Поглавље 5

Ранг матрице, израчунавање инверзне матрице

5.1 Линеарна зависност и независност врста и колона матрице

Линеарна комбинација врста матрице

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

је дата са

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

где су $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Ако се нека од врста матрице A може представити као линеарна комбинација преосталих врста матрице A, онда за врсте матрице A кажемо да су линеарно зависне. У супротном врсте матрице A су линеарно независне. Уколико нам је тешко да на први поглед откријемо постојање линеарне зависности међу врстама матрице A онда можемо користити критеријум који следи.

Врсте матрице A су линеарно независне ако из услова

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

закључимо да мора бити $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Врсте матрице A су линеарно зависне ако нису линеарно независне.

Пример 5.1.1. Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Испитати да ли су врсте матрице A линеарно независне.

Рад: Претпоставимо да постоје реални бројеви α, β и γ такви да је

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тада је

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

односно

$$\begin{bmatrix} \beta & \alpha & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

одакле следи $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Према томе, на основу дефиниције појма линеарне независности врста матрице формата 3×3 можемо закључити да су врсте матрице A линеарно независне.

□

Пример 5.1.2. Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Испитати да ли су врсте матрице A линеарно независне.

Рад: Пример ћемо решити на два начина.

Први начин. Приметимо да је

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

што нам казује да се трећа врста матрице A може изразити као линеарна комбинација прве и друге врсте. Последња једначина је еквивалентна једначини

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Према томе, на основу дефиниције појма линеарне независности врста матрице A можемо закључити да су врсте матрице A линеарно зависне.

У случају да нисмо уочили да се једна од врста матрице A може изразити као линеарна комбинација преосталих врста матрице A задатак бисмо могли решити на начин који следи.

Други начин. Искористићемо дефиницију појма линеарне независности. Нека је

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{$*$}$$

односно

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\gamma & 3\gamma & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

т.ј.

$$\begin{bmatrix} \beta + 2\gamma & \alpha + 3\gamma & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Из последње једначине закључујемо да је

$$\beta + 2\gamma = 0 \quad \text{и} \quad \alpha + 3\gamma = 0. \tag{$**$}$$

Избором $\gamma = 1$ у једначини $(**)$ добијамо да је

$$\beta + 2 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha + 3 = 0,$$

односно $\beta = -2$ и $\alpha = -3$.

Приметимо да су $\alpha = -3$, $\beta = -2$ и $\gamma = 1$ ненула реални бројеви који испуњавају једначину $(*)$, одакле закључујемо да су врсте матрице A линеарно зависне.

□

Пример 5.1.3. Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Испитати линеарну зависност врста матрице A.

Рад: Претпоставимо да је

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

односно

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \gamma & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

т.ј.

$$\begin{bmatrix} \beta & \alpha + \gamma & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

одакле закључујемо да је $\gamma = 0$, $\alpha + \gamma = 0$ и $\beta = 0$, односно $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Према томе, врсте матрице A су линеарно независне.

□

Дефинишимо појам линеарне независности врста у општем случају. Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

и нека су дате врсте матрице A са

$$\begin{aligned} A_{i_1} &= \begin{bmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 n} \end{bmatrix} \\ A_{i_2} &= \begin{bmatrix} a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \dots & a_{i_2 n} \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ A_{i_k} &= \begin{bmatrix} a_{i_k 1} & a_{i_k 2} & \dots & a_{i_k n} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где је $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ и $k \in \mathbb{N} \therefore k \leqslant m$.

Врсте A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k} матрице A су линеарно независне ако из услова

$$\alpha_1 \cdot A_{i_1} + \alpha_2 \cdot A_{i_2} + \ldots + \alpha_k \cdot A_{i_k} = \mathbf{0},$$

где су $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{0} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}}_{n \text{ елемената}}$, следи $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Појам линеарне независности колона матрице дефинише се аналогно појму линеарне независности врста.

