

Índice

T1: Termodinámica.....	8
Ppios de la Termodinámica.....	8
Estado Térmico.....	8
Propiedad Intensiva.....	8
Propiedad Extensiva.....	8
Sistema.....	8
Temperatura.....	8
Equilibrio Termodinámico.....	8
Intercambio de Calor.....	9
Cant de Calor.....	9
Caloría.....	9
Calor Específico.....	9
Capacidad Calorífica.....	10
Cambios en el Estado de Agregación.....	11
Calor Latente.....	11
Termometría.....	13
Magnitud Termométrica.....	13
Foco o Fuente Térmica.....	13
Termómetro.....	13
Calorímetro.....	13
Equivalente en Agua.....	13
Escala Termométrica.....	14
Pasajes.....	14
★ 3er Ppio de la Termodinámica.....	14
Mecanismos de Transmisión de Calor.....	15
Transferencia de Calor.....	15
★ Conducción.....	15
Potencia Calorífica / Flujo Calórico.....	15
Gradiente Térmico.....	15
Resistencia Térmica.....	15
Asociación en Serie - Resistencias.....	16
Asociación en Paralelo - Resistencias.....	16
★ Convección.....	16
★ Radiación.....	17
Ley de Stefan Boltzmann.....	17
Gas Ideal (GI).....	18
Estado de Equilibrio.....	18
★ 1er Ppio de la Termodinámica.....	18
Ecuación de Estado.....	19
Representación Gráfica.....	19
Transformación del Sistema.....	19
Proceso o Transformación Reversible.....	20
Transformación Elemental.....	20
★ ISOCÓRICA - Volumen Cte.....	20

★ ISOTERMA - Temperatura Cte.....	21
★ ADIABÁTICA - Sin Intercambio de Calor.....	21
Relación entre cv y cp.....	21
Ciclo Termodinámico.....	22
Máquina Térmica.....	22
★ 2do Ppio de la Termodinámica.....	23
Enunciado de Clausius.....	23
Enunciado de Kelvin.....	23
★ Máquina Simple.....	23
Máquina Térmica.....	23
Máquina Frigorífica.....	23
Eficiencia de una Máquina Simple.....	24
Máquina de Carnot.....	24
T2: Electrostática.....	26
Carga Eléctrica.....	26
Sist. Neutro.....	26
Sist. Cargado.....	26
Ley de Coulomb.....	26
Fuerza de Coulomb / Electrostática.....	26
Principio de Superposición.....	27
Campo Eléctrico.....	27
Línea de Campo.....	28
Distribuciones Continuas de Carga.....	28
Densidad Lineal de Carga.....	28
★ Varilla Cargada.....	28
Simetrías.....	30
★ Varilla.....	30
★ Varilla Infinita.....	30
★ Anillo.....	31
Distribuciones Superficiales de Carga.....	32
★ Corona Circular.....	32
★ Disco.....	33
★ Plano Infinito.....	33
Flujo de CE.....	33
Teorema de Gauss.....	34
★ Simetría Esférica.....	34
★ Simetría Cilíndrica.....	36
★ Simetría Plana.....	39
Planos Infinitos con Carga Opuesta.....	40
Potencial Electrostático.....	41
Consecuencia.....	41
Potencial Respecto del Infinito.....	42
Distribución de Cargas Localizada.....	42
Trabajo de la Fuerza Electrostática.....	42
Conductor Ideal.....	42
T3: Capacitores y Dielectricos.....	44

Capacitancia.....	44
Capacitor Plano.....	44
Energía en Capacitores.....	45
Proceso de Carga de un Capacitor.....	45
Dipolo.....	46
Momento Dipolar.....	46
Material Aislante.....	46
Dieléctrico.....	46
Capacitores y Dieléctricos.....	47
Campos de Desplazamiento y Polarización.....	47
Campo Polarización.....	47
Campo Desplazamiento.....	47
Susceptibilidad Dieléctrica / Polarizabilidad.....	47
Campos y Densidad de Carga.....	47
Polarización.....	47
Desplazamiento.....	48
Condiciones de Frontera.....	49
Campo D.....	49
Campo E.....	49
Aplicación de las Condiciones de Frontera.....	50
1er Caso - Dieléctricos en Paralelo.....	50
2do Caso - Dieléctricos en Serie.....	51

T1: Termodinámica

Definir la temperatura de diff partes o eltos; Estudio de los sists termodinámicos.

Ppios de la Termodinámica

- 1) **Equilibrio Térmico:** si un obj térmico A está en equilibrio con B, y B está en equilibrio con C, A y C también estarán en equilibrio entre sí. El equilibrio es transitivo, y por lo tanto, la temp una variable universal.
- 2) **Conservación de Energía:** la energía no se pierde, se transforma, con tendencia a conservarse.
- 3) **Entropía:** siempre habrá pérdida de energía.
- 4) **Cero Absoluto:** si se llega al cero absoluto, los átomos no se mueven.

Estado Térmico: depende de cómo se agitan las moléculas de un cuerpo, cuanto más rápido y violento, más caliente el cuerpo. Si las moléculas se dejaran de mover, tendríamos temp nula.

Propiedad Intensiva: prop independiente al sist particular. En uno homogéneo y en equilibrio, las props intensivas serán iguales en todos lados, tomes cualquier punto. *Por ej: temperatura.*

Propiedad Extensiva: prop proporcional a la cant. de sustancia que forma al sistema. *Por ej: energía, masa.* El cociente de dos extensivas, da una intensiva.

Sistema: cualquier obj, simple o complejo, que podemos tomar como unidad para experimentos. Lo llamamos compuesto si está formado por 2+ subsists.

Temperatura: magnitud escalar no aditiva, prop fundamental de la termodinámica porque puede definirse para cualquier sist. Sería su disponibilidad de energía y depende de su estado térmico. No se la puede medir directamente, por lo que se requieren instrumentos externos, *por ej: termómetro.* Consiste en atribuirle un nº concreto a cada uno de ellos (*frío/calor*).

- * **Frío:** obj con $T <$ cuerpo humano.
- * **Calor:** obj con $T >$ cuerpo humano.

Equilibrio Termodinámico: estado donde todas las variables de interés termodinámico de un sist adquieren un valor definido, cte sobre todo el sist e independiente del tiempo, ya no hay más transferencias de energía. Ocurre si se deja aislado al sist (sin interactuar con el exterior) y su dinámica interna evoluciona hasta este equilibrio, esto no es inmediato pero sucede SIEMPRE.

Un sist compuesto estará en equilibrio sólo si todos sus subsists se encuentran a la misma temp. La temp final luego del equilibrio es un promedio ponderado de las iniciales de los subsists. Para llegar a ella ocurre un *Intercambio de Calor.*

Intercambio de Calor: proceso por el cuál los diff subsists alcanzan el equilibrio termodinámico. En él, los subsists con mayor disponibilidad de energía (+caliente, +temp) ceden calor (*reduciendo su temp*), mientras que los de menor energía (+frío, -temp) reciben ese calor (*aumentando su temp*), hasta llegar a la temp homogénea final. El flujo neto de calor va del más caliente al menos. Esto es independiente de sus tamaños.

El Q intercambiado no tiene existencia como tal ni antes ni después del intercambio, sólo existe para ese momento. Antes y después de él, la energía existe en otra forma ("Energía Interna"). Si un cuerpo cede calor y no recibe energía, "gasta" su propia energía interna, aumentando la de otros.

En un sist aislado, el calor no se crea ni se destruye; todo el calor cedido por una parte es absorbido por otra. Esto no quiere decir que los cambios de temp sean iguales ($\Delta T \neq \text{calor}$), pero sí que al alcanzar equilibrio térmico la suma de los calores intercambiados es nula.

Balance de Calor

$$\sum Q_i = 0$$

$$|Q_1| = |Q_2|$$

Calor Recibido

$$Q > 0$$

Calor Cedido

$$Q < 0$$

Cant de Calor (Q): magnitud escalar aditiva que cuantifica el intercambio de energía que protagonizan dos o más cuerpos hasta alcanzar equilibrio térmico. Es energía que ingresa al sist, pero no por un trabajo mécanico. Se puede medir en Joule [J], Calorías [cal], etc.

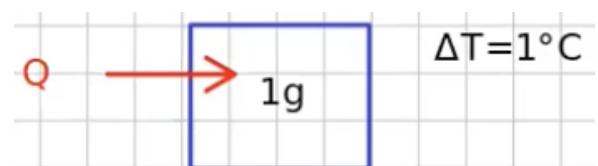
Caloría (cal): unidad de energía que cuantifica la cant de calor que debe entregarse a 1g de agua pura para que aumente de 14.5°C a 15.5°C .

$$1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$$

$$1 \text{ kcal} = 1000 \text{ cal}$$

$$1 \text{ kcal} = 4,18 \text{ kJ}$$

Calor Específico (c): cant de calor que debe intercambiar una unidad de masa del sist para variar su temp una unidad. Es una prop intensiva y una magnitud escalar no aditiva. Su unidad de medida es $\left[\frac{\text{cal}}{\text{g}^{\circ}\text{C}} \right]$ o $\left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right]$.



c (Agua)

$$c = 1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^{\circ}\text{C}}$$

$$c = 1 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^{\circ}\text{C}}$$

SUSTANCIA	$c \left[\frac{\text{cal}}{\text{g}^{\circ}\text{C}} \right]$	SUSTANCIA	$c \left[\frac{\text{cal}}{\text{g}^{\circ}\text{C}} \right]$
Aluminio	0,220	Mercurio	0,033
Bronce	0,092	Oro	0,031
Cobre	0,093	Plata	0,056
Glicerina	0,600	Plomo	0,031
Hielo	0,500	Vidrio	0,160
Hierro	0,105	Zinc	0,092

EJEMPLO: El calorE del aluminio es $c_{al} = 0,217 \frac{cal}{g \cdot ^\circ C}$, para elevar la temp de 1g de aluminio se le debe entregar 0,217 cal.

A partir de calorE hallamos la ecuación fundamental de la calorimetría o ecuación calorimétrica, que relaciona la cant de calor absorbido con el calor específico del sist, su masa y su variación de temp.

Ecuación Calorimétrica

$$Q = c m \Delta T [J]$$

Esta ecuación aplica SÓLO a situaciones donde varía la temp, NO el estado de agregación. Para líquidos y sólidos se emplea el calorE mísico (c_m) y para gases el calorE molar (c_n), se derivan ambos de la cap. cal.

Equivalencias

$$c_m = \frac{C}{m}$$

$$c_n = \frac{C}{\# \text{ moles}}$$

Capacidad Calorífica (C): cant de calor que debe intercambiar un sist dado para que su temp cambie en una unidad (producto de su calorE con su masa). Es una prop extensiva y aditiva, si uno un cuerpo de cap cap C_1 y otro de C_2 , su resultado es un cuerpo con cap cal $C_1 + C_2$. Sus unidades pueden ser $\left[\frac{cal}{^\circ C}\right]$ o $\left[\frac{J}{K}\right]$.

Capacidad Calorífica

$$C = c m$$

Hay dos tipos de procesos de Intercambio de Calor: con o sin cambios en el estado de agregación.

EJEMPLO (SIN CAMBIOS): dados dos subsistemas, A y B, ¿Cuál será su T_f ? ¿Cuál su calor intercambiado?

	A	B
m	$m_A = 1 \text{ kg}$	$m_B = 3 \text{ kg}$
T	$T_A = 60 \text{ }^\circ C$	$T_B = 30 \text{ }^\circ C$

Aquí hay dos procesos de intercambio de calor involucrados:

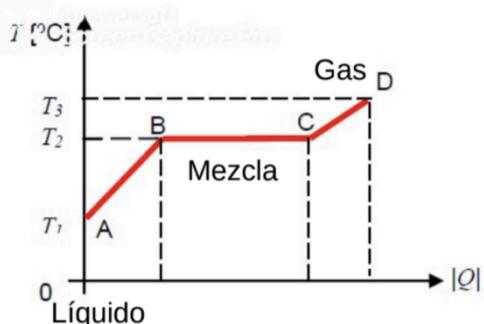
- * A cambia su temp y tiene un intercambio de calor (Q_A).
- * B cambia su temp y tiene un intercambio de calor (Q_B).

La T_f debería encontrarse en la mitad de las dos iniciales.

Como $T_A > T_B$, A cede calor y B lo absorbe.	$\Delta T_A < 0 \wedge Q_A < 0$ $\Delta T_B > 0 \wedge Q_B > 0$
Realizamos el balanceo de calor	$Q_A + Q_B = 0$
Reemplazamos con la ecuación calorimétrica y sacamos factor común del calorE	$c_{agua} [m_A (T_f - T_A) + m_B (T_f - T_B)] =$
Reemplazamos $c_{agua} = 1$ y ordenamos	$(m_B + m_A) T_f = m_A T_A + m_B T_B$
Llegamos al promedio de temp genérico	$T_f = \frac{m_A T_A + m_B T_B}{m_B + m_A}$

Valor Final de T_f	$T_f = \frac{1 \cdot 60 + 3 \cdot 30}{1+3} = \frac{150}{4} = 37,5^\circ$
Valor Final del Calor Absorbido	$ Q_A = Q_B = c \cdot m_A \cdot 7,5 = 22 \text{ kcal}$

Cambios en el Estado de Agregación: los sistemas formados por sustancias puras pueden encontrarse en uno o más estados diferentes (sólido, líquido, gas, plasma), estos están vinculados a su temperatura.



Cuando ocurre un cambio de estado debido a un intercambio de calor, este se realiza a temperatura constante SIEMPRE. Cambia la proporción de la mezcla de estados, por ej: la parte sólida se vuelve líquida, el líquido se vuelve gas, etc.

Las temperaturas a las que suceden son fijas para cada sustancia, es decir, si 10ml de agua hierven y se convierten en vapor a 100°C ; entonces, 1000ml también lo harán a la misma temperatura. Los sistemas se mantienen en esas temperaturas hasta que ocurra el equilibrio o se termine el cambio de estado, en este caso el intercambio seguirá variando la temperatura hasta que ocurra.

Para resumir, al haber un intercambio de calor la temperatura puede variar, si esta no varía entonces lo hace el estado del sistema. Para el 1ero caso, el calor absorbido es sensible; para el 2do es latente.

Para el calor latente no podemos utilizar la ecuación fundamental de la termodinámica, ya que esta depende de la variación de temperatura. En su lugar utilizamos otras, que dependen del estado a cambiar.

