Први део

Поглавље 1

Системи линеарних једначина над пољем реалних бројева

У многим случајевима системи линеарних једначина се користе за моделирање вишедимензионалних проблема. На пример, у анализи и обради слика, физичким симулацијама, геометријским анализама и многим другим пољима.

1.1 Решивост и еквивалентност система линеарних једначина

Системи линеарних једначина су део линеарне алгебре и углавном су обрађени у уводним универзитетским математичким курсевима и уводним курсевима линеарне алгебре. Тако да се теорија система линеарних једначина и њихови примери могу наћи у следећим књигама [7, 8, 5, 1, 2, 3] и збиркама задатака [4, 6].

Скуп свих n-торки реалних бројева је одређен са

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Било која n-торка реалних бројева $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ назива се вектор. Сабирање вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ из $\mathbb{R}^n$ је дефинисано на следећи начин:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

док је множење вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ реалним бројем $\alpha \in \mathbb{R}$ дефинисано на следећи начин:

$$\alpha \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \ldots, \alpha \cdot x_n).$$

Пример 1.1.1. Једна 5-торка реалних бројева је дата са

$$(2, 3, -1, 7, 3),$$

док је скуп свих 5-торки реалних бројева одређен са

$$\mathbb{R}^5 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}.$$

Систем од једне линеарне једначине са n непознатих над пољем реалних бројева $\mathbb{R}$ је дат са

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{1.1}$$

где су $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ произвољни.

Решење система од једне линеарне једначине са n непознатих (1.1) је свака n-торка реалних бројева $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ која задовољава ту једначину, т.ј. за коју важи

$$a_1x_1^0 + a_2x_2^0 + \ldots + a_nx_n^0 = b.$$

У наставку користимо нотацију $(S_{m,n})$ [1] да означимо систем од m линеарних једначина са n непознатих над пољем реалних бројева $\mathbb{R}$, који гласи

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{$S_{m,n}$}$$

где су $a_{ij} \in \mathbb{R}$, за $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$, $b_i \in \mathbb{R}$, за $i = 1, 2, \ldots, n$, где се за $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ променљива x_i јавља бар у једној од датих m линеарних једначина, док су m и n произвољни природни бројеви.

Систем линеарних једначина $(S_{m,n})$ је [1]:

- квадратни систем линеарних једначина ако је број једначина једнак броју непознатих т.ј. ако је $m = n$;
- хомоген систем линеарних једначина ако је $b_i = 0$, за свако $i = 1, 2, \ldots, m$;
- нехомоген систем линеарних једначина ако $\exists i \in \{1, 2, \ldots, m\} \therefore b_i \neq 0$.

Пример 1.1.2 (Примери система линеарних једначина). За конкретне вредности природних бројева m и n систем $(S_{m,n})$ је приказан у наставку:

– када је $m = 3$, $n = 2$, систем $(S_{3,2})$ гласи

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &= b_3; \end{aligned} \tag{$S_{3,2}$}$$

– када је $m = 2$, $n = 3$, систем $(S_{2,3})$ гласи

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2; \end{aligned} \tag{$S_{2,3}$}$$

– када је $m = 3$, $n = 4$, систем $(S_{3,4})$ гласи

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3. \end{aligned} \tag{$S_{3,4}$}$$

За систем линеарних једначина кажемо да је:

- сагласан систем линеарних једначина ако је решив т.ј. уколико има бар једно решење;
- несагласан систем линеарних једначина ако је нерешив т.ј. уколико нема ниједно решење.

Решење система линеарних једначина $(S_{m,n})$ је било која n-торка реалних бројева $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ која испуњава свих m једначина система $(S_{m,n})$, т.ј. за коју важи

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \ldots + a_{1n}x_n^0 &= b_1; \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + \ldots + a_{2n}x_n^0 &= b_2; \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1^0 + a_{m2}x_2^0 + \ldots + a_{mn}x_n^0 &= b_m. \end{aligned} \tag{$S_{m,n}^0$}$$

Скуп решења система $(S_{m,n})$ је подскуп скупа $\mathbb{R}^n$, одређен са

$$\mathcal{R}(S_{m,n}) = \{(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \text{ је решење система } (S_{m,n})\}.$$

Скуп $\mathcal{R}(S_{m,n})$ нам може послужити за карактеризацију сагласности или несагласности система линеарних једначина. Систем линеарних једначина $(S_{m,n})$ је:

- сагласан ако и само ако је $\mathcal{R}(S_{m,n}) \neq \emptyset$;
- несагласан ако и само ако је $\mathcal{R}(S_{m,n}) = \emptyset$.

