Recordemos que Gauss no impone geometría alguna, pero la realidad matemática obliga que la elección está ceñida a pocas de ellas; para que se pueda aplicar la forma integral de la Ley de Gauss, se debe cumplir:

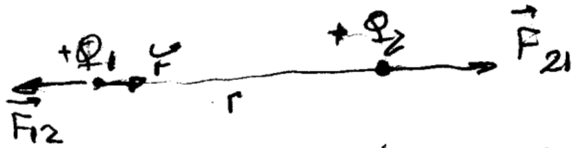
- $|\vec{E}|$ debe ser uniforme (tener un único valor)
- $\vec{E} \parallel d\vec{s}$
- $\vec{E} \perp d\vec{s}$
- $\vec{E} = 0$

Al menos 1 de estas 4 condiciones se debe cumplir para resolver el problema x Gauss

<u>Hallar la expresión del campo $\vec{E}$ para una q puntual:</u>

Cuando estudiamos Coulomb, hallamos $\vec{E}$ desde la expresión de $\vec{F}$:

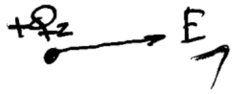
$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}$$



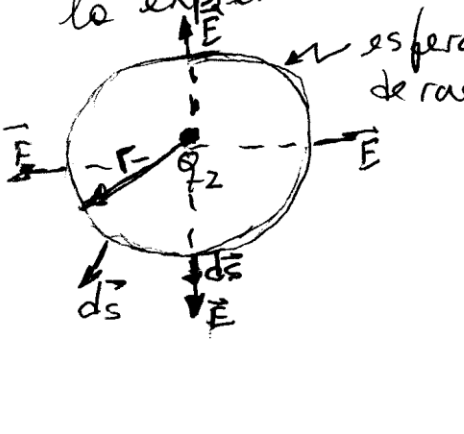
si consideramos: $q_2 >> q_1 \therefore$ $\frac{\vec{F}}{q_1} = k \frac{q_2}{r^2} \vec{r}$ con $\frac{\vec{F}}{q_1} = \vec{E}$

$$\boxed{\vec{E} = k \frac{q_2}{r^2} \vec{r}}$$

Expresión de $\vec{E}$ para una q puntual x Coulomb



si utilizamos Gauss, podemos encontrar el campo sin conocer la expresión de Coulomb: $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$, pero $\vec{E} \parallel d\vec{s} \therefore$



$\Phi_E = \oint E ds$; como $|\vec{E}| = E$ depende sólo de la distancia $\therefore$ tendrá = valor $\forall$ punto de la esfera

$\oint E\,ds = E\oint ds = E\,4\pi r^2$ y como

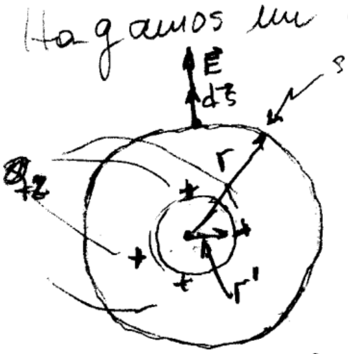
$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\sum Q}{\varepsilon_0}$ ∴ $E\,4\pi r^2 = \frac{\sum Q}{\varepsilon_0}$

$$\vec{E} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}_{k}\frac{Q_2}{r^2}\check{r} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = k\frac{Q_2}{r^2}\check{r}}$$

El resultado es = al que obtuvimos x Coulomb

La Ley de Gauss es una ley gral y es la más importante para resolver todo problema de Electrostática.

Hagamos un cambio en este problema y apliquemos Gauss:



La misma carga Q_2, que estaba concentrada en un punto, ahora se distribuye en una esfera de radio r': queremos hallar nuevamente $\vec{E}$

La esfera gaussiana tiene radio r ∴ nada cambia en el análisis anterior

$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\sum Q}{\varepsilon_0}$; $E \parallel d\vec{s}$ ∴ $\oint E\,ds \Rightarrow \boxed{\vec{E} = k\frac{Q_2}{r^2}\check{r}}$!

