UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Proyecto de grado:

ALGEBRAS DE FROBENIUS

Realizado por:
Milton M. Aguirre

Dirigido por:
PhD. Alexander Quintero Vélez

Un proyecto de grado presentado a la Universidad del Valle, en conformidad con los requisitos exigidos por el pregrado de matemáticas en la facultad de ciencias naturales y exactas, para optar al titulo de matemático.

Dedicado a
mi familia

Agradecimientos

A todas y cada una de esas personas que brindaron aportes a mi formación a lo largo de esta carrera y especialmente al profesor Alexander por sus aportes y concejos.

Resumen

Este proyecto tiene como propósito central proporcionar una exposición detallada del concepto de álgebra de Frobenius. Estas álgebras aparecen de forma natural en el estudio de las teorías cuánticas topológicas de campos y en la teoría de singularidades. El resultado principal consiste en ofrecer una caractetirzación de las álgebras de Frobenius en términos de counidades y comultiplicaciones.

Palabras clave: emparejamiento, modulo, álgebras, álgebras de Frobenius y formas de Frobenius

This project has as main purpose to provide a detailed exposition of the concept of Frobenius algebra. These algebras appear naturally in the study of topological quantum field theories and the theory of singularities. The main result is to provide a caractetirzación of Frobenius algebras in terms of counidades and comultiplicaciones.

Keywords: pairing, module, algebra, algebra Frobenius and forms of Frobenius

Índice general

Introducción

Al inicio del trabajo se dan algunas nociones básicas sobre espacios vectoriales, emparejamientos, álgebras, módulos, y se establece la notación y la terminología. A continuación, se expone la teoría "clásica" de las álgebras de Frobenius. Un *álgebra de Frobenius* se define como un álgebra A de dimensión finita equipada con un emparejamiento no degenerado asociativo, o, equivalentemente, equipado con un funcional lineal cuyo espacio nulo no contiene ideales no tríviales. Lo anterior, a su vez, resulta ser equivalente a la existencia de un isomorfismo A-lineal entre A y su espacio dual A^*.

El objetivo principal del trabajo es establecer una caracterización de la noción de álgebra de Frobenius. Para ser más específicos, se busca mostrar que un álgebra de Frobenius puede interpretarse como una bialgebra en la que existe una compatibilidad entre la multiplicación y la comultiplicación. Esta condición de compatibilidad es en realidad de naturaleza topológica. En vista de ello, un segundo objetivo que nos proponemos es desarrollar un lenguaje gráfico que permita encapsular las operaciones algebraicas que intervienen en la caracterización antes mencionada de álgebra de Frobenius.

Por último, se recopilan también algunos resultados sobre la categoría de las álgebras de Frobenius, a saber, que los homomorfismos entre álgebras de Frobenius son siempre invertibles, y que el producto tensorial de dos álgebras de Frobenius es de nuevo un álgebra de Frobenius.

Capítulo 1

Preliminares algebraicos

Se asume que el lector está familiarizado con la teoría de espacios vectoriales y la noción de producto tensorial, así como también algunos rudimentos básicos de la teoría de anillos y sus módulos. La breve reseña que sigue, es sobre todo incluida a fin de establecer la terminología, notación e introducir algunos puntos de vista ligeramente inusuales que son convenientes para los propósitos de este documento. Las afirmaciones expuestas en este texto se encuentran consignadas en [1].

1.1. Espacios vectoriales y espacios duales

A lo largo de este trabajo se fija como cuerpo base para cada espacio vectorial, el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$.

Un *espacio vectorial sobre* $\mathbb{C}$ es un grupo abeliano V equipado con una acción por la izquierda de $\mathbb{C}$, esto es, una aplicación $\mathbb{C} \times V \to V$, satisfaciendo el siguiente conjunto de axiomas:

$$
\begin{aligned}
c(v+v') &= cv + cv', && v, v' \in V,\ c \in \mathbb{C}\\
(c+c')v &= cv + c'v, && v \in V,\ c, c' \in \mathbb{C}\\
(c'c)v &= c'(cv), && v \in V,\ c, c' \in \mathbb{C}\\
1v &= v, && v \in V.
\end{aligned}
$$

Note en particular que $\mathbb{C}$ en sí mismo un espacio vectorial. La acción es simplemente la multiplicación en $\mathbb{C}$.

Una *aplicación lineal* entre dos espacios vectoriales V y W es un homomorfismo de grupos $T\colon V \to W$ que conmuta con la acción de $\mathbb{C}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \times V \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \times T"] \arrow[d] & \mathbb{C} \times W \arrow[d] \\
V \arrow[r, "T"] & W.
\end{tikzcd}$$

La composición de aplicaciones lineales se define de manera obvia. Por $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ designaremos a la categoría cuyos objetos son los espacio vectoriales y cuyos morfismos son las aplicaciónes lineales.

Es bien sabido que el conjunto de las aplicaciones lineales de V en W es un espacio vectorial, el cual denotaremos por $\mathrm{Hom}(V, W)$. Una aplicación lineal de un espacio vectorial V al campo base $\mathbb{C}$ se llama una *funcional lineal.* El espacio de funcionales lineales en V se llama el *dual de* V, y se denota por $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$.

Dada una aplicación lineal $T\colon V \to W$, la aplicación dual es

$$\begin{aligned} T^*\colon W^* &\longrightarrow V^* \\ \eta &\longmapsto T \circ \eta \end{aligned}$$

donde $T \circ \eta$ denota la composición $V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{\eta} \mathbb{C}$. De esta manera, tomando el dual en los espacios vectoriales y las aplicaciones lineales, se tiene un funtor contravariante de la categoría $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ en sí misma. El espacio vectorial $\mathbb{C}$ es auto-dual en el sentido de que existe una identificación canónica $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$: todo funcional lineal $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es la multiplicación por un elemento $a \in \mathbb{C}$ y se identifica a φ con a.

Lema 1.1. *Dado un vector v distinto de cero en un espacio vectorial V, existe un funcional lineal $\varphi \in V^*$ tal que $\varphi(v) \neq 0$.*

Como consecuencia inmediata de este resultado, se tiene el siguiente.

Corolario 1.2. *La aplicación lineal natural*

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow V^{**} = \mathrm{Hom}(V^*, \mathbb{C}) \\ v &\longmapsto \delta_v \end{aligned}$$

donde $\delta_v(\varphi) = \varphi(v)$ para todo $\varphi \in V^*$, es inyectiva.

Por último, vamos a examinar la reflexividad de los espacios vectoriales de dimensión finita. Suponga que V es de dimensión finita n, y fije una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Sea e_i^* la aplicación lineal que toma el valor 1 en e_i y cero en los otros vectores de la base. Entonces $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ es una base para V^* llamada la base dual. En particular, V^* es de dimensión n, y por lo tanto isomorfo a V. Sin embargo, no existe un isomorfismo.

Consideremos ahora el segundo espacio dual V^{**}. Este espacio es de nuevo de dimensión n, por lo que la aplicación inyectiva canónica del corolario 1.2 es un isomorfismo:

$$V \xrightarrow{\cong} V^{**}.$$

En efecto, en la notación del corolario, $\{\delta_{e_1}, \ldots, \delta_{e_n}\}$ es la base dual de $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$.

1.2. Emparejamientos entre espacios vectoriales

Comenzamos recordando brevemente el concepto de producto tensorial de espacios vectoriales. Sean V, W y T tres espacios vectoriales. Una *aplicación bilineal* $f\colon V \times W \to T$ es una aplicación tal que para cada $v \in V$ fijo, la aplicación resultante $f(v, -)\colon W \to T$ es lineal, y para cada $w \in W$ fijo, la aplicación resultante $f(-, w)\colon V \to T$ es lineal.

Dados dos espacios vectoriales V y W, su producto tensorial $V \otimes W$ es un espacio vectorial que es universal para las aplicaciones bilineales en el siguiente sentido: existe una aplicación bilineal $\rho\colon V \times W \to V \otimes W$ tal que dado cualquier espacio vectorial T y cualquier aplicación bilineal $f\colon V \times W \to T$, existe una única aplicación lineal $\overline{f}\colon V \otimes W \to T$ tal que $f = \overline{f} \circ \rho$.

Del mismo modo existe la noción de aplicación multilineal y los objetos universales son los productos tensoriales $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$. Este úlimo se puede construir de manera iterativa a partir del producto tensorial de dos factores, siempre que se identifiquen las maneras de de ajustar los paréntesis:

$$(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k) \otimes (W_1 \otimes \cdots \otimes W_l) \cong V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \otimes W_1 \otimes \cdots \otimes W_l.$$

Existe también un producto tensorial especial con cero factores. Por definición se trata de la aplicación lineal universal en ninguna variable. Esto no es otra cosa que el mismo $\mathbb{C}$, por lo que, de las reglas anteriores, se obtienen identificaciones canónicas

$$\mathbb{C} \otimes V \cong V \simeq V \cong \mathbb{C}.$$

Un *emparejamiento bilineal* (o simplemente un *emparejamiento*) de dos espacios vectoriales V y W es, por definición, una aplicación lineal $\beta\colon V \otimes W \to \mathbb{C}$. Cuando queremos escribir lo que hace a los elementos es conveniente escribirlo como

$$\begin{aligned} \beta\colon V \otimes W &\longrightarrow \mathbb{C} \\ v \otimes w &\longmapsto \langle v|w\rangle. \end{aligned}$$

Un emparejamiento $\beta\colon V \otimes W \to \mathbb{C}$ es llamado *no degenerado en la variable* V si existe una aplicación lineal $\gamma\colon \mathbb{C} \to W \otimes V$, llamado un *coemparejamiento*, tal que la siguiente composición es igual a la aplicación identidad de V:

$$V \cong V \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\mathrm{id}_V \otimes \gamma} V \otimes (W \otimes V) \cong (V \otimes W) \otimes V \xrightarrow{\beta \otimes \mathrm{id}_V} \mathbb{C} \otimes V \cong V. \tag{1.1}$$

En forma similar, β se llama *no degenerado en la variable* W si existe un coemparejamiento $\gamma\colon \mathbb{C} \to W \otimes V$, de tal manera que la siguiente composición es igual a la identidad de la aplicación W:

$$W \cong \mathbb{C} \otimes W \xrightarrow{\gamma\otimes \mathrm{id}_W} (W \otimes V) \otimes W \cong W \otimes (V \otimes W) \xrightarrow{\mathrm{id}_W \otimes \beta} W \otimes \mathbb{C} \cong W.$$

Estas dos nociones son provisionales (pero convenientes para la demostración del Lema 1.4 más adelante). La noción verdaderamente importante es la siguiente: el emparejamiento $\beta\colon V \otimes W \to \mathbb{C}$ se llama *simplemente no degenerado* si es a la vez no degenerado en V y en W.

Lema 1.3. *Si el emparejamiento es simplemente no degenerado, los dos coemparejamientos (que eran ambos denotados por γ) coinciden automáticamente.*

Demostración. Denotemos por γ_W al coemparejamiento que hace a β no degenerado en W, por γ_V al coemparejamiento que hace a β no degenerado en V. En otras palabras, tenemos $(\gamma_W \otimes \mathrm{id}_W) \circ (\mathrm{id}_W \otimes \beta) = \mathrm{id}_W$ y $(\mathrm{id}_V \otimes \gamma_V) \circ (\beta \otimes \mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_V$. Ahora considere la compuesta λ definida como

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\gamma_W \otimes \gamma_V} W \otimes V \otimes W \otimes V \xrightarrow{\mathrm{id}_W \otimes \beta \otimes \mathrm{id}_V} W \otimes V.$$

Factorizando a λ como:

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\gamma_V} W \otimes V \xrightarrow{\gamma_W \otimes \mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_V} W \otimes V \otimes W \otimes V \xrightarrow{\mathrm{id}_W \otimes \beta \otimes \mathrm{id}_V} W \otimes V$$

y utilizando la no degeneración en W, vemos que λ es igual a γ_V. Por otro lado, factorizando a λ como:

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\gamma_W} W \otimes V \xrightarrow{\mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_V \otimes \gamma_W} W \otimes V \otimes W \otimes V \xrightarrow{\mathrm{id}_W \otimes \beta \otimes \mathrm{id}_V} W \otimes V$$

y utilizando la no degenerción en V, vemos que λ es también igual a γ_W. □

Sea $\beta\colon V \otimes W \to \mathbb{C}$ un emparejamiento. Dejando el segundo argumento fijo $w \in W$, se obtiene un funcional lineal:

$$\begin{aligned} \beta_w\colon V &\longrightarrow \mathbb{C} \\ v &\longmapsto \langle v|w\rangle. \end{aligned}$$

Puesto que β es también lineal en el primer factor, la anterior prescripción define una aplicación lineal:

$$\begin{aligned} \beta_l\colon W &\longrightarrow V^* \\ w &\longmapsto \beta_w = \langle -|w\rangle. \end{aligned}$$

En forma similar, se puede fijar $v \in V$ para obtener un funcional lineal ${}_v\beta\colon W \to \mathbb{C}$, el cual viene dado por $w \mapsto \langle v|w\rangle$, y este a su vez define otra aplicación lineal

$$\begin{aligned} \beta_r\colon V &\longrightarrow W^* \\ v &\longmapsto {}_v\beta = \langle v|-\rangle. \end{aligned}$$

Existe una noción más débil de no degenerancia que se encuentra en muchos textos: $\beta\colon V \otimes W \to \mathbb{C}$ es *no degenerada* si las dos aplicaciones β_r y β_l son inyectivas. Nuestro propósito es compara las dos definiciones. Según se verá, coinciden en espacios de dimensión finita.

Lema 1.4. *El emparejamiento $\beta\colon V \otimes W \to \mathbb{C}$ es no degenerado en W si y sólo si W es finito-dimensional y la aplicación inducida $\beta_l\colon W \to V^*$ es inyectiva. Del mismo modo, la no degeneración en V es equivalente a tener a V de dimensión finita y a la inyectividad de $\beta_r\colon V \to W^*$.*

Demostración. Supongamos que β es no degenerado en W. Entonces el coemparejamiento $\gamma\colon \mathbb{C} \to W \otimes V$ premite escoger vectores en $W \otimes V$; esto es, $1 \mapsto \sum_{i=1}^n w_i \otimes v_i$, para vectores $w_i \in W$ y $v_i \in V$. Ahora tome un $x \in W$ arbitrario y envielo a través de la composición $W \to W \otimes V \otimes W \to W$:

$$x \longmapsto \sum_{i=1}^n w_i \otimes v_i \otimes x \longmapsto \sum_{i=1}^n w_i \langle v_i|x\rangle.$$

La no degenarancia en W significa que esta composición es la aplicación identidad. Así pues, $x = \sum_{i=1}^n w_i\langle v_i|x\rangle$ para cada $x \in W$. En particular, los vectores $w_1, \dots, w_n$ forman una base para W. Resta ver que la aplicación

$$\begin{aligned} \beta_l\colon W &\longrightarrow V^* \\ w &\longmapsto \beta_w = \langle -|w\rangle \end{aligned}$$

es inyectiva. Suponga que $\langle -|x\rangle$ es el funcional cero. Entonces, en particular, para los vectores $v_1, \cdots, v_n$ se tiene $\langle v_i|x\rangle = 0$. Pero esos escalares son exactamente las coordenadas de x en la "base" $w_1, \dots, w_n$. Luego, se concluye que x es el vector cero.

Recíprocamente, supongamos que W es de dimensión finita con base $w_1, \dots, w_n$ y que la aplicación $\beta_l\colon W \to V^*$ es inyectiva. Puesto que los w_j son linealmente independientes, la inyectividad de β_l implica que los funcionales $\langle -|w_j\rangle$ son también linealmente independientes. Por lo tanto, existen vectores $v_1, \dots, v_n$ tales que $\langle v_i|w_i\rangle = 1$ y $\langle v_i|w_j\rangle = 0$ para $i \neq j$. Defina el coemparejamiento γ haciendo $1 \to \sum_i w_i \otimes v_i$. Entonces, la imagen de un vector arbitrario $\sum_{j=1}^n c_j w_j$ por la composición $W \to W \otimes V \otimes W \to W$ viene dada por

$$\sum_{j=1}^n c_j w_j \longmapsto \sum_{i,j} w_i \otimes v_i \otimes c_j w_j \longmapsto \sum_{i,j} c_j w_i \langle v_i|w_j\rangle = \sum_{i=1}^n c_i w_i.$$

Luego β es no degenerada en W, como se pretendía mostrar. $\square$

Ejemplo 1.1. Sea V un espacio vectorial. La evaluación define un emparejamiento obvio

$$\begin{aligned} V \otimes V^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ v \otimes \varphi &\longmapsto \varphi(v). \end{aligned} \tag{1.2}$$

En general, no se puede garantizar que este emparejamiento sea no degenerado en el sentido fuerte. Es no degenerado si y sólo si V es de dimensión finita. Esto es una consecuencia inmediata del Lema 1.4 y el Corolario 1.2.

