Поглавље 1

Оптимизација линеарне функције при линеарним ограничењима

1.1 Оптимизација линеарне функције у општем случају

Дефинисаћемо појам линеарне функције $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, при чему ћемо векторе из $\mathbb{R}^n$ означавати са $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где су $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Дефиниција 1.1.1 (Адитивност и хомогеност). Функција $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ је линеарна ако $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ испуњава следеће услове:

- $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ (адитивност);
- $f(\alpha \cdot \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$ (хомогеност).

Услови адитивности и хомогености из Дефиниције 1.1.1 могу се објединити у један услов:

$$f(\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}) \quad \text{(линеарност)}.$$

Скуп тачака $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ чије координате задовољавају линеарну једначину

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + a_0 = 0,$$

где су $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ дати бројеви назива се хиперраван.

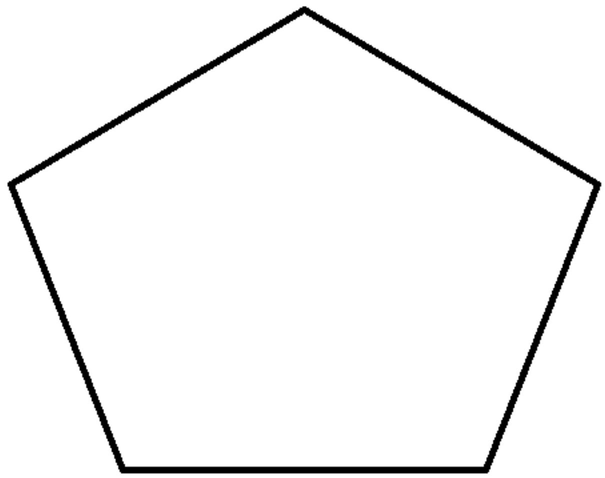
Дуж одређена тачкама $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathbb{R}^n$ је скуп тачака облика

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y},$$

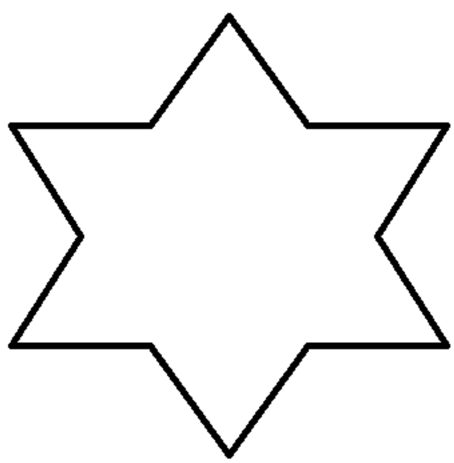
где је $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Ако дуж одређена тачкама $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ не сече хиперраван H онда се каже да су тачке $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ са исте стране хиперравни H.

Дефиниција 1.1.2 (Конвексан скуп). Скуп $C \subseteq \mathbb{R}^n$ је конвексан ако линијски сегмент између било које две тачке скупа C лежи у C, т.ј., ако за било које две тачке $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ и било који реалан број $\lambda \in [0, 1]$ имамо да

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in C.$$



Слика 1.1: Пентагон



Слика 1.2: Звезда

Тачка облика $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k$, где је $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$ и $\alpha_i \geqslant 0$, за $i = 1, \ldots, k$, назива се конвексна комбинација тачака $x_1, \ldots, x_k$. Може се доказати да је скуп конвексан ако и само ако садржи сваку конвексну комбинацију својих тачака.

Дефиниција 1.1.3 (Конвексна љуска). Конвексна љуска скупа C, у означи $conv(C)$, је скуп свих конвексних комбинација тачака из C:

$$conv(C) = \{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k | x_i \in C, \alpha_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, k, \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1\}.$$

Конвексна љуска је увек конвексан скуп и то најмањи конвексан скуп који садржи C.

Дефиниција 1.1.4 (Екстремална тачка). Тачка $\mathbf{x}$ конвексног скупа $C \subseteq \mathbb{R}^n$ је екстремална тачка ако из услова

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{x}'', \quad 0 < \lambda < 1; \quad x', x'' \in K$$

следи $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'' = \mathbf{x}$.

За скуп C кажемо да је конус или да је ненегативно хомоген, ако за сваку тачку $\mathbf{x} \in C$ и сваки реалан број $\lambda \geqslant 0$ имамо да $\lambda \mathbf{x} \in C$. Скуп C је конвексни конус ако је конус који је конвексан, што значи да за било које тачке $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ и било које реалне бројеве $\lambda, \mu \geqslant 0$ имамо да $\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \in C$. Тачке овог облика геометријски формирају дводимензионално парче пице са врхом у нули и ивицама које пролазе кроз тачке $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, што је приказано на Слици 1.4.

Тачка облика $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k$, где су реални бројеви $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geqslant 0$ се назива конусна комбинација или ненегативна линеарна комбинација тачака $x_1, \ldots, x_k$. Ако тачке x_i припадају конвексном конусу C, онда свака конусна комбинација тачака x_i припада конусу C. Обратно, скуп C је конвексни конус ако и само ако садржи све конусне комбинације његових елемената.

Конусна љуска скупа C је скуп свих конусних комбинација тачака из C, т.ј.,

$$\{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k | x_i \in C, \alpha_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, k\},$$

што је уједно и најмањи конвексан конус који садржи скуп C.