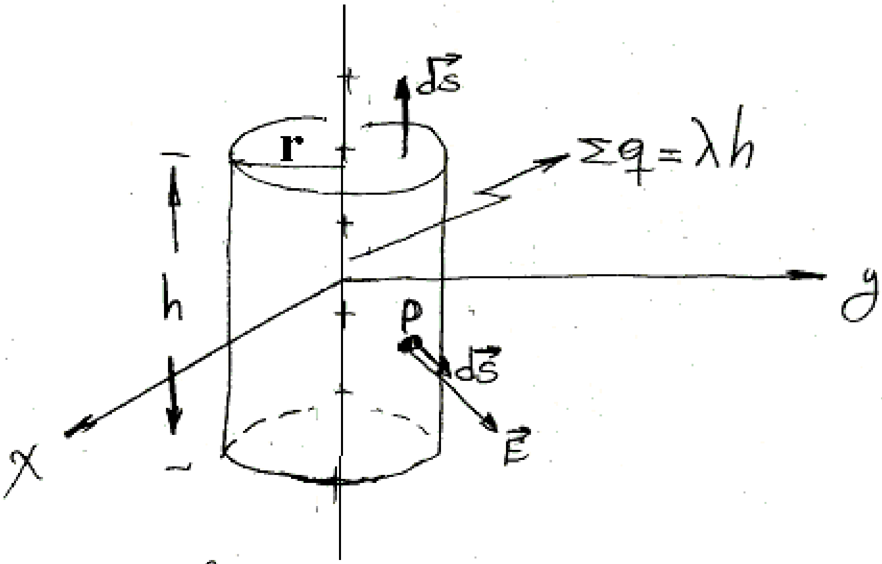
El campo $\vec{E}$ en una superficie esférica a una distancia r de su centro, con una carga en un punto ubicado en el centro de la esfera, tiene = expresión que si la carga estuviera distribuida uniforme en una esfera de radio r', siempre que $r \geq r'$.

Nótese que $\vec{E}$, debido a geometrías puntuales o esféricas, es:

$$E = f\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Ej.1:

Encontrar una expresión de E cerca de un alambre largo y recto, uniformemente cargado con densidad lineal de carga λ en un punto lejano a sus extremos.



Alambre a lo largo del eje z y el punto P en el plano xy y lejos de los extremos. $\vec{E}$ // plano xy y depende (en módulo), sólo de la distancia r desde el alambre ∴ $\vec{E}$ tiene simetría cilíndrica alrededor del eje z.

Obsérvese que el flujo a través de ambas tapas del cilindro es nulo, xq' $\vec{E} \perp \vec{dS}$

El flujo de $\vec{E}$ en la sup. lateral es $|\vec{E}|$ x el área de la sup. (xq' $\vec{E} \parallel \vec{dS}$) y su valor es el mismo en todos los puntos de la sup.

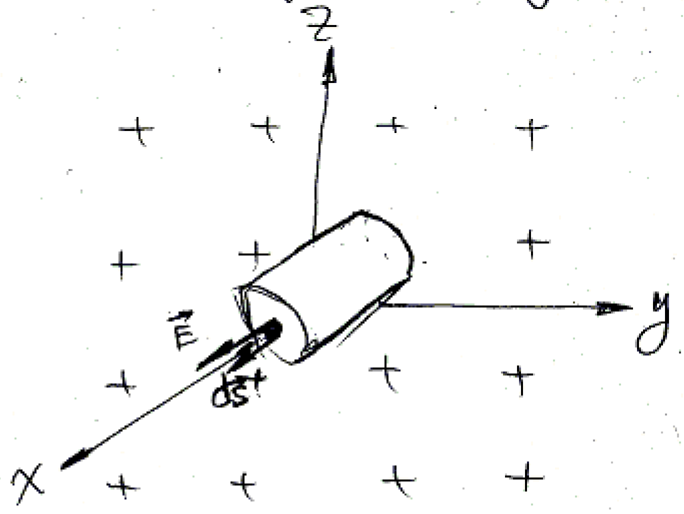
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = E(2\pi r h)$$

$$\boxed{E = \frac{\overset{\lambda . h}{Q}}{(2\pi r h)\varepsilon_0}}$$

El campo debido a una geo lineal (y también va a ser la cilíndrica) larga: **E = f (1/r)** o sea, cae hiperbólicamente.

