Zaawansowane Metody Inteligencji Obliczeniowej

Lab 13: Wnioskowanie probabilistyczne – wprowadzanie

Michał Kempka Marek Wydmuch

10 czerwca 2021

Fundusze Europejskie Polska Cyfrowa | Rzeczpospolita Polska | Unia Europejska Europejski Fundusz Rozwoju Regionalnego

"Akademia Innowacyjnych Zastosowań Technologii Cyfrowych (AI Tech)",
projekt finansowany ze środków Programu Operacyjnego Polska Cyfrowa POPC.03.02.00-00-0001/20

1 Przypomnienie – prawdopodobieństwo

- Ω – zbiór zdarzeń elementarnych (ang. sample space).
- $w \in \Omega$ – zdarzenie elementarne (ang. world albo outcome), zdarzenia elementarne wzajemnie się wykluczają oraz są zbiorowo wyczerpujące, tzn. zawsze musi zajść jedno z nich.
- $a = \{w_i : w_i \in \Omega\}$ – zdarzenie losowe (ang. event) to podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych.
- $0 \leqslant P(w) \leqslant 1$ dla każdego w.
- $\sum_{w \in \Omega} P(w) = 1$.
- A – zmienna losowa, $A = true$ często zapisujemy po prostu jako 'a', a '$A = false$' jako '$\neg a$'.
- $P(a)$ – prawdopodobieństwo a priori (ang. prior lub uncoditional).
- $P(a|b)$ – prawdopodobieństwo warunkowe (ang. posterior lub conditional).
- $P(a \wedge b) = P(a|b)P(b) \iff P(a|b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)}$
- $P(a|b) = \frac{P(b|a)P(a)}{P(b)}$ – twierdzenie Bayesa.
- $P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$
- $P(a) = 1 - P(\neg a)$.
- $P(A) = \sum_{b \in B} P(A, b)$ – marginalizacja.
- Jeżeli $P(A, B) = P(A)P(B)$ to A i B są niezależne (oznaczane jako $A \perp B$).
- Niezależność pozwala na rozłożenie rozkładu łącznego na mniejsze rozkłady.

2 Wnioskowanie przez enumeracje

Wprowadzimy teraz prosty mechanizm wnioskowania probabilistycznego opartego o całkowity rozkład łączny (rozkład zdarzeń elementarnych), na przykład taki:

	a		$\neg a$	
	b	$\neg b$	b	$\neg b$
c	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg c$	0.016	0.064	0.144	0.576

W którym to:

- $P(c) = 0.108 + 0.012 + 0.072 + 0.008 = 0.2$ – dokonaliśmy marginalizacji, $P(c)$ jest więc prawdopodobieństwem marginalnym.
- $P(c|a) = \frac{P(c \wedge a)}{P(a)} = \frac{0.108+0.012}{0.108+0.12+0.016+0.064} = 0.6.$
- $P(\neg c|a) = \frac{P(\neg c \wedge a)}{P(a)} = \frac{0.016+0.064}{0.108+0.12+0.016+0.064} = 0.4.$
- Wartości $P(c|a)$ i $P(\neg c|a)$ sumują się oczywiście do 1, zauważ, że w obu wypadkach liczmy wyrażenie $1/P(a)$, ma ono więc funkcję normalizującą.
- Aby skrócić notację możemy oznaczyć mianownik jako α i zapisać oba równania za jednym razem:

$$\begin{aligned} P(C|a) &= \alpha P(C|a) = \alpha(P(C,a,b) + P(C,a,\neg b)) \\ &= \alpha(\langle 0.108, 0.016\rangle + \langle 0.012, 0.064\rangle) = \alpha\langle 0.12, 0.08\rangle = \langle 0.6, 0.4\rangle \end{aligned}$$

- Zauważmy, że żeby wyliczyć $P(C|a)$ nie potrzebujemy wcale znać $P(a)$, możemy po prostu znormalizować wartości $\langle 0.12, 0.08\rangle$ tak by sumowały się do 1.

