

# Índice

<b>T1: Corriente Continua.....</b>	<b>10</b>
<b>Corrientes Eléctricas Estacionarias.....</b>	<b>10</b>
★ Corriente Eléctrica.....	10
★ Densidad de Corriente.....	11
Densidad de Corriente.....	11
Cálculo de la Corriente Total.....	11
★ Conservación de la Carga.....	11
★ Naturaleza Estacionaria de la Corriente.....	12
<b>Conductor Óhmico.....</b>	<b>12</b>
Conductor Óhmico, Conductividad Cte y Forma de Alambre.....	13
<b>Fuerza Electromotriz (f.e.m.).....</b>	<b>15</b>
Revisión Rápida - Campos Conservativos.....	15
★ Circulación de Corriente en Conductores.....	15
Necesidad de un Campo no Conservativo.....	16
Fuentes de F.E.M.....	16
F.E.M. y Corriente en Batería Real.....	17
F.E.M. y DDP en Batería Ideal.....	18
Representación en el Circuito Eléctrico.....	18
★ Análisis Energético - F.E.M. en un Circuito.....	18
Distribución de Potencias en el Circuito.....	18
1) Potencia Entregada por la F.E.M.....	18
2) Potencia Entregada por E en la Batería.....	19
3) Potencia Entregada por E en el Conductor.....	19
Potencia Total en el Circuito.....	20
Intercambio de Energía en el Circuito.....	20
<b>Configuración de Resistencias.....</b>	<b>20</b>
★ Resistencias en Serie.....	21
★ Resistencias en Paralelo.....	21
Comparación: Serie y Paralelo.....	22
<b>Leyes de Kirchhoff.....</b>	<b>22</b>
★ Ley de Nodos - Continuidad de Carga.....	22
★ Ley de Mallas - Carácter Conservativo de E.....	22
Malla.....	22
Resolución - Paso por Paso.....	23
Resolución de Circuitos Complejos con Kirchhoff.....	23
Rama.....	24
Análisis de Circuitos - Método de las Ramas.....	24
Cálculo de Voltaje - Método Potencia Total Disipada.....	24
<b>Instrumentos de Medición.....</b>	<b>25</b>
★ Voltímetro.....	25
Real vs Ideal.....	25
Medición con Voltímetro.....	25
Impacto de Voltímetro Real.....	25
★ Amperímetros.....	26
<b>Capacitor en Circuitos.....</b>	<b>26</b>
Régimen Estacionario - Estado "Descansando".....	26

DDP y Tensión en el Estacionario.....	27
★ Régimen Transitorio - Estado de "Carga".....	27
Polaridad del Capacitor.....	27
Proceso de Carga de un Capacitor.....	27
Definir la SG.....	28
Carga de un Capacitor en un Circuito Eléctrico.....	28
Balance de Energía.....	30
1) Energía entregada por la Batería.....	30
2) Energía almacenada en el Capacitor.....	30
3) Energía disipada en las Resistencias.....	31
Eficiencia del Proceso.....	31
<b>T2: Magnetismo.....</b>	<b>32</b>
Introducción.....	32
Campo Magnético.....	32
Efecto del CM en Cargas Eléctricas.....	32
Relación entre Electricidad y Magnetismo.....	33
Fuerza de Lorentz - Electromagnética.....	33
★ Espectrógrafo de Masas.....	33
Frecuencia de Larmor (o del Ciclotrón).....	34
★ Selector de Velocidades.....	34
Funcionamiento.....	34
<b>Fuerza Magnética sobre Conductores.....</b>	<b>35</b>
Círculo Cerrado en un CM Uniforme.....	36
Interacción entre Conductores Paralelos.....	36
Fuentes del CM.....	36
Ley de Biot-Savart.....	36
<b>Cálculo del CM por Integración Directa.....</b>	<b>37</b>
★ Alambre Recto Finito.....	37
★ Alambre Recto Infinito.....	38
Simetría del CM.....	39
★ Alambre Recto Semi-Infinito.....	39
★ Espira Circular.....	39
Caso Especial.....	40
Campo en el Centro de la Espira.....	40
★ Semiespira Circular.....	41
Campo en el Centro de la Semiespira.....	41
★ Interior de un Solenoide Finito.....	42
Solenoides.....	42
Paso de Hélice.....	42
Solenoides Ideal.....	42
Densidad de Espiras.....	42
Cálculo del CM.....	42
Interpretación Geométrica.....	43
Campo en los Extremos del Solenoide.....	44
Campo Fuera del Solenoide.....	44
★ Solenoide Ideal Infinito.....	44
★ Corriente Concatenada.....	45
★ Teorema o Ley de Ampere.....	46
<b>CM por Ampere.....</b>	<b>46</b>

★ Alambre Infinito.....	46
★ Solenoide Ideal Infinito.....	47
★ Solenoide Toroidal Ideal.....	48
Simetría Toroidal.....	48
Corriente y Dirección del CM.....	49
Cálculo del CM.....	49
Caso Límite - Toroide Estrecho.....	49
<b>T3: Inducción Electromagnética.....</b>	<b>51</b>
<b>Flujo Magnético.....</b>	<b>51</b>
★ Flujo en Sup Cerrada.....	51
★ Flujo en Sup Abierta.....	51
<b>Coeficientes de Inducción.....</b>	<b>51</b>
Flujo Magnético Concatenado.....	52
★ Coeficientes de Inducción Mutua.....	52
★ Coeficiente de Autoinducción.....	52
Unidad de Medida.....	52
<b>Ley de Inducción de Faraday.....</b>	<b>53</b>
Orientación de la FEM.....	53
Variación del Flujo Magnético.....	53
Aparición de un CE no Conservativo.....	53
Ley de Lenz.....	53
★ Ley de Faraday y Coeficientes de Inducción.....	54
Coeficiente de Autoinducción.....	54
Circuitos Magnéticamente Acoplados.....	54
★ DDP entre 2 Ptos de un Conductor en Mov respecto de un CM Uniforme y Cte.....	54
FM como CE no Conservativo.....	55
Equilibrio con un Campo Electrostático.....	55
Cálculo de la DDP.....	55
<b>Energía Magnética.....</b>	<b>56</b>
Comportamiento del Circuito con CC.....	56
Descarga del Circuito.....	56
Inductor y Ley de Lenz.....	57
Conservación de la Energía en el Circuito.....	57
<b>T4: Corriente Alterna.....</b>	<b>59</b>
★ Generador de Tensión Alterna.....	59
Representación Circuitual.....	59
Frecuencia y Periodo del Generador.....	59
<b>Circuitos con un Único Elto Pasivo.....</b>	<b>59</b>
★ Circuito Resistivo Puro - CPR.....	60
Corriente.....	60
Relación entre Tensión y Corriente.....	60
Potencia.....	60
Potencia Media/Potencia Activa.....	60
★ Circuito Capacitivo Puro - CCP.....	61
Corriente.....	61
Relación entre Tensión y Corriente.....	62
Potencia.....	62
Potencia Media.....	62
★ Circuito Inductivo Puro - CIP.....	63

Corriente.....	63
Relación entre Tensión y Corriente.....	63
Potencia.....	64
Potencia Media.....	64
CCP y CIP - Comportamiento con la Frecuencia.....	64
Cuadro Comparativo.....	65
<b>Tensión y Corriente Complejas - Impedancias.....</b>	<b>65</b>
Representación de Nros Complejos.....	65
★ Tensión y Corrientes Complejas.....	66
★ Ley de Ohm Generalizada.....	66
★ Impedancia.....	67
Relación Impedancia y Frecuencia.....	67
<b>Circuitos de una Sola Malla y 2 Eltos Pasivos.....</b>	<b>68</b>
★ Circuito RC - Resistor y Capacitor en Serie.....	68
Impedancia.....	68
Corriente.....	68
Relación entre Corriente, Tensión e Impedancia.....	68
Desfase - Corriente y Tensión.....	68
Representación Gráfica.....	69
Relación con la Frecuencia.....	69
★ Circuito RL - Resistor e Inductor en Serie.....	69
Impedancia.....	69
Corriente.....	69
Relación entre Corriente, Tensión e Impedancia.....	70
Desfase - Corriente y Tensión.....	70
Representación Gráfica.....	70
Relación con la Frecuencia.....	70
<b>Circuito RLC Serie.....</b>	<b>70</b>
Impedancia.....	70
Corriente.....	71
Frecuencia de Resonancia.....	71
Desfase - Corriente y Tensión.....	71
<b>Factor de Potencia, Potencias Reactiva y Aparente.....</b>	<b>72</b>
★ Potencia Activa/Real.....	72
★ Potencia Reactiva.....	73
Potencia Instantánea Total.....	73
Potencia Reactiva Instantánea.....	73
Potencia Reactiva:.....	74
★ Potencia Aparente.....	74
Importancia del Factor de Potencia.....	75

# T1: Corriente Continua - Estacionaria

## Corrientes Eléctricas Estacionarias

Anteriormente, estudiamos fenómenos electrostáticos, en los que las cargas eléctricas se encontraban en reposo, generando CEs que no dependían del tiempo. En esa situación, al no haber movimiento de cargas, el sistema era completamente estático.

Ahora, sin embargo, comenzamos a analizar fenómenos donde sí existe movimiento de cargas eléctricas. Esta área de estudio se llama **electrodinámica** y se enfoca en el análisis de los efectos y comportamientos de las cargas en movimiento.

Para que las cargas puedan moverse, deben encontrarse dentro de un medio que facilite dicho desplazamiento, como un **conductor**. Hasta ahora, hemos considerado conductores ideales, en los cuales el movimiento de las cargas es instantáneo debido a que el conductor no ofrece resistencia. Sin embargo, ahora trabajaremos con un modelo diferente: conductores reales, donde el movimiento de las cargas no es instantáneo, lo cual introduce nuevas consideraciones en el análisis del flujo de corriente.

★ **Corriente Eléctrica ( $i$ ):** Consideremos un conductor cilíndrico con sección transversal  $S$ , y  $\hat{n}$  el vector normal a  $S$ . Definimos a la corriente eléctrica ( $i$ ), como la cantidad de carga positiva que atraviesa  $S$  por unidad de tiempo.

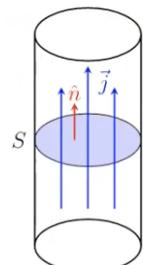
Si  $dQ$  es la carga que atraviesa a  $S$  en un intervalo  $dt$ , podemos expresar  $i$  como:

**Corriente Eléctrica**

$$i = \frac{dQ}{dt} [A]$$

Las cargas dentro del conductor se desplazan en la dirección de la corriente (*flechas azules en la imagen*). Es importante notar que si se tratara de cargas negativas, su movimiento sería en sentido contrario al de la corriente convencional, que por convención se basa en el desplazamiento de cargas positivas.

La unidad de corriente eléctrica es el ampere (A), que equivale a un coulomb por segundo.



**Ampere (A)**

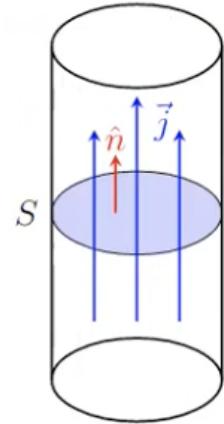
$$1 A = 1 \frac{C}{s}$$

## ★ Densidad de Corriente ( $\vec{j}$ ):

Para analizar cómo se distribuye la corriente en un pto específico dentro del conductor, introducimos el concepto de densidad de corriente ( $\vec{j}$ ), especialmente relevante en magnetismo.

**Densidad de Corriente ( $\vec{j}$ ):** corriente que atraviesa un elto diferencial de sup en el interior del conductor, orientada según un versor normal a dicha sup.

Si consideramos un pequeño diferencial de sup dentro del conductor ( $ds$ ), podemos expresar la corriente que atraviesa esta sup en términos de la densidad de corriente. La relación se describe por:



### Relación Diferencial entre $i$ y $\vec{j}$

$$di = \vec{j} \cdot \hat{n} \cdot ds$$

$$di = \vec{j} \cdot \overline{ds}$$

Se trata de un producto escalar. Si  $\vec{j} \parallel \hat{n}$ , se reduce al módulo de  $\vec{j}$ , porque al ser paralelos, su producto se convierte en el producto de sus módulos y el módulo de  $\hat{n}$  es uno, por ser versor. En este caso,  $di$  es máximo.

Sin embargo, si  $\vec{j} \perp \hat{n}$ , el resultado es cero, y la corriente sería nula. Es decir, no hay corriente que atraviese esa sup.

**Cálculo de la Corriente Total:** Para obtener la corriente total  $i$  que atraviesa toda la sup  $S$ , integramos la densidad de corriente sobre dicha sup. En otras palabras, la corriente total que atraviesa una sup abierta  $S$  está dada por el flujo del vector  $\vec{j}$ .

### Corriente Eléctrica a través de una Sup Abierta

$$i = \iint_S \vec{j} \cdot \hat{n} \cdot ds$$

Sería lo mismo que calcular el flujo del CE, solo que acá la sup es abierta, no cerrada.

**★ Conservación de la Carga:** En el caso de que la sup  $S$  sea cerrada, se puede realizar un balance entre la carga que ingresa o egresa del volumen interior de la misma. Esto se debe a que la carga eléctrica no puede crearse ni destruirse (por el ppto de conservación de la carga eléctrica).

Es decir, si en un volumen ingresa una cierta cant de carga neta, la carta total contenida en dicho volumen aumenta en la misma magnitud, o disminuye, en el caso de que la carga neta egrese hacia el exterior del volumen.

Entonces, si  $S$  es una sup cerrada en el espacio,  $\hat{n}$  su vector normal exterior,  $V(S)$  su volumen interior,  $Q$  la carga total contenida en  $V$ , y  $\rho$  la densidad volumétrica de carga distribuida en  $V$ , tendremos:

### Ecuación de Continuidad de la Carga Eléctrica

$$\oint_S \vec{j} \cdot \hat{n} \cdot ds = -\frac{dQ}{dt} \quad \left| \quad \oint_S \vec{j} \cdot \hat{n} \cdot ds = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \right.$$

Esta ecuación implica que cualquier flujo saliente de carga a través de la sup debe corresponder a una disminución de la carga en el interior del volumen. Por eso se iguala a  $-\frac{dQ}{dt}$ , o sea el flujo saliente es equivalente a la carga por unidad de tiempo que disminuye en el interior.

Por esta razón tbien, cuando el flujo es positivo la carga disminuye, pero si el flujo es negativo (*entran cargas*), la carga interior aumenta.

La otra igualdad tbien explica el mismo fenómeno, la densidad volumétrica de carga en el interior del volumen disminuye al tener un flujo saliente de cargas.

En un caso gral, tanto la densidad de corriente como la densidad volumétrica de carga pueden depender tanto de la posición en el espacio, dada por el pto fuente  $\bar{r}$ , como del tiempo. En el caso particular en el que ambas sean independientes del tiempo, decimos que estamos frente a *corrientes estacionarias*.

## ★ Naturaleza Estacionaria de la Corriente

Cuando hablamos de corrientes estacionarias, nos referimos a situaciones en las que ni la densidad de corriente  $\bar{j}$  ni la densidad volumétrica de carga  $\rho$  dependen del tiempo. En este caso, la variación temporal de la carga es nula  $(\frac{dQ}{dt} = 0)$ , y por lo tanto, el **flujo neto de corriente a través de cualquier sup cerrada** tbién debe ser nulo.

