Поглавље 1

Системи линеарних једначина над пољем реалних бројева

1.1 Решивост и еквивалентност система линеарних једначина

Пример 1.1.1. Једна 5-торка реалних бројева је дата са

$$(2, 3, -1, 7, 3),$$

док је скуп свих 5-торки реалних бројева одређен са

$$\mathbb{R}^5 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}.$$

Скуп свих n-торки реалних бројева је одређен са

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Било која n-торка реалних бројева $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ назива се вектор. Векторе $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ из $\mathbb{R}^n$ сабирамо на следећи начин:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

док је множење вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ реалним бројем $\alpha \in \mathbb{R}$ дефинисано на следећи начин:

$$\alpha \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \ldots, \alpha \cdot x_n).$$

Размотримо сада случај када имамо једну линеарну једначину која има n непознатих величина, при чему је n произвољан природан број. Систем од једне линеарне једначине са n непознатих над пољем реалних бројева $\mathbb{R}$ је дат са

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b, \tag{1.1}$$

где су $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{R}$.

Решење система (1.1) је свака n-торка реалних бројева $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ која задовољава ту једначину, т.ј. за коју важи

$$a_1 x_1^0 + a_2 x_2^0 + \ldots + a_n x_n^0 = b.$$

Систем од m линеарних једначина са n непознатих над пољем реалних бројева $\mathbb{R}$, где су m и n произвољни природни бројеви јесте скуп од m линеарних једначина

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{$S_{m,n}$}$$

где су $a_{ij} \in \mathbb{R}$, за $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$, $b_i \in \mathbb{R}$, за $i = 1, 2, \ldots, n$, где се за $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ промењлива x_i јавља бар у једној од датих m линеарних једначина.

Систем линеарних једначина $(S_{m,n})$ је:

- квадратни ако је број једначина једнак броју непознатих т.ј. ако је $m = n$;
- хомоген ако је $b_i = 0$, за свако $i = 1, 2, \ldots, m$.
- нехомоген ако $\exists i \in \{1, 2, \ldots, m\} \therefore b_i \neq 0$.

Пример 1.1.2 (Примери система линеарних једначина). Систем линеарних једначина $(S_{m,n})$ за неке конкретне вредности природних бројева m и n је наведен у наставку:

- када је $m = 3$, $n = 2$, систем $(S_{3,2})$ гласи

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &= b_3; \end{aligned} \tag{$S_{3,2}$}$$

- када је $m = 2$, $n = 3$, систем $(S_{2,3})$ гласи

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2; \end{aligned} \tag{$S_{2,3}$}$$

- када је $m = 3$, $n = 4$, систем $(S_{3,4})$ гласи

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3. \end{aligned} \tag{$S_{3,4}$}$$

Систем линеарних једначина је:

- сагласан т.ј. решив уколико има бар једно решење;
- несагласан т.ј. нерешив уколико нема ниједно решење.

Решење система линеарних једначина $(S_{m,n})$ је било која n-торка реалних бројева $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ која испуњава свих m једначина система $(S_{m,n})$, т.ј. за коју важи

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \ldots + a_{1n}x_n^0 &= b_1, \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + \ldots + a_{2n}x_n^0 &= b_2, \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1^0 + a_{m2}x_2^0 + \ldots + a_{mn}x_n^0 &= b_m. \end{aligned} \tag{$S_{m,n}^0$}$$

Скуп решења система $(S_{m,n})$ је подскуп скупа $\mathbb{R}^n$ одређен са

$$\mathcal{R}(S_{m,n}) = \big\{(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \text{ је решење система } (S_{m,n})\big\}.$$

Скуп $\mathcal{R}(S_{m,n})$ нам може послужити за карактеризацију сагласности или несагласности система линеарних једначина. Систем линеарних једначина $(S_{m,n})$ је:

- сагласан ако и само ако је $\mathcal{R}(S_{m,n}) \neq \emptyset$;
- несагласан ако и само ако је $\mathcal{R}(S_{m,n}) = \emptyset$.