Линеарна комбинација колона матрице

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

је дата са

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix},$$

где су $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Колоне матрице A су линеарно независне уколико из услова

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

следи $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Пример 5.1.4. Испитати линеарну зависност колона матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рад: Формирајмо линеарну комбинацију колона матрице A и изједначимо је са нула вектором колона

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Из последње једнакости имамо да је

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

односно

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

одакле следи $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Према томе, колоне матрице A су линеарно независне.

$\square$

Колона $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$ матрице A је линеарна комбинација колона $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$ ако се може изразити помоћу њих на следећи начин

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix},$$

где су α и β реални бројеви такви да је $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. При чему, услов $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ означава да бројеви α и β нису истовремено једнаки нули, односно да је бар један од њих различит од нуле.

Пример 5.1.5. Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Испитати да ли су колоне матрице A линеарно независне?

Рад: Нека је

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тада је

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \\ 2\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

односно

$$\begin{bmatrix} \alpha + \gamma \\ \beta \\ \beta + 2\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Према томе, закључујемо да мора бити

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 0 \\ \beta &= 0, \\ \beta + 2\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Како је из друге једначине $\beta = 0$, то на основу треће једначине закључујемо да је

$$0 = \beta + 2\gamma = 0 + 2\gamma = 2\gamma,$$

односно $\gamma = 0$.

Сада је из прве једначине

$$0 = \alpha + \gamma = \alpha + 0 = \alpha.$$

Према томе закључили смо да је

$$\alpha = \beta = \gamma = 0,$$

односно колоне матрице A су линеарно независне.

$\square$

Пример 5.1.6. Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Испитати да ли су колоне матрице A линеарно зависне?

Потребан услов да врсте или колоне квадратне матрице буду линеарно зависне јесте да је детерминанте те матрице једнака нули, о томе говори Теорема 5.1.1.

Теорема 5.1.1. Ако су врсте или колоне квадратне матрице A линеарно зависне, онда је $\det(A) = 0$.

Пример 5.1.7. Израчунати детерминанту матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Рад: Приметимо да се трећа врста матрице A добија множењем прве врсте матрице A бројем 3, отуда следи да су врсте матрице A линеарно зависне, па је према Теореми 5.1.1 детерминанта матрице A једнака нули.

$\square$

Дефиниција 5.1.1. За матрицу $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ кажемо да има облик ешалона врста или степенасти облик уколико је облика

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \star & * & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \star & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{n \text{ елемената}},$$

при чему $\star$ означава ненула реалан број који се назива пивот, док $*$ означава произвољан реалан број.

Дефиниција 5.1.2. Елементарне трансформације матрица су:

1) транспозиција (замена места) двеју врста или колона;

2) множење врсте или колоне бројем $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

3) додавање једне врсте (или колоне) другој врсти (или колони).

Теорема 5.1.2. Свака ненула матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ може се применом елементарних трансформација свести на облик ешалона врста.

Дефиниција 5.1.3. За матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ која је дата у облику ешалона врста кажемо да има Ермитски облик или редуковани облик ешалона врста уколико је облика

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{n \text{ елемената}}.$$

Пример 5.1.8. Свака дијагонална матрица која на главној дијагонали има ненула реалне бројеве има облик ешалона врста.

Пример 5.1.9. Дијагонална матрица

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

има облик ешалона врста.

Дефиниција 5.1.4. Ранг матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ је максималан број линеарно независних врста или колона матрице A. Ознака за ранг матрице A је $\mathrm{r}(A)$.

Ранг матрице можемо одредити након што сведемо матрицу на облик ешалона врста, а затим пребројимо ненула врсте тако формиране матрице.

Пример 5.1.10. Свести матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

на облик ешалона врста и одредити њен ранг.

Рад:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 9 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \rho_1 + \rho_2 \\ 2\rho_1 + \rho_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \frac{\rho_3}{3} \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rho_2 \leftrightarrow \rho_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -2\rho_2 + \rho_3 \end{array}.$$

Ранг матрице A је једнак 3.

□

Пример 5.1.11. Свести матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

на облик ешалона врста и одредити њен ранг.