Uogólnijmy teraz nasze spostrzeżenia do ogólnego modelu wnioskowania:

- $\mathbf{X}$ – zbiór wszystkich zmiennych losowych.
- $\mathbf{e}$ – zbiór znanych wartości (obserwacji) (ang. evidence) dla zbioru zmiennych losowych $\mathbf{E}$
- Cel: wyliczyć prawdopodobieństwo warunkowe dla zbioru. wybranych zmiennych losowych $\mathbf{Y}$ (zapytanie).
- $\mathbf{H} = \mathbf{X} \setminus \mathbf{E} \setminus \mathbf{Y}$ – zbiór ukrytych zmiennych losowych
- $P(\mathbf{Y}|\mathbf{E} = e) = \alpha P(\mathbf{Y}|\mathbf{E} = e) = \alpha \sum_{\mathbf{h} \in \mathbf{H}} P(\mathbf{Y}, \mathbf{E} = e, \mathbf{H} = h)$
- Zwróć uwagę, że $\mathbf{Y} \cup \mathbf{E} \cup \mathbf{H} = \mathbf{X}$, czyli wyczerpują zbiór zmiennych losowych.

Mając całkowity rozkład łączny, powyższy model jest nam wstanie odpowiedzieć na zapytania o prawdopodobieństwa dla każdego zbioru dyskretnych zmiennych losowych.

Pytanie: Jaka jest wada takiego podejścia?

Odpowiedź: Złożoność $O(2^n)$ dla zmiennych binarnych.

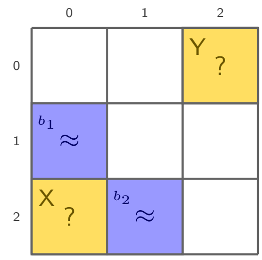
3 Świat Niepewnego Wumpusa

Rysunek 1: Wumpus z gry 'Hunt the Wumpus z roku 1980'

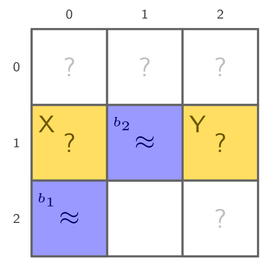
Rozważmy świat Wumpusa (stwór z rysunku 1), składający się z przyległych do siebie kwadratów. Występują w nim **jamy** z zadanym prawdopodobieństwem **p** (oszacowanym na podstawie wielu lat badań po ciemku). Każda jama powoduje wystąpienie bryz na wszystkich 4 przyległych polach (lewo, prawo, góra, dół). Wumpus nie widzi jam, lecz na podstawie bryz może oszacować gdzie znajdują się jamy aby mieć lepsze szanse na dotarcie do nich. Pomóż wyznaczyć te prawdopodobieństwa w punktach X i Y. Puste pole oznaczają brak bryz i jam, a znaki zapytania brak dodatkowych informacji.

a)

Odpowiedź:
$P(\text{Jama w } X|b_1 \wedge b_2) = 1$
$P(\text{Jama w } Y|b_1 \wedge b_2) = 0$

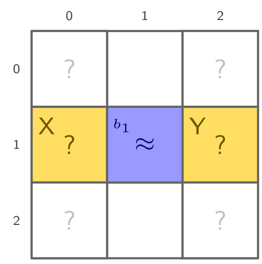


b)



Odpowiedź:
$P(\text{Jama w } X | b_1 \wedge b_2) = 1$
$P(\text{Jama w } Y | b_1 \wedge b_2) = p$

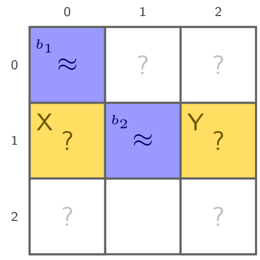
c)



Odpowiedź: Intuicja często podpowiada, że to 0.5, 'tu albo tam', ale tak nie może być, bo jeśli tu to... są szanse na tam niezależnie. Musi więc to być co najmniej pół.

$$
\begin{aligned}
P(\text{Jama w } X|b_1) = P(\text{Jama w } Y|b_1) =& \frac{P(b_1|\text{Jama w } X)P(\text{Jama w } X)}{P(b_1)} \\
=& \frac{1 \cdot p}{1-(1-p)^2} = \frac{1 \cdot p}{p^2 + 2p(1-p)} \\
=& \frac{p}{2p - p^2} \\
=& \frac{1}{2-p} > 0.5
\end{aligned}
$$

d)