Ej. 2:

Distribución de carga plano y → ∞ ; con σ uniforme



La sup cargada está en el plano yz

Como el plano → ∞ ∴ $\vec{E} \parallel$ eje x

Observando la fig., no podemos aventurar la dependencia de $\vec{E}$

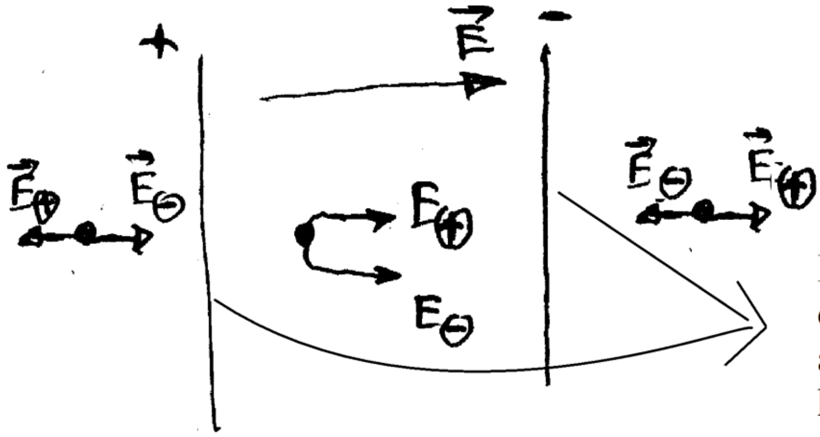
La carga encerrada en el plano es: $\Sigma q = \sigma S$

y como $\phi_E = \frac{\Sigma q}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Nótese la <u>**NO dependencia**</u> de $\vec{E}$ con la distancia al plano.

Ej. 3:
Dos grandes láminas enfrentadas están cargadas uniformemente con una densidad super ficial η de signo opuesto en cada lámina. Considerando solamente puntos alejados del borde de las láminas, hallar el campo eléctrico en los puntos A, B y C.



Planos con cargas opuestas situados ambos ⊥ al plano hoja.

Fuera de los planos, la resultante del vector $\vec{E}$ debido a ambos planos es nula.
Dentro de los planos, las componentes del campo debido a ambas láminas se suman

$$\vec{E} = \vec{E}_\oplus + \vec{E}_\ominus = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{i}}$$

División máteriales (criterio eléctrico)

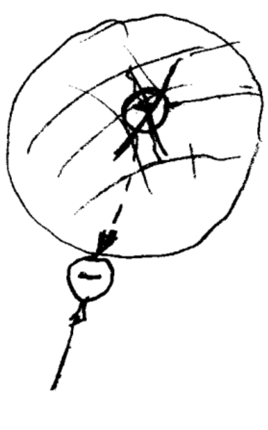
Dividimos los materiales, de acuerdo a nuestra conveniencia "eléctrica" en:

- CONDUCTORES

  Son aquellos que permiten el libre movimiento de la carga eléctrica: las que tuviere en exceso y las suyas propias; como vamos a trabajar exclusivamente con materiales sólidos.·. en un sólido conductor, sólo los electrones pueden moverse "libremente" en su seno, ya que sus núcleos protónicos puede oscilar, pero en un sólido, no se desplazan.
  Todos los metales son buenos conductores; los de uso son el Cu y el Al

- NO CONDUCTORES O AISLANTES
  No permiten el libre movimiento de la carga eléctrica.

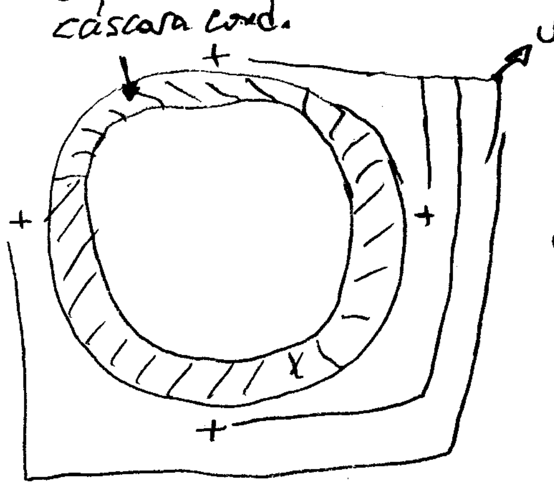
Una implicancia MUY IMPORTANTE de la definición de material conductor, es que éste NO PERMITE en su interior la presencia de campo electrostático ni de carga eléctrica en exceso (electrones en los conductores sólidos).
Por supuesto, que esta limitación no afecta a los electrones pertenecientes a los átomos que componen al material conductor.



Supongamos un volumen macizo de un mat. conductor; si dentro de él hubiera un exceso de carga (una carga ⊖ en el ejemplo), inmediato se desplaza hacia la superficie.