Calor Asociado a Cambios de Estado

$$Q_x = L_x \cdot m$$

El subíndice x acompaña al cambio de estado que se efectúe, puede ser: f (fusión), v (vaporización), c (condensación), s (solidificación).

Calor Latente de x (L_x): cantidad de calor que requiere una unidad de masa del sistema para que cambie de estado. Es una propiedad intensiva y la constante de proporcionalidad entre la masa de la sustancia y el calor latente intercambiado.

Agua: L_x

$$L_v = 540 \frac{\text{cal}}{\text{g}} \quad \left| \begin{array}{l} L_c = -540 \frac{\text{cal}}{\text{g}} \\ L_f = 80 \frac{\text{cal}}{\text{g}} \\ L_s = -80 \frac{\text{cal}}{\text{g}} \end{array} \right.$$

EJEMPLO:

- * 1g de agua a 100°C necesita recibir 540 cal para convertirse en vapor a 100°C .
- * 1g de agua a 0°C necesita recibir 80 cal para convertirse en agua a 0°C .
- * Unir 1kg de agua a 80°C y 1kg de hielo a 0°C resultará en 2kg de agua a 0°C .

EJEMPLO (CON CAMBIOS):

dados dos subsistemas, A y B, ¿Cuál será su T_f ? ¿Cuál su calor intercambiado?

Debemos asumir un estado final y comenzar a resolver el problema, si resulta en un absurdo nos equivocamos y volvemos a empezar asumiendo otro.

	A	B
S	Aqua	Hielo
m	$m_A = 10\text{kg}$	$m_B = 2\text{kg}$
T	$T_A = 15^\circ\text{C}$	$T_B = -5^\circ\text{C}$

Posibles situaciones finales:

- * Todo se convierte en agua líquida ($T_f > 0^\circ\text{C}$)
- * Coexistencia de agua y hielo ($T_f = 0^\circ\text{C}$)
- * Todo se convierte en hielo ($T_f < 0^\circ\text{C}$)

Asumimos el primero, todo se convierte en agua. Los procesos involucrados son...

A pasa por un proceso sin cambios, mientras que B sufre 3 procesos: uno para llevarlo a 0°C , otro para cambiar su estado y el último que lo lleva a T_f .

Reemplazamos lo que podemos.

$$c_h = 0.5 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}$$

Realizamos el balance de calor.

La T_f nos va a quedar negativa, un absurdo para esta hipótesis.

$$\text{A}) Q_1 = c_A m_A (T_f - T_i)$$

$$\text{B1}) Q_2 = c_B m_B (0^\circ\text{C} - T_i)$$

$$\text{B2}) Q_3 = m_B L_f$$

$$\text{B3}) Q_4 = c_B m_B (T_f - 0^\circ\text{C})$$

$$\text{A}) Q_1 = 10(T_f - 15)$$

$$\text{B1}) Q_2 = 0.5 \cdot 2 (0^\circ\text{C} - (-5)) = 5 \text{ kcal}$$

$$\text{B2}) Q_3 = 2 \cdot 80 = 160 \text{ kcal}$$

$$\text{B3}) Q_4 = 2(T_f - 0^\circ\text{C})$$

Pasamos a la 2da hipótesis, donde coexisten agua y hielo.

Las incógnitas pasan a ser las masas finales de agua y hielo.

A varía su T a 0°C , y B pasa por dos procesos, uno donde pasa a 0°C y otro donde una parte de él se derrite.

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 &= 0 \\ 12 T_f &= -15 \end{aligned}$$

Realizamos el balance de calor.

$$\text{A}) Q_1 = c_A m_A (0^\circ\text{C} - T_i) = -150 \text{ kcal}$$

$$\text{B1}) Q_2 = 5 \text{ kcal}$$

$$\text{B2}) Q_3 = m_x L_f$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

$$80 m_x = 145$$

$$m_x = 1,81 \text{ kg}$$

Estado Final, con $T_f = 0^\circ\text{C}$

Masa de Agua: 11,81 kg

Masa de Hielo: 0,19 kg

Termometría

Magnitud Termométrica: aquella que varía al variar la temp, por ej: presión.

Foco o Fuente Térmica: cuerpo que no varía su temp aún cuando absorbe o entrega calor. Hay de dos tipos: masa de una sustancia pura en donde hay consistencia de dos fases, o una masa muy grande, tal que las cantas de calor absorbidas modifican despreciablemente su temp.

Termómetro: obj que posee una magnitud termométrica, lo que le permite mostrar fácilmente su temp. Al ser calibrado con una escala de referencia, puede indicar su propia temp una vez establece equilibrio térmico con el sist que se desea medir.

En la medida que su cap. cal. sea mucho menor que la del sist, el instrumento tendrá un cambio de temp mucho mayor, logrando que T_f sea lo más parecida posible a la del sist original.

Calorímetro: recipiente e instrumental. Aísla térmicamente el interior del exterior.

Muchos instrumentos no están compuestos por sustancias puras. Por este motivo, su cap. cal. no es proporcional a su masa y no es posible descomponerla en términos básicos o de calorE, pero es necesario conocerlas para ver su impacto en la experimentación. Para ello se utiliza el **equivalente en agua**.

Equivalente en Agua (Π): masa de agua que tendría la misma cap. cal. que ese sist. Es decir, intercambiaría la misma cant de calor que el calorímetro en el intervalo dado. Se determina viendo la diferencia entre el ideal y la realidad, pensando al elemento extra como agua.

Equivalente en Agua	$\Pi = \frac{C_{sist}}{c_{agua}}$
Calor Intercambiado por el Sistema	$Q_c = \Pi \cdot c_{agua} \cdot \Delta T$

La calidad de un calorímetro aumenta cuando más aísle el contenido del exterior y cuanto menor sea su equivalente en agua. El equivalente en agua es cte en un calorímetro y se mantiene igual para todos sus usos. Un calorímetro ideal es perfectamente aislante y con $\Pi = 0$.

EJEMPLO: Se tiene un calorímetro ($T_i = 20^\circ C$), al cuál se le agregan 100 g de agua ($T_A = 5^\circ C$). Su temp luego de alcanzar el equilibrio es $T_f = 7^\circ C$. Calcular la masa equivalente en agua del calorímetro.

Calor absorbido por el agua.	$Q_A = c_A m_A (T_f - T_i)$ $Q_A = 100 (7 - 5) = 200 \text{ cal}$
Calor absorbido por el calorímetro.	$Q_C = c_A \Pi (T_f - T_i)$ $Q_C = \Pi (7 - 20) = - 13\Pi$
Balance de calor.	$Q_A + Q_C = 0$

	$200 - 13\Pi = 0$
Valor Final	$\Pi = 15,38 \text{ g}$

Escala Termométrica: requiere primero de ciertas cosas.

- * **Magnitud termométrica** que le permita distinguir la temp.
- * **Puntos Fijos:** temps ctes fáciles de reproducir que marquen puntos claros. Se necesitan al menos dos.
- * **Interpolación:** todo lo que quede en el medio de los puntos fijos recibe un valor proporcional a ellos.

PUNTOS FIJOS	°C (CELSIUS)	°F (FAHRENHEIT)	K (KELVIN)
Fusión	0°	32°	273K
Ebullición	100°	212°	373K

Pasajes

°C → K

$$\frac{T_c}{100} = \frac{T_k - 273}{100} \rightarrow T_c = T_k - 273$$

°C → °F

$$\frac{T_c}{100} = \frac{T_f - 32}{180} \rightarrow T_c = \frac{5}{9}(T_f - 32)$$

★ **3er Ppio de la Termodinámica:** “Todo sist posee una temp mínima accesible, a la que tiende cuando se le extrae ‘todo’ el calor que posee. Dicha temp es LA MISMA para todos los sist imaginables y se denomina CERO ABSOLUTO”

En esta temp el gas tendría presión nula, las moléculas se quedarían quietas y se detiene su agitación, esto es imposible por el 2do ppio de la termodinámica.

Más allá, las escalas de temp que tienen su cero en el CERO ABSOLUTO se denominan *Escalas de Temperatura Absoluta*, encontramos el Kelvin y el Rankine.

Mecanismos de Transmisión de Calor

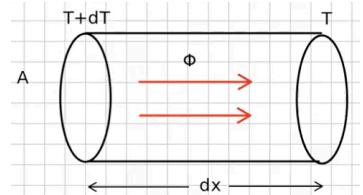
Transferencia de Calor: al poner en contacto térmico dos sists a diff temp, habrá transferencia de calor desde los puntos más calientes hacia los más fríos. Esta se puede realizar mediante 3 mecanismos diff y son las características del medio las que determinan cuáles serán. Pueden darse individualmente o en combinación.

★ **Conducción:** transferencia de calor mediante act molecular, por el choque de unas moléculas con otras, donde las más energéticas le entregan energía a las menos, produciéndose un flujo de calor desde las temps altas a las bajas. Suele darse en objetos sólidos, por contacto directo.

Es más eficiente cuantas más unidades de material puedan transmitir simultáneamente (área más ancha) y menos cuantos más “pasos” haya en la cadena que transporta el calor (+grosor).

Eventualmente se alcanza el Estado Estacionario, donde la temp tiene un perfil lineal. No hay equilibrio térmico porque la temp no es uniforme, pero si hay una transferencia homogénea de extremo a extremo. Mientras estos sistemas sean capaces de intercambiar calor y no modifiquen su temp, se mantendrán así indefinidamente, sin depender el tiempo.

La idea es que al tener un pequeño tubo de longitud diferencial (dx), un extremo a temp T , el otro incrementado diferencialmente con temp $T + dT$, y una sección transversal (A), entonces tendremos una transferencia de calor por conducción con un flujo normal a A .



Potencia Calorífica / Flujo Calórico (ϕ) (H): cantidad de calor transmitida por unidad de tiempo. Es proporcional a la superficie normal a él (A) y al gradiente térmico, el coeficiente de proporcionalidad se denomina *Conductividad Térmica del Material* (λ). La unidad de λ es $\left[\frac{W}{m \cdot ^\circ C}\right]$.

Gradiente Térmico ($\frac{dT}{dx}$): variación de temp por unidad de longitud.

Ley de Fourier

$$\phi = \lambda A \frac{dT}{dx} [W]$$

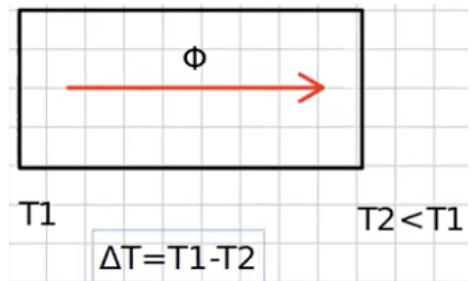
$$H = \lambda A \Delta T [W]$$

Densidad de Flujo de Calor

$$\delta_\phi = \frac{\phi}{A} \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

Resistencia Térmica (R): teniendo un obj cuya sección A es atravesada por una potencia calorífica ϕ , la resistencia es el cociente entre la diff de temps entre sus caras opuestas y dicha potencia calorífica.

Cuanto mayor sea la resistencia de un material, menor será su flujo; esto porque la sustancia se está oponiendo al paso de calor. A su vez, mayor va a ser la diff de temps.



Resistencia Térmica

$$R = \frac{\Delta T}{\phi} \left[\frac{K}{W} \right]$$

Cuando estamos evaluando la resistencia de un cuerpo cilíndrico, esta será mayor cuando más grande sea su longitud y menor su área.

Resistividad Térmica

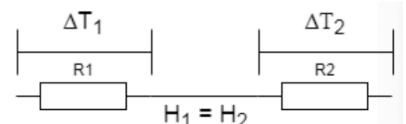
$$\rho = \frac{1}{\lambda}$$

Resistencia Térmica en Cuerpos Cilíndricos

$$R = \frac{\Delta x}{\lambda A}$$

$$R = \rho \frac{\Delta x}{A}$$

Asociación en Serie - Resistencias: el flujo que pasa es el mismo en ambas, si no hay pérdida de calor en el medio. Además, la resistencia equivalente es la suma de las individuales.

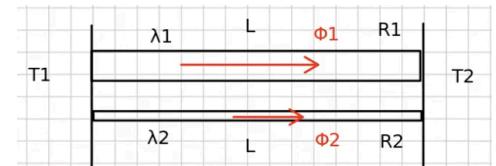


Flujo a través de la Resistencia

$$\phi = \phi_1 = \phi_2$$

Variación de Temperatura	$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2$
Calculamos la resistencia resultante...	$R_{eq} = \frac{\Delta T}{\phi} = \frac{\Delta T_1}{\phi} + \frac{\Delta T_2}{\phi}$
Resistencia Equivalente	$R_{eq} = R_1 + R_2$

Asociación en Paralelo - Resistencias: pueden ser de espesor y materiales diff. La longitud y el gradiente térmico son los mismos para ambas; el flujo no necesariamente es el mismo, y el equivalente es la suma de los dos flujos. La resistencia equivalente disminuye, porque permite más paso de calor.

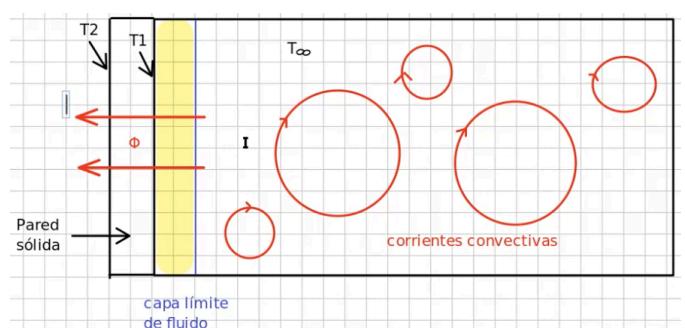


Flujo a través de la Resistencia	$\phi = \phi_1 + \phi_2$
Variación de Temperatura	$\Delta T = \Delta T_1 = \Delta T_2$
Resistencia Equivalente	$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

★ Convección: hay movimiento de materia, no solo fluye por el choque entre moléculas sino también al transporte de masas con diff temps. Las moléculas pueden moverse unas respecto a otras y, eventualmente, mezclarse. Predomina en los fluidos y es más eficiente que la conducción.

Encontramos dos regiones, aquella donde se permite el libre movimiento de la materia y la otra en las proximidades de las paredes del contenedor.