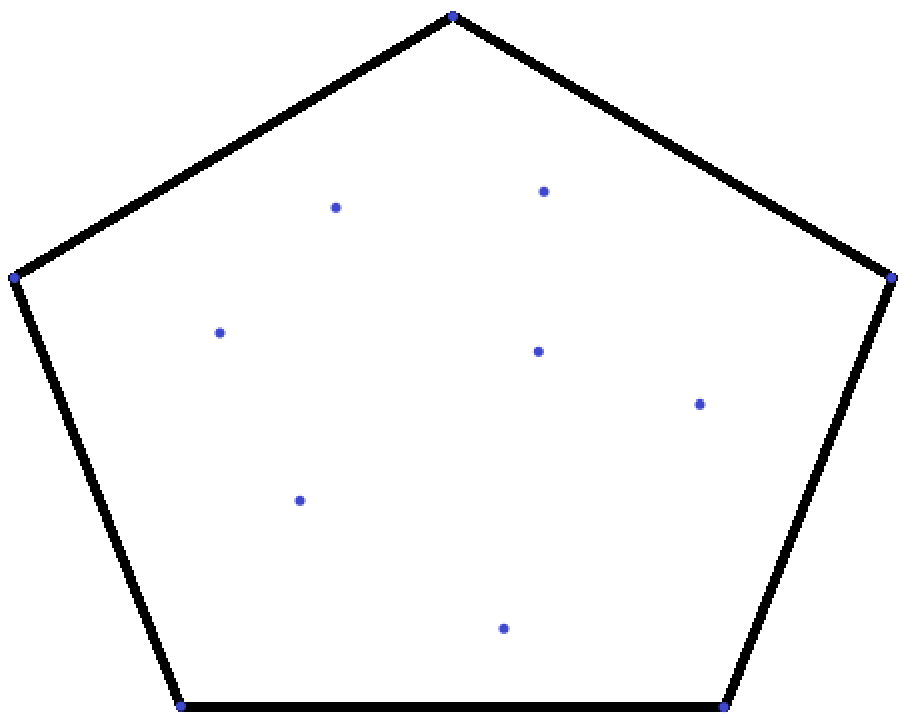
1.2 Математичка оптимизација

Математички оптимизациони проблем или само оптизациони проблем је проблем облика

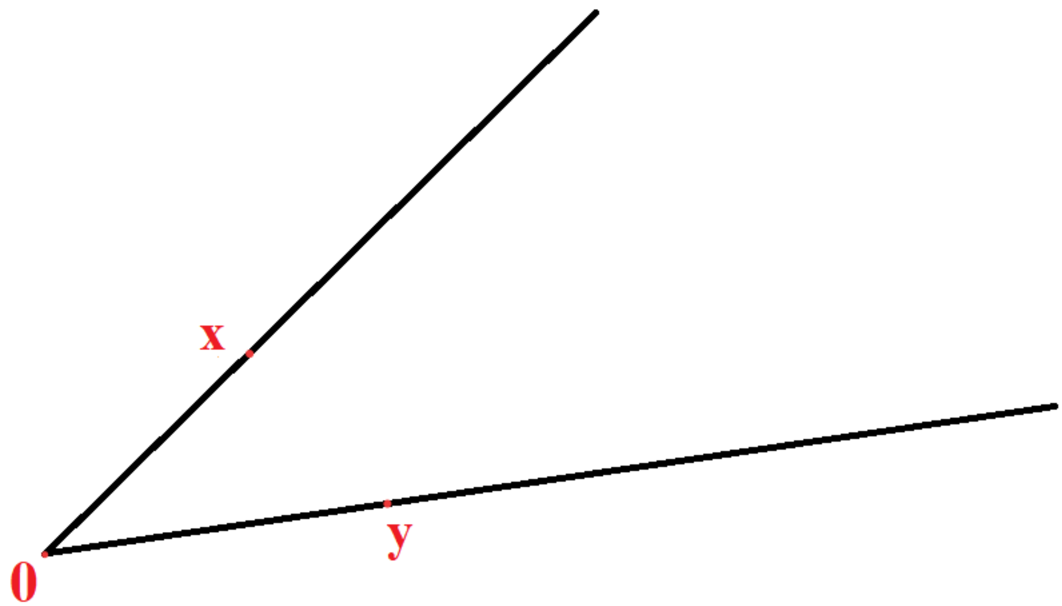
$$\begin{aligned} &\text{Минимизирати } f_0(x), \\ &\text{при ограничењима} f_i(x) \leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Овде је вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ оптимизациона променљива проблема, функција $f_0 : R^n \to R$ је функција циља, функције $f_i : R^n \to R$, $i = 1, \ldots, m$ су функције ограничења, а константе $b_1, \ldots, b_m$ су лимити или границе за ограничења. Вектор x^* је оптималан односно представља решење проблема (1.1) ако има најмању објективну вредност од свих вектора који задовољавају ограничења: за било који вектор z такав да је $f_1(z) \leqslant b_1, \ldots, f_m(z) \leqslant b_m$ имамо да је $f_0(z) \geqslant f_0(x^*)$.

У општем случају можемо разматрати фамилије или класе оптимизационих проблема који су окарактерисани посебним облицима функције циља и функцијама ограничења. Међутим, ми ћемо се задржати на једном посебном оптимизационом проблему облика (1.1), где је функција циља f_0 линеарна и функције ограничења f_i, $i = 1, \ldots, m$ су такође линеарне.



Слика 1.3: Конвексна љуска која садржи 12 тачака означених плавом бојом је скуп који ограничава пентагон



Слика 1.4:

1.3 Линеарно програмирање

Проблем линеарног програмирања се састоји у одређивању ненегативних реалних бројева $x_1, x_2, \ldots, x_n$ који задовољавају

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, k,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i \qquad i = k+1, k+2, \ldots, l,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \qquad i = l+1, l+2, \ldots, l+m,$$

тако да функција

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

има највећу (најмању) вредност за тако одређене x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, где су a_{ij}, b_i и c_i дати реални бројеви.

Постоји више метода за решавање проблема линеарног програмирања. Неке од метода су дате у наставку.

- Геометријска метода, која се примењује када имамо до три непознате. Њена улога је пре свега педагошка.
- Симплекс метода је најзаступљенија метода код решавања проблема линеарног програмирања. Погодна је за програмирање. Рачунска сложеност симплекс методе је најмање експоненцијална. Међутим, у пракси је врло примењива и брза. Неопходан услов за примену симплекс методе је претпоставка да су сва нетривијална ограничења међусобно независна.

Пример 1.3.1 (Геометријска метода). Одредити минимум функције $f(x, y) = 2x + y$ при ограничењима

$$\begin{aligned} y \geqslant& 0;\\ 2x - y \geqslant& -6;\\ -2x + 3y \geqslant& 6;\\ 3x + y \leqslant& 6. \end{aligned}$$

Проблеми линеарног програмирања се дефинишу као оптимизациони проблеми:

- максимизација линеарне функције при линеарним ограничењима;
- минимизација линеарне функције при линеарним ограничењима.

Линеарна ограничења могу бити:

(i) линеарне једнакости;

(ii) линеарне неједнакости.

Основне појмове оптимизације линеарне функције објаснићемо у Примеру 1.3.2.

Пример 1.3.2 (Максимизација линеарне функције $f(x,y) = x + y$ геометријском методом). Одредити бројеве x и y чији је збир $x + y$ максималан, при чему бројеви x и y испуњавају следеће неједнакости

$$\begin{aligned} x \geqslant 0,\ y &\geqslant 0; \\ x + 2y &\leqslant 4; \\ 4x + 2y &\leqslant 12; \\ -x + y &\leqslant 1. \end{aligned}$$

Рад: У датом примеру имамо две променљиве и пет ограничења. Сва ограничења су линеарне неједнакости. Прва два ограничења

$$x \geqslant 0 \quad \text{и} \quad y \geqslant 0$$

називају се ненегативним ограничењима и врло често се јављају у проблемима линеарног програмирања. Остала ограничења су главна ограничења и могу се представити у облику

$$\begin{aligned} y &\leqslant -\frac{x}{2} + 2, \\ y &\leqslant -2x + 6, \\ y &\leqslant x + 1. \end{aligned}$$

Функција коју је неопходно максимизирати (или минимизирати) назива се функција циља или циљна функција (енг. objective function). У датом примеру функција циља је дефинисана са

$$f(x,y) = x + y$$

и њен график је приказан на Слици 1.14.