Системи $(S_{m,n})$ и $(S'_{m,n})$ су еквивалентни системи линеарних једначина ако је $\mathcal{R}(S_{m,n}) = \mathcal{R}(S'_{m,n})$.

Уместо ознаке $(S_{m,n})$ за систем линеарних једначина можемо користити и једноставнију ознаку (S).

Пример 1.1.3. Испитати сагласност следећег система линеарних једначина

$$(S)\begin{cases} x-y-z=0 & (a)\\ x+y+z=2 & (b)\\ -x+y+z=1 & (c)\end{cases}$$

Рад: Додавањем прве једначине система (S) трећој једначини система (S), добијамо еквивалентан систем

$$(S')\begin{cases} x-y-z \ =0 & (a')=(a)\\ x+y+z \ =2 & (b')=(b)\\ \qquad\quad 0=1 & (c')=(a)+(c)\end{cases}$$

Пошто смо систем (S) применом једне елементарне трансформације свели на еквивалентан систем (S'), при чему је систем (S') контрадикторан, а самим тим и несагласан, закључујемо да је и систем (S) несагласан.

□

Пример 1.1.4. Испитати да ли су системи линеарних једначина (S) и (S') еквивалентни

$$(S)\begin{cases} x+2y-3z=1 & (a)\\ 2x-4y+6z=2 & (b)\\ x-5y \qquad =-1 & (c)\end{cases}$$

и

$$(S')\begin{cases} 3x+\ 6y-9z=3 & (a')\\ x-\ 2y+3z=1 & (b')\\ -2x+10y \qquad =2 & (c')\end{cases}$$

Рад: Није тешко уочити да се свака од једначина система (S') добија множењем одговарајуће једначине система (S) неким реалним бројем. Прецизније,

$$(a')=3\cdot(a);$$
$$(b')=\frac{1}{2}\cdot(b);$$
$$(c')=-2\cdot(c).$$

Дакле, систем линеарних једначина (S') се добија након примене елементарне трансформације множења сваке од једначина једначина система (S) одређеним бројем различитим од 0. Према томе, системи линеарних једначина (S) и (S') су еквивалентни.

□

Пример 1.1.5. Испитати да ли су системи линеарних једначина (S) и (S') еквивалентни

$$(S)\begin{cases} x+2y-3z=1 & (a)\\ 2x-4y+6z=2 & (b)\\ x-5y \qquad =-1 & (c)\\ \end{cases}$$

и

$$(S')\begin{cases} 3x-2y+3z=3 & (a')\\ \qquad 6y+6z=4 & (b')\\ x+\ \ y+6z=3 & (c')\\ \end{cases}$$

Рад: Систем (S') се добија када на систем (S) применимо следеће елементарне трансформације

$$(a')=(a)+(b),$$
$$(b')=(b)-2(c),$$
$$(c')=(b)-(c),$$

што доказује еквивалентност система (S) и (S').

□

1.2 Гаусова метода сукцесивне елиминације променљивих

Системи линеарних једначина се јављају у многим практичним проблемима. За решавање система линеарних једначина постоје алгоритми, међу којима је најзначајнији Гаусов алгоритам елиминације променљивих, који се назива још и Гаусова метода сукцесивне елиминације променљивих или једноставније само Гаусова метода и која је детаљно обрађена у књизи [1].

Нису сви системи линеарних једначина решиви. Гаусовом методом можемо доћи до закључка да ли је неки систем линеарних једначина решив или не. Поред тога, уколико је систем линеарних једначина решив, онда Гаусовом методом можемо одредити решење, односно скуп решења датог система линеарних једначина. Уколико је систем линеарних једначина решив, онда он може имати:

а) јединствено решење;

б) бесконачно много решења.

Да ли постоји могућност да систем линеарних једначина има тачно два различита решења?

Не, таква могућност не постоји. Уколико је систем линеарних једначина решив, тада он може имати или јединствено решење или бесконачно много решења.

Гаусова метода сукцесивне елиминације промењљивих се састоји у примени елементарних трансформација на систем линеарних једначина, са циљем да се систем сведе на степенасти облик, одакле можемо “очитати” решења полазног система линеарних једначина.

