Поглавље 3

Основне операције над матрицама, регуларна и сингуларна матрица

3.1 Неки примери матрица

Реална матрица формата 2×3 је правоугаона шема од $2 \cdot 3 = 6$ реалних бројева шематски распоређених у 2 врсте и 3 колоне, на пример

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Наведимо још неке примере матрица.

Пример 3.1.1. Матрица:

- формата 1×5:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 7 \end{bmatrix};$$

- формата 3×2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix};$$

- формата 4×4:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix};$$

- формата 2×3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix};$$

– формата 4×1:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Скуп свих реалних матрица које имају 2 врсте и 3 колоне се означава са $\mathbb{R}^{2\times 3}$. Матрице ћемо означавати великим латиничним словима $A, B, C, \ldots$. Било која матрица $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ може се представити у облику

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},$$

где су $a_{ij} \in \mathbb{R}$, за $i \in \{1, 2\}$ и $j \in \{1, 2, 3\}$.

Пример 3.1.2. Одредити елементе a_{ij}, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ матрице

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

где је a реалан број.

Рад: Елементи матрице A су

$$a_{ij} = \begin{cases} a, & \text{ако је } i \leqslant j, \\ 0, & \text{ако је } i > j. \end{cases}$$

□

Пример 3.1.3. Одредити елементе a_{ij}, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}.$$

Рад: Матрица A формата 3×3 може се представити у облику

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Сада, из једнакости

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix},$$

следи

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 = 1^1, \quad & a_{12} &= 1 = 1^2, \quad & a_{13} &= 1 = 1^3, \\ a_{21} &= 2 = 2^1, \quad & a_{22} &= 4 = 2^2, \quad & a_{23} &= 8 = 2^3, \\ a_{31} &= 3 = 3^1, \quad & a_{32} &= 9 = 3^2, \quad & a_{33} &= 27 = 3^3, \end{aligned}$$

што се једноставније може записати у облику $a_{ij} = i^j$, $i = 1, 2, 3$ и $j = 1, 2, 3$.

□

Пример 3.1.4. Одредити матрицу формата 3×3 чији су елементи $a_{ij} = i + j$, $i = 1, 2, 3$ и $j = 1, 2, 3$.

Рад: Матрица формата 3×3 може се представити у облику

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

На основу датих података је

$$a_{ij} = i + j, \;\; i = 1, 2, 3 \text{ и } j = 1, 2, 3,$$

према томе, елементи матрице A су

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 + 1 = 2, & a_{12} &= 1 + 2 = 3, & a_{13} &= 1 + 3 = 4, \\ a_{21} &= 2 + 1 = 3, & a_{22} &= 2 + 2 = 4, & a_{23} &= 2 + 3 = 5, \\ a_{31} &= 3 + 1 = 4, & a_{32} &= 3 + 2 = 5, & a_{33} &= 3 + 3 = 6. \end{aligned}$$

Тражена матрица је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

□

3.2 Операције над матрицама

Операције над матрицама које ћемо посматрати у овом одељку су:

- транспоновање матрице (A^{T} могуће је одредити за било коју матрицу A);
- множење матрице бројем (αA је могуће одредити за било који комплексан број α и било коју матрицу A);
- сабирање/одузимање матрица и формирање линеарне комбинације матрица (збир/разлику $A \pm B$ или линеарну комбинацију $\alpha A + \beta B$ је могуће посматрати једино у случају када су матрице A и B истог формата, док бројеви α и β из линеарне комбинације могу бити произвољни);
- множење матрица (производ матрица A и B у ознаци AB је могуће посматрати једино у случају када је број колона матрице A једнак броју врста матрице B);
- квадрирање и степеновање квадратних матрица (за било коју квадратну матрицу A је могуће одредити квадрат A^2 или степен A^k за $k \in \mathbb{N}$).

