Поглавље 2

Оптимизација линеарне функције при линеарним ограничењима

Математичка оптимизација је једна од најпримењивијих грана математике, која се бави избором најоптималнијег решења из скупа допустивих решења. Увод у математичку оптимизацију који смо овде делимично користили налази се у уводним поглављима књиге [1], на страницама 115-123 збирке задатака [4], другом поглављу збирке задатака [5], страницама 125-175 књиге [3] и страницама 850-876 књиге [2].

Подсетимо се из средњошколског градива да је линеарна функција једна од најједноставнијих функција. Карактеризација линеарне функције може се описати условима адитивности и хомогености. При чему, услов адитивности нам говори да се функција "лепо слаже" са збиром својих аргумената, а услов хомогености означава "лепо слагање" у односу на множење аргумента скаларом, односно реалним бројем.

Посматраћемо рестрикцију линеарних функција на линеарне скупове ограничења који су одређени скупом линеарних неједначина или једначина. На таквим скуповима тражићемо максимум или минимум линеарних функција и такав проблем се назива оптимизација.

2.1 Линеарно програмирање

Проблем линеарног програмирања се састоји у одређивању ненегативних реалних бројева $x_1, x_2, \ldots, x_n$, који задовољавају

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, k;$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i, \qquad i = k+1, k+2, \ldots, l;$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \qquad i = l+1, l+2, \ldots, l+m;$$

тако да функција

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

има највећу (најмању) вредност за тако одређене x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, где су a_{ij}, b_i и c_i дати реални бројеви.

Постоји више метода за решавање проблема линеарног програмирања. Неке од метода су дате у наставку.

(i) Геометријска метода се примењује када имамо до три непознате. Њена улога је, пре свега, педагошке природе јер се помоћу ње најједноставније, а можда и најјасније може изложити потупак поступак оптимизације линеарне функције. Међутим, када разумемо поступак оптимизације онда ћемо тежити да нађемо поступак за решавање који се извршава за краће време, тако да онда почињемо да трагамо за другим методама.

(ii) Симплекс метода је најзаступљенија метода за решавање проблема линеарног програмирања. Погодна је је за програмирање и њена рачунска сложеност је најмање експоненцијална. Међутим, у пракси је врло применљива и брза. Неопходан услов за примену симплекс методе је претпоставка да су сва нетривијална ограничења међусобно независна.

Пример 2.1.1 (Геометријска метода). Одредити минимум функције

$$f(x, y) = 2x + y,$$

при ограничењима

$$\begin{aligned} y &\geqslant 0;\\ 2x - y &\geqslant -6;\\ -2x + 3y &\geqslant 6;\\ 3x + y &\leqslant 6. \end{aligned}$$

Проблеми линеарног програмирања се дефинишу као оптимизациони проблеми:

- максимизације линеарне функције при линеарним ограничењима;
- минимизације линеарне функције при линеарним ограничењима.

Линеарна ограничења могу бити:

(i) линеарне једнакости;

(ii) линеарне неједнакости;

(iii) нека комбинација линеарних једнакости и неједнакости.

Основне појмове оптимизације линеарне функције при линеарним ограничењима објаснићемо у Примеру 2.1.2.

Пример 2.1.2 (Максимизација линеарне функције $f(x, y) = x + y$ геометријском методом). Одредити бројеве x и y, чији је збир $x + y$ максималан, при чему бројеви x и y испуњавају:

$$
\begin{aligned}
x &\geqslant 0;\\
y &\geqslant 0;\\
x + 2y &\leqslant 4;\\
4x + 2y &\leqslant 12;\\
-x + y &\leqslant 1.
\end{aligned}
$$

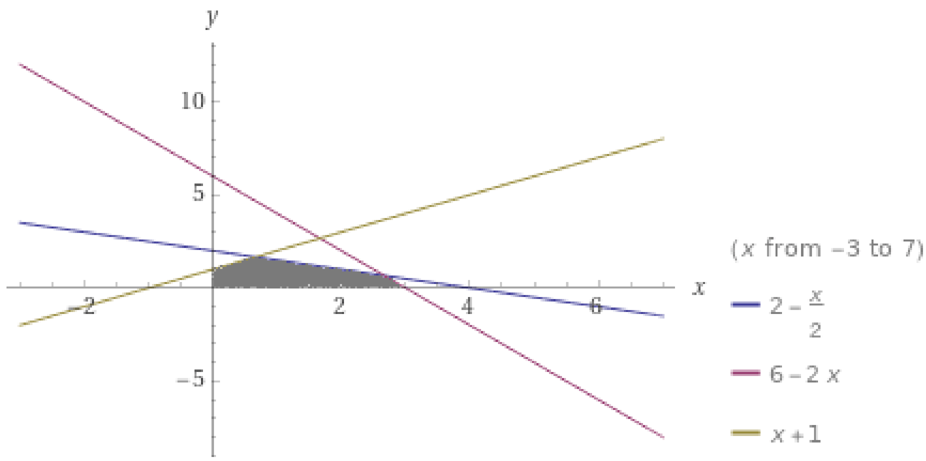
Рад: У датом примеру имамо две променљиве и пет ограничења. Сва ограничења су линеарне неједнакости. Прва два ограничења $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ називају се ненегативним ограничењима и врло често се јављају у проблемима линеарног програмирања. Остала ограничења су главна ограничења и могу се представити у облику

$$
\begin{aligned}
y &\leqslant -\frac{x}{2} + 2;\\
y &\leqslant -2x + 6;\\
y &\leqslant x + 1.
\end{aligned}
$$

