„Akademia Innowacyjnych Zastosowań Technologii Cyfrowych (AI Tech)”, projekt finansowany ze środków Programu Operacyjnego Polska Cyfrowa POPC.03.02.00-00-0001/20

Teoria Gier II

1 Równowaga Nasha

Pytanie I Czy pamiętasz z ostatnich zajęć czym była strategia czysta? Co to jest strategia mieszana?

Czysta równowaga Nasha istnieje wówczas, gdy dla każdego z graczy istnieje strategia czysta. Oznacza to, że żadnemu z graczy nie opłaca się zmienić jej/jego strategii.

Pytanie II Czy potrafisz dla poniższej macierzy wypłat zidentyfikować czystą równowagę Nasha?

Tabela 1: Tabela zawierająca macierz wypłat dla Pytania II.

	1	2
A	4/3	3/2
B	3/1	2/0

Mieszana równowaga Nasha jest zbiorem strategii mieszanych, gdzie każdy z graczy nie ma zysku w zmianie strategii jej/mu przypisanych.

Przykład I
Adam i Bartek kupili torbę cukierków i postanawiają teraz zagrać, aby każdy z

nich wygrał (i zjadł) jak najwięcej cukierków. Adam będzie miał do wyboru strategię A, wybieraną z pewnym prawdopodobieństwem p, oraz strategię B wybieraną z prawdopodobieństwem $1 - p$. Bartek będzie mógł wybierać pomiędzy strategią C, wybieraną z prawdopodobieństwem q, oraz strategią D, wybieraną z prawdopodobieństwem $1 - q$. Spodziewaną liczbę cukierków, jaką otrzyma każdy z graczy, znajdziecie w poniższej macierzy wypłat.

Tabela 2: Tabela zawierająca macierz wypłat dla Przykładu I.

Adam/Bartek	C(q)	D(1-q)
A(p)	2/3	4/1
B(1-p)	3/1	2/4

- Czy w grze Adama i Bartka istnieje czysta równowaga Nasha?
- Chcemy maksymalizować zysk obu graczy. Którą strategię powinni oni wybrać? Z jakim prawdopodobieństwem?
- W jaki sposób możemy policzyć spodziewany zysk każdego gracza?

Aby policzyć prawdopodobieństwo wyboru strategii przez Bartka, tak aby jego wybory były dla Adama nierozróżnialne, musimy policzyć szacowany zysk, gdy Adam wybiera każdą z akcji:

$$E_{Adam}(A, q) = q * 2 + (1 - q) * 4$$
$$E_{Adam}(B, q) = q * 3 + (1 - q) * 2$$

Bartek będzie nierozróżnialny dla Adama gdy:

$$E_{Adam}(A, q) = E_{Adam}(B, q)$$

$$q * 2 + (1 - q) * 4 = q * 3 + (1 - q) * 2$$

$$q = \frac{2}{3}$$

Pytanie III

Co się stanie, jeżeli Bartek będzie wybierał swoje akcje z innym prawdopodobieństwem? Co się stanie, jeżeli będzie ono większe od $\frac{2}{3}$? A co jeżeli mniejsze?

Aby policzyć szacowany zysk dla Adama, gdy znamy prawdopodobieństwo wyboru akcji przez każdego z nich, tj. Adam będzie wybierał akcję A z prawdopodobieństwem 0.7 i akcje B z prawdopodobieństwem 0.3, natomiast Bartek będzie wybierał akcję C z prawdopodobieństwem 0.6 oraz akcję D z prawdopodobieństwem 0.4. Wówczas zysk Adama wyniesie:

$E_{Adam}((0.7, 0.3), (0.6, 0.4)) = 0.7*0.6*2+0.7*0.4*4+0.3*0.6*3+0.3*0.4*2 = 2.74$