Транспонована матрица матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

је матрица

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Пример 3.2.1. Одредити транспоноване матрице следећих матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 7 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 9 \\ 4 & 8 & 11 \end{bmatrix}.$$

Рад: Транспоноване матрице датих матрица су

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 7 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 9 \\ 4 & 8 & 11 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 8 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}.$$

□

Пример 3.2.2. Одредити транспоновану матрицу следеће матрице

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Рад: Транспонована матрица матрице C је одређена са

$$C^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & 5 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

□

Пример 3.2.3. Помножити матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

бројем 3.

Рад: Матрица $3A$ је одређена са

$$3A = \begin{bmatrix} 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot(-3) & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) & 3\cdot(-2) & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 5 \\ 3\cdot(-1) & 3\cdot 0 & 3\cdot 4 & 3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 15 & -9 & 3 \\ 6 & -3 & -6 & 0 \\ 9 & 3 & 6 & 15 \\ -3 & 0 & 12 & 6 \end{bmatrix}.$$

□

Напомена 3.2.1. Могуће је сабирати једино матрице које су истог формата.

Пример 3.2.4. Збир матрица A и B датих са

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

је одређен са

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+(-1) & 3+0 & -1+1 \\ -3+3 & 0+2 & 1+0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Матица чији су сви елементи једнаки нули назива се нула матрица.

Пример 3.2.5. Нула матрице формата 3×2 и 2×3 су дате са

$$\mathbf{O}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{O}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сабирање матрица је комутативна и асоцијативна операција:

$$\begin{aligned} A + B &= B + A, \text{ (комутативност сабирања матрица)} \\ A + (B + C) &= (A + B) + C. \text{ (асоцијативност сабирања матрица)} \end{aligned}$$

Особине транспоновања матрица су:

1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$,

2) $(\alpha A + \beta B)^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}} + \beta B^{\mathrm{T}}$, где су α и β реални бројеви.

На основу формуле 1) можемо закључити да ако транспонујемо матрицу два пута, добићемо полазну матрицу, што следи из дефиниције транспоновања матрица.

Из формуле 2) можемо извести следеће формуле

2.1) $(\alpha A)^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}}$ (избором $\beta = 0$ у формули 2));

2.2) $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$ (избором $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ у формули 2));

2.3) $(A-B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} - B^{\mathrm{T}}$ (избором $\alpha = 1$ и $\beta = -1$ у формули 2)).

Напомена 3.2.2. Производ AB, матрица A и B, је могуће одредити једино у случају када је број колона матрице A једнак броју врста матрице B.

Матрично множење ћемо објаснити у примеру који следи.

Пример 3.2.6 (Множење матрица). Уколико је могуће, одредити производ AB матрица

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Рад: Производ AB је могуће одредити, јер матрица A има 3 колоне, што је једнако броју врста матрице B. Пошто матрица A има 2 врсте, а матрица B има 2 колоне, то ће производ AB бити матрица која има 2 врсте и 2 колоне:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3\cdot(-1)+2\cdot 3+(-1)\cdot 4 & 3\cdot 0+2\cdot 2+(-1)\cdot(-2) \\ -2\cdot(-1)+1\cdot 3+1\cdot 4 & -2\cdot 0+1\cdot 2+1\cdot(-2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Пример 3.2.7. Да ли је могуће одредити производ AB матрица

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}?$$

Рад: Матрични производ AB није могуће одредити, јер матрица A има 3 колоне, а матрица B има 2 врсте.

□

Напомена 3.2.3. Множење матрица није комутативна операција. Дакле, у општем случају не важи

$$AB = BA.$$

Пример 3.2.8 (Контрапример којим се доказује некомутативност матричног множења). Нека су A и B матрице дате са

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Одредити AB и BA.

Рад: Како је

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 0 + 1\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 1 & 0\cdot 0 + 0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

док је

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

можемо закључити да је

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = BA.$$

Према томе, множење матрица није комутативна операција.

□

Множење матрица је асоцијативна операција, т.ј. за било које матрице A, B и C, одговарајућих формата, важи

$$A(BC) = (AB)C.$$

Такође, за било које матрице A, B и C, одговарајућих формата, важи:

$$\begin{aligned} (i)\ A(B+C) &= AB + AC \quad \text{(лева дистрибутивност множења према сабирању);} \\ (ii)\ (A+B)C &= AC + BC \quad \text{(десна дистрибутивност множења према сабирању).} \end{aligned}$$

3.3 Квадратне матрице

Матрица чији је број врста једнак броју колона назива се квадратна матрица. У том случају број колона односно врста матрице назива се редом матрице. У примеру који следи, навешћемо један пример квадратне матрице.

