Поглавље 5

Ранг матрице, израчунавање инверзне матрице

У овом поглављу учимо о рангу матрице, који представља број линеарно независних врста односно колона матрице. Видећемо како се ранг матрице може искористити као критеријум за одговор на питање да ли је матрица инвертибилна или не? Поред тога, навешћемо формулу за израчунавање инверзне матрице. У овом поглављу је делимично коришћена следећа литература [1, 2, 3, 4, 5, 6].

5.1 Линеарна зависност и независност врста и колона матрице

Због једноставности излагања размотрићемо најпре случај матрице $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ дате са

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Линеарна комбинација врста матрице $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ је

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

где су $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Дефиниција 5.1.1 (Линеарна зависност врста (колона) матрице). За врсте (колоне) било које матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ кажемо да су линеарно зависне врсте (колоне) матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ако се нека од врста (колона) матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ може изразити као линеарна комбинација преосталих врста (колона) матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Дефиниција 5.1.2 (Линеарна независност врста (колоне) матрице). За врсте (колоне) матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ кажемо да су линеарно независне врсте (колоне) матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ако нису линеарно зависне.

Уколико нам је тешко да на први поглед изразимо неку од врста матрице A као линеарну комбинацију преосталих врста, онда можемо користити критеријум који следи.

Врсте матрице $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ су линеарно независне ако из услова

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

закључимо да мора бити $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Врсте матрице $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ су линеарно зависне ако нису линеарно независне.

Пример 5.1.1. Испитати линеарну независност врста следећих матрица

$$\text{а)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{б)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{в)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рад: а) Претпоставимо да је

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

односно

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \gamma & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

т.ј.

$$\begin{bmatrix} \beta & \alpha+\gamma & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

одакле закључујемо да је $\beta = 0$, $\alpha + \gamma = 0$ и $\gamma = 0$, односно $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Према томе, врсте матрице A су линеарно независне.

б) Претпоставимо да постоје реални бројеви α, β и γ такви да је

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тада је

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

односно

$$\begin{bmatrix} \beta & \alpha & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

одакле следи $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Према томе, врсте матрице A су линеарно независне.

в) Пример ћемо решити на два начина.

<u>Први начин</u>. Приметимо да је

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

што нам говори да се трећа врста матрице A може изразити као линеарна комбинација прве и друге врсте. Према томе, врсте матрице A су линеарно независне.

Други начин. Нека је

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (*)$$

односно

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\gamma & 3\gamma & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

т.ј.

$$\begin{bmatrix} \beta + 2\gamma & \alpha + 3\gamma & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Из последње једначине закључујемо да је

$$\beta + 2\gamma = 0 \quad \text{и} \quad \alpha + 3\gamma = 0. \qquad (**)$$

Избором $\gamma = 1$ у једначини $(**)$, добијамо да је

$$\beta + 2 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha + 3 = 0,$$

односно $\beta = -2$ и $\alpha = -3$.

Приметимо да су $\alpha = -3$, $\beta = -2$ и $\gamma = 1$ ненула реални бројеви који задовољавају једначину $(*)$, одакле закључујемо да су врсте матрице A линеарно зависне.

□

Појам линеарне независности колона матрице $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ дефинише се аналогно појму линеарне независности врста матрице $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Колона $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$ матрице $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ је линеарна комбинација колона $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$, ако се може изразити помоћу њих на следећи начин

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix},$$

где су α и β реални бројеви такви да је $\alpha^2+\beta^2 > 0$. При чему, услов $\alpha^2+\beta^2 > 0$ означава да бројеви α и β нису истовремено једнаки нули, односно да је бар један од њих различит од нуле.

Линеарна комбинација колона матрице

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

је дата са

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix},$$

где су $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Колоне матрице $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ су линеарно независне уколико из услова

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

следи $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Колоне матрице $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ су линеарно зависне ако нису линеарно независне.