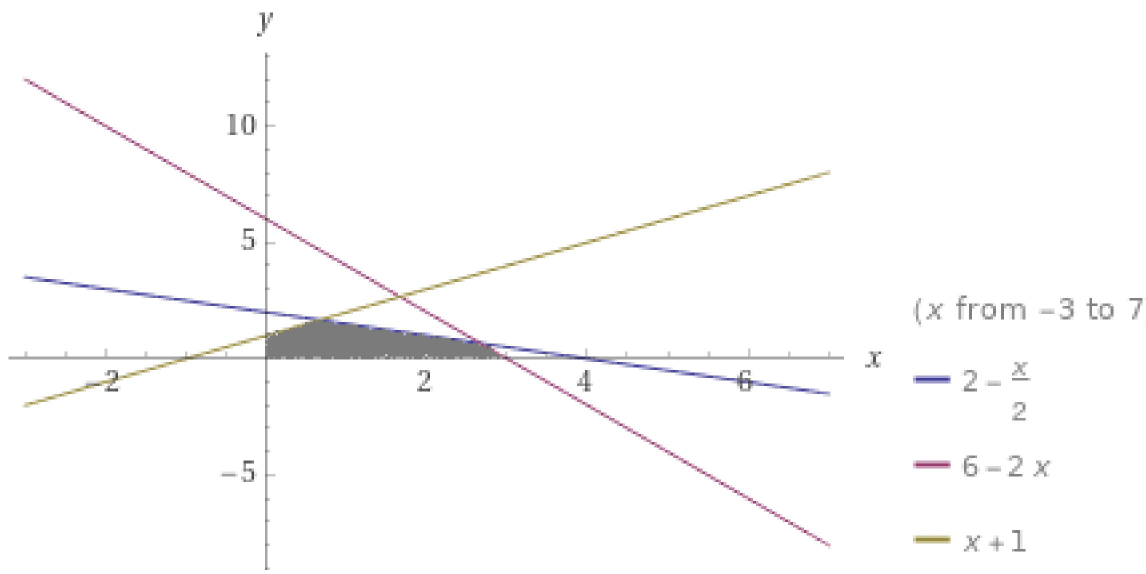
Пошто се јављају само две променљиве, дати проблем можемо решити графичким представљањем скупа тачака у равни које испуњавају сва наведена ограничења (назовимо тај скуп скупом ограничења) и проналажењем тачке скупа ограничења у којој је вредност функције циља максимална. Сваку неједнакост из услова ограничења испуњавају тачке једне полуравни и скуп ограничења се добија као пресек свих тих полуравни. У датом примеру скуп ограничења је петострана фигура осенчена на Слици 1.5. Тражимо тачку (x,y) која припада скупу ограничења и у којој функција

$$f(x,y) = x + y$$

достиже свој максимум. Функција $f(x,y) = x + y$ је константна на правама које имају коефицијент правца -1, на пример, таква је права $x + y = c$, где је c константа. Вредност функције $f(x,y)$ у тачкама праве

$$x + y = c$$

је једнака c. Специјално када је $c = 0$, вредност функције $f(x,y)$ је једнака нули. Међутим, уколико праву $x + y = c$ померамо удесно у односу на координатни почетак коефицијент c ће узимати позитивне вредности и то у растућем редоследу. Наиме, вредност функције $f(x,y)$ ће се повећавати. Пошто морамо одредити у којој тачки скупа ограничења је вредност функције $f(x,y)$ максимална тражићемо праву са коефицијентом правца -1 која је највише удаљена од координатног почетка, али која још увек додирује скуп ограничења.



Слика 1.5: Област одређена неједнакостима $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant 2 - \frac{x}{2}$, $y \leqslant 6 - 2x$ и $y \leqslant x + 1$.

Није тешко утврдити да је тачка са координатама

$$(x, y) = \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

пресечна тачка правих $y = 2 - \frac{x}{2}$ и $y = 6 - 2x$:

$$2 - \frac{x}{2} = 6 - 2x \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}.$$

Када је $x = \frac{8}{3}$, онда је одговарајућа y-координата једнака

$$y = 2 - \frac{x}{2} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

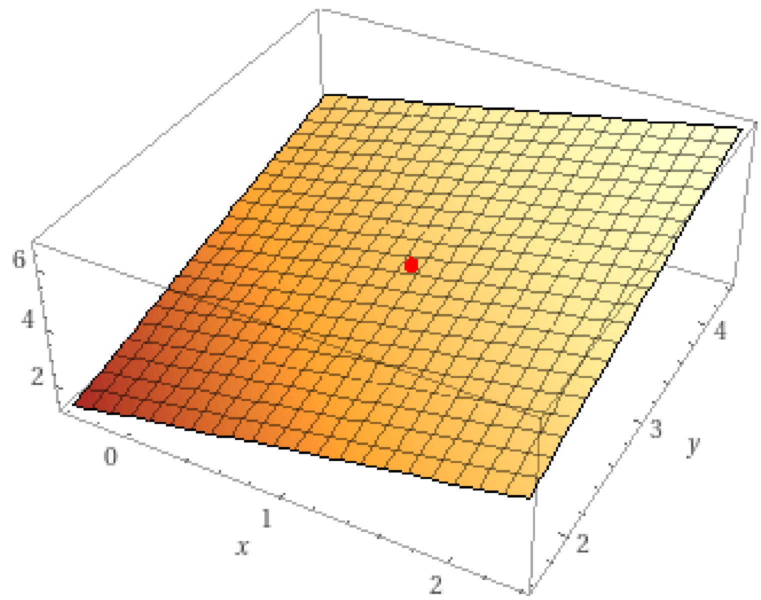
Одредимо вредност константе c_1 за коју је права $x + y = c_1$ најудаљенија од координатног почетка, а још увек сече или додирује област ограничења:

$$c_1 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

Вредност функције циља у датој тачки је

$$f\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3},$$

што је и максимална вредност функције $f(x, y)$ у датој области.



Слика 1.6: Максимална вредност функције $z = x + y$ у области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant 2 - \frac{x}{2}$, $y \leqslant 6 - 2x$ и $y \leqslant x + 1$.

□Функција циља је линеарна и у општем случају достиже своју максималну (или минималну) вредност у "угаоној" тачки скупа ограничења, под претпоставком да је скуп ограничења ограничен. У неким случајевима може се десити да функција циља свој максимум достиже дуж целе границе или читавог лика скупа ограничења. Међутим, тада се такође може рећи да та функција свој максимум достиже и у угаоној тачки скупа ограничења.

1.4 Неке примене линеарног програмирања

Пример 1.4.1 (Шта и колико посадити). Претпоставимо да треба да посејемо k култура на обрадивој површини која има l хектара. Доњу и горњу границу површине на којој желимо да посадимо i-ту културу означимо са p_i и q_i, респективно, за $i = 1, 2, \dots, k$. У сврху формулације проблема уведимо ознаке:

- x_i непозната површина на којој треба посадити i-ту културу, $i = 1, 2, \dots, k$;
- b_j број радника којима располаже пољопривредно добро у j-том периоду, $j = 1, 2, \dots, m$;
- r_{ij} број радника који је потребан у j-том периоду за i-ту културу, $i = 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, m$;
- c_i очекивана добит од i-те културе по јединици површине.

Проблем максимизације гласи

$$\max\Big(\sum_{i=1}^{k} c_i x_i\Big),$$

при чему ограничене обрадиве површине испуњавају услове

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = l, \qquad p_i \leqslant x_i \leqslant q_i,\ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Потребе за радном снагом и њихов ограничен број формулисан је неједнакостима

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot r_{ij} \leqslant b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Пољопривредна техника којом располаже газдинство није узета као ограничавајући фактор. Проблем се може преформулисати тако да се разматрају и радна снага и механизација.