Функција коју је неопходно максимизирати (или минимизирати) назива се функција циља или циљна функција. У датом примеру функција циља је дефинисана са

$$f(x, y) = x + y.$$

Пошто се јављају само две променљиве, дати проблем можемо решити графичким представљањем скупа тачака у равни које испуњавају сва наведена ограничења (назовимо тај скуп скупом ограничења) и проналажењем



Слика 2.1: Област одређена неједнакостима $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant 2 - \frac{x}{2}$, $y \leqslant 6 - 2x$ и $y \leqslant x + 1$.

тачке скупа ограничења у којој је вредност функције циља максимална. Сваку неједнакост из услова ограничења испуњавају тачке једне полуравни и скуп ограничења се добија као пресек свих тих полуравни. Скуп ограничења у нашем примеру је петострана фигура осенчена на Слици 2.1. Тражимо тачку (x, y) која припада скупу ограничења и у којој функција $f(x, y) = x + y$ достиже свој максимум. Функција $f(x, y) = x + y$ је константна на правама које имају коефицијент правца -1, на пример, таква је права $x + y = c$, где је c константа. Вредност функције $f(x, y) = x + y$ у тачкама праве

$$x + y = c$$

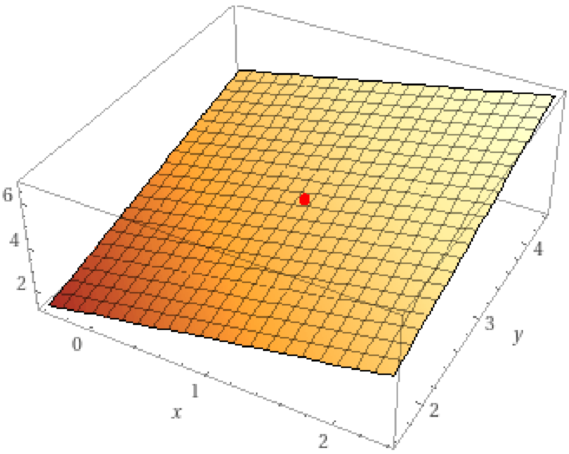
је једнака c, а посебно када је $c = 0$, вредност функције $f(x, y) = x+y$ је једнака нули. Међутим, уколико из фамилије правих $x + y = c$, посматрамо праве које се добијају паралелним померањем удесно у односу на координатни почетак, коефицијент c узимаће позитивне вредности у растућем редоследу. Том приликом, повећаће се вредност функције $f(x, y)$. Да бисмо одредили у којој тачки скупа ограничења је вредност функције $f(x, y)$ максимална тражићемо праву са коефицијентом правца -1, која је највише удаљена од координатног почетка, али која још увек додирује скуп ограничења.

Одредимо пресечну тачку правих $y = 2 - \frac{x}{2}$ и $y = 6 - 2x$:

$$2 - \frac{x}{2} = 6 - 2x \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}.$$

Када је $x = \frac{8}{3}$, онда је одговарајућа y-координата једнака

$$y = 2 - \frac{x}{2} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$



Слика 2.2: Максимална вредност функције $z = x + y$ у области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant 2 - \frac{x}{2}$, $y \leqslant 6 - 2x$ и $y \leqslant x + 1$.

Према томе, тражена тачка има координате

$$(x, y) = \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Сада није тешко утврдити вредност константе c_1 за коју је права $x + y = c_1$ најудаљенија од координатног почетка, а да притом још увек сече или додирује област ограничења:

$$c_1 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3}.$$

Вредност функције циља у датој тачки је

$$f\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3},$$

што је и максимална вредност функције $f(x, y)$ у датој области.

□

Функција циља је линеарна и достиже своју максималну (или минималну) вредност у "угаоној" тачки скупа ограничења, под претпоставком да је скуп ограничења ограничен. У неким случајевима може се десити да функција циља свој максимум достиже дуж целе границе или читавог лика скупа ограничења. Међутим, тада та функција свој максимум достиже и у угаоној тачки скупа ограничења.