En la 1era, la transferencia de calor se da por corrientes convectivas y lleva al material a una temp T_∞ uniforme (no lo estudiaremos); en la 2da, la parte del fluido que está en contacto con la pared sólida no tiene la misma movilidad que el resto, la consideramos una pequeña lámina en reposo (capa límite). Como tal sólo puede transferir calor a través de la pared por conducción. Sin embargo, no hay forma de conocer el espesor de ella, por lo que la fórmula es diff.



En la fórmula encontramos el Coeficiente de Convección (h) $\left[\frac{W}{m^2 K} \right]$ que tiene en cuenta no solo la conductividad del fluido estático, sino también el espesor de la capa límite.

Ley de Enfriamiento de Newton	$H = \phi = h A (T_1 - T_\infty) [W]$
-------------------------------	---------------------------------------

El flujo de calor por convección es positivo ($H > 0$), si el calor se transfiere de afuera hacia el fluido ($T_1 > T_\infty$) ; y negativo ($H < 0$), si el calor se transfiere del fluido a afuera ($T_\infty > T_1$). El flujo que pasa por la capa límite y la pared sólida es el mismo (resistencias en serie).

EJEMPLO: El vidrio de una venta se encuentra a 10°C y su área es 1.2m^2 . Si la temp del aire exterior es 0°C , calcular la energía que se pierde por convección cada seg. Considerar $h = 4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$.

Planteemos los datos como los conocemos.	$T_1 = 10^\circ\text{C} = 283\text{K}$ $T_\infty = 0^\circ\text{C} = 273\text{K}$ $A = 1.2 \text{ m}^2$
Usamos la Ley de Enfriamiento de Newton	$H = 4 \cdot 1.2 (283 - 273) = 48$
Valor Final	$H = 48 \text{ W}$

★ Radiación: emplea ondas como intermediario. Creándose ondas donde hay +concentración de energía y siendo absorbidas donde hay - .

Precisa de la generación de ondas, cuya disponibilidad depende del tipo de medio donde se encuentra (luz, sonido, oleaje, sismos, etc.). En gral, su eficacia es baja para cantidades pequeñas de energía y crece enormemente al aumentar la potencia disponible. La relación energía y tiempo de liberación es inversa, las explosiones son muy breves y generan luz y sonido en abundancia. A diff de los otros mecanismos, tiene un comportamiento no lineal, por lo que se trata cada caso por separado.

Ley de Stefan Boltzmann: determina la relación entre la intensidad de radiación electromagnética que emite un cuerpo en función de la temp. Esta depende de su superficie, su emisividad (prop determinada por las características de su sup) y la cuarta potencia de la temperatura absoluta (medida en K).

Es decir, para un cuerpo de emisividad e , a temperatura T , que se encuentra rodeado por un medio a temperatura T_0 , con σ siendo la "Constante S-B", podemos expresar el calor que el cuerpo pierde por unidad de tiempo.

Constante S-B

$$\sigma = 5,67 * 10^{-8} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \right]$$

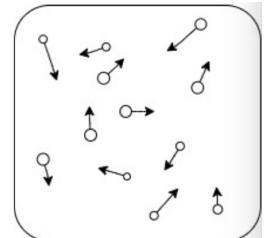
Ley de Stefan Boltzmann

$$\frac{dQ}{dt} = H_{emitida} - H_{absorbida} = \sigma \cdot e \cdot A \cdot (T^4 - T_0^4)$$

Gas Ideal (GI): sus moléculas no interactúan entre sí (no chocan unas con otras), tampoco rotan y vibran, solo se desplazan golpeando eventualmente las paredes de su contenedor (provocando presión). Además, las consideramos como partículas puntuales, no tenemos en cuenta su estructura (no pueden acumular energía potencial). En consecuencia, toda la energía del gas proviene de la energía cinética de traslación de las moléculas.

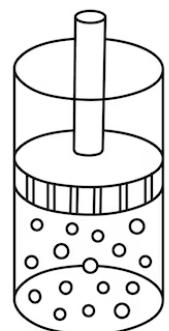
Este modelo funciona porque cada molécula tiene mucho espacio para moverse (hay baja densidad), entonces el choque entre dos moléculas es poco probable. A su vez, deja de funcionar si se baja mucho la temp.

Estado de Equilibrio: si el sist se encuentra en equilibrio, las props "observables" no pueden depender del tiempo. Esto significa que cada vez que las moléculas se desplazan y chocan, el estado global promedio del sist no puede cambiar. Por lo tanto, las posiciones y velocidades de las partículas deben ser parejas, moviéndose en todas direcciones y con similar rapidez. Esto también significa que el GI ejerce una presión uniforme en TODO el recito (distribución pareja de colisiones en sus paredes).



Para llegar a este estado, las moléculas con más rapidez tuvieron que transferir su energía cinética a las más lentas con cada colisión, hasta llegar a un sist con energía repartida equitativamente.

★ **1er Ppio de la Termodinámica:** expresa la conservación de energía en los sists termodinámicos. En los GI a su energía interna la denominamos U , esta proviene del movimiento molecular (energía cinética de desplazamiento de moléculas). Supongamos que nuestro GI se encuentra en una envoltura móvil con un pistón, hay dos formas para que él pueda intercambiar energía con el entorno:



- 1) **Trabajo Mecánico (Expansión o Compresión de la Frontera Móvil):** tiene que haber un cambio de volumen.

Llamamos W al trabajo realizado por el sist sobre su entorno, en una expansión este es positivo ($W > 0$) porque el pistón sube por la presión que el gas ejerce sobre él contra la presión externa (pierde energía interna), por el contrario en una compresión el trabajo es negativo ($W < 0$), porque el agente externo le entrega energía.

Expansión

$$W > 0$$

Compresión

$$W < 0$$

- 2) **Flujo Calórico a través de su Envoltura:** esta debe ser diatérmica.

Llamamos Q al calor absorbido por el sist, cuando toma calor del entorno este es positivo ($Q > 0$) porque aumenta la energía interna, por el contrario cuando cede calor este es negativo ($Q < 0$) porque disminuye.

Calor Recibido

$$Q > 0$$

Calor Cedido

$$Q < 0$$

Con esto podemos formular la variación de energía interna del sist (1er Ppio de la Termodinámica).

1er Ppio de la Termodinámica

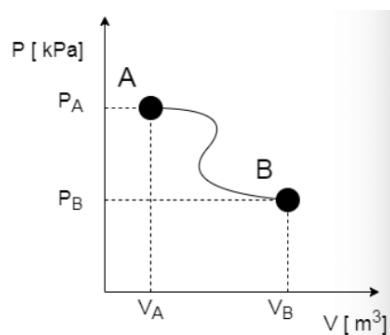
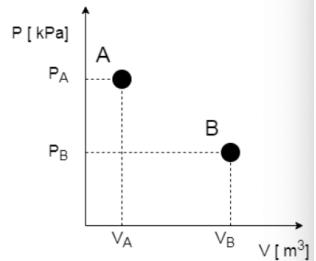
$$\Delta U = Q - W$$

De acuerdo al tipo de transformación que sea, uno calcula diff el calor y el trabajo. PERO, la energía depende exclusivamente de la temperatura inicial y final, NO de la transformación específica.

Ecuación de Estado: fórmula que relaciona proporcionalmente las 3 props más impes de los GI (presión, volumen y temp), cuando el sist cerrado se encuentra en equilibrio dentro de un recinto de volumen V , a presión P y temperatura T . N_A es el nro de Avogadro.

Ecuación de Estado	$PV = n R T$	$PV = N k T$
Constante de Boltzmann	$k = 1,38 \times 10^{-23} \left[\frac{J}{K} \right]$	$k = \frac{R}{N_A}$
Constante Universal de los Gases	$R = 8,31 \left[\frac{J}{mol K} \right]$	
Nro de Moles en el Sistema	$n = \frac{N}{N_A}$	

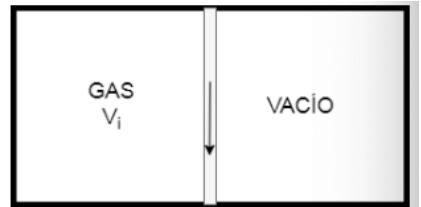
Representación Gráfica: al haber 3 variables de estado, que se vinculan mediante una ecuación para todo estado de equilibrio posible, podemos representarlos todos como puntos en gráficos 2D ($P(V)$, $P(T)$, $V(T)$). Cada uno de estos gráficos tiene sus ventajas y aplicaciones, en gral trabajamos con el $P(V)$.



Transformación del Sistema: proceso por el cuál se lleva al sist desde un cierto estado de equilibrio a otro. Son provocadas por la intervención de un agente externo, si permaneciera aislado su estado no cambiaría. Según cuál sea la transformación que se deseé conseguir se debe interactuar de forma diff (intercambio de calor o trabajo). En gral, se representan como trayectorias en los gráficos.

Proceso o Transformación Reversible: en todo momento, sin importar que transformaciones se hagan, el sist está en equilibrio termodinámico con su entorno. Esto implica un equilibrio mecánico ($p_{ext} = p_{int}$) (para que no haya fuerzas de ningun lado) y un equilibrio térmico ($T_{ext} = T_{int}$). Los cambios del entorno deben ser lentos, no bruscos, para que el tiempo que le toma al sist acomodarse sea despreciable, por eso también se los llama cuasiestáticos. En consecuencia, es posible deshacer lo hecho y volver al estado original del sist por la misma trayectoria. Por ej, podría tener un GI en una envoltura móvil con un pistón, si realizo una expansión, para deshacerla hago una compresión equivalente.

En cambio, si tenemos el GI en una envoltura con una esclusa interna y este solo ocupa la mitad del recipiente, al abrirla ya no será posible regresar al estado original si la cerramos. Este sería un *proceso irreversible* porque el gas nunca encuentra el equilibrio en volúmenes intermedios, pasa de uno a otro bruscamente. No podríamos representarlo como una trayectoria continua en el gráfico.



Los procesos reversibles suelen ser complejos, por lo que pueden dividirse en una sucesión de transformaciones elementales.

Transformación Elemental: mantiene alguna prop del sist cte, simple de analizar. Para cada una hay una expresión diff para el calor y el trabajo intercambiado. Las sgtes expresiones valen para cualquier transformación en GI, para el resto de sistemas solo en sus debidas transformaciones.

Solo para recalcar, la energía interna es una función que depende SOLAMENTE de la temp, en específico de sus estados inicial y final, NO depende del camino. Por esta razón los caminos ABD y AD tienen la misma ΔU . Siempre que la temp no varia, NO cambia la U . El W y el Q NO son funciones de estado, y varían según el camino.

Variación Energía Interna

$$\Delta U = n c_v \Delta T$$

$$\Delta U = n c_p \Delta T$$

★ **ISOCÓRICA - Volumen Cte:** la más simple de todas. Como no hay variación de volumen no hay trabajo realizado, por lo que toda la energía se intercambia con calor. Además, se verifica que los GI tienen calorE constante ante cambios a volumen constante. n es el # de moles.

ISOCÓRICA - Trabajo

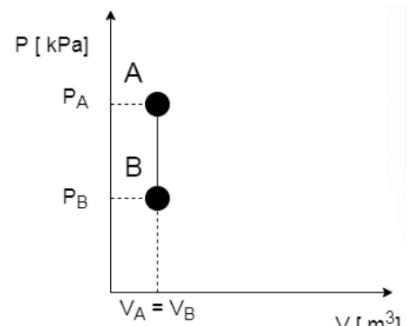
$$W = \int P(V) dV = 0$$

ISOCÓRICA - Calor

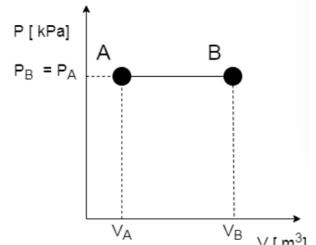
$$Q = n c_v \Delta T$$

ISOCÓRICA - Energía

$$\Delta U = Q$$



★ **ISOBÁRICA - Presión Cte:** los GI mantienen calorE constante aquí. Además, el trabajo es proporcional a la variación de volumen.



ISOBÁRICA - Trabajo

$$W = \int P(V) dV = P \int dV = P \Delta V$$

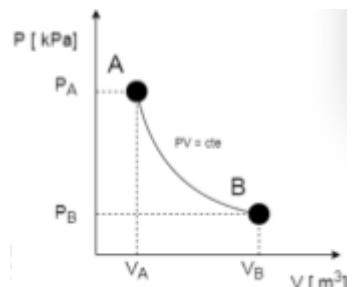
ISOBÁRICA - Calor

$$Q = n c_p \Delta T$$

ISOBÁRICA - Energía

$$\Delta U = Q - W$$

★ **ISOTERMA - Temperatura Cte:** Dado que el calorE no es constante, no se puede evaluar directamente el calor. Además, si la temp permanece cte, la U del sist tampoco cambia. Por lo tanto, sólo necesitamos calcular el W realizado durante el proceso. En el gráfico P-V, las isotermas son hipérbolas, y la temperatura aumenta al alejarse de los ejes.



ISOTERMA - Energía

$$\Delta U = 0 \rightarrow Q = W$$

ISOTERMA - Trabajo

$$W = n R T \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

★ **ADIABÁTICA - Sin Intercambio de Calor:** como la transmisión de calor insume tiempo, es posible realizar transformaciones rápidas.

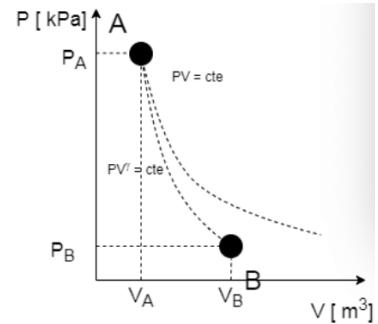
Coeficiente Adiabático

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

$$\gamma = 1 + \frac{R}{c_v}$$

Relación $P - V$

$$P V^\gamma = cte$$

**ADIABÁTICA - Calor**

$$Q = 0$$

ADIABÁTICA - Trabajo

$$W = n R \frac{T_f - T_i}{1 - \gamma}$$

$$W = \frac{P_i V_i - P_f V_f}{\gamma - 1}$$

Relación entre c_v y c_p

En un proceso a P cte (GI)	$p \Delta V = n R \Delta T$
1er Ppio de la Termodinámica	$\Delta U = Q - W$
Como es una transformación isobárica, reemplazamos W	$\Delta U = Q - P \Delta V$
Por otro lado, la variación de energía interna en un GI tiene otra fórmula también.	$n c_v \Delta T = Q - P \Delta V$
Reemplazamos $P \Delta V$ con la Ecuación de Estado	$n c_v \Delta T = Q - n R \Delta T$
Acomodamos...	$n (c_v + R) \Delta T = Q$
Como es una transformación isobárica, reemplazamos Q	$n (c_v + R) \Delta T = n c_p \Delta T$
Relación Final	$c_p = c_v + R$

Relación entre c_v y c_p

$$c_p = c_v + R$$

A partir de la termodinámica estadística, se pueden deducir los valores de c_v para diff tipos de GI. Cada nuevo átomo suma un nuevo R .