Пример 1.4.2 (Проблем дијете). Постоји m различитих типова хране F_1, F_2, …, F_m који обезбеђују количине n хранљивих састојака N_1, N_2, …, N_n, које су неопходне за добро здравље. Нека је c_j минимална дневна потреба за хранљивим састојком N_j, b_i цена по јединици хране F_i и a_{ij} количина хранљивог састојка N_j који је садржан у једној јединици хране F_i. Проблем дијете се састоји у одређивању неопходне количине хранљивих састојака, тако да потрошена сума новца буде минимална.

Рад: Ако је y_i број јединица хране F_i коју је неопходно купити за један дан, таква дијета ће нас дневно коштати

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m. \tag{1.2}$$

Количина хранљивог састојка N_j садржана у овој дијети је

$$a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \ldots + a_{mj} y_m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

У нашој дијети минимална дневна потреба за хранљивим састојком N_j мора бити задовољена, т.ј. следећа неједнакост мора бити испуњена

$$a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \ldots + a_{mj} y_m \geqslant c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Наравно, количина хране не може бити негативна, према томе морају бити испуњени и услови ненегативности

$$y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0,\ \ldots, y_m \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Проблем дијете се састоји у одређивању минималне вредности суме (1.2) при ограничењима (1.3) и (1.4).

□

Пример 1.4.3. За потребе сточарске производње неопходно је израчунати минималне трошкове исхране користећи три врсте прехране P_1, P_2 и P_3, чије су цене респективно $5, 3, 9$, а који садрже проценте пет компоненти S_1, S_2, S_3, S_4 и S_5, као што је приказано у Табели 1.1. Формирати одговарајући математички модел.

Рад: Из опште формулације математичког модела исхране можемо закључити да имамо три промењиве x, y и z, које представљају број килограма производа P_1, P_2 и P_3, које треба

Табела 1.1: Трошкови исхране

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	цена
P_1	0,05	0,18	0,15	0,03	0,21	5
P_2	0,2	0,14	0,16	0,05	0,18	3
P_3	0,17	0,23	0,03	0,09	0,24	9
Прописани минимум	0,07	0,11	0,22	0,17	0,19	

узимати у дневној исхрани да би задовољили прописане услове и да би трошкови исхране били минимални. Према томе, функција циља има облик

$$f(x,y,z) = 5x + 3y + 9z,$$

док су ограничења дата системом линеарних неједначина

$$\begin{aligned}
0,05x + 0,2y + 0,17z &\geqslant 0,07,\\
0,18x + 0,14y + 0,23z &\geqslant 0,11,\\
0,15x + 0,16y + 0,03z &\geqslant 0,22,\\
0,03x + 0,05y + 0,09z &\geqslant 0,17,\\
0,21x + 0,18y + 0,24z &\geqslant 0,19.
\end{aligned}$$

Задатак се састоји у налажењу минимума функције циља при датим ограничењима.

□

У сточарству се врло често јављају следећи оптимизациони проблеми:

- максимизирати производњу меса, млека и јаја;
- минимизирати трошкове исхране тако да квалитет сточне хране буде на задовољавајућем нивоу.

Пример 1.4.4 (Кокошке и јаја). Једна кокошка може за три недеље или да положи 12 јаја или да излеже 4 пилета. Посматра се производни период од 4 циклуса по 3 недеље (укупно 12 недеља). Након тога се сва живина продаје на следећи начин:

- пилићи из првог циклуса и кокошке по цени од K динара,
- пилићи из другог и трећег циклуса по цени од P динара по комаду,
- јаја по цени од J динара по комаду.

Претпоставимо да је $K > P > J$. Оптимизовати зараду, ако производњу почнемо са 100 кокошака и 100 јаја.

Пример 1.4.5 (Количина стоке). Управа фарме је одлучила да гаји n врста стоке. На залихама има m основних састојака сточне хране у количинама k_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Извршити оптимизацију количине стоке у зависности од залиха сточне хране са којом располаже фарма, са циљем остваривања максималне добити.

Рад: Уведимо следеће ознаке

- x_j непознати број стоке j-те врсте, $j = 1, 2, \ldots, n$;
- m_j минималан број стоке j-те врсте, $j = 1, 2, \ldots, n$ испод кога се не исплати гајити стоку j-те врсте;
- b_{ij} минимална потребна количина i-тог основног састојка сточне хране по јединици стоке j-те врсте, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$;
- c_j очекивана цена по грлу стоке j-те врсте.

Функција циља гласи

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

Квалитет сточне хране захтева испуњење следећих неједнакости

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \leqslant k_i, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Непознате x_j су природни бројеви који испуњавају неједнакости

$$x_j \geqslant m_j, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

□

Понекад се у пољопривреди користи семе од претходне године. Такав проблем је разматран у Примеру 1.4.6.

Пример 1.4.6 (Сејати или продати семе). Направимо оптималан план сетве из три узастопне жетве уз претпоставку да се сваке године семе не складишти, већ се или сеје или се продаје. Пред прву сетву имамо A килограма семена. Продајна цена семена је p_0 динара за килограм. Коефицијент приноса за жетве је λ. Очекује се да ће зараде по килограму бити следеће

- у првој жетви зарада је p_1 динара,
- у другој жетви зарада је p_2 динара,
- у трећој жетви зарада је p_3 динара.

Рад: Нека је у првој години посејано x килограма семена, при чему је $x < A$. Према томе, по цени од p_0 динара за килограм је продато $A - x$ килограма семена. Принос прве жетве је λx.

Нека је у другој години посејано y килограма семена, при чему је $y < \lambda x$. Остатак од $\lambda x - y$ је продат по цени од p_1 динара за килограм. Принос друге жетве је λy.

Нека је у трећој години посејано z килограма семена, при чему је $z < \lambda y$. Остатак од $\lambda y - z$ је продата по цени p_2. Принос треће жетве λz је продат по цени p_3.

Укупни приход за три године је

$$p_0(A - x) + p_1(\lambda x - y) + p_2(\lambda y - z) + p_3 \lambda z.$$

Према томе, оптимизациони проблем гласи максимизирати функцију

$$f(x,y,z) = p_0(A-x) + p_1(\lambda x - y) + p_2(\lambda y - z) + p_3\lambda z,$$

при ограничењима

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x &\leqslant A, \\ 0 \leqslant y &\leqslant \lambda x, \\ 0 \leqslant z &\leqslant \lambda y. \end{aligned}$$

□

У оквиру избора механизације имамо бар два типа оптимизационих проблема:

(i) наћи оптималан план набавке нове механизације или изнајмљивања старе механизације са циљем да се изврше планирани послови за планирано време;

(ii) наћи оптималан план са максималном зарадом производње различитих врста производа на постојећим типовима машина при временском ограничењу рада.

Ситуације разликујемо када:

- све операције или сви производи могу да се у целости реализују на свим типовима машина;
- сваки производ или свака операција мора да прође обраду на свим типовима машина редом.