Проблем линеарног програмирања се на исти начин решава када садржи више од две непознате. Рецимо, у проблему који има три непознате, услови ограничења одговарају полупросторима у тродимензионалном простору, па се област ограничења налази у пресеку тих полупростора. Скуп тачака за које функција циља достиже одређену вредност је у том случају раван, под претпоставком да важе услови недегенерисаности. Уколико су сви коефицијенти функције циља ненегативни и уколико је координатни почетак допустиво решење линеарног програма, тада, померајући раван од координатног почетка у правцу нормалном на функцију циља, налазимо тачке раста вредности функције циља. Уколико координатни почетак не припада скупу могућих решења или ако су неки коефицијенти функције циља ненегативни, интуитивна слика постаје за нијансу компликованија. Као и у дводимензионалном случају, због конвексности допустиве области, скуп тачака у којима се достиже оптимална вредност функције циља мора укључивати темена области допустивих решења. Слично, када имамо n промењљивих, свако ограничење дефинише полупростор у n-димензионалном простору. Проблем линеарног програмирања се још назива и линеарни програм. Наведимо неколико примера.

Пример 2.1.3. Размотримо линеарни програм:

$$\begin{aligned} &\text{минимизирати} \; -2x+3y; \\ &\text{при ограничењима} \\ &\qquad x+y=7; \\ &\qquad x-2y \leqslant 4; \\ &\qquad x \geqslant 0. \end{aligned}$$

Одредити три могућа решења датог линеарног програма и одговарајуће вредности функције циља.

Пример 2.1.4. Размотримо линеарни програм са непозитивним ограничењем:

$$\begin{aligned} &\text{минимизирати} \; 2x+7y+z; \\ &\text{при ограничењима} \\ &\qquad x - z = 7; \\ &\qquad 3x+y \geqslant 24; \\ &\qquad y, z \geqslant 0. \end{aligned}$$

Одредити три могућа решења датог линеарног програма и одговарајуће вредности функције циља.

Пример 2.1.5. Показати да је следећи линеарни програм немогућ:

$$\begin{aligned} &\text{максимизирати} \; 3x-2y; \\ &\text{при ограничењима} \\ &\qquad x+y \leqslant 2; \\ &\qquad -2x-2y \leqslant -10; \\ &\qquad x, y \geqslant 0. \end{aligned}$$

Пример 2.1.6. Показати да је следећи линеарни програм неограничен:

$$\begin{aligned}
&\text{максимизирати } x - y;\\
&\text{при ограничењима}\\
&\qquad -2x + y \leqslant -1;\\
&\qquad -x - 2y \leqslant -2;\\
&\qquad x, y \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Пример 2.1.7. Навести пример линеарног програма за који је област могућих решења неограничена.

Пример 2.1.8. Понекад, у линеарном програму, потребно је да конвертујемо услове ограничења из једног облика у други:

- показати како конвертовати услове ограничења дате једнакостима у еквивалентан скуп неједнакости, т.ј. услове $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ конвертовати у скуп неједнакости који ће бити задовољени ако и само ако важи $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$;

- показати како конвертовати услове дате неједнакостима $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i$ у услове дате неједнакостима са ненегативним ограничењима, биће потребно да уведете додатну променљиву s и да искористите услов да је $s \geqslant 0$.

Пример 2.1.9. Објаснити како конвертовати минимизацију линеарног програма у еквивалентан проблем максимизације линеарног програма и аргументовати зашто је нови линеарни програм еквивалентан оригиналном.

Увешћемо моћни концепт назван дуалност линеарног програма . У општем случају, за дати максимизациони проблем, дуалност нам дозвољава да формулишемо одговарајући минимизациони проблем који има исту вредност функције циља. Идеја дуалности је много општија од линеарног програмирања, али усмерићемо нашу пажњу на линеарно програмирање. Дуалност нам омогућава да докажемо да је решење заиста оптимално. Један пример дуалности може се формулисати на следећи начин:

за дати проблем максимизације дефинисати одговарајући проблем минимизације тако да та два проблема имају исте оптималне вредности функције циља.

У наставку наводимо један пример у коме је неопходно да за дати линеарни програм у стандардном облику у којем је неопходно максимизирати функцију циља, формулисати дуални линеарни програм у којем је неопходно решити проблем минимизације и чија је оптимална вредност иста као и у оригиналном линеарном програму. Када говоримо о дуалним линеарним програмима зваћемо оригинални линеарни програм примарним. За дати примарни линеарни програм:

$$\begin{aligned}
&\text{максимизирати } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;\\
&\text{при ограничењима}\\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \text{ за } i = 1, 2, \ldots, m;\\
&\qquad x_j \geqslant 0, \text{ за } j = 1, 2, \ldots, n;
\end{aligned}$$

његов дуал је линеарни програм:

$$\begin{aligned}
&\text{минимизирати } \sum_{i=1}^{m} b_i y_i;\\
&\text{при ограничењима}\\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \text{ за } j = 1, 2, \ldots, n;\\
&\qquad y_i \geqslant 0, \text{ за } i = 1, 2, \ldots, m.
\end{aligned}$$

"Механика" формирања дуала је следећа:

(i) променити "максимизацију" у "минимизацију";

(ii) променити улоге коефицијената код функције циља и на десним странама услова ограничења;

(iii) заменити сваки знак "$\leqslant$" са "$\geqslant$".