Пример 3.3.1. Матрица

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

је квадратна матрица реда четири.

Дијагонална матрица је матрица код које су сви елементи ван главне дијагонале једнаки нули.

Пример 3.3.2. Матрица

$$D_4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

је дијагонална матрица реда четири.

Дијагонална матрица чији су сви елементи главне дијагонале једнаки јединици назива се јединична матрица.

Пример 3.3.3. Јединична матрица реда 5 је дата са

$$I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Реална квадратна матрица A је:

1) симетрична ако је $A = A^{\mathrm{T}}$;

2) антисиметрична или кососиметрична ако је $A = -A^{\mathrm{T}}$;

3) ортогонална ако је $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A = I$;

4) нормална ако је $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A$;

5) идемпотентна ако је $A^2 = I$;

где I означава јединичну матрицу.

Приметимо да за горе одређене класе матрица важи:
1) симетрична $\Rightarrow$ 4) нормална,
2) антисиметрична $\Rightarrow$ 4) нормална,
3) ортогонална $\Rightarrow$ 4) нормална,
1) симетрична $\wedge$ 5) идемпотентна $\Rightarrow$ 3) ортогонална($\Rightarrow$ 4) нормална),
2) антисиметрична $\wedge$ 5) идемпотентна $\Rightarrow$ није ортогонална,
2) антисиметрична $\wedge$ 5) идемпотентна $\Rightarrow$ 4) нормална,
1) симетрична $\wedge$ 3) ортогонална $\Rightarrow$ 5) идемпотентна.

Теорема 3.3.1. Ако матрица поседује било које две од следећих особина: симетрична, ортогонална, идемпотентна, онда обавезно поседује и трећу.

Пример 3.3.4 (Симетрична матрица). Квадратна матрица реда 4 дата са

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \\ -4 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

је пример симетричне матрице.

Пример 3.3.5 (Антисиметрична матрица). Квадратна матрица A реда 4 дата са

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

је пример антисиметричне матрице.

Дефиниција 3.3.1. Степен квадратне матрице A се дефинише на следећи начин

- $A^0 = I$,
- $A^k = A^{k-1} \cdot A$, $k \in \mathbb{N}$.

Пример 3.3.6. Други степен (квадрат) матрице

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

је одређен са

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3\cdot 3 + 2\cdot 1 + 0\cdot 0 & 3\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 0\cdot(-2) & 3\cdot 0 + 2\cdot 2 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 3 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot(-2) & 1\cdot 0 + (-1)\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 3 + (-2)\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 2 + (-2)\cdot(-1) + 1\cdot(-2) & 0\cdot 0 + (-2)\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9+2+0 & 6-2+0 & 0+4+0 \\ 3-1+0 & 2+1-4 & 0-2+2 \\ 0-2+0 & 0+2-2 & 0-4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Трећи степен (куб) матрице A одређен је са

$$\begin{aligned} A^3 = A^2 \cdot A &= \begin{bmatrix} 11 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11\cdot 3 + 4\cdot 1 & 11\cdot 2 + 4\cdot(-1) + 4\cdot(-2) & 4\cdot 2 + 4\cdot 1 \\ 2\cdot 3 + (-1)\cdot 1 & 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2 \\ (-2)\cdot 3 & (-2)\cdot 2 + (-3)\cdot(-2) & (-3)\cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 33+4 & 22-4-8 & 8+4 \\ 6-1 & 4+1 & -2 \\ -6 & -4+6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & 10 & 12 \\ 5 & 5 & -2 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Задатак 3.3.1. Описати све ортогоналне матрице другог реда.

Задатак 3.3.2. Описати све идемпотентне матрице другог реда.