На пример, операције, орања, тањирања и сејања могу да се изврше на свим типовима трактора са одговарајућим типовима прикључака.

Пример 1.4.7. На поседу треба обавити два посла P_1 и P_2. Сваки посао може обавити или машина M_1 или машина M_2. Посао P_1 треба обавити за 10 дана, а затим треба обавити посао P_2 за 5 дана. На располагању су нам следећи подаци о томе колико је којој машини потребно времена за одређени посао:

- Машина M_1 обави посао P_1 за 60 дана;
- Машина M_1 обави посао P_2 за 50 дана;
- Машина M_2 обави посао P_1 за 90 дана;
- Машина M_2 обави посао P_2 за 25 дана.

Колики број машина је минимално потребно набавити да би се послови обавили на време?

Рад: Означимо са x потребан број машина типа M_1, а са y потребан број машина M_2. Треба минимизирати функцију $f(x,y) = x + y$, при ограничењима

$$\begin{aligned} x, y &\in \mathbb{N}, \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{9} &\geqslant 1, \\ \frac{x}{10} + \frac{y}{5} &\geqslant 1. \end{aligned}$$

□

Пример 1.4.8. Поставити математички модел за оптималну производњу 4 врсте пољопривредних производа A_1, A_2, A_3 и A_4 у три погона P_1, P_2 и P_3 предузећа за прераду пољопривредних производа. За сваки пољопривредни производ је неопходна употреба машина типа M_1 и M_2.

1.5 ДОДАТАК

1.5.1 Линеарне неједначине

Свака линеарна једначина са две непознате, облика

$$ax + by = c,$$

где су $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $c \in \mathbb{R}$ одређује једну праву у равни.

С друге стране, линеарна неједначина

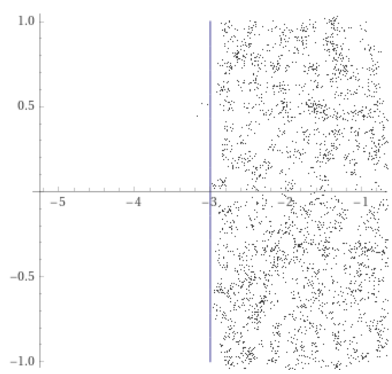
$$ax + by \geqslant c,$$

одређује једну полураван поменуте равни.

У наставку дајемо неколико примера.

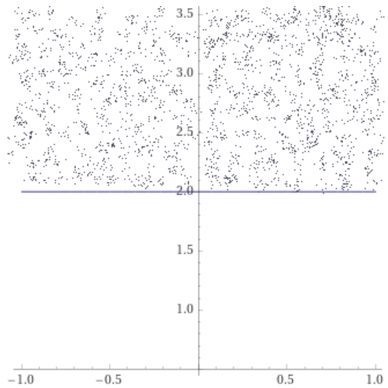
Пример 1.5.1. У xOy равни шрафирати области у којима важе следеће неједнакости:
(а) $x \geqslant -3$; (б) $y \geqslant 2$; (в) $x - y + 3 \geqslant 0$.

Рад: а)



$x \geqslant -3$

б)



$$y \geqslant 2$$

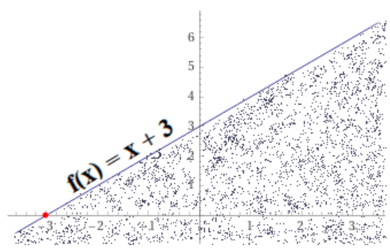
в) Неједначина $x - y + 3 \geqslant 0$ се може записати у облику

$$y \leqslant x + 3,$$

односно

$$y \leqslant f(x),$$

где је $f(x) = x + 3$. Скицирајмо сада график функције $f(x) = x + 3$ и одредимо област тачака са координатама (x, y) у xOy равни којима је вредност y-координате мања или једнака од $f(x)$.



$$x - y + 3 \geqslant 0$$

□

Коњункција је појам Математичке логике који се означава симболом $\wedge$ и служи да повезује математичке исказе. На пример, исказ

$$x \geqslant 0 \ \wedge \ y \geqslant 0,$$

је испуњен уколико су испуњена оба исказа $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Врло често се за ознаку $\wedge$ користи израз "математичко и".

Пример 1.5.2. У xOy равни шрафирати области у којима важе следеће коњункције:

а) $x - y + 2 \leqslant 0 \ \wedge \ x + y + 1 \geqslant 0$;

б) $x \leqslant -3 \ \wedge \ 2x - y + 4 \geqslant 0 \ \wedge \ 3x - 3y + 5 \leqslant 0$.

Рад: (а) Дате неједнакости се могу записати у облику

$$y \geqslant x + 2 \ \wedge \ y \geqslant -x - 1,$$

или, уколико искористимо ознаке

$$f_1(x) = x + 2 \quad \text{и} \quad f_2(x) = -x - 1, \tag{1.5}$$

дате неједнакости гласе

$$y \geqslant f_1(x) \ \wedge \ y \geqslant f_2(x).$$

Скицирајмо сада праве одређене једначинама (1.5).

Пошто је функција

$$f_1(x) = x + 2 \tag{1.6}$$

права у равни, а знамо да је свака права одређена двема тачкама, пронађимо две тачке кроз које та права пролази.

Нека је најпре

$$f_1(x) = 0,$$

т.ј. $x + 2 = 0$ односно $x = -2$. Према томе, тачка са координатама

$$(x, y) = (-2, 0)$$

припада графику праве $f_1(x)$ одређене са (1.6).

Одредимо сада другу тачку кроз коју пролази права $f_1(x) = x + 2$. Како је

$$f_1(0) = 0 + 2 = 2,$$

то је тачка са координатама

$$(x, y) = (0, 2)$$

друга тачка кроз коју пролази права $f_1(x)$.