Lema 1.5. *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y sea $\beta\colon V \otimes W \to \mathbb{C}$ un emparejamiento. Entonces, β_r es la aplicación dual de β_l (modulo la identificación $V \xrightarrow{\cong} V^{**}$). Asimismo, β_l es la aplicación dual de β_r (modulo la identificación $W \xrightarrow{\cong} W^{**}$).*

Demostración. Por definición, el dual de β_l es

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(V^*, \mathbb{C}) &\longrightarrow \operatorname{Hom}(W, \mathbb{C}) \\ \xi &\longmapsto \xi \circ \beta_l \end{aligned}$$

Recordemos también que la identificación $V \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}(V^*, \mathbb{C})$ viene dada por $v \mapsto (\delta_v\colon \varphi \mapsto \varphi(v'))$. Calculemos la aplicación compuesta:

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow \operatorname{Hom}(W, \mathbb{C}) \\ v &\longmapsto \delta_v \circ \beta_l. \end{aligned}$$

Sea $w \in W$. Entonces $\beta_l(w) = \beta_w$, de donde se deduce que $\delta_v \circ \beta_l\colon w \mapsto \beta_w(v) = \langle v|w\rangle$. Concluimos, pues, que el dual de β_l es la aplicación que envía a v en $\langle v|-\rangle$. Esto coincide exactamente con β_r. $\square$

Para espacios vectoriales finito-dimensionales, el funtor dualisador es una equivalencia de categorías, por lo que, en particular, conserva la propiedad de ser invertible. Luego, en este caso, β_l es inyectivo si y sólo si β_r lo es. Se tiene entonces el resultado siguiente.

Lema 1.6. *Dado un emparejamiento*

$$\begin{aligned} \beta\colon V \otimes W &\to \mathbb{C} \\ v \otimes w &\mapsto \langle v|w\rangle, \end{aligned}$$

entre espacios vectoriales de dimensión finita, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) *β es no degenerado.*

(ii) *La aplicación lineal inducida* $\beta_l\colon W \to V^*$ *es un isomorfismo.*

(iii) *La aplicación lineal inducida* $\beta_r\colon V \to W^*$ *es un isomorfismo.*

En esta situación, es claro que todos los cuatro espacios vectoriales involucrados tienen la misma dimensión. Por otro lado, si se sabe que V y W tienen la misma dimensión, la no degeneración se puede también caracterizar por las siguientes condiciones, a priori más débiles:

(ii)′ $\langle v|w\rangle = 0$ para todo $v \in V \Rightarrow w = 0$.

(iii)′ $\langle v|w\rangle = 0$ para todo $w \in W \Rightarrow v = 0$.

Esta es tal vez la definición más habitual de no degenerancia.

Cabe señalar que en términos de bases, la no degeneración equivale simplemente a decir que la matriz que representa a β (y a β_l y a β_r) es invertible. Similarmente, la no degeneración en una variable significa tener una inversa a izquierda, y en la otra variable, significa la existencia de una inversa a derecha; estos dos deben coincidir según se vio en el Lema 1.3.

1.3. Álgebras y módulos

Una $\mathbb{C}$-*álgebra* es un espacio vectorial A junto con dos aplicaciones lineales

$$\mu\colon A \otimes A \to A, \qquad \eta\colon \mathbb{C} \to A, \tag{1.3}$$

llamadas, respectivamente, la *multiplicación* y la *unidad*, de tal manera que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes A \otimes A \arrow[dl, "\mu\otimes\mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A\otimes\mu"] & \\
A \otimes A \arrow[dr, "\mu"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "\mu"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \otimes A \arrow[r, "\eta\otimes\mathrm{id}_A"] \arrow[dr] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
& A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[d, "\mu"'] & A \otimes \mathbb{C} \arrow[l, "\mathrm{id}_A\otimes\eta"'] \arrow[dl] \\
A &
\end{tikzcd}$$

Aquí, $\mathrm{i}d_A$ denota la aplicación lineal identidad $A \to A$, y las aplicaciones diagonales sin etiquetas son las multiplicaciones por escalar, las cuales definen isomorfismos canónicos. En términos de elementos, vamos a representar la multiplicación por yuxtaposición

$$\mu\colon A \otimes A \longrightarrow A, \quad x \otimes y \longmapsto xy$$

y designaremos por 1_A a la imagen de 1 bajo la unidad $\eta : \mathbb{C} \to A$. Podemos entonces escribir los axiomas en términos de elementos de A, así:

$$(xy)z = x(yz) \quad \text{y} \quad 1_A x = x = x 1_A.$$

Estas condiciones son precisamente los requisitos de asociatividad y de unidad. Tenga en cuenta que lo que hemos definido no requiere conmutatividad en esta etapa.

Conviene en este punto hacer notar que existen tres estructuras que intervienen en la definición de una $\mathbb{C}$-álgebra: la $\mathbb{C}$-estructura (la multiplicación por escalares) y dos leyes de composición (suma y multiplicación). En la definición anterior, primero se consideran la $\mathbb{C}$-estructura y la adición, lo cual se estipula diciendo que A es un espacio vectorial, y luego se impone la multiplicación. Al definir la multiplicación en términos de productos tensoriales en lugar de productos cartesianos, se codifica la distributividad: tener una aplicación lineal $A \otimes A \to A$ es equivalente a tener una aplicación bilineal $A \times A \to A$, y esto a su vez es equivalente a decir que la multiplicación definida por esta aplicación se distribuye sobre sumas. En particular, A es un anillo.

Ejemplo 1.2. El espacio vectorial particular $\mathbb{C}$ es canónicamente una $\mathbb{C}$-álgebra: sea $\mu_{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la multiplicación en el cuerpo $\mathbb{C}$ (que es un isomorfismo), y sea $\eta_{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la aplicación identidad (también un isomorfismo). Es evidente que los axiomas se satisfacen. También se deduce que, si A es una $\mathbb{C}$-álgebra cualquiera, la unidad $\eta : \mathbb{C} \to A$ es un homomorfismo de anillos, es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \otimes A \arrow[r, "\eta\otimes\eta"] \arrow[d] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
\mathbb{C} \arrow[r, "\eta"] & A.
\end{tikzcd}$$

Es también posible definir una $\mathbb{C}$-álgebra comenzando con las dos leyes de composición y luego imponer la $\mathbb{C}$-estructura. Desde esta perspectiva, una $\mathbb{C}$-álgebra es simplemente un anillo A equipado con un homomorfismo de anillos $\mathbb{C} \to A$.

Desde luego, existe también una noción de *homomorfismo de* $\mathbb{C}$*-álgebras*, esto es, aplicaciones que preservan la adición, la multiplicación y la $\mathbb{C}$-estructura. Se designará por $\mathrm{Alg}_{\mathbb{C}}$ a la categoría cuyos objetos son las $\mathbb{C}$-álgebras y cuyos morfismos son los homomorfismos de $\mathbb{C}$-álgebras. Cabe resaltar, sin embargo, que en este documento nos ocupamos principalmente de $\mathbb{C}$-álgebras por separado, razón por la cual no se hará uso de la noción de homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras.

Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra. Un *A-módulo por la derecha* es un espacio vectorial M junto con una aplicación $\mathbb{C}$-lineal $\alpha\colon M \otimes A \to M$, llamada la acción por la derecha de A en M, que satisface los axiomas expresados por la conmutatividad de los siguientes dos diagramas:

$$\begin{tikzcd} M \otimes A \otimes A \arrow[r, "\alpha\otimes \mathrm{id}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M\otimes\mu"'] & M \otimes A \arrow[d, "\alpha"] \\ M \otimes A \arrow[r, "\alpha"] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \otimes A \arrow[d, "\alpha"'] & M \otimes \mathbb{C} \arrow[l, "\mathrm{id}_M\otimes\eta"'] \arrow[dl] \\ M & \end{tikzcd}$$

Si escribimos la acción como $\alpha\colon M \otimes A \to M$, $x \otimes a \mapsto x \cdot a$, entonces podemos expresar los axiomas en términos de elementos, así:

$$(x \cdot a) \cdot b = x \cdot (ab) \quad \text{y} \quad x \cdot 1_A = x.$$

Una vez más, vemos que la distributividad se codifica en el producto tensorial.

Ejemplo 1.3. Sea A un $\mathbb{C}$-álgebra cualquiera. Entonces A es naturalmente un A-módulo por la derecha sobre sí misma, ya que tenemos la multiplicación $\mu\colon A\otimes A \to A$ como caso especial de una acción. La asociatividad y los axiomas unitarios de μ pueden ser considerados como casos especiales de los dos axiomas para esta acción.

Sean M y N dos A-módulos por la derecha. Una aplicación lineal $f\colon M \to N$ se llama un *A-homomorfismo por la derecha* si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \otimes A \arrow[r, "f\otimes \mathrm{id}_A"] \arrow[d] & N \otimes A \arrow[d] \\ M \arrow[r, "f"] & N. \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

En otras palabras, para todo $x \in M$ y todo $a \in A$ se tiene $f(x\cdot a) = f(x)\cdot a$. También se dirá que f es una aplicación A-lineal por la derecha.

Está claro que la aplicación identidad de un A-módulo por la derecha es A-lineal por la derecha, y que la composición de los dos aplicaciones A-lineales por la derecha es de nuevo una aplicación A-lineal por la derecha. Por consiguiente, los A-módulos por la derecha y las aplicaciones A-lineales por la derecha forman una categoría que será denotada por Mod_A.

Las nociones de A-módulos por la izquierda y aplicación A-lineal por la izquierda se definen de manera similar. Un *A-módulo a izquierda* es un espacio vectorial M junto con una aplicación lineal $A \otimes M \to M$, escrita $a \otimes x \to a \cdot x$, que satisface $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$ y $1_A \cdot x = x$. En el caso especial en el que la $\mathbb{C}$-álgebra A es conmutativa, es fácil ver que las dos nociones de A-módulo coinciden. Una aplicación lineal $f\colon M \to N$ entre dos A-módulos por la izquierda se dice ser *A-lineal por la izquierda* si satisface $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$ para todo $x \in M$ y todo $a \in A$.

La razón principal por la que se deben considerar ambos tipos de módulos es la noción de dualidad. Supongamos que M es un A-módulo a la derecha. Entonces el espacio vectorial dual $M^* = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{C})$ tiene una estructura canónica de A-módulo por la izquierda dada por:

$$\begin{aligned} A \otimes M^* &\longrightarrow M^* \\ a \otimes \varphi &\longmapsto (a \cdot \varphi\colon x \mapsto \varphi(x \cdot a)). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Del mismo modo, si M es un A-módulo por la izquierda, entonces M^* se convierte en un A-módulo por la derecha a través de la regla $(\varphi \cdot a)(x) = \varphi(a \cdot x)$ con $\varphi \in M^*$, $a \in A$, $x \in M$.

Proposición 1.7. *Sean M y N dos A-módulos por la derecha y sea $f\colon M \to N$ un aplicación A-lineal por la derecha. Entonces la aplicación dual*

$$\begin{aligned} f^*\colon N^* &\longrightarrow M^* \\ \eta &\longmapsto \eta \circ f \end{aligned}$$

es un una aplicación A-lineal por la izquierda.

Demostración. Se debe verificar la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \otimes N^* \arrow[r, "id_A \otimes f^*"] \arrow[d] & A \otimes M^* \arrow[d] \\ N^* \arrow[r, "f^*"'] & M^* \end{tikzcd}$$

Recorriendo la parte superior del diagrama, vemos que $a \otimes \eta$ es enviado a $a \otimes (\eta \circ f)$ y luego a $a \cdot (\eta \circ f)$. Esta última es la forma lineal sobre M dada por $x \mapsto \eta(f(x \cdot a))$. Por otro lado, recorriendo la parte inferiordel diagrama se obtiene $a \otimes \eta \mapsto a \cdot \eta \mapsto (a \cdot \eta) \circ f$. Esta forma viene dada por $x \mapsto (a \cdot \eta)(f(x)) = \eta(f(x) \cdot a)$. El resultado es, pues, una consecuencia inmediata de la A-linealidad de f. □

Lo anterior muestra que la operación que asigna un módulo a su dual define un funtor contravariante de la categoría de los A-módulos por la derecha a la categoría de los A-módulos por la izquierda. Suponiendo que todos los módulos son de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$, entonces este funtor es una equivalencia de categorías.

En forma similar, si M y N son A-módulos por la izquierda y $f\colon M \to N$ es una aplicación A-lineal por la izquierda, entonces postcomposición con f define una aplicación A-lineal por la derecha $f^*\colon N^* \to M^*$ y esta .ºperación.ª su vez define un funtor contravariante de la categoría de los A-módulos por la izquierda a la categoría de los A-módulos por la derecha.

Proposición 1.8. *Si M es un A-módulo por la derecha de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$, entonces la identificación de espacios vectoriales $M \xrightarrow{\cong} M^{**}$ es un isomorfismo A-lineal por la derecha. De igual modo, si M es un A-módulo por la izquierda entonces dicha identificación es un isomorfismo A-lineal por la izquierda.*

Demostración. Para cada $x \in M$ fijo, sea δ_x el elemento que denota en M^{**} la evaluación en x, esto es, $\delta_x\colon \varphi \mapsto \varphi(x)$. Puesto que M^* es un A-módulo por la izquierda, M^{**} es un A-módulo por la derecha, así que tiene sentido multiplicar un elemento $a \in A$ por la derecha de δ_x. Por definición, $\delta_x \cdot a$ es la aplicación $\varphi \mapsto \delta_x(a \cdot \varphi) = \varphi(x \cdot a)$. En otras palabras, se trata simplemente de la evaluación de $x \cdot a$. Esto muestra que $M \to M^{**}$ es A-lineal por la derecha. □

1.4. Emparejamientos entre módulos

Dado un emparejamiento de espacios vectoriales $\beta\colon M \otimes N \to \mathbb{C}$, no tiene sentido preguntarse si éste es A-lineal puesto que $\mathbb{C}$ no es un A-módulo. Pero suponga que M es un A-módulo por la derecha y N es un A-módulo por la izquierda. Entonces es natural preguntarse si $\beta_l\colon N \to M^*$ es una aplicación A-lineal por la izquierda, y si $\beta_r\colon M \to N^*$ es una aplicación A-lineal por la derecha. Para responder esta pregunta, se introduce el siguiente concepto.