Рад: Било која квадратна матрица другог реда може се представити у облику

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Из услова

$$A^2 = I$$

добијамо

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

односно

$$\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Одакле закључујемо да мора бити

$$a^2+bc=1, \qquad bc+d^2=1, \tag{3.1}$$

као и

$$(a+d)b=0, \qquad (a+d)c=0. \tag{3.2}$$

Надаље треба размотрити случајеве при којима реални бројеви a, b, c и d задовољавају релације (3.1) и (3.2).

□

Задатак 3.3.3. Под којим условима је дијагонална матрица ортогонална?

Рад: Претпоставимо да дијагонална матрица

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

испуњава услов ортогоналности

$$DD^{\mathrm{T}} = D^{\mathrm{T}}D = I.$$

Како је дијагонална матрица симетрична, т.j. $D = D^{\mathrm{T}}$, то услов ортогоналности дијагоналне матрице D гласи

$$D^2 = I,$$

односно

$$D = \begin{bmatrix} d_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Према томе, елементи d_i, $i = 1, 2, \dots, n$ дијагоналне матрице D морају испуњавати услов

$$d_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Како су d_i, $i = 1, 2, \dots, n$ реални бројеви, можемо закључити да $d_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

□

3.4 Регуларна и сингуларна матрица

Код квадратних матрица можемо посматрати особине регуларности и сингуларности које дајемо у наставку.

Дефиниција 3.4.1 (Регуларна матрица). Квадратна матрица A је регуларна или инвертибилна ако постоји квадратна матрица B истог реда као и A таква да је

$$AB = BA = I,$$

где је I јединична матрица чији је ред исти као и ред матрица A и B. У том случају матрица B се назива инверзном матрицом матрице A и означава се A^{-1}.

Из дефиниције инверзне матрице следи да је $(A^{-1})^{-1} = A$.

Дефиниција 3.4.2 (Сингуларна матрица). Квадратна матрица A која није регуларна назива се сингуларна.

Пример 3.4.1. Одредити инверзну матрицу следеће пермутационе матрице

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рад: Квадрирањем матрице P добићемо да је

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I,$$

одакле можемо закључити да је $P^{-1} = P$.

□

Пример 3.4.2. Одредити инверзну матрицу следеће матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Рад: Матрица A се може представити у облику $A = 2P$, где је матрица P одређена са

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пошто је $P^2 = I$, односно $P^{-1} = P$, лако можемо одредити инверзну матрицу матрице $A = 2P$:

$$A^{-1} = (2P)^{-1} = \frac{1}{2}P^{-1} = \frac{1}{2}P,$$

чиме смо завршили задатак.

□

Теорема 3.4.1. За матрице $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ важи:

1) ако је матрица A инвертибилна онда је инвертибилна и матрица A^{T} и важи
$$(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}},$$

2) ако су матрице A и B инвертибилне тада је инвертибилна и матрица AB и важи
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

3) ако су матрице A, B и C инвертибилне тада је инвертибилна и матрица ABC и важи
$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

Доказ. 1) Очигледно.

2) Докажимо по дефиницији да је матрица $B^{-1}A^{-1}$ управо инверз матрице AB:
$$ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$
и
$$B^{-1}A^{-1}AB = BIB^{-1} = BB^{-1} = I.$$
Према томе, на основу дефиниције инверзне матрице имамо да је $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3) Аналогно делу под 2). □

3.5 Матрице у општем случају

У овом одељку ћемо са m и n означавати природне бројеве. Матрица формата $m \times n$ (m са n) или типа $m \times n$ над пољем реалних бројева $\mathbb{R}$ је правоугаони низ кога чини $m \cdot n$ реалних бројева шематски распоређених у m врста и n колона. Скуп свих матрица формата $m \times n$ чији су елементи реални бројеви се означава са $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Матрица формата $m \times n$ се може представити у облику
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$
при чему су реални бројеви a_{ij}, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, елементи матрице A. Први индекс означава број врсте, док други индекс означава број колоне, тако да се елемент a_{ij} јавља у пресеку i-те врсте и j-те колоне. Сходно томе врло често се користи и следећа нотација
$$A = [a_{ij}]_{m\times n},$$
која означава да је A матрица формата m са n, при чему је a_{ij} елемент матрице A који се налази у пресеку i-те врсте и j-те колоне, где је $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ и $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Транспонована матрица матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ је матрица $A^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ чије су врсте колоне матрице A, а колоне врсте матрице A.