На исти начин можемо одредити две тачке кроз које пролази права

$$f_2(x) = -x - 1.$$

То су тачке са координатама

$$(x, y) = (-1, 0)$$

и

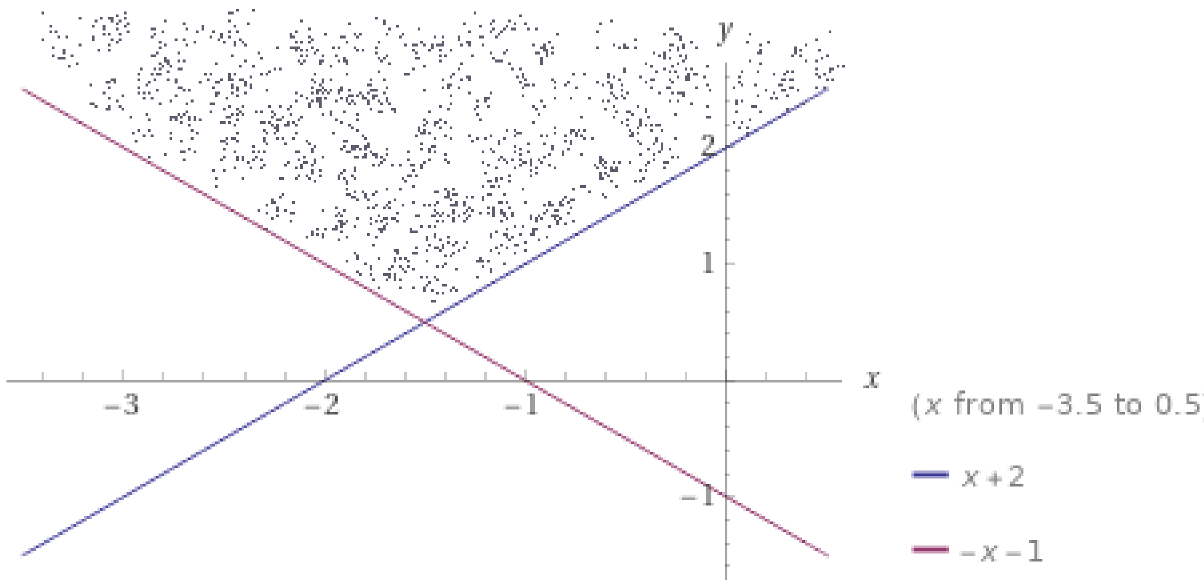
$$(x, y) = (0, -1).$$

Одредимо сада пресечну тачку правих датих са (1.5)

$$f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow x + 2 = -x - 1 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{2}.$$

Према томе x-координата пресечне тачке правих датих са (1.5) је

$$x = -\frac{3}{2},$$



Слика 1.7: Област одређена неједнакостима $y \geqslant x + 2 \ \wedge \ y \geqslant -x - 1$.

док је y-координата те тачке једнака

$$f_1\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2}.$$

Дакле, пресечна тачка правих датих са (1.5) има координате

$$(x, y) = \Big(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\Big),$$

што је приказано на Слици 1.7.

б) Скицирајмо област одређену неједнакостима

$$x \leqslant -3 \ \wedge \ 2x - y + 4 \geqslant 0 \ \wedge \ 3x - 3y + 5 \leqslant 0.$$

Неједнакост

$$x \leqslant -3$$

је врло једноставно скицирати. Скицирајмо најпре праву $x = -3$. Тачке које испуњавају неједнакост $x \leqslant -3$ биће све тачке равни код којих је x-координата мања или једнака од -3, а то ће бити све тачке праве $x = -3$ и лево од ње у координатном систему xOy.

Размотримо сада неједнакост $2x - y + 4 \geqslant 0$, која се може записати у облику

$$y \leqslant 2x + 4.$$

Скицирајмо сада праву $2x + 4$. Када је $x = 0$ тада је одговарајућа y-координата једнака

$$2 \cdot 0 + 4 = 4.$$

Према томе тачка са координатама
$$(x, y) = (0, 4)$$
припада правој $2x + 4$.

С друге стране, када је
$$2x + 4 = 0,$$
тада је $x = -2$. Тако да можемо закључити да тачка са координатама
$$(x, y) = (-2, 0)$$
припада правој $2x + 4$.

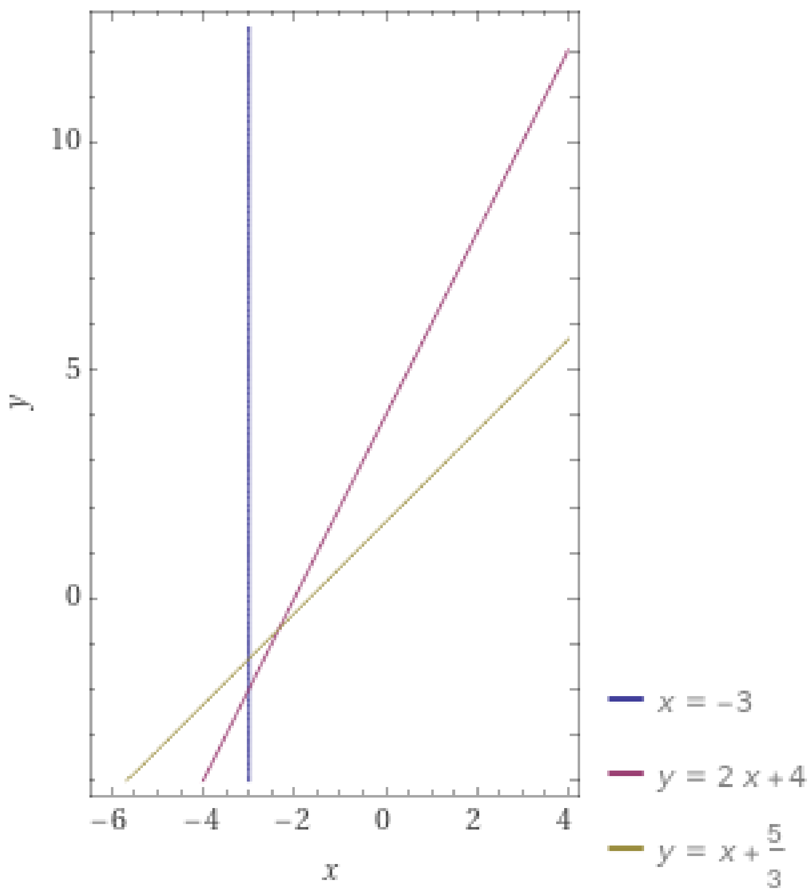
Сада је лако скицирати праву $2x+4$, док су тачке xOy равни које испуњавају неједнакост $y \leqslant 2x + 4$ тачке полуравни одређене правом $2x + 4$ и свим тачкама испод ње.

Остаје још да скицирамо неједнакост $3x - 3y + 5 \leqslant 0$, која се може записати у облику
$$3y \geqslant 3x + 5,$$
односно
$$y \geqslant x + \frac{5}{3}.$$
Скицирајмо сада праву $x + \frac{5}{3}$. Када је $x = 0$ тада је одговарајућа y-координата једнака
$$y = 0 + \frac{5}{3} = \frac{5}{3}.$$
Према томе, тачка са координатама
$$(x, y) = (0, \frac{5}{3})$$
припада правој $x + \frac{5}{3}$. С друге стране када је
$$x + \frac{5}{3} = 0,$$
тада је $x = -\frac{5}{3}$. Према томе, тачка са координатама
$$(x, y) = \left(-\frac{5}{3}, 0\right)$$
припада правој $x + \frac{5}{3}$.

Граничне праве датих неједнакости су приказане на Слици 1.8.

На основу Слике 1.8 можемо закључити да не постоје тачке xOy равни које испуњавају неједнакости
$$x \leqslant -3 \ \wedge \ y \leqslant 2x + 4 \ \wedge \ y \geqslant x + \frac{5}{3},$$
чиме смо завршили задатак.

□



Слика 1.8: Праве $x = -3$, $y = 2x + 4$ и $y = x + \frac{5}{3}$.

Пример 1.5.3. У xOy равни шрафирати области у којима важе следеће конјункције:

а) $x + y \geqslant 1 \ \wedge \ x - 2y \leqslant 0 \ \wedge \ x - y \leqslant 1$;
б) $2x - y \leqslant 1 \ \wedge \ x + 2y \geqslant 1 \ \wedge \ 2x - 2y \leqslant 1 \ \wedge \ 2x + 2y \geqslant 3$.