Podemos visualizar el campo $\vec{E}$ a través de sus líneas de campo ∴ la carga ⊖ del ejemplo con su línea (fig); a esta carga ⊖ le llega una línea (sumidero) que nace en una ⊕ ⇒ como no está explicitado dónde está ubicada la carga ⊕, decidimos que está en el ∞ (lejos), entonces si la carga estuviera en el metal, habría un campo $\vec{E}$ presente dentro del metal que llegaría hasta la carga ⊖ ∴ habría una $\vec{F}_e = q\vec{E}$ y llevaría a la carga hasta la superficie del conductor, y no más de allí, x q allí termina el cond. y x ende la libertad de movimiento de las cargas en exceso

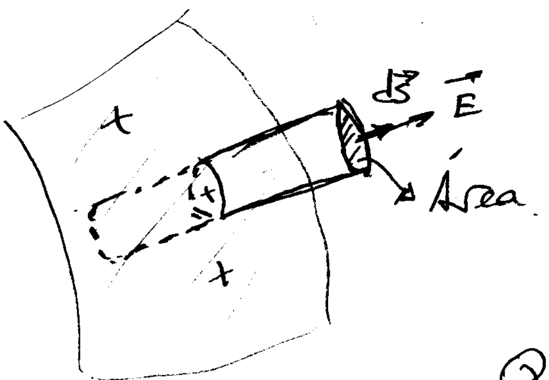
¿y si el conductor fuera hueco?



Aunque se encierre un volumen cualquiera con una lámina de material conductor de espesor infinitesimal en su interior NO HAY CARGA (en exceso) NI CAMPO $\vec{E}$
No importa la geo del volumen encerrado, en absoluto.
El exceso de carga eléctrica en un conductor es un fenómeno SUPERFICIAL

Como $\vec{E} = 0$ dentro de los cond., Gauss nos informa donde se aloja el exceso de carga en un conductor. Como $\vec{E} = 0$ dentro de los cond. → Φ_E será nulo para esa sup. interior ∴ la ley de Gauss requiere que la carga neta dentro de la sup. también sea nula. Esto quiere decir que no habrá exceso de carga en ningún punto interior de un conductor ⇒ $\rho = 0$ para cualq. parte de un cond. ∴ $\rho \neq 0$ sólo puede existir en un aislante ⇒ en un conductor con exceso de carga, éste se distribuirá en la sup como una densidad σ.

Aplicamos entonces la ley de Gauss para determinar el campo justo sobre la sup. del conductor.
Este campo debe ser ⊥ a la sup del cond., pues si $\vec{E}$ tuviera en la sup. una componente tangencial a la misma E_t, los portadores de carga se moverían a lo largo de la sup, en respuesta a la fuerza tangencial provocada por E_t, situación que contradice la realidad: cargas en reposo, ergo estática.
Entonces $\vec{E}$ es E_n (xq' $\vec{E}$ // en todos sus puntos)



$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

(Siendo $E = E_n$)

$$Q = \sigma S$$

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = ES \quad \therefore \quad ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Resumen:
Un conductor frente a un campo E se dispone en equilibrio electrostático y cumple:

- Para cualquier geometría de conductor, en su interior E = 0.
- El exceso de carga en un conductor se ubica exclusivamente en su superficie.
- Sólo existe campo E en el exterior a un conductor y siempre es normal a su superficie.

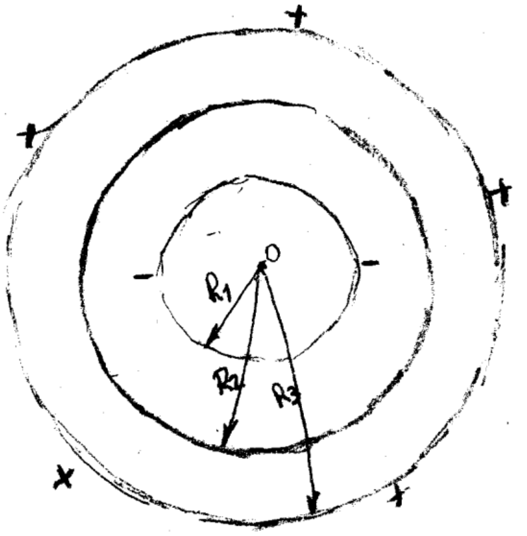
Recordar: todos los metales son buenos conductores.