### Flujo de Corriente Estacionaria en Sup Cerrada

$$\oint_S \bar{j}_{est} \cdot \hat{n} \cdot ds = 0$$

Es decir, toda la carga que entra en una región cerrada debe salir al mismo ritmo. Entonces, siempre que la corriente sea estacionaria y la sup cerrada, el flujo de la corriente es nulo. Es una cond esencial para resolver circuitos de CC.

**Conductor Óhmico:** material que permite el movimiento de cargas eléctricas, aunque no de forma ideal. A diff de un conductor ideal, donde las cargas se mueven instantáneamente sin resistencia, en los conductores óhmicos se requiere tiempo para que las cargas se desplacen. Este tiempo de respuesta se debe a la resistencia interna del material.

En un conductor ideal, al no existir un CE interno, no hay ddp entre sus ptos, manteniéndose el potencial cte en todo su interior. Esto implica que no se requiere trabajo para mover una carga dentro de él, ya que la ddp —y, por ende, el trabajo— es nula.

En cambio, en los conductores óhmicos se requiere trabajo para mover las cargas, lo que implica un gasto de energía. Este modelo supone la existencia de un CE dentro del conductor que impulsa el movimiento de las cargas, generando una ddp entre los ptos del material que permite el flujo de corriente.

Hay una relación lineal entre la densidad de corriente  $\bar{j}$  y el CE  $\bar{E}$  del conductor en un pto interior del material.

### Ley de Ohm Diferencial

$$\bar{j} = \sigma \bar{E}$$

Esta relación implica que, pto por pto, un mayor CE generará una mayor densidad de corriente en el conductor; o caso contrario, un menor CE generará una menor densidad de corriente.

Su cte de proporcionalidad  $\sigma$ , denominada *conductividad eléctrica* del material, varía según su tipo. Se define tbien la *resistividad*  $\rho$ , como la inversa de su conductividad.

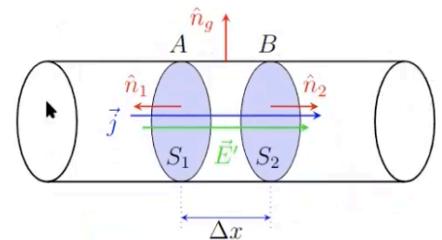
## Resistividad

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

## Conductor Óhmico, Conductividad Cte y Forma de Alambre

**Aclaración:** en la imagen aparece  $\vec{E}'$ , esto es un error, se trata de  $\vec{E}$ .

Supongamos un trozo de conductor óhmico con  $\sigma$  cte y forma de alambre con una sección transversal uniforme  $S$ , por el que circula una corriente estacionaria  $i$ .



El CE  $\vec{E}$  en su interior y la densidad de corriente  $\vec{j}$  (porque son proporcionales) deben ser paralelos al eje del alambre. Si existiera un componente perpendicular al CE, por la Ley de Ohm Diferencial se generaría una corriente transversal que acumularía cargas en la sup del alambre. Al no haber salida para ellas, la corriente dejaría de ser estacionaria, lo cual contradice la suposición inicial de que lo es.

Esto quiere decir que las secciones transversales al conductor (por ej:  $S_1$  y  $S_2$ ), son supers equipotenciales, ya que el campo es perpendicular a ellas.

Ahora, consideremos un pequeño cilindro imaginario de longitud  $\Delta x$ , con tapas  $S_1$  y  $S_2$ , y cuya generatriz coindice con la del conductor. Como  $\vec{j}$  es paralelo al eje del cilindro, su flujo a través de la sup lateral es cero.

$$\vec{j} \cdot \hat{n}_g = 0$$

De este modo, el flujo total de  $\vec{j}$  a través del cilindro se reduce a las tapas  $S_1$  y  $S_2$ . Para que la corriente sea estacionaria, el flujo de  $\vec{j}$  debe ser el mismo en ambas secciones, es decir, la corriente que atraviesa  $S_1$  debe ser igual (en módulo) a la que atraviesa  $S_2$ , ya que se trata de una sup cerrada.

$$\iint_{S_1} \vec{j} \cdot \hat{n}_1 \cdot ds + \iint_{S_2} \vec{j} \cdot \hat{n}_2 \cdot ds = 0$$

Como las normales  $\hat{n}_1$  y  $\hat{n}_2$  son opuestas, llamamos  $\hat{n} = \hat{n}_2$  a la normal que tiene la dir de la corriente y  $-\hat{n} = \hat{n}_1$  a la opuesta. Concluimos que la corriente es la misma en cualquier sección  $S$  del conductor.

$$i = \iint_S \vec{j} \cdot \hat{n} \cdot ds$$

Esto implica que  $\bar{j}$  no depende de la posición  $x$  a lo largo del alambre, y por lo tanto tampoco  $\bar{E}$  (por ser proporcionales). Por lo tanto, la ddp entre dos ptos A y B se calcula como:

Diferencia de Potencial	$\Delta V = V(A) - V(B)$
Planteamos la integral ya definida para calcularla.	$\Delta V = - \int_B^A \bar{E} \cdot d\bar{r}$
Como el campo no depende de $x$ , lo llevamos fuera de la integral.	$\Delta V = - \bar{E} \int_B^A d\bar{r}$
Resolvemos la integral del vector desplazamiento evaluada entre A y B.	$\Delta V = E \cdot \Delta x$
Como $\bar{E}$ y $\bar{j}$ son proporcionales, reemplazamos su relación en la fórmula planteada.	$\Delta V = \frac{\Delta x}{\sigma} j$

### DDP en un Conductor Óhmico

$$\Delta V = \frac{\Delta x}{\sigma} j$$

Para mantener la equipotencialidad de las sups transversales, el CE no puede variar con la dist radial al eje del alambre. Si  $\bar{E}$  fuera diff en el centro y otros ptos de la sección transversal, habría ddps diff en caminos paralelos, lo cual violaría la equipotencialidad de las superficies.

Por lo tanto, tanto  $\bar{E}$  como  $\bar{j}$  son campos uniformes en el interior del conductor (no dependen de las coordenadas geométricas), y la corriente total que circula a través del conductor se calcula como:

Corriente eléctrica a través de una sup.	$i = \iint_S \bar{j} \cdot d\bar{s}$
Como $\bar{j}$ es uniforme la sacamos fuera de la integral.	$i = \bar{j} \iint_S d\bar{s}$
Resolvemos la integral del diferencial de superficie sobre la superficie (su área), y llegamos a la expresión.	$i = j S$

### Corriente a través del Conductor Óhmico

$$i = j S$$

Teniendo en cuenta esto, podemos reformular la ecuación de la ddp.

### DDP en un Conductor Óhmico

$$\Delta V = \frac{\Delta x}{\sigma S} i$$

$$\Delta V = \frac{\Delta x}{\sigma} j$$

Encontramos una relación de proporcionalidad entre la ddp entre dos ptos de un conductor y la corriente que circula por él. Su factor de proporcionalidad se denomina *resistencia eléctrica R* del conductor.

## Resistencia Eléctrica del Conductor

$$R = \frac{\Delta x}{\sigma S} [\Omega]$$

$$R = \rho \frac{\Delta x}{S} [\Omega]$$

Así, la resistencia es proporcional a la long del conductor e inversamente proporcional a su sección transversal. Es decir, un conductor más grueso tendrá menor resistencia y un conductor más largo tendrá mayor resistencia.

La unidad de resistencia eléctrica es el ohm ( $\Omega$ ), que es equivalente a voltios sobre amperios.

### Óhm

$$1 \Omega = 1 \frac{V}{A}$$

En resumen, en un conductor óhmico, las cargas eléctricas se mueven gracias a la acción de un CE, que proporciona la fuerza necesaria para su desplazamiento. Por lo tanto, cuando hay corriente en el conductor, debe existir una ddp.

Así, se establece la relación fundamental conocida como la Ley de Ohm, que para un conductor cilíndrico homogéneo se expresa como:

### Ley de Ohm

$$\Delta V = R i$$

**Fuerza Electromotriz (f.e.m.):** Energía por unidad de carga que se suministra a las cargas eléctricas que circulan en un circuito. Es un concepto fundamental en el estudio de circuitos eléctricos, y para comprenderla es esencial considerar la naturaleza de los CE involucrados en un circuito.

**Revisión Rápida - Campos Conservativos:** En un sist electrostático, el CE es conservativo, lo que significa que el trabajo realizado al mover una carga entre dos puntos no depende de la trayectoria seguida, solo de la ddp entre ellos. En este ctx, si comenzamos desde un punto *A* y regresamos a él, la ddp es nula.

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{r} = 0$$

## ★ Circulación de Corriente en Conductores

Para que haya circulación de corriente en un conductor, no debe haber acumulación de carga en ningún pto del mismo. Si el conductor termina, donde empieza y termina no podría circular corriente; se disminuiría la carga en una región y aumentaría en la otra. Esto implica que el conductor debe ser, en esencia, **infinito o cerrado** para que haya corriente y esta sea estacionaria.

Como solemos tratar con conductores finitos, los representamos mediante una curva cerrada orientada (o circuito) *C* por el cuál circula una corriente estacionaria *i*. No nos interesa su espesor, sólo la orientación de la curva, que coincide con el sentido de circulación de la corriente.

Si solo existiera el campo electrostático en el circuito, tendríamos:

Circulación del CE conservativo a través del

$$0 = \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{r}$$

circuito.	
Aplicamos la Ley de Ohm Diferencial.	$0 = \rho \oint_C \vec{j} \cdot d\vec{r}$
Como $\vec{j}$ es paralelo a $d\vec{r}$ en todo pto del circuito y su módulo es cte, valiendo $j = \frac{i}{S} \dots$	$0 = \rho \frac{i}{S} \oint_C d\vec{r}$
Resolvemos la integral del vector desplazamiento, resultando en la long $l$ del circuito.	$0 = \rho \frac{l}{S} i$
Como la longitud y la resistividad no pueden ser nulas, se deduce...	$i = 0$

Es decir, un campo electrostático no puede producir una corriente estacionaria en un circuito.

**Necesidad de un Campo no Conservativo:** La presencia de una corriente estacionaria requiere la existencia de un CE no conservativo, que denominamos  $\vec{E}'$ , tal que su circulación a través del circuito sea no nula. Denominamos a su valor la fuerza electromotriz (f.e.m.)  $\varepsilon$  del circuito  $C$ .

### Fuerza Electromotriz (f.e.m.)

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{r} [V]$$

Es decir que, el CE  $\vec{E}'$  que produce el movimiento de las cargas en el circuito no puede reducirse al campo electrostático. Tiene que necesariamente haber otra contribución al CE de naturaleza no electrostática.

Esta contribución proviene de fuerzas electrodinámicas (Ley de Faraday) y potenciales químicos (baterías). Para que estas fuerzas estén presentes en el circuito no basta con el conductor óhmico, son necesarias fuentes de esta energía.

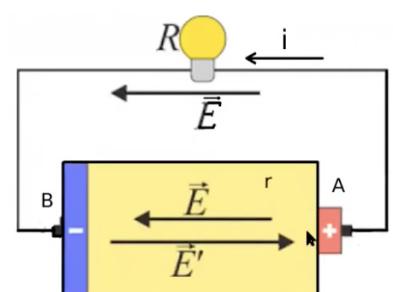
### Fuentes de F.E.M. : La f.e.m. se genera en fuentes de energía como baterías o generadores de tensión.

Estos dispositivos crean una ddp cte entre dos ptos, o bornes, a los cuales se conecta un conductor óhmico, formando un circuito que también puede incluir una resistencia (a veces representada por una lámpara).

En el conductor óhmico del circuito, solo existe el campo electrostático  $\vec{E}$ , generado en cada instante por la ddp entre los bornes de la batería. Sin embargo, dentro de la batería, además del campo electrostático, existe un CE no electrostático  $\vec{E}'$ , que tbien influye en el movimiento de las cargas.

$\vec{E}$  siempre se orienta hacia la zona de menor potencial, es decir, desde el borne positivo al negativo, tanto en el conductor como dentro de la batería. Esto implica que su circulación a lo largo del circuito sea nula. Según la ley de Ohm diferencial, la densidad de corriente sigue esta misma dir, así que la corriente tbien va de borne positivo a negativo.

Por otro lado, el CE no electrostático  $\vec{E}'$ , que se presenta únicamente dentro de la batería, tiene una dir opuesta: *va del borne negativo al positivo*. Este campo permite que las cargas se desplacen en su dir dentro de la batería, incrementando así su potencial eléctrico.



Este trabajo contra el campo electrostático dentro de la batería asegura que las cargas puedan continuar su recorrido en el circuito externo.

**F.E.M. y Corriente en Batería Real:** Volvamos a expresar la circulación de  $\bar{E}$ .

Circulación del CE conservativo a través del circuito.	$0 = \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{r}$
Separamos los trayectos en el conductor óhmico y en la batería.	$0 = \int_A^B \bar{E}_{cond} \cdot d\bar{r} + \int_A^B \bar{E}_{bat} \cdot d\bar{r}$
Aplicamos la Ley de Ohm Diferencial en el conductor y resolvemos la integral en la batería.	$0 = \rho \oint_C \bar{j} \cdot d\bar{r} + V(B) - V(A)$
Como $\bar{j}$ es paralelo a $d\bar{r}$ en todo pto del circuito y su módulo es cte, valiendo $j = \frac{i}{S}$ .	$0 = \rho \frac{i}{S} \oint_C d\bar{r} + V(B) - V(A)$
Resolvemos la integral del vector desplazamiento, resultando en la long $l$ del circuito	$0 = \rho \frac{l}{S} i + V(B) - V(A)$
Reobtenemos la Ley de Ohm.	$V(A) - V(B) = R i$

Por otra parte, en el interior de la batería, y siendo  $r$  la resistencia interna de la batería:

Considerando que es un medio de resistividad $\rho'$ .	$\bar{E} + \bar{E}' = \rho' \bar{j}$
Integramos la ecuac de $B$ hasta $A$ (mismo sentido de circulación de la corriente).	$\int_A^B \bar{E}_{bat} \cdot d\bar{r} + \int_A^B \bar{E}'_{bat} \cdot d\bar{r} = \rho' \int_A^B \bar{j} \cdot d\bar{r}$
Resolviendo el 2do miembro, observamos que $\bar{j}$ e $i$ se mantienen ctes, lo cual asegura que la carga eléctrica se conserva.	$\int_A^B \bar{E}_{bat} \cdot d\bar{r} + \int_A^B \bar{E}'_{bat} \cdot d\bar{r} = r i$
Reducimos la integral de $\bar{E}'$ a la f.e.m., y la de $\bar{E}$ a la ddp.	$V(B) - V(A) + \varepsilon = r i$

Relacionando ambas ecuaciones obtenidas, obtenemos la ecuación que relaciona la f.e.m. con la corriente circulante en el circuito.

**Fuerza Electromotriz y Corriente en Batería Real**

$$\varepsilon = (R + r) i$$

Esto implica que, en un modelo real de batería, la resistencia interna afecta la ddp observada en el circuito. Como si se tratase de una resistencia en serie.