Пример 5.1.2. Испитати линеарну независност колона следећих матрица:

$$\text{а)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{б)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{в)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рад: а) Формирајмо линеарну комбинацију колона матрице A и изједначимо је са нула вектором колона

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Из последње једнакости имамо да је

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

односно

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

одакле следи $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Према томе, колоне матрице A су линеарно независне.

б) Нека је

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тада је

$$\begin{bmatrix}\alpha\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\beta\\\beta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\\0\\2\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

односно

$$\begin{bmatrix}\alpha+\gamma\\\beta\\\beta+2\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Према томе, закључујемо да мора бити

$$\begin{aligned}\alpha+\gamma=&0,\\\beta=&0,\\\beta+2\gamma=&0.\end{aligned}$$

Из друге једначине имамо да је $\beta=0$, што заменом у трећу једначину даје

$$0=\beta+2\gamma=0+2\gamma=2\gamma,$$

односно $\gamma=0$.

Сада је из прве једначине

$$0=\alpha+\gamma=\alpha+0=\alpha.$$

Према томе закључили смо да је

$$\alpha=\beta=\gamma=0,$$

односно колоне матрице A су линеарно независне.

в) Прва и трећа колона матрице A се поклапају, према томе, колоне матрице A су линеарно зависне.

□

Потребан услов да врсте или колоне квадратне матрице буду линеарно зависне јесте да је детерминанте те матрице једнака нули, о томе говори Теорема 5.1.1.

Теорема 5.1.1. Ако су врсте или колоне квадратне матрице A линеарно зависне, онда је $\det(A)=0$.

Пример 5.1.3. Израчунати детерминанту матрице

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&2&1\\3&6&9\end{bmatrix}.$$

Рад: Приметимо да се трећа врста матрице A добија множењем прве врсте матрице A бројем 3, отуда следи да су врсте матрице A линеарно зависне, па је према Теореми 5.1.1 детерминанта матрице A једнака нули.

$\square$

Линеарну независност врста матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ дефинишемо у наставку. Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

и нека су дате врсте матрице A са

$$\begin{aligned} A_{i_1} &= \begin{bmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 n} \end{bmatrix} \\ A_{i_2} &= \begin{bmatrix} a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \dots & a_{i_2 n} \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ A_{i_k} &= \begin{bmatrix} a_{i_k 1} & a_{i_k 2} & \dots & a_{i_k n} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где је $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ и $k \in \mathbb{N} \therefore k \leqslant m$.

Врсте A_{i_1}, A_{i_2}, $\dots$, A_{i_k} матрице A су линеарно независне ако из услова

$$\alpha_1 \cdot A_{i_1} + \alpha_2 \cdot A_{i_2} + \dots + \alpha_k \cdot A_{i_k} = \mathbf{0},$$

где су $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{0} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{n \text{ елемената}}$, следи $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.

На исти начин може се дефинисати појам линеарне независности колона матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ у општем случају.

5.2 Ранг матрице

Видели смо да врсте и колоне једне матрице могу бити линеарно зависне или независне. Уколико је матрица A формата $m \times n$, очигледно да она не може имати више од m линеарно независних врста и више од n линеарно независних колона, јер је то укупан број врста односно колона дате матрице. Према томе, број линеарно независних врста матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ је мањи или једнак од m, а број линеарно независних колона матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ је мањи или једнак од n. Уколико су врсте матрице A линеарно зависне број линеарно независних врста матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ је строго мањи од m. У том случају, нас интересује:

a) максималан број линеарно независних врста матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$;

б) максималан број линеарно независних колона матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Максималан од бројева одређених под а) и б) биће ранг матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, који је уведен Дефиницијом 5.2.1.

Дефиниција 5.2.1 (Ранг матрице). Ранг матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ је максималан број линеарно независних врста или колона матрице A. Ознака за ранг матрице A је $\mathrm{r}(A)$.

Ранг матрице можемо одредити након што сведемо матрицу на облик ешалона врста, а затим пребројимо ненула врсте тако формиране матрице.