Елементарне трансформације су:

(i) замена места двеју једначина;

(ii) множење једначине бројем $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(iii) додавање једне једначине другој.

Последње две трансформације заједно имплицирају следећу трансформацију, која се при решавању система линеарних једначина врло често користи $(ii) + (iii)$:

множење једне једначине бројем $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и додавање другој једначини.

Елементарним трансформацијама се дати систем своди на њему еквивалентан систем, што значи да се применом елементарних трансформација скуп решења датог система линеарних једначина не мења. Уколико је систем линеарних једначина решив, тада он може имати или тачно једно решење или бесконачно много решења.

Гаусова метода је универзална и може се применити на било који систем линеарних једначина. Пре свега, Гаусова метода нам даје одговор на питање да ли је систем линеарних једначина решив или не. У случају када је систем линеарних једначина решив, Гаусова метода нам омогућава да експлицитно опишемо сва решења датог система линеарних једначина, којих може бити и бесконачно много.

Приликом свођења система линеарних једначина на степенасти облик применом елементарних трансформација, може се догодити да број једначина трансформисаног система буде мањи у односу на полазни систем. Када систем линеарних једначина сведемо на степенасти облик, онда одређујемо решење тог система, који је због употребе елементарних трансформација еквивалентан полазном.

Пример 1.2.1. Решити систем линеарних једначина

$$(S) \begin{cases} \phantom{x - {}} y + 2z = 1 & (a) \\ x - 2y + z = 0 & (b) \\ \phantom{x - {}} 3y - 4z = 23 & (c) \end{cases}$$

Рад:

$$(S')\begin{cases} \quad\quad\ \ y + 2z = 1 & (a') = (a) \\ x - 2y + z = 0 & (b') = (b) \\ \quad\quad\quad - 10z = 20 & (c') = -3 \cdot (a) + (c) \end{cases}$$

Из једначине (c') система (S') добијамо да је

$$z = -2, \tag{1.2}$$

што заменом у једначину (a') система (S') даје

$$y = 1 - 2z = 1 - 2 \cdot (-2) = 1 + 4 = 5. \tag{1.3}$$

Сада заменом вредности за y и z из једначина (1.3) и (1.2) у једначину (b') система (S') добијамо

$$x = 2y - z = 2 \cdot 5 - (-2) = 10 + 2 = 12. \tag{1.4}$$

На основу (1.4), (1.3) и (1.2) закључујемо да је решење датог система линеарних једначина уређена тројка

$$(x, y, z) = (12, 5, -2).$$

Провера:

$$\begin{aligned} 5 + 2 \cdot (-2) &= 1; \surd \\ 12 - 2 \cdot 5 + (-2) &= 0; \surd \\ 3 \cdot 5 - 4 \cdot (-2) &= 23. \surd \end{aligned}$$

$\square$

Пример 1.2.2. Решити систем линеарних једначина

$$(S)\begin{cases} x_1 + \ x_2 \quad\quad\ - x_4 = -3 & (a) \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \quad\ = 5 & (b) \\ 2x_1 + \ x_2 + x_3 \quad\ = 3 & (c) \end{cases}$$

Рад: Множењем прве једначине система (S) са -1 и додавањем другој једначини система (S) и множењем прве једначине система (S) са -2 и додавањем трећој једначини система (S), добијамо еквивалентан систем

$$(S')\begin{cases} x_1 + \ x_2 \quad\quad - \ x_4 = -3 & (a') = (a) \\ \quad - 3x_2 + x_3 + \ x_4 = 8 & (b') = -(a) + (b) \\ \quad - \ x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 & (c') = -2 \cdot (a) + (c) \end{cases}$$

Заменом места друге и треће једначине у систему (S') добијамо систем

$$(S'')\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 \qquad\quad - \ \ x_4 = -3 & (a'') = (a') \\ \quad - \ \ x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 & (b'') = (c') \\ \quad - 3x_2 + x_3 + \ \ x_4 = 8 & (c'') = (b') \\ \end{cases}$$

Множењем друге једначине система (S'') са -3 и додавањем трећој једначини система (S''), добијамо

$$(S''')\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\quad - \ \ x_4 = -3 & (a''') = (a'') \\ \quad - x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 = 9 & (b''') = (b'') \\ \qquad\quad - 2x_3 - 5x_4 = -19 & (c''') = -3 \cdot (b'') + (c'') \\ \end{cases}$$

