Поглавље 4

Детерминанте

Детерминанта је број који се придружује свакој квадратној матрици. Уобичајена ознака за детерминанту матрице A је $\det(A)$ или $|A|$. Један број не може много рећи о датој матрици, али нам може послужити:

- да на основу Крамеровог правила опишемо решење квадратног система линеарних једначина у облику $(x, y) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}\right)$;
- као мера запремине (или промене запремине) неке геометријске фигуре (при промени дужина страница), када су странице геометријске фигуре идентификоване векторима.

4.1 Особине детерминанти

У овом одељку ћемо навести десет особина детерминанти, тако што ћемо најпре навести три основне особине детерминанти, а затим на основу њих извести преосталих седам особина. Ове особине детерминанти важе за квадратне матрице произвољног реда, међутим, због једноставности излагања неке од особина детерминанти наводићемо само у случају квадратних матрица другог реда.

1) Детерминанта јединичне матрице је једнака јединици:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Јединичне матрице реда 2, 3, 4 и 5 су дате у наставку:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) Замена места двеју врста матрице мења знак њене детерминанте:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}.$$

Пример 4.1.1. Израчунати детерминанте следећих матрица

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

На основу особина 1) и 2) можемо закључити

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1. \tag{$*$}$$

На основу особине 1) знамо да је детерминанта јединичне матрице једнака 1. Када особини 1) придружимо особину 2) можемо одредити и детерминанту пермутационе матрице, која се добија пермутацијом врста јединичне матрице. Пример пермутационе матрице је

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

На основу особина 1) и 2) можемо закључити да је детерминанта пермутационе матрице једнака 1 ако је број пермутација врста, који је неопходан да се пермутациона матрица добије полазећи од јединичне матрице, паран, а -1 ако је тај број непаран.

3а) Уколико помножимо једну врсту матрице неким ненула реалним бројем t, тада ће се детерминанта те матрице увећати t пута:

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Ако је $t = 0$ ово правило такође важи.

Пример 4.1.2. Израчунати следећу детерминанту

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Рад:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 720 \cdot (-1)^3 \cdot \det(I) = -720.$$

□

3б) детерминанта матрице је адитивна функција сваке врсте, при фиксираним преосталим врстама:
$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Међутим,
$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix}.$$

Дакле, у општем случају је
$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B).$$

Особине детерминанти које следе из особина 1), 2) и 3) дате су у наставку.

4) Ако матрица A има једнаке две врсте, онда је $\det(A) = 0$. Ова особина детерминанте следи из особине 2), јер уколико матрица A има две једнаке врсте онда се заменом њихових места матрица неће променити, али ће се променити знак њене детерминанте, што је једино могуће уколико је $\det(A) = 0$.

5) Множењем i-те врсте детерминанте бројем $k \neq 0$ и додавањем или одузимањем од j-те врсте њена вредност се неће променити:
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c-ka & d-kb \end{vmatrix} &\overset{3б)}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ -ka & -kb \end{vmatrix} \\ &\overset{3а)}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - k \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} \overset{4)}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

6) Ако су сви елементи једне врсте детерминанте једнаки нули онда је вредност такве детерминанте једнака нули. Ова особина следи из особина 4) и 5), јер на основу особине 5) увек можемо неку од врста додати нула врсти, на тај начин ћемо добити две једнаке врсте, па је на основу особине 4) вредност такве детерминанте једнака нули. Други начин да докажемо особину 6) је да код 3а) изаберемо да је $t = 0$.

7) Детерминанта горње и доње троугаоне матрице је једнака производу елемената са главне дијагонале. На пример, размотримо случај доње троугано матрице, чија је детерминанта облика
$$L = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & d_n \end{vmatrix},$$
где су d_1, d_2, …, d_n реални бројеви различити од нуле.