Сваки од m ограничења у примарном проблему одговара промењљивој y_i у дуалном проблему. Исто тако, сваки од n ограничења у дуалном проблему одговара промењљивој x_j у примарном проблему.

Пример 2.1.10. Размотримо примарни линеарни програм:

$$\begin{aligned}
&\text{максимизирати } 3x_1 + x_2 + 4x_3;\\
&\text{при ограничењима}\\
&\qquad x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 30;\\
&\qquad 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leqslant 24;\\
&\qquad 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 36;\\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \geqslant 0;
\end{aligned}$$

његов дуал је

$$\begin{aligned}&\text{минимизирати } 30y_1 + 24y_2 + 36y_3;\\&\text{при ограничењима}\\&\qquad y_1 + 2y_2 + y_3 \geqslant 4;\\&\qquad y_1, y_2, y_3 \geqslant 0;\\&\qquad y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geqslant 3;\\&\qquad y_1 + 2y_2 + y_3 \geqslant 1.\end{aligned}$$

Иако се формирање дуала може сматрати механичком операцијом, постоји интуитивно образложење. Посматрајући примарни максимизациони проблем, можемо видети да сваки услов ограничења даје горњу границу функције циља. Поред тога, ако узмемо један или више услова ограничења и спојимо њихове ненегативне умношке добићемо валидан услов ограничења. На пример, када у примарном линеарном програму спојимо први и други услов ограничиња добићемо услов ограничења:

$$3x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leqslant 54.$$

Било које допустиво решење примарног линеарног програма мора задовољавати овај нови услов ограничења. Међутим, постоји нешто много интересантније, што се тиче новог услова ограничења. Поређењем новог услова ограничења са функцијом циља, можемо видети да за сваку променљиву, одговарајући коефицијент је најмање онолико велики колико и одговарајући коефицијент код функције циља. Према томе, пошто су променљиве x_1, x_2 и x_3 ненегативне, имамо да је

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 \leqslant 3x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leqslant 54,$$

одакле имамо да је горња граница функције циља 54.

У општем случају, за било које ненегативне умношке y_1, y_2 и y_3, можемо генерисати услов ограничења:

$$y_1(x_1 + x_2 + 3x_3) + y_2(2x_1 + 2x_2 + 5x_3) + y_3(4x_1 + x_2 + 2x_3) \leqslant 30y_1 + 24y_2 + 36y_3;$$

на основу примарних услова ограничења, или након прерасподеле и прегруписања:

$$(y_1 + 2y_2 + 4y_3)x_1 + (y_1 + 2y_2 + y_3)x_2 + (3y_1 + 5y_2 + 2y_3)x_3 \leqslant 30y_1 + 24y_2 + 36y_3.$$

Док год последњи услов ограничења има коефицијенте уз x_1, x_2 и x_3 који су већи или једнаки од одговарајућих коефицијената функције циља, то је валидна горња граница. Дакле, док год је

$$\begin{aligned}y_1 + 2y_2 + 4y_3 &\geqslant 3;\\y_1 + 2y_2 + y_3 &\geqslant 1;\\3y_1 + 5y_2 + 2y_3 &\geqslant 4;\end{aligned}$$

имамо валидну горњу границу за израз:

$$30y_1 + 24y_2 + 36y_3.$$

Умношци y_1, y_2 и y_3 морају бити ненегативни, због тога што иначе не можемо комбиновати неједнакости. Наравно, волели бисмо да горња граница буде најмања могућа и сходно томе желимо да изаберемо y_1, y_2 и y_3 које минимизирају израз $30y_1 + 24y_2 + 36y_3$. Приметимо, да смо управо описали дуални линеарни програм, као проблем налажења најмање могуће горње границе примарног линеарног програма. Уколико су и линеарни програм и његов дуал допустиви и ограничени, тада је оптимална вредност дуалног линеарног програма увек једнака оптималној вредности примарног линеарног програма. Слаба дуалност тврди да било које допустиво решење примарног линеарног програма има вредност не већу од било ког другог допустивог решења дуалног линеарног програма.

Фундаментална теорема линеарног програмирања тврди да било који линеарни програм, дат у стандардном облику има решење које је:

(i) оптимално решење са коначном вредношћу функције циља, или;

(ii) допустиво решење, или;

(iii) неограничено.

Целобројни линеарни програм добијамо када у линеарном програму уведемо додатни услов, да све промењљиве узимају само целобројне вредности. За разматрање егзистенције алгоритама који могу бити употребљени за решавање таквих проблема и времена неопходног за њихово израчунавање, потребно је познавање појмова који припадају рачунарским наукама, као што је комплексност израчунавања.

