Поглавље 6

Квадратна матрична једначина

Квадратна матрична једначина је једначина облика

$$Ax = b, \tag{6.1}$$

где је A квадратна матрица, а x и b одговарајући вектори.

У овом поглављу је делимично коришћена следећа књига [1].

6.1 Представљање система линеарних једначина у матричном облику

Да бисмо боље разумели једначину (6.1) размотримо најпре како се формира производ Ax у случају конкретне матрице A и конкретног вектора x датих у Примеру 6.1.1.

Пример 6.1.1 (Множење матрице и колоне). Нека је дата матрица A и колона x на следећи начин

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Одредити производ Ax на два различита начина.

Рад: <u>Први начин</u>. Сваку врсту матрице A помножимо колоном x, на следећи начин

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Унутрашњи производ врсте $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$ и колоне $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ је одређен са

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2.$$

Други начин. Помоћу компоненти вектора x формирајмо линеарну комбинацију колона матрице A, на следећи начин

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

□

Пример 6.1.2 (Систем од две линеарне једначине са две непознате у матричном облику). Представити систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 =& 0, \\ -x_1 + 2x_2 =& 3, \end{aligned}$$

у матричном облику. Затим, приказати два начина за решавање таквог система помоћу матрица.

Рад: Матрица коефицијената датог система линеарних једначина је

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{6.2}$$

Колона која садржи промењливе x_1 и x_2 је дата са

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tag{6.3}$$

док је колона слободних чланова дата са

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{6.4}$$

Применимо сада матрично множење из претходног примера на матрицу A коефицијената датог система и вектор x који садржи промењливе датог система

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Када матрични производ Ax изједначимо са вектором b, добићемо

$$\begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

што је еквивалентно полазном систему линеарних једначина. Дакле, полазни систем линеарних једначина смо представили у матричном облику (6.1): $Ax = b$, где је матрица A дата са (6.2), вектор x је дат са (6.3) и вектор b је дат са (6.4). Настављамо решавање датог система линеарних једначина.

Први начин. Проверимо да ли је матрица A инвертибилна, што можемо урадити, рецимо, одређивањем детерминанте матрице A, $\det(A) = 3 \neq 0$. Решење једначине $Ax = b$ је дато у облику

$$x = A^{-1}b.$$

Дакле,

$$x = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A) \cdot b = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Према томе, решење датог система линеарних једначина је $(x_1, x_2) = (1, 2)$.

Други начин. Систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 =& 0, \\ -x_1 + 2x_2 =& 3, \end{aligned}$$

може се представити у облику

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{6.5}$$

Израз

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

представља линеарну комбинацију колона $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, које су очигледно линеарно независне, јер не постоји реалан број k такав да је

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Сада систем можемо решити одређивањем бројева x_1 и x_2 у линеарној комбинацији (6.5), таквих да она буде једнака колони $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. Очигледно, решење је $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$.

□

Пример 6.1.3 (Систем од три линеарне једначине са три непознате у матричном облику). Дате системе од три линеарне једначине са три непознате

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad 2x_1 - x_2 \qquad\quad =& 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 =& -1, \\ -3x_2 + 4x_3 =& 4; \\ \text{б)} \quad 2x_1 - x_2 \qquad\quad =& 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 =& 1, \\ -3x_2 + 4x_3 =& -3. \end{aligned}$$

представити у матричном облику. Затим, одредити решење таквих система помоћу матрица.

Рад: а) Дати систем линеарних једначина може се представити у матричном облику

$$Ax = b,$$

где је

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Детерминанта матрице A износи

$$\det(A) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Према томе, дати систем линеарних једначина има јединствено решење, које ћемо одредити на два начина.

Први начин. Адјунгована матрица матрице A је дата са

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Инверзна матрица матрице A је дата са

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решење датог система линеарних једначина гласи

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Други начин. Дати систем линеарних једначина може се представити у облику

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Према томе, решити систем значи одредити бројеве x_1, x_2 и x_3 тако да линеарна комбинација

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

буде једнака колони $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Решење датог система је очигледно: $x_1 = x_2 = 0$ и $x_3 = 1$, јер је

$$0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

б) На исти начин као у делу под а) можемо добити решење $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$.