Pytanie IV
Ustalanie imprezy. Agata i Beata nie znają się za dobrze, ale mają wiele wspólnych znajomych. Obie chcą zaprosić znajomych na imprezę w najbliższy weekend, w piątkowy lub sobotni wieczór. Obie nieco bardziej preferują sobotę. Jeżeli obie ustalą imprezę w tym samym czasie, wówczas dla obu będzie to kompletna katastrofa, gdyż znajomi nie będą mogli przyjść w oba miejsca jednocześnie - zatem dla obu będzie to strata na poziomie 10. Natomiast jeśli imprezy odbędą się w różnym terminie, wówczas dla osoby organizującej spotkanie w piątek mamy zysk 4, podczas gdy organizatorka imprezy sobotniej ma zysk 5.

1. Zapisz macierz wypłat dla przedstawionej sytuacji.
2. Znajdź równowagę Nasha (jeżeli istnieje).
3. Czy w tej sytuacji istnieje jakaś dominacja?

2 Behawioralna teoria gier

W tradycyjnej teorii gier bazujemy na pewnych teoretycznych modelach. Co więcej, zakładamy, że gracze są racjonalni i możemy przewidzieć ruchy i strategie wybierane przez przeciwników. Jednak w rzeczywistości musimy brać pod uwagę również inne aspekty:

- **preferencje gracza** - tradycyjnie wypłata jest równa pewnej użyteczności; rozważając pewne ekonomiczne problemy możemy założyć, że odpowiada to pewnej ilości pieniędzy i głównym celem jest maksymalizacja zysku (zatem nasi gracze są pewnego rodzaju egoistami),
- **rozumowanie strategiczne** - możemy policzyć najlepsze strategie dla każdego z graczy ale obliczenia te wykonywane są zazwyczaj z założeniem gry nieskończonej. Jednakże, rzeczywiste problemy są skończone, więc informacja o strategiach jest tylko częściowa,
- **uczenie się** - czyli fakt jak szybko gracze mogą uczyć się zachowań przeciwników i w jaki sposób może to wpłynąć na grę.

Niezwykle istotną rzeczą jest zrozumienie rzeczywistych preferencji społecznych graczy. Wyniki gier ze współpracą pokazują, że wielu graczy nie jest czysto egoistycznych. Jednak gry kooperacyjne polegające na pojedynczym ruchu są dość słabymi narzędziami pomiaru preferencji społecznych, ponieważ bardzo trudno odróżnić altruizm, wzajemność i egoizm.

Przykład
Gra ultimatum. Adam i Błażej grają w grę. Adam otrzymuje 10 zł i jego zadaniem jest podzielić tę ilość pieniędzy pomiędzy ich obu. Po zaproponowaniu podziału pieniędzy przez Adama, Błażej decyduje czy zgadza się z zaproponowanym podziałem czy nie. Jeżeli nie zgadza się, wówczas żaden z nich nie otrzyma pieniędzy.

W standardowym podejściu teorii gier założylibyśmy, że Adam otrzymuje 9,99 zł, a Błażej 0,01 zł, jednak czasami rzeczywistość może być inna. Przeprowadzono eksperyment, który wykazał, że średnia oferta wynosiła około 35 procent, a oferty poniżej 50 procent były znacząco częściej odrzucane. To zjawisko nazywamy **negatywną wzajemnością** (ang. negative reciprocity). Oznacza ono, że w niektórych sytuacjach ludzie są w stanie odrzucić pewną nagrodę jedynie po to, by ich przeciwnicy również nic nie dostali.

W przeciwieństwie do powyższej sytuacji, możemy również mieć do czynienia z **pozytywną wzajemnością**. Oznacza to, że część ludzi będzie się zachowywała w przyjazny sposób, nawet jeżeli nie otrzymają za swoje zachowanie żadnej nagrody.