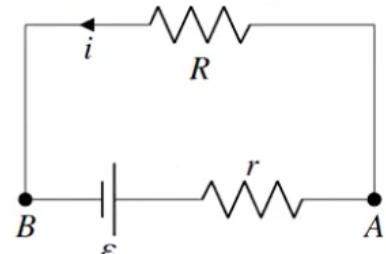
**F.E.M. y DDP en Batería Ideal:** En una batería ideal, con resistencia interna nula, la ddp entre bornes es siempre igual a la f.e.m, independientemente de la corriente que circule.

## Fuerza Electromotriz y DDP en Batería Ideal

$$\varepsilon = V(A) - V(B)$$

Aquí, los campos opuestos  $\overline{E}$  y  $\overline{E'}$  en el interior de la batería son de la misma magnitud, y por lo tanto  $\overline{E'}$  tiene menor intensidad que en baterías reales.

**Representación en el Circuito Eléctrico:** Al conductor ohmico se lo representa mediante un resistor  $R$ , y a la batería ideal mediante una f.e.m. (*dos líneas, siendo el borne positivo la más larga*), una resistencia interna  $r$  y los bornes  $A$  y  $B$ .



## ★ Análisis Energético - F.E.M. en un Circuito

Consideremos un circuito sencillo que incluye una batería ideal ( $r = 0$ ) y una resistor  $R$ . Si no fuera ideal la batería, solo habría que sumar su resistencia interna al circuito. También se puede considerar que la resistencia de la batería ya se encuentra dentro del circuito considerado.

**Distribución de Potencias en el Circuito:** Existen 3 formas de potencia involucradas en un circuito con f.e.m. .

**1) Potencia Entregada por la F.E.M. ( $\overline{E'}$ ):** El trabajo realizado por el campo  $\overline{E'}$  para llevar una cierta cantidad de carga  $\delta q$  desde el borne negativo  $B$  hasta el positivo  $A$ , lo denominamos  $\delta W'$ . Este se realiza contra  $\overline{E}$  y es positivo, ya que la carga debe aumentar su energía potencial. De modo que:

Relación entre Trabajo y Potencial	$\delta W' = \delta q \cdot \Delta V$
Definición de Potencial	$\delta W' = \delta q (V(A) - V(B))$
Como se trata de una batería ideal, podemos usar la relación entre f.e.m. y ddp.	$\delta W' = \delta q \cdot \varepsilon$

## Trabajo Diferencial - $\overline{E'}$ en la Batería

$$\delta W' = \delta q \cdot \varepsilon$$

La potencia asociada a este trabajo, o sea la tasa a la que se realiza este trabajo, se calcula como:

Trabajo diferencial de $\overline{E'}$ en la batería	$\delta W' = \delta q \cdot \varepsilon$
--	--

Dividimos todo por diferencial de tiempo, generando la potencia de f.e.m.	$P_{\varepsilon} = \frac{\delta W'}{\delta t} = \frac{\delta q}{\delta t} \varepsilon$
Como la cantidad de carga por unidad de tiempo que circula es la corriente eléctrica.	$P_{\varepsilon} = i \varepsilon$

### Potencia - $\bar{E}$ en la Batería

$$P_{\varepsilon} = i \varepsilon [W]$$

2) Potencia Entregada por  $\bar{E}$  en la Batería:  $\bar{E}$  realiza un trabajo  $\delta W$  de signo contrario al anterior.

Relación entre Trabajo y Potencial	$\delta W = - \delta q \cdot \Delta V$
Definición de Potencial	$\delta W = - \delta q (V(A) - V(B))$
Como se trata de una batería ideal, podemos usar la relación entre f.e.m. y ddp.	$\delta W = - \delta q \cdot \varepsilon$

### Trabajo Diferencial - $\bar{E}$ en la Batería

$$\delta W = - \delta q \cdot \varepsilon$$

El signo negativo de este trabajo indica que hay un aumento de la energía potencial electrostática de la carga transportada dentro de la batería (ya mencionado arriba), el cual se produce a expensas de la energía que entrega la f.e.m..

La potencia asociada a este trabajo, desarrollada por el campo electrostático en la batería:

Trabajo diferencial de $\bar{E}$ en la batería.	$\delta W = - \delta q \cdot \varepsilon$
Dividimos todo por diferencial de tiempo, generando la potencia de $\bar{E}$ .	$P_E = \frac{\delta W}{\delta t} = - \frac{\delta q}{\delta t} \varepsilon$
Como la cantidad de carga por unidad de tiempo que circula es la corriente eléctrica.	$P_E = - i \varepsilon$

### Potencia - $\bar{E}$ en la Batería

$$P_E = - i \varepsilon$$

3) Potencia Entregada por  $\bar{E}$  en el Conductor: Una vez que las cargas salen de la batería y circulan por el conductor ohmico de resistencia  $R$ ,  $\bar{E}$  actúa sobre ellas. Este campo realiza un trabajo  $\delta W_R$  sobre las cargas para moverlas por el conductor, generando calor como resultado de la resistencia del material.

Relación entre Trabajo y Potencial	$\delta W = - \delta q \cdot \Delta V$
------------------------------------	--

Definición de Potencial	$\delta W = - \delta q (V(A) - V(B))$
Reemplazamos con la Ley de Ohm	$\delta W = \delta q R i$

## Trabajo Diferencial - $\bar{E}$ en el Conductor

$$\delta W = \delta q R i$$

La potencia entregada por  $\bar{E}$  para transportar las cargas por el conductor óhmico es:

Trabajo diferencial de $\bar{E}$ en el conductor.	$\delta W = \delta q R i$
Dividimos todo por diferencial de tiempo, generando la potencia de $\bar{E}$	$P_R = \frac{\delta W_R}{\delta t} = \frac{\delta q}{\delta t} R i$
Como la cant de carga por unidad de tiempo que circula es la corriente eléctrica.	$P_R = i^2 R$

## Potencia - $\bar{E}$ en el Conductor

$$P_R = i^2 R$$

Esta se disipa en forma de calor en el conductor óhmico.

**Potencia Total en el Circuito:** Al sumar las tres potencias encontradas, obtenemos la potencia total entregada al sist de cargas. La suma de las potencias generadas por el campo electrostático debe ser nula, ya que se trata de un campo conservativo y las cargas regresan al mismo pto. Esto se verifica tbien por la Ley de Ohm.

Por lo tanto, la potencia total  $P$  entregada al sistema de cargas será:

## Potencia Total del Circuito

$$P = i^2 R$$

$$P = i \varepsilon$$

Este equilibrio refleja que toda la energía suministrada por la f.e.m. se disipa en forma de calor en el conductor, en cumplimiento con el 2do ppio de la termodinámica.

## Intercambio de Energía en el Circuito

- \* Interior de Batería:  $\bar{E}'$  proporciona energía a  $\bar{E}$ , incrementando la energía potencial de las cargas.
- \* Interior de Conducto Óhmico:  $\bar{E}$  pierde la energía recibida al entregarla a las cargas para transportarlas por el circuito.

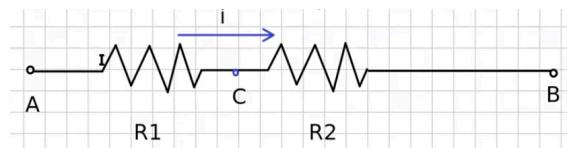
Aquí,  $\bar{E}$  actúa como un intermediario que toma la energía de  $\bar{E}'$  y se la entrega a las cargas para producir corriente.

La energía que ctamente reciben las cargas se disipa en forma de calor dentro del conductor. Por esa razón la velocidad media de las cargas dentro del conductor es cte, porque no se aumenta su energía cinética por el aumento de energía.

**Configuración de Resistencias:** En un circuito de CC se utiliza una fuente de alimentación, como una batería, que aporta una f.e.m. para hacer circular la corriente. Estos circuitos contienen elementos pasivos, como los resistores, cada uno con un conductor óhmico y una resistencia eléctrica específica.

Vamos a analizar dos configuraciones básicas de resistores: resistencias en serie y resistencias en paralelo.

★ **Resistencias en Serie:** Dos conductores óhmicos ( $R_1$  y  $R_2$ ) colocados de manera tal que la corriente que fluye a través de ambos es la misma (uno detrás del otro).



Esto significa que el circuito debe estar cerrado para que circule la corriente, ya que de lo contrario se acumularía carga en los puntos de conexión. En esta config, la corriente que circula, denotada como  $i$ , es cte a lo largo del circuito.

Para encontrar la resistencia equivalente:

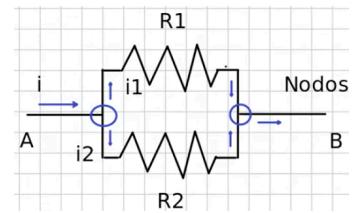
DDP entre los extremos del circuito, va de A a B (mayor a menor potencial).	$\Delta V = V_{AB}$
Elegimos un pto intermedio C entre $R_1$ y $R_2$ , con potencial intermedio tbien. Como el potencial no depende del camino, obtenemos...	$V_{AB} = V_{AC} + V_{CB}$
Reemplazamos con la Ley de Ohm.	$V_{AB} = R_1 i + R_2 i$
Hacemos un factor común.	$V_{AB} = (R_1 + R_2) i$
Hallamos la resistencia equivalente.	$R_{eq} = R_1 + R_2$

En gral, agregar resistencias en serie aumenta la resistencia total del circuito, haciendo que sea más difícil para la corriente fluir.

Resistencia en Serie	$R_{eq} = R_1 + R_2$
DDP en Serie	$V_{AB} = (R_1 + R_2) i$
Corriente en Serie	$i_{eq} = i_1 = i_2$

★ **Resistencias en Paralelo:** Resistores comparten la misma ddp, pero la corriente se divide.

Los ptos de unión de las ramas se llaman nodos, y es aquí donde la corriente total  $i$  se divide en dos corrientes,  $i_1$  e  $i_2$ , correspondientes a cada resistencia  $R_1$  y  $R_2$ . En otro se vuelven a juntar, obteniendo de nuevo a  $i$ .



La Ley de Conservación de la Carga establece que toda la carga que entra al nodo debe salir, por lo que la corriente total es la suma de las corrientes en cada rama:

### Corriente en Paralelo

$$i = i_1 + i_2$$

Para obtener la resistencia equivalente:

Corriente con resistencias en paralelo.	$i = i_1 + i_2$
Reemplazamos con la Ley de Ohm	$\frac{V_{AB}}{R_{eq}} = \frac{V_{AB}}{R_1} + \frac{V_{AB}}{R_2}$
Cancelamos $V_{AB}$ de ambos lados de la ecuación.	$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

### Resistencia en Paralelo

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Agregar resistencias en paralelo disminuye la resistencia eq total, permitiendo que una mayor cant de corriente fluya a través del sist.

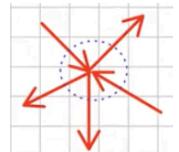
### Comparación: Serie y Paralelo

- \* Serie:  $R_{eq}$  mayor que cada una de las resistencias individuales.
- \* Paralelo:  $R_{eq}$  menor que cada una de las resistencias individuales.

**Leyes de Kirchhoff:** Para analizar circuitos de CC, utilizamos las leyes de Kirchhoff. Estas leyes, fundamentales para la resolución de circuitos eléctricos, permiten calcular las corrientes y tensiones en cada elto del circuito.

**★ Ley de Nodos - Continuidad de Carga:** La suma algebraica de las corrientes que concurren a un nodo, considerando su dirección y signo, es nula. Es decir, la suma de corrientes entrantes debe igualar a la suma de corrientes salientes. Esto implica que la carga no se acumula en el nodo.

Se debe elegir un sentido (entrante o saliente) como positivo.



## Ecuación de Nodo

$$i_1 + i_2 + \dots + i_n = 0$$

$$\sum i_{\text{saliente}} = \sum i_{\text{entrante}}$$

★ Ley de Mallas - Carácter Conservativo de  $\vec{E}$ : la suma de todas las ddp a lo largo de una malla debe ser nula.

**Malla:** camino cerrado orientado, circuito.

## Ecuación de Malla

$$\sum ddp_C = 0$$

Esta prop se debe al carácter conservativo del campo electrostático: en un conductor ohmico,  $\vec{E}$  genera la ddp, y debido a su naturaleza conservativa, la ddp total a lo largo de un circuito cerrado es nula.

**Resolución - Paso por Paso:** Para resolver una malla, elegimos una dir arbitraria para la corriente (como el sentido horario) y sumamos las ddps a lo largo de todo el recorrido. Si al final obtenemos un valor negativo, esto significa que la corriente fluye en sentido opuesto al elegido inicialmente; no afecta los cálculos.

Podemos sumar de 2 maneras:

1. Sumando Caídas de Potencial: caída de potencial (positiva) y subida (negativa).
2. Sumando Subidas: al revés.

Al recorrer la malla en el sentido elegido, comenzamos en un pto arbitrario (por ej, A) y volvemos al mismo pto, sumando todas las caídas o subidas de potencial, según el método que hayamos elegido. Al final, igualamos esta suma a cero.

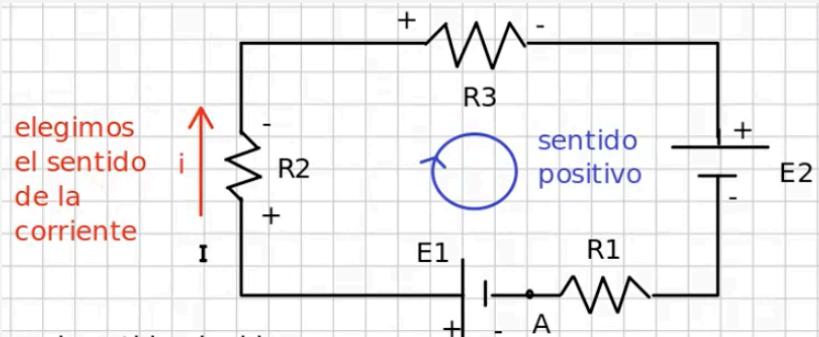
\* Resistencias: Al atravesar una resistencia en el sentido de la corriente, ocurre una caída de potencial debido a la Ley de Ohm, donde la ddp en el resistor equivale

$$\Delta V = R i$$

\* Fuentes de Voltaje: En el caso de una batería, al pasar del borne negativo al positivo hay un incremento de potencial, y al pasar del positivo al negativo ocurre una disminución de potencial.

### EJEMPLO:

$$-E_1 + iR_2 + iR_3 + E_2 + iR_1 = 0$$

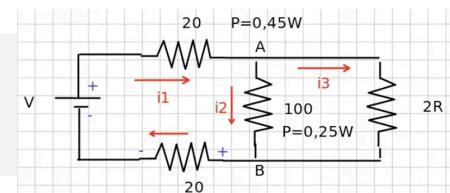


**Resolución de Circuitos Complejos con Kirchhoff:** Para resolver un circuito con varios nodos y mallas:

1. Ecuaciones de Nodo: Para un circuito con  $n$  nodos, solo necesitamos plantear  $n - 1$  ecuaciones de nodo. El último nodo se determina a partir de los anteriores, por lo que no es necesario incluir una ecuación para él.  
Si hay  $n$  nodos, hay  $n - 1$  nodos independientes.
2. Ecuaciones de Malla: Para cada malla independiente en el circuito, se plantea una ecuación de malla. Si el circuito es plano, el nro de ecuaciones de malla es igual al nro de huecos o espacios entre los lados del circuito.

#### EJEMPLO:

- \* Hay 2 nodos, y uno solo de ellos es independiente.
- \* Hay 3 mallas, siendo 2 independientes.