2.2 Математичка оптимизација

Математички оптимизациони проблем је проблем облика:

$$\begin{aligned} &\text{минимизирати } f_0(x); \\ &\text{при ограничењима } f_i(x) \leqslant b_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Овде је вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ оптимизациона промењљива проблема, функција $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ је функција циља, функције $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ су функције ограничења, а константе $b_1, \dots, b_m$ су лимити или границе за ограничења. Вектор x^* је оптималан, односно представља решење математичког оптимизационог проблема ако има најмању објективну вредност од свих вектора који задовољавају ограничења:

за било који вектор $a = (a_1, \ldots, a_n)$ такав да је $f_1(a) \leqslant b_1, \ldots, f_m(a) \leqslant b_m$, имамо да је

$$f_0(a) \geqslant f_0(x^*).$$

У општем случају можемо разматрати фамилије или класе оптимизационих проблема који су окарактерисани посебним облицима функције циља и функцијама ограничења. Ми смо се до сада бавили посебним математичким оптимизационим проблемима, где је функција циља f_0 била линеарна, а функције ограничења f_i, $i = 1, \ldots, m$ су такође биле линеарне. У наставку наводимо дефиницију појма линеарне функције $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.,

Дефиниција 2.2.1 (Адитивност и хомогеност). Функција $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ је линеарна ако $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ испуњава следеће услове:

- $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ (адитивност);
- $f(\alpha \cdot \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$ (хомогеност).

Услови адитивности и хомогености из Дефиниције 2.2.1 могу се објединити у један услов:

$$f(\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}) \quad \text{(линеарност)}.$$

Скуп тачака $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ чије координате задовољавају линеарну једначину

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_0 = 0,$$

где су $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ дати бројеви назива се хиперраван.

Дуж одређена тачкама $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathbb{R}^n$ је скуп тачака облика

$$\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y},$$

где је $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Ако дуж одређена тачкама $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ не сече хиперраван H онда се каже да су тачке $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ са исте стране хиперравни H.

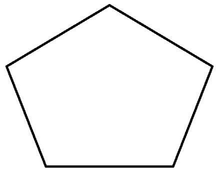
Дефиниција 2.2.2 (Конвексан скуп). Скуп $C \subseteq \mathbb{R}^n$ је конвексан скуп ако линијски сегмент између било које две тачке скупа C лежи у C, т.ј., ако за било које две тачке $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ и било који реалан број $\lambda \in [0, 1]$ имамо да

$$\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in C.$$

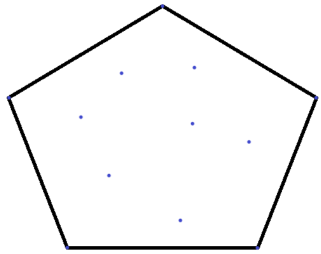
Тачка облика $\alpha_1x_1 + \ldots + \alpha_kx_k$, где је $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$ и $\alpha_i \geqslant 0$, за $i = 1, \ldots, k$, назива се конвексна комбинација тачака $x_1, \ldots, x_k$. Може се доказати да је скуп конвексан ако и само ако садржи сваку конвексну комбинацију својих тачака.

Дефиниција 2.2.3 (Конвексна љуска). Конвексна љуска скупа $C \subseteq \mathbb{R}^n$, у ознаци $conv(C)$, је скуп свих конвексних комбинација тачака из C:

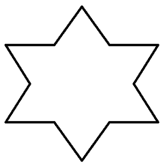
$$conv(C) = \{\alpha_1x_1 + \ldots + \alpha_kx_k | x_i \in C, \alpha_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, k, \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1\}.$$



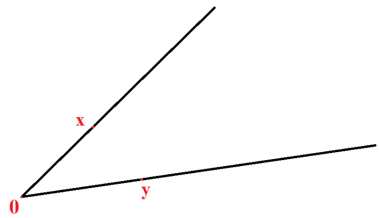
(а) Пентагон



(ц) Конвексна љуска која садржи 12 тачака означених плавом бојом је скуп који ограничава пентагон



(б) Звезда



(д) Конус

Слика 2.3: Примери конвексног и неконвексног скупа, конвексне љуске и конуса

Конвексна љуска је увек конвексан скуп и то најмањи конвексан скуп који садржи C.

Дефиниција 2.2.4 (Екстремална тачка). Тачка $\mathbf{x}$ конвексног скупа $C \subseteq \mathbb{R}^n$ је екстремална тачка ако из услова

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}'', \quad 0 < \lambda < 1; \quad x', x'' \in K$$

следи $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'' = \mathbf{x}$.

Дефиниција 2.2.5 (Конус). За скуп $C \subseteq \mathbb{R}^n$ кажемо да је конус или да је ненегативно хомоген, ако за сваку тачку $\mathbf{x} \in C$ и сваки реалан број $\lambda \geqslant 0$ имамо да $\lambda \mathbf{x} \in C$.

Дефиниција 2.2.6 (Конвексни конус). Скуп $C \subseteq \mathbb{R}^n$ је конвексни конус ако је конус који је конвексан, што значи да за било које тачке $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ и било које реалне бројеве $\lambda, \mu \geqslant 0$ имамо да $\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \in C$.