Дефиниција 5.2.2 (Облик ешалона врста). За матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ кажемо да има облик ешалона врста или степенасти облик уколико је облика

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \star & * & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \star & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{n \text{ елемената}},$$

при чему $\star$ означава ненула реалан број који се назива пивот, док $*$ означава произвољан реалан број.

Дефиниција 5.2.3 (Елементарне трансфромације матрица). Елементарне трансформације матрица су:

1) транспозиција (замена места) двеју врста или колона;

2) множење врсте или колоне бројем $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

3) додавање једне врсте (или колоне) другој врсти (или колони).

Теорема 5.2.1. Свака ненула матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ може се применом елементарних трансформација свести на облик ешалона врста.

Дефиниција 5.2.4 (Ермитски облик). За матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, која је дата у облику ешалона врста кажемо да има Ермитски облик или редуковани облик ешалона врста , уколико је облика

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{n \text{ елемената}}.$$

Пример 5.2.1. Свака дијагонална матрица која на главној дијагонали има ненула реалне бројеве има облик ешалона врста.

Пример 5.2.2. Дијагонална матрица

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

има облик ешалона врста.

Пример 5.2.3. Свести следеће матрице на облик ешалона врста и одредити њихов ранг:

$$\text{а)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{б)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рад: а) Матрицу A сводимо на облик ешалона врста применом елементарних трансформација:

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \rho_1 + \rho_2 \\ 2\rho_1 + \rho_3 \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \frac{\rho_3}{3} \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \rho_2 \leftrightarrow \rho_3 \\ \\ \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -2\rho_2 + \rho_3 \end{array}. \end{aligned}$$

Ранг матрице A је једнак 3.

б) Најпре матрицу A сводимо на облик ешалона врста применом елементарних трансформација:

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -11 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -2\rho_1 + \rho_3 \\ -3\rho_1 + \rho_4 \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -11 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -\rho_2 + \rho_4 \end{array}. \end{aligned}$$

Ранг матрице A је једнак 4.

$\square$

Пример 5.2.4. Свести следеће матрице на Ермитски облик:

$$\text{а)}\quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{б)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix};$$

$$\text{в)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рад: а) Матрица D је дијагонална, тако да је можемо свести на Ермитски облик респективним множењем врста реципрочним вредностима елемената са главне дијагонале:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \frac{\rho_1}{2} \\ -\rho_2 \\ \frac{\rho_3}{3} \end{matrix}$$

б)

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

в)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Теорема 5.2.2 (Теорема о рангу матрице). Ранг матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ је једнак k ако и само ако постоји k линеарно независних врста (колона) матрице A, при чему је свака врста (колона) матрице A линеарна комбинација тих k линеарно независних.

Теорема 5.2.3 (Особине ранга матрице). Нека је $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, тада важи:

1) $\mathrm{r}(A) \leqslant \min\{m, n\}$;

2) $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})$;

3) ранг матрице A је инваријантан на примене елементарних трансформација.

Термин "инваријантан" из Теореме 5.2.3 под 3) значи да се ранг матрице не мења након примене елементарних трансформација.

5.3 Адјунгована матрица, формула за израчунавање инверзне матрице

Код квадратних матрица су појмови инвертибилности, детерминанте и ранга матрице уско повезани, при чему је та веза наведена у Теореми 5.3.1.

Теорема 5.3.1 (Потребни и довољни услови за инвертибилност матрице). За матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ следећи услови су еквивалентни:

(i) матрица A је инвертибилна;

(ii) $\det(A) \neq 0$;

(iii) $\mathrm{r}(A) = n$.

