

ENERGÍA INTERNA - U

-) Dado un GAS IDEAL compuesto por N moléculas idénticas.
-) Cada molécula tiene una masa "m" (todas iguales) y una velocidad de traslación \vec{v}_i
-) Cada molécula tiene una Energía Cinética de traslación $K_i = \frac{1}{2} m v_i^2$
-) Se define ENERGÍA INTERNA DE ESA MASA DE GAS IDEAL:

$$U = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m v_i^2 = \sum_{i=1}^N K_i \quad (\text{Joule})$$

$$\therefore U = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 + \dots + \frac{1}{2} m v_N^2 = \frac{1}{2} m \left[v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2 \right]$$

Multiplicando numerador y denominador por N. queda:

$$U = \frac{1}{2} m N \left[\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N} \right] \quad \text{siendo}$$

$$\therefore \left[\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N} \right] = \overline{v^2} \equiv \text{Es el promedio ó media estadística de las velocidades elevadas al cuadrado, o la VELOCIDAD CUADRÁTICA MEDIA.}$$

$$\therefore m \cdot N \equiv \text{masa de una molécula} \times \text{el N}^\circ \text{ de Moléculas} \Rightarrow \text{la Masa del GAS IDEAL} = M_{\text{Gas}}.$$

$$U = \frac{1}{2} M_{\text{GAS}} \cdot \overline{v^2} \rightarrow (1)$$

Por ahora ACEPTEMOS LA SIGUIENTE EXPRESIÓN : $\overline{v^2} = \frac{3P}{\delta} \rightarrow (2)$

donde $\begin{cases} P = \text{presión del GAS} \\ \delta = \text{densidad del GAS} = \frac{M_{\text{GAS}}}{\text{Volumen}} = \frac{M_{\text{GAS}}}{V} = \delta \rightarrow (3) \end{cases}$

Remplazando en (1) queda :

$$U = \frac{1}{2} M_{\text{GAS}} \cdot \frac{3P}{\delta} V \Rightarrow U = \frac{3}{2} PV \rightarrow (4)$$

Pero por lo visto en GASES IDEALES : $PV = nRT$. donde

$n = \text{N}^\circ \text{ de moles del GAS confinado}$

$R = \text{CONSTANTE UNIVERSAL DE LOS GASES PARA UN MOL DE GAS}$

$$= 0,082 \frac{\text{atm} \cdot \text{lt}}{(\text{K}) \cdot \text{mol}} = 8,317 \frac{\text{Joule}}{(\text{K}) \cdot \text{mol}} = 8317 \frac{\text{Joule}}{(\text{K}) \cdot \text{kmol}} = 62,4 \frac{\text{mmHg} \cdot \text{ml}}{(\text{K}) \cdot \text{mol}}$$

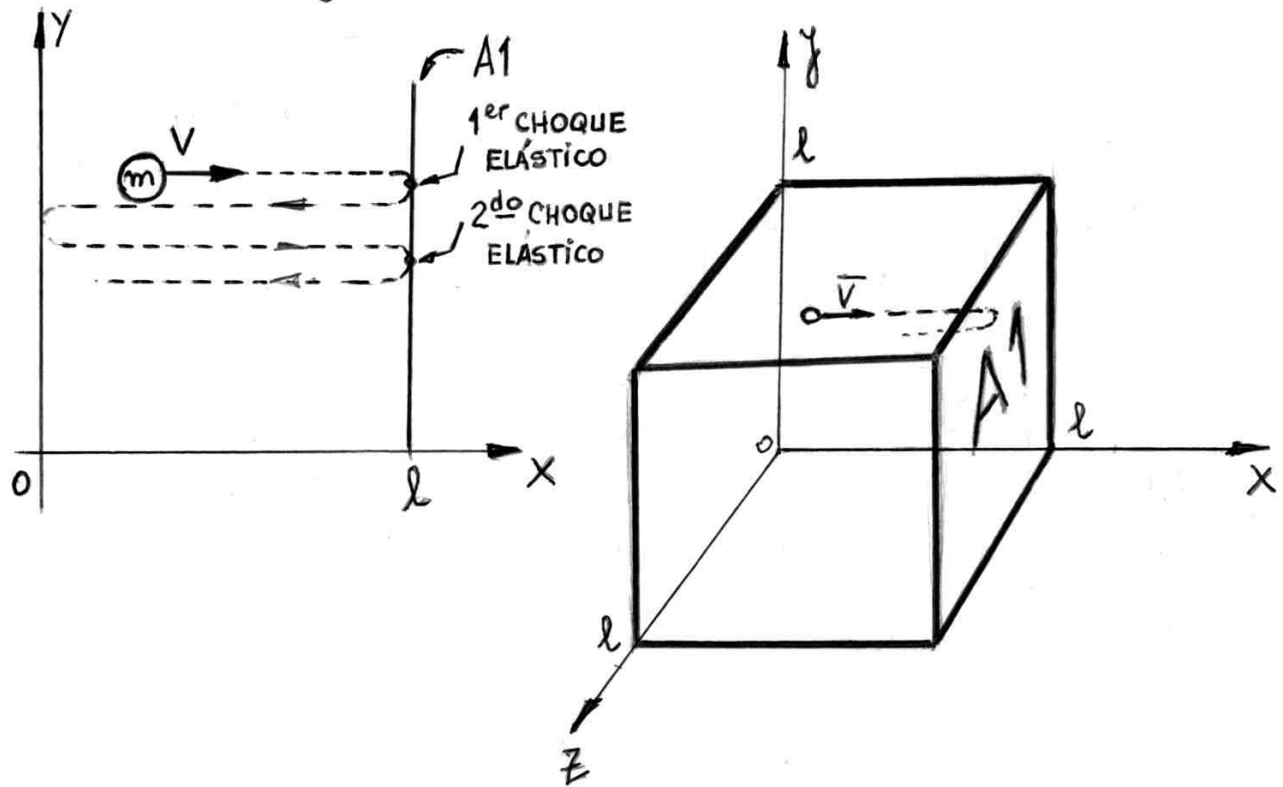
$T = \text{Temperatura Absoluta del GAS}$.