Системи линеарних једначина $(S_{m,n})$ и $(S'_{m,n})$ су еквивалентни ако је $\mathcal{R}(S_{m,n}) = \mathcal{R}(S'_{m,n})$.

Уместо ознаке $(S_{m,n})$ за систем линеарних једначина можемо користити и једноставнију ознаку (S).

Пример 1.1.3. Испитати сагласност следећег система линеарних једначина

$$(S)\begin{cases} x - y - z = 0 & (a) \\ x + y + z = 2 & (b) \\ -x + y + z = 1 & (c) \end{cases}$$

Рад: Додавањем прве једначине датог система трећој добијамо

$$(S')\begin{cases} x - y - z \ = 0 & (a') = (a) \\ x + y + z \ = 2 & (b') = (b) \\ \qquad\qquad 0 = 1 & (c') = (a) + (c) \end{cases}$$

Пошто смо систем (S) применом једне елементарне трансформације свели на еквивалентан систем (S'), при чему је систем (S') контрадикторан, закључујемо да је систем (S) несагласан.

$\square$

Пример 1.1.4. Испитати да ли су системи линеарних једначина (S) и (S') еквивалентни

$$(S)\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 & (a) \\ 2x - 4y + 6z = 2 & (b) \\ x - 5y \phantom{{}+6z} = -1 & (c) \end{cases}$$

и

$$(S')\begin{cases} 3x + \ \ 6y - 9z = 3 & (a') \\ \ \ x - \ \ 2y + 3z = 1 & (b') \\ -2x + 10y \qquad = 2 & (c') \end{cases}$$

Рад: Није тешко уочити да се свака од једначина система (S') добија множењем одговарајуће једначине система (S) неким реалним бројем. Прецизније,

$$\begin{aligned} (a') &= 3 \cdot (a), \\ (b') &= \frac{1}{2} \cdot (b), \\ (c') &= -2 \cdot (c). \end{aligned}$$

Дакле, систем линеарних једначина (S') се добија након примене елементарне трансформације множења сваке од једначина једначина система (S) одређеним бројем различитим од 0. Према томе, системи линеарних једначина (S) и (S') су еквивалентни.

□

Пример 1.1.5. Испитати да ли су системи линеарних једначина (S) и (S') еквивалентни

$$(S)\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 & (a) \\ 2x - 4y + 6z = 2 & (b) \\ x - 5y \qquad = -1 & (c) \end{cases}$$

и

$$(S')\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 3 & (a') \\ \qquad 6y + 6z = 4 & (b') \\ x + \ \ y + 6z = 3 & (c') \end{cases}$$

Рад: Систем (S') се добија када на систем (S) применимо елементарне трансформације

$$\begin{aligned} (a') &= (a) + (b), \\ (b') &= (b) - 2(c), \\ (c') &= (b) - (c), \end{aligned}$$

што доказује еквивалентност система (S) и (S').

□

1.2 Гаусова метода сукцесивне елиминације променљивих

Системи линеарних једначина се јављају у многим практичним проблемима. За решавање система линеарних једначина постоје алгоритми, међу којима је најзначајнији Гаусов алгоритам елиминације променљивих, који се назива још и Гаусова метода сукцесивне елиминације променљивих или једноставније само Гаусова метода.

Нису сви системи линеарних једначина решиви. Гаусовом методом можемо доћи до закључка да ли је неки систем линеарних једначина решив или не. Такође, уколико је систем линеарних једначина решив, тада Гаусовом методом можемо одредити решење, односно скуп решења датог система линеарних једначина. Уколико је систем линеарних једначина решив, онда он може имати:

а) јединствено решење;

б) бесконачно много решења.

Да ли постоји могућност да систем линеарних једначина има тачно два различита решења?

Не, таква могућност не постоји. Уколико је систем линеарних једначина решив, тада он може имати или јединствено решење или бесконачно много решења.

Гаусова метода сукцесивне елиминације променљивих се састоји у примени елементарних трансформација на систем линеарних једначина, са циљем да се систем сведе на степенасти облик, одакле можемо "очитати" решења полазног система линеарних једначина.

Елементарне трансформације су:

- замена места двеју једначина,
- множење једначине бројем $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- додавање једне једначине другој.