У наставку ћемо дати формулу за експлицитно одређивање инверзне матрице $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, дате инвертибилне матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Биће нам неопходан појам адјунговане матрице матрице A, која се означава са $\mathrm{adj}(A)$. Адјунгована матрица матрице

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

је одређена са

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\cdot d & (-1)^{1+2}\cdot c \\ (-1)^{2+1}\cdot b & (-1)^{2+2}\cdot a \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Инверзна матрица матрице A формата 2×2 је одређена на следећи начин

$$A^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)}\cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Пример 5.3.1. Испитати да ли су следеће матрице инвертибилне и уколико јесу одредити њихове инверзне матрице:

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$; в) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$; г) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$.

Рад: а) Како је $\det(A) = 1\cdot 3 - 1\cdot 4 = -1 \neq 0$, матрица A је инвертибилна. На основу формуле за израчунавање инверзне матрице, имамо да је

$$A^{-1} = \frac{1}{(2\cdot 3 - 1\cdot 4)}\cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

б) Како је $\det(A) = 1\cdot 3 - 1\cdot(-2) = 5 \neq 0$, матрица A је инвертибилна. На основу формуле за израчунавање инверзне матрице, имамо да је

$$A^{-1} = \frac{1}{(1\cdot 3 - 1\cdot(-2))}\cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

в) Како је

$$\det(A) = -2\cdot 3 - 2\cdot(-4) = -6 + 8 = 2 \neq 0,$$

закључујемо да матрица A јесте инвертибилна.

На основу формуле за инверзну матрицу, имамо да је

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

г) Како је

$$\det(A) = -2 \cdot 4 - 2 \cdot (-4) = -8 + 8 = 0,$$

закључујемо да матрица A није инвертибилна.

$\square$

Било која квадратна матрица A трећег реда може се представити у облику

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Одредимо миноре M_{ij} и алгебарске комплементе A_{ij}, матрице A, за $i, j \in \{1, 2, 3\}$:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \quad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -M_{12} = -a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31},$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = M_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31},$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -M_{21} = -a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32},$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = M_{22} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31},$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -M_{23} = -a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31},$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = M_{31} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22},$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -M_{32} = -a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21},$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = M_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Адјунгована матрица матрице A је одређена на следећи начин

$$\begin{aligned}\operatorname{adj}(A) &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32} \\ M_{13} & -M_{23} & M_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & -a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ -a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & -a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & -a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

где се знак испред одговарајућег минора може одредити помоћу правила

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Детерминанта матрице A се може одредити путем Сарусовог правила, на следећи начин

$$\begin{aligned}\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\ =& a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.\end{aligned}$$

Формула за инверзну матрицу матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ гласи

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A).$$

Пример 5.3.2. Одредити инверзну матрицу матрице

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Рад: Детерминанта матрице A износи

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (5 - 6) = 1.$$

Адјунгована матрица матрице A гласи

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -8 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

$\square$

У општем случају, адјунгована матрица матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ је матрица $\operatorname{adj}(A) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, одређена на следећи начин

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где је A_{ij} алгебарски комплемент елемента a_{ij}, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, матрице A. У том случају инверзна матрица матрице

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

у развијеном облику гласи

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где је A_{ij} алгебарски комплемент елемента a_{ij}, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, матрице A.

Уколико дату матрицу помножимо инвертибилном матрицом са леве или десне стране, њен ранг се неће променити, о томе говори Теорема 5.3.2.

Теорема 5.3.2 (Теорема о инваријантности ранга при множењу матрице инвертибилном матрицом). Нека је $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ произвољна матрица, а $B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ инвертибилне матрице, тада важи:

1) $\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}(A)$;

2) $\mathrm{r}(CA) = \mathrm{r}(A)$.

5.4 Питања

1. Како гласи линеарна комбинација врста матрице $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$?

2. Како се дефинише линеарна независност врста матрице $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$

3. Како се дефинише линеарна зависност врста матрице $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$?

4. Како гласи линеарна комбинација колона матрице $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$?

5. Како се дефинише линеарна независност колона матрице $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$?

6. Како се дефинише линеарна зависност колона матрице $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$?

7. Како се дефинише линеарна независност врста матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$?

