Поглавље 6

Решавање система линеарних једначина помоћу матрица

6.1 Представљање система линеарних једначина у матричном облику $Ax = b$

Пример 6.1.1 (Множење матрице и колоне). Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

и колона $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Одредити производ Ax.

Рад: Производ Ax можемо одредити на два начина. Први начин је да формирамо линеарну комбинацију колона матрице A:

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Други начин се састоји у томе што сваку врсту матрице A множимо матрицом X која се састоји од једне колоне на следећи начин

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Производ врсте $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$ и колоне $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ одређен са

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2$$

се назива унутрашњи производ. Код матричног множења Ax врло често изостављамо ознаку "$\cdot$", т.ј. пишемо једноставније Ax.

□

Размотримо представљање система од две линеарне једначине са две непознате у матричном облику.

Пример 6.1.2. Представити систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 =& 0, \\ -x_1 + 2x_2 =& 3, \end{aligned} \tag{6.1}$$

у матричном облику.

Рад: Матрица коефицијената датог система линеарних једначина је

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{6.2}$$

Матрица која садржи променљиве x_1 и x_2 датог система линеарних једначина се састоји из једне колоне дате са

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tag{6.3}$$

док се матрица слободних чланова датог система линеарних такође састоји из једне колоне дате са

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{6.4}$$

Применимо сада матрично множење из претходног примера на матрицу A коефицијената система (6.1) дату са (6.2) и матрицу X која се састоји од колоне коју чине променљиве система (6.1) дате са (6.3). Добићемо

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Према томе, систем линеарних једначина (6.1) се може представити у еквивалентном матричном облику

$$Ax = b,$$

где су матрице A, x и b респективно дате са (6.2), (6.3) и (6.4).

□

Према томе, уколико матрични производ Ax изједначимо са матрицом b, која се састоји од једне колоне дате са (6.4) и која садржи слободне чланове система (6.1), добићемо

$$\begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

што је еквивалентно систему линерних једначина (6.1). Дакле, систем линеарних једначина (6.1) може се представити у облику

$$Ax = b. \tag{6.5}$$

Уколико је матрица A инвертибилна решење система линеарних једначина (6.5) је дато у облику

$$x = A^{-1}b.$$

6.2 Систем линеарних једначина као линеарна комбинација матричних колона

Систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 =& 0, \\ -x_1 + 2x_2 =& 3, \end{aligned}$$

може се представити у облику

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{6.6}$$

Израз

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

представља линеарну комбинацију колона $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Решити систем (6.6) другим речима значи одредити бројеве x_1 и x_2 тако да линеарна комбинација (6.7) буде једнака колони $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Размотримо сада један систем од три линеарне једначине са три непознате:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 =& 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 =& -1, \\ -3x_2 + 4x_3 =& 4. \end{aligned}$$

Дати систем линеарних једначина у матричном облику гласи

$$Ax = b,$$

где је

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Дати систем линеарних једначина може се представити у облику

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Према томе, решити систем значи одредити бројеве x_1, x_2 и x_3 тако да линеарна комбинација

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

буде једнака колони $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Решење датог система је очигледно $x_1 = x_2 = 0$ и $x_3 = 1$, јер је

$$0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Пример 6.2.1. Користећи појам линеарне комбинације матричних колона, одредити бар једно решење система линеарних једначина

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 =& 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 =& 1, \\ -3x_2 + 4x_3 =& -3. \end{aligned}$$

Рад: Дати систем се може представити у облику

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Није тешко увидети да је решење датог система $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

□

6.3 Представљање система линеарних једначина у матричном облику у општем случају

Можемо ли решити систем $Ax = b$, за свако b? Када помножимо матрицу A вектором x добијамо линеарну комбинацију колона матрице A. Пошто израз "за свако b" означава читав тродимензионални простор, претходно питање би се могло формулисати у терминима линеарних комбинација, на следећи начин: да ли линеарне комбинације колона испуњавају читав тродимензионални простор?

Систем од m линеарних једначина са n непознатих може се представити у матричном облику на следећи начин

$$Ax = b, \tag{6.8}$$

где је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Помоћу матрица A и b формирамо нову матрицу B на следећи начин

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Матрица B је формата $m \times (n+1)$ и назива се проширена матрица система линеарних једначина (6.8).

Критеријум решивости система линеарних једначина је дат у Теореми 6.3.1.

Теорема 6.3.1. Систем линеарних једначина задат у матричном облику (6.8) је сагласан ако и само ако је $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$.

