Поглавље 3

Основне операције над матрицама, регуларна и сингуларна матрица

Матрице су основни математички објекти који се користе у различитим гранама математике, физике, инжењерства и рачунарских наука. Представљају табеларни приказ бројева распоређених у редове и колоне, што омогућава једноставније решавање сложених проблема. Кроз овај део, упознаћемо се са основним операцијама са матрицама као што су сабирање, множење и матрични инверз. Разумевање матрица може бити корисно при анализи података. У овом поглављу је делимично коришћена следећа литература [1, 2, 3, 4, 5, 6].

3.1 Неки примери матрица

Реална матрица формата 2×3 је правоугаона шема од $2 \cdot 3 = 6$ реалних бројева шематски распоређених у 2 врсте и 3 колоне, на пример

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Наведимо још неке примере матрица.

Пример 3.1.1. Матрица:

– формата 1×5:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 7 \end{bmatrix};$$

– формата 3×2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix};$$

– формата 4×4:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix};$$

– формата 2×3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix};$$

– формата 4×1:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Скуп свих реалних матрица које имају 2 врсте и 3 колоне се означава са $\mathbb{R}^{2\times 3}$. Матрице ћемо означавати великим латиничним словима $A, B, C, \dots$. Било која матрица $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ може се представити у облику

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},$$

где су $a_{ij} \in \mathbb{R}$, за $i \in \{1, 2\}$ и $j \in \{1, 2, 3\}$.

Пример 3.1.2. Одредити елементе a_{ij}, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ матрице

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

где је a реалан број.

Рад: Елементи матрице A су

$$a_{ij} = \begin{cases} a, & \text{ако је } i \leqslant j, \\ 0, & \text{ако је } i > j. \end{cases}$$

□

Пример 3.1.3. Одредити елементе a_{ij}, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}.$$

Рад: Матрица A формата 3×3 може се представити у облику

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Сада, из једнакости

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix},$$

следи

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 = 1^1, \quad a_{12} = 1 = 1^2, \quad a_{13} = 1 = 1^3, \\ a_{21} &= 2 = 2^1, \quad a_{22} = 4 = 2^2, \quad a_{23} = 8 = 2^3, \\ a_{31} &= 3 = 3^1, \quad a_{32} = 9 = 3^2, \quad a_{33} = 27 = 3^3, \end{aligned}$$

што се једноставније може записати у облику

$$a_{ij} = i^j,$$

где $i = 1, 2, 3$ и $j = 1, 2, 3$.

□

Пример 3.1.4. Одредити матрицу формата 3×3, чији су елементи

$$a_{ij} = i + j,$$

где $i = 1, 2, 3$ и $j = 1, 2, 3$.

Рад: Матрица формата 3×3 може се представити у облику

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

На основу датих података је $a_{ij} = i + j$, где је $i = 1, 2, 3$ и $j = 1, 2, 3$, према томе, елементи матрице A су

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 + 1 = 2, \qquad a_{12} = 1 + 2 = 3, \qquad a_{13} = 1 + 3 = 4, \\ a_{21} &= 2 + 1 = 3, \qquad a_{22} = 2 + 2 = 4, \qquad a_{23} = 2 + 3 = 5, \\ a_{31} &= 3 + 1 = 4, \qquad a_{32} = 3 + 2 = 5, \qquad a_{33} = 3 + 3 = 6. \end{aligned}$$

Тражена матрица је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

□

3.2 Операције над матрицама

Операције над матрицама, које ћемо посматрати у овом одељку су:

(i) транспоновање матрице (A^{T} могуће је одредити за било коју матрицу A);

(ii) множење матрице бројем (αA је могуће одредити за било који комплексан број α и било коју матрицу A);

(iii) сабирање/одузимање матрица и формирање линеарне комбинације матрица (збир/разлику $A \pm B$ или линеарну комбинацију $\alpha A + \beta B$ је могуће посматрати једино у случају када су матрице A и B истог формата, док бројеви α и β из линеарне комбинације могу бити произвољни);

(iv) множење матрица (производ матрица) A и B у ознаци AB је могуће посматрати једино у случају када је број колона матрице A једнак броју врста матрице B);

(v) квадрирање и степеновање квадратних матрица (за било коју квадратну матрицу A је могуће одредити квадрат A^2 или степен A^k за $k \in \mathbb{N}$).