Последње две трансформације заједно имплицирају следећу трансформацију која се при решавању система линеарних једначина врло често користи:

- множење једне једначине бројем $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и додавање другој једначини.

Елементарним трансформацијама се дати систем своди на њему еквивалентан систем, што значи да се применом елементарних трансформација скуп решења датог система линеарних једначина не мења. Уколико је систем линеарних једначина решив, тада он може имати или тачно једно решење или бесконачно много решења.

Гаусова метода је универзална и може се применити на било који систем линеарних једначина. Пре свега, Гаусова метода нам даје одговор на питање да ли је систем линеарних једначина решив или не. У случају када је систем линеарних једначина решив, Гаусова метода нам омогућава да експлицитно опишемо сва решења датог система линеарних једначина, којих може бити и бесконачно много.

Приликом свођења система линеарних једначина на степенасти облик применом елементарних трансформација, може се догодити да број једначина трансформисаног система буде мањи у односу на полазни систем. Када систем линеарних једначина сведемо на степенасти облик, онда одређујемо решење тог система, који је због употребе елементарних трансформација еквивалентан полазном.

Пример 1.2.1. Решити систем линеарних једначина

$$(S)\begin{cases} y+2z=1 & (a)\\ x-2y+\ z=0 & (b)\\ 3y-4z=23 & (c)\end{cases}$$

Рад:

$$(S')\begin{cases} \quad\; y + 2z = 1 & (a')=(a)\\ x - 2y + z = 0 & (b')=(b)\\ \quad\; -10z = 20 & (c')=-3\cdot(a)+(c)\end{cases}$$

Из једначине (c') система (S') добијамо да је

$$z=-2, \tag{1.2}$$

што заменом у једначину (a') система (S') даје

$$y=1-2z=1-2\cdot(-2)=1+4=5. \tag{1.3}$$

Сада заменом вредности за y и z из једначина (1.3) и (1.2) у једначину (b') система (S') добијамо

$$x=2y-z=2\cdot 5-(-2)=10+2=12. \tag{1.4}$$

На основу (1.4), (1.3) и (1.2) закључујемо да је решење датог система линеарних једначина уређена тројка

$$(x,y,z)=\big(12,5,-2\big).$$

Провера:

$$\begin{aligned} 5+2\cdot(-2)=&1, \surd\\ 12-2\cdot 5+(-2)=&0, \surd\\ 3\cdot 5-4\cdot(-2)=&23. \surd\end{aligned}$$

□

Пример 1.2.2. Решити дати систем линеарних једначина

$$(S)\begin{cases} x_1+\ x_2 \qquad -x_4=-3 & (a)\\ x_1-2x_2+x_3 \qquad =5 & (b)\\ 2x_1+\ x_2+x_3 \qquad =3 & (c)\end{cases}$$

Рад: Множењем прве једначине система (S) са -1 и додавањем другој једначини и множењем прве једначине система (S) са -2 и додавањем трећој једначини добијамо систем

$$(S')\begin{cases} x_1+\ x_2 \qquad -\ x_4=-3 & (a')=(a)\\ \quad -3x_2+x_3+\ x_4=8 & (b')=-(a)+(b)\\ \quad -\ x_2+x_3+2x_4=9 & (c')=-2\cdot(a)+(c)\end{cases}$$

Заменом места друге и треће једначине у систему (S') добијамо систем

$$(S'')\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 \qquad - \ \ x_4 = -3 & (a'') = (a') \\ \quad - \ \ x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 & (b'') = (c') \\ \quad - 3x_2 + x_3 + \ \ x_4 = 8 & (c'') = (b') \\ \end{cases}$$

Множењем друге једначине система (S'') са -3 и додавањем трећој једначини добијамо

$$(S''')\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad - \ \ x_4 = -3 & (a''') = (a'') \\ \quad - x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 = 9 & (b''') = (b'') \\ \qquad\quad - 2x_3 - 5x_4 = -19 & (c''') = -3 \cdot (b'') + (c'') \\ \end{cases}$$