Теорема 6.3.2. Квадратни систем линеарних једначина

$$Ax = b, \tag{6.9}$$

где је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

има јединствено решење ако и само ако је његова матрица регуларна. У том случају јединствено решење је дато формулом

$$x = A^{-1}b, \tag{6.10}$$

или еквивалентно

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta} \right) \text{ (Крамерово правило)},$$

где је

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix},$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказ. Решење $x = A^{-1}b$ је јединствено због јединствености инверзне матрице и може се представити у облику

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A) \cdot b,$$

односно

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

$$= \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + \ldots + A_{n1} \cdot b_n \\ A_{12} \cdot b_1 + A_{22} \cdot b_2 + \ldots + A_{n2} \cdot b_n \\ \vdots \\ A_{1n} \cdot b_1 + A_{2n} \cdot b_2 + \ldots + A_{nn} \cdot b_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{bmatrix},$$

одакле добијамо да је решење дато са (6.10) еквивалентно решењу датом путем Крамеровог правила. □

Под тривијалним решењем хомогеног квадратног система линеарних једначина

$$Ax = \mathbf{0}, \tag{6.11}$$

где је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

подразумевамо решење

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ елемената}}.$$

Уколико је матрица A инвертибилна, онда хомоген квадратни систем линеарних једначина (6.11) има само тривијално решење $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ елемената}}$. Последње следи из чињенице: уколико је матрица A инвертибилна, онда је решење система линеарних једначина (6.11) дато у облику

$$x = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

односно

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Последица 6.3.1. Потребан и довољан услов да хомогени квадратни систем линеарних једначина (6.11) има јединствено решење је да је матрица A коефицијената датог система линеарних једначина регуларна.

Било које решење $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ квадратног система линеарних једначина које се разликује од n-торке $\underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ елемената}}$ назива се нетривијално решење. Један квадратни систем линеарних једначина може имати и бесконачно много нетривијалних решења.

Последица 6.3.2. Потребан и довољан услов да хомогени квадратни систем линеарних једначина (6.11) има нетривијална решења је да је матрица A коефицијената датог система линеарних једначина сингуларна.

Подсетимо се да је матрица A сингуларна уколико није инвертибилна, односно уколико је њена детерминанта једнака нули. Према томе, потребан и довољан услов да хомоген квадратни систем линеарних једначина (6.11) има нетривијална решења је дат са $\det(A) = 0$.

6.4 Питања

1. Систем од m линеарних једначина са n непознатих може се представити у матричном облику на следећи начин

$$Ax = b,$$

где је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Помоћу матрица A и B формирајмо нову матрицу B на следећи начин

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Матрица B је формата $m \times (n+1)$ и назива се проширена матрица датог система линеарних једначина. Формулисати критеријум решивости датог система линеарних једначина у терминима матрице A и проширене матрице B датог система линеарних једначина.

Одговор 1: Систем линеарних једначина задат у матричном облику $Ax = b$, је сагласан ако и само ако је $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$.

2. Када квадратни систем линарних једначина

$$Ax = b,$$

где је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

има јединствено решење?

Одговор 2: Квадратни систем линарних једначина има јединствено решење ако и само ако је његова матрица регуларна.

3. У ком облику је дато јединствено решење (уколико постоји) квадратног система линеарних једначина

$$Ax = b,$$

где је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}?$$

Одговор 3: Јединствено решење датог квадратног система линеарних једначина је дато формулом

$$x = A^{-1}b,$$

или еквивалентно

$$(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right),$$

где је

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix},$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4. Шта се подразумева под тривијалним решењем хомогеног квадратног система линеарних једначина

$$Ax = \mathbf{0},$$

где је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

Одговор 4: Под тривијалним решењем датог хомогеног квадратног система линеарних једначина подразумевамо решење

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0).$$

5. Када хомогени квадратни систем линеарних једначина има нетривијална решења?

Одговор 5: Хомогени квадратни систем линеарних једначина има нетривијална решења ако и само ако је његова матрица сингуларна.

6.5 Одговори

Одговор 1: Систем линеарних једначина задат у матричном облику $Ax = b$, је сагласан ако и само ако је $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$.

Одговор 2: Квадратни систем линарних једначина има јединствено решење ако и само ако је његова матрица регуларна.