□

6.2 Решавање квадратног система линеарних једначина у матричном облику у општем случају

У овом одељку бавићемо се квадратним системом линеарних једначина (6.1): $Ax = b$, при чему је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Поставља се следеће питање:

можемо ли решити систем $Ax = b$, за свако b?

Множењем матрице A са колоном x добијамо линеарну комбинацију колона матрице A. Пошто израз "за свако b" означава читав тродимензионални простор, претходно питање би се могло формулисати у терминима линеарних комбинација, на следећи начин:

да ли је могуће линеарним комбинацијама колона матрице A испунити читав тродимензионални простор?

Одговор је потврдан, када су колоне матрице A линеарно независне, т.ј. када је матрица A инвертибилна. У том случају решење једначине

$$Ax = b$$

дато је у облику

$$x = A^{-1}b,$$

што је еквивалентно решењу добијеном путем Крамеровог правила, о чему говори Теорема 6.2.1.

Теорема 6.2.1 (Теорема о еквивалентности решења квадратне матричне једначине $Ax = b$ и решења квадратног система линеарних једначина добијеног путем Крамеровог правила). За квадратни систем линеарних једначина у матричном облику $Ax = b$ важи следећа еквиваленција:

$$x = A^{-1}b \Longleftrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right) \text{ (Крамерово правило)},$$

где је

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix},$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказ. Показаћемо да је $x = A^{-1}b$ само другачији облик записа решења, које је дато путем Крамеровог правила $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$:

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A) \cdot b,$$

односно

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \\
&= \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + \ldots + A_{n1} \cdot b_n \\ A_{12} \cdot b_1 + A_{22} \cdot b_2 + \ldots + A_{n2} \cdot b_n \\ \vdots \\ A_{1n} \cdot b_1 + A_{2n} \cdot b_2 + \ldots + A_{nn} \cdot b_n \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

одакле добијамо тражену еквиваленцију. □

Хомоген квадратни систем линеарних једначина у матричном облику се добија када у једначини $Ax = b$ ставимо да је $b = \mathbf{0}$, након чега добијамо

$$Ax = \mathbf{0}.$$

Тривијално решење хомогеног квадратног система линеарних једначина увек постоји и гласи $x = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ елемената}}$. У случају када је матрица A инвертибилна, онда је тривијално решење јединствено и може се одредити, на следећи начин $x = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Теорема 6.2.2 (Теорема о јединствености решења хомогеног квадратног система линеарних једначина). Хомоген квадратни систем линеарних једначина $Ax = \mathbf{0}$ има јединствено решење ако само ако је матрица A регуларна.

Било које решење датог система које се разликује од тривијалног назива се нетривијалним.

Последица 6.2.1 (Еквивалентни услови за постојање нетривијалних решења хомогеног квадратног система линеарних једначина $Ax = 0$). За хомоген квадратни систем линеарних једначина $Ax = \mathbf{0}$, следећи услови су еквивалентни:

- (i) поред тривијалног решења $x = \mathbf{0}$ има и нетривијална;
- (ii) матрица A је сингуларна;
- (iii) матрица A није инвертибилна;
- (iv) $\det(A) = 0$;
- (v) врсте матрице A су линеарно зависне;
- (vi) колоне матрице A су линеарно зависне;
- (vii) скуп вектора који матрица A пресликава у нула вектор, поред нула вектора, садржи и ненула векторе (математичким речником речено: језгро линеарног оператора A је нетривијално, т.ј. $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}) \neq \{\mathbf{0}\}$).

Један квадратни систем линеарних једначина не може јединствено нетривијално решење, већ их има бесконачно много.

6.3 Питања

1. Како гласи квадратни систем линеарних једначина у матричном облику?

2. Како гласи решење квадратног система линеарних јендачина $Ax = b$, када је матрица A инвертибилна?

3. Како гласи теорема о еквивалентности решења квадратне матричне једначине $Ax = b$ и решења квадратног система линеарних једначина добијеног путем Крамеровог правила?