Gas Monoatómico

$$c_v = \frac{3}{2} R$$

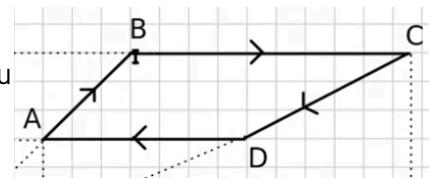
Gas Diatómico

$$c_v = \frac{5}{2} R$$

Gas Triatómico

$$c_v = \frac{7}{2} R$$

Ciclo Termodinámico: proceso que, mediante sucesivas transformaciones, lleva a un sistema a diff estados y su estado final es también su estado inicial. Puede realizarse periódicamente. Aquí no hay variación de energía interna.



En gral, en un gráfico P-V un ciclo recorrido en sentido horario produce trabajo positivo; si se recorre en sentido antihorario, el trabajo producido es negativo.

Energía Interna - Ciclo

$$Q = W$$

Máquina Térmica

$$W > 0$$

Máquina Frigorífica

$$W < 0$$

Máquina Térmica: sist que trabaja de manera cíclica, intercambiando calor y trabajo con el ambiente de tal forma que su trabajo realizado durante el ciclo sea positivo. Esta máquina transforma calor en trabajo. Para evolucionar, interactúa con uno o más sists adicionales. Estos suelen ser fuentes térmicas, de donde el sist extrae o cede calor a temp cte. Forman un ciclo donde la entropía no puede reducirse.

La máquina térmica es *reversible* si todos los procesos del ciclo lo son. Por lo tanto, dicha máquina está en todo momento en equilibrio termodinámico con su entorno. Si se invierte su proceso, el trabajo producido y todo el calor absorbido cambian de signo (máquina frigorífica).

★ **2do Ppio de la Termodinámica:** existe una limitación natural a la capacidad de una máquina térmica de transformar calor en trabajo. Esta se expresa mediante el 2do ppio de la termodinámica en dos enunciados.

Enunciado de Clausius: “Es imposible que una máquina absorba calor de una fuente a temp baja y devuelva calor a una temo mayor sin absorber trabajo del ambiente”

Si queremos hacer fluir calor desde una fuente térmica a menor temp hacia otra de mayor temp, necesariamente la máquina debe consumir trabajo no nulo por ciclo ($W < 0$). Esa máquina se denomina *frigorífica*.

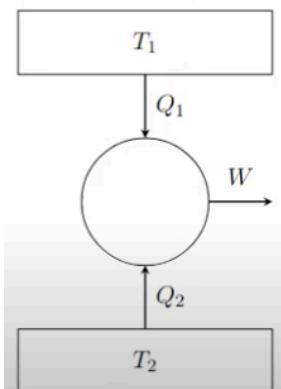
Enunciado de Kelvin: “Es imposible efectuar una transformación cuyos únicos resultados finales son el intercambio de calor con una sola fuente térmica y la aparición de trabajo positivo en el ambiente”

No puede existir una máquina que tome calor de una única fuente térmica y lo transforme completo en trabajo entregado al entorno. Tampoco el proceso inverso es posible. Una máquina debe intercambiar calor con dos fuentes térmicas como mínimo.

★ **Máquina Simple:** máquina térmica conectada a dos fuentes térmicas. En un esquema, llamamos T_1 a la temp de la fuente caliente y T_2 a la de la fuente fría. Serán Q_1 y Q_2 los calores absorbidos por la máquina de estas fuentes. Por el 1er ppio obtenemos:

$$W = Q_1 + Q_2$$

Una máquina puede ser térmica o frigorífica, dependiendo del signo de W .



Máquina Térmica: recibe calor de la fuente caliente, convierte lo que puede en trabajo y el calor restante se lo cede a la fuente fría.

Máquina Térmica

$$W > 0$$

$$Q_1 > 0$$

$$Q_2 < 0$$

Máquina Frigorífica: absorbe calor de la fuente fría y lo cede a la fuente caliente. Cómo transfiere el calor en sentido contrario al natural consume trabajo.

Máquina Frigorífica

$$W < 0$$

$$Q_1 < 0$$

$$Q_2 > 0$$

Eficiencia de una Máquina Simple: lo que me interesa de una máquina térmica simple es cuando trabajo puedo generar con el calor absorbido. Por otro lado, en una frigorífica cuánto trabajo me cuesta entregarle el calor de la fría a la caliente.

Eficiencia

Máquina Térmica Simple

$$\eta_T = \frac{W}{Q_1}$$

$$\eta_T = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$$

Siempre es positiva y menor a uno.

Eficiencia

Máquina Frigorífica Simple

$$\eta_F = \frac{Q_2}{-W}$$

$$\eta_T = \frac{-Q_2}{Q_1 + Q_2}$$

Siempre es positiva y mayor a uno.

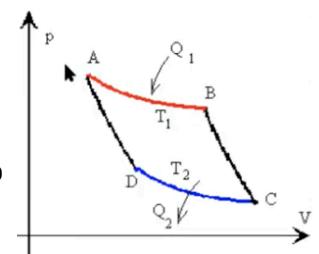
Cota Superior de Eficiencia: la eficiencia de una máquina simple no puede ser mayor que la de una máquina reversible que opere entre las mismas fuentes térmicas. Es decir, *de todas las máquinas térmicas que operan entre dos fuentes dadas, la más eficiente es la máquina reversible*.

$$\eta_M \leq \eta_R$$

Una consecuencia de esto es que *todas las máquinas térmicas simples reversibles que trabajan con el mismo par de fuentes térmicas tienen la misma eficiencia*. Esto significa que la eficiencia de la máquina simple reversible no depende del sistema que la compone, sino únicamente de las fuentes (depende de T_1 y T_2). Su valor lo hallamos fácilmente a través de la máquina de Carnot. Esta máquina tiene el rendimiento óptimo, por lo que solemos definir un cociente entre el rendimiento de una máquina y él (generando un porcentaje de rendimiento).

Máquina de Carnot: para calcular su eficiencia primero hay que definir el tipo de ciclo que realiza la máquina. Cómo debe intercambiar calor con dos fuentes y estos deben ser a temp cte, debemos tener dos transformaciones isotermas (una a T_1 y otra a T_2). Además, el ciclo debe volver a su estado inicial. Como las isoterma no se cortan y la máquina no puede intercambiar calor con más fuentes, la única posibilidad es hacerlo con transformaciones adiabáticas, una expansión y una compresión.

Si el ciclo se recorre en sentido horario, tendremos una máquina térmica de Carnot e invirtiendo el sentido de giro, tendremos una máquina frigorífica de Carnot. Ahora calculemos su eficiencia.



Calculamos el W producido.	$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$
Como BC y DA son adiabáticos...	$W_{BC} = - \Delta U_{BC}$ $W_{DA} = - \Delta U_{DA}$
Como es un GI, la variación de energía interna depende sólo de la temp. Los trabajos de las adiabáticas se cancelan entre sí.	$-W_{DA} = W_{BC} = -n c_v (T_2 - T_1)$
Como AB y CD son isotérmicas...	$W_{AB} = n R T_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$ $W_{CD} = n R T_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$
Los cocientes de volúmenes están relacionados si tenemos en cuenta la ecuación de adiabáticas reversibles.	$P V^\gamma = T V^{\gamma-1} = cte$
Aplicamos...	$T_1 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1}$ $T_1 V_A^{\gamma-1} = T_2 V_D^{\gamma-1}$
Dividimos miembro a miembro y encontramos la relación.	$\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1}$ $\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$
Trabajo Total producido por el Ciclo	$W = n R (T_1 - T_2) \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$
Calor Absorbido de la Fuente Caliente	$Q_1 = W_{AB} = n R T_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$
Eficiencia de la Máquina Térmica de Carnot	$\eta_T = 1 - \frac{T_2}{T_1}$
Eficiencia de la Máquina Térmica de Carnot	$\eta_T = 1 - \frac{T_2}{T_1}$
Calor Absorbido de la Fuente Fría	$Q_2 = W_{DC} = -W_{CD}$ $Q_2 = n R T_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$
Eficiencia de la Máquina Frigorífica de Carnot	$\eta_F = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{1}{n_T}$

Eficiencia de la Máquina Frigorífica de Carnot

$$\eta_F = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

$$\eta_F = \frac{1}{n_T}$$

T2: Electrostática

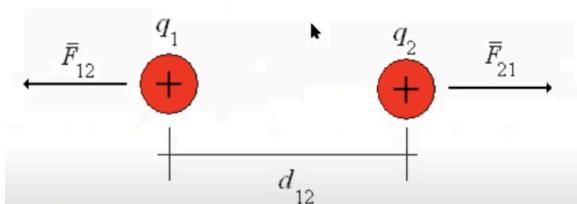
Carga Eléctrica: prop de la materia que se presenta en dos variedades, representadas mediante + y -. Es una prop aditiva y se conserva, sirve para representar un tipo de interacción entre cuerpos.

Sist. Neutro: tiene carga neta nula. Puede ser tanto por ausencia de carga como por equilibrio entre ambos tipos de la misma.

Sist. Cargado: cuando hay algún tipo de desequilibrio entre las cantas de + y -.

Ley de Coulomb: Si tienen el mismo tipo de carga, se repelen; si tienen diferente, se atraen. Es decir, *dos obj con carga (-) se van a repeler, dos objs con carga (+) se van a repeler, pero un obj con carga (-) y uno con carga (+) se van a atraer.*

Fuerza de Coulomb / Electrostática: fuerza de interacción electrostática entre dos partículas cargadas eléctricamente. Es conservativa.



Par Acción - Reacción:

- * \vec{F}_{12} es la fuerza sobre q_1 producida por q_2
- * \vec{F}_{21} es la fuerza sobre q_2 producida por q_1

d_{12} es la distancia que las separa.

Permitividad Dieléctrica del Vacío

$$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

Constante Dieléctrica

$$k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

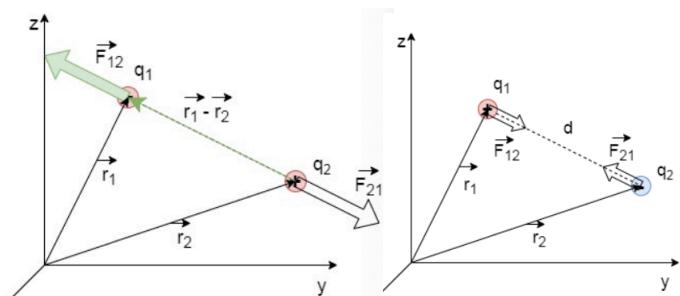
Magnitud de la Interacción

$$|F_{12}| = k_0 \cdot \frac{|q_1 q_2|}{d^2}$$

Para cuantificar la expresión es conveniente definir un sist de referencia y expresar las cantas vectorialmente.

Supongamos dos cargas q_1 y q_2 , ubicadas en posiciones r_1 y r_2 . En las imágenes se muestra el par de fuerzas que se generaría si fueran del mismo signo u opuestas.

En ambos casos, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ y notamos que las fuerzas caen en la recta que une ambas cargas. Para expresar la fuerza tenemos en cuenta:



- * Suponiendo que ambas tengan igual signo, \bar{F}_{12} tiene la misma dirección y sentido que el vector que va de q_1 a $q_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$.
- * La dist entre las cargas está determinada por el módulo de ese vector.
- * De esta forma, podemos proponer que el vector \bar{F}_{12} es paralelo al versor \hat{r}_{12} .

$$\bar{F}_{12} = |\bar{F}_{12}| \hat{r}_{12} \quad \left| \quad \hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad \right| \quad d = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \quad \left| \quad |\bar{F}_{12}| = k \cdot \frac{q_1 q_2}{d^2} \right.$$

Fuerza de Coulomb

$$\bar{F}_{12} = k_0 \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \hat{r}_{12} \quad [C] \quad \left| \quad \bar{F}_{12} = k_0 q_1 q_2 \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad [C] \right.$$

Principio de Superposición: si hay más de dos cargas, estas no se afectarán entre sí. Solo debemos sumar vectorialmente todas las fuerzas que afectan a una carga dada debido a sus interacciones con el resto.

Ppicio de Superposición

$$\bar{F}_1 = \sum_i \bar{F}_{1i}$$

Fuerza Producida por una Distribución de Cargas Puntuales

$$\bar{F}_{12} = k_0 q \sum_{i=1}^n q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Campo Eléctrico: en un punto dado del espacio, es la fuerza por unidad que carga que aparecería allí (sin depender de la carga allí ubicada). Si colocamos una carga de prueba q en cierto punto, y medimos la fuerza sobre ella obtenemos $\bar{F} = q \cdot \bar{E}(\vec{r})$.

Campo Eléctrico

$$\bar{E}(\vec{r}) = k \sum_{i=1}^n q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \left[\frac{N}{C} \right]$$

Dado un cto de cargas, dividimos su interacción entre las que generan campo ("Puntos Fuente") y aquella que se ve afectada por él ("Punto Campo").

Línea de Campo: curva orientada de tal forma que el CE es tangente a ella en cada punto. En el caso de las cargas puntuales, son rectas que tienen origen en cargas positivas y fin en cargas negativas.

Distribuciones Continuas de Carga: el cuerpo ya no es una carga puntual, sino un cuerpo extenso cargado, por ej: varilla, anillo, etc.

Densidad Lineal de Carga (λ): si fraccionamos al obj extenso en pedazos tan pequeños como para considerarlos puntuales (diferencial de longitud), la densidad lineal de carga es la cant de carga que multiplicada por el diferencial de longitud me da la carga contenida en él. Es decir, la cant de carga por unidad de longitud. Su producto genera un *diferencial de carga*, que genera un *diferencial de fuerza*.