Un emparejamiento $\beta\colon M \otimes N \to \mathbb{C}$ como antes se dice que es *asociativo* si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & M \otimes A \otimes N \arrow[dl, "\alpha\otimes\mathrm{id}_N"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_M\otimes\alpha"] & \\
M \otimes N \arrow[dr, "\beta"'] & & M \otimes N \arrow[dl, "\beta"] \\
 & \mathbb{C} &
\end{tikzcd} \tag{1.6}$$

En otras palabras, el emparejamiento $x \otimes y \mapsto \langle x|y\rangle$ es asociativo cuando

$$\langle xa|y\rangle = \langle x|ay\rangle \text{ para cada } x \in M,\ a \in A,\ y \in N.$$

Lema 1.9. *Sea M un A-módulo por la derecha, N un A-módulo por la izquierda y sea $\beta\colon M \otimes N \to \mathbb{C}$ emparejamiento cualquiera. Entonces las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(i) $\beta\colon M \otimes N \to \mathbb{C}$ *es asociativa,*

(ii) $\beta_l\colon N \to M^*$ *es A-lineal por la izquierda,*

(iii) $\beta_r \colon M \to N^*$ *es A-lineal por la derecha.*

Demostración. Ya que la asociatividad es una condición simétrica es suficiente mostrar que $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Considere el diagrama que expresa la A-linealidad por la izquierda de $\beta_l \colon N \to M^*$:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes N & \xrightarrow{\mathrm{id}_A \otimes \beta_l} & A \otimes M^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \xrightarrow{\quad \beta_l \quad} & M^* \end{array}$$

Recorriendo la parte superior del diagrama, vemos que $a \otimes y$ es enviado al funcional lineal $x \mapsto \langle xa|y\rangle$. Recorriendo la parte inferior, se obtiene la forma $x \mapsto \langle x|ay\rangle$. La conmutatividad del diagrama significa que estas dos expresiones son iguales para todos los valores de $x \in M$, $a \in A$ y $y \in N$, lo cual es precisamente la condición de asociatividad. □

Ejemplo 1.4. Si M es un A-módulo por la derecha entonces el emparejamiento dado por la evaluación

$$\begin{aligned} M \otimes M^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x \otimes \varphi &\longmapsto \varphi(x) \end{aligned} \tag{1.7}$$

es asociativo, por definición de la estructura de A-módulo por la izquierda sobre M^*.

Sean ahora M y N dos espacios vectoriales, y considere el producto tensorial $M \otimes N$. Si M es también un A-módulo por la izquierda, entonces, $M \otimes N$ adquiere estructura de A-módulo por la izquierda mediante la aplicación obvia (multiplicación en M por la izquierda)

$$A \otimes M \otimes N \to M \otimes N.$$

Si N es un A-módulo por la derecha, igualmente obtenemos una estructura de A-módulo por la derecha sobe el producto tensorial dada por

$$M \otimes N \otimes A \to M \otimes N.$$

Se tiene además el siguiente resultado.

Proposición 1.10. *Sea N un A-módulo por la derecha, y sea M un espacio vectorial. Entonces, la aplicación lineal canónica* **??**

$$\begin{aligned} N^* \otimes M^* &\longrightarrow (M \otimes N)^* \\ \psi \otimes \phi &\longmapsto (x \otimes y \mapsto \phi(x)\psi(y)) \end{aligned} \tag{1.8}$$

es A-lineal izquierda.

Demostración. Considere el emparejamiento

$$(M \otimes N) \otimes (N^* \otimes M^*) \to \mathbb{C}$$

definido por acoplamiento primero de los dos módulos intermedios $N \otimes N^* \to \mathbb{C}$, y luego el acoplamiento de los dos exteriores. Este emparejamiento es asociativo, porque el emparejamiento $N \otimes N^*$ lo es. En virtud del Lema 1.9, lo anterior equivale a la A-linealidad por la izquierda de la aplicación adjunta $N^* \otimes M^* \to (M \otimes N)^*$, que es precisamente lo que se desea probar. □

Capítulo 2

Álgebras de Frobenius

Inicialmente se define un álgebra de Frobenius como una $\mathbb{C}$-álgebra A de dimensión finita equipado con un funcional lineal $\varepsilon : A \to \mathbb{C}$ cuyo espacio nulo no contiene ideales por la izquierda no triviales. Posteriormente, se establecen dos definiciones alternativas que permite caracterizar las álgebra de Frobenius en términos de la no degenerancía de ciertos emparejamientos. Luego se dan algunas propiedades básicas y algunos ejemplos concretos.

2.1. Definición de álgebra de Frobenius

A lo largo de esta sección se supone que A es de dimensión finita. Naturalmente, A viene dotada de una A-estructura por la izquierda y por la derecha.

Un funcional lineal $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ define un hiperplano en A,

$$\mathrm{Null}(\varphi) := \{x \in A | \varphi(x) = 0\}.$$

Dicho hiperplano será llamado el *espacio nulo de* φ, y es de destacar que no es un ideal o una subálgebra de A, sino simplemente un subespacio lineal.

Un *álgebra de Frobenius* es una $\mathbb{C}$-álgebra A de dimensión finita equipada con un funcional lineal $\varepsilon\colon A \to \mathbb{C}$ cuyo espacio nulo no contiene ideales no triviales por la izquierda. El funcional $\varepsilon \in A^*$ se llama una *forma de Frobenius.*

Nótese que la forma de Frobenius es parte de la estructura. Más adelante se verá que un álgebra dada puede admitir varias formas de Frobenius. Caracterizaciones equivalentes de la noción de álgebra de Frobenius también se darán en breve. Hay que hacer notar también que no tener ideales no triviales por la izquierda en $\mathrm{Null}(\varepsilon)$ es equivalente a no tener ideales principales no triviales por la izquierda en $\mathrm{Null}(\varepsilon)$, ya que todo ideal no trivial por la izquierda contiene un ideal principal no trivial por la izquierda –basta tomar un elemento no nulo en el ideal y considerar el ideal principal que éste genera. Así pues, la condición de Frobenius se puede expresar como sigue:

$$\varepsilon(Ay) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0.$$

Por otra parte, cada funcional lineal $\varepsilon\colon A \to \mathbb{C}$ (de Frobenius o no) determina canónicamente un emparejamiento $A \otimes A \to \mathbb{C}$ mediante la regla $x \otimes y \mapsto \varepsilon(xy)$. Es evidente que este emparejamiento es asociativo. Recíprocamente, dado un emparejamiento asociativo $A \otimes A \to \mathbb{C}$, denotado por $x \otimes y \mapsto \langle x|y\rangle$, se determina canónicamente un funcional lineal, a saber,

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \mathbb{C} \\ a &\longmapsto \langle 1_A|a\rangle = \langle a|1_A\rangle. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Es fácil comprobar que estas asignaciones son inversas la una de la otra, por lo que existe una correspondencia uno a uno entre los funcionales lineales sobre A y emparejamientos asociativos.

Ahora, la observación importante es la siguiente.

Lema 2.1. *Sea $\varepsilon : A \to \mathbb{C}$ un funcional lineal y sea $\langle -|-\rangle$ el correspondiente emparejamiento asociativo $A \otimes A \to \mathbb{C}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *El emparejamiento es no degenerado.*

(ii) $\mathrm{Null}(\varepsilon)$ *no contiene ideales por la izquierda no triviales.*

(iii) $\mathrm{Null}(\varepsilon)$ *no contiene ideales por la derecha no triviales.*

En particular, esto demuestra que en la definición del álgebra de Frobenius se pudo haber utilizado ideales por la derecha en lugar de ideales por la izquierda.

Demostración. En virtud de 1.6 (ii′) se concluye que $\langle -|-\rangle$ es no degenerada si y sólo si

$$\langle A|y\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0.$$

Por otro lado, por el modo en el que ε y $\langle -|-\rangle$ se determinan el uno al otro, lo anterior significa que

$$\varepsilon(Ay) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0,$$

que a su vez es equivalente a decir que $\mathrm{Null}(\varepsilon)$ no contiene ideales por la izquierda no triviales. Esto demuestra (i) $\Leftrightarrow$ (ii). La equivalencia (i) $\Leftrightarrow$ (iii) sigue utilizando la 'no degenerancia' en la otra variable. □

Puesto que la data que determina un emparejamiento bilineal asociativo es equivalente a la data que determina un funcional lineal, se puede dar lo siguiente definición alternativa de álgebra de Frobenius: Un *álgebra de Frobenius* es una $\mathbb{C}$-álgebra A de dimensión finita, equipada con un emparejamiento asociativo no degenerado $\beta\colon A \otimes A \to \mathbb{C}$. Dicho emparejamiento se denomina el *emparejamiento de Frobenius*.

El lemma 2.1 muestra que estas dos definiciones son efectivamente equivalentes ya que la estructura de una definición induce canónicamente la estructura de la otra.

Esta segunda definición de álgebras de Frobenius conduce rápidamente a un par de caracterizaciones, debido a que existen varias formas de caracterizar la no degenerancía de un emparejamiento. Recuerde de 1.6 que dado un emparejamiento no degenerado $\beta\colon A \otimes A \to \mathbb{C}$ se inducen dos isomorfismos lineales

$$\beta_l\colon A \xrightarrow{\cong} A^*, \quad \beta_r\colon A \xrightarrow{\cong} A^*.$$

Además, se puso de manifiesto en 1.9 que la asociatividad de β es equivalente a la A-linealidad por la izquierda de β_l, y también a la A-linealidad por la derecha de β_r. Hay que hacer notar que a pesar de que estas dos aplicaciones tienen el mismo dominio y codominio, no existe ninguna razón para que sean iguales! (de hecho, son duales la una de la otra).

Estas observaciones conllevan la tercera definición de álgebra de Frobenius: Un *álgebra de Frobenius* es una $\mathbb{C}$-álgebra A de dimensión finita equipada con un isomorfismo A-lineal por la izquierda a su dual A^*. Alternativamente (y equivalentemente) A está equipada con un isomorfismo A-lineal por la derecha a su dual A^*.

La discusión anterior muestra cómo cada una de estas dos estructuras es de manera natural inducida por el emparejamiento de Frobenius. Recíprocamente, dado un isomorfismo A-lineal por la izquierda $A \xrightarrow{\cong} A^*$, se puede reconstruir el emparejamiento no degenerado (el cual será asociativo debido a la A-linealidad por la izquierda del isomorfismo) y similarmente para un isomorfismo A-lineal por la derecha.

Como alternativa podemos relacionar estos isomorfismos A-lineales directamente a la forma de Frobenius de la primera definición como sigue. Dado un isomorfismo A-lineal por la izquierda $A \xrightarrow{\cong} A^*$ se obtiene un funcional lineal definido como la imagen de 1_A en A^*. El hecho de que el espacio nulo de este funcional no posee ideales no triviales por la izquierda se sigue fácilmente del hecho de que $A \xrightarrow{\cong} A^*$ es inyectiva y, además, A-lineal por la izquierda. Del mismo modo, un isomorfismo A-lineal por la derecha $A \xrightarrow{\cong} A^*$ determina naturalmente una forma de Frobenius.

En forma recíproca, dada la forma de Frobenius $\varepsilon\colon A \to \mathbb{C}$, se construye un isomorfismo de A-módulos por la izquierda $A \xrightarrow{\cong} A^*$ poniendo $1_A \mapsto \varepsilon$ y extendido a todo A usando la A-linealidad por la izquierda. Esta aplicación A-lineal por la izquierda es inyectiva ya que no existen ideales por la izquierda no triviales en $\mathrm{Null}(\varepsilon)$. Puesto que, además, los dos espacios tienen la misma dimensión sobre $\mathbb{C}$, también es sobreyectiva.

Para recapitular, dado una $\mathbb{C}$-álgebra A de dimensión finita, se tienen cuatro definiciones de la estructura de Frobenius:

- Existe un funcional lineal $\varepsilon\colon A \to \mathbb{C}$ cuyo espacio nulo no contiene ideales por la izquierda no triviales.

- Existe un emparejamiento no degenerado asociativo $\beta\colon A \otimes A \to \mathbb{C}$.
- Existe un isomorfismo A-lineal por la izquierda $A \xrightarrow{\cong} A^*$.
- Existe un isomorfismo A-lineal por la derecha $A \xrightarrow{\cong} A^*$.

Estas cuatro versiones de la estructura de Frobenius están canónicamente relacionadas entre sí, y por lo tanto, se suele pensar en ellas como la misma estructura. Pero esta estructura no es única. Por ejemplo, si $\varepsilon\colon A \to \mathbb{C}$ es una forma de Frobenius y $u \in A$ es invertible, entonces el funcional $x \mapsto \varepsilon(xu)$ es también una forma de Frobenius. De hecho, aunque los espacios nulos de estos dos funcionales no son los mismos, los ideales que contienen deben ser los mismos, ya que u es invertible. Más aún, si $\varepsilon\colon A \to \mathbb{C}$ es una forma de Frobenius entonces cualquier otra forma de Frobenius ε' en A es de esta forma. Para ver esto, considere los dos isomorfismos A-lineales por la izquierda inducidos por estas formas:

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{\cong} A^*, & A &\xrightarrow{\cong} A^*, \\ 1_A &\longmapsto \varepsilon, & 1_A &\longmapsto \varepsilon'. \end{aligned}$$

Entonces existe una única aplicación de comparación A-lineal por la izquierda $A^* \leftrightarrow A^*$ (una en cada dirección). Puesto que todas la aplicaciones involucradas son A-lineales por la izquierda, los dos isomorfismos están dados por multiplicación por la derecha por ciertos elementos u y u' en A, de modo que $\varepsilon' = u\varepsilon$ y $\varepsilon = u'\varepsilon'$; claramente u y u' son inversos el uno del otro.

Se registra la discusión anterior en el siguiente lema.

Lema 2.2. *Si A es una $\mathbb{C}$-álgebra con forma de Frobenius ε, entonces cualquier otra forma de Frobenius en A está dada por la composición de ε con la multiplicación por un elemento invertible de A. De manera equivalente, dado un isomorfismo A-lineal por la izquierda $\theta\colon A \xrightarrow{\cong} A^*$, los elementos en A^* que son formas de Frobenius son precisamente las imágenes de los elementos invertibles en A.*

Antes de pasar a los ejemplos, cabe destacar una clase importante de álgebras de Frobenius. Un álgebra de Frobenius A se llama un *álgebra de Frobenius simétrica* si cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes se satisface:

(i) La forma de Frobenius $\varepsilon\colon A \to \mathbb{C}$ es central, esto significa que $\varepsilon(ab) = \varepsilon(ba)$ para todo $a, b \in A$.

(ii) El emparejamiento $\langle -|-\rangle$ es simétrico; es decir, $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle$ para todo $a, b \in A$.

(iii) El isomorfismo A-lineal por la izquierda $A \xrightarrow{\cong} A^*$ es también A-lineal por la derecha.

(iv) El isomorfismo A-lineal por la derecha $A \xrightarrow{\cong} A^*$ es también A-lineal por la izquierda.

Nótese que los dos isomorfismos $A \xrightarrow{\cong} A^*$ coinciden en 1_A, lo cual implica que son iguales. Es evidente que un álgebra de Frobenius conmutativa es siempre simétrica. Las álgebras de Frobenius simétricas son a menudo llamadas *álgebras simétricas*. La condición $\varepsilon(ab) = \varepsilon(ba)$ que caracteriza las formas centrales también se conoce como la *condición de traza*.

En el contexto que se ha venido discutiendo, ser un álgebra de Frobenius es una estructura y no una propiedad. Esto significa que dada una $\mathbb{C}$-álgebra no tiene sentido preguntarse si se trata de un álgebra de Frobenius o no; la forma de Frobenius debe ser especificada. Muchas veces abusamos del lenguaje, diciendo: 'Sea A un álgebra de Frobenius', sin especificar la estructura de Frobenius. En este caso se asume tácitamente que una estructura particular ha sido elegida. En contraste, ser simétrica es una propiedad y no una estructura. Esto significa que dada un álgebra de Frobenius tiene sentido preguntarse si es simétrica o no; no es necesario hacer una elección.

Para ilustrar lo anterior, supóngase que A es una $\mathbb{C}$-álgebra, y que $\varepsilon\colon A \to \mathbb{C}$ y $\varepsilon'\colon A \to \mathbb{C}$ son dos estructuras de Frobenius. Entonces puede ocurrir que (A, ε) sea simétrica, en tanto que (A, ε') no lo sea. De hecho se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.3. *Sea (A, ε) un álgebra de Frobenius simétrica. Entonces cualquier otra forma de Frobenius central en A vendrá dada por la multiplicación con un elemento invertible y central de A.*

Recuérdese que un elemento de un anillo se denomina *central* si conmuta con cualquier otro elemento.

2.2. Ejemplos de álgebras de Frobenius

A continuación se presenta una colección de ejemplos de álgebras de Frobenius. A pesar de que algunos de ellos son algo avanzados en comparación con el nivel de los capítulos previos, se espera que el lector se pueda dar una idea de la universalidad de la noción de álgebra de Frobenius. En cada ejemplo, se supone que A es una $\mathbb{C}$-álgebra de dimensión finita.

Ejemplo 2.1 (El álgebra de Frobenius trivial)**.** Sea $A = \mathbb{C}$, y sea $\varepsilon\colon A \to \mathbb{C}$ la aplicación identidad de $\mathbb{C}$. Es evidente que no hay ideales en el núcleo de esta aplicación, así que se tiene un álgebra de Frobenius.