8. Како се дефинише ранг матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$?

9. Како изгледа облик ешалона врста матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$?

10. Набројати елементарне трансформације матрица.

10. Како изгледа Ермитски облик матрице?

11. Како гласи теорема о рангу матрице?

12. Навести особине ранга матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

13. Навести потребне и довољне услове за инвертибилност матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

14. Како се дефинише адјунгована матрица матрице $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$?

13. Како се дефинише инверзна матрица матрице $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$?

13. Како се дефинише адјунгована матрица матрице $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$?

14. Како се дефинише инверзна матрица матрице $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$?

15. Како се дефинише адјунгована матрица матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

16. Како се дефинише инверзна матрица матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

17. Како гласи теорема о инваријантности ранга при множењу матрице инвертибилном матрицом?

5.5 Додатак

5.5.1 Сличне матрице

Приликом свођења матрица на облик ешалона врста користили смо ознаку "$\sim$" која се користи за сличне матрице. Ми смо заправо приликом спровођења поступка свођења матрице на облик ешалона врста добили низ сличних матрица. Појам сличности матрица у општем случају је наведен у Дефиницији 5.5.1.

Дефиниција 5.5.1 (Сличност правоугаоних матрица). Нека су $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ произвољне матрице. Каже се да је матрица A слична са матрицом B и пише се $A \sim B$, ако постоје регуларне матрице $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ такве да је

$$B = M^{-1}AN.$$

Кад год на неку матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ применимо неку елементарну трансформацију, то можемо изразити као:

а) множење матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ квадратном матрицом реда m са леве стране, када се ради о елементарној трансформацији над колонама матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$;

б) множење матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ квадратном матрицом реда n са десне стране, када се ради о елементарној трансформацији над врстама матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Појам сличности матрица је уско повезан са појмом ранга матрица и њиховим Ермитским облицима, што је приказано у Теореми 5.5.1.

Теорема 5.5.1. За матрице $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ следећи услови су еквивалентни:

(i) $A \sim B$;

(ii) $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$;

(iii) Ермитски облици матрица A и B су исти.

Дефиниција 5.5.2 (Сличност квадратних матрица). За квадратну матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ кажемо да је слична са квадратном матрицом $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ако постоји регуларна матрица $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ за коју је

$$B = N^{-1}AN.$$

Теорема 5.5.2 (Теорема о једнакости детерминанти сличних матрица). Нека су $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ сличне матрице, тада је

$$\det(A) = \det(B).$$

Библиографија

[1] Tom S. Blyth and Edmund F. Robertson. *Basic Linear Algebra.* Springer, Great Britain, 2002. Second Edition.

[2] Ljubiša Kočinac. *Linearna algebra i analitička geometrija.* Prosveta, Niš, 1997. Drugo ispravljeno i dopunjeno izdanje.

[3] Robert A. Liebler. *Basic Matrix Algebra with Algorithms and Applications.* CRC Press, Taylor & Francis Group, LLC, Boca Raton, FL 33487-2742, 2003. Fifth Edition.

[4] Gradimir V. Milovanović and Radosav Ž. Đorđević. *Linearna algebra.* Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet, Niš, 2004.

[5] Gilbert Strang. *Introduction to Linear Algebra.* Wellesley - Cambridge Press, Wellesley MA 02482 USA, 2016. Fifth Edition.

[6] Gilbert Strang. *Linear Algebra and Learning from Data, First Edition.* Wellesley - Cambridge Press, Wellesley MA 02482 USA, 2019. First Edition.

Индекс

Листа симбола

$\mathrm{adj}(A)$	адјунгована матрица матрице A
$\mathbb{R}^{3\times 3}$	скуп матрица формата 3×3
$\min\{m, n\}$	минимални елемент скупа $\{m, n\}$
$\mathrm{r}(A)$	ранг матрице A
$\sim$	релација сличности матрица
A_{i_k}	i_k-та врста матрице A
0	нула врста