Поглавље 6

Решавање система линеарних једначина помоћу матрица

6.1 Представљање система линеарних једначина у матричном облику $Ax = b$

Пример 6.1.1 (Множење матрице и колоне). Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

и колона $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Одредити производ Ax.

Рад: Производ Ax можемо одредити на два начина. Први начин је да формирамо линеарну комбинацију колона матрице A:

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Други начин се састоји у томе што сваку врсту матрице A множимо матрицом X која се састоји од једне колоне на следећи начин

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Производ врсте $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$ и колоне $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ одређен са

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2$$

се назива унутрашњи производ.

□

Размотримо представљање система од две линеарне једначине са две непознате у матричном облику.

Пример 6.1.2. Представити систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 =& 0, \\ -x_1 + 2x_2 =& 3, \end{aligned} \tag{6.1}$$

у матричном облику.

Рад: Матрица коефицијената датог система линеарних једначина је

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{6.2}$$

Матрица која садржи промењљиве x_1 и x_2 датог система линеарних једначина се састоји из једне колоне дате са

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tag{6.3}$$

док се матрица слободних чланова датог система линеарних такође састоји из једне колоне дате са

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{6.4}$$

Применимо сада матрично множење из претходног примера на матрицу A коефицијената система (6.1) дату са (6.2) и матрицу X која се састоји од колоне коју чине промењљиве система (6.1) дате са (6.3). Добићемо

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Према томе, систем линеарних једначина (6.1) се може представити у еквивалентном матричном облику

$$Ax = b,$$

где су матрице A, x и b респективно дате са (6.2), (6.3) и (6.4).

□

Према томе, уколико матрични производ Ax изједначимо са матрицом b, која се састоји од једне колоне дате са (6.4) и која садржи слободне чланове система (6.1), добићемо

$$\begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

што је еквивалентно систему линерних једначина (6.1). Дакле, систем линеарних једначина (6.1) може се представити у облику

$$Ax = b. \tag{6.5}$$

Уколико је матрица A инвертибилна решење система линеарних једначина (6.5) је дато у облику

$$x = A^{-1}b.$$

6.2 Систем линеарних једначина као линеарна комбинација матричних колона

Систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0, \\ -x_1 + 2x_2 &= 3, \end{aligned}$$

може се представити у облику

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{6.6}$$

Израз

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

представља линеарну комбинацију колона $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Решити систем (6.6) другим речима значи одредити бројеве x_1 и x_2 тако да линеарна комбинација (6.7) буде једнака колони $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Размотримо сада један систем од три линеарне једначине са три непознате:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1, \\ -3x_2 + 4x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Дати систем линеарних једначина у матричном облику гласи

$$Ax = b,$$

где је

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Дати систем линеарних једначина може се представити у облику

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Према томе, решити систем значи одредити бројеве x_1, x_2 и x_3 тако да линеарна комбинација

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

буде једнака колони $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Решење датог система је очигледно $x_1 = x_2 = 0$ и $x_3 = 1$, јер је

$$0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Пример 6.2.1. Користећи појам линеарне комбинације матричних колона, одредити бар једно решење система линеарних једначина

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1, \\ -3x_2 + 4x_3 &= -3. \end{aligned}$$

Рад: Дати систем се може представити у облику

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Није тешко увидети да је решење датог система $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

□

6.3 Представљање система линеарних једначина у матричном облику у општем случају

Можемо ли решити систем $Ax = b$, за свако b? Када помножимо матрицу A вектором x добијамо линеарну комбинацију колона матрице A. Пошто израз "за свако b" означава читав тродимензионални простор, претходно питање би се могло формулисати у терминима линеарних комбинација, на следећи начин: да ли линеарне комбинације колона испуњавају читав тродимензионални простор?

Систем од m линеарних једначина са n непознатих може се представити у матричном облику на следећи начин

$$Ax = b, \tag{6.8}$$

где је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Помоћу матрица A и b формирамо нову матрицу B на следећи начин

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Матрица B је формата $m \times (n+1)$ и назива се проширена матрица система линеарних једначина (6.8).