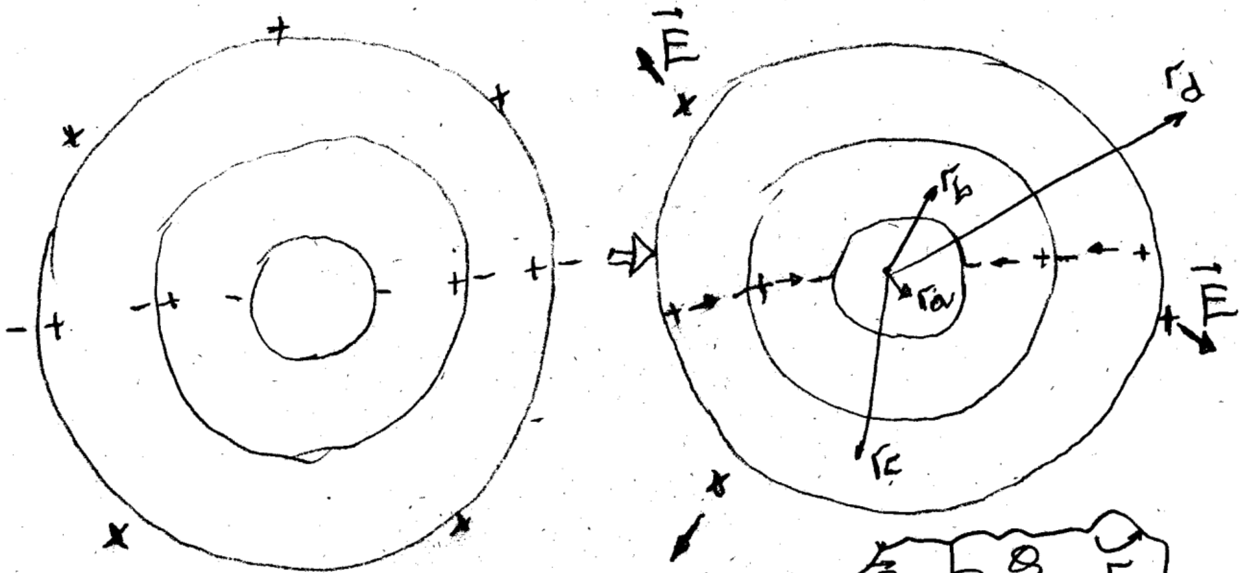
Distribución de cargas en un conductor
En condiciones de alta simetría, o sea: hilos infinitos; planos y esferas, para materiales homogéneos existe distribución uniforme de carga, es decir, se espera que λ, y σ uniforme.
Si su geo es irregular, se cumple que la densidad superficial de cargas $\boldsymbol{\sigma}$ es máxima en las zonas donde el radio de curvatura de la superficie ses menor (zonas ahusadas)
A esta circunstancia se la denomina **efecto de puntas**.

Múltiplos y submúltiplos habituales

M Mega $\mathbf{10^{6}}$
k kilo $\mathbf{10^{3}}$
m mili $\mathbf{0^{-3}}$
μ micro $\mathbf{10^{-6}}$
n nano $\mathbf{10^{-9}}$
p pico $\mathbf{10^{-12}}$

Tres cascaras conductoras, de radio $R_1 = 1$ m ; $R_2 = 2$ m y $R_3 = 3$ m se encuentran con un exceso de carga : $R_1 = -2$ nC y $R_3 = 5$ nC (fig.)
Hallar el campo eléctrico $\vec{E}$ para
a) $r_a = 0,6$ m ; b) $r_b = 1,2$ m
c) $r_c = 2,2$ m y d) $r_d = 4$ m
Considerar medio aire o vacío ∴
$k = 9.10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$





Aplicando una sup gaussiana en cada r : $\boxed{\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}}$

a) $\boxed{E|_{r=0,6m} = 0}$ ⇒ ∄ $\vec{E}$ dentro cáscara conductora

b) $E|_{r=1,2m} = 9.10^9 . \frac{2.10^{-9}}{1,2^2}$ ⇒ $\boxed{\vec{E} = 12,5 \frac{N}{C}(-\hat{r})}$