Одговор 3: Јединствено решење датог квадратног система линеарних једначина је дато формулом

$$x = A^{-1}b,$$

или еквивалентно

$$(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right),$$

где је

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix},$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Одговор 4: Под тривијалним решењем датог хомогеног квадратног система линеарних једначина подразумевамо решење

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0).$$

Одговор 5: Хомогени квадратни систем линеарних једначина има нетривијална решења ако и само ако је његова матрица сингуларна.

Поглавље 6

Задаци из решавања система линеарних једначина помоћу матрица

Задатак 6.0.1. За сваки од следећих система одредити матрицу и проширену матрицу одговарајућег система линеарних једначина:

$$
\begin{aligned}
\text{а)}\quad 25x + 27y + 76z &= 43,\\
79z + 51y + 36x &= 20,\\
13y - 76 + 15x &= 9z,\\
3x + 5y - 5z &= -6;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{б)}\quad 53x - 48z + 64y &= 44,\\
80x - 99 + 13y &= 23z,\\
50 - 31y + 31z &= 10x,\\
95x + 65y - 37 + 23z &= 0.
\end{aligned}
$$

Рад: а) Најпре ћемо дати систем трансформисати у систем линеарних једначина

$$
\begin{aligned}
25x + 27y + 76z &= 43,\\
36x + 51y + 79z &= 20,\\
15x + 13y - 9z &= 76,\\
3x + 5y - 5z &= -6.
\end{aligned}
$$

Матрица датог система линеарних једначина је

$$
A = \begin{bmatrix} 25 & 27 & 76 \\ 36 & 51 & 79 \\ 15 & 13 & -9 \\ 3 & 5 & -5 \end{bmatrix},
$$

док је проширена матрица датог система линеарних једначина матрица

$$B = \begin{bmatrix} 25 & 27 & 76 & | & 43 \\ 36 & 51 & 79 & | & 20 \\ 15 & 13 & -9 & | & 76 \\ 3 & 5 & -5 & | & 6 \end{bmatrix}.$$

б) Прво ћемо формирати одговарајући систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} 53x + 64y - 48z =& 44, \\ 80x + 13y - 23z =& 99, \\ -10x - 31y + 31z =& -50, \\ 95x + 65y + 23z =& 37. \end{aligned}$$

Матрица и проширена матрица датог система линеарних једначина су респективно дате са

$$A = \begin{bmatrix} 53 & 64 & -48 \\ 80 & 13 & -23 \\ -10 & -31 & 31 \\ 95 & 65 & 23 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 53 & 64 & -48 & | & 44 \\ 80 & 13 & -23 & | & 99 \\ -10 & -31 & 31 & | & -50 \\ 95 & 65 & 23 & | & 37 \end{bmatrix}.$$

□

Задатак 6.0.2. Испитати сагласност следећег система линеарних једначина и уколико је сагласан решити дати систем

$$\begin{aligned} 2x - 4y + z &= 1, \\ x - 5y + 3z &= 2, \\ x - y + z &= -1, \\ 3x + 5y - 5z &= -6. \end{aligned}$$

Рад: Матрица и проширена матрица датог система линеарних једначина су матрице A и B респективно дате са

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -5 \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & | & 1 \\ 1 & -5 & 3 & | & 2 \\ 1 & -1 & 1 & | & -1 \\ 3 & 5 & -5 & | & -6 \end{bmatrix}.$$

Најпре ћемо матрицу B свести на облик ешалона врста:

$$B=\left[\begin{array}{ccc|c}2&-4&1&1\\1&-5&3&2\\1&-1&1&-1\\3&5&-5&-6\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&-5&3&2\\2&-4&1&1\\1&-1&1&-1\\3&5&-5&-6\end{array}\right]\begin{array}{l}\rho_1\leftrightarrow\rho_2\\ \\ \\ \\ \end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&-5&3&2\\0&6&-5&-3\\0&4&-2&-3\\0&20&-14&-12\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ -2\rho_1+\rho_2\\ -\rho_1+\rho_3\\ -3\rho_1+\rho_4\end{array}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&-5&3&2\\0&6&-5&-3\\0&60&-30&-45\\0&60&-42&-36\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ 15\rho_3\\ 3\rho_4\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&-5&3&2\\0&6&-5&-3\\0&0&20&-15\\0&0&8&-6\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ -10\rho_2+\rho_3\\ -10\rho_2+\rho_4\end{array}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&-5&3&2\\0&6&-5&-3\\0&0&4&-3\\0&0&4&-3\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \frac{\rho_3}{5}\\ \frac{\rho_4}{2}\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&-5&3&2\\0&6&-5&-3\\0&0&4&-3\\0&0&0&0\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ -\rho_3+\rho_4\end{array}.$$