Odpowiedź:

$$P(\text{Jama w } X | b_1 \wedge b_2) = \frac{P(b_1 \wedge b_2 | \text{Jama w } X) P(\text{Jama w } X)}{P(b_1 \wedge b_2)}$$
$$= \frac{1 \cdot p}{p^2 + 2p(1-p)} = \frac{1}{2-p} > 0.5$$

$P(\text{Jama w } Y | b_1 \wedge b_2) = p$
bo b_1 musi być wywołane przez X lub pole (0,1) więc nie mamy żadnych dodatkowych informacji.

4 Świat Zagubionego Wumpusa i Filtr Histogramowy

Rozważmy inne okoliczności w świecie Wumpusa. Nadal mamy do czynienia ze światem kwadratów, a Wumpus może poruszyć się w dowolnym kierunku (lewo, prawo, góra, dół), a świat jest cykliczny (poruszenie się w prawo będąc na prawej krawędzi skutkuje pojawieniem się po lewej stronie i analogicznie dla ruchów pionowych). Z prawdopodobieństwem **p**, po wykonaniu ruchu Wumpus znajdzie się na zamierzonym polu. Z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}(1-p)$ Wumpus wyląduję na jednym z 4 pól na około pola docelowego. Niestety Wumpus nie wie gdzie jest, ale ma dostępną mapę terenu. Na mapie są oznaczone **jamy** i jego ulubiona jama (pole, do którego Wumpus chce dotrzeć). Jeśli Wumpus wejdzie w dziurę, zauważa to z prawdopodobieństwem **pj**, jeśli wejdzie na pole bez jamy, uznaje z prawdopodobieństwem **pn**, że wpadł w jamę bo jego percepcja jest z nieznanych powodów zaburzona. Docelowo Wumpus chce dotrzeć do swojej jamy, lecz pośrednim krokiem do rozwiązania tego problemu jest ustalenie gdzie jest.

Pytanie: Zakładając, że nasza aktualna wiedza na temat lokalizacji Wumpusa mówi, że prawdopodobieństwo, że przebywa na polu o współrzędnych XY $(P(xy))$, jakie jest prawdopodobieństwo, że znajduje się na wybranym polu x,y z jamą/bez jamy jeśli wyczuł, że wpadł w jamę/nie wpadł w jamę?

Odpowiedź:

Przy aktualizacji ze względu na ruch przesuwamy prawdopodobieństwa w odpowiednią stronę i rozmywamy je na około zależnie od p. Pytanie pomocnicze: jak wydajnie zaimplementować aktualizację prawdopodobieństw z uwagi na ruch: konwolucja (splot).

Przy aktualizacji ze względu na wyczucie jamy (oznaczone jako 'j' we wzorach), jeśli wyczuliśmy jamę i w xy jest jama:

$$\begin{aligned} P^{t+1}(xy) = P(xy|j) \leftarrow & \frac{P(j|xy)P(xy)}{P(j)} \\ = & \frac{p_j P^t(xy)}{\text{czynnik normalizujący}} \end{aligned}$$

Jeśli nie wyczujemy jamy w miejscu gdzie jest jama:

$$\begin{aligned} P^{t+1}(xy) = P(xy|\neg j) \leftarrow & \frac{P(\neg j|xy)P(xy)}{P(\neg j)} \\ = & \frac{(1-p_j) P^t(xy)}{\text{czynnik normalizujący}} \end{aligned}$$

Analogicznie postępujemy dla braku wykrycia jamy.

Literatura

[1] Russell, S. and Norvig, P. (2010). *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. Prentice Hall, third edition.

[2] Sutton, R. S. and Barto, A. G. (2018). *Reinforcement Learning: An Introduction*. The MIT Press, second edition.

Fundusze Europejskie Polska Cyfrowa
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska Europejski Fundusz Rozwoju Regionalnego

"Akademia Innowacyjnych Zastosowań Technologii Cyfrowych (AI Tech)",
projekt finansowany ze środków Programu Operacyjnego Polska Cyfrowa POPC.03.02.00-00-0001/20