Множењем прве врсте одговарајућим бројем и додавањем преосталим врстама добићемо да су сви елементи прве колоне испод елемента d_1 једнаки нули. Затим, множењем друге врсте одговарајућим бројем и додавањем другој, трећој, …, n-тој врсти добићемо да су сви елементи друге колоне испод елемента d_2 једнаки нули. Настављајући поступак добићемо да су сви елементи испод главне дијагонале једнаки нули. Дакле, детерминанта L ће се свести на детерминанту дијагоналне матрице

$$D = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{vmatrix}.$$

8) Детерминанта нам може послужити као критеријум да ли је нека матрица инвертибилна или не:

   – матрица A је регуларна ако и само ако је $\det(A) \neq 0$;
   – матрица A је сингуларна ако и само ако је $\det(A) = 0$.

9) Детерминанта производа двеју матрица једнака је производу детерминанти тих матрица, т.ј.

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Међутим, као што смо већ напоменули, ова особина не важи за збир две матрице, т.ј. у општем случају је

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B).$$

Пошто је

$$AA^{-1} = I,$$

то је

$$\det(AA^{-1}) = \det(I),$$

односно

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1.$$

Према томе,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

За квадратну матрицу A важи

$$\det(A^2) = (\det(A))^2,$$

што следи из особине 9).

За квадратну матрицу A реда n важи

$$\det(2A) = 2^n \det(A),$$

што се добија "извлачењем" броја 2 из сваке од n врста матрице $2A$.

10)

$$\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A).$$

На основу особине 10) можемо закључити:

$$\text{“све особине које важе за врсте детерминанте важиће и за колоне”} \qquad (**)$$

На пример, знамо да замена двеју врста мења знак детерминанте. Уколико извршимо транспоновање матрице, колоне матрице ће постати врсте, затим извршимо замену места двеју врста, чиме ће се променити знак детерминанте, а потом поново извршимо транспоновање матрице. На тај начин закључујемо да ће и замена места двеју колона променити знак детерминанте. На исти начин се доказују преостале особине које важе за колоне.

Пример 4.1.3. Израчунати следећу детерминанту

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & -4 \\ 3 & -3 & -6 & -6 \\ -14 & 14 & -2 & 2 \\ 5 & 5 & -10 & 10 \end{vmatrix}.$$

Рад:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & -4 \\ 3 & -3 & -6 & -6 \\ -14 & 14 & -2 & 2 \\ 5 & 5 & -10 & 10 \end{vmatrix} &= 2\cdot 3\cdot 2\cdot 5\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ -7 & 7 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 60\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 13 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 60\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 15 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{vmatrix} \\
&= 60\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 60\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} \\
&= 60\cdot(-16) = -960.
\end{aligned}$$

□

Особине 1), 2) и 3) одређују детерминанту и сада можемо поставити питање помоћу које формуле се рачуна детерминанта?

Функција $n!$ (чита се n-факторијел) се рекурзивно дефинише на следећи начин:

- за $n = 0$, $0! = 1$;

- за $n \in \mathbb{N}$, $n! = n \cdot (n-1)!$.

За сваки природан број $n \in \mathbb{N}$ функција $n!$ задовољава

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1.$$

Детерминанта реда n у ознаци $\det_n$ је пресликавање које свакој матрици $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ придружује реалан број на следећи начин:

-када је $n = 1$,

$$A = [a_{11}], \quad \det_1(A) = |a_{11}| = a_{11};$$

-када је $n = 2$,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \det_2(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc;$$

приметимо да приликом рачунања детерминанте другог реда 2 у претходном изразу имамо $2! = 2$ сабирка;

-када је $n = 3$ (Сарусово правило),

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \\ \det_3(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}, \end{aligned}$$

приметимо да смо у претходном изразу приликом рачунања детерминанте трећег реда имали $3! = 6$ сабирака.