(i) Транспонована матрица матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ је матрица $A^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, која се добија када у матрици A врсте и колоне "замене места"[1].

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

је матрица

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Пример 3.2.1. Одредити транспоноване матрице следећих матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 7 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 9 \\ 4 & 8 & 11 \end{bmatrix}.$$

Рад: Транспоноване матрице датих матрица су

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 7 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 9 \\ 4 & 8 & 11 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 8 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}.$$

□

[1] За матрицу $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ њена транспонована матрица биће $A^{\mathrm{T}} = [a_{ji}]_{n\times m}$.

Пример 3.2.2. Одредити транспоновану матрицу следеће матрице

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Рад: Транспонована матрица матрице C је одређена са

$$C^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & 5 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

□

(*ii*) Множење матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ реалним бројем α даје матрицу αA која се добија када сваки елемент матрице A помножимо бројем α[2].

Пример 3.2.3. Помножити матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

бројем 3.

Рад: Матрица $3A$ је одређена са

$$3A = \begin{bmatrix} 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot(-3) & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) & 3\cdot(-2) & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 5 \\ 3\cdot(-1) & 3\cdot 0 & 3\cdot 4 & 3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 15 & -9 & 3 \\ 6 & -3 & -6 & 0 \\ 9 & 3 & 6 & 15 \\ -3 & 0 & 12 & 6 \end{bmatrix}.$$

□

(*iii*) Матрице A и B из $\mathbb{R}^{m\times n}$ се сабирају (одузимају) тако што се формира матрица $A + B$ ($A - B$), чији су елементи добијени сабирањем (одузимањем) елемената матрица A и B, који се налазе на одговарајућим позицијама[3].

Напомена 3.2.1. Могуће је сабирати једино матрице које су истог формата.

Пример 3.2.4 (Сабирање и одузимање матрица). Одредити збир и разлику матрица A и B датих са

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

[2]За $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ након множења матрице A бројем α добијамо матрицу $\alpha A = [\alpha \cdot a_{ij}]_{m\times n}$.

[3]Збир (разлика) матрица $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ је $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m\times n}$.

Рад: Збир матрица A и B је одређен са

$$
\begin{aligned}
A+B &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2+(-1) & 3+0 & -1+1 \\ -3+3 & 0+2 & 1+0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Разлика матрица A и B је одређена са

$$
\begin{aligned}
A-B &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2-(-1) & 3-0 & -1-1 \\ -3-3 & 0-2 & 1-0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -6 & -2 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

Матица чији су сви елементи једнаки нули назива се нула матрица.

Пример 3.2.5 (Нула матрица). Нула матрица је матрица чији су сви елементи једнаки нули, формата 3×2 и 2×3, то су матрице дате са

$$
\mathbf{O}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{O}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Особине сабирања матрица су:

$$
\begin{aligned}
A+B &= B+A; \text{ (комутативност сабирања матрица)} \\
A+(B+C) &= (A+B)+C. \text{ (асоцијативност сабирања матрица)}
\end{aligned}
$$

Особина транспоновања матрице је инволуција и "лепо" се слаже са збиром матрица помноженим реалним бројевима:

1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$;

2) $(\alpha A + \beta B)^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}} + \beta B^{\mathrm{T}}$, где су α и β реални бројеви.

На основу формуле 1) можемо закључити да ако транспонујемо матрицу два пута, добићемо полазну матрицу, што следи из дефиниције транспоновања матрица.

Из формуле 2) можемо извести следеће формуле:

2.1) $(\alpha A)^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}}$ (избором $\beta = 0$ у формули 2));

2.2) $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$ (избором $\alpha = \beta = 1$ у формули 2));

2.3) $(A - B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} - B^{\mathrm{T}}$ (избором $\alpha = 1$ и $\beta = -1$ у формули 2)).

(iv) Матрично множење ћемо најбоље објаснити кроз примере[4].

Напомена 3.2.2. Производ AB, матрица A и B, је могуће одредити једино у случају када је број колона матрице A једнак броју врста матрице B.