Рад: а) Дате неједнакости се могу представити у облику

$$y \geqslant -x + 1 \ \wedge \ y \geqslant \frac{x}{2} \ \wedge \ y \geqslant x - 1.$$

Одредимо пресечну тачку правих $y = -x + 1$ и $y = \frac{x}{2}$:

$$-x + 1 = \frac{x}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{3x}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Када је $x = \frac{2}{3}$, тада је

$$y = \frac{x}{2} = \frac{1}{3}.$$

Према томе, пресечна тачка правих $y = -x + 1$ и $y = \frac{x}{2}$ има координате

$$(x, y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Одредимо сада пресечну тачку правих $y = \frac{x}{2}$ и $y = x - 1$:

$$\frac{x}{2} = x - 1 \Leftrightarrow 1 = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2.$$

Када је $x = 2$, тада је

$$y = \frac{x}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Према томе, пресечна тачка правих $y = \frac{x}{2}$ и $y = x - 1$ има координате

$$(x, y) = (2, 1).$$

Тачке xOy равни које испуњавају дате неједнакости су приказане на Слици 1.9.

б) Овај део задатка можемо урадити на исти начин као део под (а).

□

1.5.2 Афина и линеарна функција

Дефиниција 1.5.1. Афина функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ је функција облика

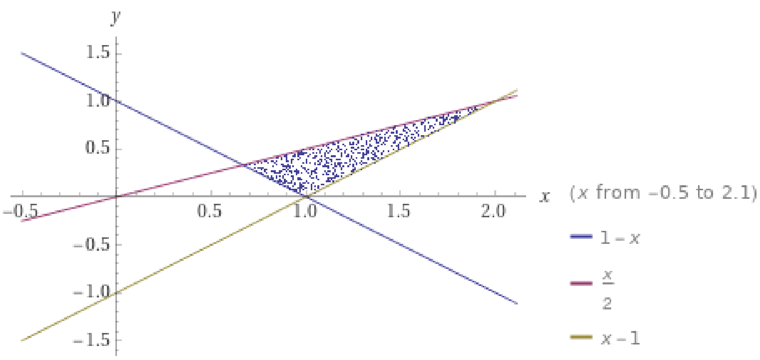
$$f(x) = ax + b,$$

где су $a, b \in \mathbb{R}$.

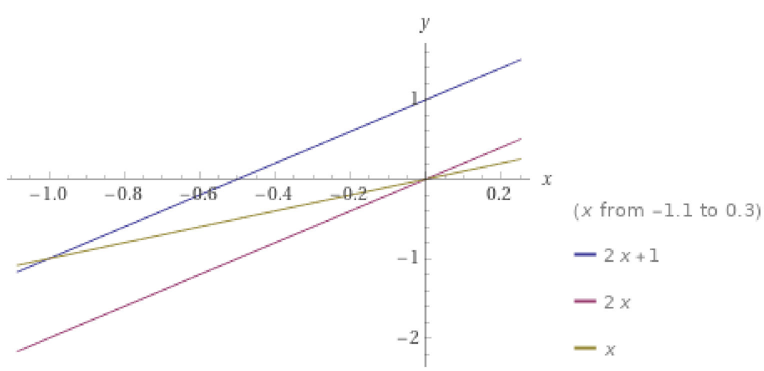
Дефиниција 1.5.2. Линеарна функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ је специјална афина функција облика

$$f(x) = ax,$$

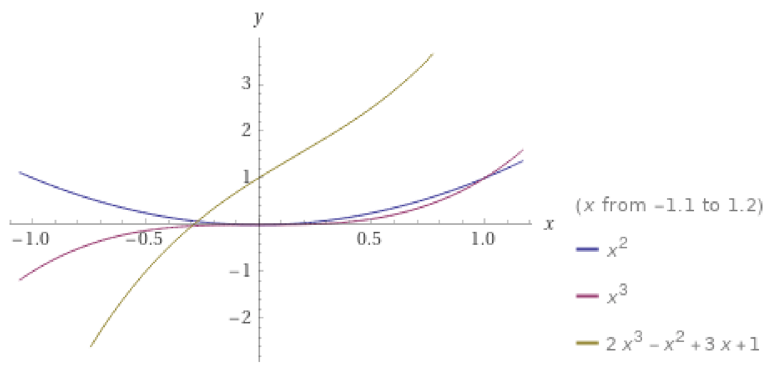
где је $a \in \mathbb{R}$.



Слика 1.9: Област одређена неједнакостима $y \geqslant -x+1 \ \wedge \ y \geqslant \frac{x}{2} \ \wedge \ y \geqslant x-1$



Слика 1.10: Праве $y=2x+1, \ y=2x$ и $y=x$



Слика 1.11: Графици функција $y = x^3,\ y = x^2$ и $y = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$

Пример 1.5.4 (Афине и линеарне функције). Графици функција

$$y = 2x + 1,\ y = 2x \text{ и } y = x,$$

су приказани на Слици 1.10. Функција

$$y = 2x + 1$$

је афина, док су функције

$$y = 2x \text{ и } y = x$$

линеарне.

Пример 1.5.5 (Полиноми). Графици функција

$$y = x^3,\ y = x^2 \text{ и } y = 2x^3 - x^2 + 3x + 1,$$

су приказани на Слици 1.11. Ове функције нису афине, а самим тим ни линеарне, што се може закључити и на основу њихових графика.

Афина и линеарна функција две реалне промењиве

До сада смо разматрали реалне функције једне реалне промењиве. Посматрајмо сада реалне функције две реалне промењиве.

Дефиниција 1.5.3 (Афина функција). Нека су $a, b, c \in \mathbb{R}$ произвољни елементи. Функцију $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ одређену са

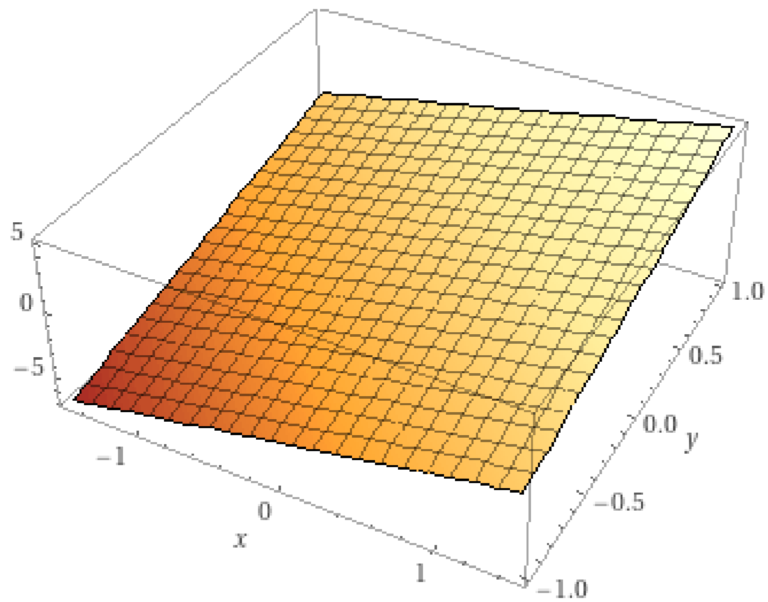
$$f(x, y) = ax + by + c,$$

називамо афином функцијом.