Пример 4.1.4. Израчунати детерминанту следеће матрице

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рад:

$$\det(A) = -76.$$

□

Пример 4.1.5 (Вандермондова детерминанта трећег реда). Израчунати детерминанту следеће матрице:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}.$$

Рад: Као и у претходном примеру одузимањем прве врсте матрице B од друге и треће врсте неће се променити вредност детерминанте матрице B

$$
\begin{aligned}
|B| = &\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)\cdot(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)\cdot(c+a) \end{vmatrix} \\
=&(b-a)\cdot(c-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & (b+a) \\ 0 & 1 & (c+a) \end{vmatrix} \\
=&(b-a)\cdot(c-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & (b+a) \\ 0 & 0 & (c-b) \end{vmatrix} \\
=&(b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b),
\end{aligned}
$$

где смо најпре искористили чињеницу да је $b^2 - a^2 = (b-a)\cdot(b+a)$. Затим, да је детерминанта матрице линеарна функција сваке врсте понаособ и на тај начин смо извукли $(b-a)$ и $(c-a)$ испред детерминанте. Такође, искористили смо и чињеницу да се одузимањем друге врсте матрице од треће врсте неће променити вредност детерминанте. Коначно, искористили смо да је вредност детерминанте троугаоне матрице једнака производу елемената са главне дијагонале.

$\square$

Видели смо да се Вандермондова детерминанта матрице формата 3×3 добија као производ свих могућих разлика елемената који се јављају у детерминанти. Исто ће бити и у случају Вандермондове детерминанте четвртог, петог или вишег реда.

4.2 Минор и алгебарски комплемент

Дефиниција 4.2.1 (Минор). Нека је a_{ij} произвољни елемент матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, где су $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Детерминанта реда $n-1$ добијена од детерминанте матрице A изостављањем i-те врсте и j-те колоне назива се минор елемента a_{ij} и означава се M_{ij}.

Дефиниција 4.2.2 (Алгебарски комплемент или кофактор). Нека је a_{ij} произвољан елемент матрице A, где $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Алгебарски комплемент или кофактор A_{ij} елемента a_{ij} матрице A је одређен са

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij},$$

где је M_{ij} минор који одговара елементу a_{ij} матрице A.

За квадратне матрице другог реда

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

минори су одређени са

$$M_{11} = a_{22}, \quad M_{12} = a_{21}, \quad M_{21} = a_{12}, \quad M_{22} = a_{11},$$

док се одговарајући алгебарски комплементи добијају када миноре помножимо одговарајућим знаком, који је одређен позицијом елемента у матрици:

$$\begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix},$$

према томе

$$A_{11} = M_{11}, \quad A_{12} = -M_{12}, \quad A_{21} = -M_{21}, \quad A_{22} = M_{22}.$$

Пример 4.2.1. Одредити миноре и алгебарске комплементе матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Рад: Елементи матрице A су

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1, \quad a_{12} = 2, \\ a_{21} &= 3, \quad a_{22} = 4, \end{aligned}$$

док су одговарајући минори

$$\begin{aligned} M_{11} &= 4, \quad M_{12} = 3, \\ M_{21} &= 2, \quad M_{22} = 1. \end{aligned}$$

Алгебарски комплементи матрице A су одређени са

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4, \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3, \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2, \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

□

Задатак 4.2.1. Одредити све миноре и алгебарске комплементе матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рад: Минори матрице A су

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 9, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Алгебарски комплементи матрице A су

$$A_{11} = M_{11} = -6, \quad A_{12} = -M_{12} = -9, \quad A_{13} = M_{13} = 3,$$

$$A_{21} = -M_{21} = 2, \quad A_{22} = M_{22} = 3, \quad A_{23} = M_{23} = 1,$$

$$A_{31} = M_{31} = -4, \quad A_{32} = -M_{32} = 6, \quad A_{33} = M_{33} = 2.$$

□

4.3 Лапласов развој

Лапласова трансформација или Лапласов развој детерминанте се састоји у снижавању реда детерминанте за један развојем детерминанте по елементима било које врсте или колоне. Покажимо најпре како се Лапласова трансформација примењује на детерминантама трећег реда. Лапласов развој детерминанте трећег реда по елементима прве, друге и треће врсте, респективно, је приказан у наставку.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}A_{ij}, \ \ i \in \{1,2,3\}.$$