4. Како гласи хомоген квадратни систем линеарних једначина?

5. Како гласи тривијално решење хомогеног квадратног система линеарних једначина?

6. Како гласи теорема о јединствености решења хомогеног квадратног система линеарних једначина?

7. Како гласе еквивалентни услови за постојање нетривијалног решења хомогеног квадратног система линеарних једначина?

6.4 Додатак

Приликом решавања квадратне матричне једначине реда n (6.1): $Ax = b$, јако је корисно уочити посебну структуру матрице A, јер то може допринети ефикаснијем решавању таквог система линеарних једначина. Када је матрица A посебног типа, онда се она може факторисати односно представити као производ неколико матрица које у себи већ садрже посебну структуру. У том случају приликом тражења инверза матрица A, на основу закона обрнутог редоследа можемо одредити инверзе сваког фактора у том матричном производу, који се због уочене посебне структуре алгоритамски одређују са мањим бројем операција.

6.4.1 Матричне факторизације квадратних матрица

Скуп симетричних квадратних матрица реда n означаваћемо са $\mathbb{S}^n$. У наставку наводимо појам позитивне дефинитности матрица. За симетричну матрицу $A \in \mathbb{S}^n$ и вектор $x \in \mathbb{R}^n$ израз $x^{\mathrm{T}}Ax$ представља реалан број. Уколико је вектор x нула вектор, онда је очигледно број $x^{\mathrm{T}}Ax$ једнак нули. За матрицу $A \in \mathbb{S}^n$ кажемо да је:

а) позитивно дефинитна матрица ако је $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad x^{\mathrm{T}}Ax > 0$;

б) позитивно полудефинитна матрица ако је $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad x^{\mathrm{T}} A x \geqslant 0$;

в) негативно дефинитна матрица ако је $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad x^{\mathrm{T}} A x < 0$;

г) негативно полудефинитна матрица ако је $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad x^{\mathrm{T}} A x \leqslant 0$.

LU факторизација реалне несингуларне квадратне матрице реда n

LU факторизација реалне несингуларне квадратне матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ гласи

$$A = PLU, \quad \text{број неопходних операција је } \frac{2n^3}{3};$$

где је

- $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ пермутациона матрица;
- $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ је јединична доња троугаона матрица;
- $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ је несингуларна горња троугаона матрица.

Број операција неопходан за израчунавање LU факторизације густе матрице, т.ј. матрице која не приказује ниједну додатну структуру, износи $\frac{2}{3}n^3$.

LDL^{T} факторизација реалне несингуларне симетричне квадратне матрице реда n

LDL^{T} факторизација реалне несингуларне симетричне квадратне матрице A реда n гласи

$$A = PLDL^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}, \quad \text{број неопходних операција је } \frac{n^3}{3};$$

где је

- $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ пермутациона матрица;
- $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ је доња троугаона матрица са позитивним елементима на главној дијагонали;
- $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ је блок дијагонална матрица са несингуларним 1×1 и 2×2 дијагоналним блоковима.

Број операција који је неопходан да се одреди LDL^{T} факторизација несингуларне симетричне квадратне матрице $A \in \mathbb{S}^n$, под условом да никаква додатна структура у матрици A није пронађена, износи $\frac{1}{3}n^3$.

Чолески факторизација реалне симетричне позитивно дефинитне матрице реда n

Чолески факторизација реалне симетричне позитивно дефинитне матрице $A \in \mathbb{S}^n$ гласи

$$A = LL^{\mathrm{T}}, \quad \text{број неопходних операција је } \frac{n^3}{3};$$

где је

– $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ несингуларна доња троугаона матрица са позитивним елементима на главној дијагонали.

Матрица L, која је јединствено одређена матрицом A назива се Чолески фактор од A. Број операција неопходан за израчунавање Чолески факторизације густе матрице, т.ј. матрице која не приказује ниједну додатну структуру, износи $\frac{1}{3}n^3$, што је половина цене LU факторизације.

