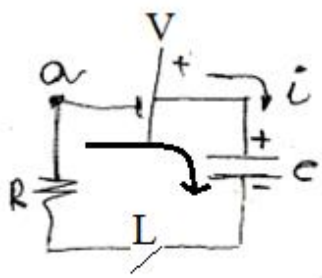
Circuito RC



se cierra L y x Kirchhoff:

Partiendo de a:

$$V - \frac{q}{C} - Ri = 0 \qquad \boxed{V = \frac{q}{C} + Ri}$$

Esto es así xq Kirchhoff responde al principio de conservación de la energía.

Escribámosla: $$V = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

Se debe encontrar la función $q(t)$ que satisfaga la ecuación diferencial dada

$$\left(V - \frac{q}{C}\right)dt = R\,dq \rightarrow \frac{VC-q}{C}\,dt = R\,dq$$

$$(VC-q)\,dt = RC\,dq \rightarrow \frac{dt}{RC} = \frac{dq}{VC-q}$$

V; R y C son ctes. y q depende de t

$$\int \frac{dt}{RC} = \int \frac{dq}{VC-q} \Rightarrow \frac{t}{RC} = -\ln(VC-q) + cte$$

$$\ln(VC-q) = -\frac{t}{RC} + cte$$

Determinamos la cte. a partir de las cond. iniciales:

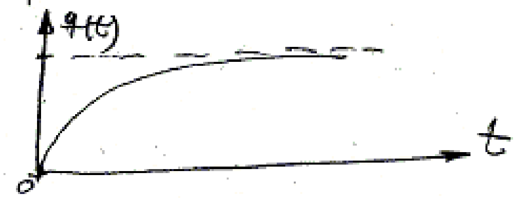
Si $t=0 \Rightarrow q=0 \therefore \ln(VC) = cte$; sustituyendo:

$$\ln(VC-q) = -\frac{t}{RC} + \ln(VC)$$

$$\ln(VC-q) - \ln(VC) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \ln\frac{VC-q}{VC} = -\frac{t}{RC}$$

$$\frac{VC - q}{VC} = e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow VC - q = VC\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\boxed{q(t) = VC\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$



Nótese que la rapidez c/que se carga el C viene caracterizada por el producto RC.

$$\left.\begin{array}{l} [RC] = \Omega \cdot F = \frac{V}{A}\,\frac{C}{V} = \frac{V}{\frac{C}{S}}\cdot\frac{C}{V} = S \;// \\ 1\Omega \cdot 1F = 1S \end{array}\right\} \text{en el S.I.}$$

Cuando se cierra el interruptor S, la R experimenta instantáneamente una dif. de potencial $\mathcal{E}$ y se establece una corriente inicial $\mathcal{E}/R$: el capacitor no experimenta ninguna diferencia de potencial debido a que su carga inicial es nula (ya que $V = q/C$). El flujo de carga a través de la R inicia la carga del C, con lo que ahora sobre el C debe de haber una diferencia de potencial entre sus placas; y esto significa que la ΔV sobre el R viene disminuyendo

RC se lo llama cte. de tiempo capacitiva del circuito $\tau_c \Rightarrow RC = \tau$

Si τ es grande, el C se carga lentamente y viceversa.

Si $t = 0 \Rightarrow q = 0$

Si $t = RC \Rightarrow q(t) = VC(1 - e^{-1}) \therefore q(t) \cong 0{,}63\, VC$

O sea, la cte de tiempo capacitiva τ_c es el intervalo de tiempo que tarda el C en aumentar su carga un 63% de su valor final VC, valor que corresponde para $t = \infty$:

Si $t = \infty \Rightarrow q(t) = VC(1 - e^{-\infty}) \therefore q(t) = VC$

Es importante entender que la presencia de una R en el circuito, significa una demora medida por la cte. RC (Si no existiera la R, la carga sobre el C aumentaría inmediatamente a su valor final).