Ejemplo 2.2 (Extensiones de cuerpos algebraicos)**.** Sea A una extensión finita de $\mathbb{C}$. Dado que los cuerpos no poseen ideales no triviales, toda aplicación $\mathbb{C}$-lineal distinta de cero $A \to \mathbb{C}$ ha de ser una forma de Frobenius. Para el experto: si A es *separable* sobre $\mathbb{C}$, entonces la aplicación traza $A \to \mathbb{C}$ es una elección natural para una forma de Frobenius.

Ejemplo 2.3. El cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ es un álgebra de Frobenius sobre $\mathbb{R}$: una forma de Frobenius está dada por la asignación de 'la parte real'

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a + ib &\longmapsto a. \end{aligned}$$

(Podría también ser algo más exótico, como $2 + 3i \to 7$ o $1 - i \to 4$.)

Ejemplo 2.4 (Álgebras de división)**.** Sea A un álgebra de división de dimensión finita. Al igual que los cuerpos, las álgebras de división no tienen ideales no triviales por la izquierda (o ideales no triviales por la derecha). Por lo tanto, cualquier forma lineal no nula $A \to \mathbb{C}$ ha de ser una forma de Frobenius. Por ejemplo, los cuaterniones $\mathbb{H}$ forman un álgebra de Frobenius sobre $\mathbb{R}$. (Recuérdese que $\mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ con la multiplicación definida por $i^2 = j^2 = -1$ y $ij = -ji = k$.)

Ejemplo 2.5 (Álgebras de matrices)**.** El anillo $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ de todas las matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$ es un álgebra de Frobenius con respecto a la aplicación traza usual

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\colon \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a_{ij}) &\longmapsto \sum_i a_{ii}. \end{aligned}$$

Para ver que el emparejamiento bilineal inducido por Tr es no degenerado, tome la base de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ que consiste de las matrices E_{ij} con sólo una entrada diferente de cero $e_{ij} = 1$; claramente E_{ji} es el elemento dual de E_{ij} bajo este emparejamiento. Nótese que $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ es un álgebra de Frobenius simétrica puesto que AB y BA tienen la misma traza. Si se altera la forma de Frobenius mediante la multiplicación por una matriz invertible no central, se obtiene un álgebra de Frobenius no simétrica.

A manera de ejemplo, considérese $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ con la aplicación traza usual

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\colon \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto a + d. \end{aligned}$$

Al alterar y tomar como forma de Frobenius la composición

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto b + c \end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que este funcional no satisface la condición de traza.

Ejemplo 2.6 (Álgebras semi-simples de dimensión finita)**.** El *radical Jacobson* $J(A)$ de una $\mathbb{C}$-álgebra de dimensión finita A es la intersección de todos los ideales maximales por la izquierda (o equivalentemente, la intersección de todos los ideales maximales por la derecha). Ahora, un $\mathbb{C}$-álgebra de dimensión finita A es *semi-simple* si su radical de Jacobson es cero. El teorema de clasificación de Wedderburn establece que cada álgebra semi-simple de dimensión finita es isomorfa a un producto directo finito de álgebras de matrices sobre álgebras de división. Se sigue fácilmente que toda álgebra semi-simple admite una estructure de álgebra de Frobenius que, incidentalmente, resulta ser simétrica. Nótese que todos los ejemplos vistos hasta ahora son casos especiales de álgebras semi-simples.

Ejemplo 2.7 (Álgebras grupo)**.** Sea $G = \{t_0, ..., t_n\}$ un grupo finito con $t_0 = 1$. El *álgebra grupo* $\mathbb{C}G$ se define como el conjunto de combinaciones lineales formales $\sum c_i t_i$, donde $c_i \in \mathbb{C}$, con la multiplicación dada por la multiplicación en G. Se pueden definir una estructura de álgebra de Frobenius, tomando como forma de Frobenius el funcional

$$\begin{aligned} \varepsilon\colon \mathbb{C}G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t_0 &\longmapsto 1 \\ t_i &\longmapsto 0 \quad \text{para } i \neq 0 \end{aligned}$$

De hecho, el emparejamiento correspondiente $g \otimes h \mapsto \varepsilon(gh)$ es no degenerado ya que $g \otimes h \mapsto 1$ si y sólo si $h = g^{-1}$. También es fácil ver que esta álgebra de Frobenius es simétrica. Una vez más, es posible obtener un álgebra de Frobenius no simétrica alterando la forma de Frobenius con algún elemento no central (si los hay).

Como ejemplo conmutativo concreto, sea G el grupo de las raíces n-ésimas de la unidad. Entonces el álgebra grupo $\mathbb{C}G$ es isomorfa a $\mathbb{C}[x]/(x^n - 1)$ y la forma de Frobenius definida anteriormente sería $1 \mapsto 1$ y $x^i \mapsto 0$ para $i \neq 0 \, (\mathrm{mod}\, n)$.

Como ejemplo no conmutativo concreto, sea $G = \mathfrak{S}_3$ el grupo simétrico en tres letras. Puesto que $G = \mathfrak{S}_3$ está generado por dos transposiciones, sujeto a tres relaciones, el álgebra grupo $\mathbb{C}G$ es isomorfa a $\mathbb{C}\langle x, y\rangle/(x^2 - 1, y^2 - 1, xyx - yxy)$. Aquí, $\mathbb{C}\langle x, y\rangle$ designa el anillo de polinomios no conmutativos en dos variables. La forma de Frobenius envía $1 \to 1$ y anula el subespacio generado por $\{x, y, xy, yx, xyx\}$.

Ejemplo 2.8 (El anillo de funciones de clase)**.** Sea G un grupo finito de orden n. Una *función de clase* de G es una función $G \to \mathbb{C}$ que es constante en cada clase de conjugación. Las funciones de clase forman un anillo denotado $R(G)$. En particular, los caracteres (trazas de representaciones) son funciones de clase, y de hecho toda función de clase es una combinación lineal de caracteres.Existe un emparejamiento bilineal en $R(G)$ definido por

$$\langle \phi | \psi \rangle = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} \phi(t)\psi(t^{-1}).$$

Ahora bien, las relaciones de ortogonalidad (ver [4], (31.8)) afirman que los caracteres forman una base ortonormal de $R(G)$ con respecto a este emparejamiento bilineal, por lo que, en particular, el emparejamiento es no degenerado y determina una estructura de álgebra de Frobenius sobre $R(G)$.

Ejemplo 2.9 (Álgebras Jacobianas)**.** Sea $f \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ un polinomio en n variables y supóngase que el conjunto de los ceros $Z(f) \subset \mathbb{C}^n$ tiene una singularidad aislada en $0 \in \mathbb{C}^n$. Sea $J_f = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f) \subset \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ el ideal engendrado por las derivadas parciales de f. El anillo cociente $A_f = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]/J_f$ se llama el *álgebra Jacobiana* asociada a f.

Existe una forma de Frobenius canónica sobre A_f, definida mediante integración sobre una n-bola real alrededor de la singularidad. Para ser más precisos, si $B = \{z \mid \partial_i f(z) = \rho\}$, para $\rho > 0$, se define el funcional residuo por la regla

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_f \colon A_f &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{2n} \int_B \frac{g(z)\,\mathrm{d}z_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_n}{\partial_1 f(z) \cdots \partial_n f(z)}. \end{aligned}$$

Entonces, el teorema de dualidad local (ver Griffiths y Harris [25], página 659) establece que el emparejamiento bilineal correspondiente es no degenerado.

Ejemplo 2.10 (Anillos de cohomología)**.** Sea X una variedad compacta orientada de dimensión n y sea $\mathrm{H}^i(X)$ el i-ésimo grupo de cohomología de de Rham, esto es, $\mathrm{H}^i(X) = \{i$-formas diferenciables cerradas de modulo $(i-1)$-formas diferenciales exactas$\}$. Si se pone $\mathrm{H}^\bullet(X) = \bigoplus_{i=0}^n \mathrm{H}^i(X)$, es inmediato verificar que $\mathrm{H}^\bullet(X)$ es un anillo bajo el producto exterior. Integración sobre X con respecto a una forma de volumen cualquiera define entonces una aplicación lineal $\mathrm{H}^\bullet(X) \to \mathbb{R}$ y la así-llamada dualidad de Poincaré establece que el correspondiente emparejamiento bilineal $\mathrm{H}^\bullet(X) \otimes \mathrm{H}^\bullet(X) \to \mathbb{R}$ es no degenerado. Para ser más precisos, $\mathrm{H}^i(X)$ es el espacio dual a $\mathrm{H}^{n-i}(X)$. Así pues, $\mathrm{H}^\bullet(X)$ es un álgebra de Frobenius sobre $\mathbb{R}$.

2.3. Coálgebra y comultiplicación

La noción de coálgebra sobre $\mathbb{C}$ es la noción opuesta a la de $\mathbb{C}$-álgebra, en el sentido de que las aplicaciones estructurales y los diagramas que definen los axiomas se deben invertir. Así, una *coálgebra sobre* $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial A junto con dos aplicaciones lineales

$$\Delta \colon A \longrightarrow A \otimes A, \qquad \varepsilon \colon A \longrightarrow \mathbb{C}$$

tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \otimes A & \\
A \otimes A \arrow[ur, "\Delta\otimes\mathrm{id}_A"] & & A \otimes A \arrow[ul, "\mathrm{id}_A\otimes\Delta"'] \\
 & A \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[ur, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \otimes A & A \otimes A \arrow[l, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}_A"'] \\
 & A \arrow[ul] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}_A\otimes\varepsilon"] & A \otimes \mathbb{C} \\
A \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

La aplicación Δ se llama *comultiplicación* y $\varepsilon\colon A \to \mathbb{C}$ se llama la *counidad.* Los axiomas expresados en los diagramas se llaman *coasociatividad* y *condición de counidad.*

A continuación se dan algunos ejemplos.

Ejemplo 2.11 (Coálgebra de un conjunto)**.** Sea $S = \{t_0, \ldots, t_n\}$ un conjunto finito. Entonces la coalgebra sobre S se define tomando el espacio vectorial generado por S, con comultplicación dada por la aplicación diagonal $S \to S \times S$. Para ser más precisos, sea $C\colon = \mathbb{C}S$ el conjunto de combinaciones lineales formales de los elementos en S . La comultiplicación está dada por $t_i \to t_i \otimes t_i \in C \otimes C$ y se extiende linealmente a la totalidad de V. La counidad está dada por $t_i \to 1$ para cada t_i. Si S tiene estructura de grupo, entonces $\mathbb{C}S$ adquiere estructura de álgebra, y se recupera la definición de álgebra grupo, véase 2.7.

Ejemplo 2.12 (Coálgebra trigonométrica de Sweedler)**.** Sea V un espacio vectorial 2-dimensional con base $\{s, t\}$. Defináse una comultiplicación sobre V mediante la regla

$$\begin{aligned} s &\longmapsto s \otimes s - t \otimes t, \\ t &\longmapsto s \otimes t + t \otimes s. \end{aligned}$$

y una counidad sobre V mediante la regla

$$\begin{aligned} s &\longmapsto 1, \\ t &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que efectivamente la coasociatividad y la condición de counidad se satisfacen. La razón del nombre para esta coálgebra es la analogía con las fórmulas:

$$
\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),\\
\sin(x+y) &= \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y),\\
\cos(0) &= 1,\\
\sin(0) &= 0.
\end{aligned}
$$

No es una coincidencia que se haya denotado la counidad por ε igual que la forma de Frobenius. Uno de los principales resultados de este trabajo establece que todas las álgebra de Frobenius poseen una única estructura de coálgebra para la cual la forma de Frobenius es la counidad (véase la Proposición 3.7 para la afirmación exacta). Y recíprocamente, dada una $\mathbb{C}$-álgebra equipada con una estructura de coálgebra A-lineal, entonces la counidad es una forma de Frobenius (véase la Proposición 3.8). Se obtiene así otra caracterización para las álgebras de Frobenius –quizás la más importante. Vamos a dar una prueba bastante elemental, que ni siquiera utiliza coordenadas. Se basa en un cálculo diagramático que es bastante común en teoría de nudos y grupos cuánticos. Por lo general, las figuras representan gráficos de diversos tipos. Procederemos a adoptar una representación gráfica que es reminiscente de las superficies topológicas con frontera.

Capítulo 3

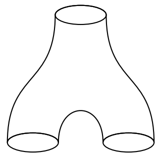
Cálculo diagramático

En este capítulo se hace una formalización gráfica de las aplicaciones que intervienen en la definición de álgebra de Frobenius, asignando a cada una de tales aplicaciones un diagrama que exprese de manera equivalente el número de entradas en su dominio y el número de salidas en el rango. Se expresan los teoremas y lemas en términos diagramáticos y se desarrollan algunas demostraciones utilizando los diagramas. Posteriormente se introducen diagramas equivalentes a la conmutatividad, la cocomuntatividad y por ultimo se interpretan en términos diagramáticos algunos elementos del cálculo tensorial.

3.1. Hacia la representación gráfica de las estructuras

Sea A un álgebra de Frobenius. Suponga que se quiere una comultiplicación en dicha álgebra. Según se vio en el capítulo anterior, todo lo que se tiene que especificar es la multiplicación $\mu\colon A \otimes A \to A$, la unidad $\eta\colon \mathbb{C} \to A$, y la forma de Frobenius $\varepsilon\colon A \to \mathbb{C}$, así como el emparejamiento de Frobenius $\beta\colon A \otimes A \to \mathbb{C}$, sin olvidar la aplicación identidad $\mathrm{id_A}\colon A \to A$. Estas aplicaciones satisfacen ciertas propiedades que se expresan en términos de diagramas conmutativos. La idea ahora es combinar estas aplicaciones de un modo natural para construir una comultiplicación, y luego combinar todos los diagramas con el fin de establecer los diagramas que expresan las propiedades que queremos desde esta comultiplicación. La segunda observación es ver que todos esos diagramas de construcción son las aplicaciones entre potencias tensorial de A; $A^{\otimes n}$ denota el producto tensorial de n copias de A.

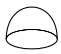
En el primer año de la escuela primaria, es común estimular el aprendizaje de la multiplicación de manera más divertida y más conceptual. La multiplicación se introduce como una máquina con dos orificios de entrada, donde se pueden tirar dos números, y luego la máquina procesara estas entradas y producirá un número que se reducirá a un único agujero de salida. Considerando está idea, se asigna a la multiplicación el siguiente diagrama:



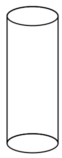
En la siguiente sección se verá como dicha interpretación permite adicionar completamente los axiomas definitorios de las estructuras que intervienen en un álgebra de Frobenius.

3.2. El diccionario.

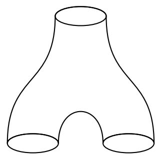
Primero se asignan los diagramas a las aplicaciones que definen una $\mathbb{C}$-álgebra:



η
unidad



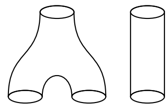
id_{A}
identidad



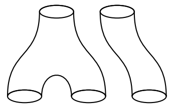
μ
multiplicación

La aplicación identidad no es en realidad parte de la estructura del $\mathbb{C}$-álgebra es algo aún más fundamental, puesto que ya es parte de la estructura de espacio vectorial sobre A, de hecho, está presente de forma automática en cualquier objeto en cualquier categoría.