Чолески факторизација се може добити на основу:

– LU факторизације, $A = PLU$, избором $P = I$ и $L = U^{\mathrm{T}}$;

– LDL^{T} факторизације несингуларне реалне симетричне матрице $A = PLDL^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}$, избором $P = I$ и $D = I$.

Користи се за решавање система $Ax = b$, где је A симетрична позитивно дефинитна матрица.

Спектрална факторизација реалне симетричне квадратне матрице реда n

Спектрална факторизација реалне симетричне матрице $A \in \mathbb{S}^n$ гласи

$$A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}},$$

где

– $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ је ортогонална матрица, т.ј. $Q^{\mathrm{T}}Q = I$;

– $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, при чему су реални бројеви $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ сопствене вредности матрице A и могу се одредити као нуле полинома $\det(sI - A)$.

Колоне матрице Q формирају ортонормиран систем сопствених вектора матрице A. Притом, спектрална факторизација матрице A се још назива факторизација по сопственим вредностима матрице A.

Уредимо сопствене вредности

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n.$$

Користићемо нотацију $\lambda_i(A)$ да означимо i-ту по величини сопствену вредност матрице A:

– највећу сопствену вредност матрице A означићемо са $\lambda_1(A) = \lambda_{max}(A)$;

– најмању сопствену вредност матрице A означити са $\lambda_n(A) = \lambda_{min}(A)$.

Помоћу сопствених вредности матрице A можемо одредити:

– детерминанту матрице A, $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$;

– траг матрице A, $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$;

– спектралну норму матрице A, $\|A\|_2 = \max\limits_{i=1,2,\dots,n} |\lambda_i| = \max\{\lambda_1, -\lambda_n\}$;

– Фробенијусову норму матрице A, $\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Дефинитност и матричне неједнакости

Најмања и највећа сопствена вредност матрице A задовољавају:

1) $\lambda_{\min}(A) = \inf\limits_{x \neq 0} \frac{x^{\mathrm{T}}Ax}{x^{\mathrm{T}}x}$;

2) $\lambda_{\max}(A) = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{x^{\mathrm{T}}Ax}{x^{\mathrm{T}}x}$.

Специјално, за било који вектор x важи

$$\lambda_{\min}(A)x^{\mathrm{T}}x \leqslant x^{\mathrm{T}}Ax \leqslant \lambda_{\max}(A)x^{\mathrm{T}}x.$$

Подсетимо се да је матрица $A \in \mathbb{S}^n$ позитивно дефинитна (позитивно полудефинитна) ако за сваки ненула вектор x важи $x^{\mathrm{T}}Ax > 0$ ($x^{\mathrm{T}}Ax \geqslant 0$). На основу $\lambda_{\min}(A) = \inf\limits_{x \neq 0} \frac{x^{\mathrm{T}}Ax}{x^{\mathrm{T}}x}$ и $\lambda_{\min}(A)x^{\mathrm{T}}x \leqslant x^{\mathrm{T}}Ax$ можемо закључити да је матрица $A \in \mathbb{S}^n$ позитивно дефинитна (полудефинитна) ако и само ако су све сопствене вредности матрице A позитивне (ненегативне).

6.4.2 Матрична структура и алгоритамска комплексност

Концентрисаћемо се на методе за решавање квадратног система линеарних једначина (6.1): $Ax = b$, где је $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $b \in \mathbb{R}^n$. Матрицу A зовемо матрицом коефицијената система линеарних једначина, а b вектор слободних чланова. Под претпоставком да је матрица A регуларна, следи да је решење наведеног система линеарних једначина јединствено за било које вредности вектора b и као што смо до сада већ видели, дато је са $x = A^{-1}b$. Овакав проблем настаје у многим оптимизационим алгоритмима и израчунавањима. Стандардна метода за решавање датог квадратног система линеарних једначина (6.1) захтева напор израчунљивости[1] који расте апроксимативно као n^3. Примена стандардних метода не захтева ништа више од регуларности матрице A, према томе, такве генеричке методе су широко примењиве. Међутим, величина броја n ипак утиче на примењивост генеричких метода:

[1]Напор израчунљивости је преведени термин са енглеског: “computational effort”.