ya que la suma de la $\Delta V|_C$ y la $\Delta V|_R$ debe ser V

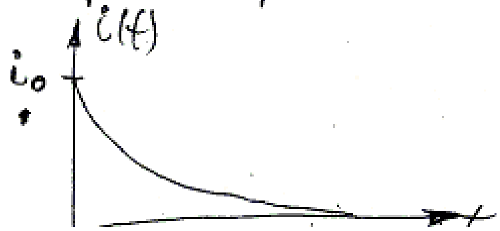
Esta disminución es la ΔV sobre la R nos indica que la corriente va disminuyendo, proceso que culmina cuando el C está totalmente cargado: en ese instante, toda la fem V está aplicada en el C y como no hay ΔV sobre la R $\Rightarrow i = 0$

La corriente se obtiene derivando:

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{d}{dt}\left[VC\left(1-e^{-t/RC}\right)\right]=V\cancel{C}\left(-\frac{1}{R\cancel{C}}\right)\left(-e^{-t/RC}\right)$$

$$i(t)=\frac{V}{R}\,e^{-t/RC} \Rightarrow \boxed{i(t)=i_0\,e^{-t/RC}}$$

donde $\frac{V}{R}$ es la corriente inicial i_0. Nótese que es la corriente permanente que tendría el circuito si reemplazamos el capacitor por un alambre (C.C.).

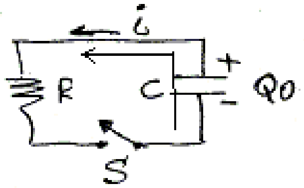


si $t=0 \Rightarrow i(t)=i_0$

Si $t=\tau_c=RC \Rightarrow i(t)=i_0e^{-1}\cong 0{,}37\,i_0$

Si $t=\infty \Rightarrow i(t)=0$

Descarga de un C:



Inicialmente, el C tiene una carga q_0. Cuando cerramos S, comienzan a fluir los portadores de carga a través del circuito.

Obsérvese que ahora se invirtió el sentido de circulación de la i $\Rightarrow i(t)=-\frac{dq}{dt}$

Recorriendo la malla en el sentido de i:

$$V_C-V_R=0 \Rightarrow \frac{q}{C}-Ri=0 \Rightarrow Ri=\frac{q}{C}$$

Sustituyendo en $i(t) \Rightarrow -\frac{dq}{dt}R=\frac{q}{C}$

$$-\frac{dq}{q} = \frac{1}{RC}\,dt \Rightarrow \int \frac{dq}{q} = -\int \frac{dt}{RC}$$

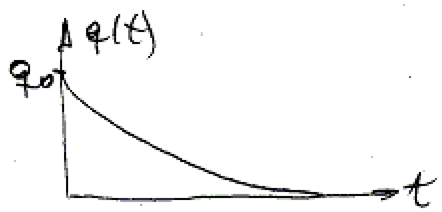
$$\ln q = -\frac{t}{RC} + cte. \Rightarrow$$

obtenemos la cte. mediante la condición inicial:

Si $t=0 \Rightarrow q = q_0 \Rightarrow \ln q_0 = cte.$ $\therefore \ln q = -\frac{t}{RC} + \ln q_0$

$$\ln q - \ln q_0 = -\frac{t}{RC} \therefore \ln \frac{q}{q_0} = -\frac{t}{RC}$$

$$\frac{q}{q_0} = e^{-t/RC} \Rightarrow \boxed{q(t) = q_0\, e^{-t/RC}}$$



La carga del C decrece exponencialmente con t

Consideremos ahora la corriente $i(t) = -\frac{dq}{dt}$

$$i(t) = -\frac{d}{dt}\left(q_0\, e^{-t/RC}\right) = \frac{q_0}{RC}\, e^{-t/RC}$$

La dif. de potencial entre las placas del C es inicialmente

$$V_0 = \frac{q_0}{C} \Rightarrow \boxed{i(t) = \frac{V_0}{R}\, e^{-t/RC}} \quad \boxed{i(t) = i_0\, e^{-t/RC}}$$

Donde $i_0 = \frac{V}{R}$ es la corriente inicial

La i decrece exponencialmente y la cte. de tiempo capacitiva $\tau_C = RC$ caracteriza esta disminución

La ddp en el C también decrece exponencialmente, igual que la carga y la corriente.