Ahora se dará un significado preciso a cada diagrama: a lo largo de este capítulo, estos símbolos tienen la condición de símbolos matemáticos formales, al igual que los símbolos $\rightarrow$ o $\otimes$. El símbolo correspondiente a cada aplicación $\mathbb{C}$-lineal ϕ: $A^{\otimes m} \rightarrow A^{\otimes n}$ tiene m fronteras en la parte inferior (orificios de entrada): uno para cada factor de A en el origen, y se ordena de tal manera que el primer factor en el producto tensorial corresponde al orificio de entrada izquierdo y el último factor corresponde al orificio de entrada derecho. Si $m = 0$ simplemente se dibuja sin frontera. Del mismo modo hay n fronteras en la parte superior (orificios de salida) que se corresponden con el objetivo $A^{\otimes n}$, con la misma convención para el ordenamiento. El producto tensorial de dos aplicaciones se dibuja como la unión (disjunta) de los dos símbolos, ubicando el diagrama equivalente a la primera aplicación seguido por el diagrama de la segunda aplicación, de acuerdo con nuestra convención para ordenar. De hecho, el producto tensorial de dos aplicaciones se define por las dos aplicaciones funcionando de forma independiente en sus respectivos argumentos, por lo que es natural que se saque esto como dos tubos paralelos o, en la metáfora de la máquina, como dos procesos paralelos y lo mismo para múltiples productos tensoriales. Así, por ejemplo, la aplicación $\mu \otimes \mathrm{id_A}$ tiene símbolo



que a menudo se dibujará como:

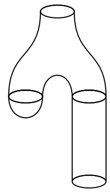


sólo por conveniencia con los diagramas.

Es evidente cómo el lenguaje diagramático debe capturar composiciones, es decir, unir los orificios de salida del primer diagrama con las entradas del segundo. Por ejemplo, la composición

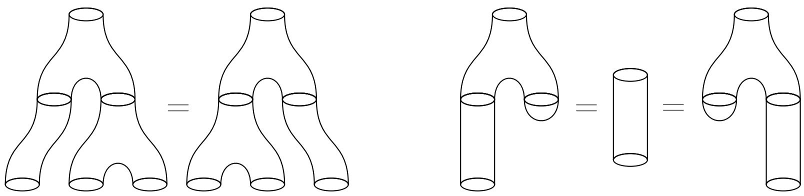
$$\mathbb{C} \otimes A \xrightarrow{\eta \otimes \mathrm{id_A}} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A$$

es representado por



Ahora se podrá escribir los axiomas de un álgebra en notación diagramática. La versión 'álgebra-libro' de los axiomas (como $(ab)c = a(bc)$) no puede ser fácilmente expresada en términos de diagramas porque no se tiene un método para tratar los elementos, pero la forma en que se han expresado los axiomas en 1.3 en términos de aplicaciones, permite desarrollar en términos de diagramas la igualdad de dos composiciones diferentes de aplicaciones. Es fácil expresar 1.3 en términos de diagramas:

Los axiomas $\mathbb{C}$-álgebra.



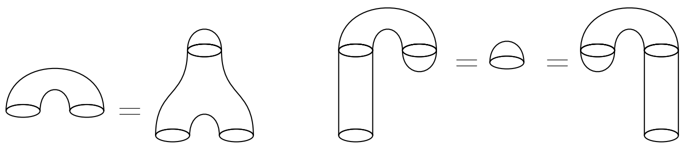
(3.1)

Cabe destacar que esto no es sólo una analogía o una ilustración de fantasía. Los símbolos dibujados arriba tienen un significado matemático preciso y expresan exactamente las mismas condiciones que los diagramas en 1.3.

Se quiere expresar la estructura de Frobenius en lenguaje diagramático. se tienen tres definiciones equivalentes, pero en la última (**??**), los A-isomorfismos $A \xrightarrow{\cong} A^*$, no encajan en la notación diagramática porque A^* no es una potencia del producto tensorial de A. La primera definición de álgebras de Frobenius implica una forma lineal $\varepsilon\colon A \to \mathbb{C}$, y la segunda un emparejamiento bilineal $\beta\colon A \otimes A \to \mathbb{C}$. De acuerdo con los principios expuestos al inicio del capitulo esas dos aplicaciones se representan como:

ε Forma de Frobenius $\quad$ β Emparejamiento de Frobenius (3.2)

Se puede extraer de inmediato la relación entre estas dos aplicaciones:



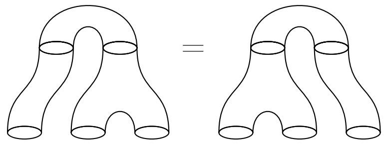
Estos son las relaciones $\langle x|y\rangle = \varepsilon(xy)$ y $\langle 1_A|x\rangle = \varepsilon x = \langle x|1_A\rangle$ explicado en 2.1. Las aplicaciones correspondientes a dichos diagramas están representadas por:

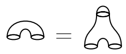
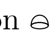
$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\ A \otimes A \arrow[ur, "\mu"] \arrow[rr, "\beta"'] & & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[dr, "\mu"] & \\ A \arrow[ur, "\eta\otimes \mathrm{id_A}"] \arrow[rr, "\varepsilon"'] \arrow[dr, "\mathrm{id_A}\otimes\eta"'] & & \mathbb{C} \\ & A \otimes A \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

Tenga en cuenta que se suprimen los $\mathbb{C}$-factores en los productos del tensor, escribiendo $A \xrightarrow{\mathrm{id_A}\otimes\eta} A \otimes A$ cuando en realidad se quiere decir $A \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\mathrm{id_A}\otimes\eta} A \otimes A$. Resulta difícil de expresar los axiomas que ε y β deben satisfacer con el fin de ser una forma de Frobenius y un emparejamiento de Frobenius, respectivamente. El axioma de una forma de Frobenius $\varepsilon\colon A \to \mathbb{C}$ es que su espacio nulo no contiene ideales distintos de cero, no se puede expresar esta condición en lenguaje diagramático porque no se tiene una forma de representar un ideal. En contraste, el axioma para el emparejamiento de Frobenius permite la expresión en términos de diagramas. Hay dos condiciones: la asociatividad (1.6) y la no degenerancía (1.1).

La expresión diagramática de la condición de asociatividad del emparejamiento de Frobenius β es

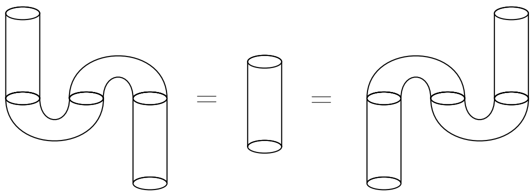


En vista de la relación , la ecuación de asociatividad para β se sigue de la ecuación de asociatividad para μ, simplemente poniendo un tapón  en el orificio de salida del diagrama 3.1.

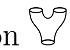
De acuerdo con la definición (1.1), no degenerancía significa la existencia de un coemparejamiento $\gamma\colon \mathbb{C} \to A \otimes A$ tal que estos dos esquemas conmutan:

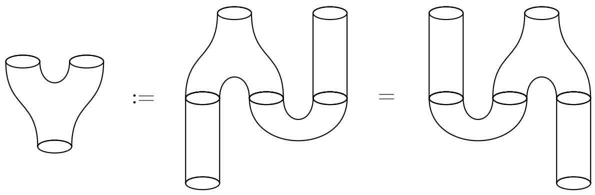
$$
\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes A \arrow[d, "\beta\otimes\mathrm{id_A}"'] & A \arrow[l, "\mathrm{id_A}\otimes\gamma"'] \arrow[dl] \\
A &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\gamma\otimes\mathrm{id_A}"] \arrow[dr] & A\otimes A\otimes A \arrow[d, "\mathrm{id_A}\otimes\beta"] \\
& A
\end{tikzcd}
\tag{3.3}
$$

Ahora que se conoce la forma de representar las aplicaciones mediante diagramas, se pone en manifiesto la no degenerancía en términos diagramáticos, ya que estos son los diagramas de aplicaciones entre las potencias del tensor de A. Es decir que existe  tal que:



Esto es realmente la propiedad crucial, en el resto del documento se hará referencia a está propiedad como la *relación serpiente*.

El objetivo es mostrar que un álgebra de Frobenius (A, ε) tiene una estructura de coálgebra natural para que ε sea la counidad. Para construir una comultiplicación  en A, el elemento clave es exactamente el coemparejamiento , ya que sirve para girar alrededor de un orificio de entrada para que se convierta en un orificio de salida. Simplemente se pondrá:

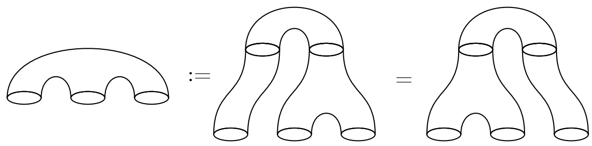


La primera tarea es mostrar que estas dos definiciones coinciden (que es el contenido del Lema 3.2). Con ese fin, es práctico introducir la función de tres puntos (es generalmente llamada así en la teoría de campos).

La *función de tres puntos* $\phi\colon A \otimes A \otimes A \to \mathbb{C}$ se define por

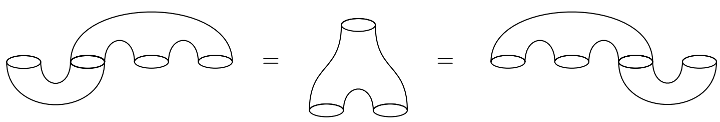
$$\phi\colon = \beta \circ (\mathrm{id_A} \otimes \mu) = \beta \circ (\mu \otimes \mathrm{id_A}), \tag{3.4}$$

que en el lenguaje de diagramas se lee

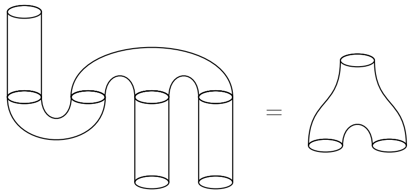


La asociatividad de β dice que las dos expresiones coinciden (En otras palabras, $\phi(a, b, c) = \langle ab|c\rangle = \langle a|bc\rangle$). En un sentido figurado, se puede decir que el emparejamiento  se utiliza para dar la vuelta al orificio de salida de  ; entonces, en los estados de asociatividad, no importa en qué dirección se da la vuelta. Por el contrario, si se utiliza la relación de serpiente se puede expresar  en términos de la función de tres puntos:

Lema 3.1.



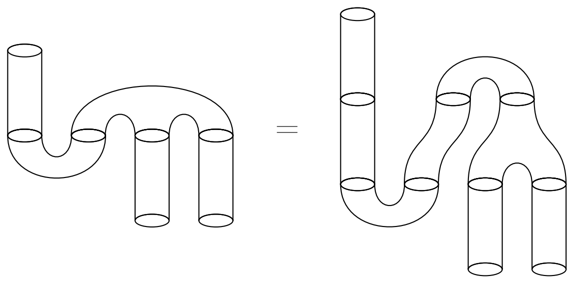
Demostración. Esta es la primera prueba diagramatica, por lo que se va a caminar a través de ella lentamente. La prueba se realizará en la ecuación de la izquierda, el proceso en la ecuación de la derecha es completamente análogo. En primer lugar se debe explicar lo que se entiende por el diagrama. Tal como está en realidad no representan una composición, los orificios de entrada y salida no coinciden, esto es porque se han omitido algunas aplicaciones de identidad. Lo que se quiere decir realmente es



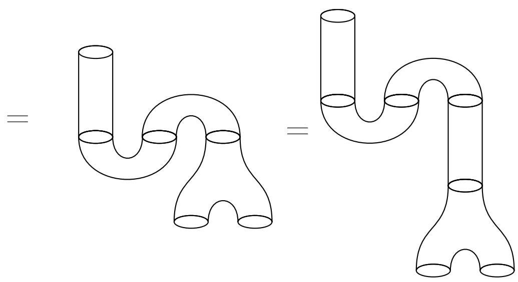
Esta omisión resulta inofensiva, por lo que por simplicidad se va a escribir más a menudo de esa manera. Aquí, en esta prueba, sin embargo, se va a escribir todo, con el fin de ilustrar la inocuidad de la omisión. En primer lugar se va escribir la declaración en términos de un esquema de aplicaciones:

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[dr, "\phi \otimes \mathrm{id_A}"] & \\
A \otimes A \arrow[ur, "\mathrm{id_A} \otimes \mathrm{id_A} \otimes \gamma"] \arrow[rr, "\mu"'] & & A
\end{tikzcd}$$

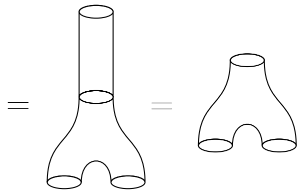
Se debe tener en cuenta que se omitieron los $\mathbb{C}$-factores. Continuando con el desarrollo de la prueba se utiliza la definición de la función de tres puntos:



Luego se retiran cuatro aplicaciones de identidad, y se inserta una nueva justo después de la multiplicación (con el fin de alinear las cosas a favor):



Ahora se usa la relación de serpiente (este es el paso crucial) y finalmente se elimina la aplicación de identidad:



$\square$

Para subrayar que cada paso en la prueba diagramática es de hecho un diagrama conmutativo, vamos a reformular toda la prueba.

Demostración. En esquemas del diagrama anterior. Para empezar considere la siguiente composición

$$
\begin{tikzcd}
& A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[dr, "\phi \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}}"] & \\
A \otimes A \arrow[ur, "\mathrm{id}_{\mathrm{A}} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}} \otimes \gamma"] & & A
\end{tikzcd}
$$

el primer paso fue utilizar el diagrama que expresa la definición de ϕ, para completar el siguiente triángulo:

$$
\begin{tikzcd}
& A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[d, "\mu \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}}"] \arrow[ddr, "\phi \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}}"] & \\
& A \otimes A \otimes A \arrow[dr, "\beta \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}}"'] & \\
A \otimes A \arrow[uur, "\mathrm{id}_{\mathrm{A}} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}} \otimes \gamma"] & & A
\end{tikzcd}
$$

luego bastaba observar que esas aplicaciones de identidad en las dos primeras aplicaciones eran superfluas, esto equivale a completar otro triángulo:

$$
\begin{tikzcd}
 & A\otimes A\otimes A\otimes A \arrow[d, "\mu\otimes\mathrm{id}_A\otimes\mathrm{id}_A"] \arrow[ddr, "\phi\otimes\mathrm{id}_A"] & \\
 & A\otimes A\otimes A \arrow[dr, "\beta\otimes\mathrm{id}_A"'] & \\
A\otimes A \arrow[uur, "\mathrm{id}_A\otimes\mathrm{id}_A\otimes\gamma"] \arrow[ur, "\mu\otimes\gamma"'] & & A
\end{tikzcd}
$$

a continuación se inserta una nueva aplicación de identidad y coemparejamiento, de esta forma:

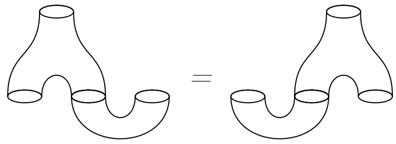
$$
\begin{tikzcd}
 & A\otimes A\otimes A\otimes A \arrow[d, "\mu\otimes\mathrm{id}_A\otimes\mathrm{id}_A"] \arrow[ddr, "\phi\otimes\mathrm{id}_A"] & \\
 & A\otimes A\otimes A \arrow[dr, "\beta\otimes\mathrm{id}_A"'] & \\
A\otimes A \arrow[uur, "\mathrm{id}_A\otimes\mathrm{id}_A\otimes\gamma"] \arrow[ur, "\mu\otimes\gamma"'] \arrow[r, "\mu"'] & A \arrow[u, "\mathrm{id}_A\otimes\gamma"] & A
\end{tikzcd}
$$

Por último, se utiliza el hecho de que β es no degenerado (diagrama 1.1), para rellenar el último triángulo con una aplicación de la identidad id_A, finalmente se puede observar que la composición $\mathrm{id}_A\mu$ es simplemente el mismo μ (la flecha curva):

$$
\begin{tikzcd}
 & A\otimes A\otimes A\otimes A \arrow[d, "\mu\otimes\mathrm{id}_A\otimes\mathrm{id}_A"] \arrow[ddr, "\phi\otimes\mathrm{id}_A"] & \\
 & A\otimes A\otimes A \arrow[dr, "\beta\otimes\mathrm{id}_A"'] & \\
A\otimes A \arrow[uur, "\mathrm{id}_A\otimes\mathrm{id}_A\otimes\gamma"] \arrow[ur, "\mu\otimes\gamma"'] \arrow[r, "\mu"'] \arrow[rr, bend right, "\mu"'] & A \arrow[u, "id_A\otimes\gamma"] \arrow[r, "\mathrm{id}_A"'] & A
\end{tikzcd}
$$