Конвексни конус је приказан на Слици 2.3д.

Дефиниција 2.2.7 (Конусна комбинација). Тачка облика $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k$, где су реални бројеви $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geqslant 0$ се назива конусна комбинација или ненегативна линеарна комбинација тачака $x_1, \ldots, x_k$.

Ако тачке x_i припадају конвексном конусу C, онда свака конусна комбинација тачака x_i припада конусу $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Обратно, скуп $C \subseteq \mathbb{R}^n$ је конвексни конус ако и само ако садржи све конусне комбинације његових елемената.

Дефиниција 2.2.8 (Конусна љуска). Конусна љуска скупа $C \subseteq \mathbb{R}^n$ је скуп свих конусних комбинација тачака из C, т.ј.,

$$\{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k | x_i \in C, \alpha_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, k\},$$

што је уједно и најмањи конвексан конус који садржи скуп C.

2.3 Неке примене линеарног програмирања

Пример 2.3.1 (Шта и колико посадити). Претпоставимо да треба да посејемо k култура на обрадивој површини која има l хектара. Доњу и горњу границу површине на којој желимо да посадимо i-ту културу означимо са p_i и q_i, респективно, за $i = 1, 2, \ldots, k$. У сврху формулације проблема уведимо ознаке:

- x_i непозната површина на којој треба посадити i-ту културу, $i = 1, 2, \ldots, k$;
- b_j број радника којима располаже пољопривредно добро у j-том периоду, $j = 1, 2, \ldots, m$;
- r_{ij} број радника који је потребан у j-том периоду за i-ту културу, $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, m$;
- c_i очекивана добит од i-те културе по јединици површине.

Проблем максимизације гласи

$$\max \left(\sum_{i=1}^{k} c_i x_i \right),$$

при чему ограничене обрадиве површине испуњавају услове

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = l, \qquad p_i \leqslant x_i \leqslant q_i,\ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Потребе за радном снагом и њихов ограничен број формулисан је неједнакостима

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot r_{ij} \leqslant b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Пољопривредна техника којом располаже газдинство није узета као ограничавајући фактор. Проблем се може преформулисати тако да се разматрају и радна снага и механизација.

Пример 2.3.2 (Проблем дијете). Постоји m различитих типова хране F_1, F_2, $\dots$, F_m који обезбеђују количине n хранљивих састојака N_1, N_2, $\dots$, N_n, које су неопходне за добро здравље. Нека је c_j минимална дневна потреба за хранљивим састојком N_j, b_i цена по јединици хране F_i и a_{ij} количина хранљивог састојка N_j који је садржан у једној јединици хране F_i. Проблем дијете се састоји у одређивању неопходне количине хранљивих састојака, тако да потрошена сума новца буде минимална.

Рад: Ако је y_i број јединица хране F_i коју је неопходно купити за један дан, таква дијета ће нас дневно коштати

$$b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m. \tag{2.2}$$

Количина хранљивог састојка N_j садржана у овој дијети је

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

У нашој дијети минимална дневна потреба за хранљивим састојком N_j мора бити задовољена, т.ј. следећа неједнакост мора бити испуњена

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m \geqslant c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Наравно, количина хране не може бити негативна, према томе морају бити испуњени и услови ненегативности

$$y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0,\ \ldots, y_m \geqslant 0. \tag{2.4}$$

Проблем дијете се састоји у одређивању минималне вредности суме (2.2) при ограничењима (2.3) и (2.4).

□

Пример 2.3.3 (Трошкови ишране у сточарству). За потребе сточарске производње неопходно је израчунати минималне трошкове ишране користећи три врсте прехране P_1, P_2 и P_3, чије су цене респективно 5, 3 и 9, а који садрже проценте пет компоненти S_1, S_2, S_3, S_4 и S_5, као што је приказано у Табели 2.1. Формирати одговарајући математички модел.

Рад: Из опште формулације математичког модела ишране можемо закључити да имамо три променљиве x, y и z, које представљају број килограма производа P_1, P_2 и P_3, које треба узимати у дневној ишрани да би задовољили прописане услове и да би трошкови ишране били минимални. Према томе, функција циља има облик

$$f(x, y, z) = 5x + 3y + 9z,$$

Табела 2.1: Трошкови исхране

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	цена
P_1	0,05	0,18	0,15	0,03	0,21	5
P_2	0,2	0,14	0,16	0,05	0,18	3
P_3	0,17	0,23	0,03	0,09	0,24	9
Прописани минимум	0,07	0,11	0,22	0,17	0,19	

док су ограничења дата системом линеарних неједначина

$$\begin{aligned} 0,05x + 0,2y + 0,17z &\geqslant 0,07;\\ 0,18x + 0,14y + 0,23z &\geqslant 0,11;\\ 0,15x + 0,16y + 0,03z &\geqslant 0,22;\\ 0,03x + 0,05y + 0,09z &\geqslant 0,17;\\ 0,21x + 0,18y + 0,24z &\geqslant 0,19. \end{aligned}$$

Задатак се састоји у налажењу минимума функције циља при датим ограничењима.