Рад:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -11 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -2\rho_1 + \rho_3 \\ -3\rho_1 + \rho_4 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -11 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -\rho_2 + \rho_4 \end{array}.$$

Ранг матрице A је једнак 4.

□

Пример 5.1.12. Свести матрицу

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

на Ермитски облик.

Рад:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \frac{\rho_1}{2} \\ -\rho_2 \\ \frac{\rho_3}{3} \end{array}$$

□

Пример 5.1.13. Свести матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}.$$

на Ермитски облик.

Рад:

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Пример 5.1.14. Свести матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

на Ермитски облик.

Рад:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Теорема 5.1.3. Ранг матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ је једнак k ако и само ако постоји k линеарно независних врста (колона) матрице A, при чему је свака врста (колона) матрице A линеарна комбинација тих k линеарно независних.

Теорема 5.1.4 (Особине ранга матрице). Нека је $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, тада важи:

1) $\mathrm{r}(A) \leqslant \min\{m, n\}$;

2) $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})$;

3) ранг матрице A је инваријантан на примене елементарних трансформација.

Термин "инваријантан" из Теореме 5.1.4 под 3) значи да се ранг матрице не мења након примене елементарних трансформација.

5.2 Адјунгована матрица, формула за израчунавање инверзне матрице

Теорема 5.2.1 (Потребни и довољни услови за инвертибилност матрице). За матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ следећи услови су еквивалентни:

1) матрица A је инвертибилна;

2) $\det(A) \neq 0$;

3) $\mathrm{r}(A) = n$.

У наставку ћемо дати формулу за експлицитно одређивање инверзне матрице $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ дате инвертибилне матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Биће нам неопходан појам адјунговане матрице матрице A која се означава са $\mathrm{adj}(A)$. Наведимо, најпре, како се одређује адјунгована матрица матрице формата 2×2 дате са

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Адјунгована матрица матрице A у ознаци $\mathrm{adj}(A)$ је одређена са

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\cdot d & (-1)^{1+2}\cdot c \\ (-1)^{2+1}\cdot b & (-1)^{2+2}\cdot a \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Инверзна матрица матрице A формата 2×2 је одређена на следећи начин

$$A^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Пример 5.2.1. Одредити инверзну матрицу матрице A дате са

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Рад: На основу формуле за инверзну матрицу имамо да је

$$A^{-1} = \frac{1}{(2\cdot 3 - 1\cdot 4)} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Пример 5.2.2. Одредити инверзну матрицу матрице A дате са

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Рад: На основу формуле за инверзну матрицу, имамо да је

$$A^{-1} = \frac{1}{(1\cdot 3 - 1\cdot(-2))} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

□

Пример 5.2.3. Испитати да ли је матрица A инвертибилна и уколико јесте одредити њену инверзну матрицу

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Рад: Како је

$$\det(A) = -2 \cdot 3 - 2 \cdot (-4) = -6 + 8 = 2 \neq 0,$$

закључујемо да матрица A јесте инвертибилна.

На основу формуле за инверзну матрицу, имамо да је

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

□

Пример 5.2.4. Испитати да ли је матрица A инвертибилна и уколико јесте одредити њену инверзну матрицу

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Рад: Како је

$$\det(A) = -2 \cdot 4 - 2 \cdot (-4) = -8 + 8 = 0,$$

закључујемо да матрица A није инвертибилна.

□

Било која квадратна матрица A трећег реда може се представити у облику

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Одредимо миноре M_{ij} и алгебарске комплементе A_{ij}, матрице A, за $i, j \in \{1, 2, 3\}$:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \quad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -M_{12} = -a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32},$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31},$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -M_{21} = -a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32},$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = M_{22} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31},$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -M_{23} = -a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31},$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22},$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -M_{32} = -a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21},$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = M_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Адјунгована матрица матрице A је одређена на следећи начин

$$\begin{aligned} \operatorname{adj}(A) &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32} \\ M_{13} & -M_{23} & M_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & -a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ -a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & -a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & -a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Детерминанта матрице A се може одредити путем Сарусовог правила, на следећи начин

$$\begin{aligned} \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}, \end{aligned}$$