Користећи појам алгебарског комплемента можемо једноставније записати и развој детерминанте трећег реда по елементима прве, друге и треће колоне:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}A_{ij}, \ \text{за } j \in \{1,2,3\}.$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \end{aligned}$$

На исти начин детерминанту реда три можемо развити по елементима друге и треће врсте, као што следи:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{21} \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{23} \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31} \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{32} \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

На исти начин детерминанту реда три можемо развити по елементима прве, друге и треће колоне.

Развој детерминанте по елементима одређене врсте или колоне је веома користан код детерминанти вишег реда, јер нам служи да снизимо ред детермината за један. Урадимо такав развој по елементима прве врсте за детерминанту четвртог реда:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =& a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &+ a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &+ a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &+ a_{14} \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Лапласов развој по елементима друге, треће и четврте врсте детерминанте четвртог реда гласи:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =& a_{21} \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &+ a_{22} \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &+ a_{23} \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &+ a_{24} \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{31} \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{32} \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{33} \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{34} \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{41} \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + a_{42} \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + a_{43} \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} + a_{44} \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Пример 4.3.1. Користећи Лапласову трансформацију развити следећу детерминанту

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

по елементима прве врсте.

Рад: Лапласов развој дате детерминанте по елементима прве врсте гласи

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

□

4.4 Додатак

4.4.1 Детерминанте другог реда

Одредимо формулу за израчунавање детерминанте матрице формата 2×2

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+0 & 0+b \\ c & d \end{vmatrix} \\
&\overset{3б)}{=} \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0+c & d+0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c+0 & 0+d \end{vmatrix} \\
&\overset{3б)}{=} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} \\
&\overset{3а)}{=} ad \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + bc \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{1),\ 2)}{=} ad - bc.
\end{aligned}$$

Пример 4.4.1. Израчунати следећу детерминанту

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

Рад: На основу горе изведене формуле имамо да је

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 - 6 \cdot 4 = 35 - 24 = 11,$$

чиме смо завршили задатак.

□

4.4.2 Детерминанте трећег реда

Пример 4.4.2. Израчунати следећу детерминанту

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Рад: Први начин. Употребићемо Сарусово правило

$$\begin{aligned}
\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix} &= \underbrace{1 \cdot 5 \cdot 9}_{45} \underbrace{+2 \cdot 6 \cdot 7}_{+84} \underbrace{+3 \cdot 4 \cdot 8}_{+96} \underbrace{-3 \cdot 5 \cdot 7}_{-105} \underbrace{-1 \cdot 6 \cdot 8}_{-48} \underbrace{-2 \cdot 4 \cdot 9}_{-72} \\
&= \underbrace{45 + 84}_{129} \underbrace{+96 - 105}_{-9} \underbrace{-48 - 72}_{-120} \\
&= 129 - 9 - 120 = 0.
\end{aligned}$$

Други начин. Искористићемо Лапласов развој по елементима прве врсте

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= 5 \cdot 9 - 6 \cdot 8 - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7)$$
$$= 45 - 48 - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

Трећи начин. Применом елементарних трансформација свешћемо детерминанту на погоднији облик. Помножимо другу колону дате детерминанте са -1 и додајмо је трећој колони, а затим помножимо прву колону дате детерминанте са -1 и додајмо је другој колони. Добићемо

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

јер је вредност детерминанте која има две исте колоне једнака нули.

□

Пример 4.4.3. Нека је дат квадар у тродимензионалном простору, чије су странице $a = 2cm$, $b = 3cm$ и $c = 4cm$. Израчунати запремину квадра користећи детерминанту.