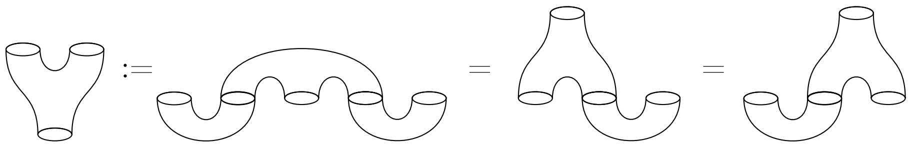
que es lo que se quería demostrar. $\square$

Lema 3.2. *Se tiene*



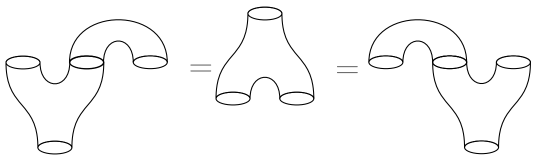
Demostración. Se sigue inmediatamente usando las expresiones dadas por  en 3.1. □

Ahora se define una *comultiplicación* Δ

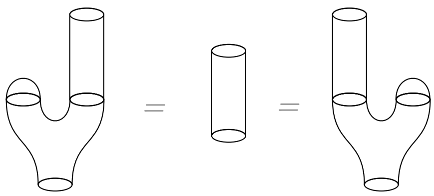
 (3.5)

Esto tiene sentido, debido a 3.1

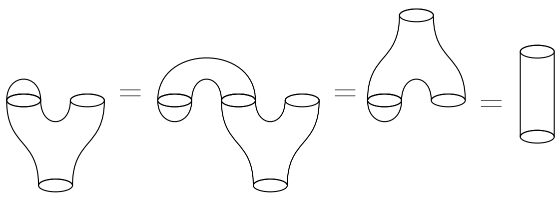
Multiplicación en términos de comultiplicación. Por lo que, convirtiendo algunos agujeros de nuevo, utilizando β, y luego usando la relación serpiente, también se obtiene las relaciones duales de 3.5:

 (3.6)

Lema 3.3. *La forma de Frobenius ε es counidad para Δ:*

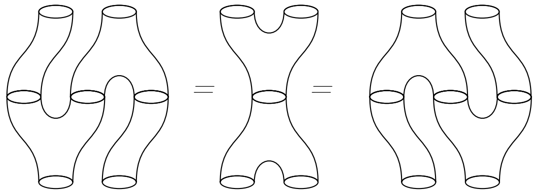


Demostración. Suprimiendo las aplicaciones de identidad, se puede escribir



Esta vez, el primer paso fue utilizar la forma de Frobenius expresada en 3.2, luego se utilizó la relación 3.6. Finalmente se empleó el elemento neutro para la multiplicación (véase 3.1). La igualdad de la derecha es análoga. □

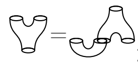
Lema 3.4. *La comultiplicación Δ definida anteriormente satisface la siguiente relación, llamada la condición de Frobenius.*

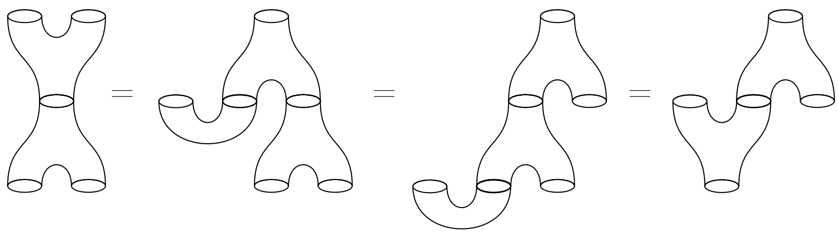


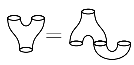
La igualdad de la derecha equivale a la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \otimes \underline{A} \arrow[r, "\Delta\otimes \mathrm{id_A}"] \arrow[d, "\mu"'] & A \otimes A \otimes \underline{A} \arrow[d, "\mathrm{id_A}\otimes\mu"] \\ A \arrow[r, "\Delta"'] & A \otimes A \end{tikzcd}$$

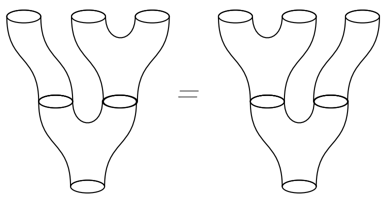
que a su vez expresa la A-linealidad derecha de Δ. (Las copias subrayadas de A son las que actúan por la multiplicación escalar). Del mismo modo la ecuación de la izquierda expresa A-linealidad izquierda.

Demostración. Para la ecuación de la izquierda, se considera ; a continuación, se emplea la asociatividad, y finalmente se utiliza la relación de nuevo:

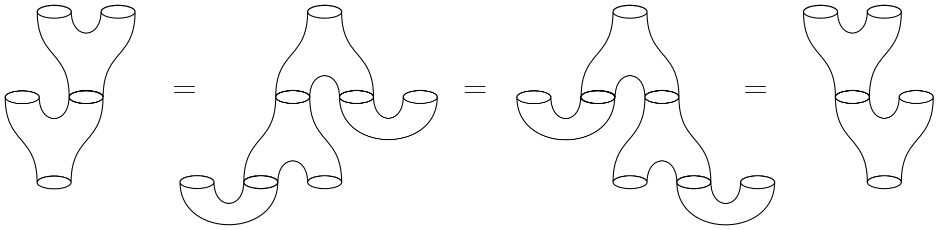


Se obtiene la igualdad de la derecha utilizando  □

Lema 3.5. *La comultiplicación es coasociativa:*



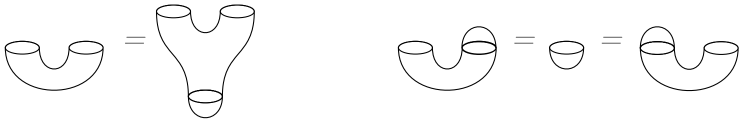
Demostración. Se emplea la definición de Δ expresada en (3.5), luego la asociatividad y finalmente la definición otra vez:



$\square$

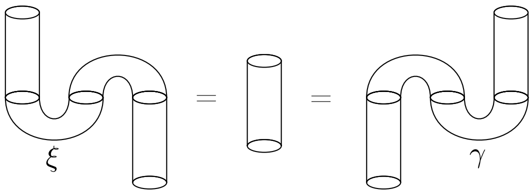
El siguiente lema muestra que la relación entre el coemparejamiento y la unidad es análogo (dual) a la relación entre el emparejamiento de Frobenius y la forma de Frobenius (relación 3.2).

Lema 3.6. *Se tiene:*

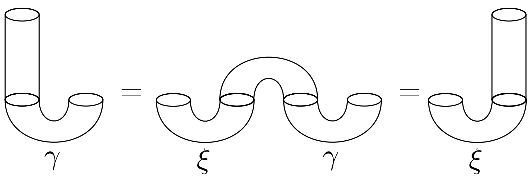


Proposición 3.7. *Dada un álgebra de Frobenius (A, ε), existe una única comultiplicación*  *cuya counidad es ε, además satisface la relación de Frobenius y es asociativa.*

Demostración. Ya se ha construido una comultiplicación tal que (3.5, 3.3, 3.4), y se estableció su asociatividad (3.5). Queda por demostrar que es única. Esto es una consecuencia del hecho de que el coemparejamiento correspondiente a un emparejamiento no degenerado es único, como se demostró en 1.3. Se repetirá la prueba en el lenguaje diagramático. Sea $\beta=$  un emparejamiento y suponga que ξ y γ son dos emparejamientos correspondientes:



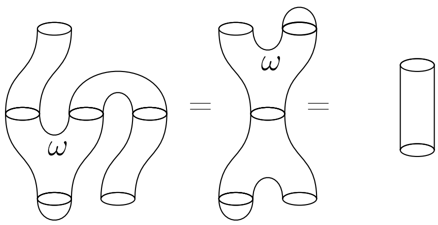
Entonces se consigue



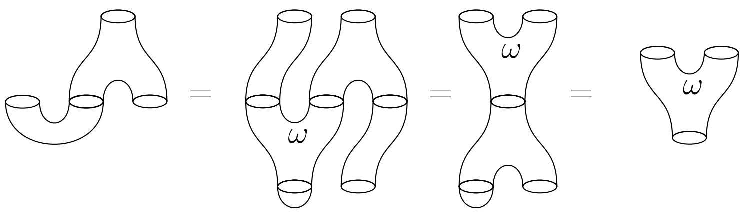
(3.7)

que quiere decir que ξ y γ coinciden. $\square$

Ahora por la singularidad de la comultiplicación: se supone que ω es otra comultiplicación con counidad ε y que satisface la relación de Frobenius. En el siguiente par de argumentos, se trabaja con el lado izquierdo de la relación de Frobenius para ω, estableciendo la mitad de las relaciones que se necesitan. Las otras relaciones siguen aplicando argumentos similares en el lado derecho. Poniendo tapones en el orificio de entrada izquierdo y el orificio de salida derecho de la relación de Frobenius se ve que $\omega\eta$ satisface la ecuación de la serpiente



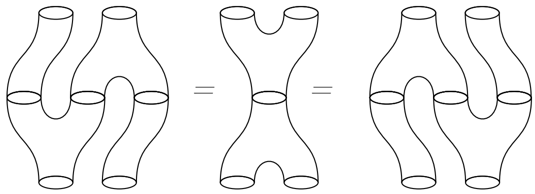
por los axiomas de la unidad y counidad. Así que por la unicidad del coemparejamiento se tiene $\omega \circ \eta = \gamma$. Usando este resultado, si en el diagrama anterior sólo se pone el tapón η, entonces se obtiene como resultado



Es decir, ω es nada más dar vuelta a la aplicación μ la cual queda con un orificio de entrada, al igual que se definió Δ.

Se llama la condición de Frobenius a 3.4 en vista de que caracteriza a las álgebra de Frobenius, como el siguiente resultado muestra. De hecho, se caracteriza álgebras de Frobenius no sólo entre las álgebras asociativas de dimensión finita, sino también entre los espacios vectoriales generales equipados con la multiplicación unitaria. Precisamente se tiene:

Proposición 3.8. *Sea A un espacio vectorial equipado con una aplicación de multiplicación $\mu\colon A \otimes A \to A$ denotada*  *, con la unidad $\eta\colon \mathbb{C} \to A$ denotado*  *, una comultiplicación $\Delta\colon A \to A \otimes A$ denotado*  *, con counidad $\varepsilon\colon A \to \mathbb{C}$ denotada*  *,* *y suponga que tiene la relación de Frobenius:*

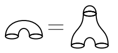


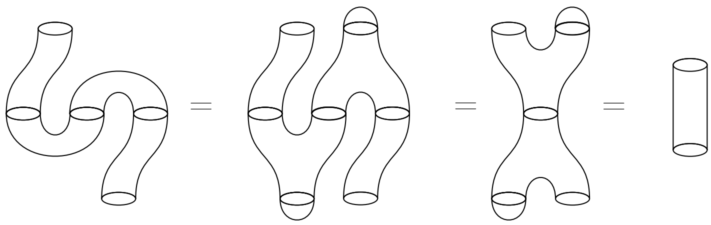
entonces

(i) el espacio vectorial A es de dimensión finita.

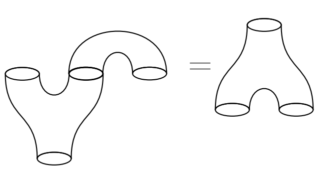
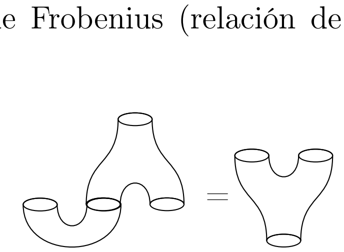
(ii) la multiplicación μ es asociativa, y por lo tanto A es una $\mathbb{C}$-álgebra finita-dimensional (también, la comultiplicación es coasociativa).

(iii) la counidad ε es una forma de Frobenius, y por lo tanto (A, ε) es un álgebra de Frobenius.

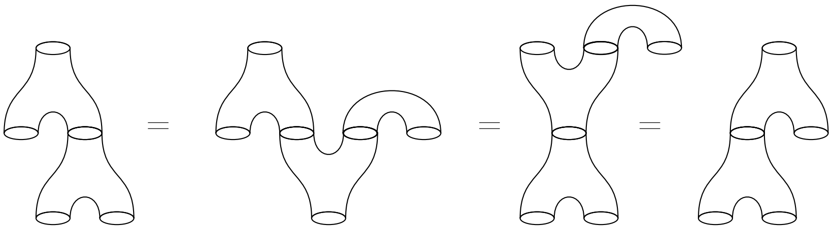
Demostración. Sea $\beta = \varepsilon \circ \mu$, que es . Se va a demostrar que β es no degenerado, es decir, establecer la relación de serpiente, con $\gamma = \Delta\eta$. La prueba es análoga a la prueba anterior. Ponga los tapones en la parte izquierda de la relación de Frobenius como sigue:

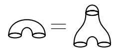


utilizando los axiomas de la unidad y counidad. Esta es la parte izquierda de la relación de la serpiente; del mismo modo, el lado derecho de la relación de Frobenius da la parte derecha de la relación de la serpiente, así β es no degenerado. Esto implica en particular que A es de dimensión finita (véase 1.4). Para obtener la asociatividad, basta poner sólo un tapón en la relación de Frobenius (relación de la izquierda), consiguiendo estas dos identidades:

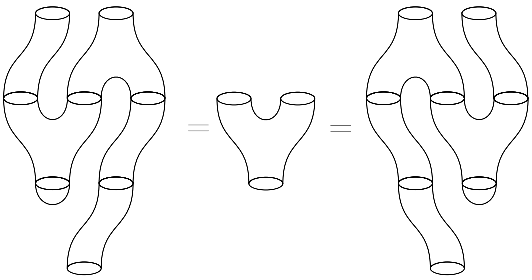
 y 

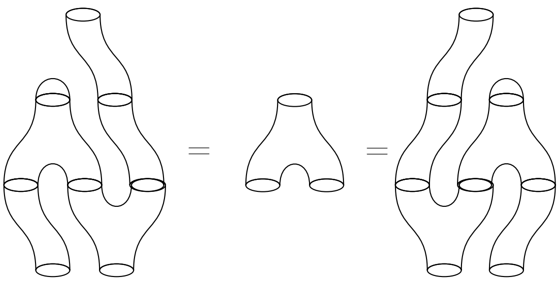
ahora se puede escribir

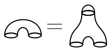


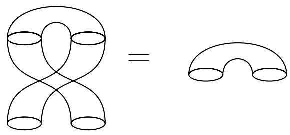
así  es asociativa. (la coasociatividad se sigue de manera similar). Finalmente, puesto que  es asociativo, claramente el emparejamiento  es asociativo, así que (A, β) es un álgebra de Frobenius. □

La caracterización de las álgebras de Frobenius en términos de comultiplicación (3.8) se remonta (al menos) a Lawvere [4](1967). En un contexto categórico muy general describe una construcción estándar de Frobenius como una combinación esencial de objetos monoides/comonoides con este requisito de compatibilidad, que se reproduce en lenguaje gráfico:





Estos son los diagramas 3.5 y 3.6 de este trabajo. La relación de Frobenius es una consecuencia inmediata, ver 3.4. El emparejamiento no degenerado  se menciona explícitamente, pero la relación no es de Frobenius. La primera mención explícita de la relación de Frobenius,y una prueba de 3.8, se dio en 1991 por Quinn [5], sin darse cuenta de [4]. Sin embargo, Quinn requirió el axioma de simetría



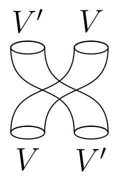
y llamó a las álgebras ambiálgebras a pesar de que era consciente de la existente terminología del álgebra (de Frobenius) simétrica. Independientemente, Abrams dio el caso conmutativo de la nueva caracterización en [1](1995) y el caso no conmutativo se dio en [2](1998).