Инверзна матрица матрице A се одређује формулом

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A).$$

Пример 5.2.5. Одредити инверзну матрицу матрице

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Рад: Детерминанта матрице A износи

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (5 - 6) = 1.$$

Адјунгована матрица матрице A гласи

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -8 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

□

У општем случају адјунгована матрица матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ је матрица $\mathrm{adj}(A) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, одређена на следећи начин

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где је A_{ij} алгебарски комплемент елемента a_{ij}, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, матрице A. У том случају инверзна матрица матрице

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

је одређена са

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где је A_{ij} алгебарски комплемент елемента a_{ij}, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, матрице A.

Уколико дату матрицу помножимо инвертибилном матрицом са леве или десне стране, њен ранг се неће променити, о томе говори Теорема 5.2.2.

Теорема 5.2.2. Нека је $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ произвољна матрица, а $B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ инвертибилне матрице, тада важи:

- $\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}(A)$;
- $\mathrm{r}(CA) = \mathrm{r}(A)$.

5.3 Додатак

5.3.1 Сличне матрице

Дефиниција 5.3.1. Нека су $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ произвољне матрице. Каже се да је матрица A слична са матрицом B и пише се $A \sim B$ ако постоје регуларне матрице $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ такве да је

$$B = M^{-1}AN.$$

За квадратну матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ кажемо да је слична са квадратном матрицом $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ако постоји регуларна матрица $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ за коју је

$$B = N^{-1}AN.$$

Теорема 5.3.1. Нека су $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ сличне матрице, тада је

$$\det(A) = \det(B).$$

Теорема 5.3.2. За матрице $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ следећи услови су еквивалентни:

- матрице A и B су сличне;
- $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$;
- Ермитске (канонске) форме матрица A и B су једнаке.

5.4 Питања

1. Када су врсте

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

матрице

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

линеарно независне, а када линеарно зависне?

2. Нека је матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ облика

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \star & * & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \star & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{n \text{ елемената}},$$

при чему $\star$ означава ненула реалан број, док $*$ означава произвољан реалан број. Како се назива облик матрице A?

3. Набројати елементарне трансформације матрица.
4. Дефинисати ранг матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$?
5. Написати формулу за адјунговану матрицу матрице A формата 2×2 дате са

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}?$$

6. Навести формулу за израчунавање инверзне матрице матрице A формата 2×2 дате са

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

7. Написати формулу за одређивање адјунговане матрице реалне квадратне матрице A реда n.
8. Написати формулу за израчунавање инверзне матрице квадратне матрице A реда n.

5.5 Одговори

Одговор 1: Врсте

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

матрице

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

су линеарно независне ако из услова

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

следи $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Врсте матрице A су линеарно зависне ако нису линеарно независне.

Одговор 2: Облик матрице A је облик ешалона врста или степенасти облик.

Одговор 3: Елементарне трансформације матрица су

1) транспозиција (замена места) двеју врста или колона;

2) множење врсте или колоне бројем $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

3) додавање једне врсте (или колоне) другој врсти (или колони).

Одговор 4: Ранг матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ је максималан број линеарно независних врста или колона матрице A. Ознака за ранг матрице A је $\mathrm{r}(A)$.

Одговор 5: Адјунгована матрица дате матрице A је одређена са

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot d & (-1)^{1+2} \cdot c \\ (-1)^{2+1} \cdot b & (-1)^{2+2} \cdot a \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Одговор 6: Инверзна матрица дате матрице A је одређена на следећи начин

$$A^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Одговор 7: Адјунгована матрица матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ је матрица $\operatorname{adj}(A) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ одређена на следећи начин:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где је A_{ij} алгебарски комплемент елемента a_{ij}, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, матрице A.

Одговор 8: Инверзна матрица матрице A формата $n \times n$ је одређена на следећи начин

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где је A_{ij} алгебарски комплемент елемента a_{ij}, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, матрице A.