Innym zachowaniem, nad którym również warto sie zastanowić, jest **altruizm**. Niektórzy ludzie np. anonimowo wspomagają zbiórki charytatywne lub spontanicznie pomagają innym w potrzebie. U osoby z altruistycznymi preferencjami użyteczność rośnie wraz z dobrostanem innych ludzi. Wracając do wcześniejszego przykładu z grą ultimatum, jest odsetek ludzi, którzy podzielą pieniądze np. 5 zł i 5 zł lub nawet z przewagą pieniężną dla drugiej osoby.

3 Gry wieloosobowe

Dotychczas rozważaliśmy przykłady gier dwusobowych, pamiętając, że w rzeczywistości o wiele częstsze są gry wieloosobowe, gdzie każdy z graczy przedstawia interes własny lub pewnej grupy osób, a interesy poszczególnych graczy mogą być sprzeczne.

Tragedia wspólnego pastwiska

Nazywana również tragedią wspólnych zasobów (ang. tragedy of the commons). Wyobraźmy sobie pasterzy, którzy mają swoje stada krów i pastwisko, na które każdy z nich je wyprowadza. Oczekuje się, że każdy z pasterzy będzie miał jak najwięcej zwierząt jak tylko jest to możliwe, jednak wówczas cała roślinność może zaniknąć, a pastwisko stanie się tylko bezużyteczną ziemią. Ponieważ każdy z pasterzy jest istotą racjonalną, stara się maksymalizować swoje zyski i zastanawia się, jaką użyteczność da dodanie do stada jeszcze jednego zwierzęcia. Taką użyteczność każdego dodatkowego zwierzęcia możemy rozbić na dwa komponenty:

- **składowa pozytywna**: dodatkowe zwierzę oznacza dodatkowy zysk,
- **składowa negatywna**: większa ilość zwierząt zwiększa szanse na zniszczenie pastwiska i całej jego roślinności; efekty tego będą odczuwalne dla wszystkich pasterzy korzystających z tego pastwiska, zatem negatywna użyteczność dla każdego pojedynczego pasterza jest znacząco mniejsza niż składowa pozytywna.

Pytanie
Jakie widzisz możliwe rozwiązania czy też sposoby radzenia sobie z opisanym problemem?

Innymi podobnymi problemami z udziałem wielu graczy, gdzie punkt widzenia każdego z graczy jest różny mogą być np.:

- zanieczyszczenia spowodowane przez różnego rodzaju pojazdy,
- zanieczyszczenia powietrza i wody spowodowane przez przemysł,
- wzrost światowej populacji,
- wycinanie lasów.

4 Ćwiczenia

1. Poniżej znajduje się pewna macierz wypłat. Co możesz powiedzieć o grze, którą ona opisuje?

Tabela 3: Tabela zawierająca macierz wypłat dla Ćwiczenia I.

	1	2
A	-1/1	4/-4
B	2/-2	10/-10

2. Zdefiniuj czystą równowagę Nasha dla każdej z macierzy wypłat.

Tabela 4: Tabela zawierająca macierz wypłat dla Ćwiczenia 2 Przykład 1.

	1	2
A	2/0	3/2
B	4/1	5/3

Tabela 5: Tabela zawierająca macierz wypłat dla Ćwiczenia 2 Przykład 2.

	1	2
A	2/0	0/0
B	0/0	0/2

Tabela 6: Tabela zawierająca macierz wypłat dla Ćwiczenia 2 Przykład 3.

	1	2
A	2/0	0/2
B	0/2	2/0

Tabela 7: Tabela zawierająca macierz wypłat dla Ćwiczenia 2 Przykład 4.

	1	2
A	1/1	1/1
B	1/1	1/1

3. Dla podanej macierzy wypłat, odpowiedz na poniższe pytania.

Tabela 8: Tabela zawierająca macierz wypłat dla Ćwiczenia 3.

I/II	C	D
A	1/2	5/1
B	3/5	2/4

a) Jaki jest szacowany zysk dla gracza I i II jeżeli $p = 0.4$ i $q = 0.7$?