Рад: Како свака страница квадра означава дужину, ширину или висину, то странице квадра можемо идентификовати векторима

$$\overrightarrow{a} = (2, 0, 0),$$
$$\overrightarrow{b} = (0, 3, 0),$$
$$\overrightarrow{c} = (0, 0, 4).$$

Запремина квадра је једнака

$$V = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

□

Пример 4.4.4. Уколико се странице квадра из Примера 4.4.3 удвоструче, колико ће се променити запремина квадра?

Рад: Пошто се дужина страница квадра удвостручила, нове странице су

$$a_1 = 2a,$$
$$b_1 = 2b,$$
$$c_1 = 2c.$$

Запремина новог квадра биће

$$V_1 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 2c \end{vmatrix} = 2^3 \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 8V.$$

Према томе запремина квадра се повећала 8 пута.

□

Пример 4.4.5. Ако три праве дате једначинама

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

имају једну заједничку тачку, онда мора да важи услов

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказати.

Пример 4.4.6. Ако три тачке (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3) једне равни леже на истој правој, онда мора да важи услов

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказати и одредити услов да четири тачке (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) и (x_4, y_4, z_4) тродимензионалног Еуклидског простора леже у истој равни.

Пример 4.4.7. Доказати да се једначина праве која пролази кроз две тачке (x_1, y_1) и (x_2, y_2) може написати у облику

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 4.4.8. Нека је дата функција f и две тачке њеног графика $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$. Доказати да је једначина тетиве која пролази кроз тачке $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ дата са

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & a & f(a) \\ 1 & b & f(b) \end{vmatrix} = 0.$$

4.4.3 Детерминанте произвољног реда

Минор елемента a_{12} матрице

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

је детерминанта реда $n-1$ добијена избацивањем прве врсте и друге колоне од детерминанте матрице A

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

У општем случају детерминанту реда n можемо развити по елементима било које врсте или колоне користећи појам алгебарског комплемента и Лапласову трансформацију:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

и

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}, \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Дефиниција 4.4.1 (Вандермондова детерминанта). Детерминанта следећег облика

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

назива се Вандермондова детерминанта.

Дефиниција 4.4.2 (Јакобијева детерминанта). Детерминанта следећег облика

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -c_2 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & a_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -c_n & a_n \end{vmatrix}$$

назива се Јакобијева детерминанта.

Дефиниција 4.4.3 (Континуанта). Детерминанта следећег облика

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

назива се континуанта.

Пример 4.4.9 (Специјалан случај континуанте). Када код континуанте изаберемо

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1,$$

добијамо следећу детерминанту

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

која је посебан случај континуанте.

У наставку ћемо најпре дати формулу за решавање континуанте, а затим ћемо на основу ње одредити формулу за решавање детерминанте која представља специјалан случај континуанте, која је дата у Примеру 4.4.9.

Дефиниција 4.4.4. Означимо са

$$(a_1 a_2 \ldots a_n) \tag{4.1}$$

збир свих могућих производа добијених од производа $a_1 a_2 \ldots a_n$ избацивањем пара суседних чинилаца или неколико парова чинилаца са суседним индексима. Уколико је n парно, онда се одбацивањем свих n чинилаца добија 1. У овај збир је укључен и производ свих чинилаца $a_1 a_2 \ldots a_n$.

Пример 4.4.10. Неки посебни случајеви израза (4.1) су дати у наставку:

-за $n = 2$:

$$(a_1, a_2) = \cancel{a_1 a_2} \cdot 1 + a_1 a_2 = 1 + a_1 a_2;$$

-за $n = 3$:

$$(a_1, a_2, a_3) = \cancel{a_1 a_2} a_3 + a_1 \cancel{a_2 a_3} + a_1 a_2 a_3 = a_3 + a_1 + a_1 a_2 a_3 = a_1 + a_3 + a_1 a_2 a_3;$$

-за $n = 4$:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3, a_4) &= \cancel{a_1 a_2} a_3 a_4 + a_1 \cancel{a_2 a_3} a_4 + a_1 a_2 \cancel{a_3 a_4} + \cancel{a_1 a_2 a_3 a_4} + a_1 a_2 a_3 a_4 \\ & a_3 a_4 + a_1 a_4 + a_1 a_2 + 1 + a_1 a_2 a_3 a_4; \end{aligned}$$