□

У сточарству се врло често јављају следећи оптимизациони проблеми:

- максимизирати производњу меса, млека и јаја;
- минимизирати трошкове исхране тако да квалитет сточне хране буде на задовољавајућем нивоу.

Пример 2.3.4 (Кокошке и јаја). Једна кокошка може за три недеље или да положи 12 јаја или да излеже 4 пилета. Посматра се производни период од 4 циклуса по 3 недеље (укупно 12 недеља). Након тога се сва живина продаје на следећи начин:

- пилићи из првог циклуса и кокошке по цени од K динара;
- пилићи из другог и трећег циклуса по цени од P динара по комаду;
- јаја по цени од J динара по комаду.

Претпоставимо да је $K > P > J$. Оптимизовати зараду, ако производњу почнемо са 100 кокошака и 100 јаја.

Пример 2.3.5 (Количина стоке). Управа фарме је одлучила да гаји n врста стоке. На залихама има m основних састојака сточне хране у количинама k_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Извршити оптимизацију количине стоке у зависности од залиха сточне хране са којом располаже фарма, са циљем остваривања максималне добити.

Рад: Уведимо следеће ознаке

- x_j непознати број стоке j-те врсте, $j = 1, 2, \ldots, n$;
- m_j минималан број стоке j-те врсте, $j = 1, 2, \ldots, n$ испод кога се не исплати гајити стоку j-те врсте;
- b_{ij} минимална потребна количина i-тог основног састојка сточне хране по јединици стоке j-те врсте, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$;
- c_j очекивана цена по грлу стоке j-те врсте.

Функција циља гласи

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

Квалитет сточне хране захтева испуњење следећих неједнакости

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \leqslant k_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Непознате x_j су природни бројеви који испуњавају неједнакости

$$x_j \geqslant m_j,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

□

Понекад се у пољопривреди користи семе од претходне године. Такав проблем је разматран у Примеру 2.3.6.

Пример 2.3.6 (Сејати или продати семе). Направимо оптималан план сетве из три узастопне жетве уз претпоставку да се сваке године семе не складишти, већ се или сеје или се продаје. Пред прву сетву имамо A килограма семена. Продајна цена семена је p_0 динара за килограм. Коефицијент приноса за жетве је λ. Очекује се да ће зараде по килограму бити следеће

- у првој жетви зарада је p_1 динара,
- у другој жетви зарада је p_2 динара,
- у трећој жетви зарада је p_3 динара.

Рад: Нека је у првој години посејано x килограма семена, при чему је $x < A$. Према томе, по цени од p_0 динара за килограм је продато $A - x$ килограма семена. Принос прве жетве је λx.

Нека је у другој години посејано y килограма семена, при чему је $y < \lambda x$. Остатак од $\lambda x - y$ је продат по цени од p_1 динара за килограм. Принос друге жетве је λy.

Нека је у трећој години посејано z килограма семена, при чему је $z < \lambda y$. Остатак од $\lambda y - z$ је продата по цени p_2. Принос треће жетве λz је продат по цени p_3.

Укупни приход за три године је

$$p_0(A-x)+p_1(\lambda x-y)+p_2(\lambda y-z)+p_3\lambda z.$$

Према томе, оптимизациони проблем гласи: максимизирати функцију

$$f(x,y,z)=p_0(A-x)+p_1(\lambda x-y)+p_2(\lambda y-z)+p_3\lambda z,$$

при ограничењима

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x \leqslant& A;\\ 0 \leqslant y \leqslant& \lambda x;\\ 0 \leqslant z \leqslant& \lambda y. \end{aligned}$$

□

У оквиру избора механизације имамо бар два типа оптимизационих проблема:

(i) наћи оптималан план набавке нове механизације или изнајмљивања старе механизације са циљем да се изврше планирани послови за планирано време;

(ii) наћи оптималан план са максималном зарадом производње различитих врста производа на постојећим типовима машина при временском ограничењу рада.

Ситуације разликујемо када:

- све операције или сви производи могу да се у целости реализују на свим типовима машина;
- сваки производ или свака операција мора да прође обраду на свим типовима машина редом.

На пример, операције орања, тањирања и сејања могу да се изврше на свим типовима трактора са одговарајућим типовима прикључака.

Пример 2.3.7 (Машинска обрада послова). На поседу треба обавити два посла P_1 и P_2. Сваки посао може обавити или машина M_1 или машина M_2. Посао P_1 треба обавити за 10 дана, а затим треба обавити посао P_2 за 5 дана. На располагању су нам следећи подаци о томе колико је којој машини потребно времена за одређени посао:

- машина M_1 обави посао P_1 за 60 дана;
- машина M_1 обави посао P_2 за 50 дана;

- машина M_2 обави посао P_1 за 90 дана;
- машина M_2 обави посао P_2 за 25 дана.