Пошто у систему (S''') имамо три једначине и четири непознате једну од непознатих изабраћемо за слободну променљиву, а преостале су главне променљиве. Нека је слободна променљива

$$x_4 = t, \tag{1.5}$$

што заменом у једначину (c''') система (S''') даје

$$-2x_3 = -19 + 5x_4 = -19 + 5t,$$

односно

$$x_3 = \frac{19}{2} - \frac{5}{2}t. \tag{1.6}$$

Из једначине (b''') система (S''') користећи вредности за x_3 и x_4 из (1.6) и (1.5), респективно, добијамо

$$\begin{aligned} x_2 =& x_3 + 2x_4 - 9 \\ =& \frac{19}{2} - \frac{5}{2}t + 2t - 9 \\ =& \frac{1}{2} - \frac{t}{2}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Сада из једначине (a''') система (S''') користећи вредности x_2 и x_4 из (1.7) и (1.5), респективно, имамо да је

$$\begin{aligned} x_1 =& -3 - x_2 + x_4, \\ =& -3 - \frac{1}{2} + \frac{t}{2} + t \\ =& -\frac{7}{2} + \frac{3t}{2}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Коначно, из једначина (1.5)-(1.8) имамо да је скуп решења датог система линеарних једначина

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}(S) =&\{\left(-\frac{7}{2}+\frac{3t}{2}, \frac{1}{2}-\frac{t}{2}, \frac{19}{2}-\frac{5t}{2}, t\right) |t \in \mathbb{R}\} \\
=&\{\left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, \frac{19}{2}, 0\right) + \left(\frac{3t}{2}, -\frac{t}{2}, -\frac{5t}{2}, t\right) |t \in \mathbb{R}\} \\
=&\{\left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, \frac{19}{2}, 0\right) + t \cdot \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 1\right) |t \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}
$$

Провера:

$$
\begin{aligned}
-\frac{7}{2}+\frac{3t}{2}+\frac{1}{2}-\frac{t}{2}-t =& -3, \\
-3 =& -3; \checkmark \\
-\frac{7}{2}+\frac{3t}{2}-1+t+\frac{19}{2}-\frac{5t}{2} =& 5; \checkmark \\
2\left(-\frac{7}{2}+\frac{3t}{2}\right)+\frac{1}{2}-\frac{t}{2}+\frac{19}{2}-\frac{5t}{2} =& -7+3t+\frac{1}{2}-\frac{t}{2}+\frac{19}{2}-\frac{5t}{2} = 3. \checkmark
\end{aligned}
$$

$\square$

1.3 Питања

1. Формулисати систем од m линеарних једначина са n непознатих над пољем реалних бројева $\mathbb{R}$ и описати његов скуп решења.
2. Када за систем линеарних једначина кажемо да је квадратни.
3. Када за систем линеарних једначина кажемо да је хомоген.
4. Када за систем линеарних једначина кажемо да је нехомоген.
5. Када за систем линеарних једначина кажемо да је сагласан.
6. Када за систем линеарних једначина кажемо да је несагласан.
7. Када за системе линеарних једначина кажемо да су еквивалентни.
8. Објаснити Гаусову методу сукцесивне елиминације промењивих.
9. Уколико је систем линеарних једначина решив, колико решења може имати.
10. Набројати елементарне трансформације и објаснити њихову улогу при решавању система линеарних једначина.

1.4 Додатак

У наставку наводимо неколико конкретних примера који се могу решити употребом система линеарних једначина. Инспирацију за такве примере смо пронашли решавајући примере из рачуна мешања, видети рецимо задатке на страницама 54 и 55 у [3].

1.4.1 Неке примене система линеарних једначина

Размотримо један пример који ће нам показати како се један практичан задатак може решити употребом система линеарних једначина са две непознате.

Пример 1.4.1. Претпоставимо да на залихама имамо јабуке прве и друге класе. Цена јабука прве класе је $40din/kg$, док је цена јабука друге класе $25din/kg$. Купац жели јабуке и прве и друге класе, с тим што је спреман да добијену мешавину од $100kg$ јабука плати $30din/kg$. Колико килограма јабука прве класе, а колико килограма јабука друге класе је потребно узети за мешавину од $100kg$ јабука, коју ће нам купац платити $30din/kg$?

Рад: Означимо:

- са x број килограма јабука прве класе које треба испоручити купцу;
- са y број килограма јабука друге класе које треба испоручити купцу.