Пример 3.2.6 (Множење матрица). Уколико је могуће, одредити производ AB матрица

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Рад: Производ AB је могуће одредити, јер матрица A има 3 колоне, што је једнако броју врста матрице B. Пошто матрица A има 2 врсте, а матрица B има 2 колоне, то ће производ AB бити матрица која има 2 врсте и 2 колоне:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 & 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) \\ -2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 & -2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Пример 3.2.7. Да ли је могуће одредити производ AB матрица

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}?$$

Рад: Матрични производ AB није могуће одредити, јер матрица A има 3 колоне, а матрица B има 2 врсте.

□

Напомена 3.2.3. Множење матрица није комутативна операција. Дакле, у општем случају не важи

$$AB = BA.$$

[4]Производ AB матрица $A = [a_{ij}]_{m\times s}$ и $B = [b_{jk}]_{s\times n}$ је матрица $C = \left[\sum_{p=1}^{s} a_{ip}b_{pk}\right]_{m\times n}$.

Пример 3.2.8 (Контрапример којим се доказује некомутативност матричног множења). Нека су A и B матрице дате са

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Одредити AB и BA.

Рад: Како је

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 0 + 1\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 1 & 0\cdot 0 + 0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

док је

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

можемо закључити да је

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = BA.$$

Према томе, множење матрица није комутативна операција.

□

Множење матрица је асоцијативна операција, т.ј. за било које матрице A, B и C, одговарајућих формата, важи

$$A(BC) = (AB)C.$$

Такође, за било које матрице A, B и C, одговарајућих формата, важи:

(i) $A(B + C) = AB + AC$; (лева дистрибутивност множења према сабирању)
(ii) $(A + B)C = AC + BC$. (десна дистрибутивност множења према сабирању)

(v) Квадрирање и степеновање је могуће урадити само код квадратних матрица.

3.3 Квадратне матрице

Матрица чији је број врста једнак броју колона назива се квадратна матрица. У том случају број колона односно врста матрице назива се редом матрице. У примеру који следи, навешћемо један пример квадратне матрице.

Пример 3.3.1 (Квадратна матрица реда 4). Матрица

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

је квадратна матрица реда четири.

Дијагонална матрица је матрица код које су сви елементи ван главне дијагонале једнаки нули.

Пример 3.3.2 (Дијагонална матрица реда 4). Матрица

$$D_4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

је дијагонална матрица реда четири.

Дијагонална матрица чији су сви елементи са главне дијагонале једнаки јединици назива се јединична матрица.

Пример 3.3.3 (Јединична матрица реда 5). Јединична матрица реда 5 је дата са

$$I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Реална квадратна матрица A је:

(i) симетрична матрица ако је $A = A^{\mathrm{T}}$;

(ii) антисиметрична матрица или кососиметрична матрица ако је $A = -A^{\mathrm{T}}$;

(iii) ортогонална матрица ако је $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A = I$;

(iv) нормална матрица ако је $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A$;

(v) идемпотентна матрица ако је $A^2 = I$;

где I означава јединичну матрицу.

Приметимо да за горе одређене класе матрица важи:
(i) симетрична $\Rightarrow$ (iv) нормална;
(ii) антисиметрична $\Rightarrow$ (iv) нормална;
(iii) ортогонална $\Rightarrow$ (iv) нормална;

(i) симетрична $\wedge$ (v) идемпотентна $\Rightarrow$ (iii) ортогонална($\Rightarrow$ (iv) нормална);
(ii) антисиметрична $\wedge$ (v) идемпотентна $\Rightarrow$ није ортогонална;
(ii) антисиметрична $\wedge$ (v) идемпотентна $\Rightarrow$ (iv) нормална;
(i) симетрична $\wedge$ (iii) ортогонална $\Rightarrow$ (v) идемпотентна.

Теорема 3.3.1 (Било која два услова имплицирају трећи). Ако матрица поседује било које две од следећих особина:

1) симетрична;

2) ортогонална;

3) идемпотентна;

онда обавезно поседује и трећу.

Пример 3.3.4 (Симетрична матрица). Квадратна матрица реда 4 дата са

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \\ -4 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

је пример симетричне матрице.

Пример 3.3.5 (Антисиметрична матрица). Квадратна матрица A реда 4 дата са

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

је пример антисиметричне матрице.

Дефиниција 3.3.1 (Степен матрице). Степен квадратне матрице A се дефинише на следећи начин

(i) $A^0 = I$;

(ii) $A^k = A^{k-1} \cdot A$, $k \in \mathbb{N}$.