Експлицитни облик једначине равни у простору је

$$z = f(x, y),$$

где је $f(x, y)$ афина функција.



Слика 1.12: График функције $z = 2x + 3y - 1$

Пример 1.5.6. График афине функције

$$z = 2x + 3y - 1$$

је приказан на Слици 1.12.

Дефиниција 1.5.4 (Линеарна функција). Нека су $a, b \in \mathbb{R}$ произвољни елементи. Функцију $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ одређену са

$$f(x, y) = ax + by,$$

називамо линеарном функцијом.

Пример 1.5.7. График линеарне функције

$$z = 2x - y$$

је приказан на Слици 1.13.

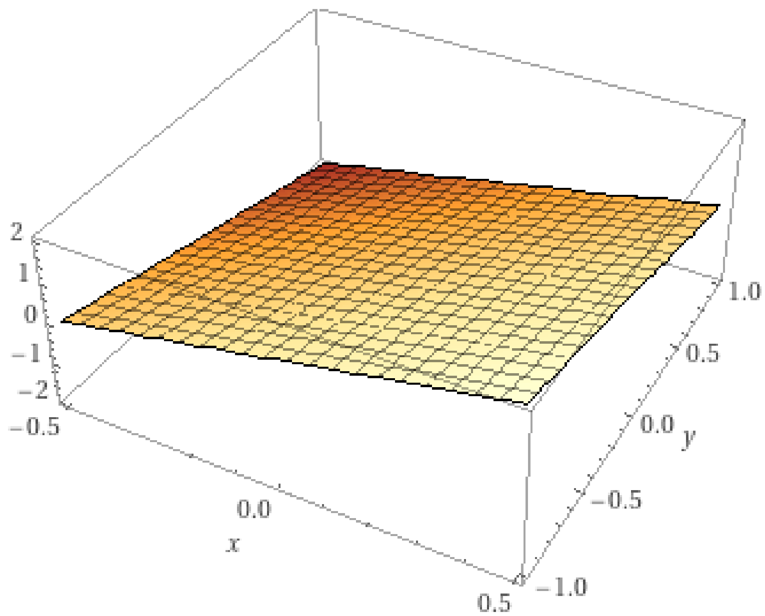
Пример 1.5.8. График линеарне функције

$$z = x + y$$

је приказан на Слици 1.14.

Линеарне функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ имају следеће особине:

$$f(ax) = af(x), \quad F(a \cdot (x, y)) = aF(x, y) \ \text{(хомогеност)},$$
$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad F((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = F(x_1, y_1) + L(x_2, y_2) \ \text{(адитивност)}.$$



Слика 1.13: График функције $z = 2x - y$

При чему је $a \cdot (x, y)$ множење вектора (x, y) реалним бројем a и дефинисано је на следећи начин

$$a \cdot (x, y) = (ax, ay).$$

Услови адитивности и хомогености функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ могу се објединити у један услов

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y), \quad F(a \cdot (x_1, y_1) + b \cdot (x_2, y_2)) = aF(x_1, y_1) + bF(x_2, y_2) \text{ (линеарност).}$$

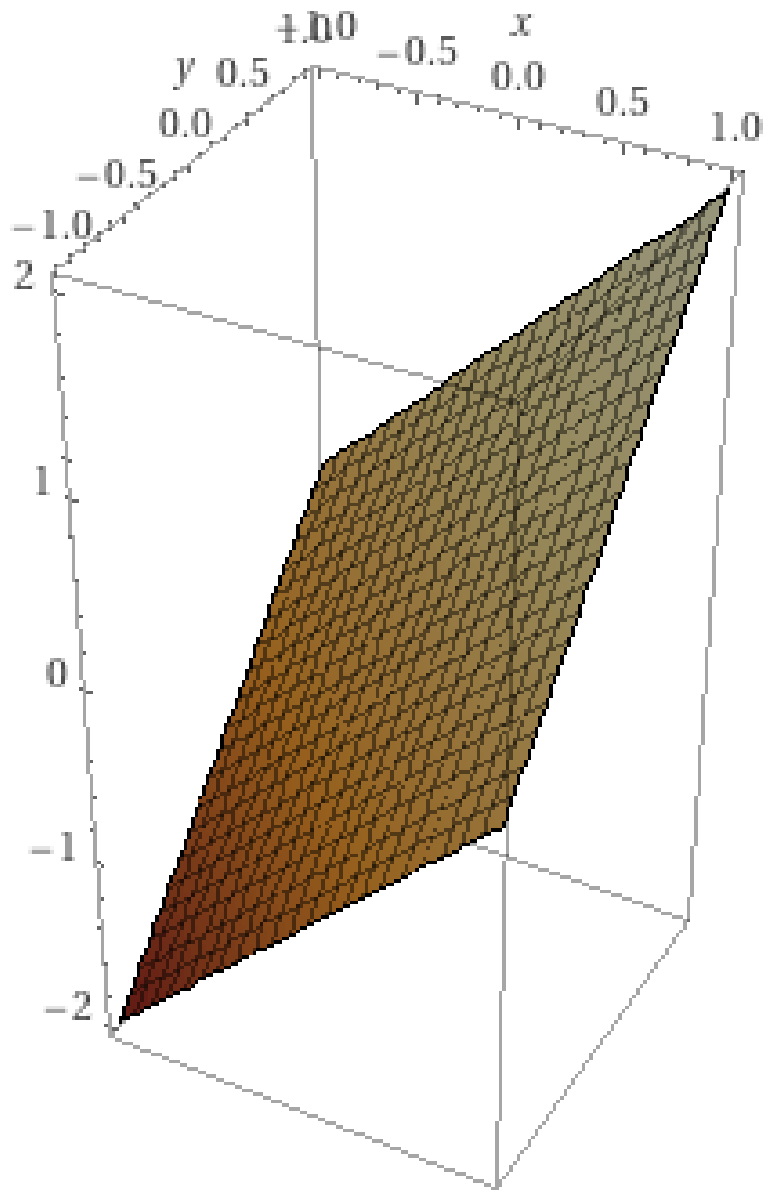
1.6 Питања

1. Како се дефинише особина адитивности функције $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?
2. Како се дефинише особина хомогености функције $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?
3. Како се дефинише линеарност функције $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?
4. Како се назива функција оптимизационог проблема коју је неопходно максимизирати или минимизирати?

1.7 Одговори

Одговор 1: Функција $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ је адитивна ако $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ испуњава услов

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \text{ (адитивност).}$$



Слика 1.14: График функције $z = x + y$

Одговор 2: Функција $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ је хомогена ако $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ испуњава услов

$$f(\alpha \cdot \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) \text{ (хомогеност).}$$

Одговор 3: Функција $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ је линеарна ако $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ испуњава услов

$$f(\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}) \text{ (линеарност).}$$

Одговор 4: Функција оптимизационог проблема коју је неопходно максимизирати или минимизирати назива се функција циља или циљна функција.