Diferencial de Carga

$$dq = \lambda \cdot dl$$

Diferencial de Fuerza

$$dF_{q_0} = k_0 \cdot q_0 \cdot dq \cdot \frac{(\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3}$$

Para calcular la fuerza total que impacta en la carga de prueba, se integra el df en toda la curva.

Fuerza de Coulomb

$$F_{q_0} = k_0 q_0 \int_C \lambda \frac{(\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} dl$$

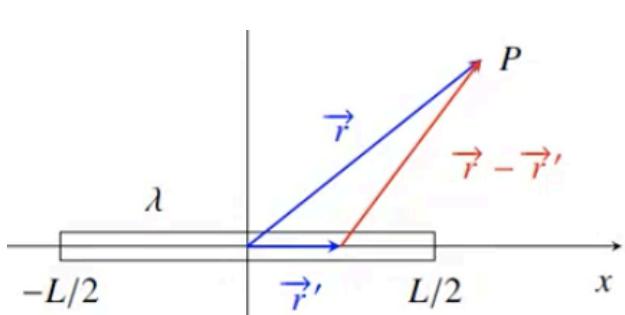
CE de una DL

$$\bar{E}(\bar{r}) = k_0 \int_C \lambda(\bar{r}') \frac{(\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} dl'$$

- * C es la curva donde están distribuidas las cargas que producen el campo.
- * \bar{r} es el punto campo.
- * \bar{r}' indica la posición del punto fuente que recorre C .
- * $dl' = |\bar{dr}'|$ es el diferencial de arco a lo largo de C .
- * $\lambda(\bar{r}')$ es la función densidad lineal de carga eléctrica distribuida en C . Si no depende de \bar{r}' y es una constante, la podemos sacar de la integral. Se expresa en $\left[\frac{C}{m}\right]$

Esta expresión genérica del CE puede ser después adaptada a las diferentes distribuciones existentes, aunque como está ya sirve para alambres cargados, por ej.

★ Varilla Cargada: partimos de la fórmula para expresar CE de una distribución lineal y la especificamos.



- * **Puntos Fuente:** $\bar{r}' = x' \hat{i}$, con $-\frac{L}{2} < x' < \frac{L}{2}$
- * **Puntos Campo:** $\bar{r} = x \hat{i} + y \hat{j}$
- * $dl' = dx'$
- * $|\bar{r} - \bar{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + y^2}$
- * El λ sale fuera de la integral, por ser constante.
- * Los límites de la integral se convierten en los límites de la varilla.

Reemplazamos lo que podemos en la expresión.

$$\bar{E}(x, y) = k_0 \lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{[(x - x') \hat{i} + y \hat{j}]}{[(x - x')^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} dx'$$

<p>Separamos por componentes, y llevamos fuera y.</p>	$\overline{E}_x(x, y) = k_0 \lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{(x-x')}{[(x-x')^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} dx'$ $\overline{E}_y(x, y) = k_0 \lambda y \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{[(x-x')^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} dx'$
<p>Realizamos un cambio de variables ($u = x - x'$).</p>	$\overline{E}_x(x, y) = k_0 \lambda \int_{x-\frac{L}{2}}^{x+\frac{L}{2}} \frac{u}{[u^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} du$ $\overline{E}_y(x, y) = k_0 \lambda y \int_{x-\frac{L}{2}}^{x+\frac{L}{2}} \frac{1}{[u^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} du$
<p>Encontramos las primitivas.</p>	$E_x(x, y) = k_0 \lambda \left. \frac{-1}{\sqrt{u^2 + y^2}} \right _{x-L/2}^{x+L/2}$ $E_y(x, y) = k_0 \lambda y \left. \frac{u}{y^2 \sqrt{u^2 + y^2}} \right _{x-L/2}^{x+L/2}$
<p>Expresión Final del CE</p>	$\overline{E}_x(x, y) = k_0 \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+\frac{L}{2})^2 + y^2}} \right)$ $\overline{E}_y(x, y) = \frac{k_0 \cdot \lambda}{y} \left(\frac{x+\frac{L}{2}}{\sqrt{(x+\frac{L}{2})^2 + y^2}} - \frac{x-\frac{L}{2}}{\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2 + y^2}} \right)$

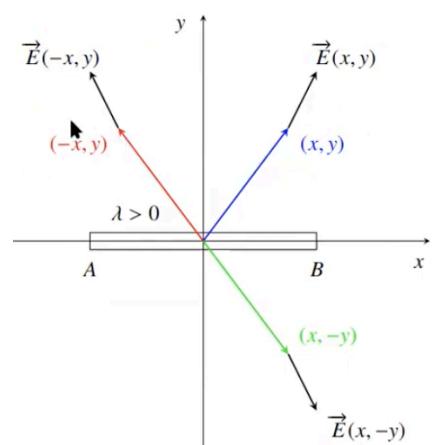
Simetrías: de hacerse una transformación en el espacio, las props físicas del sistema no cambiarán.

Las más comunes son rotaciones alrededor de un eje o reflexiones respecto de un plano. Se reflejan en las ecuaciones de los campos eléctricos.

★ Varilla: simetría respecto del plano perpendicular a la varilla que pasa por su centro. Es decir, si la partís a la mitad y cambias un extremo por el otro, no pasaría nada. Esto no quiere decir que la función campo E no cambie, sino que su módulo y dirección se mantienen iguales. **Se cumple:**

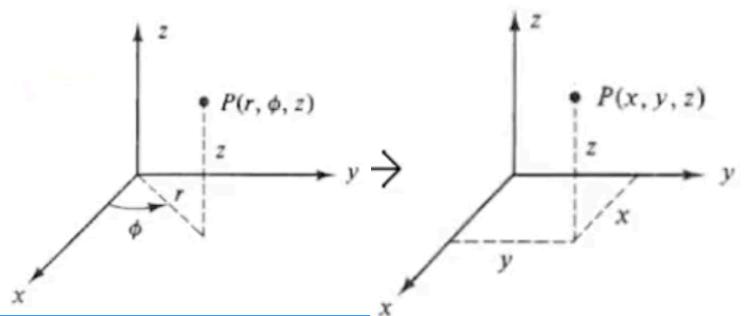
$$E_x(-x, y) = -E_x(x, y) \quad , \quad E_y(-x, y) = E_y(x, y)$$

Además, sobre el eje y se debe anular E_x .



★ Varilla Infinita: la longitud de la varilla es muy grande comparada con las coordenadas del Punto Campo, o bien la varilla es infinita o las coordenadas muy pequeñas. Los extremos se vuelven despreciables.

Primero, analizamos el campo con coordenadas cilíndricas, teniendo en cuenta un eje (eje z), una distancia a él (r) y un ángulo de giro alrededor suyo (r, ϕ, z).



Reemplazamos las variables en las ecuaciones de CE de Varilla

$$\bar{E}_z(r, z) = k_0 \cdot \lambda \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{(z - \frac{L}{2})^2 + r^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z + \frac{L}{2})^2 + r^2}} \right)$$

$$\bar{E}_r(r, z) = \frac{k_0 \cdot \lambda}{r} \cdot \left(\frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{(z + \frac{L}{2})^2 + r^2}} - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{(z - \frac{L}{2})^2 + r^2}} \right)$$

Sacamos conclusiones

$$\bar{E}_z(r, z) \approx 0$$

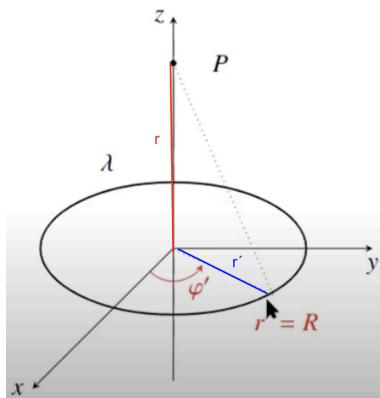
$$\bar{E}_r(r, z) = \frac{2 \cdot k_0 \cdot \lambda}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

CE de Varilla Infinita

$$\bar{E}(r, z) = \frac{2 \cdot k_0 \cdot \lambda}{r} \hat{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

El campo en z se anula porque, como $z \ll \frac{L}{2}$ termina quedando solo $\frac{L}{2}$, igualando ambos términos y cómo se restan, se anulan. Solo queda la componente del campo perpendicular a la varilla. Estos valores pueden obtenerse más fácilmente con el Teorema de Gauss que veremos en detalle luego.

★ Anillo: simetría azimutal (simetría de revolución alrededor de un eje). Evaluamos a través de coordenadas cilíndricas, y calculamos su CE sobre el eje z .



- * **Puntos Fuente:** $\bar{r}' = R \hat{r}'$, con $dl' = |d\bar{r}'| = Rd\phi'$, $0 \leq \phi' \leq 2\pi$
- * **Puntos Campo:** $\bar{r} = z \hat{k}$
- * $|\bar{r} - \bar{r}'| = \sqrt{R^2 + z^2}$

El dq hay que integrarlo a lo largo de todo el anillo $[0, 2\pi]$. Su coordenada radial es el radio del anillo, y no varía; lo que sí varía es el ángulo. El punto fuente no tiene componente en z porque se encontraría en el cero, no tiene altura. El dl' se convierte en la longitud de arco a lo largo de la curva, o sea el radio por el incremento de ángulo.

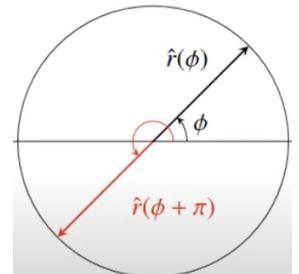
Reemplazamos lo que podemos en la expresión	$\bar{E}(z) = k_0 \lambda \int_0^{2\pi} \frac{(z \hat{k} - R \hat{r}')}{[R^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} R d\phi'$
Separamos por componentes	$\bar{E}(z) = k_0 \lambda \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{z \hat{k}}{[R^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} R d\phi' - \int_0^{2\pi} \frac{R \hat{r}'}{[R^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} R d\phi' \right\}$
Como la integral es sobre ϕ , todo lo que no depende de él se saca fuera.	$\bar{E}(z) = k_0 \lambda \left\{ \frac{z R \hat{k}}{[R^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi' - \frac{R^2}{[R^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \hat{r}'(\phi) d\phi' \right\}$
Expresión Final del CE	$\bar{E}(z) = 2\pi k_0 \lambda \frac{z R}{[R^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{k}$

CE de Anillo

$$\bar{E}(z) = 2\pi k_0 \lambda \frac{z R}{[R^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{k}$$

La 1era integral resulta en 2π , la 2da va a anularse. Esto sucede porque se está sumando todos los versores radiales en $[0, 2\pi]$, entonces por cada vector también se suma su opuesto y se anulan entre sí. Este efecto puede justificarse por simetría también: si tuviera otras componentes, al rotar el anillo no sería igual el CE.

Esto SOLO sucede si el anillo está completo, si se trata de la mitad, el cuarto, o cualquier múltiplo de 2π hay que calcular la integral.

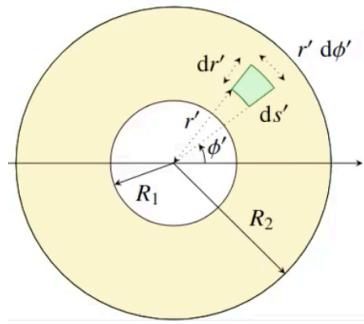


Una consecuencia es que el campo en el centro del anillo ($z = 0$) se anula. A su vez, la función es impar de z , cambia de signo en función de z , del lado de arriba del anillo el campo apunta para arriba y del lado de abajo, para abajo.

Si vas lejos del anillo, este se comporta como una carga puntual. Este fenómeno ocurre en todas las distribuciones localizadas.

Distribuciones Superficiales de Carga

★ Corona Circular: la ubicamos en el plano xy . El diferencial de superficie lo obtenemos eligiendo un punto cualquiera de la corona (r'), y variando su r' (segmento que se aleja o acerca al centro) y su ϕ (para obtener un arco). Se genera aprox un rectángulo, consiguiendo su lado multiplicando ángulo por radio, y el diferencial de área multiplicando por la altura.



- * **Puntos Fuente:** $\bar{r}' = \hat{r} \hat{r}'$, con $dl' = |d\bar{r}'| = Rd\phi'$, $0 \leq \phi' \leq 2\pi$
- * **Puntos Campo:** $\bar{r} = z \hat{k}$
- * $ds' = r' \cdot dr' \cdot d\phi'$

Lo único que cambia con el anillo es que antes R era constante, y aquí tenemos r' (varía). Además, integramos en dos variables: r' y ϕ' . Los límites de ϕ' son 0 y 2π (para dar la vuelta completa), y los r' son R_1 y R_2 (radio interior y exterior). El CE es una función impar de z , por lo que si te ubicas del lado de arriba, el campo apunta hacia arriba, y si te colocas debajo, apunta hacia abajo.

Reemplazamos lo que podemos en la expresión.	$\bar{E}(z) = k_0 \sigma \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \frac{(z \hat{k} - r' \hat{r}')}{[r'^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} r' d\phi' dr'$
Primero integramos según el ángulo.	$\bar{E}(z) = k_0 \sigma \int_{R_1}^{R_2} \left[\int_0^{2\pi} \frac{z \hat{k}}{[r'^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} d\phi' - \int_0^{2\pi} \frac{r' \hat{r}'}{[r'^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} d\phi' \right] r' dr'$
Como la integral es sobre ϕ , todo lo que no depende de él lo sacamos fuera.	$\bar{E}(z) = k_0 \sigma \int_{R_1}^{R_2} \left[\frac{2\pi z \hat{k}}{[r'^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{[r'^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \hat{r}' d\phi' \right] r' dr'$
La integral de \hat{r}' se anula.	$\bar{E}(z) = 2\pi k_0 \sigma z \hat{k} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r'}{[r'^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} dr'$
Expresión Final del CE	$\bar{E}(z) = 2\pi k_0 \sigma z \left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} \right) \hat{k}$

CE de Corona Circular

$$\bar{E}(z) = 2\pi k_0 \sigma z \left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} \right) \hat{k}$$

★ **Disco:** caso límite de la corona, donde R_1 tiende a cero y $R_2 = R$.