Цена јабука прве класе је

$$40din/kg,$$

према томе вредност количине од x килограма јабука прве класе износи

$$40x \text{ динара.}$$

Цена јабука друге класе је

$$25din/kg,$$

одакле закључујемо да вредност количине од y килограма јабука друге класе износи

$$25y \text{ динара.}$$

Цена по килограму коју је купац спреман да плати је

$$30din/kg,$$

па пошто смо за купца већ одвојили x и y килограма јабука, ту количину наплаћујемо то по цени коју је купац спреман да плати. Дакле, купцу треба наплатити

$$30(x+y) \text{ динара.}$$

Описани поступак нас доводи до једначине

$$40x + 25y = 30(x + y).$$

Када пребацимо променљиве x и y на леву страну последње једначине, добићемо једначину

$$10x - 5y = 0.$$

Дељењем последње једначине са -5 добићемо еквивалентну једначину

$$-2x + y = 0.$$

Пошто је укупна количина јабука коју је купац тражио $100kg$, а ми смо већ одвојили x килограма јабука прве класе и y килограма јабука друге класе, то је

$$x + y = 100.$$

Према томе, систем линеарних једначина који треба решити је

$$\begin{aligned} x + y =& 100; \\ -2x + y =& 0. \end{aligned}$$

Множењем прве једначине последњег система са 2 и додавањем другој једначини добићемо еквивалентан систем

$$\begin{aligned} x + y =& 100; \\ 3y =& 200. \end{aligned}$$

Сада је из друге једначине последњег система

$$y = \frac{200}{3},$$

што заменом у прву једначину даје

$$x = 100 - y = 100 - \frac{200}{3} = \frac{100}{3}.$$

Решење датог система линеарних једначина је уређен пар

$$(x, y) = \left(\frac{100}{3}, \frac{200}{3}\right).$$

Провера:

$$\begin{aligned} x + y = \frac{100}{3} + \frac{200}{3} =& 100, \surd \\ -2x + y = (-2) \cdot \frac{100}{3} + \frac{200}{3} =& 0. \surd \end{aligned}$$

$\square$

Напомена 1.4.1. Напоменимо и то да смо Пример 1.4.1 могли решити и на други начин: постављањем одговарајуће пропорције, односно примењујући поступак који се користи у рачуну мешања.

У наставку ћемо систем линеарних једначина означавати са (S). Систем линеарних једначина који се добије након примене елементарних трансформација на систем линеарних једначина (S) означићемо са (S'), док ћемо након наредних примена елементарних трансформација користити ознаке (S''), (S'''), итд.

Пример 1.4.2. На залихама су нам на располагању јагоде које су према степену квалитета распоређене у три групе. Цена јагода најслабијег квалитета је $140din/kg$, средњег квалитета $155din/kg$ и најбољег квалитета $170din/kg$. Предузеће за прераду воћа жели да нам откупи $1t$ јагода по цени од $150din/kg$. На колико начина можемо изабрати $1t$ јагода са залиха тако да цена добијене мешавине јагода буде $150din/kg$?

Рад: Систем линеарних једначина који треба решити је

$$(S)\begin{cases} x + \quad y + \quad z = 1000 & (a) \\ 140x + 155y + 170z = 150 \cdot 1000 & (b) \\ \end{cases}$$

Први начин. У нади да ћемо добити једноставнији систем са мањим вредностима коефицијената друге једначине искористимо прву једначину система (S) у другој, након чега добијамо

$$(S')\begin{cases} x + \quad y + \quad z = 1000 & (a') \\ 140x + 155y + 170z = 150 \cdot (x + y + z) & (b') \\ \end{cases}$$

што након сређивања гласи

$$(S'')\begin{cases} x + \ y + \ z = 1000 & (a'') \\ -10x + 5y + 20z = 0 & (b'') \\ \end{cases}$$

Када другу једначину последњег система поделимо са 5 добићемо еквивалентан систем

$$(S''')\begin{cases} x + y + \ z = 1000 & (a''') = (a'') \\ -2x + y + 4z = 0 & (b''') = \frac{(b'')}{5} \\ \end{cases}$$

Множењем, прве једначине последњег система са 2 и додавањем другој једначини, добићемо еквивалентан систем

$$(S^{IV})\begin{cases} x + \ y + \ z = 1000 & (a^{IV}) \\ \qquad 3y + 6z = 2000 & (b^{IV}) = 2 \cdot (a^{IV}) + (b''') \\ \end{cases}$$