Према томе, полазну матрицу B смо елементарним трансформацијама трансформисали на облик ешалона врста одакле можемо закључити да је $r(A)=r(B)$. Дакле, полазни систем линеарних једначина је сагласан и своди се на облик

$$\begin{aligned}x-5y+3z&=2,\\ 6y-5z&=-3,\\ 4z&=-3.\end{aligned}$$

Из треће једначине последњег система линеарних једначина је

$$z=-\frac{3}{4},$$

што заменом у другу једначину даје

$$6y=-3+5z=-\frac{12}{4}-\frac{15}{4}=-\frac{27}{4},$$

односно

$$y=-\frac{9}{8}.$$

Након замене добијених вредности за y и z у прву једначину датог система, добијамо

$$x=2+5y-3z=\frac{16}{8}-\frac{45}{8}+\frac{18}{8}=-\frac{11}{8}.$$

Решење датог система је

$$x=-\frac{11}{8},\ y=-\frac{9}{8},\ z=-\frac{3}{4}.$$

Провера:

$$\begin{aligned}2\cdot\left(-\frac{11}{8}\right)-4\cdot\left(-\frac{9}{8}\right)-\frac{3}{4}&=1,\checkmark\\ -\frac{11}{8}-5\cdot\left(-\frac{9}{8}\right)+3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)&=2,\checkmark\\ -\frac{11}{8}-\left(-\frac{9}{8}\right)-\frac{3}{4}&=-1,\checkmark\\ 3\cdot\left(-\frac{11}{8}\right)+5\cdot\left(-\frac{9}{8}\right)-5\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)&=-6.\checkmark\end{aligned}$$

□

Задатак 6.0.3. Формирати матрицу и проширену матрицу, а затим испитати сагласност система линеарних једначина

$$\begin{aligned}x-2y+3z&=1,\\ 3x+2y-4z&=2,\\ 5x+2y+2z&=4.\end{aligned}$$

Рад: Матрица и проширена матрица датог система линеарних једначина су матрице A и B респективно дате са

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\3&2&-4\\5&2&2\end{bmatrix}\quad \text{и}\quad B=\begin{bmatrix}1&-2&3&|&1\\3&2&-4&|&2\\5&2&2&|&4\end{bmatrix}.$$

Сведимо матрицу B на облик ешалона врста.

$$B=\begin{bmatrix}1&-2&3&|&1\\3&2&-4&|&2\\5&2&2&|&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&3&|&1\\0&8&-13&|&-1\\0&12&-13&|&-1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\-3\rho_1+\rho_2\\-5\rho_1+\rho_3\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&3&|&1\\0&8&-13&|&-1\\0&-24&26&|&2\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\-2\rho_3\end{matrix}$$
$$\sim\begin{bmatrix}1&-2&3&|&1\\0&8&-13&|&-1\\0&0&-13&|&-1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\3\rho_2+\rho_3\end{matrix}.$$

Из последње релације можемо закључити да је $r(A)=r(B)=3$. Према томе, дати систем линеарних једначина има јединствено решење. Такође, из последње релације можемо закључити да се дати систем линеарних једначина своди на еквивалентан систем, који гласи

$$\begin{aligned}x-2y+3z&=1,\\ 8y-13z&=-1,\\ -13z&=-1.\end{aligned}$$

Из последње једначине добијамо да је

$$z=\frac{1}{13},$$

што заменом у другу једначину последњег система линеарних једначина даје

$$8y = -1 + 13z = -1 + 13 \cdot \frac{1}{13} = -1 + 1 = 0,$$

одакле добијамо да је

$$y = 0.$$

Када заменимо $y = 0$ и $z = \frac{1}{13}$ у прву једначину последњег система линеарних једначина, добићемо

$$x = 1 + 2y - 3z = 1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot \frac{1}{13} = 1 - \frac{3}{13} = \frac{10}{13}.$$

Извршимо проверу решења заменом вредности $x = \frac{10}{13}$, $y = 0$ и $z = \frac{1}{13}$ у полазни систем линеарних једначина.

Провера:

$$\begin{aligned} \frac{10}{13} - 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{13} &= 1, \surd \\ 3 \cdot \frac{10}{13} + 2 \cdot 0 - 4 \cdot \frac{1}{13} &= 2, \surd \\ 5 \cdot \frac{10}{13} + 2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{13} &= 4. \surd \end{aligned}$$

□