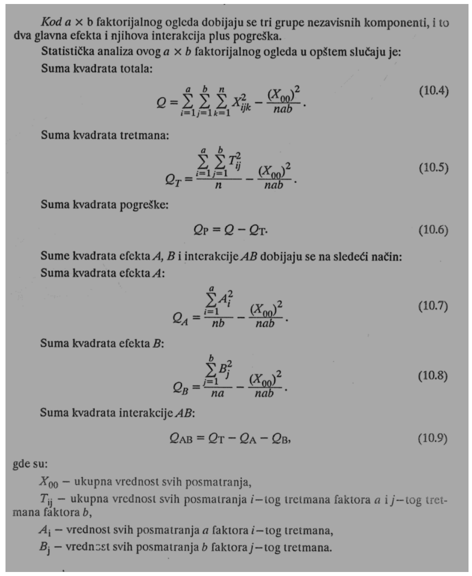
Слика 8: Стр. 278, у књизи

Da bi se koncept interakcije još bolje shvatio, uzećemo tri različita rezultata ogleda sa dva faktora i svaki sa po tri tretmana, tj. 3 × 3:

	I a_1	I a_2	I a_3		II a_1	II a_2	II a_3		III a_1	III a_2	III a_3
b_1	12	16	20	b_1	26	14	18	b_1	15	17	16
b_2	16	20	24	b_2	29	17	21	b_2	19	22	26
b_3	20	24	28	b_3	34	22	26	b_3	24	30	40

U prvom slučaju razlika kod faktora *a* od jednog do drugog tretmana, tj. između a_1 i a_2 i a_3, iznosi 4, i to kod svakog tretmana faktora *b*. Pošto svaka razlika u ovom primeru iznosi 4, očigledno je da nema interakcije. Drugi primer pokazuje iste razlike od 3 do 5, između tretmana b_1 i b_2, odnosno b_2 i b_3 za svaki tretman faktora *a*. Te razlike su 12 i 4 između tretmana a_1 i a_2, odnosno a_3 i a_2 za svaki tretman faktora *b*. Ni ovde se ne pojavljuje interakcija. U trećem primeru nema takve pravilnosti u razlikama između pojedinih tretmana, pa ovakvi rezultati sugeriraju moguće postojanje interakcije.

Слика 9: Стр. 278, наставак, у књизи



Kod a × b faktorijalnog ogleda dobijaju se tri grupe nezavisnih komponenti, i to dva glavna efekta i njihova interakcija plus pogreška.

Statistička analiza ovog $a \times b$ faktorijalnog ogleda u opštem slučaju je:

Suma kvadrata totala:

$$Q = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} X_{ijk}^2 - \frac{(X_{00})^2}{nab}. \tag{10.4}$$

Suma kvadrata tretmana:

$$Q_T = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} T_{ij}^2}{n} - \frac{(X_{00})^2}{nab}. \tag{10.5}$$

Suma kvadrata pogreške:

$$Q_P = Q - Q_T. \tag{10.6}$$

Sume kvadrata efekta A, B i interakcije AB dobijaju se na sledeći način:

Suma kvadrata efekta A:

$$Q_A = \frac{\sum_{i=1}^{a} A_i^2}{nb} - \frac{(X_{00})^2}{nab}. \tag{10.7}$$

Suma kvadrata efekta B:

$$Q_B = \frac{\sum_{j=1}^{b} B_j^2}{na} - \frac{(X_{00})^2}{nab}. \tag{10.8}$$

Suma kvadrata interakcije AB:

$$Q_{AB} = Q_T - Q_A - Q_B, \tag{10.9}$$

gde su:

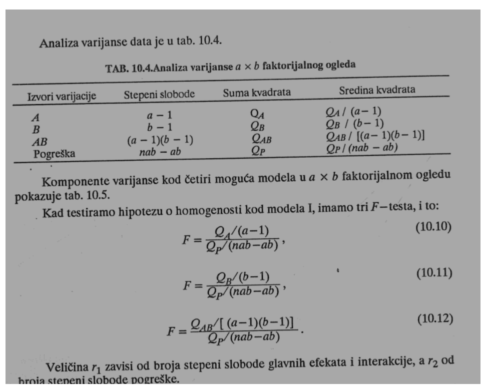
X_{00} – ukupna vrednost svih posmatranja,

T_{ij} – ukupna vrednost svih posmatranja i–tog tretmana faktora a i j–tog tretmana faktora b,

A_i – vrednost svih posmatranja a faktora i–tog tretmana,

B_j – vrednost svih posmatranja b faktora j–tog tretmana.

Слика 10: Стр. 279, у књизи



Analiza varijanse data je u tab. 10.4.