Критеријум решивости система линеарних једначина је дат у Теореми 6.3.1.

Теорема 6.3.1. Систем линеарних једначина задат у матричном облику (6.8) је сагласан ако и само ако је $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$.

Теорема 6.3.2. Квадратни систем линеарних једначина

$$Ax = b, \tag{6.9}$$

где је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

има јединствено решење ако и само ако је његова матрица регуларна. У том случају јединствено решење је дато формулом

$$x = A^{-1}b, \tag{6.10}$$

или еквивалентно

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta} \right) \text{ (Крамерово правило)},$$

где је

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix},$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказ. Решење $x = A^{-1}b$ је јединствено због јединствености инверзне матрице и може се представити у облику

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A) \cdot b,$$

односно

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

$$= \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + \ldots + A_{n1} \cdot b_n \\ A_{12} \cdot b_1 + A_{22} \cdot b_2 + \ldots + A_{n2} \cdot b_n \\ \vdots \\ A_{1n} \cdot b_1 + A_{2n} \cdot b_2 + \ldots + A_{nn} \cdot b_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{bmatrix},$$

одакле добијамо да је решење дато са (6.10) еквивалентно решењу датом путем Крамеровог правила. □

Под тривијалним решењем хомогеног квадратног система линеарних једначина

$$Ax = \mathbf{0}, \tag{6.11}$$

где је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

подразумевамо решење $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Уколико је матрица A инвертибилна, онда хомогени квадратни систем линеарних једначина (6.11) има само тривијално решење:

$$x = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

односно

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Последица 6.3.1. Потребан и довољан услов да хомогени квадратни систем линеарних једначина (6.11) има јединствено решење је да је матрица A коефицијената датог система линеарних једначина регуларна.

Било које решење $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ квадратног система линеарних једначина које се разликује од n-торке $\underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ елемената}}$ назива се нетривијално решење. Један квадратни систем линеарних једначина може имати и бесконачно много нетривијалних решења.

Последица 6.3.2. Потребан и довољан услов да хомогени квадратни систем линеарних једначина (6.11) има нетривијална решења је да је матрица A коефицијената датог система линеарних једначина сингуларна.

Подсетимо се да је матрица A сингуларна уколико није инвертибилна, односно уколико је њена детерминанта једнака нули. Према томе, потребан и довољан услов да хомогени квадратни систем линеарних једначина (6.11) има нетривијална решења је дат са $\det(A) = 0$.

6.4 Питања

1. Систем од m линеарних једначина са n непознатих може се представити у матричном облику на следећи начин

$$Ax = b,$$

где је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Помоћу матрица A и B формирајмо нову матрицу B на следећи начин

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Матрица B је формата $m \times (n+1)$ и назива се проширена матрица датог система линеарних једначина. Формулисати критеријум решивости датог система линеарних једначина у терминима матрице A и проширене матрице B датог система линеарних једначина.

2. Када квадратни систем линарних једначина

$$Ax = b,$$

где је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

има јединствено решење?

3. У ком облику је дато јединствено решење (уколико постоји) квадратног система линеарних једначина

$$Ax = b,$$

где је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}?$$

4. Шта се подразумева под тривијалним решењем хомогеног квадратног система линеарних једначина

$$Ax = \mathbf{0},$$

где је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

5. Када хомогени квадратни систем линеарних једначина има нетривијална решења?

6.5 Одговори

Одговор 1: Систем линеарних једначина задат у матричном облику $Ax = b$, је сагласан ако и само ако је $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$.

Одговор 2: Квадратни систем линарних једначина има јединствено решење ако и само ако је његова матрица регуларна.

Одговор 3: Јединствено решење датог квадратног система линеарних једначина је дато формулом

$$x = A^{-1}b,$$

или еквивалентно

$$(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right),$$

где је

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix},$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Одговор 4: Под тривијалним решењем датог хомогеног квадратног система линеарних једначина подразумевамо решење

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0).$$

Одговор 5: Хомогени квадратни систем линеарних једначина има нетривијална решења ако и само ако је његова матрица сингуларна.