CE de Disco

$$\bar{E}(z) = 2\pi k_0 \sigma z \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \hat{k} \quad \left| \quad \bar{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(sgn(z) - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \hat{k} \right.$$

★ Plano Infinito: caso límite de disco, cuando $R \rightarrow \infty$. Su CE no depende de la distancia a la que te encuentres, siempre tendrá el mismo valor. Puede deducirse también por el Teorema de Gauss.

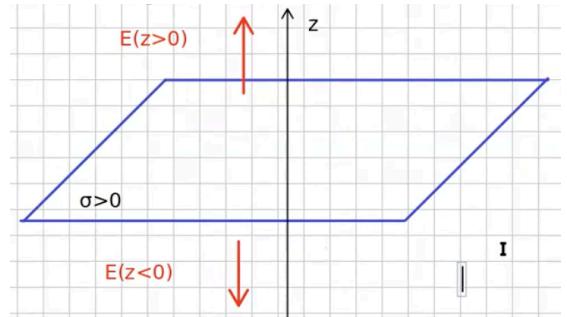
CE de un Plano Infinito

$$\bar{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \operatorname{sgn}(z) \hat{k}$$

Es otro caso de simetría de reflexión respecto del plano, la función entonces debe ser impar (arriba del plano, CE apunta arriba; abajo del plano, CE apunta abajo).

$$E(-z) = -E(z)$$

Al atravesar el plano, el CE es finitamente discontinuo (al igual que todas las distribuciones superficiales de carga).



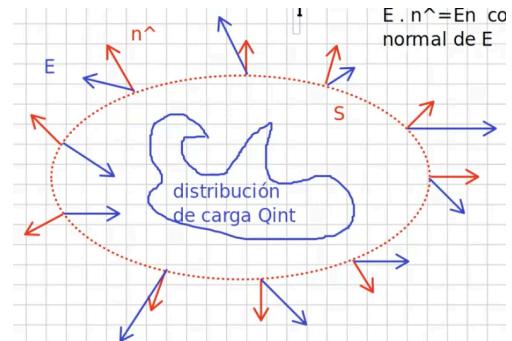
Discontinuidad Superficial

$$\Delta E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Flujo de CE: mide la cantidad de CE que atraviesa una superficie dada. También podemos verlo como el nro de líneas de campo que penetran a la superficie.

En gral, uno tiene una distribución de carga cualquiera que genera un CE.

Al encerrarla por una superficie, podemos definir el vector normal exterior a la superficie en cualquier punto. Si se realiza el producto escalar entre la normal y el CE, se obtiene la componente normal a la superficie del CE. Si se suma esta componente normal en todos los puntos de la superficie, se consigue el flujo del CE a través de la superficie.



No importa si la superficie que encierra a la carga varía, puede ser un cubo, una esfera, puede duplicarse o partirse a la mitad, porque lo que importa es la carga encerrada, no la superficie que lo hace. Ahora, si la carga encerrada fuera a duplicarse, ahí sí se duplica el flujo.

Flujo de CE

$$\phi = \iint_S \bar{E}(\bar{r}) \cdot \hat{n} \cdot dS$$

Teorema de Gauss: relaciona el flujo del campo a través de una superficie cerrada con la carga "encerrada" por ella.

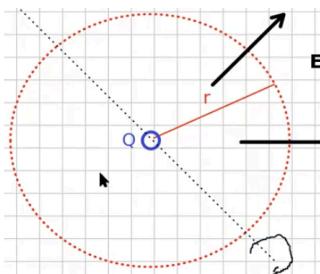
Teorema de Gauss

$$\phi = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Es independiente de la forma que tome la distribución, si esta cambia, el CE cambiaría, pero no su flujo. Mientras que la carga interior sea la misma, el flujo será el mismo.

La ley de Gauss sería la "inversa" de la ley de Coulomb, en Coulomb se halla el campo a partir de las cargas, y en Gauss se hayan las cargas a partir del campo. Por suerte, en casos de alta simetría (min dos simetrías continuas), es posible "invertir" la ley de Gauss y usarla para hallar el campo por un camino alternativo al de la ley de Coulomb.

★ Simetría Esférica: si es invariante frente a cualquier rotación frente a un eje que pase por su centro, que llamamos *centro de configuración*. El CE es radial y depende exclusivamente del radio.



Carga Puntual

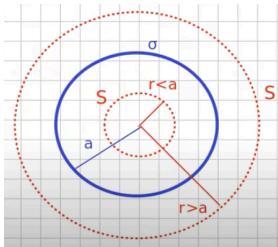
Igualdad del CE.	$\bar{E}(r) = E(r) \hat{r}$
Plantear el flujo.	$\phi = \oint_s \bar{E}(\bar{r}) \hat{n} ds = \iint_s E(r) \hat{r} \hat{n} ds$
$\hat{n} = \hat{r}$, porque nos encontramos en una esfera. El producto escalar de un vector por sí mismo es su módulo, y como se trata de versores este es 1.	$\phi = \iint_s E(r) \hat{r} \hat{r} ds = \iint_s E(r) ds$
Sacamos E fuera de la integral. CE es constante porque depende del radio, y este es fijo sobre la superficie.	$\phi = E(r) \iint_s ds$
La integral de ds es el área de la superficie.	$\phi = 4\pi r^2 E(r)$
Planteamos el Teorema de Gauss.	$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$
Expresión Final del CE	$E(r) = \frac{Q_{enc}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$

Flujo de SE

$$\phi = 4\pi r^2 E(r)$$

CE de Carga Puntual en SE

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$



Cáscara Esférica Hueca: tiene un radio a y una densidad superficial de carga σ uniforme (si no fuera, no habría simetría). Hay dos regiones, una interior a la superficie hueca ($r < a$) y una superficie exterior ($r > a$), hay que calcular el CE en cada una.

Región	$r < a$
Expresión Final del CE	$\phi = 0, E(r) = 0$

Flujo de Cáscara Esférica Hueca en SE

$$r < a$$

$$\phi = 0$$

CE de Cáscara Esférica Hueca en SE

$$r < a$$

$$E(r) = 0$$

Esto ocurre porque dentro de la esfera hueca, en un punto dado, por cada contribución de un punto de la cáscara también se tiene la de su punto opuesto, anulándose entre sí.

Región	$r > a$
Expresión de la carga encerrada	$Q_{enc} = Q_{total} = 4\pi a^2 \sigma$
Planteamos el Teorema de Gauss	$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi a^2 \sigma}{\epsilon_0}$
Expresión Final del CE	$E(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \hat{r}$

Flujo

$$\phi = 4\pi r^2 E(r)$$

CE de Cáscara Esférica Hueca en SE

$$r > a$$

$$E(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \hat{r}$$

Lo que es interesante para el flujo es que no depende de la distribución, no hay forma de saber si se trata de una carga puntual o cualquier otra cosa.

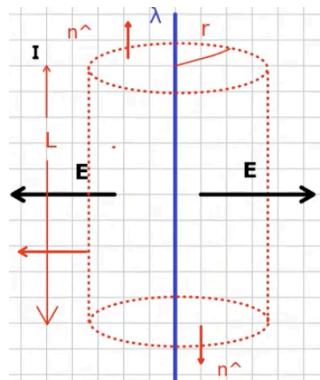
También aquí sufrimos de la discontinuidad finita, en la región interior el CE vale cero, al pasar a través de la superficie vale la discontinuidad y después va disminuyendo. CE cuando $r = a$:

Discontinuidad Superficial

$$E(a) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

★ **Simetría Cilíndrica:** encontramos simetría alrededor de un eje fijo (rotación azimutal) y además una traslación a través de dicho eje. Es decir, si hago girar al sistema alrededor del eje, o si me traslado a través de él para arriba o para abajo, el sistema no cambia.

En este sentido, se tiene un objeto “tan largo” que sus extremos se vuelven despreciables, y su campo se simplifica, siendo solo radial al objeto y dependiente exclusivamente del radio. Su superficie gaussiana será un cilindro recto coaxial con el hilo, con su flujo dependiente solo de su área lateral. En las tapas el flujo es nulo porque al hacer el producto escalar de vectores perpendiculares, resulta en cero ($\hat{r} \cdot \hat{n} = 0$).



Varilla Infinita: tiene una densidad superficial de carga λ uniforme (si no fuera, no habría simetría). Este CE ya lo sacamos por Coulomb, pero por Gauss se obtiene mucho más fácil.

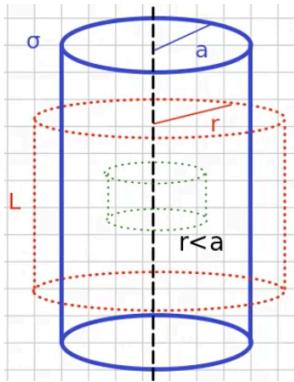
Igualdad del CE	$\bar{E}(r) = E(r) \hat{r}$
Plantear el flujo. En este caso \hat{r} es de coordenadas cilíndricas, pero se cumple lo anterior.	$\phi = E(r) \iint_s ds$
La integral del ds es el área de la superficie.	$\phi = 2 \pi r L E(r)$
Expresión de la Q_{enc}	$Q_{enc} = \lambda L$
Planteamos el Teorema de Gauss	$2 \pi r L E(r) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$
Expresión Final del CE	$E(r) = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r}$

Flujo de SC

$$\phi = 2 \pi r L E(r)$$

CE de Varilla Infinita en SC

$$E(r) = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r}$$



Cáscara Cilíndrica Hueca: es como un tubo largo. Es una superficie cilíndrica de radio a y una densidad superficial de carga σ uniforme. Hay dos regiones, una interior a la superficie hueca ($r < a$) y una superficie exterior ($r > a$), hay que calcular el CE en cada una.

Región	$r < a$
Expresión Final del CE	$Q_{enc} = 0, \phi = 0, E(r) = 0$

Flujo de Cáscara Cilíndrica Hueca en SC

$$r < a$$

$$\phi = 0$$

CE de Cáscara Esférica Hueca en SE

$$r > a$$

$$E(r) = 0$$

Región	$r > a$
Expresión de la Q_{enc}	$Q_{enc} = 2\pi a L \sigma$
Planteamos el Teorema de Gauss	$2\pi r L E(r) = \frac{2\pi a L \sigma}{\epsilon_0}$
Expresión Final del CE	$E(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{a}{r} \hat{r}$

Flujo

$$\phi = 2\pi r L E(r)$$

CE de Cáscara Cilíndrica Hueca en SC

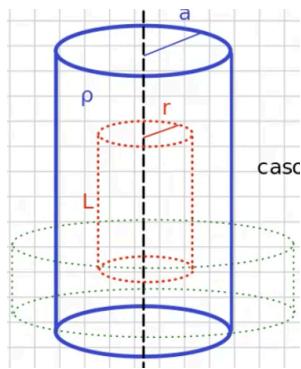
$$r > a$$

$$E(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{a}{r} \hat{r}$$

También aquí sufrimos de la discontinuidad finita, en la región interior el CE vale cero, al pasar a través de la superficie vale la discontinuidad y después va disminuyendo. **CE cuando $r = a$:**

Discontinuidad Superficial

$$E(a) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



Cilindro Homogéneo: tiene una densidad volumétrica de carga (ρ). Hay dos regiones, una interior a la superficie hueca ($r < a$) y una superficie exterior ($r > a$), hay que calcular el CE en cada una.

Región	$r < a$
Expresión de la Q_{enc} Se multiplica el volumen por la densidad volumétrica.	$Q_{enc} = \pi r^2 L \rho$
Planteamos el Teorema de Gauss	$2 \pi r L E(r) = \frac{\pi r^2 L \rho}{\epsilon_0}$
Expresión Final del CE	$E(r) = \frac{\rho}{2 \epsilon_0} r \hat{r}$

Flujo

$$\phi = 2 \pi r L E(r)$$

CE de Cilindro Interior en SC

$r < a$

$$E(r) = \frac{\rho}{2 \epsilon_0} r \hat{r}$$

Del lado interior, el campo es lineal con el radio. Esto genera que, si $r = 0$, $E(r) = 0$ y que el CE llegue a su máximo valor en los bordes del cilindro cargado.

Región	$r > a$
Expresión de la Q_{enc} Es solo la parte del cilindro que engloba la superficie.	$Q_{enc} = \pi a^2 L \rho$
Planteamos el Teorema de Gauss	$2 \pi r L E(r) = \frac{\pi a^2 L \rho}{\epsilon_0}$
Expresión Final del CE	$E(r) = \frac{\rho}{2 \epsilon_0} \frac{a^2}{r} \hat{r}$

Flujo

$$\phi = 2 \pi r L E(r)$$

CE de Cilindro Exterior en SC

$r > a$

$$E(r) = \frac{\rho}{2 \epsilon_0} \frac{a^2}{r} \hat{r}$$

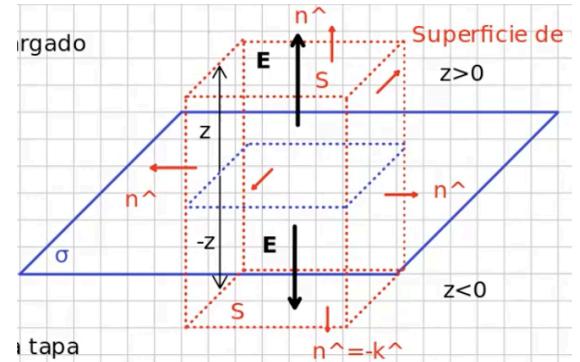
Aquí NO sufrimos una discontinuidad al atravesar la densidad de carga ya que ya no es superficial, sino que es una densidad volumétrica.

★ Simetría Plana: sistema que es invariante frente a traslaciones en un plano, por ej: el xy . Es decir, si me traslado tanto en x como en y , nada cambia. Debido a esto, el CE solo debe tener componente perpendicular al plano en todo momento. Puede ser saliente o entrante. Si se tratara del plano xy , el CE tendría solo componente en z .

Se podría tratar de un obj cuyas dimensiones son tan grandes que sus bordes se vuelven despreciables, conviene suponer que el plano es "infinito". Podemos también asumirla en situaciones donde el campo depende una sola componente.

Además tiene una simetría no continua, que es una reflexión sobre el plano xy . El plano actuaría como un espejo, el valor del CE sería el mismo pero con el signo cambiado. Sería una función impar de z .

$$E(-z) = -E(z)$$



Su superficie gaussiana es una caja, con una base, una tapa y una altura (va de z a $-z$), el plano lo corta al medio. Como el CE solo tiene dirección perpendicular, no hay flujo sobre las caras laterales de la caja. Matemáticamente se entiende porque en las caras laterales el CE es perpendicular al vector normal, resultando su producto escalar en cero. Además, debido a la impariedad de $E(z)$, el flujo en la tapa y la base es igual en módulo.