Пошто у систему (S''') имамо три једначине и четири непознате једна од променљивих је слободна, а преостале су главне променљиве. Нека је слободна променљива

$$x_4 = t, \tag{1.5}$$

што заменом у једначину (c''') система (S''') даје

$$-2x_3 = -19 + 5x_4 = -19 + 5t,$$

односно

$$x_3 = \frac{19}{2} - \frac{5}{2}t. \tag{1.6}$$

Из једначине (b''') система (S''') користећи вредности за x_3 и x_4 из (1.6) и (1.5) добијамо

$$\begin{aligned} x_2 =& x_3 + 2x_4 - 9 \\ =& \frac{19}{2} - \frac{5}{2}t + 2t - 9 \\ =& \frac{1}{2} - \frac{t}{2}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Сада из једначине (a''') система (S''') користећи вредности x_2 и x_4 респективно из (1.7) и (1.5) имамо да је

$$\begin{aligned} x_1 =& -3 - x_2 + x_4, \\ =& -3 - \frac{1}{2} + \frac{t}{2} + t \\ =& -\frac{7}{2} + \frac{3t}{2}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Коначно, из једначина (1.5)-(1.8) имамо да је скуп решења датог система линеарних једначина

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(S) =& \{ \left(-\frac{7}{2} + \frac{3t}{2}, \frac{1}{2} - \frac{t}{2}, \frac{19}{2} - \frac{5t}{2}, t \right) | t \in \mathbb{R} \} \\ =& \{ \left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, \frac{19}{2}, 0) + (\frac{3t}{2}, -\frac{t}{2}, -\frac{5t}{2}, t \right) | t \in \mathbb{R} \} \\ =& \{ \left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, \frac{19}{2}, 0) + t \cdot (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 1 \right) | t \in \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

Провера:

$$
\begin{aligned}
-\frac{7}{2}+\frac{3t}{2}+\frac{1}{2}-\frac{t}{2}-t &= -3, \\
-3 &= -3, \checkmark \\
-\frac{7}{2}+\frac{3t}{2}-1+t+\frac{19}{2}-\frac{5t}{2} &= 5, \checkmark \\
2\left(-\frac{7}{2}+\frac{3t}{2}\right)+\frac{1}{2}-\frac{t}{2}+\frac{19}{2}-\frac{5t}{2} &= -7+3t+\frac{1}{2}-\frac{t}{2}+\frac{19}{2}-\frac{5t}{2} = -7+10 = 3. \checkmark
\end{aligned}
$$

□

1.3 Неке примене система линеарних једначина

Размотримо један пример који ће нам показати како се један практичан задатак може решити употребом система линеарних једначина са две непознате.

Пример 1.3.1. Претпоставимо да на залихама имамо јабуке прве и друге класе. Цена јабука прве класе је $40din/kg$, док је цена јабука друге класе $25din/kg$. Купац жели јабуке и прве и друге класе, с тим што је спреман да добијену мешавину од $100kg$ јабука плати $30din/kg$. Колико килограма јабука прве класе, а колико килограма јабука друге класе је потребно узети за мешавину од $100kg$ јабука, коју ће нам купац платити $30din/kg$?

Рад: Означимо:

- са x број килограма јабука прве класе које треба испоручити купцу,
- са y број килограма јабука друге класе које треба испоручити купцу.

Цена јабука прве класе је

$$40din/kg,$$

према томе вредност количине од x килограма јабука прве класе износи

$$40x \text{ динара.}$$

Цена јабука друге класе је

$$25din/kg,$$

одакле закључујемо да вредност количине од y килограма јабука друге класе износи

$$25y \text{ динара.}$$

Цена по килограму коју је купац спреман да плати је

$$30din/kg,$$

па пошто смо за купца већ одвојили x и y килограма јабука, морамо ту количину и наплатити и то по цени коју је он спреман да плати. Дакле, купцу треба наплатити

$$30(x+y) \text{ динара.}$$

Описани поступак нас доводи до једначине

$$40x + 25y = 30(x + y).$$

Када пребацимо променљиве x и y на леву страну последње једначине добићемо једначину