-за $n = 5$:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) &= \cancel{a_1 a_2} a_3 a_4 a_5 + a_1 \cancel{a_2 a_3} a_4 a_5 + a_1 a_2 \cancel{a_3 a_4} a_5 + a_1 a_2 a_3 \cancel{a_4 a_5} \\ &+ \cancel{a_1 a_2 a_3 a_4} a_5 + a_1 \cancel{a_2 a_3 a_4 a_5} + a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \\ &= a_3 a_4 a_5 + a_1 a_4 a_5 + a_1 a_2 a_5 + a_1 a_2 a_3 + a_5 + a_1 + a_1 a_2 a_3 a_4 a_5. \end{aligned}$$

Задатак 4.4.1 (Вредност континуанте). Доказати да за вредност континуанте важи следећи идентитет

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & a_n \end{vmatrix} = (a_1 a_2 \ldots a_n),$$

где је производ $(a_1 a_2 \dots a_n)$ дат у Дефиницији 4.4.4.

Пример 4.4.11. На основу Задатка 4.4.1 и Примера 4.4.10 размотримо неке специјалне случајеве детерминанте дате у Задатку за различите вредности броја n:

-за $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ -1 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1 a_2);$$

-за $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 \\ 0 & -1 & a_3 \end{vmatrix} = (a_1 a_2 a_3);$$

-за $n = 4$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_4 \end{vmatrix} = (a_1 a_2 a_3 a_4);$$

-за $n = 5$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & a_5 \end{vmatrix} = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5).$$

Дефиниција 4.4.5 (Фибоначијев низ). Прва два члана Фибоначијевог низа су бројеви 1 и 2, а сваки наредни члан се добије збиром претходна два.

Пример 4.4.12. Одредити првих седам чланова Фибоначијевог низа.

Рад: Првих седам чланова Фибоначијевог низа гласе

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21.$$

□

Задатак 4.4.2. Доказати да је детерминанта

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

једнака n-том члану Фибоначијевог низа.

4.5 Питања

1. Објаснити Сарусово правило.

2. Дефинисати Лапласову трансформацију.

3. Нека је a_{ij} произвољни елемент матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, где су $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Како се дефинише минор елемента a_{ij}?

4. Нека је a_{ij} произвољан елемент матрице A, где $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Како се дефинише алгебарски комплемент елемента a_{ij}?

5. Применити Лапласову трансформацију за развој детерминанте трећег реда по елементима прве врсте.

6. Написати Лапласов развој детерминанте трећег реда по елементима, прве, друге и треће врсте користећи појам алгебарског комплемента.

4.6 Одговори

Одговор 1: Сарусово правило се употребљава за израчунавање детерминанти трећег реда на следећи начин

$$
\begin{aligned}
A =& \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \\
\det_3(A) =& \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\
=& a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12},
\end{aligned}
$$

Одговор 2: Лапласова трансформација или Лапласов развој детерминанте се састоји у снижавању реда детерминанте за један развојем детерминанте по елементима било које врсте или колоне.

Одговор 3: Детерминанта реда $n-1$ добијена од детерминанте матрице A изостављањем i-те врсте и j-те колоне назива се минор елемента a_{ij} и означава се M_{ij}.

Одговор 4: Алгебарски комплемент A_{ij} елемента a_{ij} матрице A је одређен са

$$
A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij},
$$

где је M_{ij} минор који одговара елементу a_{ij} матрице A.

Одговор 5: Развој детерминанте трећег реда по елементима прве врсте гласи

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =& a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
=& a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\
&+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).
\end{aligned}
$$

Одговор 6: Развој детерминанте трећег реда по елементима, прве, друге и треће врсте користећи појам алгебарског комплемента гласи

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}A_{ij}, \;\; i \in \{1,2,3\}.$$