Пошто последњи систем има две једначине, а укупно три променљиве, можемо једну од променљивих узети за слободну променљиву. Нека је слободна променљива

$$z = t,$$

тада дати систем постаје

$$\begin{aligned} x + y + t =& 1000, \\ 3y + 6t =& 2000. \end{aligned}$$

Из друге једначине последњег система имамо да је

$$y = \frac{-6t + 2000}{3} = -2t + \frac{2000}{3}.$$

што заменом у прву једначину истог система даје

$$\begin{aligned} x =& -y - t + 1000 \\ =& 2t - \frac{2000}{3} - t + 1000 \\ =& t - \frac{2000}{3} + \frac{3000}{3} \\ =& t + \frac{1000}{3}. \end{aligned}$$

Скуп решења полазног система линеарних једначина је

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(S) =& \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, z) \text{ је решење система } (S)\} \\ =& \{\left(t + \frac{1000}{3}, -2t + \frac{2000}{3}, t\right) | t \in \mathbb{R}\} \\ =& \{\left(\frac{1000}{3}, \frac{2000}{3}, 0\right) + t \cdot (1, -2, 1) | t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Систем (S) има бесконачно много решења, према томе имамо бесконачно много начина да одаберемо јагоде тако да цена добијене мешавине буде $150 din/kg$.

Други начин. Поделимо другу једначину система (S) са 5 након чега добијамо еквивалентан систем

$$(S_1) \begin{cases} x + \quad y + \quad z = 1000 & (a) \\ 28x + 31y + 34z = 30000 & (b) \\ \end{cases}$$

Помножимо прву једначину система (S_1) са -28 и додајмо је другој једначини система (S_1), након чега добијамо еквивалентан систем

$$(S_1') \begin{cases} x + \quad y + \quad z = 1000 & (a) \\ \qquad 3y + 6z = 2000 & (b) \\ \end{cases}$$

Сада можемо применити исти поступак као код првог начина.

□

Библиографија

[1] Ljubiša Kočinac. *Linearna algebra i analitička geometrija.* Prosveta, Niš, 1997. Drugo ispravljeno i dopunjeno izdanje.

[2] Robert A. Liebler. *Basic Matrix Algebra with Algorithms and Applications.* CRC Press, Taylor & Francis Group, LLC, Boca Raton, FL 33487-2742, 2003. Fifth Edition.

[3] Snežana Matić-Kekić. *Privredna matematika za studente bioloških smerova.* Poljoprivredni fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2006. Drugo izdanje.

[4] Pavle Miličić and Momčilo Ušćumlić. *Zbirka zadataka iz više matematike I.* Naučna knjiga, Beograd, 1975. Peto izdanje.

[5] Gradimir V. Milovanović and Radosav Ž. Đorđević. *Linearna algebra.* Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet, Niš, 2004.

[6] Miloš Z. Petrović. *Zbirka zadataka iz matematike sa statistikom.* Poljoprivredni fakultet u Kruševcu, Univerzitet u Nišu, Kruševac, 2022. Prvo izdanje.

[7] Gilbert Strang. *Introduction to Linear Algebra.* Wellesley - Cambridge Press, Wellesley MA 02482 USA, 2016. Fifth Edition.

[8] Gilbert Strang. *Linear Algebra and Learning from Data, First Edition.* Wellesley - Cambridge Press, Wellesley MA 02482 USA, 2019. First Edition.

Индекс

Листа симбола

(S) систем линеарних једначина

(S_1') систем линеарних једначина

(S_1) систем линеарних једначина

$(S_{2,3})$ систем од 2 линеарне једначине са 3 непознате

$(S_{3,2})$ систем од 3 линеарне једначине са 2 непознате

$(S_{3,4})$ систем од 3 линеарне једначине са 4 непознате

$(S_{m,n})$ систем од m линеарних једначина са n непознатих

$\emptyset$ празан скуп

$\mathbb{R}^5$ скуп свих 5-торки реалних бројева

$\mathbb{R}^n$ скуп свих n-торки реалних бројева

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-торка реалних бројева

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ скуп свих ненула реалних бројева

$\mathcal{R}(S)$ скуп решења система линеарних једначина

$\mathcal{R}(S_{m,n})$ скуп решења система $(S_{m,n})$