1) када је n до неколико стотина или мање, ове генеричке методе су вероватно најбоље методе за коришћење, осим у захтевним апликацијама које раде у реалном времену[2];

2) када је n веће од хиљаду, генеричке методе за решавање квадратних система линеарних једначина постају мање практичне.

Структура матрице коефицијената У многим случајевима матрица коефицијената A система $Ax = b$ има посебну структуру или облик, који може бити искоришћен да се систем линеарних једначина реши ефикасније, користећи методе које су прилагођене посебним структурама матрице A. На пример, у Њутновом систему

$$(\nabla^2 f)(x)\Delta_{x_{nt}} = -(\nabla f)(x),$$

где су $\nabla^2 f$ и ∇f Хесијан и градијент функције f, респективно, матрица коефицијената је симетрична и позитивно дефинитна, што нам допушта да користимо методу решавања која је скоро дупло бржа од генеричке методе, а такође поседује и боље особине заокруживања. Постоји много других типова структура које је могуће експлоатисати, са уштедом у израчунавању или алгоритамским убрзањем, која је обично више него двоструко већа. У многим случајевима, напор израчунљивости је редукован на "нешто" што је пропорционално са n^2 или чак са n, за разлику од n^3 које се јавља у генеричким методама. Пошто су ове методе обично примењене када је n најмање 100, а врло често знатно веће, уштеде могу бити драматичне.

Може се испитивати широка разноликост структура матрице коефицијената. Једноставни примери су повезани са појмом реткости, т.ј. појмом нула и ненула елемената у матрици, који укључује:

- повезане матрице;
- блок дијагоналне матрице;
- ретке матрице.

Финија употребљива структура је дијагонална структура ниског ранга. Многи чести облици конвексних оптимизационих проблема воде до линеарних једначина, чије матрице коефицијената имају ове употребљиве структуре. Постоји много других посебних типова матрица које су такође употребљиве, а које овде нећемо детаљније разматрати, као што су:

- Теплицова матрица;
- Хенкелова матрица;

[2] Апликације које раде у реалном времену је преведени термин са енглеског: "real-time applications".

- циркулишућа матрица.

Позивамо се на генеричку методу, која не приказује никакав облик реткости матрица, као што је то случај за густе матрице. Позивамо се на методу која не приказује било какву структуру у матрицама, као на пример ону која се јавља код структурних матрица (структурне матрице су матрице посебног облика).

Утрошак алгоритма нумеричке линеарне алгебре се обично изражава укупним бројем операција над бројевима са покретним зарезом [3], неопходним за његово извршавање. Операција над бројевима са покретним зарезом може бити: сабирање, одузимање, множење или дељење. Оцену комплексности алгоритма можемо постићи пребројавањем укупног броја операција.

[3] Операције над бројевима са покретним зарезом је преведени термин са енглеског "floating-point operations".

Библиографија

[1] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex Optimization.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2009. Seventh Printing with Corrections.

Индекс

Листа симбола

$\lambda_{max}(A)$ максимална сопствена вредност матрице A

$\lambda_{max}(A)$ минимална сопствена вредност матрице A

$\mathbb{S}^n$ скуп симетричних квадратних матрица реда n

Ker(A) језгро Линеарног оператора A – скуп свих елемената које оператор (у овој књизи матрица) A пресликава у нула вектор

$\mathrm{tr}(A)$ траг матрице A

∇f градијент функције f

$\nabla^2 f$ Хесијан функције f

$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ производ бројева $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

$\inf\limits_{x \neq 0} \frac{x^{\mathrm{T}} A x}{x^{\mathrm{T}} x}$ инфимум скупа $\{\frac{x^{\mathrm{T}} A x}{x^{\mathrm{T}} x} : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$

$\sup\limits_{x \neq 0} \frac{x^{\mathrm{T}} A x}{x^{\mathrm{T}} x}$ супремум скупа $\{\frac{x^{\mathrm{T}} A x}{x^{\mathrm{T}} x} : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$

$diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ дијагонална матрица са бројевима $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ на главној дијагонали