Матрицу $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ множимо реалним бројем $\alpha \in \mathbb{R}$ у ознаци αA тако што сваки елемент матрице A помножимо бројем α

$$\alpha A = [\alpha \cdot a_{ij}]_{m\times n}.$$

Матрице $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ сабирамо тако што саберемо елементе ових матрица на одговарајућим позицијама. Према томе,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n},$$

што у развијеном облику гласи

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Наведимо сада особине сабирања матрица и множења матрица реалним бројем.

Став 3.5.1. За произвољне матрице $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и произвољне реалне бројеве $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ важи:

1) $A + B = B + A$;

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

3) $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ нула матрица $\mathbf{O}_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ испуњава

$$A + \mathbf{O}_{m\times n} = \mathbf{O}_{m\times n} + A = A;$$

4) $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}\ \exists(-A) \in \mathbb{R}^{m\times n} \therefore A + (-A) = \mathbf{O}_{m\times n}$;

5) $1 \cdot A = A$;

6) $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$;

7) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$;

8) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$.

Нула матрица формата $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ у ознаци $\mathbf{O}_{m\times n}$ има све елементе једнаке 0, т.ј.

$$\mathbf{O}_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Производ матрица $A = [a_{ik}]_{m\times l}$ и $B = [b_{kj}]_{l\times n}$ се одређује тако што врсте матрице A помножимо колонама матрице B путем следећег правила

$$AB = \Big[\sum_{p=1}^{l} a_{ip} \cdot b_{pj}\Big]_{m\times n}$$

Наведимо сада неке особине које повезују операције сабирања и множења матрица.

Став 3.5.2. Нека су $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$ и $B, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ дате матрице. Тада важи

$$A(B + C) = AB + AC. \quad \text{(Закон дистрибуције множења према сабирању)}$$

Доказ Става 3.5.2 директно следи из дефиниције множења и сабирања матрица.

Став 3.5.3. Нека су $A, B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ и $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ дате матрице. Тада важи

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Особина из Става 3.5.3 може се показати на основу дефиниције операција сабирања и множења матрица и одговарајућих особина реалних бројева, али је могуће и једноставније доказати овај став користећи појам линеарног пресликавања који се дефинише аналогно појму линеарне функције.

3.5.1 Квадратне матрице у општем случају

Квадратна матрица реда n је матрица формата $n \times n$ дата са

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Главну дијагоналу матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ одређују елементи a_{ii}, $i = 1, 2, \dots, n$.

Посматраћемо неке специјалне квадратне матрице.

Дефиниција 3.5.1. Матрица $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ облика

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

назива се дијагонална матрица реда n. Када желимо нагласити ред дијагоналне матрице можемо користити и ознаку D_n.

Дефиниција 3.5.2. Јединична матрица реда n је матрица $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ дефинисана са

$$I = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{n \text{ елемената}}.$$

За јединичну матрицу реда n можемо користити и ознаку I_n када желимо нагласити њен ред.

Квадратне матрице је могуће сабирати и множити, али на скупу квадратних матрица $\mathbb{R}^{n\times n}$ могуће је увести и једну додатну операцију која се назива степеновање матрица.

Најлакше је степеновати дијагоналне матрице.

Пример 3.5.1. Степен реда k дијагоналне матрице $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ је матрица D^k дата са

$$D^k = \begin{bmatrix} (d_{11})^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (d_{22})^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (d_{nn})^k \end{bmatrix}.$$

Специјално, ако је D јединична матрица, тада је и D^k такође јединична матрица.