El CE generado es uniforme, no depende de la distancia al mismo, solo de la densidad lineal de carga y del signo de z .

Igualdad del CE	$\bar{E}(z) = E(z) \hat{k}$
Plantear el flujo	$\phi = E(z) S - E(-z) S = E(z) S + E(z) S$ $\phi = 2S E(z), \text{ si } z > 0$
Expresión de la Q_{enc}	$Q_{enc} = \sigma S$
SOLO si σ es uniforme.	
Planteamos el Teorema de Gauss	$2S E(z) = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$
Expresión Final del CE	$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} sgn(z) \hat{k}$
Teniendo en cuenta la reflexión.	

Flujo de SP

$$\phi = 2S E(z)$$

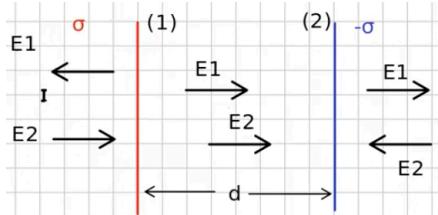
CE de Plano Infinito

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} sgn(z) \hat{k}$$

También aquí sufrimos de la discontinuidad finita al atravesar el plano.

Discontinuidad Superficial

$$\Delta E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



Planos Infinitos con Carga Opuesta: cada uno tiene una densidad superficial de módulo σ , generando el mismo valor de CE pero con signos opuestos. En consecuencia, del lado izq del plano rojo y del derecho del plano azul, se anulan; y en el centro, se suman los dos. Para sacar la ddp, como el campo es uniforme, es el producto del campo por la distancia.

CE de 2 Planos Infinitos

$$\bar{E}(z) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{k}$$

DDP de 2 Planos Infinitos

$$\Delta V = V(d) - V(0) = - \int_0^d \bar{E}(z) \cdot dz = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

Hay 3 maneras de calcular el CE de una configuración de cargas:

- 1) Integrar el campo directamente.
- 2) Calcularlo mediante el Teorema de Gauss, aunque solo puede usarse en situaciones de alta simetría.
- 3) Calcular el potencial electrostático y a partir de ahí el CE, o al revés.

Potencial Electrostático:

como la fuerza electrostática es conservativa, encontramos que tiene una energía potencial asociada. Podemos definir al potencial electrostático como la energía potencial por unidad de carga, permite evaluar el trabajo que el campo haría sobre una carga de prueba al desplazarse entre dos puntos. Tiene su propia unidad, el voltio [V], que es equivalente a $\left[\frac{J}{C} \right]$.

Variación de Energía Potencial	$\Delta U = q \Delta V \rightarrow \Delta V = \frac{\Delta U}{q}$
Igualdad de ΔU	$\Delta U = - \int F_e \cdot dx$
Diferencia de Potencial Electrostático (ddp)	$\Delta V = V(B) - V(A) = - \int_A^B \bar{E}(\bar{r}) \cdot d\bar{r}$
Función Potencial Cargas puntuales, con $V_{\rightarrow \infty}$ nulo.	$V(\bar{r}) = k_0 \sum_i \frac{q_i}{ \bar{r} - \bar{r}' }$

DDP

$$\Delta V = V(B) - V(A) = - \int_A^B \bar{E}(\bar{r}) \cdot d\bar{r}$$

Función Potencial
(cargas puntuales, con $V_{\rightarrow \infty}$ nulo)

$$V(\bar{r}) = k_0 \sum_i \frac{q_i}{|\bar{r} - \bar{r}'|}$$

Función Potencial
(distribución lineal de carga, con $V_{\rightarrow \infty}$ nulo)

$$V(\bar{r}) = k_0 \int_C \lambda(\bar{r}') \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dl'$$

Función Potencial
(distribución superficial de carga, con $V_{\rightarrow \infty}$ nulo)

$$V(\bar{r}) = k_0 \iint_s \sigma(\bar{r}') \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} ds'$$

Función Potencial
(distribución volumétrica de carga, con $V_{\rightarrow \infty}$ nulo)

$$V(\bar{r}) = k_0 \iiint_V \rho(\bar{r}') \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dv'$$

Es la diferencia de potencial entre dos puntos lo que tiene sentido físico, no el valor en sí que tome la función. *Como info extra, si se tiene una batería esta mantiene constante el potencial de un conductor.*

Consecuencia

Relación Diferencial entre V y CE

$$\bar{E}(\bar{r}) = -\nabla V(\bar{r})$$

Relación Diferencial entre V y CE

$$E_x = -\frac{dV}{dx} \quad \left| \quad E_y = -\frac{dV}{dy} \quad \right| \quad E_z = -\frac{dV}{dz}$$

Esto genera que en las áreas donde el CE sea nulo, el potencial se mantendrá constante y viceversa.

$$V(r) = cte \Leftrightarrow E(r) = 0$$

Potencial Respecto del Infinito: sólo en las distribuciones de cargas localizadas podemos asumir que el potencial respecto del infinito es nulo.

$$V_{\rightarrow \infty} = 0$$

Distribución de Cargas Localizada: aquella que se puede encerrar, por ej en una esfera. No existen cargas en el infinito. Una carga puntual sería localizada, una varilla infinita cargada no.

Trabajo de la Fuerza Electrostática: el trabajo que realiza el CE para trasladar una carga puntual q del punto A al punto B .

Trabajo de la FE

$$W(A \rightarrow B) = q \int_A^B \bar{E}(\bar{r}) \cdot d\bar{r}$$

$$W(A \rightarrow B) = -q \Delta V$$

Trabajo en Contra de la FE

$$W(A \rightarrow B) = -W_{Fe}$$

Observaciones:

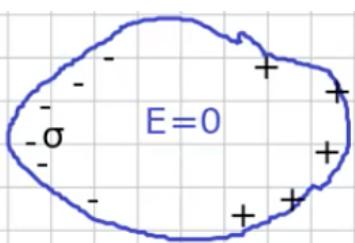
- * El trabajo no depende del camino elegido, solo de los puntos A y B .

- * Si $A = B$, entonces no se realiza trabajo neto
- * El trabajo es proporcional a la carga y a la "diferencia de potencial" entre A y B . Por lo tanto, el trabajo neto también será nulo si $V(A) = V(B)$.

Conductor Ideal:

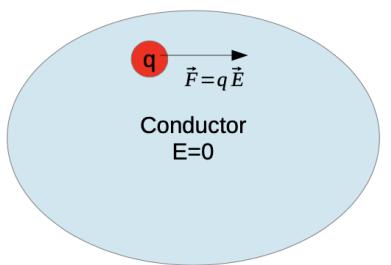
material que permite el libre movimiento de cargas. Es decir, al ser aplicada una fuerza sobre una carga dentro del material, esta se acelera inmediatamente y se traslada a su superficie. Todo aquello que se lo refiere como *metálico*, por ej: *esfera metálica*.

Si evaluamos el material en situaciones electrostáticas, la distribución de carga no depende del tiempo y las cargas se deben mantener en reposo. Para que esto suceda, la fuerza interior al material sobre las cargas debe ser nula. Si la fuerza no fuese nula, la carga tendría aceleración y no sería una situación electrostática. Como la FE es nula, el CE interior es nulo también y el PE interior se mantiene constante.



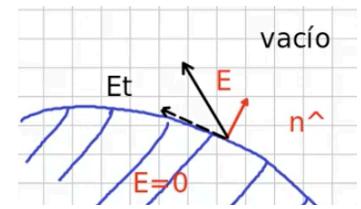
Para que el CE en el interior sea nulo, al ser sometido a una fuerza externa, las cargas dentro se reacomodarán de tal forma que el CE interior se anule. Toma un tiempo despreciable. El estado final es una distribución de carga superficial, no puede haber cargas en el volumen del material. Este proceso se llama Inducción de Cargas. Por ej: si afuera colocamos una carga (+), generará que todas las cargas (-) se atraigan a ella, mientras que las (+) se trasladan al otro lado.

El CE sobre la superficie de un conductor es siempre normal a la misma. Si no lo fuera, la componente tangencial generaría que se aceleren las cargas. Además, como se trata de una distribución superficial de carga, aplicando Gauss es fácil demostrar que en cada punto de la superficie tenemos el mismo valor para el CE, habiendo una discontinuidad entre dentro y fuera (como siempre).



CE en la Superficie de un Conductor

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



T3: Capacitores y Dielectricos

Hay una relación lineal entre el potencial de un conductor y la carga que adquiere.

Capacitancia (C): cociente entre carga y potencial de un conductor. Es independiente de la carga, campo y potencial; solo depende de la geometría del conductor. Su unidad correspondiente es el faradio [F].

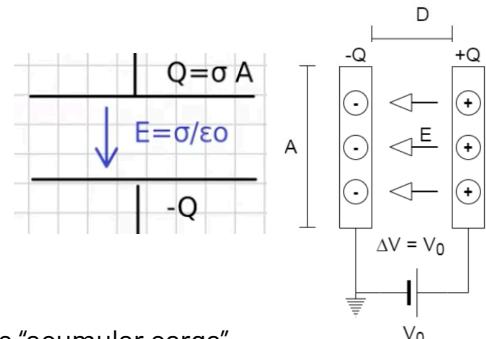
Capacitancia

$$C = \frac{q}{\Delta V} \left[\frac{C}{V} = F \right]$$

Capacitor Plano:

sist formado por dos placas planas conductoras cargadas con densidades de carga iguales y opuestas, separadas una distancia d entre ellas. Si se elige la geometría correcta, por ej: planos paralelos, estos no generan un CE apreciable al exterior, solo en la región contenida entre los planos. Como hay cargas, hay ddp entre las placas, por convención siempre debe dar positivo.

Este tipo de sists son incorporados en los circuitos eléctricos por su prop de "acumular carga" sin generar un efecto eléctrico perceptible en su exterior. Cuando se habla de la carga de un capacitor se refiere a la carga positiva.



Carga de las Placas

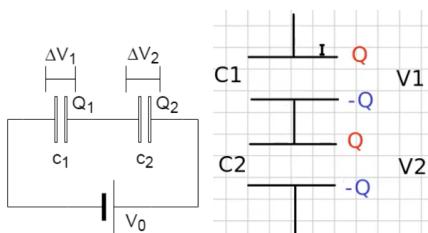
$$q = \sigma A$$

DDP entre ellos

$$\Delta V = E \cdot d = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

Capacidad

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$



★ Asociación en Serie: uno empieza donde termina el otro, tienen la misma carga (si empiezan descargados) y su ddp total es la suma de las ddp individuales. Si hubiera más se debería sumar al resto, como una sumatoria.

Cuantos más capacitores en serie, menor será su capacidad.

Carga de las Placas

$$q_1 = q_2 = q$$

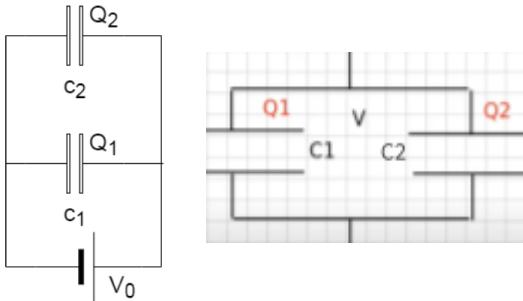
DDP entre ellos

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 = V_0$$

Capacidad

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$



★ **Asociación en Paralelo:** está uno al lado del otro y la carga disponible se distribuye a los dos capacitores a la vez. Ambos están sometidos a la misma ddp, pero tienen cargas diff.

Cuantos más capacitores en serie, menor será su capacidad.

Carga de las Placas

$$q = q_1 + q_2$$

DDP entre ellos

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = V_0$$

Capacidad

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

Energía en Capacitores

Proceso de Carga de un Capacitor: consiste en lograr que ambas placas alcancen el valor de carga final adecuado ($\pm q$) para una dada ddp.

Supongamos que tenemos un capacitor descargado y lo conectamos a una batería. La batería extrae de a una las cargas (+) de la placa (-), y las desplaza a la placa (+), manteniendo el sist neutro en todo momento, pero lentamente cambiando la carga del capacitor.

Para la 1era carga transportada, como la ddp es nula, el trabajo también. Pero, con cada nueva unidad de carga que pasa de un lado a otro, el trabajo para hacerlo va aumentando, ya que el CE contra el que hay que realizar el trabajo aumenta también.

Si q es la carga en una placa en un instante dado, y la batería saca de ella una carga dq , podemos calcular el trabajo necesario para hacerlo.

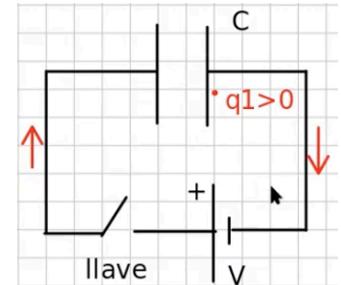
Trabajo Diferencial del Proceso de Carga

$$dW = dq \cdot \Delta V = \frac{q}{C} dq$$

La energía sería el trabajo total necesario que debe hacer la batería para cargar el capacitor por completo (Q). Para obtenerlo, se debe integrar el trabajo diferencial.

Trabajo Total del Proceso de Carga

$$W = U_{cap} = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C \Delta V^2}{2}$$

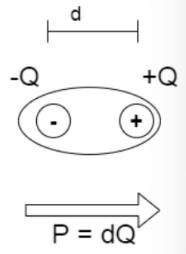


Es decir, que la energía que contiene el capacitor solo depende de cuánta carga contenga cada una de sus placas en un determinado instante o, lo que es lo mismo, la ddp entre sus placas.

Energía Electrostática del Capacitor

$$U_{total} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C \Delta V^2}{2} = \sum_i \frac{q_i \cdot V_i}{2}$$

Dipolo: un par de cargas puntuales de igual magnitud q y signo opuesto, separadas una distancia d . Normalmente sería neutro, pero el desequilibrio en su distribución le permite interactuar con campos externos.



Momento Dipolar: vector que representa al dipolo, caracterizado por la magnitud de la carga y su separación. Indica la orientación del centro de carga positivo respecto del negativo.