Пример 3.3.6. Други степен (квадрат) матрице

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

је одређен са

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3\cdot 3 + 2\cdot 1 + 0\cdot 0 & 3\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 0\cdot(-2) & 3\cdot 0 + 2\cdot 2 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 3 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot(-2) & 1\cdot 0 + (-1)\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 3 + (-2)\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 2 + (-2)\cdot(-1) + 1\cdot(-2) & 0\cdot 0 + (-2)\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 9+2+0 & 6-2+0 & 0+4+0 \\ 3-1+0 & 2+1-4 & 0-2+2 \\ 0-2+0 & 0+2-2 & 0-4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Трећи степен (куб) матрице A одређен је са

$$\begin{aligned}
A^3 = A^2 \cdot A &= \begin{bmatrix} 11 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 11\cdot 3 + 4\cdot 1 & 11\cdot 2 + 4\cdot(-1) + 4\cdot(-2) & 4\cdot 2 + 4\cdot 1 \\ 2\cdot 3 + (-1)\cdot 1 & 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2 \\ (-2)\cdot 3 & (-2)\cdot 2 + (-3)\cdot(-2) & (-3)\cdot 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 33+4 & 22-4-8 & 8+4 \\ 6-1 & 4+1 & -2 \\ -6 & -4+6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & 10 & 12 \\ 5 & 5 & -2 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Пример 3.3.7. Описати све ортогоналне матрице другог реда.

Пример 3.3.8. Описати све идемпотентне матрице другог реда.

Рад: Било која квадратна матрица другог реда може се представити у облику

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Из услова

$$A^2 = I$$

добијамо

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

односно

$$\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Одакле закључујемо да мора бити

$$a^2 + bc = 1, \qquad bc + d^2 = 1, \tag{3.1}$$

као и

$$(a+d)b = 0, \qquad (a+d)c = 0. \tag{3.2}$$

Надаље треба размотрити случајеве при којима реални бројеви a, b, c и d задовољавају релације (3.1) и (3.2).

□

Пример 3.3.9. Под којим условима је дијагонална матрица ортогонална?

Рад: Претпоставимо да дијагонална матрица

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

испуњава услов ортогоналности

$$DD^{\mathrm{T}} = D^{\mathrm{T}}D = I.$$

Како је дијагонална матрица симетрична, т.ј. $D = D^{\mathrm{T}}$, то услов ортогоналности дијагоналне матрице D гласи

$$D^2 = I,$$

односно

$$D = \begin{bmatrix} d_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Према томе, елементи d_i, $i = 1, 2, \dots, n$ дијагоналне матрице D морају испуњавати услов

$$d_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Како су d_i, $i = 1, 2, \dots, n$ реални бројеви, можемо закључити да $d_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

□

3.4 Регуларна и сингуларна матрица

Код квадратних матрица можемо посматрати особине регуларности и сингуларности које дајемо у наставку.

Дефиниција 3.4.1 (Регуларна матрица). Квадратна матрица A је регуларна матрица или инвертибилна матрица ако постоји квадратна матрица B истог реда као и A, таква да је

$$AB = BA = I,$$

где је I јединична матрица чији је ред исти као и ред матрица A и B. Матрица B се назива инверзном матрицом матрице A и означава се A^{-1} .

Из дефиниције инверзне матрице следи да је $(A^{-1})^{-1} = A$.

Дефиниција 3.4.2 (Сингуларна матрица). Квадратна матрица A која није регуларна назива се сингуларна матрица или неинвертибилна матрица .

Пример 3.4.1 (Инверзна матрица пермутационе матрице). Одредити инверзну матрицу следеће пермутационе матрице

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рад: Квадрирањем матрице P добијамо

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I,$$

одакле можемо закључити да је $P^{-1} = P$.

□

Пример 3.4.2 (Инверзна матрица пермутационе матрице помножене бројем 2). Одредити инверзну матрицу следеће матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Рад: Матрица A се може представити у облику $A = 2P$, где је матрица P одређена са

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пошто је $P^2 = I$, односно $P^{-1} = P$, лако можемо одредити инверзну матрицу матрице $A = 2P$:

$$A^{-1} = (2P)^{-1} = \frac{1}{2}P^{-1} = \frac{1}{2}P,$$

чиме смо завршили задатак.