3.6 Питања

1. Дефинисати транспоновану матрицу матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
2. Како је дефинисано множење матрице $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ реалним бројем $\alpha \in \mathbb{R}$?
3. Како је дефинисано сабирање матрица $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m\times n}$.
4. Да ли је могуће сабирати матрице које нису истог формата?
5. Како се дефинише производ матрица $A = [a_{ik}]_{m\times l}$ и $B = [b_{kj}]_{l\times n}$?
6. Који услов мора бити испуњен да бисмо могли да посматрамо производ AB матрица A и B?
7. Да ли је множење матрица комутативна операција?
8. Који елементи одређују главну дијагоналу квадратне матрице реда n дате са

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

9. Како се дефинише дијагонална матрица реда n?
10. Како се дефинише јединична матрица?
11. Када за реалну квадратну матрицу A кажемо да је симетрична?
12. Када за реалну квадратну матрицу A кажемо да је антисиметрична?
13. Када за реалну квадратну матрицу A кажемо да је ортогонална?
14. Када за реалну квадратну матрицу A кажемо да је нормална?
15. Када за реалну квадратну матрицу A кажемо да је идемпотентна?
16. Дефинисати регуларну и инверзну матрицу.
17. Уколико су матрице $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ инвертибилне, доказати је инвертибилна и матрица AB.

3.7 Одговори

Одговор 1: Транспонована матрица матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ је матрица $A^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ чије су врсте колоне матрице A, а колоне врсте матрице A.

Одговор 2: Множење матрице $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ реалним бројем $\alpha \in \mathbb{R}$ је дефинисано тако што сваки елемент матрице A помножимо реалним бројем α, т.ј. $\alpha A = [\alpha \cdot a_{ij}]_{m\times n}$.

Одговор 3: Сабирање матрица $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ је дефинисано са

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}.$$

Одговор 4: Не, могуће је сабирати једино матрице које су истог формата.

Одговор 5: Производ матрица $A = [a_{ik}]_{m\times l}$ и $B = [b_{kj}]_{l\times n}$ се одређује тако што врсте матрице A помножимо колонама матрице B путем следећег правила

$$A \cdot B = \Big[\sum_{p=1}^{l} a_{ip} \cdot b_{pj}\Big]_{m\times n}$$

Одговор 6: Производ AB матрица A и B је могуће одредити једино у случају када је број колона матрице A једнак броју врста матрице B.

Одговор 7: Множење матрица није комутативна операција. Контрапример: нека су A и B матрице дате са

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тада је

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 0 + 1\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 1 & 0\cdot 0 + 0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

док је

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Одговор 8: Главну дијагоналу матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ одређују елементи a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Одговор 9: Дијагонална матрица реда n је квадратна матрица формата $n \times n$ чији су сви елементи ван главне дијагонале једнаки нули.

Одговор 10: Дијагонална матрица чији су сви елементи главне дијагонале једнаки јединици назива се јединична матрица. Јединична матрица реда n је матрица $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ дефинисана са

$$I = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}}_{n \text{ елемената}}.$$

Одговор 11: Реална квадратна матрица A је симетрична ако је $A = A^{\mathrm{T}}$.

Одговор 12: Реална квадратна матрица A је антисиметрична ако је $A = -A^{\mathrm{T}}$.

Одговор 13: Реална квадратну матрица A је ортогонална ако је $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A = I$.

Одговор 14: Реална квадратна матрица A је нормална, ако је $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A$.

Одговор 15: Реална квадратна матрица A је идемпотентна ако је $A^2 = I$, где је I јединична матрица.

Одговор 16: Квадратна матрица A је регуларна или инвертибилна ако постоји квадратна матрица B, истог реда као и A, таква да је

$$AB = BA = I,$$

где је I јединична матрица чији је ред исти као и ред матрица A и B. У том случају матрица B се назива инверзном матрицом матрице A и означава се A^{-1}.

Одговор 17: Нека су $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ инвертибилне матрице. Докажимо да је у том случају инвертибилна и матрица AB. Докажимо да је матрица $B^{-1}A^{-1}$ управо инверз матрице AB:

$$ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

и

$$B^{-1}A^{-1}AB = BIB^{-1} = BB^{-1} = I.$$

Према томе, на основу дефиниције инверзне матрице имамо да је $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.