Momento Dipolar

$$\bar{p} = q(\bar{r}_+ - \bar{r}_-) = q \cdot \bar{d} [Cm]$$

Material Aislante: no permite el libre movimiento de cargas, y no se observa intensidad de corriente interior. Todas las cargas se encuentran asociadas a un elto de la estructura del material, ya sea una molécula, átomo, ion, etc. y tienen una posición determinada.

Esto no impide que el material se vea afectado por un campo externo, sino que como respuesta el material se deforma, orientando sus cargas (polarización). Esto será más o menos complejo según la estructura del material.

A los diff materiales podemos caracterizarlos en términos de su *permitividad dieléctrica* (ϵ), siempre mayor a la del vacío (ϵ_0), siendo su factor de proporción la *permitividad relativa* (κ).

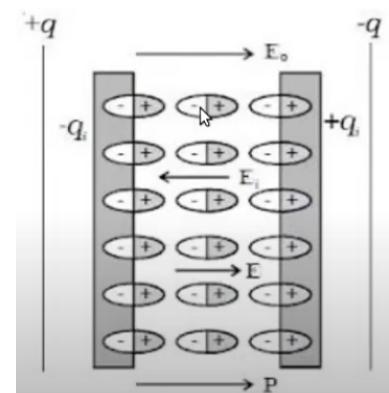
Permitividad Dieléctrica

$$\epsilon = \kappa \cdot \epsilon_0$$

Dieléctrico: un tipo de material aislante, encontramos el aire, la madera, el vidrio, el agua destilada, los plásticos e incluso el vacío. En específico, nosotros evaluaremos los isótropos. En estado natural, el CE en su interior es nulo.

Su respuesta ante campos externos es lineal, se polarizan. Esto quiere decir que el CE externo empuja a las cargas (+) en su misma dirección, y a las cargas (-) en dirección contraria. Se generan dipolos, y aparecen cargas de polarización inducidas, especialmente sobre su superficie. En el interior, si el efecto es uniforme, no se acumulan cargas. Si llegan a haber, el dieléctrico se verá como una serie de filas en cadena (+---+).

Esta acumulación superficial genera un campo inducido contrario al externo, que provoca que el campo neto dentro del material sea menor al externo en factor de la permitividad relativa, pero sigue teniendo la misma dirección.



CE Inducido

$$E_i = E_0 \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right)$$

CE dentro del Dieléctrico

$$E = \frac{E_0}{\kappa}$$

$$\bar{E} = \bar{E}_0 + \bar{E}_i$$

Capacitores y Dieléctricos: dada una región del espacio llena de material dieléctrico, no necesitamos preocuparnos en detalle por cuál es. Podemos tratar el problema como si fuera en vacío, pero reemplazan en cada lugar que aparezca ϵ_0 por la ϵ del dieléctrico. Por ej:

$$C_0 = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{D} \quad \rightarrow \quad C' = \frac{\epsilon \cdot A}{D} = \kappa C_0$$

Campos de Desplazamiento y Polarización: para describir un problema gral se emplean tres campos: CE, campo \bar{P} (Polarización) y Campo \bar{D} (Desplazamiento).

Campo Polarización: si en un medio dieléctrico consideramos en un punto \bar{r} un elto de volumen δV y a la suma de los momentos dipolares de todas las moléculas contenidas en él la llamamos $\delta \bar{p}$, entonces se define un campo vectorial $\bar{P}(\bar{r})$ denominado *polarización*, que consiste en el momento dipolar por unidad de volumen (o densidad del momento dipolar).

Campo Polarización

$$\bar{P}(\bar{r}) = \frac{\delta \bar{p}}{\delta V} \left[\frac{c}{m^2} \right]$$

Campo Desplazamiento: modela el efecto eléctrico independizándose del material presente (incluso del vacío) y solo depende de las cargas libres.

Susceptibilidad Dieléctrica / Polarizabilidad (χ): marca la relación lineal entre la polarización y el campo aplicado. En gral, es una matriz, pero como asumimos que el medio es isótropo, la consideramos un nro positivo.

Equivalencias

$$\bar{P} = \chi \cdot \epsilon_0 \cdot \bar{E}$$

$$\bar{D} = \epsilon \cdot \bar{E} = \epsilon_0 \cdot \bar{E} + \bar{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \cdot \bar{E} \left[\frac{c}{m^2} \right]$$

$$\kappa = 1 + \chi$$

Campos y Densidad de Carga: \bar{P} y \bar{D} tienen unidades de densidad de carga, esto no es casualidad.

Polarización:

Dado un capacitor cargado en vacío, sin polarización. Introducimos un dieléctrico...

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{D}{\epsilon_0}$$

Con batería conectada

Con batería desconectada

$ddp = cte$	$q = cte$
Planteamos la polarización	
	$\bar{P} = \epsilon_0 \cdot E \cdot (\kappa - 1)$
Reemplazamos con la igualdad previa, porque \bar{E} no cambia. q aumenta porque C aumenta, y también \bar{D} es mayor, $\bar{D} > \bar{E}$.	Reemplazamos con la igualdad previa, porque \bar{D} no cambia. ddp se reduce y \bar{E} es menor, $\bar{D} > \bar{E}$. La polarización también es menor.
$\bar{P} = \sigma' \cdot \frac{\kappa-1}{\kappa} = \sigma'_{pol}$	$\bar{P} = \sigma' \cdot \frac{\kappa-1}{\kappa} = \sigma'_{pol}$
Conclusión Final	
	$\bar{P} = \sigma'_{pol}$

Polarización y Densidad de Carga Polarizada	$\bar{P} = \sigma'_{pol}$
--	---------------------------

Desplazamiento: utiliza el teorema de Gauss.

Teorema de Gauss	$\oint_S \bar{E} \cdot \bar{ds} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{q_{libre}}{\epsilon}$
Igualamos a una expresión en función de la carga libre en el espacio.	$\oint_S \bar{E} \cdot \bar{ds} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{q_{libre}}{\epsilon}$
Modificamos la ecuación a conveniencia.	$\oint_S \epsilon \cdot \bar{E} \cdot \bar{ds} = q_{libre}$
Reemplazamos por la equivalencia mencionada previamente.	$\oint_S \bar{D} \cdot \bar{ds} = q_{libre}$
Resolvemos ambos lados de la igualdad	$\bar{D} \cdot \Delta S = \sigma_{libre} \cdot \Delta S$
Conclusión Final	$\bar{D} = \sigma_{libre} = \frac{q_{libre}}{\Delta S}$

Desplazamiento y Densidad de Carga Libre	$\bar{D} = \sigma_{libre} = \frac{q_{libre}}{\Delta S}$
---	---

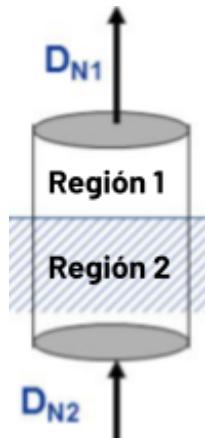
Condiciones de Frontera: analizando qué pasaría si colocamos dos medios dieléctricos distintos uno al lado del otro, llegamos a ciertas conclusiones. Supongamos dos regiones, en la Región 1 hallamos ϵ_1 y en la Región 2 a ϵ_2' , y una superficie que las separa.

Campo \bar{D}

Planteamos un cilindro de Gauss, con su base en 1 y su tapa en 2, siendo ΔS el área de la tapa y la base.

Por el teorema de Gauss para el campo \bar{D} , el flujo a través de dicha superficie cerrada debe ser igual a la carga libre encerrada en ella. Si asumimos que no existe carga libre en el interior de los dieléctricos, ni en la superficie de separación, el flujo debe ser nulo. Dado que encontramos el campo \bar{D}_1 y \bar{D}_2 continuos en el interior de los dieléctricos, el flujo sobre la generatriz va a ser nulo (lo que entra de un lado, sale del otro), y solo será no nulo en la base y la tapa.

Si llamamos \hat{n} al versor normal a la superficie de separación orientado hacia 1, entonces las normales exteriores a la superficie gaussiana en la tapa y la base serán \hat{n} y $-\hat{n}$ respectivamente.



Planteamos la nulidad del flujo	$\bar{D}_1 \cdot \hat{n} \cdot \Delta S + \bar{D}_2 \cdot (-\hat{n}) \cdot \Delta S = 0$
Conclusión Final	$D_{n1} = D_{n2}$

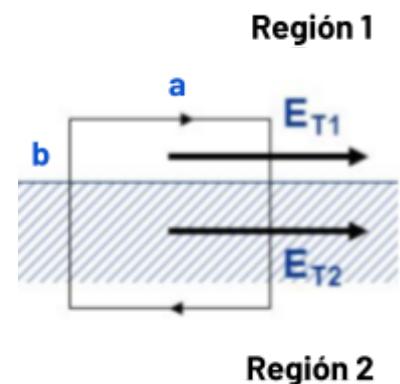
Condición de Frontera, Campo \bar{D}	$D_{n1} = D_{n2}$
--	-------------------

La componente normal del campo \bar{D} debe mantenerse constante al pasar de un medio dieléctrico a otro.

Campo \bar{E}

Supongamos ahora un circuito cerrado (curva cerrada orientada C) en forma de rectángulo, con un lado de longitud a completamente contenido en la Región 1 y su lado opuesto contenido en la Región 2. Los otros dos lados, de longitud b atraviesan la superficie de separación.

Por ser CE un campo conservativo, la integral de circulación sobre C debe ser nula. Las contribuciones de los b se cancelan debido a la continuidad del campo a cada lado de la superficie y a su orientación opuesta. Solo queda la contribución de los lados paralelos a la superficie.



Como $d\bar{r}$ es tangente a la superficie y tiene dirección opuesta a cada uno de los lados a , su producto escalar con el CE da por resultado la componente tangencial del CE de cada lado.

Planteamos la suma de integrales	$\int_{L1} \bar{E}_1 \cdot d\bar{r} + \int_{L2} \bar{E}_2 \cdot d\bar{r} = 0$
----------------------------------	---

Resolvemos las integrales	$E_{t1} \cdot a - E_{t2} \cdot a = 0$
Conclusión Final	$E_{t1} = E_{t2}$

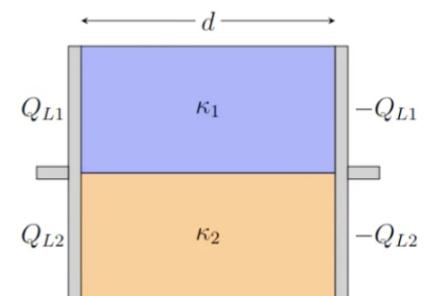
Condición de Frontera, Campo \bar{E}	$E_{t1} = E_{t2}$
--	-------------------

La componente tangencial del campo \bar{E} debe mantenerse constante al pasar de un medio dieléctrico a otro.

Aplicación de las Condiciones de Frontera: dado un capacitor plano de área A cuyo espacio entre placas está lleno con dos dielécticos diff, de permitividades relativas κ_1 y κ_2 , distribuidos según el caso, podemos formular una serie de conclusiones.

1er Caso - Dieléctricos en Paralelo: despreciando los efectos de borde, asumiendo que se preserva la simetría plana, los campos \bar{D} , \bar{E} y \bar{P} son perpendiculares a las placas. Verificamos que la simetría se cumple, debido a que \bar{P} es tangencial a la superficie de los dielécticos, entonces no hay carga de polarización sobre ella, solo entre los conductores y dielécticos.

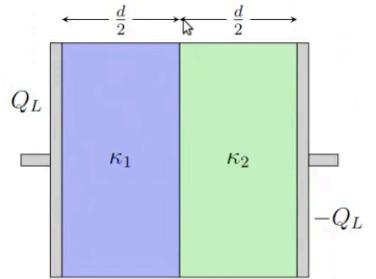
En esta situación, el CE solo tiene una componente perpendicular a las placas del capacitor (tangencial a la superficie de separación), entonces por las condiciones de frontera llegamos a varias conclusiones.



Igualdad de CE	$E_1 = E_2 = E$
Igualdad de ddp	$V_1 = V_u = V = E \cdot d$
Desigualdad de \bar{D}	$D_1 = \epsilon_1 E$ y $D_2 = \epsilon_2 E$
Desigualdad de Carga Libre \bar{D} es proporcional a la q_{libre} .	$Q_{L1} = \epsilon_1 E \frac{A}{2}$ y $Q_{L2} = \epsilon_2 E \frac{A}{2}$
Carga Libre Total	$Q_L = Q_{L1} + Q_{L2} = \frac{V \cdot A}{2d} (\epsilon_1 + \epsilon_2)$
Capacidad Total	$C = C_1 + C_2$

Podemos tratar este caso como dos capacitores en paralelo, que comparten ddp y tienen diff cargas.

2do Caso - Dieléctricos en Serie: despreciando los efectos de borde, asumiendo que se preserva la simetría plana, los campos \bar{D} , \bar{E} y \bar{P} son perpendiculares a las placas. Debido a que \bar{P} es normal a la superficie de los dieléctricos, habrá carga de polarización sobre ella (una de cada lado, con igual valor y signos opuestos). Pero, como es un campo uniforme (como \bar{D} y \bar{E}), también lo será q_{pol} y se verifica la simetría.



En esta situación, la componente normal de \bar{D} es continua, entonces por las condiciones de frontera llegamos a varias conclusiones.

Igualdad de CD	$D_1 = D_2 = D$
Desigualdad de \bar{E}	$E_1 = \frac{D}{\epsilon_1}$ y $E_2 = \frac{D}{\epsilon_2}$
DDP Total	$V = V_1 + V_2 = \frac{d}{2} (E_1 + E_2) = \frac{q_{libre} \cdot d}{2A} \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \right)$
Ecuaciones de Carga Polarizada Teniendo en cuenta que $\sigma_{pol}^{(1)} = P_1$ y $\sigma_{pol}^{(2)} = -P_1$	$\sigma_{pol}^{(1)} = D - \epsilon_0 E_1 = \sigma_{libre} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \right)$ $\sigma_{pol}^{(2)} = D - \epsilon_0 E_2 = \sigma_{libre} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \right)$
Carga Polarizada Total Su signo va a depender de cuál de los dos κ sea más grande.	$\sigma_{pol} = \sigma_{pol}^{(1)} + \sigma_{pol}^{(2)} = \sigma_{libre} \left(\frac{1}{\kappa_2} - \frac{1}{\kappa_1} \right)$
Capacidad Total	$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

Podemos tratar este caso como dos capacitores en serie, que comparten carga (Q_L) y tienen diff ddp.