$$10x - 5y = 0.$$

Дељењем последње једначине са -5 добићемо еквивалентну једначину

$$-2x + y = 0.$$

Пошто је укупна количина јабука коју је купац тражио $100kg$, а ми смо већ одвојили x килограма јабука прве класе и y килограма јабука друге класе, то је

$$x + y = 100.$$

Према томе, систем линеарних једначина који треба решити је

$$\begin{aligned} x + y =& 100, \\ -2x + y =& 0. \end{aligned}$$

Множењем прве једначине последњег система са 2 и додавањем другој једначини добићемо еквивалентан систем

$$\begin{aligned} x + y =& 100, \\ 3y =& 200. \end{aligned}$$

Сада је из друге једначине последњег система

$$y = \frac{200}{3},$$

што заменом у прву једначину даје

$$x = 100 - y = 100 - \frac{200}{3} = \frac{100}{3}.$$

Решење датог система линеарних једначина је уређен пар

$$(x, y) = \Big(\frac{100}{3}, \frac{200}{3}\Big).$$

Провера:

$$\begin{aligned} x + y =& 100, \checkmark \\ -2x + y =& 0. \checkmark \end{aligned}$$

□

Напомена 1.3.1. Поставља се питање да ли смо приликом решавања Примера 1.3.1 морали да извршимо проверу решења? Одговор је не, јер смо полазни систем применом елементарних трансформација свели на еквивалентан систем. Међутим, ипак се препоручује да се увек изврши провера решења система линеарних, уколико је то могуће.

Напоменимо и то да смо Пример 1.3.1 могли решити и на други начин: постављањем одговарајуће пропорције односно примењујући поступак који се користи у рачуну мешања.

У наставку ћемо систем линеарних једначина означавати са (S). Систем линеарних једначина који се добије након примене елементарних трансформација на систем линеарних једначина (S) означићемо са (S'), док ћемо након наредних примена елементарних трансформација користити ознаке (S''), (S'''), итд.

Пример 1.3.2. На залихама су нам на располагању јагоде које су према степену квалитета распоређене у три групе. Цена јагода најслабијег квалитета је $140din/kg$, средњег квалитета $155din/kg$ и најбољег квалитета $170din/kg$. Предузеће за прераду воћа жели да нам откупи $1t$ јагода по цени од $150din/kg$. На колико начина можемо изабрати $1t$ јагода са залиха тако да цена добијене мешавине јагода буде $150din/kg$?

Рад: Систем линеарних једначина који треба решити је

$$(S)\begin{cases} x+\quad y+\quad z=1000 & (a)\\ 140x+155y+170z=150\cdot 1000 & (b)\\ \end{cases}$$

Први начин. У нади да ћемо добити једноставнији систем са мањим вредностима коефицијената друге једначине искористимо прву једначину система (S) у другој, након чега добијамо

$$(S')\begin{cases} x+\quad y+\quad z=1000 & (a')\\ 140x+155y+170z=150\cdot(x+y+z) & (b')\\ \end{cases}$$

што након сређивања гласи

$$(S'')\begin{cases} x+\ y+\ z=1000 & (a'')\\ -10x+5y+20z=0 & (b'')\\ \end{cases}$$

Када другу једначину последњег система поделимо са 5 добићемо еквивалентан систем

$$(S''')\begin{cases} x+y+\ z=1000 & (a''')=(a'')\\ -2x+y+4z=0 & (b''')=\frac{(b'')}{5}\\ \end{cases}$$

Множењем, прве једначине последњег система са 2 и додавањем другој једначини, добићемо еквивалентан систем

$$(S^{IV})\begin{cases} x+\ y+\ z=1000 & (a^{IV})\\ \qquad 3y+6z=2000 & (b^{IV})=2\cdot(a^{IV})+(b''')\\ \end{cases}$$