$E_I($

$E_{II}($

b) Oblicz najlepsze strategie dla gracza I i II. Co się stanie jeżeli je zmienią?

5 Zadanie domowe

Na ostatnich zajęciach rozważaliśmy jak mógłby wyglądać dylemat więźnia, gdyby nie była to pojedyncza gra, a sekwencyjna. Co więcej, wiemy, że gracze mogliby się różnie zachowywać w zależności od liczby iteracji, tego czy znają liczbę iteracji czy nie oraz od możliwości wybaczania bądź nie popełnionej zdrady. Możemy się jednak zastanowić nad grą, w której o oszustwie moglibyśmy zostać poinformowani, dopiero gdybyśmy tego chcieli. Gra, z którą mielibyśmy do czynienia jest grą sekwencyjną, w której każdy z dwóch graczy może wybierać naprzemiennie z dwóch strategii:

- oszukać lub nie oszukać,
- sprawdzić lub nie sprawdzić.

Macierz wypłat nie jest stała dla całej gry i musi być aktualizowana wraz z każdą kolejną iteracją, a możliwe zyski lub straty mogą być indywidualnie dopasowywane przez każdego z graczy. Co więcej, każdy z graczy, jak przy każdej innej grze, chciałby przewidywać z jak największym prawdopodobieństwem akcje przeciwnika.

Gra, o której mówimy, jest znana pod nazwą Oszust. Gramy częścią talii kart: od 9 do asa w czterech kolorach. Każdy z graczy na początku gry otrzymuje 8 kart. Twoim zadaniem jest:

- położenie na stosie karty tej samej wysokości lub wyższej niż górna karta ze stosu, jeżeli nie zamierzasz oszukać lub
- położenie na stosie jakiekolwiek karty, jeżeli zamierzasz oszukać lub
- rezygnacja z kładzenia karty na rzecz pobrania 3 kart ze stosu.

Pamiętaj, że Twój przeciwnik, może sprawdzić czy mówisz prawdę. Wówczas:

- jeżeli oszukałaś lub oszukałeś: bierzesz 3 karty ze stosu,
- jeżeli nie oszukałaś/oszukałeś: przeciwnik zabiera 3 karty z góry stosu.

Następnie następuje zamiana ról: przeciwnik kładzie kartę, a Ty musisz zdecydować czy sprawdzasz go czy nie. Gra kończy się gdy któryś z graczy pozbędzie się wszystkich kart z ręki. Postaraj się bazować na macierzy wypłat, którą będziesz aktualizował po każdym ruchu.

Twoim głównym zadaniem jest napisanie skryptu gracza w Pythonie, który miałby jak najlepszą strategię. Twój kod powinien bazować na przykładowym kodzie gracza, który został udostępniony, zwracając uwagę zwłaszcza na przyjmowane wejścia i wyjścia. Dodatkowo ustawiony jest limit czasowy 0.01 sekundy na decyzję.

Sposób oceniania
Twój gracz będzie musiał przejść przez dwa etapy oceniania:

1. gry z nieznanymi graczami prowadzącej/prowadzącego, którzy implementują zarówno bardziej naiwne jak i nieco rozbudowane strategie,
2. gry z pozostałymi graczami z Twojej grupy laboratoryjnej

Każdy pojedynek będzie uruchamiany 100 razy.
Punktacja:

- **3 pkt**: gracz wygrywa z graczem naiwnym,
- **5 pkt**: gracz wygrywa z graczem o rozbudowanej strategii.

Wszystkie pośrednie punkty będą przyznawane na podstawie rankingu z konkursu, z uwzględnieniem liczby wygranych i przegranych z każdym z graczy.

Fundusze Europejskie Polska Cyfrowa
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska Europejski Fundusz Rozwoju Regionalnego

„Akademia Innowacyjnych Zastosowań Technologii Cyfrowych (AI Tech)”, projekt finansowany ze środków Programu Operacyjnego Polska Cyfrowa POPC.03.02.00-00-0001/20