**Rama:** camino abierto entre dos nodos, sin pasar por ningún otro. Por cada una circula una corriente, que denominamos corriente de rama ( $i_R$ ).

## Análisis de Circuitos - Método de las Ramas

1. Identificación de Ramas: determinar cuántas ramas tiene el circuito.
2. Asignación de Corrientes: asignar una corriente a cada rama. De manera arbitraria, elegir la dir de la corriente; si el cálculo resulta negativo, indica que la corriente fluye en la dir opuesta a la asumida.
3. Ley de Nodos: La aplicamos, estableciendo ecuaciones que relacionan las corrientes en las ramas.
4. Ley de Mallas: La aplicamos.
5. Resolución de Ecuaciones: Se plantean las ecuaciones a partir de (3) y (4), y se resuelven para encontrar los valores de corriente y voltaje en las diff partes del circuito.

## Cálculo de Voltaje - Método Potencia Total Disipada

1. Identificar las Resistencias y sus Potencias Disipadas: En un circuito, cada resistencia disipa una cierta cant de potencia que puede medirse, lo hacemos.

$$P = i^2 R$$

2. Sumar las Potencias Disipadas: La potencia total disipada en el circuito es la suma de las potencias disipadas en cada resistencia.

$$P_{total} = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

3. Calcular Potencia de la Batería

$$P_{bat} = V \cdot i_{bat}$$

4. Igualar Potencias: La potencia total disipada en las resistencias debe ser igual a la potencia entregada por la batería o fuente de voltaje en el circuito, ya que la energía que aporta la fuente se disipa en forma de calor en las resistencias.

$$P_{total} = V \cdot i_{bat}$$

5. Despejar el Voltaje: Conociendo la potencia total disipada y la corriente total, despejamos el voltaje.

$$V = \frac{P_{total}}{i_{total}}$$

**Instrumentos de Medición:** Los más comunes son voltímetros y amperímetros. Estos permiten medir la ddp y la corriente en un circuito, respectivamente.

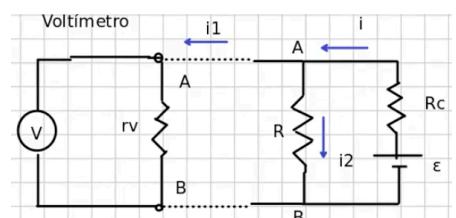
★ **Voltímetro**: Se conecta entre dos ptos de un circuito para medir la ddp entre ellos. Tiene una resistencia interna  $R_V$  que se encuentra en paralelo con el dispositivo.

## Real vs Ideal

- \* **Ideal**: tiene  $R_V$  infinita, por ende no afecta al circuito y no fluye corriente a través del voltímetro. En este caso, se mide la ddp real entre los ptos seleccionados del circuito.
- \* **Real**:  $R_V$  es finita, por lo que al conectarlo toma corriente del circuito. Esto implica que la corriente total  $i$  del circuito se divide en dos caminos: uno a través del voltímetro y otro a través de la resistencia a medir. Esto causa que la ddp medida sea menor que la ddp real sin el voltímetro conectado.

Para obtener lecturas precisas,  $R_V$  debe ser al menos 100 veces mayor que la resistencia a medir.

**Medición con Voltímetro**: En un circuito que contiene una resistencia  $R$  a medir, y una resistencia eq  $R_C$  que representa las demás resistencias, la corriente sin el voltímetro se calcula mediante la ley de Ohm:



## Corriente con Voltímetro Ideal

$$i = i_2 = \frac{\epsilon}{R + R_C}, \quad i_1 = 0$$

Siendo la ddp, simplemente  $i \times R$ :

## DDP con Voltímetro Ideal

$$V_{AB} = \frac{R}{R + R_C} \varepsilon$$

**Impacto de Voltímetro Real:** Cuando se conecta un voltímetro real, su  $R_V$  queda en paralelo con  $R$ . Esto genera una resistencia eq  $R'$  entre  $A$  y  $B$ , calculada como:

## Resistencia con Voltímetro Real

$$R' = \frac{R \cdot R_V}{R + R_V}, \quad R' < R$$

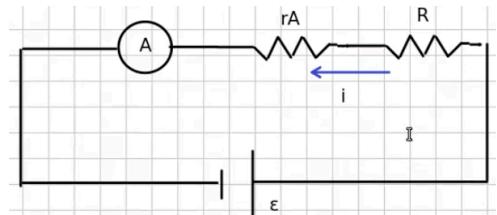
La resistencia  $R'$  es menor que  $R$ , lo que aumenta la corriente total del circuito. Por esta razón, la ddp medida por el voltímetro será menor que la ddp sin su conexión.

$$V'_{AB} = i_2 R = i_1 R_V = i R'$$

## DDP con Voltímetro Real

$$V'_{AB} = \frac{R'}{R' + R_C} \varepsilon, \quad V'_{AB} < V_{AB}$$

**★ Amperímetros:** Mide la corriente en un circuito, es decir, mide la corriente que lo atraviesa. Idealmente, su resistencia interna es nula para no afectar la medición, pero en la práctica tiene una resistencia  $R_A$ , que se conecta en serie con el circuito. Para minimizar su impacto en la corriente medida,  $R_A$  debe ser lo más pequeña posible.



Si el amperímetro fuera ideal, siendo  $R$  la resistencia total, la corriente  $i$  sería:

## Corriente con Amperímetro Ideal

$$i = \frac{\varepsilon}{R}$$

Sin embargo, con un amperímetro real, la corriente se reduce ligeramente a:

## Corriente con Amperímetro Real

$$i' = \frac{\varepsilon}{R + R_A}, \quad i' < i$$

Porque  $R_A$  aumenta el denominador, disminuyendo el valor de la corriente medida.

**Capacitor en Circuitos:** Tiene un comportamiento diff según el estado del circuito, que puede ser estacionario o transitorio.

**Régimen Estacionario - Estado “Descansando”:** El circuito es cte, las corrientes y tensiones ya no cambian con el tiempo.

El capacitor se terminó de cargar por completo, y actúa como un circuito abierto (como un “interruptor apagado” en esa rama del circuito). Esto significa que NO permite el paso de corriente en su rama y podemos ignorarla, ya que el capacitor no afecta la distribución de corrientes.

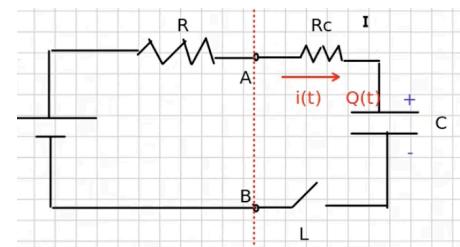
Si hubiera paso de corriente por él, se acumularía carga en la placa, haciendo imposible un estado estacionario.

**DDP y Tensión en el Estacionario:** La ddp entre los terminales del capacitor es la misma que la del circuito en los ptos donde está unido. En este pto, ya que no hay corriente fluyendo a través del capacitor, la tensión se mantiene cte.

**★ Régimen Transitorio - Estado de “Carga”:** Cuando un capacitor se conecta a un circuito, inicia un proceso de carga en el cual tanto la corriente como el voltaje varían con el tiempo.

Para regular la velocidad de esta carga y evitar que sea instantánea, se añade una resistencia en serie con el capacitor, denominada *resistencia de carga* ( $R_c$ ), que reduce la corriente inicial.

Debería ser mayor que otras resistencias del circuito, de modo que sea la ppal determinante de la velocidad de carga del capacitor.



Para analizar el circuito completo, consideramos una resistencia eq  $R$  que representa las demás resistencias desde el POV de los nodos  $A$  y  $B$ , junto con una llave de control  $L$  que permite o bloquea el flujo de corriente hacia el capacitor. En este ctx,  $R$  y  $R_c$  quedan en serie.

En un circuito abierto, no hay circulación de corriente por las placas del capacitor, sino se quema.

**Polaridad del Capacitor:** la establecemos midiendo la ddp entre sus ptos de conexión al circuito. Si entre los ptos  $A$  y  $B$  la ddp es positiva, la placa conectada a  $A$  es positiva, y la conectada a  $B$  es negativa. Sino, al revés.

## Proceso de Carga de un Capacitor

Planteamos una ecuación de malla. Por ej, partiendo desde $B$ .	$V - i(t)(R + R_c) - V_c(t) = 0$
Como ya dijimos, al cargarse el capacitor, la corriente y la ddp varían. $C$ es la capacidad del capacitor.	$V_c(t) = \frac{Q(t)}{C}$
Establecemos una relación entre la corriente y la variación de carga del capacitor.	$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$

Como condición inicial, planteamos que el capacitor está descargado.

$$Q(t = 0) = 0$$

### DDP en Capacitor

$$V_c(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

### Corriente en Capacitor

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

### Carga Inicial del Capacitor

$$Q(t = 0) = 0$$

Reuniendo todo lo hallado, encontramos que la evolución de carga en el capacitor está descrita por una EDO de 1er orden, lineal y no-homogénea.

### Ecuación Diferencial para la Carga

$$V = \frac{dQ(t)}{dt} (R + R_c) + \frac{Q(t)}{C}$$

**Definir la SG:** la solución general de la Ecuación Diferencial para la Carga, sería la suma de:

- \*  $Q_h(t)$ : solución de la ecuac homogénea asoc. Representa cómo la carga varía con el tiempo en ausencia de una fuente de voltaje.

EDO homogénea a resolver.	$\frac{dQ(t)}{dt} (R + R_c) + \frac{Q(t)}{C} = 0$
La acomodamos para facilitar la resolución.	$\frac{dQ(t)}{Q} = - \frac{dt}{(R+R_c)C}$
Integramos, siendo $k$ una cte arbitraria.	$\ln(Q) = - \frac{t}{(R+R_c)C} + k$
Acomodamos la ecuación, redefiniendo la cte a $A = e^k$ .	$Q_h(t) = A e^{-\frac{t}{(R+R_c)C}}$

SH

$$Q_h(t) = A e^{-\frac{t}{(R+R_c)C}}$$

- \*  $Q_e$ : SP que corresponde al régimen estacionario. Representa el momento en que el capacitor alcanza su carga máxima y la corriente en el circuito cesa. Es decir, cuando nada depende del tiempo.

$$\frac{dQ(t)}{dt} = 0$$

Reemplazando en la EDO, obtenemos la ecuac que representa la carga final del capacitor.

### Carga Final del Capacitor

$$Q_e = C \cdot V$$

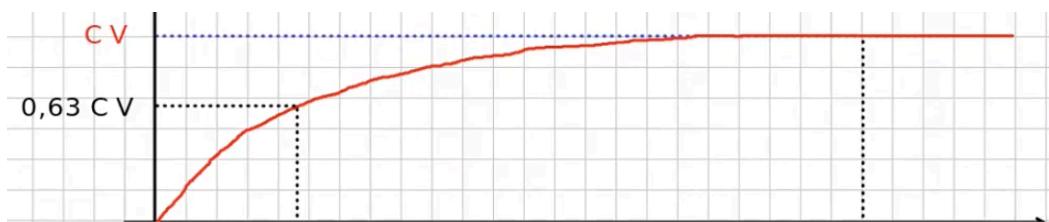
## Carga de un Capacitor en un Circuito Eléctrico

Obtenemos la SG sumando ambas soluciones.	$Q(t) = A e^{\left(-\frac{t}{(R+R_c)C}\right)} + C \cdot V$
Determinamos $A$ a través de la cond inicial.	$Q(0) = A + C \cdot V = 0$
Resolvemos...	$A = -C \cdot V$
Llegamos a la resolución del problema.	$Q(t) = C \cdot V \left(1 - e^{\left(-\frac{t}{(R+R_c)C}\right)}\right)$

### Carga de un Capacitor

$$Q(t) = C \cdot V \left(1 - e^{\left(-\frac{t}{(R+R_c)C}\right)}\right)$$

Notamos como  $Q(t)$  se aproxima siempre asintóticamente a su valor final.



En teoría, la carga nunca llega exactamente a su valor final; pero en la práctica para saber aprox cuándo el capacitor terminó de cargarse, usamos un valor llamado *tiempo característico* ( $\tau$ ).

### Tiempo Característico ( $\tau$ )

$$\tau = (R + R_c) C$$

En  $t = \tau$ , la carga alcanza  $1 - \frac{1}{e}$  de su valor final. Para los  $5\tau$  aprox, el capacitor alcanzó el 99.9% de su carga.

Reescribimos la ecuación de carga del capacitor teniendo en cuenta  $\tau$ .

### Carga de un Capacitor con $\tau$

$$Q(t) = C \cdot V \left(1 - e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}\right)$$

Derivando la expresión respecto del tiempo, obtenemos la corriente.

### Corriente en un Capacitor

$$i(t) = \frac{V}{R+R_c} e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

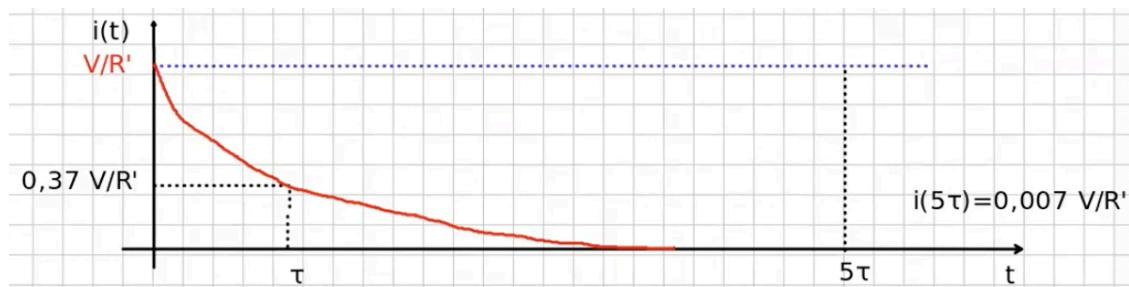
El valor inicial de la corriente es:

## Corriente Inicial - Sin Capacitor

$$i(0) = \frac{V}{R+R_c}$$

Lo que valdría si no estuviese el capacitor, aquí la corriente es máx. Esto ocurre porque, en  $t = 0$ , no hay ddp entre las placas del capacitor, lo que permite que las cargas se muevan sin resistencia adicional. Sin embargo, a medida que el capacitor se carga, las cargas positivas acumuladas en una de sus placas generan un CE con una ddp opuesta a la f.e.m., dificultando la llegada de nuevas cargas. Esto provoca que la corriente disminuya exponencialmente con el tiempo.

Después de  $5\tau$ , la corriente es prácticamente nula, y el capacitor alcanza un estado estable o de régimen estacionario.



**Balance de Energía:** Al analizar el balance de energía en un circuito que involucra una batería, una resistencia y un capacitor, es fundamental comprender cómo se distribuye la energía entregada por la batería y cómo se almacena en el capacitor.

### 1) Energía entregada por la Batería

Potencia entregada por la batería.	$P_\varepsilon = i \varepsilon$
Como en una batería ideal $\varepsilon$ es la ddp, la reemplazamos.	$P_\varepsilon = i V$
Integramos en función del tiempo, desde 0 hasta $\infty$ .	$E_b = \int_0^\infty i(t) \cdot V \cdot dt$
Reemplazamos $i(t)$ por la igualdad encontrada antes.	$E_b = \int_0^\infty \frac{V}{R+R_c} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot V \cdot dt$
Dejamos fuera de la integral todo lo que no depende de la variable de integración.	$E_b = \frac{V^2}{R+R_c} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot dt$
Resolvemos...	$E_b = \frac{V^2}{R+R_c} \cdot (R + R_c) C$

Llegamos al valor de la energía.

$$E_b = C V^2$$

## Energía Entregada por la Batería

$$E_b = C V^2$$

Resulta que la energía entregada por la batería es independiente de la resistencia del circuito.