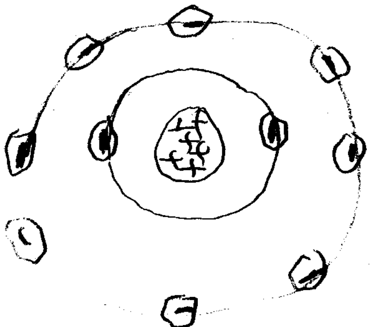
c) $E|_{r=2,2m} = 9.10^9 . \frac{2.10^{-9}}{2,2^2}$ ⇒ $\boxed{\vec{E} \simeq 3,72 \frac{N}{C}(-\hat{r})}$

d) $E|_{r=4m} = 9.10^9 . \frac{2.10^9}{4^2}$ ⇒ $\boxed{\vec{E} = 1,125 \frac{N}{C}\hat{r}}$

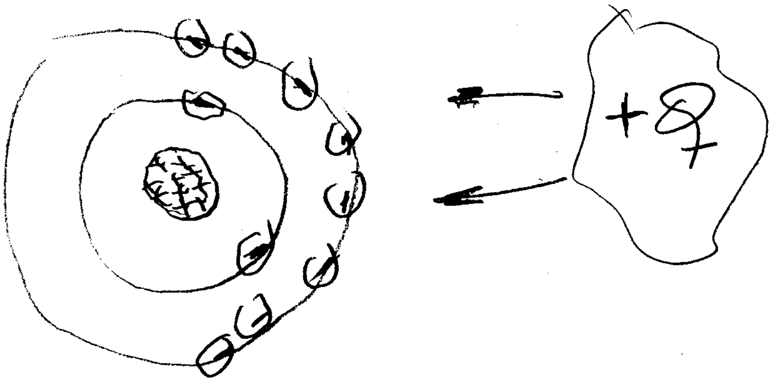
Aislantes y Dieléctricos

Vimos que los metales son muy buenos cond. eléctricos, xq tienen infinidad de electrones "libres" para movilizarse; contrariamente, los NO conductores o aislante, no tienen electrones "libres" (su tenencia es mínima).

Estudiemos un proceso que <u>sólo</u> se aplica a los <u>mat. no conductores</u>:

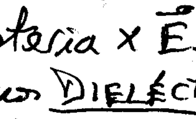


Átomo sin excitación de campo eléctrico $\vec{E}$ externo



En la mayoría de los átomos, sin presencia de un $\vec{E}$ externo, presenta una simetría dinámica estadística en la disposición de sus electrones en la nube que rodea a su núcleo ∴ el átomo como unidad, se presenta neutro eléctricamente. En cambio, si el átomo es atacado x un $\vec{E}$ externo, se encuentra una predisposición a encontrarnos con una asimetría espacial ⇒ este átomo se puede modelizar:

Esta manifiesta diferenciación dinámica entre +Q y −Q y recordando nuestro modelo:



Hay un nuevo campo $\vec{E}$ inducido sobre el material x $\vec{E}$ externo.

Los <u>aislantes</u> que se polarizan los llamaremos <u>DIELÉCTRICOS</u>.

O sea, un <u>dieléctrico</u> es un <u>aislante</u> que una nueva propiedad, que se denomina <u>POLARIZACIÓN</u>.

Permitividad eléctrica: ε (épsilon)

Vimos que el campo $\vec{E}$ es dependiente del medio en el que se lo analice; hasta ahora hemos trabajado exclusivamente con aire o vacío y $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ \frac{C^2}{N.m^2}$ es el valor que caracteriza a la permitividad eléctrica del vacío o aire.

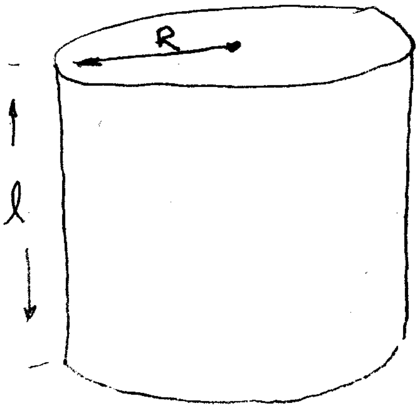
No necesariamente tendremos el vacío o aire como medio ∴ la modelización para otros medios la llamaremos ε con algún subíndice que lo identifique: x ejemplo: ε_{PVC} cuyo valor $\varepsilon_{PVC} = 3{,}5.10^{-10}\ \frac{C^2}{N.m^2}$; como vemos, son números poco "manejables" ⇒ es de uso extendido: ε_r (permitividad eléctrica relativa) ∴ $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