Колики број машина је минимално потребно набавити да би се послови обавили на време?

Рад: Означимо са x потребан број машина типа M_1, а са y потребан број машина M_2. Треба минимизирати функцију $f(x, y) = x+y$, при ограничењима

$$\begin{aligned} x, y &\in \mathbb{N}; \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{9} &\geqslant 1; \\ \frac{x}{10} + \frac{y}{5} &\geqslant 1. \end{aligned}$$

□

Пример 2.3.8 (Оптимална производња). Поставити математички модел за оптималну производњу 4 врсте пољопривредних производа A_1, A_2, A_3 и A_4 у три погона P_1, P_2 и P_3 предузећа за прераду пољопривредних производа. За сваки пољопривредни производ је неопходна употреба машина типа M_1 и M_2.

2.4 Питања

1. Формулисати проблем линеарног програмирања.
2. Када се примењује Геометријска метода за решавање проблема линеарног програмирања.
3. Навести пример проблема оптимизације линеарне функције при линеарним ограничењима који се може решити геометријском методом.
4. Која је најзаступљенија метода код решавања проблема линеарног програмирања.
5. Који је неопходан услов за примену симплекс методе за решавање проблема линеарног програмирања.
6. Објаснити основне појмове оптимизације линеарне функције при линеарним ограничењима.
7. Објаснити како се формира дуални проблем проблема линеарног програмирања.
8. Шта тврди фундаментална теорема линеарног програмирања.
9. Како се одређује целобројни линеарни програм.

10. Како се дефинише математички оптимизациони проблем.
11. Како се дефинише особина линеарности функције $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?
12. Како се дефинише конвексан скуп у $\mathbb{R}^n$?
13. Како се дефинише конвексна љуска скупа $C \subseteq \mathbb{R}^n$?
14. Како се дефинише екстремална тачка конвексног скупа $C \subseteq \mathbb{R}^n$?
15. Како се дефинише конус у $\mathbb{R}^n$?
16. Како се дефинише конвексни конус у $\mathbb{R}^n$?
17. Како се дефинише конусна комбинација?
18. Дефинисати конвексни конус у $\mathbb{R}^n$ у терминима конусних комбинација.
19. Како се дефинише конусна љуска скупа $C \subseteq \mathbb{R}^n$?
20. Формулисати проблем дијете.

2.5 Додатак

2.5.1 Проблем линеарног програмирања у матричном облику

Проблем линеарног програмирања у матричном облику гласи[1]:

$$\begin{aligned} &\text{максимизирати} \quad c^{\mathrm{T}}x;\\ &\text{при ограничењима}\\ &Ax \leqslant b;\\ &\ x \geqslant 0; \end{aligned}$$

где је

- $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ је матрица формата $m \times n$;
- $b = [b_i]_{m\times 1}$ и $c = [c_i]_{m\times 1}$ су вектори формата $m \times 1$;
- $x = (x_i)$ је непознати вектор формата $n \times 1$.

Поред тога:

- $c^{\mathrm{T}}x$ је унутрашњи (скаларни) производ вектора c^{T} формата $1 \times n$ и вектора x формата $n \times 1$;
- Ax је вектор формата $m \times 1$, јер је производ матрице A, која је формата $m \times n$ и вектора x, који је формата $n \times 1$;
- услов $x \geqslant 0$ означава да сви елементи вектора x морају бити ненегативни.

[1] Видети [2], стр. 854.

Библиографија

[1] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex Optimization.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2009. Seventh Printing with Corrections.

[2] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms.* The MIT Press, Cambridge, MA, 2022. Fourth Edition.

[3] Snežana Matić-Kekić. *Privredna matematika za studente bioloških smerova.* Poljoprivredni fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2006. Drugo izdanje.

[4] Pavle Miličić and Momčilo Uščumlić. *Zbirka zadataka iz više matematike I.* Naučna knjiga, Beograd, 1975. Peto izdanje.

[5] Miloš Z. Petrović. *Zbirka zadataka iz matematike sa statistikom.* Poljoprivredni fakultet u Kruševcu, Univerzitet u Nišu, Kruševac, 2022. Prvo izdanje.

Индекс

Листа симбола

(x, y) уређен пар

$[a_{ij}]_{m \times n}$ матрица формата $m \times n$

$[b_i]_{m \times 1}$ вектор формата $m \times 1$

$\mathbf{x}$ вектор

T операција транспоновања

$\sum_{j=1}^{n}$ сума по индексу j од 1 до n

$conv(C)$ скуп свих конвексних комбинација тачака из скупа $C \subseteq \mathbb{R}^n$

c^{T} врста која се добија када се вектор колона c транспонује

$f(x, y)$ функција од две непознате x и y

$f(x, y, z)$ функција од три непознате x, y и z

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функција од n непознатих

$x = (x_i)$ вектор формата $n \times 1$