2) **Energía almacenada en el Capacitor:** Ya la hemos definido en unidades anteriores. Más allá, es importante notar que se trata de la mitad de la energía entregada por la batería.

## Energía Almacenada en el Capacitor

$$U = \frac{C V^2}{2}$$

3) **Energía disipada en las Resistencias:** La otra mitad de la energía entregada por la batería se disipa como calor en las resistencias.

Potencia disipada en las resistencias.	$P_R = i^2 (R + R_c)$
Integramos en función del tiempo, desde 0 hasta $\infty$ .	$E_r = \int_0^{\infty} i^2 (R + R_c) \cdot dt$
Reemplazamos $i(t)$ , por la igualdad encontrada antes.	$E_r = \int_0^{\infty} \left( \frac{V}{R+R_c} \right)^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} \cdot (R + R_c) \cdot dt$
Dejamos fuera de la integral todo lo que no depende de la variable de integración.	$E_r = \left( \frac{V}{R+R_c} \right)^2 (R + R_c) \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} \cdot dt$
Resolvemos y llegamos al valor de la energía.	$E_r = \frac{C V^2}{2}$

## Energía Disipada en las Resistencias

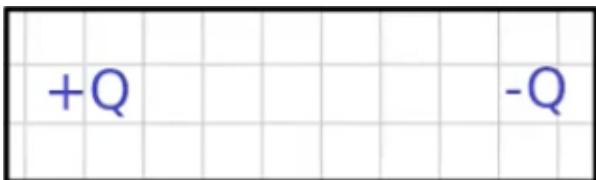
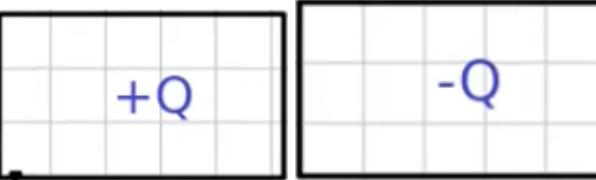
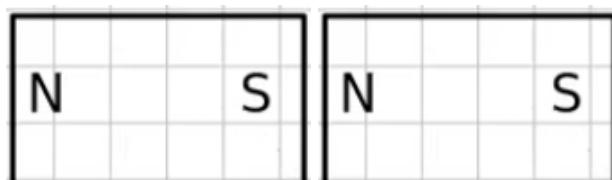
$$E_r = \frac{C V^2}{2}$$

**Eficiencia del Proceso:** En este proceso, la batería entrega toda su energía, de la cual la mitad se almacena en el capacitor y la otra mitad se disipa como calor en las resistencias, resultando en una eficiencia del 50%.

## T2: Magnetismo

**Introducción:** Si se parte un cuerpo con carga neta nula en dos partes iguales, es posible obtener dos cuerpos: uno con carga positiva y otro con negativa.

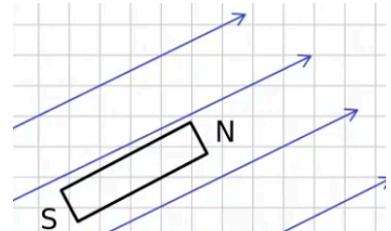
Por el contrario, si dividimos un imán que tiene un polo norte y un polo sur, cada mitad resultante se convierte en un nuevo imán completo, con su propio polo norte y sur. Es decir, *no existen "cargas magnéticas" independientes y los polos magnéticos no se pueden aislar*.

ELECTROSTÁTICA	MAGNETISMO
	
	

**Campo Magnético ( $B$ ):** Un imán genera a su alrededor un CM,

representado por líneas de campo que se extienden desde su polo norte hasta su polo sur. Cuando colocamos un imán en un CM externo, se orienta de manera que su polo norte apunta en la dir del campo, mientras que su polo sur en la opuesta.

El CM se simboliza con  $\vec{B}(\vec{r})$  (porque depende de la posición), y tbién se lo conoce como *"campo de inducción magnética"*. Es responsable de la atracción y repulsión entre los polos de diff imanes y de la orientación de materiales magnéticos en su proximidad.



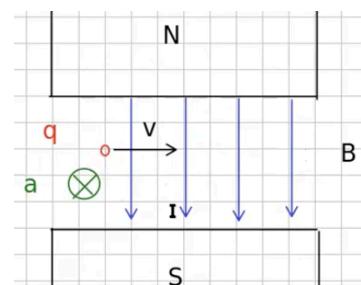
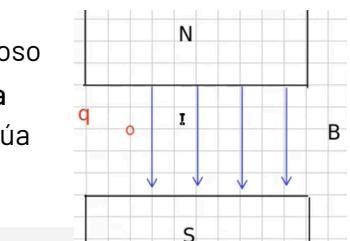
**Efecto del CM en Cargas Eléctricas:** Si colocamos una carga eléctrica en reposo en un CM, esta no experimentará ninguna fuerza. Sin embargo, **si la carga adquiere una velocidad inicial  $v$  respecto del imán**, sufrirá el efecto de la fuerza magnética. Esta actúa perpendicularmente a la dir del movimiento de la carga y a las líneas del CM.

$$\vec{F}_m \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{F}_m \cdot \vec{dr} = 0$$

Dado que la FM es siempre perpendicular a la velocidad de la partícula, *no realiza trabajo sobre ella*. Por ende, no cambia su energía cinética (su velocidad no aumenta ni disminuye), solo afecta su dir, haciendo que se desvíe. Logra esto generando una aceleración perpendicular a la carga (*en este caso entrante a la figura*).

Podemos denotar a la FM como  $\vec{F}_m$ , y expresarla de la sgte manera:



## Fuerza Magnética

$$\overline{F}_m = q \overline{v} \wedge \overline{B} [T]$$

Es decir, el producto vectorial entre el CM y el producto de la carga y la velocidad.

La unidad del CM es el Tesla (T), de modo que:

### Tesla (T)

$$1 T = 1 \frac{Ns}{Cm}$$

$$1 T = 1 \frac{Vs}{m^2}$$

**Relación entre Electricidad y Magnetismo:** Una corriente eléctrica (es decir, el movimiento de cargas eléctricas a través de un conductor) genera a su alrededor un CM. Como es a través de un conductor, tbien podemos considerar como fuente a los imanes.

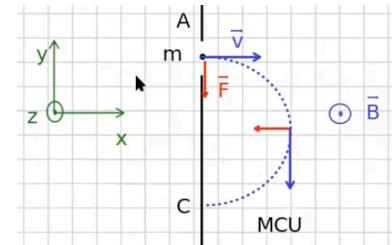
**Fuerza de Lorentz - Electromagnética:** Si en una región existen tanto un CE como un CM, una carga eléctrica en esa zona experimentará dos fuerzas: una FE y una FM. Mientras que la FE actuará independientemente de que la partícula esté en reposo o en movimiento, la FM solo lo hará si tiene una velocidad  $v$ , como ya dijimos.

La fuerza total que actúa sobre la carga es la suma de las dos fuerzas, conocida como la *fuerza de Lorentz* o *fuerza electromagnética*. Se expresa como:

### Fuerza de Lorentz

$$\overline{F} = q (\overline{E} + \overline{v} \wedge \overline{B})$$

★ **Espectrógrafo de Masas:** Dispositivo que permite separar isótopos de un mismo elemento según sus masas. Su funcionamiento se basa en el análisis de cómo los iones (átomos con carga) responden a un CM uniforme.



- Inicio del Proceso:** Un ion de masa  $m$  y carga  $q$  entra en el dispositivo con una velocidad inicial  $v$  en línea recta. Al llegar a la región con el CM, experimenta una FM perpendicular a su velocidad.
- Efecto del CM:** como la FM es perpendicular, esta actúa como una fuerza centrípeta que desvía la trayectoria del ion en una curva semicircular sin cambiar su velocidad.

Calculamos el radio de la curva de la sgte manera:

Planteamos la fuerza magnética.	$\overline{F}_m = q \overline{v} \wedge \overline{B}$
La FM como debe ser perpendicular a la $v$ , debe ir para abajo.	$\overline{v} =  v  \hat{i}$ $\overline{F} = - F  \hat{j}$
Por esta razón, llegamos a...	$\overline{B} =  B  \hat{k}$
El módulo del producto vectorial entre dos vectores perpendiculares es directamente el producto de sus	$F_m = q v B$

<b>módulos, por lo que el módulo de la fuerza...</b>	
<b>Planteamos la fuerza centrípeta.</b>	$\overline{F}_c = \frac{m \cdot V^2}{r}$
<b>Las igualamos.</b>	$\frac{m \cdot V^2}{r} = q v B$
<b>Resolvemos la ecuación y llegamos al radio de la curvatura.</b>	$R = \frac{m v}{q B}$

## Radio de Larmor

$$R = \frac{m v}{q B}$$

Este radio depende de la relación masa/carga, por lo que los iones con mayor masa tendrán radios más amplios, mientras que los más ligeros describirán círculos más pequeños para una velocidad y CM ctes.

3. **Separación de los isótopos:** Como el radio varía con la masa, cada isótopo del elto sigue una trayectoria diff y termina en un pto diff. Esto permite que el espectrógrafo separe los isótopos de acuerdo con sus masas.

**Frecuencia de Larmor (o del Ciclotrón):** Frecuencia angular del ion en su trayectoria. Dado que es inversamente proporcional a la masa, los isótopos más pesados se mueven a menor frecuencia (giran más lento). Esta frecuencia se calcula a partir de la velocidad y el radio de Larmor.

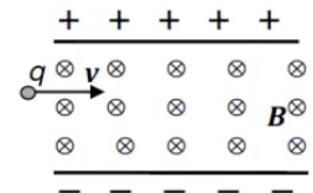
## Frecuencia de Larmor

$$\omega = \frac{q}{m} B$$

$$\omega = \frac{V}{R}$$

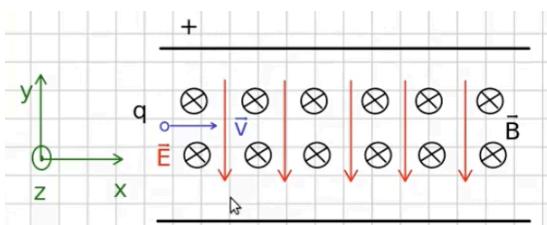
El problema consiste en hacer que todos los iones que ingresan al pto A lo hagan con la misma velocidad.

**★ Selector de Velocidades:** Dispositivo que selecciona cargas con una velocidad específica, ignorando aquellas más rápidas o lentas. Útil en equipos de análisis, como los espectrógrafos de masas, que necesitan partículas de una velocidad controlada para realizar mediciones precisas.



**Funcionamiento:** Se tienen dos campos perpendiculares entre sí:

1. **CE:** creado por las placas de un capacitor, genera una fuerza cte sobre la carga, dirigiéndola hacia la placa negativa. Son las flechas rojas, actuaría como la fuerza peso hacia abajo, generando una trayectoria parabólica hacia el "piso" (placa negativa).
2. **CM:** perpendicular al CE y a la velocidad de la carga. Genera una FM que actúa en la dir opuesta a la FE, dirigiendo la partícula a la placa positiva.



Para que la partícula siga una trayectoria recta sin desviarse hacia las placas, las fuerzas deben cancelarse. Esto ocurre solo para una velocidad específica, que llamamos *velocidad crítica*:

Planteamos la fuerza de Lorentz nula, así no se desvía la carga.	$\overline{F}_L = q(\overline{E} + \overline{v} \wedge \overline{B}) = 0$
Revisamos el estado vectorial de las fuerzas, notamos como la expresión tiene relación con el estado físico.	$\overline{E} = - E \hat{j}$ $\overline{v}(\hat{i}) \wedge \overline{B}(-\hat{k}) =  v  B \hat{j}$
Resolvemos la ecuación y llegamos a la igualdad de fuerzas.	$\overline{F}_m = -\overline{F}_e$
Resolvemos, llegando a la ecuación de la velocidad crítica.	$v = \frac{ E }{ B }$

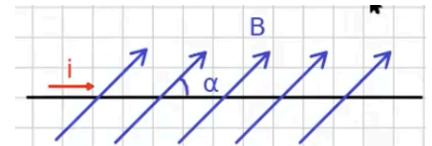
### Velocidad Crítica

$$v_c = \frac{|E|}{|B|}$$

Solo las partículas con velocidad crítica atraviesan la región sin desviarse. Las más rápidas irán hacia la placa positiva (por la FM), mientras que las más lentas a la placa negativa (por la FE).

## Fuerza Magnética sobre Conductores

Consideremos un pequeño segmento diferencial de conductor, que llamamos  $dr$ . La existencia de corriente en él implica movimiento de cargas eléctricas; estas se desplazan con una velocidad promedio, que designamos como  $v$ .



Calculamos la FM que experimentará un pequeño elto de carga  $dq$  en movimiento.

Planteamos la FM diferencial	$dF = dq(v \wedge \overline{B})$
Expresamos $v$ como desplazamiento por unidad de tiempo.	$dF = dq\left(\frac{\overline{dr}}{dt} \wedge \overline{B}\right)$
Encontramos la fórmula de la corriente eléctrica, la reemplazamos.	$dF = i \overline{dr} \wedge \overline{B}$

### Elemento de Corriente

$$i \overline{dr}$$

### FM sobre Elemento de Corriente

$$dF = i \overline{dr} \wedge \overline{B}$$

Entonces, sobre un tramo de conductor representado por una curva  $C$  por el que circula una corriente  $i$ , ubicado en una región del espacio en la cual hay un CM  $\overline{B}(\overline{r})$ , la fuerza total está dada por la integral de la fuerza diferencial (FM sobre elto de corriente), o sea:

### FM sobre Conductor

$$\overline{F}_m = i \int_C \overline{dr} \wedge \overline{B}(\overline{r})$$

## Círculo Cerrado en un CM Uniforme

FM sobre conductor cerrado.	$\overline{F_m} = i \oint_C d\bar{r} \wedge \overline{B}(\bar{r})$
Como el CM es cte, podemos sacarlo fuera de la integral.	$\overline{F_m} = i \left( \oint_C d\bar{r} \right) \wedge \overline{B}$
Integrar $d\bar{r}$ sobre una trayectoria cerrada resulta en 0.	$\overline{F_m} = 0$

### FM sobre Conductor Cerrado

$$\overline{F_m} = 0$$

Si un circuito cerrado con corriente cte se encuentra en un CM uniforme, no experimentará una FM.

**Interacción entre Conductores Paralelos:** depende de la dir de las corrientes: *si fluyen en el mismo sentido, se atraen, y si fluyen en dirs opuestas, se repelen.*

**Fuentes del CM:** En la mayoría de los casos, el CM se genera por el movimiento de cargas eléctricas, es decir, por corrientes eléctricas. Siempre que hay una corriente eléctrica, se produce un CM en el espacio circundante. Además, los CEs variables también pueden generar CMs, aunque exploraremos este concepto más adelante.

**Ley de Biot-Savart:** Permite calcular el CM producido por una corriente en un pto específico del espacio. Análoga al cálculo directo del CE mediante integración.