Es el cociente entre el ε del material y el del vacío ε_0

Para el PVC: $\varepsilon_{r_{PVC}} = \frac{\varepsilon_{PVC}}{\varepsilon_0} = \frac{3{,}5.10^{-10}}{8{,}85.10^{-12}} = 40$

Entonces el ε_r del aire o vacío: $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0} = 1$

Lo aprendido modeliza a los materiales en cuanto a su permisión o permitividad respecto del campo $\vec{E}$: cuanto mayor sea ε_r ⇒ mayor acción fuera el campo externo sobre el material: este proceso lo llamaremos "POLARIZACIÓN" y es característica del material, en cuanto a su capacidad de agudizar el proceso: SÓLO a los aislantes les sucede este proceso, que se llama POLARIZACIÓN



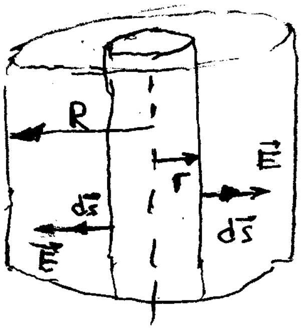
Un cilindro macizo largo, de long l y radio R, tiene una densidad volumétrica de carga $\rho\left[\frac{C}{m^3}\right]$ distribuida uniforme y permitividad eléctrica ε.

a) Hallar la expresión del campo $\vec{E}$ para $r \leq R$.

b) Ídem para $r \geq R$

c) Graficar $E = f(r)$ $\forall$ el espacio

a) $r \leq R$



Gauss en un cilindro de radio r

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon} \qquad \vec{E} \parallel \vec{ds}$$

$$\oint E\,ds = \frac{q}{\varepsilon}$$

distribución de carga en el espacio es uniforme $\therefore$ E es uniforme para un r dado

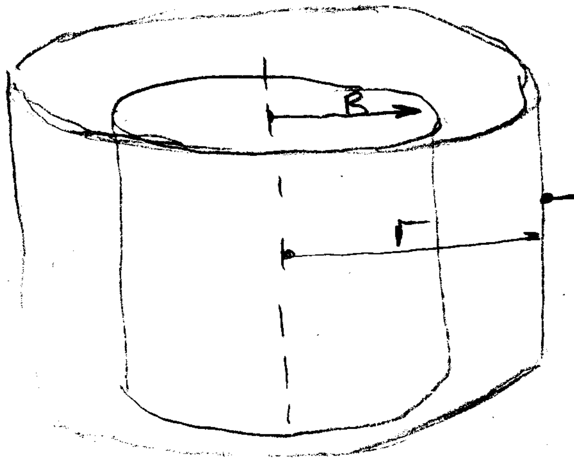
$$E\oint ds = \frac{q}{\varepsilon} \rightarrow E\,2\pi r l = \frac{q}{\varepsilon}$$ pero q no es dato; lo es ρ

$$\rho = \frac{q}{V}\left[\frac{C}{m^3}\right] \therefore q = \rho V = \rho\,\pi r^2 l \therefore E\,2\pi r l = \frac{\rho \pi r^2 l}{\varepsilon}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon}\, r\, \breve{r}}$$

El campo $\vec{E}$ dentro del cilindro es radial y crece linealmente con r

b) $r \geq R$



GAUSS con $r \geq R$ (fig)

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \vec{E} \parallel \vec{ds}$$

$$\oint E\, ds = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E \oint ds = \frac{Q}{\varepsilon_0} \therefore \underset{(*)}{E\, 2\pi r l} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Ahora Q es la carga TOTAL encerrada x el cilindro de radio R $\Rightarrow$ $\rho = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = \rho . \underline{\pi R^2 l}$ aquí es R^2 !

En (*) : $E 2\pi r l = \frac{\rho \pi R^2 l}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \frac{1}{r} \breve{r}}$