3.3. Conmutatividad y Coconmutatividad

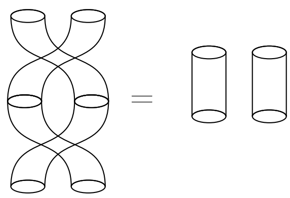
Para cada par de espacios vectoriales V, V' existe una *aplicación de trueque* canónica

$$\sigma_{V,V'} \colon V \otimes V' \longrightarrow V' \otimes V$$

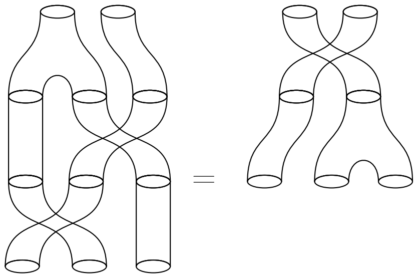
que simplemente cambia el orden de los factores. Se puede imaginar la aplicación de trueque como esto:



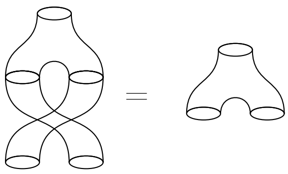
Se tiene en cuenta que ahora se tiene más de un espacio vectorial en el juego, por lo que resulta mas cómodo etiquetar los círculos que representan estos espacios. La aplicación de trueque satisface algunos axiomas evidentes, como lo es $\sigma_{V,V'}\sigma_{V',V} = \mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_{V'}$:



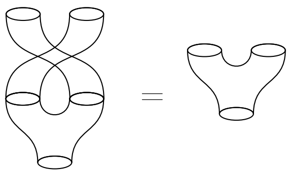
En conjunto, las propiedades equivalen a decir que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ es una categoría monoidal simétrica. Por supuesto, el interés particular esta en el caso en que $V = V' = A$ es un álgebra, por lo que se tiene la aplicación de multiplicación . Entonces naturalmente de la aplicación de trueque con respecto a esto equivale a esta relación:



Sea A un álgebra, con la multiplicación  . Entonces podemos dibujar el axioma de un *álgebra conmutativa*:

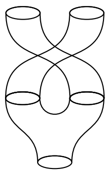


Una coálgebra A con comultiplicación  se dice que es un *coálgebra coconmutativa* si la siguiente relación se mantiene:



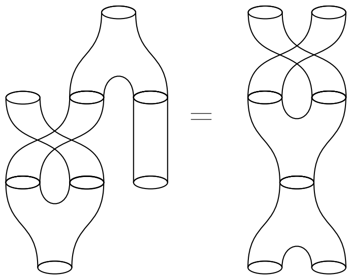
Proposición 3.9. *La multiplicación de un álgebra de Frobenius es conmutativa si y sólo si la multiplicación es conmutativa.*

Demostración. Suponga que la multiplicación es conmutativa. Y observe que la aplicación

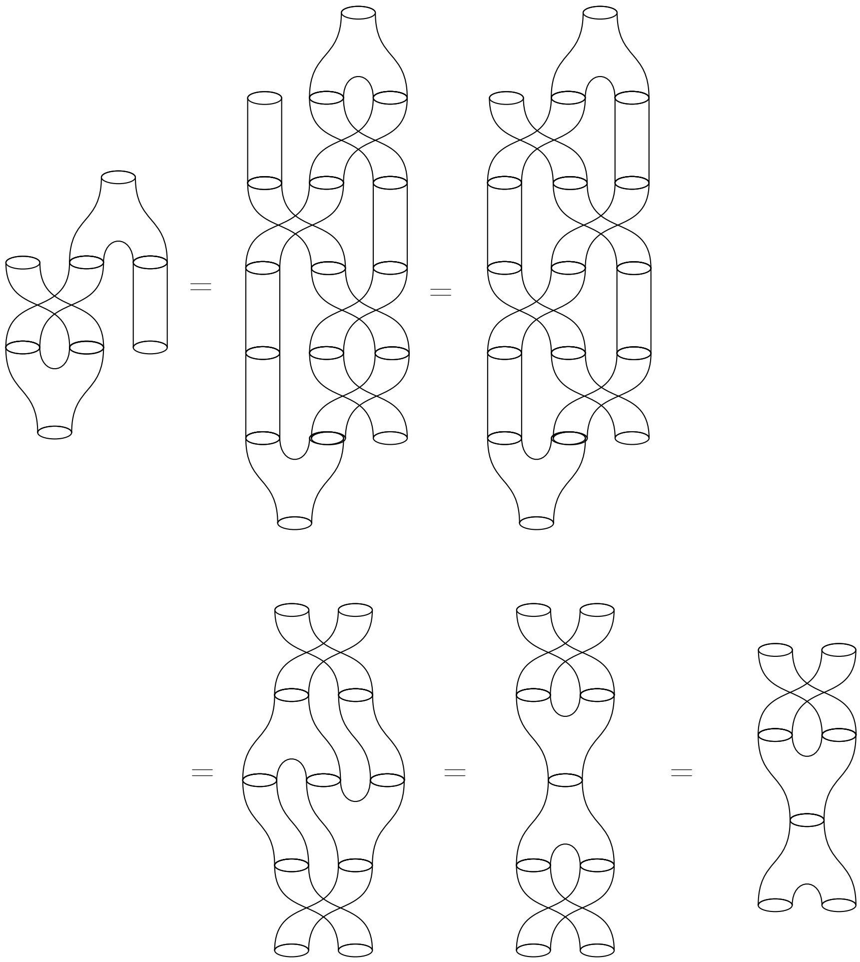


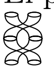
tiene ε como counidad y satisface la relación de Frobenius. Luego haciendo uso del resultado (3.7) que expresa que una comultiplicación es única en un álgebra de Frobenius, se tiene que $\sigma \circ \Delta = \Delta$. La implicación inversa se desprende de la dualidad. Así que se establece el lado izquierdo de la relación de Frobenius, con la aplicación

$\sigma \circ \Delta$ como 'comultiplicación', es decir esta igualdad:

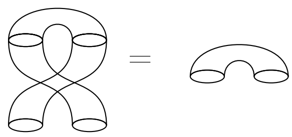


Aquí está la prueba de esa declaración:



El primer paso consistió en insertar tres nuevas aplicaciones de trueque: la aplicación  que da como resultado la identidad, y la tercera aplicación de trueque insertada justo antes de  se justifica por conmutatividad. En el paso (2) se cambia el orden de las tres aplicaciones de trueque que se encuentran mas arriba, según la "relación de grupo simétrico" es un ejemplo de la naturalidad de la aplicación de trueque. La (3) igualdad expresa otros dos casos de naturalidad, esta vez con respecto a la comultiplicación y la multiplicación, las aplicaciones de trueque en el medio se mueven hacia fuera antes de la comultiplicación y después de la multiplicación. El paso (4) es la relación de Frobenius, y finalmente en (5) se utilizó la conmutatividad de la aplicación multiplicación de nuevo. □

Si (A, β) es un álgebra de Frobenius entonces también se puede dibujar la condición de ser un *álgebras de Frobenius simétrica* (es decir β satisface la condición de traza):



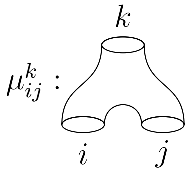
3.4. Cálculo tensorial (álgebra lineal en coordenadas)

Hasta ahora se ha evitado cuidadosamente las coordenadas. En este apartado se va a escribir todo en coordenadas. Se adopta el elegante elemento tensor de la notación común en la geometría de Riemann y la física, la supresión de signos de suma y con cuidado para distinguir los índices superior e inferior. Como resultado, esta notación tensorial va de la mano con el cálculo diagramático.

Sea A como antes. Entonces se fija una base $\{T_0, \ldots, T_r\}$ para el espacio vectorial A, de tal manera que $T_0 = 1_A$. *El tensor de la multiplicación.* Ya que la multiplicación $\mu : A \otimes A \to A$ es lineal se puede describir por completo mediante la especificación de lo que hace a los elementos de la base. Recuerde que una base canónica de $A \otimes A$ es $T_i \otimes T_j$ donde i y j corren de 0 a r. El resultado de la multiplicación de dos elementos base es entonces una combinación lineal de $T_0, \ldots, T_r$:

$$T_i \otimes T_j \longrightarrow \sum_{k=0}^{r} \mu_{ij}^{k} T_k. \tag{3.8}$$

Aquí y en toda la sección suprimimos signos de suma, la adopción de la convención de suma de Einstein: todos los índices repetidos (que aparecen como uno inferior y uno superior) se supone que se resume. En este caso el símbolo k se repite, por lo que el significado es $\sum_{k=0}^{r} \mu_{ij}^{k} T_k$. Siempre escribimos los índices correspondientes a la entrada como índices inferiores y los índices correspondientes a la producción como índices superiores. Esta es la convención usual de la geometría de Riemann donde se llamaba a esto un (2, 1)-tensor. Gráficamente se representa como sigue:



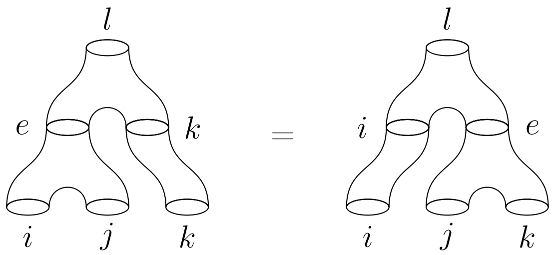
Se tiene en cuenta que los orificios de entrada corresponden a los índices más bajos y que la correspondiente salida responde a índices superiores. La asociatividad de μ ahora se puede escribir de forma explícita. En el producto $T_iT_jT_k$ se puede empezar multiplicando T_i y T_j, y luego multiplicar el resultado con T_k:

$$T_i \otimes T_j \otimes T_k \longmapsto \mu_{ij}^{e} T_e \otimes T_k \longmapsto \mu_{ij}^{e} \mu_{ek}^{l} T_l$$

También se puede hacer a la inversa, lo que da $\mu_{jk}^{e} \mu_{ie}^{l} T_l$. Ahora por álgebra lineal, dos de tales combinaciones lineales son iguales si y sólo si todos los coeficientes son iguales. Así que en conjunto es la ecuación de la asociatividad

$$\mu_{ij}^{e} \mu_{ek}^{l} = \mu_{jk}^{e} \mu_{ie}^{l}$$

Es interesante comparar con la representación gráfica:

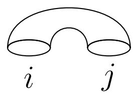


Si conoce la expresión coordenada que se acaba de encontrar, puede dibujar la imagen con sólo juntar las piezas de acuerdo a los índices coincidentes. O a la inversa, si se conoce la relación abstracta de la asociatividad 3.1 se puede encontrar rápidamente la expresión tensorial, poniendo etiquetas (índices) en todos los agujeros, y luego escribir el elemento tensor de cada pieza.

Dado que el emparejamiento bilineal $\beta\colon A \otimes A \to \mathbb{C}$ no degenerado, lo se llamará un *tensor métrico*, pero, por supuesto, como se esta trabajando sobre el campo $\mathbb{C}$ en general, no tiene sentido hablar de definitud positiva, ya que por lo general se requiere en la geometría de Riemann. Considere β como un (2, 0)-tensor. Sus elementos tensores son los $\beta_{ij} \in \mathbb{C}$ constantes definidas por

$$\beta_{ij} = \langle T_i | T_j \rangle.$$

a la cual se le asignara una gráfica de la siguiente forma:

β_{ij} : 

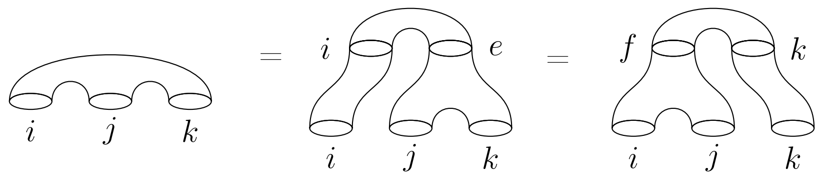
El requisito de la *asociatividad en el tensor métrico* β visto en (ver 1.6) ahora se puede escribir de forma mas y explícita como:

$$\mu_{ij}^{e}\beta_{ek} = \mu_{jk}^{f}\beta_{if}.$$

Ahora la expresión en coordenadas para la *función de tres puntos* (ver 3.4) está dada por:

$$\phi_{ijk} \colon = \mu_{ij}^{e}\beta_{ek} = \mu_{jk}^{f}\beta_{if}$$

La cual es equivalentemente en términos diagramáticos a la siguiente expresión:



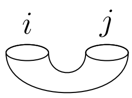
Observe cómo la métrica β_{ij} sirve para bajar los índices. El hecho importante es que β es no degenerado para poder tomar la matriz inversa y utilizarla para elevar los índices. Ahora se escribirá en coordenadas lo que significa decir que el emparejamiento

$$\beta \colon A \otimes A \longrightarrow \mathbb{C} \tag{3.9}$$

es *no degenerado*. Para ello, (ι_i^j) denota la matriz identidad, en otras palabras, ι_i^j es el 'delta de Kronecker': es igual a 1 para $i = j$ e igual a 0 en caso contrario (el símbolo habitual Δ para el delta de Kronecker se asigna actualmente a la comultiplication). Ahora la no degenerancia de β (véase 1.1 y la relación serpiente 3.3) tiene la siguiente expresión coordenada: existe un $(0,2)$-tensor $\gamma \colon \mathbb{C} \to A \otimes A$ tal que

$$\beta_{ij}\gamma^{jk} = \iota_i^k \text{ y } \gamma^{ij}\beta_{jk} = \iota_k^i.$$

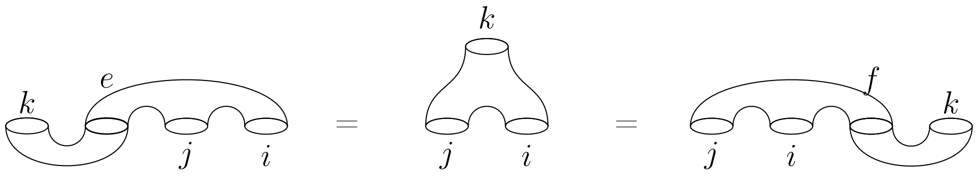
En otras palabras, equivale a la afirmación de que la matriz (β_{ij}) es invertible y que (γ^{ij}) es su inversa. Se representará γ como:

γ^{ij} : 

Ahora que se tiene la matriz (γ^{ij}), se puede usar para elevar los índices, y expresar la *multiplicación en términos de la función de tres puntos* (expresión coordenada de 3.1).

$$\phi_{ije}\gamma^{ek} = \mu_{ij}^{k} = \gamma^{kf}\phi_{fij} \tag{3.10}$$

La representación equivalente en diagramas indexados viene dada por:



Demostración. (en coordenadas): se probará la igualdad de la izquierda. Por definición, $\phi_{ije} = \mu_{ij}^{s}\beta_{se}$; Ahora multiplique esta ecuación por la derecha con la matriz (γ^{ek}). □

Ahora defina la *Comultiplication* (ver 3.5) de la siguiente manera

$$A \longrightarrow A \otimes A \tag{3.11}$$

$$T_k \longmapsto T_i \otimes T_j \Delta_k^{ij}, \tag{3.12}$$

donde los elementos tensores están dados por

$$\Delta_k^{ij} = \gamma^{ie}\mu_{ek}^{j} = \mu_{kf}^{i}\gamma^{fj}.$$

Para que esto tenga sentido se debe demostrar que estas dos expresiones coinciden. Esto se sigue de 3.10: ambos lados son iguales a

$$\gamma^{ie}\phi_{ekf}\gamma^{fj}.$$

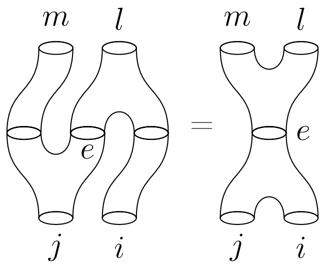
Por el contrario, se puede expresar el tensor de la multiplicación en términos de la comultiplicación, mediante la reducción de los índices:

$$\mu_{ij}^{k} = \beta_{ie}\Delta_j^{ek} = \Delta_i^{kf}\beta_{fj}.$$

La expresión coordenada de *la condición de Frobenius* 3.4 está definida por

$$\Delta_j^{em}\mu_{ie}^{l} = \mu_{ij}^{e}\Delta_e^{lm} = \Delta_i^{le}\mu_{ej}^{m}.$$

Se probará la ecuación de la izquierda; recuerde que la imagen correspondiente en términos de diagramas es:



La prueba en coordenadas es la misma que la prueba gráfica que se dio para 3.4:

$$\Delta_j^{em}\mu_{ie}^l = \gamma^{km}\mu_{jk}^e\mu_{ie}^l = \gamma^{km}\mu_{ie}^e\mu_{ek}^l = \mu_{ij}^e\Delta_e^{lm}.$$

Aquí, el primer paso fue utilizar la definición de la comultiplicación (ver 3.11); luego, utilizar la ecuación asociativa 3.8, luego, 3.11 hacia atrás.