Si tenemos un conductor de espesor despreciable, que representamos por una curva cerrada  $C$  en el espacio, por el cual circula una corriente eléctrica  $i$ , donde  $\bar{r}'$  es el pto fuente que indica la posición del elemento de corriente  $i d\bar{r}'$ , entonces el CM  $\overline{B}(\bar{r})$  en un pto campo  $\bar{r}$  puede obtenerse por medio de la Ley de Biot-Savart:

### Ley de Biot-Savart

$$\overline{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_C d\bar{r}' \wedge \frac{\bar{r} - \bar{r}'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3}$$

El producto vectorial es una de las ppales diff's respecto al cálculo del CE, que sólo involucra productos escalares.

La cte  $\mu_0$  se denomina *permittividad magnética del vacío* y su valor es

### Permitividad Magnética del Vacío

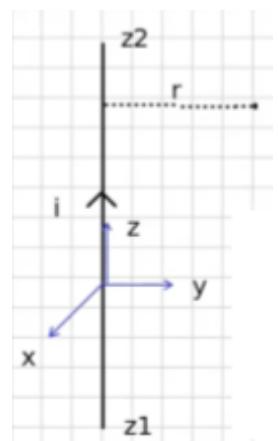
$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \left[ \frac{Tm}{A} \right]$$

# Cálculo del CM por Integración Directa

**★ Alambre Recto Finito:** Consideremos un conductor rectilíneo y finito, como un alambre que transporta una corriente cte  $i$ . Supongamos que el alambre está alineado a lo largo del eje  $z$ , extendiéndose entre las posiciones  $z_1$  y  $z_2$ .

Dado que el sistema es simétrico respecto al eje del conductor, al rotar el conductor en torno a este eje, la configuración física no cambia. Esto implica que la coordenada angular  $\varphi$  no influye en el cálculo del CM, y todos los puntos con la misma distancia radial  $r$  y la misma posición  $z$  experimentan el mismo campo debido a la simetría de revolución.

Nuestro objetivo es calcular el CM en un punto  $P$  que se encuentra a una distancia  $r$  del eje del conductor y cuya posición se define en coordenadas cilíndricas por  $r$  y  $z$ .



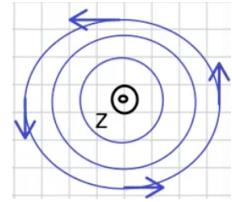
Punto Campo	$\bar{r} = r \hat{r} + z \hat{k}$
Punto Fuente	$\bar{r}' = z' \hat{k}$
Vector Desplazamiento	$d\bar{r}' = dz' \hat{k}$
Cálculos necesarios para la Ley de Biot-Savart	$\bar{r} - \bar{r}' = r \hat{r} + (z - z') \hat{k}$ $ r - r'  = \sqrt{r^2 + (z - z')^2}$
Planteamos la Ley de Biot-Savart	$\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} dz' \hat{k} \wedge \frac{r \hat{r} + (z - z') \hat{k}}{[r^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}}$
Aquí $\hat{k} \wedge \hat{r}$ genera un vector en la dirección $\hat{\varphi}$ , siendo esta la única componente que contribuye al CM, ya que $\hat{k} \wedge \hat{k} = 0$ , cancelando la dir $z$ .	$\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{r \hat{\varphi} dz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}}$
Sacamos fuera los términos que no dependen de la variable de integración $z'$ , y realizamos un cambio de variable para facilitar la integración.	$u = z - z'$ $\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} r \hat{\varphi} \int_{z-z_1}^{z-z_2} \frac{-du}{[r^2 + u^2]^{\frac{3}{2}}}$
Resolvemos la integral.	$\bar{B}(r, z) = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \hat{\varphi} \left( \frac{-(z-z_2)}{[r^2 + (z-z_2)^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{(z-z_1)}{[r^2 + (z-z_1)^2]^{\frac{1}{2}}} \right)$

## CM - Alambre

$$\overline{B} (r, z) = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \hat{\varphi} \left( \frac{-(z-z_2)}{\left[ r^2 + (z-z_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{(z-z_1)}{\left[ r^2 + (z-z_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right)$$

El CM depende de  $r$  y de  $z$ , y tiene dirección  $\hat{\varphi}$ . Sus líneas de campo forman circunferencias concéntricas alrededor del eje del conductor. Los vectores del CM son tangentes a estas circunferencias, siguiendo un patrón circular alrededor del conductor.

Si la corriente en el conductor fluye en la dir  $z$  (hacia afuera), el CM alrededor del conductor sigue la regla de la mano derecha: al apuntar el pulgar en la dir de la corriente, los dedos se curvan en la dir de las líneas del CM.



**★ Alambre Recto Infinito:** Consideremos el caso de un conductor rectilíneo e idealmente infinito a lo largo del eje  $z$ , por el cual circula una corriente cte  $i$ .

Al asumir el conductor infinito...	$z_1 = -\infty$ $z_2 = +\infty$
Ley de Biot-Savart para un Conductor Rectilíneo	$\overline{B} (r, z) = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \hat{\varphi} \left( \frac{-(z-z_2)}{\left[ r^2 + (z-z_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{(z-z_1)}{\left[ r^2 + (z-z_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right)$

Cuando  $z_1 \rightarrow -\infty$  y  $z_2 \rightarrow +\infty$ , los términos  $(z - z_2)$  y  $(z - z_1)$  tienden a valores muy grandes. Por ende, cualquier dist finita  $r$  del pto campo es insignificante en comparación con estos límites extremos. Como resultado,  $r^2$  se simplifica, quedando  $|z - z_2|$  y  $|z - z_1|$ .

Resultado	$\overline{B} (r, z) = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \hat{\varphi} \left( \frac{-(z-z_2)}{ z-z_2 } + \frac{(z-z_1)}{ z-z_1 } \right)$
Un nro dividido en su módulo resulta en su signo.	$\overline{B} (r, z) = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \hat{\varphi} (-\operatorname{sgn}(z - z_2) + \operatorname{sgn}(z - z_1))$
Como $z_2$ tiende a infinito, restarlo a $z$ que es un nro fijo, siempre resultará en un nro negativo.	$\overline{B} (r, z) = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \hat{\varphi} (1 + \operatorname{sgn}(z - z_1))$
Por otro lado, como $z_1 \rightarrow -\infty$ , su resta con un nro fijo siempre dará positivo.	$\overline{B} (r) = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \hat{\varphi} (1 + 1)$
La expresión final...	$\overline{B} (r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{\varphi}$

## CM - Alambre Infinito

$$\bar{B}(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{\varphi}$$

**Simetría del CM:** El sistema presenta tanto simetría de revolución (alrededor del eje del conductor) como simetría de traslación (a lo largo del eje). Por lo tanto, el CM depende únicamente de la distancia radial  $r$  al conductor y es independiente de  $z$ . Tiene dirección azimutal.

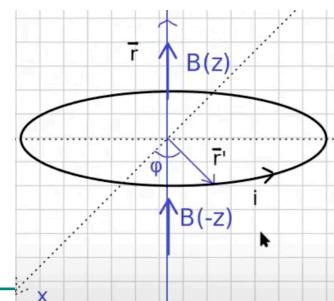
★ **Alambre Recto Semi-Infinito:** Consideremos el caso de un conductor semiinfinito que se extiende desde un punto fijo  $z_1 = 0$  hasta  $z_2 \rightarrow +\infty$ .

Al asumir el conductor semiinfinito...	$z_1 = 0$ $z_2 = +\infty$
Ley de Biot-Savart para un Conductor Rectilíneo	$\bar{B}(r, z) = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \hat{\varphi} \left( \frac{-(z-z_2)}{\left[ r^2 + (z-z_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{(z-z_1)}{\left[ r^2 + (z-z_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right)$
El 1er sumando ya lo evaluamos en el caso anterior.	$\bar{B}(r, z) = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \hat{\varphi} \left( 1 + \frac{(z-z_1)}{\left[ r^2 + (z-z_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right)$
Resolvemos el 2do sumando.	$\bar{B}(r, z) = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \hat{\varphi} \left( 1 + \frac{z}{\left[ r^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right)$

CM - Alambre Semiinfinito	$\bar{B}(r, z) = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \hat{\varphi} \left( 1 + \frac{z}{\left[ r^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right)$
---------------------------	--

Si nos desplazamos hacia abajo, alejándonos del conductor, el CM se reduce gradualmente hasta volverse nulo.

★ **Espira Circular:** Consideremos una espira circular que transporta una corriente constante  $i$ , con eje de simetría en el eje  $z$ . Trabajamos en coordenadas cilíndricas y buscamos calcular  $\bar{B}$  en un punto sobre el eje  $z$ , debido a la simetría del sistema.



Punto Campo	$\bar{r} = z \hat{k}$
Punto Fuente	$\bar{r}' = R \hat{r}$
Vector Desplazamiento, es el arco recorrido.	$d\bar{r}' = R d\varphi' \hat{\varphi}$

Cálculos necesarios para la Ley de Biot-Savart.	$\bar{r} - \bar{r}' = z \hat{k} - R \hat{r}$ $ r - r'  = \sqrt{z^2 + R^2}$
Planteamos la Ley de Biot-Savart.	$\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{2\pi} R d\varphi' \hat{\varphi} \wedge \frac{z \hat{k} - R \hat{r}}{[z^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}}$
Sacamos fuera los términos que no dependen de la variable de integración $\varphi$ , y aplicamos el producto vectorial.	$\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 i R}{4\pi [z^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\varphi' (R \hat{k} - z \hat{r})$
Las componente $\hat{r}$ se cancela por simetría, dejando solo a $\hat{k}$ .	$\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 i R}{4\pi [z^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\varphi' (R \hat{k})$
La integral sobre $\hat{k}$ es trivial porque actúa de cte, la llevamos fuera.	$\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 i R^2}{4\pi [z^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{k} \int_0^{2\pi} d\varphi'$
Resolvemos la integral y llegamos a la ecuación final.	$\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 i R^2}{2 [z^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{k}$

### CM - Espira Circular

$$\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 i R^2}{2 [z^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{k}$$

El CM resultante en el eje  $z$  tiene siempre dir  $\hat{k}$ , y cumple simetría de revolución. A diff del CE, carece de simetría de reflexión respecto al plano  $xy$ , ya que la corriente orienta el campo en una sola dir. Es independiente del signo de  $z$ .

**Caso Especial:** Para  $z \gg R$ , el campo disminuye rápidamente, más que el CE. Realizando los reemplazos necesarios, encontramos una relación de proporcionalidad.

### CM - Espira Circular $z \gg R$

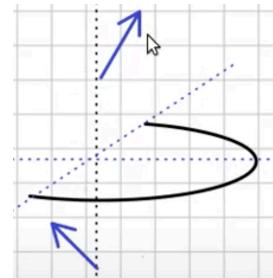
$$\bar{B}(z) \sim \frac{1}{|z|^3}$$

**Campo en el Centro de la Espira:** En el centro de la espira ( $z = 0$ ), el CM es máx y es inversamente proporcional al radio de la espira. Es decir, *cuanto más pequeño sea el radio, más grande será el campo, porque los ptos fuente están más cerca del pto campo.*

### CM - Espira Circular $z = 0$

$$\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 i}{2R} \hat{k}$$

**★ Semiespira Circular:** Consideremos ahora el caso de una semiespira circular que transporta una corriente cte  $i$ .



Planteamos la Ley de Biot-Savart.	$\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^\pi R d\varphi' \hat{\varphi} \wedge \frac{z \hat{k} - R \hat{r}}{[z^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}}$
Sacamos fuera los términos que no dependen de la variable de integración $\varphi$ , y aplicamos el producto vectorial.	$\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 i R}{4\pi [z^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \int_0^\pi d\varphi' (R \hat{k} + z \hat{r})$
La integral sobre $\hat{k}$ es trivial porque actúa de cte, la llevamos fuera.	$\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 i R}{4\pi [z^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} (R \pi \hat{k}) \int_0^\pi \hat{r}(\varphi) d\varphi'$
Como aquí la componente $\hat{r}$ no se anula, resolvemos expresándola como suma de senos y cosenos.	$\hat{r}(\varphi) = \cos(\varphi) \hat{i} + \sin(\varphi) \hat{j}$
Resolvemos la integral y llegamos a la ecuación final.	$\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 i R}{4\pi [z^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} (2z \hat{j} + R \pi \hat{k})$

### CM - Semiespira Circular

$$\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 i R}{4\pi [z^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} (2z \hat{j} + R \pi \hat{k})$$

El CM tendrá componentes en  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ :

- \* La componente en  $\hat{j}$  depende del valor de  $z$ , por lo que cambia de signo según estemos en el lado positivo o negativo del eje  $z$ .
- \* La componente en  $\hat{k}$  siempre es positiva.

Campo en el Centro de la Semiespira: la componente en  $\hat{j}$  desaparece.

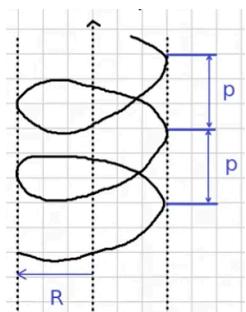
### CM - Semiespira Circular $z = 0$

$$\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 i}{4R} \hat{k}$$

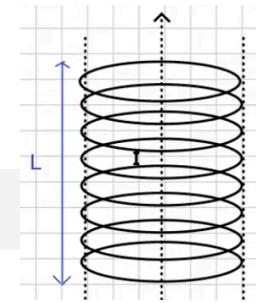
**★ Interior de un Solenoide Finito:** Para comprender el CM en el interior de un solenoide finito, 1ro hay que definir algunos conceptos clave.

**Solenoide:** bobina de alambre (conductor) enrollada en forma de hélice. Para adaptarlo a las coordenadas cilíndricas, consideramos el eje central de la hélice como el eje  $z$ . La curva está contenida en una sup cilíndrica de radio  $R$ .

**Paso de Hélice ( $p$ ):** dist que la espira avanza a lo largo del eje  $z$  después de un giro completo de  $2\pi$  alrededor del mismo. El paso y el radio de la hélice determinan la forma de la curva helicoidal.



**Solenoide Ideal:** Aquí, las espiras están tan juntas que el paso entre ellas es despreciable en comparación con el radio de la hélice. Por ende, el avance en el eje  $z$  es mínimo y el solenoide se considera una superposición de espiras circulares.



### Solenoide Ideal

$$p \ll R$$

**Densidad de Espiras:** nro de espiras por unidad de long.

Si el solenoide ideal tiene long  $L$  y un nro total de espiras  $N$ , se define la densidad de espiras como:

### Densidad de Espiras

$$n = \frac{N}{L}$$

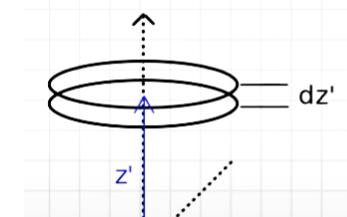
**Cálculo del CM:** Para calcular el CM generado por el solenoide, consideramos 1ro el campo debido a una sección diferencial de espiras.