Пошто последњи систем има две једначине, а укупно три променљиве, можемо једну од променљивих узети за слободну променљиву. Нека је слободна променљива

$$z=t,$$

тада дати систем постаје

$$\begin{aligned} x+y+t =& 1000, \\ 3y+6t =& 2000. \end{aligned}$$

Из друге једначине последњег система имамо да је

$$y = \frac{-6t+2000}{3} = -2t + \frac{2000}{3}.$$

што заменом у прву једначину истог система даје

$$\begin{aligned} x =& -y-t+1000 \\ =& 2t - \frac{2000}{3} - t + 1000 \\ =& t - \frac{2000}{3} + \frac{3000}{3} \\ =& t + \frac{1000}{3}. \end{aligned}$$

Скуп решења полазног система линеарних једначина је

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(S) =& \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y,z) \text{ је решење система } (S)\} \\ =& \{(t+\frac{1000}{3}, -2t+\frac{2000}{3}, t) | t \in \mathbb{R}\} \\ =& \{(\frac{1000}{3}, \frac{2000}{3}, 0) + t \cdot (1,-2,1) | t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Систем (S) има бесконачно много решења, према томе имамо бесконачно много начина да одаберемо јагоде тако да цена добијене мешавине буде $150 din/kg$.

Други начин. Поделимо другу једначину система (S) са 5 након чега добијамо еквивалентан систем

$$(S_1) \begin{cases} x + \quad y + \quad z = 1000 & (a) \\ 28x + 31y + 34z = 30000 & (b) \\ \end{cases}$$

Помножимо прву једначину система (S_1) са -28 и додајмо је другој једначини система (S_1), након чега добијамо еквивалентан систем

$$(S_1') \begin{cases} x + \ y + \ z = 1000 & (a) \\ \quad 3y + 6z = 2000 & (b) \\ \end{cases}$$

Сада можемо применити исти поступак као код првог начина.

$\square$

1.4 Питања

1. Формулисати систем од m линеарних једначина са n непознатих над пољем реалних бројева $\mathbb{R}$.

Одговор: Систем од m линеарних једначина са n непознатих над пољем реалних бројева $\mathbb{R}$, где су m и n произвољни природни бројеви јесте скуп од m линеарних једначина

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2,\\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad & \quad \vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m,
\end{aligned}
$$

где су $a_{ij} \in \mathbb{R}$, за $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$, $b_i \in \mathbb{R}$, за $i = 1, \ldots, n$, где се за $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ променљива x_i јавља бар у једној од датих m линеарних једначина.

2. Када за систем линеарних једначина кажемо да је квадратни?

Одговор: Систем линеарних једначина је квадратни ако је број једначина тог система једнак броју непознатих.

3. Када за систем линеарних једначина кажемо да је сагласан?

Одговор: Систем линеарних једначина је сагласан уколико има бар једно решење.

4. Када за систем линеарних једначина кажемо да је несагласан?

Одговор: Систем линеарних једначина је несагласан уколико нема ниједно решење.

5. Дефинисати скуп решења система од m линеарних једначина са n непознатих над пољем реалних бројева $\mathbb{R}$.

Одговор: Скуп решења система од m линеарних једначина са n непознатих над пољем реалних бројева $\mathbb{R}$ је подскуп скупа $\mathbb{R}^n$ одређен са

$$\mathcal{R}(S) = \big\{(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n \ : \ (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \text{ је решење система } (S_{m,n})\big\}.$$

6. Набројати елементарне трансформације система линеарних једначина.

Одговор: Елементарне трансформације система линеарних једначина су:

- замена места двеју једначина,
- множење једначине бројем $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- додавање једне једначине другој.

7. Како примена елементарних трансформација система линеарних једначина утиче на скуп решења тог система?

Одговор: Применом елементарних трансформација на систем линеарних једначина скуп решења датог система линеарних једначина се неће променити.

8. Описати Гаусову методу сукцесивне елиминације промењљивих?

Одговор: Гаусова метода сукцесивне елиминације промењљивих састоји се у свођењу система линеарних једначина на еквивалентан степенасти систем применом елементарних трансформација. Након тога, на основу броја једначина и броја променљивих одређујемо решење степенастог система. Уколико је број једначина степенастог система:

- већи од броја променљивих, онда је систем контрадикторан и нема ниједно решење;
- једнак броју променљивих, онда систем има јединствено решење;
- мањи од броја променљивих, онда систем има бесконачно много решења.