El campo $\vec{E}$ fuera del cilindro decrece hiperbolicamente

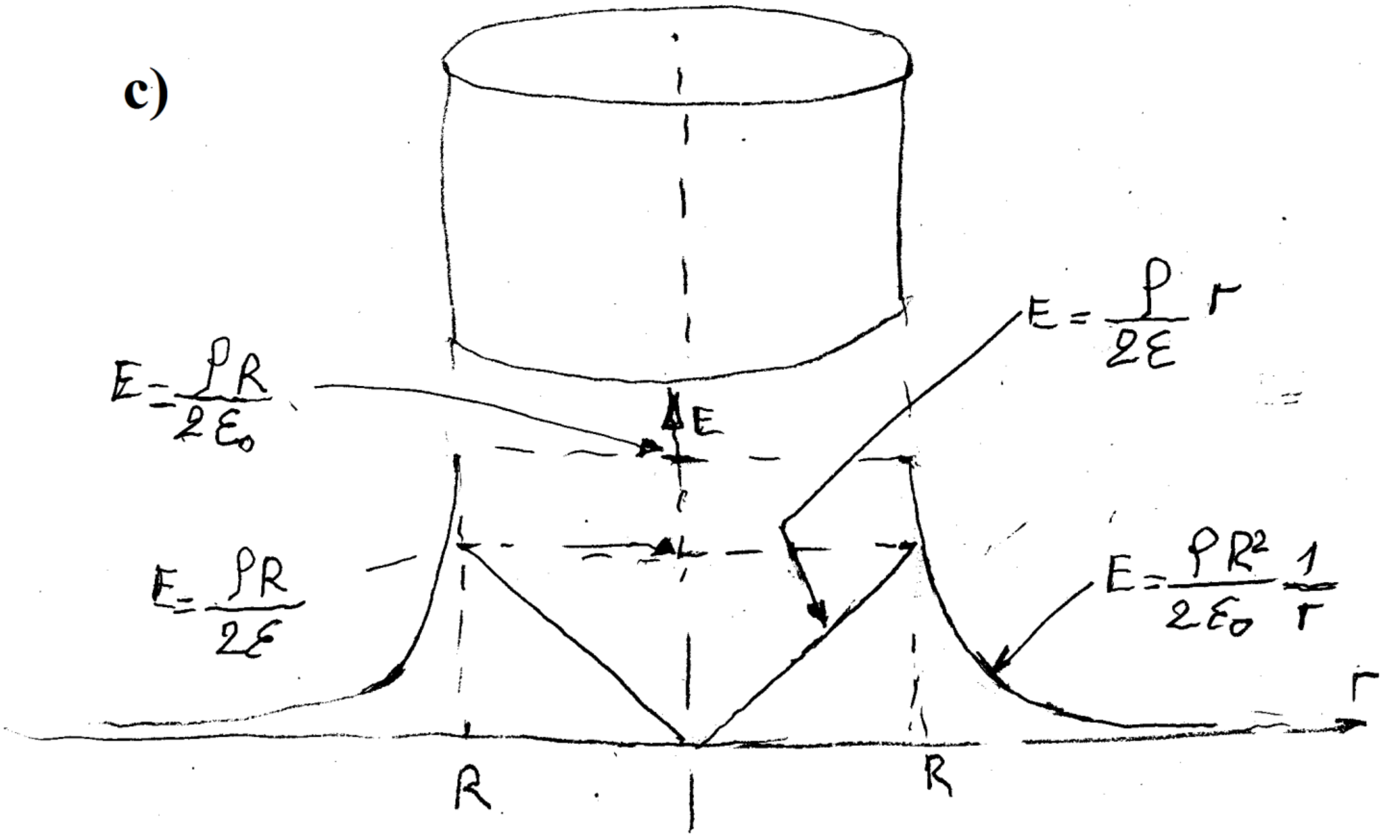
Analicemos la expresión hallada en (a) y la de (b) para $r = R$

a) $E = \frac{\rho}{2\varepsilon} r \Rightarrow E = \frac{\rho}{2\varepsilon} R \longrightarrow =$

b) $E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \frac{1}{r} \Rightarrow E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \frac{1}{R} \therefore E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R$

Nótese que en (a) está ε en el divisor y en (b) está ε_0 dividiendo, y siempre $\varepsilon_0 < \varepsilon$, ya que la menor permitividad eléctrica es la del vacío $= 8,85 . 10^{-12} \frac{C^2}{N m^2}$

c)



Como hay un cambio de medio (dieléctrico $\rightarrow$ aire o vacío) $\therefore$ $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$, el campo $\vec{E}$ es <u>discontinuo</u> en la superficie del cilindro (figura) $\Rightarrow$ si nos acercamos a la superficie desde el cilindro, su valor es menor que si nos acercamos a la superficie desde afuera del cilindro, ya que $\varepsilon > \varepsilon_0$

$$\therefore \frac{\rho R}{2\varepsilon} < \frac{\rho R}{2\varepsilon_0}$$