Imaginemos una banda circular de radio  $R$  y espesor diferencial  $dz'$  ubicada a una distancia  $z'$  del plano  $xy$ . El nro de espiras contenido en este banda es:

### Nro de Espiras Diferencial

$$dN = n dz'$$

Podemos calcular el CM en un pto campo del eje  $z$  usando el resultado del campo en el eje de una espira. Para ello debemos tener en cuenta que:



- 1) La corriente  $i$  debe reemplazarse por  $i dN$ , ya que la banda contiene  $dN$  espiras superpuestas, con cada una conduciendo una corriente  $i$ .
- 2) La coordenada  $z$  del pto campo debe reemplazarse por  $z - z'$ , ya que la banda no está en el plano  $xy$ , sino a una altura  $z'$ .

La banda produce un campo diferencial:

### CM en una espira circular.

$$\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 i R^2}{2 [z^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{k}$$

**Realizamos los cambios.**

$$d\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 i R^2 dN}{2[(z-z')^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{k}$$

**Acomodamos...**

$$d\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 n i R^2}{2} \cdot \frac{dz'}{[(z-z')^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{k}$$

## CM Diferencial - Solenoide

$$d\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 n i R^2}{2} \cdot \frac{dz'}{[(z-z')^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{k}$$

Para obtener el campo producido por el solenoide en su eje de simetría debemos integrar el campo diferencial.

**Para los límites tomamos como origen al centro del solenoide, y planteamos como long a L.**

$$\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 n i R^2}{2} \hat{k} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dz'}{[(z-z')^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}}$$

**Hacemos un cambio de variable.**

$$\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 n i R^2}{2} \hat{k} \int_{z - \frac{L}{2}}^{z + \frac{L}{2}} \frac{-du}{[u^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}}$$

**Quitamos el menos.**

$$\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 n i R^2}{2} \hat{k} \int_{z - \frac{L}{2}}^{z + \frac{L}{2}} \frac{du}{[u^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}}$$

**Resolvemos la integral.**

$$\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 n i R^2}{2} \left[ \frac{1}{R^2} \left( \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{(z + \frac{L}{2})^2 + R^2}} - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{(z - \frac{L}{2})^2 + R^2}} \right) \right] \hat{k}$$

**Acomodamos...**

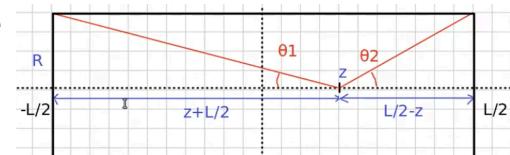
$$\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 n i}{2} \left( \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{(z + \frac{L}{2})^2 + R^2}} - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{(z - \frac{L}{2})^2 + R^2}} \right) \hat{k}$$

## CM - Solenoide

$$\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 n i}{2} \left( \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{(z + \frac{L}{2})^2 + R^2}} - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{(z - \frac{L}{2})^2 + R^2}} \right) \hat{k}$$

**Interpretación Geométrica:** En el cálculo de  $\bar{B}$  de un solenoide finito, se consideran las distancias y los ángulos entre el solenoide y el pto campo.

En la imagen, el pto esta dentro del solenoide, pero podría estar fuera.



## 1. Distancias

- \*  $z + \frac{L}{2}$ : dist entre el pto campo y el extremo más cercano del solenoide.
- \*  $z - \frac{L}{2}$ : dist entre el pto campo y el otro extremo del solenoide.

2. Ángulos: Cada extremo del solenoide forma un ángulo con el pto campo. Este ángulo se define entre el radio de la espira y la línea que va desde el extremo del solenoide hasta el pto campo.

El coseno de este ángulo se obtiene dividiendo la dist horizontal (*proyección en el eje z*) por la dist diagonal (*hipotenusa*), que es la dist entre el extremo del solenoide y el pto campo. Esto nos da la componente del campo a lo largo del eje z.

3. Sumandos: El 1er sumando corresponde al coseno del ángulo del extremo más cercano al pto campo. El 2do, con el signo invertido, corresponde al extremo opuesto. Al sumarlos, se tiene en cuenta cómo las contribuciones de los extremos del solenoide se suman o cancelan según la posición.

### CM - Solenoide

$$\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) \hat{k}$$

**Campo en los Extremos del Solenoide:** Si el pto campo está cerca de uno de los extremos del solenoide, el ángulo entre el radio de la espira y la línea que conecta con el pto será de  $90^\circ$ , lo que hace que el coseno de ese ángulo sea cero. Esto significa que ese extremo no contribuye al campo, solo el otro extremo influirá.

**Campo Fuera del Solenoide:** Cuando el pto campo está fuera del solenoide, su dist con las espiras aumenta, reduciendo la intensidad del campo. Además, fuera del solenoide, el campo ya no es uniforme y cambia de dir porque las espiras no están alineadas a lo largo del eje z.

★ **Solenoides Ideal Infinito:** Se puede interpretar como un pto cercano al centro, con extremos muy lejos.

Los ángulos de cada espira respecto al pto campo tienden a disminuir. A medida que se hacen más pequeños (tendiendo a cero), sus cosenos tienden a 1. Por ende, el campo se vuelve uniforme y cte en el interior del solenoide.

Debido a la simetría de translación, el campo no depende de la posición  $z$  a lo largo del eje, y tiene dir cte.

### CM - Solenoide Infinito

$$L \gg R$$

$$\bar{B}(z) = \mu_0 n i \hat{k}$$

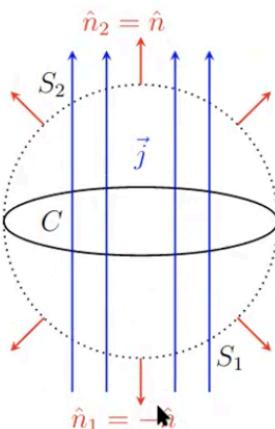
## ★ Corriente Concatenada

**Ecuación de Continuidad de la Carga, para densidades de corriente estacionarias.**

$$\oint_S \bar{j}_{est} \cdot \hat{n}_{ext} \cdot ds = 0$$

Sea  $C \subset S$  una curva cerrada simple (no se corta a sí misma), que divide a la sup cerrada en dos supers abiertas que la tienen como borde.

$$\iint_{S_1} \bar{j} \cdot \hat{n} \cdot ds + \iint_{S_2} \bar{j} \cdot \hat{n} \cdot ds = 0$$



**Observación:** los vectores por debajo de la sup tienen una orientación errónea, deben ir hacia arriba.

Cada una de las integrales representa la corriente eléctrica que atraviesa cada una de las supers  $S_1$  y  $S_2$ , en la dir de la normal exterior  $\hat{n}$  de  $S$ .

Definimos  $\hat{n}_1 = -\hat{n}$  y  $\hat{n}_2 = \hat{n}$ .

$$-\iint_{S_1} \bar{j} \cdot \hat{n}_1 \cdot ds + \iint_{S_2} \bar{j} \cdot \hat{n}_2 \cdot ds = 0$$

La 1ra integral da la corriente que entra a la sup cerrada  $S$  a través de  $S_1$  y la 2da la corriente que sale de  $S$  a través de  $S_2$ . Ambas corrientes deben ser iguales, lo cual expresa el hecho de que no puede haber acumulación de carga en el interior de  $S$  si las corrientes son estacionarias.

Observemos que la única relación entre ambas supers es que comparten el mismo borde  $C$ . La conclusión a la que llegamos entonces es que la corriente eléctrica que atraviesa una sup  $S(C)$  abierta, cuyo borde sea la curva cerrada  $C$ , no depende de la particular superficie, sino sólo de la curva.

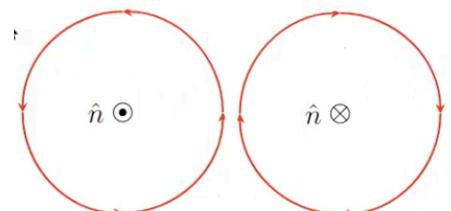
Esta corriente se denomina la corriente concatenada por la curva  $C$ , sería toda la corriente que atraviesa una sup que tiene de borde a  $C$ .

## Corriente Concatenada

$$i_{conc} = \iint_{S(C)} \bar{j} \cdot \hat{n} \cdot ds$$

Se le dice "concatenada" porque las líneas de corriente se "encadenan" con la curva, como si fueran anillos.

La dir del versor normal  $\hat{n}$  a la sup abierta  $S(C)$  es convencional y se elige según el sentido de giro de la curva orientada  $C$  siguiendo la "regla del tirabuzón" o "regla de la mano derecha".



★ **Teorema o Ley de Ampere:** Dado un circuito  $C$  en una región del espacio en la que hay un CM  $\bar{B}(\bar{r})$ , la integral de circulación de dicho campo sobre el circuito  $C$  es igual a  $\mu_0$  por la corriente concatenada del mismo. Sólo válido para corrientes estacionarias.

### Ley de Ampere

$$\oint_C \bar{B}(\bar{r}) \cdot d\bar{r} = \mu_0 \cdot i_{conc}$$

Señalemos que el circuito  $C$  es una curva matemática, que no tiene porqué coincidir con ningún elto material, por ej: un conductor. Es como una de las sups de Gauss.

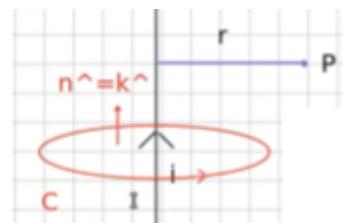
La ley de Ampere permite, para distribuciones con alta simetría, obtener fácilmente la expresión del CM.

**CM por Ampere:** Aplicamos la ley de Ampère en configs con simetría cilíndrica. Esto implica que el sist presenta dos props: simetría de traslación a lo largo del eje y simetría de revolución alrededor del eje.

★ **Alambre Infinito:** El pto campo se encuentra a una dist  $r$  del eje del alambre.

Planteamos una curva cerrada  $C$ , en este caso una circunferencia de radio  $R$  (igual a la dist  $r$  del pto campo al eje). Esta será nuestra trayectoria de integración.

La normal a  $C$  debe estar alineada con la dir de la corriente, de modo que el flujo del CM sea positivo. Entonces para determinar la orientación de la curva, usamos la regla de la mano derecha o la del tirabuzón.



**Debido a la simetría del sist, el CM tiene una dir tangente a  $C$ , es decir en la dir  $\hat{\varphi}$ .**

Además, no puede depender de  $z$  (simetría de traslación), ni de  $\varphi$  (simetría de revolución). Únicamente de la dist radial  $r$  al eje.

$$\bar{B}(r) = B(r) \hat{\varphi}$$

**El vector desplazamiento es el diferencial de arco a lo largo de la circunferencia, en la dir tangente  $\hat{\varphi}$ .**

$$d\bar{r} = r d\varphi \hat{\varphi}$$

**Circulación del CM a lo largo de la curva.**

$$\oint_C \bar{B}(\bar{r}) \cdot d\bar{r}$$

**Reemplazamos con los valores del problema.**

$$\oint_C B(r) \hat{\varphi} \cdot r d\varphi \hat{\varphi}$$

**El producto escalar de un versor consigo mismo resulta en 1.**

$$\int_0^{2\pi} B(r) r d\varphi$$

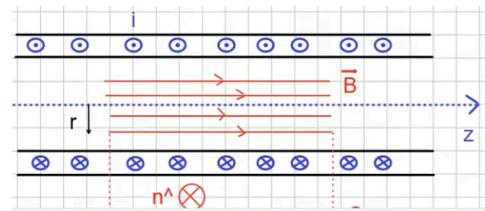
<p><b>Todo lo que no depende de la variable de integración, lo llevamos fuera de la integral.</b></p>	$B(r) r \int_0^{2\pi} d\varphi$
<p><b>Resolvemos la integral y llegamos al producto del perímetro de <math>C</math> y el valor del CM en el pto campo.</b></p>	$\oint_C \bar{B}(\bar{r}) \cdot d\bar{r} = 2\pi r B(r)$
<p><b>Aplicamos la Ley de Ampere.</b></p>	$2\pi r B(r) = \mu_0 i_{conc}$
<p><b>Acomodamos la ecuación, además teniendo en cuenta que <math>i_{conc} = i</math>.</b></p>	$\bar{B}(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{\varphi}$

### CM - Alambre Infinito

$$\bar{B}(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{\varphi}$$

**★ Solenoide Ideal Infinito:** En un solenoide, las espiras de corriente crean un CM con la misma dir que el eje del solenoide.

Este comportamiento presenta simetría cilíndrica, pero con una diff clave respecto al conductor recto: mientras que en un conductor recto el CM rodea al conductor de forma tangencial, en el solenoide *la corriente fluye en espiras alrededor del eje, y el CM se orienta en esa misma dirección axial*.



**Si tomamos el eje  $z$  como el eje del solenoide...**

$$\begin{aligned}\bar{B}(r) &= B(r) \hat{k} \\ \bar{j}(r) &= j(r) \hat{\varphi}\end{aligned}$$

Tomamos un circuito de Ampere en forma de rectángulo de long arbitraria  $L$ . Uno de sus lados coincide con una línea de campo en el interior del solenoide. Si no fuera tangente al CM, no lo podríamos calcular.

El CM en la región exterior al solenoide debe ser nulo. Esto se deduce de:

- 1) Cualquier curva cerrada fuera del solenoide debe dar una circulación de CM nula, ya que no encierra ninguna corriente.

<p><b>Ley de Ampere</b></p>	$\oint_C \bar{B}(\bar{r}) \cdot d\bar{r} = \mu_0 i_{conc}$
<p><b>Si el campo es uniforme, lo llevamos fuera de la integral.</b></p>	$\bar{B}(\bar{r}) \oint_C d\bar{r} = \mu_0 i_{conc}$
<p><b>La integral del diferencial de desplazamiento de una curva cerrada es nula.</b></p>	$0 = \mu_0 i_{conc}$
<p><b>Finalmente...</b></p>	$0 = i_{conc}$

- 2) Se establece el requisito que el campo en el infinito debe ser nulo.

Dado que el campo fuera del solenoide es cero, y los costados del rectángulo son perpendiculares al campo, sólo necesitamos considerar el tramo de la curva dentro del solenoide. En este tramo, el CM es cte y paralelo a la curva.

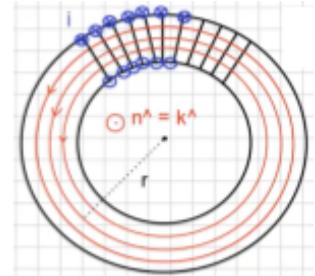
<b>Circulación del CM a lo largo de la curva.</b>	$\oint_C \bar{B}(\bar{r}) \cdot d\bar{r}$
<b>Resolvemos...</b>	$\oint_C \bar{B}(\bar{r}) \cdot d\bar{r} = B(r) L$
<b>Siendo <math>n</math> la densidad de espiras y <math>nL</math> el nro de espiras concatenadas por <math>C</math>, calculamos la corriente concatenada.</b>	$i_{conc} = n L i$
<b>Planteamos la Ley de Ampere</b>	$B(r) L = \mu_0 n L i$
<b>Resolvemos y hallamos la expresión final del campo.</b>	$\bar{B}(r) = \mu_0 n i \hat{k}$

## CM - Solenoide Infinito

$$\bar{B}(r) = \mu_0 n i \hat{k}$$

El CM en el interior de un solenoide ideal infinito es cte y orientado a lo largo del eje del solenoide. Es uniforme y no depende de la posición, mientras que en el exterior del solenoide el campo es nulo.