TAB. 10.4.Analiza varijanse $a \times b$ faktorijalnog ogleda

Izvori varijacije	Stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata
A	$a - 1$	Q_A	$Q_A / (a-1)$
B	$b - 1$	Q_B	$Q_B / (b-1)$
AB	$(a-1)(b-1)$	Q_{AB}	$Q_{AB} / [(a-1)(b-1)]$
Pogreška	$nab - ab$	Q_P	$Q_P / (nab - ab)$

Komponente varijanse kod četiri moguća modela u $a \times b$ faktorijalnom ogledu pokazuje tab. 10.5.

Kad testiramo hipotezu o homogenosti kod modela I, imamo tri F–testa, i to:

$$F = \frac{Q_A/(a-1)}{Q_P/(nab-ab)}, \tag{10.10}$$

$$F = \frac{Q_B/(b-1)}{Q_P/(nab-ab)}, \tag{10.11}$$

$$F = \frac{Q_{AB}/[(a-1)(b-1)]}{Q_P/(nab-ab)}. \tag{10.12}$$

Veličina r_1 zavisi od broja stepeni slobode glavnih efekata i interakcije, a r_2 od broja stepeni slobode pogreške.

Слика 11: Стр. 280, у књизи

именитељ као код модела I. На основу овога може се извести правило које гласи

код тестирања именитељ треба да садржи све компоненте изузев оне која се тестира.

То је очигледно код модела I и ефеката који су случајне варијације у мешовитом моделу.

Ако се ради о огледу са два фактора у случајном блок-систему, тада модел садржи једну компоненту више и гласи:

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \rho_k + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk},$$

где је ρ_k дејство k понављања.

Илустрације огледа су дате у поглављу Факторијални огледи, у књизи од стр. 280 до стр. 293.

0.3.4 Огледи са три фактора

Проширење на огледе са три фактора не представља посебну потешкоћу и о том поступку ће бити овде речи.

Математички модел у огледима са три фактора код случајног блок-система је

$$X_{ijk} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + \gamma_l + (\alpha\beta)_{jk} + (\alpha\gamma)_{jl} + (\beta\gamma)_{kl} + (\alpha\beta\gamma)_{jkl} + \epsilon_{ijk},$$

где је $i = 1, \ldots, r$; $j = 1, \ldots, a$; $k = 1, \ldots, b$; $l = 1, \ldots, c$. Поред μ, ρ_i и ϵ_{ijkl} појављују се три ефекта A, B, C и њихове интеракције AB, AC, BC, ABC.

Поступак анализе варијансе је приказан у књизи од стр. 293 до стр. 297. Треба водити рачуна о извесним правилима код утврђивања компоненти варијансе, односно оцењивања вредности квадрата у одговарајућим моделима. Читав поступак није тако компликован као што на први поглед изгледа.

Код модела I треба имати на уму да варијансе главних ефеката не садрже интеракцију као компоненту с обзиром да је

$$\sum_{j=1}^{a} \alpha_j = \sum_{k=1}^{b} \beta_k = \sum_{l=1}^{c} \gamma_l = 0.$$

У моделу I свака варијанса, поред варијансе погрешке, садржи још једну компоненту, која има увек исти број слова латинице. Изузетак представља варијанса погрешке. Укупан број тих слова једнак је броју фактора плус број понављања. Код $a \times b \times c$ факторијалног огледа у случајном блок-систему укупан број слова је увек четири (три за факторе, а једно за понављање). У овој нотацији грчка слова означавају факторе, а мала латинична слова означавају третмане одговарајућих фактора. Ако је једно слово или више слова у бројитељу, тада се друго слово или слова латинице налазе у имenитељу, зависно о којој се варијанси ради:

- за варијансу главног ефекта A поред σ^2 имамо компоненту $\frac{rbc}{a-1}\sum_{j=1}^{a}\alpha_j$, где је $a-1$ у имениоцу, јер се ради о главном ефекту од A;
- за варијансу интеракције AB поред σ^2 имамо

  $$\frac{rc}{(a-1)(b-1)}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}(\alpha\beta)^2_{jk},$$

  где је $(a-1)(b-1)$ у имениоцу, јер је у питању интеракција AB.

Тестирање хипотезе о хомогености варијанси путем F-теста изводи се деобом сваке варијансе, а посебно са варијансом погрешке.

стр.298 наставити .....

0.3.5 2^3 факторијални огледи

стр.304-310

0.3.6 2^n факторијални огледи

стр.310-313

0.3.7 Метод за практично израчунавање факторијалних ефеката

стр.313-317

0.3.8 Анализа већег броја огледа

стр.317-320

0.3.9 Вишегодишњи огледи на више места

стр.320-327

0.3.10 Огледи са вишегодишњим засадима

стр.328-329