Remplazando en (4) obtenemos : $U = \frac{3}{2} n \cdot R \cdot T \rightarrow (5)$
para n moles de GAS.

lo que se comprueba que la ENERGÍA INTERNA ES SÓLO FUNCIÓN DE T.

DEMOSTRACIÓN DE LA EXPRESIÓN

$$\overline{v^2} = \frac{3p}{\rho} \quad \text{o} \quad p = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2}$$



1) Dado un GAS de masa M_{GAS} , compuesto por N partículas de masa m .

$\therefore (M_{\text{GAS}} = Nm)$ - El GAS está confinado en un cubo de lado l . \therefore

$$V_{\text{GAS}} = l^3, \quad \text{Por lo que la densidad } \rho_{\text{GAS}} = \frac{mN}{l^3}.$$

2) Observemos una partícula que se desplaza de un lado al otro exclusivamente en dirección x . Calcularemos la presión que ejerce

esta partícula sobre la cara $A1$ de su recipiente. $p = \frac{F}{A_1} = \frac{F}{l^2}$

$$\text{La fuerza } F \text{ puede calcularse como } |\vec{F}| = \frac{|\Delta \vec{p}|}{\Delta t} = \frac{|\sum^k \Delta \vec{p}_i|}{\Delta t} = k \frac{|\Delta \vec{p}_i|}{\Delta t}$$

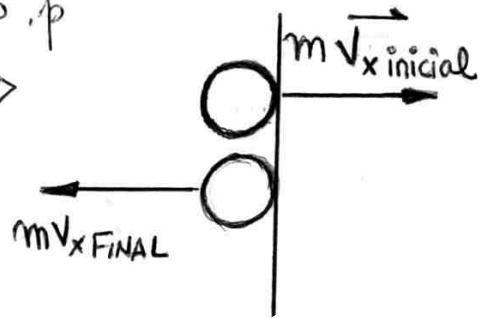
$k = N^\circ$ de choques en un Δt dado de ESA ÚNICA PARTÍCULA.

Siendo $\Delta \vec{p}_i = (m \vec{v}_{x \text{ FINAL}} - m \vec{v}_{x \text{ INICIAL}})$ de la partícula

= Variación de cantidad de movimiento \vec{p}

en un choque de una partícula. \Rightarrow

$$\Rightarrow \boxed{2 m v_x = |\Delta \vec{p}_i|}$$



Llamamos FRECUENCIA DE CHOQUE a:

$$f_c = \frac{K}{\Delta t} \left(\frac{\text{N}^\circ \text{ de choques}}{\text{segundo}} \right), \text{ con lo que}$$

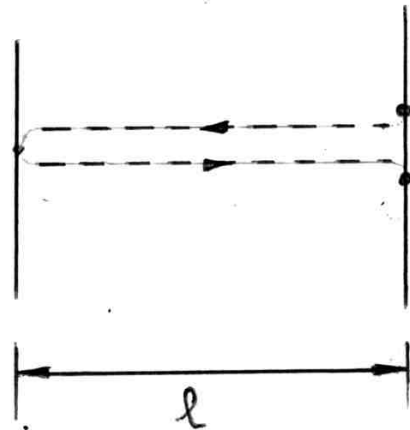
$$F = f_c \cdot |\Delta \vec{p}_i| \text{ que produce UNA SOLA PARTÍCULA}$$

a f_c se calcula como $\frac{1}{T_c} = \frac{1}{\text{Intervalo entre choque y choque}}$

Entre un choque y otro, la partícula debe recorrer una distancia $2l$

la velocidad $v_x \therefore$

$$T_c = \frac{2l}{v_x} = \frac{1}{f_c} \Rightarrow$$



$$f_c = \frac{v_x}{2l} \therefore r = \frac{2m v_x \cdot v_x}{2l} = \frac{m v_x^2}{l}$$

La Presión resultará: $\frac{F}{l^2} \Rightarrow \boxed{p = \frac{m v_x^2}{l^3}} \rightarrow \text{de una sola partícula sobre } A_1$

Como en el cubo hay N partículas, tendremos que sumar la contribución de presión de todas:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_N = \frac{m}{l^3} (\overline{v_{x1}^2} + \overline{v_{x2}^2} + \dots + \overline{v_{xN}^2})$$

Multipliquemos numerador y denominador por N :

$$p = \frac{mN}{l^3} \frac{(\overline{v_{x1}^2} + \overline{v_{x2}^2} + \dots + \overline{v_{xN}^2})}{N} \text{ en donde } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{v_{x1}^2} + \overline{v_{x2}^2} + \dots + \overline{v_{xN}^2}}{N} = \overline{v_x^2} \\ mN = M_{\text{gas}} \\ l^3 = \text{Volumen} \end{array} \right.$$

$$\therefore p = \rho \cdot \overline{v_x^2}$$

Esta expresión se refiere a la componente en x de las velocidades de TODAS LAS PARTÍCULAS ya que se calculó la presión sobre A_1 .

Sucede que el movimiento de las partículas en un GAS es azaroso.

Las partículas no tienen predilección por ningún eje en especial.

Por esto resulta que $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$.

Siendo además que $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$ (donde $\overline{v^2}$ es el valor medio cuadrático de la velocidad de cualquier partícula).

Tendremos que $\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2}$. Reemplazando arriba

queda
$$p = \frac{\rho \overline{v^2}}{3}$$