□

Теорема 3.4.1 (Особине инвертибилних матрица). Инвертибилне матрице $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ задовољавају следеће особине инвертибилних матрица :

1) матрица A^{T} је такође инвертибилна и важи
$$(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}};$$

2) матрица AB је такође инвертибилна и важи
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1};$$

3) матрица ABC је такође инвертибилна и важи
$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

Доказ. 1) Очигледно.

2) Докажимо по дефиницији да је матрица $B^{-1}A^{-1}$ управо инверз матрице AB:
$$ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$
и
$$B^{-1}A^{-1}AB = BIB^{-1} = BB^{-1} = I.$$
Према томе, на основу дефиниције инверзне матрице имамо да је $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3) Аналогно делу под 2). □

3.5 Питања

1. Како се добија транспонована матрица матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$?
2. Како се дефинише множење матрице $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ реалним бројем α?
3. Како је дефинисано сабирање (одузимање) матрица $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m\times n}$?
4. Који услов мора бити испуњем да бисмо могли да сабирамо или одузимамо матрице?
5. Како се дефинише производ матрица $A = [a_{ik}]_{m\times l}$ и $B = [b_{kj}]_{l\times n}$?
6. Који услов мора бити испуњен да бисмо могли да посматрамо производ AB матрица A и B?
7. Да ли је множење матрица комутативна операција?

8. Навести пример квадратне матрице реда 4.
9. Навести пример дијагоналне матрице реда 4.
10. Навести пример јединичне матрице реда 5.
11. Када за реалну квадратну матрицу A кажемо да је симетрична?
12. Када за реалну квадратну матрицу A кажемо да је антисиметрична?
13. Када за реалну квадратну матрицу A кажемо да је ортогонална?
14. Када за реалну квадратну матрицу A кажемо да је нормална?
15. Када за реалну квадратну матрицу A кажемо да је идемпотентна?
16. Дефинисати степен матрице.
17. Описати све идемпотентне матрице другог реда.
18. Под којим условима је дијагонална матрица ортогонална.
19. Дефинисати регуларну матрицу.
20. Дефинисати сингуларну матрицу.
21. Особине инвертибилних матрица.

3.6 Додатак

У овом одељку ћемо са m и n означавати природне бројеве. Матрица формата $m \times n$ (m са n) или типа $m \times n$ над пољем реалних бројева $\mathbb{R}$ је правоугаони низ кога чини $m \cdot n$ реалних бројева шематски распоређених у m врста и n колона. Скуп свих матрица формата $m \times n$ чији су елементи реални бројеви се означава са $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Матрица формата $m \times n$ се може представити у облику

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

при чему су реални бројеви a_{ij}, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, елементи матрице A. Први индекс означава број врсте, док други индекс означава број колоне, тако да се елемент a_{ij} јавља у пресеку i-те врсте и j-те колоне. Шодно томе, врло често се користи и следећа нотација

$$A = [a_{ij}]_{m \times n},$$

која означава да је A матрица формата m са n, при чему је a_{ij} елемент матрице A који се налази у пресеку i-те врсте и j-те колоне, где је $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ и $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Транспонована матрица матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ је матрица $A^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ чије су врсте колоне матрице A, а колоне врсте матрице A.

$A + B$ у развијеном облику гласи

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \ldots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Наведимо сада особине сабирања матрица и множења матрица реалним бројем.

Теорема 3.6.1 (Скуп матрица $\mathbb{R}^{m\times n}$ је векторски простор). За произвољне матрице $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и произвољне реалне бројеве $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ важи:

1) $A + B = B + A$;

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

3) $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ нула матрица $\mathbf{O}_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ испуњава
$$A + \mathbf{O}_{m\times n} = \mathbf{O}_{m\times n} + A = A;$$

4) $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}\ \exists (-A) \in \mathbb{R}^{m\times n} \therefore A + (-A) = \mathbf{O}_{m\times n}$;

5) $1 \cdot A = A$;

6) $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$;

7) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$;

8) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$.

Нула матрица формата $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ у ознаци $\mathbf{O}_{m\times n}$ има све елементе једнаке 0, т.ј.

$$\mathbf{O}_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Производ матрица $A = [a_{ik}]_{m\times l}$ и $B = [b_{kj}]_{l\times n}$ се одређује тако што врсте матрице A помножимо колонама матрице B путем следећег правила

$$AB = \left[\sum_{p=1}^{l} a_{ip} \cdot b_{pj}\right]_{m\times n}.$$

Наведимо сада неке особине које повезују операције сабирања и множења матрица.

