1 3×3 A $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0{,}8$, $\lambda_3 = 0{,}6$

Vi dubbelkollar att egenvektorerna utgör en bas i $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ utgör en bas.

---

a) Alla 3-vektorer som finns i span(v_1, v_2, v_3)

---

b) Vi vet: $A^n v = \lambda^n v$ då v är en egenvektor till A med egenvärdet λ

$$\lambda_1^n v_1 = 1^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = v_1$$

$$\lambda_2^n v_2 = 0.8^n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3^n v_3 = 0.6^n \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^n v = \lambda_1^n x_1 v_1 + \lambda_2^n x_2 v_2 + \lambda_3^n x_3 v_3$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0{,}8^n x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 0{,}6^n \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

c) Om $n \to \infty$ betyder det

$$0{,}8^{n\to\infty} \to 0 \qquad 0{,}6^{n\to\infty} \to 0$$

$$A^{n\to\infty} v = x_1 v_1 + 0 \cdot \cancel{x_2} v_2 + 0 \cdot \cancel{x_3} v_3 = x_1 v_1 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Om $x_1 \neq 0$ är $\boxed{A^{n\to\infty} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$

---

d) $-1 < \lambda < 1 \Leftrightarrow \lambda^{n\to\infty} \to 0$

$\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda^{n\to\infty} = 1$

$\lambda > 1 \Leftrightarrow \lambda^{n\to\infty} \to \infty$

$\lambda \leq -1 \Leftrightarrow \lambda^{n\to\infty}$ $\Rightarrow$ odefinierat

---

e) $A = PDP^{-1}$ $\quad P = (v_1, v_2, v_3)$ $\quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$