Ejemplo 3.1. Ahora que se ha generado un ambiente de confort con las coordenadas, se podrá escribir la comultiplicación en el álgebra de Frobenius $\mathbb{C}$ del ejemplo 3.8. Considerando la siguiente base:

$$T_0 := 1 \qquad T_1 : \ = \sqrt{-1}.$$

A continuación, los elementos del tensor de la multiplicación son

$$\mu_{00}^0 = 1, \quad \mu_{01}^1 = \mu_{10}^1 = 1, \quad \mu_{11}^0 = -1$$

(aquellos que no figuran son igual a cero). Así pues la forma de Frobenius es, por definición,

$$\begin{aligned} T_0 &\mapsto 1 \\ T_1 &\mapsto 0, \end{aligned}$$

por lo que el emparejamiento de Frobenius está dado por

$$\beta_{00} = 1, \quad \beta_{01} = \beta_{10} = 0, \quad \beta_{11} = -1.$$

La inversa de esta matriz $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es $\gamma := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Usando la definición de la comultiplicación, $\Delta_k^{ij} = \gamma^{ie}\mu_{ek}^j$, se obtiene

$$\Delta_0^{00} = 1, \quad \Delta_0^{11} = -1, \quad \Delta_1^{01} = \Delta_1^{10} = 1;$$

(los otros son cero). Así que la comultiplicación está dada por

$$\begin{aligned} T_0 &\mapsto T_0 \otimes T_0 - T_1 \otimes T_1 \\ T_1 &\mapsto T_0 \otimes T_1 + T_1 \otimes T_0, \end{aligned}$$

al igual que en el ejemplo 2.12. En conclusión, la coálgebra trigonométrica de Sweedler 2.12 sobre los números reales no es más que la estructura de álgebra de Frobenius en $\mathbb{C}$.

Capítulo 4

La categoría de las álgebras de Frobenius

En este apartado se da una presentación de la categoría de las álgebras de Frobenius en términos de los morfismos que la componen y se tratan algunas observaciones respecto a los duales de las aplicaciones que conforman el álgebra de Frobenius. Finalmente se presenta de manera natural el producto tensorial entre esos morfismos.

4.1. Homomorfismos álgebra de Frobenius

El estudio de la *dualidad* de espacios vectoriales (y aplicaciones); resulta de vital importancia para la matemática, especialmente por las propiedades que esta guarda. Es particularmente claro a partir de las imágenes que hay una simetría completa entre μ y η en un lado y Δ y ε en el otro lado. Como consecuencia, si $(A, \eta, \mu, \Delta, \varepsilon)$ es un álgebra de Frobenius entonces el espacio vectorial dual A^*, se convierte en un álgebra de Frobenius de nuevo, mediante la adopción de los 'duales' de η, μ, Δ, ε como la estructura de aplicaciones. Hay una sutileza, sin embargo: el dual de $\Delta\colon A \to A \otimes A$ es en realidad una aplicación $(A \otimes A)^* \to A^*$, lo que a fin de conseguir una verdadera aplicación de la multiplicación de A^* que necesitamos para componer con el isomorfismo canónico $\psi\colon A^* \otimes A^* \xrightarrow{\cong} (A \otimes A)^*$ descrito en **??**. Por esta razón, no es un hecho completamente trivial que esta nueva aplicación de multiplicación es asociativa. Se debe comprobar que los isomorfismos ψ son compatibles con los productos tensoriales iterados. (Al comprobar esto, recordar que $(\Delta \otimes id)^* = id \otimes \Delta^*$, véase **??**).

Del mismo modo el dual de $\mu\colon A \otimes A \to A$ es en realidad una aplicación $A^* \to (A \otimes A)^*$ que hay que componer con la inversa de ψ con el fin de conseguir una verdadera aplicación de comultiplicación.

Lema 4.1. *Si un homomorfismo $\mathbb{C}$-álgebra ϕ entre dos álgebras de Frobenius (A, ε)*

y (A', ε') es compatible con las formas en el sentido de que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & A' \arrow[dl, "\varepsilon'"] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

conmuta,entonces ϕ es inyectivo.

(Al ser un homomorfismo $\mathbb{C}$-álgebra significa que es multiplicativo: $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ y respeta las unidades: $\phi(1) = 1'$).

Demostración. . El núcleo de ϕ es un ideal y está claramente contenido en $Null(\varepsilon)$. Pero Null(ε) no contiene ideales no triviales, por lo que Null(ϕ) = 0 y por lo tanto ϕ es inyectiva. □

Ejemplo 4.1. Sea $\mathbb{R}$ el álgebra de Frobenius trivial sobre $\mathbb{R}$, y sea $\mathbb{C}$ el álgebra de Frobenius del Ejemplo 2.2: la forma de Frobenius $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ está 'tomando la parte real'. La inyección canónica $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ es compatible con las formas de Frobenius, pero no con la multiplicación (la descripción dada en coordenadas 3.1).

Un homomorfismo de álgebra de Frobenius $\phi\colon (A, \varepsilon) \to (A', \varepsilon')$ entre dos álgebras de Frobenius es un homomorfismo de álgebra que es al mismo tiempo un homomorfismo de coálgebra. En particular, se conserva la forma de Frobenius, en el sentido de que $\varepsilon = \phi\varepsilon'$. Sea $AF_{\mathbb{C}}$ denota la *categoría de álgebras de Frobenius* sobre $\mathbb{C}$ y homomorfismos álgebra de Frobenius, y $cAF_{\mathbb{C}}$ denota la subcategoría completa de todas las álgebras de Frobenius conmutativas.

Lema 4.2. *Un homomorfismo álgebra de Frobenius $\phi\colon A \to A'$ es siempre invertible. (En otras palabras, la categoría $AF_{\mathbb{C}}$ es un grupoide y así $cAF_{\mathbb{C}}$ lo es).*

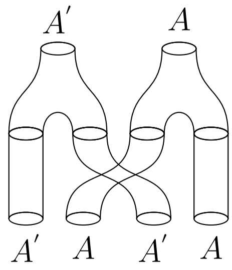
Demostración. Ya que ϕ es comultiplicativo y respeta las counidades ε y ε'(así como las unidades de η y η'), la aplicación 'dual' $\phi^*\colon A'^* \to A^*$ es multiplicativa y respeta unidades y counidades. Pero entonces el lema anterior se aplica y muestra que ϕ^* es inyectiva. Dado que A es un espacio vectorial de dimensión finita esto implica que ϕ es sobreyectiva. Ya se sabe que es inyectiva, por lo tanto es invertible. □

4.2. Productos Tensoriales de álgebras de Frobenius

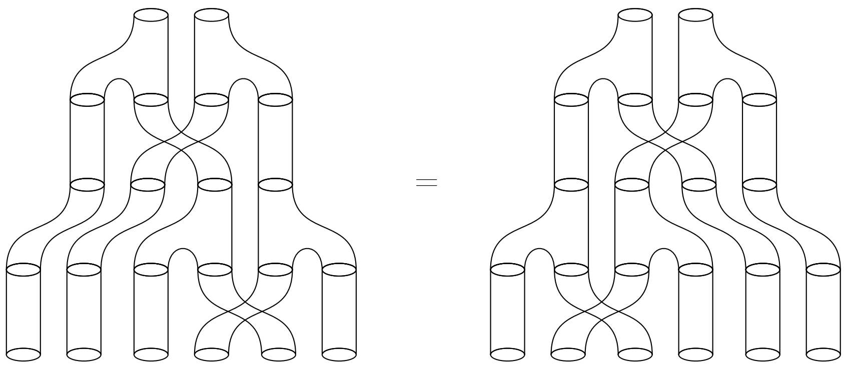
Dadas dos álgebras A y A', se va a considerar su *Producto Tensorial* $A \otimes A'$ como espacio vectorial. Ahora la multiplicación componente a componente, hace $A \otimes A'$ un álgebra:

$$\begin{aligned} (A \otimes A') \otimes (A \otimes A') &\longrightarrow A \otimes A' \\ (x \otimes x') \otimes (y \otimes y') &\longmapsto xy \otimes x'y'. \end{aligned}$$

Note que A solo interactúa con A, y a su vez A' con A', y que la aplicación de trueque es fundamental para construir la nueva aplicación de la multiplicación de las aplicaciones existentes. Esto es particularmente claro en la versión gráfica de la aplicación multiplicación en $A \otimes A'$.

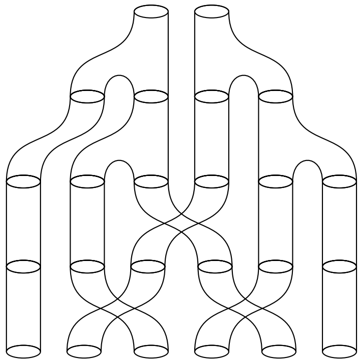


Ahora se verá que esta nueva aplicación de multiplicación es asociativa (sabiendo que las dos aplicaciones de multiplicación en A y A' lo son). Esto es bastante fácil de hacer tan sólo con escribir las ecuaciones en términos de elementos, pero para el gusto del lector se va a desarrollar la prueba gráfica (que también es fácil, aunque se muestra el papel de la aplicación de trueque que está oculta en la versión elemento-ecuación). La versión gráfica de esta afirmación es



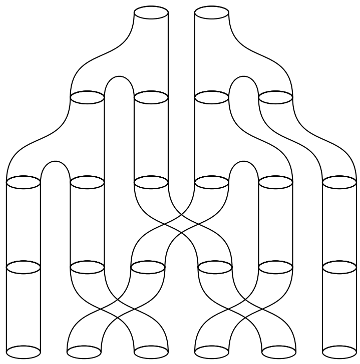
Y aquí está la prueba: en el lado izquierdo de la ecuación, comience moviendo la segunda aplicación de trueque a la izquierda de la aplicación multiplicación adyacente y también mover la multiplicación inferior un poco hacia la derecha

=



Ahora aplique la ecuación asociatividad 3.1 dos veces (una vez para A y una vez para A') para llegar a

=

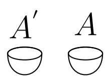


Finalmente utilizar la naturalidad del trueque para mover las dos aplicaciones más bajas del trueque a la derecha de la aplicación multiplicación precedente. Este movimiento conduce a la parte derecha de la ecuación afirmada.

Para que $A \otimes A'$ sea un álgebra, por supuesto, también hay que especificar la unidad de la aplicación. Es simplemente

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow A \otimes A' \\ 1 &\longmapsto 1_A \otimes 1_{A'} \end{aligned}$$

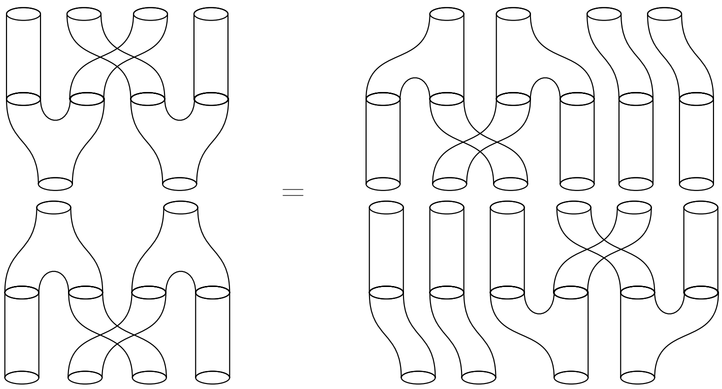
que está representada



Es fácil comprobar los axiomas de la unidad.

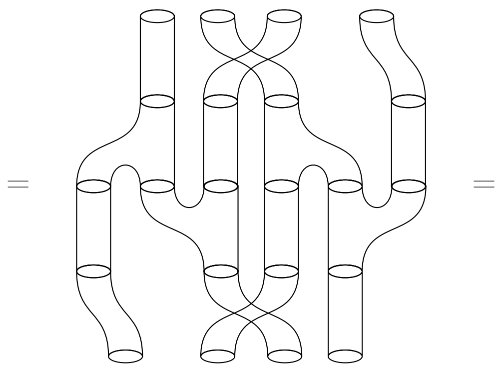
Ahora bien, es un ejercicio fácil de demostrar que el *producto tensorial de dos coálgebras* es de nuevo un coálgebra de una manera natural. Los diagramas son sólo las imágenes reflejo de las de arriba.

Finalmente, *El producto tensorial de dos álgebras de Frobenius* es una vez mas de manera natural un álgebra de Frobenius. Aquí, por supuesto, se utiliza la caracterización de las álgebras de Frobenius en términos de la comultiplicación y la condición de Frobenius (3.8). Se sabe que el producto tensorial es de nuevo un álgebra y un coálgebra. Queda por demostrar que la condición de Frobenius tiene:



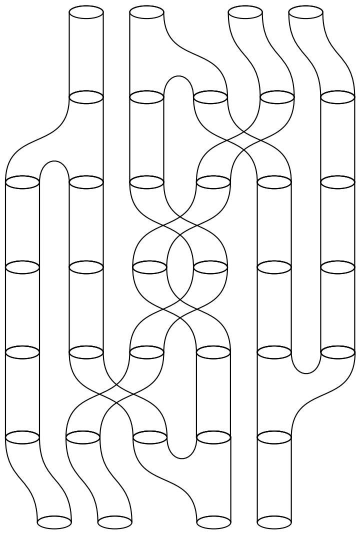
(Esto es sólo la parte derecha de la ecuación)

Aquí está la prueba: en el lado izquierdo de la ecuación, comience con la relación de Frobenius (parte derecha) en las dos ocurrencias de  (uno para A y uno para A'), para obtener

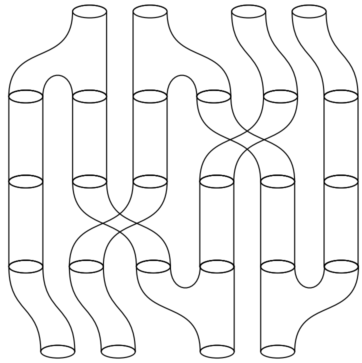


Ahora se usa la naturalidad de la aplicación de trueque para mover las dos aplicaciones de trueque hacia el centro de la imagen (se convierten en cuatro en vez de dos, pero dos de ellos se anulan entre sí):

$=$



$=$



que es lo que se quería, módulo un último movimiento en el que el trueque superior se mueve a la derecha y el inferior se mueve a la izquierda. De hecho, ya que la condición de Frobenius junto con las condiciones unidad y counidad implica la asociatividad y coasociatividad, no sería necesario revisar la asociatividad y coasociatividad por separado. Así $AF_{\mathbb{C}}$ es cerrado bajo productos tensoriales, y también señaló en 2.1 que $(\mathbb{C}, id_{\mathbb{C}})$ es un álgebra de Frobenius. De hecho, $(AF_{\mathbb{C}}, \otimes, \mathbb{C})$ es una categoría monoidal.

Bibliografia

[1]JOACHIM KOCK. Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories. pp 78-137. First published in print format 2003.

[2] LOWELL ABRAMS. Two-dimensional topological quantum field theories and Frobenius algebras. J. Knot Theory Ramifications 5 (1996), 569-587. Available at
http://home.gwu.edu/labrams/docs/tqft.ps.

[3] LOWELL ABRAMS. Modules, comodules, and cotensor products over Frobenius algebras. J. Algebra 219 (1999), 201-213. Available at
http://home.gwu.edu/-labrams/docs/cotensor.ps.

[4] CHARLES W. CURTIS and IRVING REINER. Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras. Interscience Publishers, New York, 1962.

[5] F. WILLIAM LAWVERE. Ordinal sums and equational doctrines. In B. Eckmann, editor, Seminar on Triples and Categorical Homology Theory, ETH 1966/67. No. 80 in Lecture Notes in Mathematics, pp. 141-155. Springer-Verlag, New York, 1967.

[6] FRANK QUINN. Lectures on axiomatic topological quantum field theory. In Geometry and Quantum Field Theory (Park City, UT, 1991), pp. 323-453. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.