Теорема 3.6.2. Нека су $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$ и $B, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ дате матрице. Тада важи

$$A(B+C) = AB + AC. \quad \text{(Закон дистрибуције множења према сабирању)}$$

Доказ. Доказ Теореме 3.6.2 директно следи из дефиниције множења и сабирања матрица. □

Теорема 3.6.3. Нека су $A, B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ и $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ дате матрице. Тада важи

$$(A+B)C = AC + BC.$$

Особина из Теореме 3.6.3 може се показати на основу дефиниције операција сабирања и множења матрица и одговарајућих особина реалних бројева, али је могуће и једноставније доказати ову теорему користећи појам линеарног пресликавања који се дефинише аналогно појму линеарне функције.

3.6.1 Квадратне матрице у општем случају

Квадратна матрица реда n је матрица формата $n \times n$ дата са

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Главну дијагоналу матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ одређују елементи a_{ii}, $i = 1, 2, \dots, n$.

Посматраћемо неке специјалне квадратне матрице.

Дефиниција 3.6.1. Матрица $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ облика

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

назива се дијагонална матрица реда n. Када желимо нагласити ред дијагоналне матрице можемо користити и ознаку D_n.

Дефиниција 3.6.2. Јединична матрица реда n је матрица $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ дефинисана са

$$I = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{n \text{ елемената}}.$$

За јединичну матрицу реда n можемо користити и ознаку I_n када желимо нагласити њен ред.

Квадратне матрице је могуће сабирати и множити, али на скупу квадратних матрица $\mathbb{R}^{n\times n}$ могуће је увести и једну додатну операцију која се назива степеновање матрица.

Најлакше је степеновати дијагоналне матрице.

Пример 3.6.1. Степен реда k дијагоналне матрице $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ је матрица D^k дата са

$$D^k = \begin{bmatrix} (d_{11})^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (d_{22})^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (d_{nn})^k \end{bmatrix}.$$

Специјално, ако је D јединична матрица, тада је и D^k такође јединична матрица.

Библиографија

[1] Tom S. Blyth and Edmund F. Robertson. *Basic Linear Algebra.* Springer, Great Britain, 2002. Second Edition.

[2] Ljubiša Kočinac. *Linearna algebra i analitička geometrija.* Prosveta, Niš, 1997. Drugo ispravljeno i dopunjeno izdanje.

[3] Robert A. Liebler. *Basic Matrix Algebra with Algorithms and Applications.* CRC Press, Taylor & Francis Group, LLC, Boca Raton, FL 33487-2742, 2003. Fifth Edition.

[4] Gradimir V. Milovanović and Radosav Ž. Đorđević. *Linearna algebra.* Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet, Niš, 2004.

[5] Gilbert Strang. *Introduction to Linear Algebra.* Wellesley - Cambridge Press, Wellesley MA 02482 USA, 2016. Fifth Edition.

[6] Gilbert Strang. *Linear Algebra and Learning from Data, First Edition.* Wellesley - Cambridge Press, Wellesley MA 02482 USA, 2019. First Edition.

Индекс

Листа симбола

$(AB)^{-1}$ инверзна матрица матрице AB

$(ABC)^{-1}$ инверзна матрица матрице ABC

$-A$ матрица чији се елементи добијају негацијом елемената матрице A

αA матрица A помножена бројем α

$\exists$ квантификатор "постоји"

$\forall$ квантификатор "за сваки"

$\mathbb{R}^{2\times 3}$ скуп свих реалних матрица које имају 2 врсте и 3 колоне

$\sum_{p=1}^{l} a_{ip} \cdot b_{pj}$ сума производа елемената a_{ip} и b_{pj}, при чему индекс p узима вредности $1, 2, \ldots, l$

$\therefore$ "тако да"

A^{-1} инверзна матрица матрице A

a_{ij} елемент матрице који се налази у пресеку i-те врсте и j-те колоне

A^0 нулти степен матрице A

A^2 квадрат матрице A

A^k k-ти степен матрице A

A^{T} транспонована матрица матрице A

D_4 дијагонална матрица реда четири

I_5 јединична матрица реда 5

$\mathbf{O}_{m\times n}$ нула матрица формата $m \times n$