4a)

Lösningen kan vara en linje eller ett plan,
men i specialfall hela rummet eller saknad lösning.

Två ekvationer, vardera för ett plan på normalform.
När normalerna är lika med varandra kommer samma plan att beskrivas i och med samma
A-, B- och C-koefficient. Men planen kan fortfarande ha olika förskjutning i och med
D-konstanterna (som inte är en komponent i någon normalvektorerna).
Alltså kommer de två planen vara parallella och antingen aldriga skära varandra;
ingen lösning.
eller alltid skära varandra då de aldrig "viker ifrån varandra"
lösningen är ett plan som är lika med de båda planen.

Men ett plan har alltid två normalvektorer och exakt samma fall skulle uppträda om ett
utav planen skulle ha den motsatta normalen till det andra planet och samma D-koefficient.

Ett speciellt fall uppstår då ett av planens normalvektor är nollvektorn. Då skulle
koefficienterna alla bli noll, bara D konstanten skulle kunna vara skilt från noll.
Då återstår bara ekvationen D = 0 som ju inte påverkas av x, y eller z.
Alltså gäller ekvationen för antingen alla punkter eller ingen punkt.
Om D är nollskilt kommer ekvationen aldrig att gälla oavsett vad och
ekvationensystemet saknar då lösning.
Om D faktiskt är noll gäller ekvationen för alla punkter, dvs rummet.
Ekvationensystemet gäller alltså då den andra ekvationen skär rummet,
helt enkelt är lösningen samma som den andra ekvationen.
Ännu mer speciellt fall uppstår då båda ekvationerna har "nollvektorn som normal",
då är lösningen när rummet skär rummet, helt enkelt bara rummet.

Annars i fallet att planen inte är parallella skulle de skära varandra i en linje.

4b)

Om det finns en ekvation med alla koefficienter som noll och D-konstanten är nollskild
saknas en lösning till ekvationensystemet eftersom ekvationen i fråga aldrig gäller.

Egentligen är detta ekvationensystemet det samma som i 4a men med ännu ett villkor,
att lösningen till ekvationensystemet i 4a ska "skära" en tredje ekvationen.

Vi vet att lösningen till 4a var en linje, ett plan, rummet eller helt saknad.

Den tredje ekvationen är återigen formeln för ett plan på normalform.
(Denna har lösningsmängden av oftast ett plan,
annars rummet eller saknad lösning som diskuterat i uppgift 4a)

1. När den tredje ekvationen saknar lösning saknar ekvationsystemet lösning.

2. När den tredje ekvationen är rummet är lösningen för 4b samma som 4a. Det kan vara...

- Rummet
- ett plan
- en linje
- saknad lösning

3. När den tredje ekvationen är ett plan kan skärningen av 4a vara...

- ett plan, då 4a är rummet eller beskriver samma plan som den tredje ekvationen.
- en linje, då 4a och den tredje ekvationen beksriver oparallella plan.
- Saknad lösning, då 4a saknar lösning, eller beskriver ett plan som är parallellt med planet av den tredje ekvationen men med annan förskjutning.

KOMPLETTERING

En systematisk metod för att veta lösningsmängden av ett ekvationssystem är att först betrakta systemets totalmatris på reducerad trappstegsform.

Om det finns ett pivotelement i sista raden i sista kolumnen saknar ekvationssystemet lösning. Alla koefficienter är noll för denna ekvation men konstanten D skulle vara nollskilt, vilket är en motsägelse.

Om det inte finns några fria kolumner har ekvationsystemet en unik lösning, alltså en punkt. Varje pivotelement (1) kommer multipliceras med en viss komponent i lösningsvektorn x och varje rad kommer beskriva en ekvation: komponent i av x = komponent i av b (högerledsvektorn/sista kolumnen i totalmatrisen). Detta innebär att varje komponent av lösningsvektorn är ovarierande och lösningen är således en fix punkt.

Om det finns fria kolumner i totalmatrisen kommer den korresponderande komponenten i lösningsvektorn x att ansättas till en parametervariabel, och kolumnen i fråga tolkas som en riktningsvektor. Lösningsvektorn x blir då en linjärkombination av...
* Den fixerade vektorn där varje komponent i = komponent i av "högerledsvektorn" om kolumn i är pivotkolumn (analogt med föregående stycke), samt...
* en eller flera vektorer multiplicerad med var sin unik parameter, där varje vektor är en fri kolumn i totalmatrisen (kolumnvektor).

Alltså blir lösningsmängden spannet av alla vektorer med parameter i fallet att minst en finns. Koefficientmatrisen är 3x3 för 4b) vilket betyder att lösningsmängden kan vara:

- En fix punkt, för 0 fria kolumner

- En linje, för 1 fri kolumn
- Ett plan, för 2 fria kolumner
- Rummet, för 3 fria kolumner (nollvektorn)

Det sista fallet skapar dock en liten motsägelse. De 3 fria kolumnerna skulle ju beskriva tre instanser av nollvektorn, och spannet av dessa är ju bara nollvektorn, inte rummet. Men om vi skulle använda koefficientmatrisen (nollvektorn) för att skapa ekvationssystemet inser man fort att varje ekvation blir 0 = 0 vilket alltid gäller, så nollvektorn som koefficientmatris beskriver fortfarande rummet, eller snarare alla tänkbara punkter.

Här uppstår ännu en motsägelse om koefficientmatrisen är nollmatrisen men totalmatrisen för systemet inte är nollmatrisen spänner ekvationssystemet inte upp rummet. Lösningsmängden skulle bli tom i och med den första punkten vi diskuterade i kompletteringen. Alltså, ett pivotelement i sista kolumnen.