★ **Solenoides Toroidal Ideal:** aquí, el alambre conductor se enrolla en forma de un anillo cerrado, similar a una dona, creando una estructura completamente cerrada. Como las espiras están muy juntas, podemos considerar que forman una sola "capa" de alambre enrollado



**Simetría Toroidal:** Aquí no hay simetría cilíndrica como en un solenoide lineal, debido a la falta de simetría de traslación. En cambio, el sistema presenta una simetría toroidal. Esta tiene dos componentes clave:

1. Simetría de Revolución: Si giramos el toroide alrededor de su eje central, el CM se mantiene constante.
2. Simetría de Giro de las Espiras: Cada espira en el toroide puede rotar alrededor de su propio eje sin afectar la simetría general del campo.

Estas simetrías pueden describirse mediante dos ángulos:  $\varphi$ , que representa la rotación alrededor del eje z del toroide, y  $\xi$ , el giro de cada espira alrededor de su propio eje. Se trata de dos simetrías continuas, por lo que se puede aplicar Ampere.

**Corriente y Dirección del CM:** La corriente eléctrica que pasa por el alambre entra por un lado del toroide y sale por el otro. Esta genera un CM dentro del toroide, cuyo sentido y dir pueden determinarse con la regla de la mano derecha. Esta nos dice que el CM dentro del toroide seguirá una trayectoria circular, en la misma dir en la que se enrolla el alambre (dir azimutal,  $\hat{\varphi}$ ).

## Cálculo del CM

Si tomamos el eje $z$ como el eje del toroide...	$\bar{B}(r) = B(r) \hat{\varphi}$
Circulación del CM a lo largo de la curva.	$\oint_C \bar{B}(\bar{r}) \cdot d\bar{r}$
Tomando como circuito de Ampere una de las líneas de campo dentro del toroide...	$\oint_C \bar{B}(\bar{r}) \cdot d\bar{r} = 2\pi r B(r)$
Siendo $N$ el nro de espiras e $i$ la corriente que circula por cada espira, la corriente concatenada es...	$i_{conc} = N i$
Planteamos la Ley de Ampere.	$2\pi r B(r) = N i$
Resolvemos y hallamos la expresión final del campo.	$\bar{B}(r) = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} \hat{\varphi}$

### CM - Solenoide Toroidal

$$\bar{B}(r) = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} \hat{\varphi}$$

Debido a la forma del toroide, el CM no es uniforme en todo su interior. El campo es inversamente proporcional al radio  $r$  desde el centro del toroide: es más intenso cerca del borde interior y menos intenso hacia el borde exterior.

**Caso Límite - Toroide Estrecho:** Aquí el radio de cada espira es muy pequeño comparado con el radio medio del toroide. Podemos aproximar el CM como si fuera cte dentro del toroide, tomando un radio medio entre los radios interior y exterior. Esto permite tratar el campo como si fuera uniforme, y el circuito de Ampere pasa a ser una circunferencia de radio medio dentro del toroide.

Consideramos un radio medio $R$ , y aproximamos el campo en el interior colocando $r = R$ .	$\bar{B} = \frac{\mu_0 N i}{2\pi R} \hat{\varphi}$
Como $2\pi R$ es la long del solenoide arrollado, la densidad de espiras será...	$n = \frac{N}{2\pi R}$
Entonces, el campo en el interior del toroide será igual que en el solenoide ideal infinito.	$B = \mu_0 n i$

### CM - Toroide Estrecho

$$B = \mu_0 n i$$

## T3: Inducción Electromagnética

**Flujo Magnético:** Mide cuántas líneas del CM ( $B$ ) atraviesan una sup. Sin embargo, a diff del CE, el CM no cuenta con monopolos magnéticos. Es decir, no hay "cargas magnéticas" que actúen como fuentes del CM, como sí ocurre con las cargas eléctricas en el caso del CE.

★ **Flujo en Sup Cerrada:** Por este motivo, el flujo del CM a través de cualquier sup cerrada siempre es nulo. Esto significa que cualquier línea de CM entrante a la sup necesariamente debe salir. Matemáticamente, esta prop define al CM como un campo solenoide, es decir, un campo cuyo flujo neto a través de cualquier sup cerrada es nulo:

**Flujo Magnético - Sup Cerrada**

$$\oint_S \overline{B} \cdot \hat{n} \cdot ds = 0$$

★ **Flujo en Sup Abierta:** En este caso, el flujo magnético no depende de la forma de la sup, sino de su borde. Esto significa que si tenemos una curva cerrada  $C$  en el espacio, cualquier sup abierta  $S(C)$  que tenga a  $C$  como borde producirá el mismo flujo magnético, sin importar si la sup es plana, curva o compleja.

Este concepto se conoce como *flujo magnético concatenado por una curva cerrada orientada  $C$* . Representa las líneas del campo magnético que "se encadenan" con la curva cerrada  $C$ .

**Flujo Magnético - Sup Abierta**

$$\phi = \iint_{S(C)} \overline{B} \cdot \hat{n} \cdot ds$$

La unidad de flujo magnético es el Weber (Wb).

**Weber (Wb)**

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T m}^2$$

**Coeficientes de Inducción:** En un sist formado por dos circuitos,  $C_1$  y  $C_2$ , por los cuales circulan corrientes  $i_1$  e  $i_2$  respectivamente, cada uno genera un CM asociado por la Ley de Biot-Savart:  $\overline{B}_1(\vec{r})$  para  $C_1$  y  $\overline{B}_2(\vec{r})$  para  $C_2$ .

Estos CM pueden depender del tiempo y la posición, especialmente si las corrientes que los producen varían con el tiempo.

**Flujo Magnético Concatenado:** Cuando un CM generado por un circuito atraviesa al otro, se genera un flujo magnético concatenado. Podemos calcular el flujo  $\phi_{12}$  del campo  $\overline{B}_2$  concatenado por el circuito  $C_1$ , considerando una sup<sup>a</sup> cualquiera que tenga a  $C_1$  por borde.

$$\phi_{12} = \iint_{S(C_1)} \overline{B}_2 \cdot \hat{n}_1 \cdot ds_1$$

De manera similar,  $\phi_{21}$  del campo  $\overline{B}_1$  concatenado por el circuito  $C_2$ .

$$\phi_{21} = \iint_{S(C_2)} \overline{B}_1 \cdot \hat{n}_2 \cdot ds_2$$

**★ Coeficientes de Inducción Mutua:** De acuerdo con la ley de Biot-Savart,  $\overline{B}_1$  y  $\overline{B}_2$  son proporcionales a las corrientes que los generan ( $i_1$  e  $i_2$ ). Por lo tanto, como la corriente no depende de la variable de integración, la podemos llevar fuera de la integral de flujo, haciendo que este tbien sea proporcional a ella:

### Coeficientes de Inducción Mutua

$$\phi_{12} = M_{12} \cdot i_2$$

$$\phi_{21} = M_{21} \cdot i_1$$

Aquí,  $M_{12}$  y  $M_{21}$  son los *coeficientes de inducción mutua*. Dependen únicamente de la forma geométrica, la posición relativa y la orientación de los circuitos, pero no de las corrientes mismas. Además, se cumple que:

$$M_{12} = M_{21}$$

Cuando  $M_{12} \neq 0$ , se dice que los circuitos están *magnéticamente acoplados*, ya que la corriente en un circuito induce un flujo magnético en el otro.

**★ Coeficiente de Autoinducción:** Un caso especial ocurre cuando el circuito que genera el flujo es el mismo que lo recibe. En este escenario, el flujo magnético que atraviesa el circuito es proporcional a su propia corriente:

### Coeficiente de Autoinducción

$$\phi = L \cdot i$$

Aquí,  $L$  es el *coeficiente de autoinducción o autoinductancia*. Depende únicamente de la forma geométrica del circuito.

**Unidad de Medida:** tanto para la inducción mutua como para la autoinducción es el Henry ( $H$  v  $H_y$ ).

### Henry [ $H$ ]

$$1 H = 1 \frac{Wb}{A} = 1 \Omega s$$

**Ley de Inducción de Faraday:** Dada cualquier curva cerrada orientada  $C$  en el espacio, si el flujo magnético concatenado por ella es variable en el tiempo, la Ley de Inducción de Faraday afirma que se generará una *fuerza electromotriz inducida*  $\varepsilon$  a lo largo del circuito, de modo tal que:

### Ley de Faraday

$$\varepsilon_{ind} = - \frac{d\phi}{dt}$$

Es importante recalcar que  $C$  no tiene porqué ser un conductor, puede ser una curva matemática en el espacio.

**Orientación de la FEM:** El signo negativo en la fórmula indica la orientación de la f.e.m respecto del sentido positivo elegido para el circuito:

- \*  $\frac{d\phi}{dt} > 0$ : flujo está aumentando,  $\varepsilon_{ind}$  será negativa y se orienta en el sentido opuesto al circuito.
- \*  $\frac{d\phi}{dt} < 0$ : flujo está disminuyendo,  $\varepsilon_{ind}$  será positiva y se orienta en el sentido del circuito.

La orientación positiva del circuito se establece al elegir su normal, conviene elegirla en la dirección del CM predominante.

**Variación del Flujo Magnético:** Varía por 2 causas principales:

1. CM no Cte: cuando depende del tiempo, como por ej: *uno generado por una corriente eléctrica no cte*.
2. Geometría del Circuito no Cte: si este cambia de forma, orientación o posición respecto al CM. Incluso con un CM estacionario, modificará el flujo.

**Aparición de un CE no Conservativo:** La generación de una f.e.m. implica la aparición de un CE no conservativo  $\bar{E}(\bar{r}, t)$  en el conductor. Su circulación sobre el circuito es igual a la f.e.m. (como ya vimos), por lo que aquí se iguala a la variación del flujo magnético, cambiado de signo:

### Ley de Faraday - CE no Conservativo

$$\oint_C \bar{E}(\bar{r}, t) \cdot d\bar{r} = - \frac{d\phi}{dt}$$

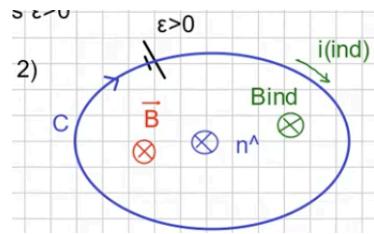
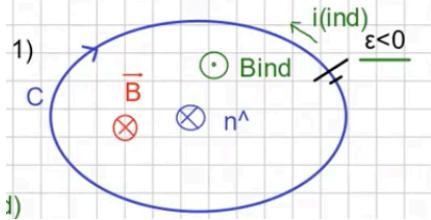
Notamos que un CM variable puede actuar como fuente de un CE.

Si el circuito es un conductor, es como si cada punto de él se convirtiera en una pila, generando una corriente inducida con misma dirección que la f.e.m. Esta, a su vez, produce un CM que interactúa con el flujo original, siguiendo la Ley de Lenz.

**Ley de Lenz:** Implícita en la Ley de Faraday, describe cómo el sistema se opone a los cambios en el flujo magnético:

Si el  $\phi$  aumenta,  $i_{ind}$  genera un CM que reduce este incremento.

Si el  $\phi$  disminuye,  $i_{ind}$  genera un CM que refuerza el flujo original.



Esto asegura que las variaciones en el flujo no se produzcan de forma abrupta, estabilizando el sistema electromagnético.

## ★ Ley de Faraday y Coeficientes de Inducción

**Coeficiente de Autoinducción:** Si consideramos un circuito  $C$  con un coef de autoinducción  $L$ , el flujo magnético que este genera sobre sí mismo se puede expresar como:

$$\phi = L \cdot i$$

donde  $i$  es la corriente que circula por el circuito. Si esta varía con el tiempo, el flujo también cambia, induciendo una f.e.m. que, según la ley de Faraday, se calcula como:

**Faraday - Coef de Autoinducción**

$$\varepsilon_{ind} = -L \frac{di}{dt}$$

**Circuitos Magnéticamente Acoplados:** Si se tratase de un circuito  $C_1$  con autoinductancia  $L_1$  que está magnéticamente acoplado con otro circuito  $C_2$  siendo  $M_{12}$  la inductancia mutua, entonces la f.e.m. inducida en  $C_1$  tendría dos contribuciones: una del propio circuito  $C_1$  y otra del circuito  $C_2$ .

**Faraday - Circuito Magnéticamente Acoplado**

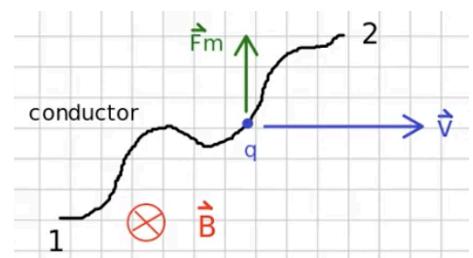
$$\varepsilon_{ind}^{(1)} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

De manera similar, una corriente variable en  $C_1$  generará un flujo magnético variable sobre  $C_2$ , induciendo una f.e.m. en este último circuito ( $\varepsilon_{ind}^{(2)}$ ).

Este principio puede extenderse a sistemas con más de dos circuitos, añadiendo términos adicionales correspondientes a los coefs de inducción mutua entre cada par de circuitos.

## ★ DDP entre 2 Ptos de un Conductor en Movimiento respecto de un CM Uniforme y Cte

Imaginemos un tramo de conductor abierto de cualquier forma, con dos ptos definidos, 1 y 2. Este conductor se mueve a velocidad cte  $v$  dentro de un CM uniforme y cte,  $\vec{B}$ . Todos los ptos del conductor tienen la misma velocidad  $v$ .



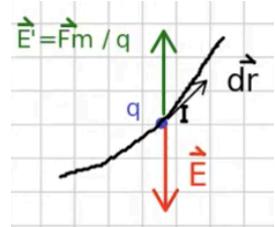
En el interior del conductor, consideremos una carga  $q$ . Dado que el conductor está abierto, no puede haber movimiento de cargas en su interior:  $q$  permanece en reposo respecto al conductor. Sin embargo, al observar desde el marco de referencia de la fuente del CM,  $q$  no está en reposo; sino que se mueve con la velocidad  $v$  del conductor.

Este movimiento relativo provoca que la carga  $q$  experimente una FM, con una dir particular (determinada por el prod vectorial  $(\vec{v} \times \vec{B})$ ):

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Como la FM tiene una componente tangencial al conductor, en teoría podría acelerar a  $q$  dentro del conductor, pero esto no sucede. El circuito es abierto y no puede haber flujo de cargas, no hay corriente eléctrica, y además la situación es estacionaria. Esto indica que debe haber otra fuerza que contrarreste a la FM y mantenga las cargas en equilibrio.

**FM como CE no Conservativo:** Cambiamos al marco de referencia fijo al conductor. En este sist,  $q$  está en reposo, y por lo tanto no experimenta una FM. En cambio, la fuerza que antes atribuimos al CM ahora se interpreta como un CE no conservativo  $\vec{E}'$ , similar al que se encuentra dentro de una pila.



Este campo es proporcional a la FM dividida por la carga, y genera una f.e.m. inducida en el conductor:

$$\vec{E}' = \frac{\vec{F}_m}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$$

**Equilibrio con un Campo Electrostático:** Si tomamos a la FM como un CE no conservativo, la fuerza o el campo que lo equilibra es un campo electrostático dentro del conductor.

Este campo aparece porque las cargas dentro del conductor se acomodan en respuesta a la FM/CE no conservativo. Su existencia asegura que la fuerza total sobre cada carga sea nula:

$$\vec{E} = -\vec{E}' = -\frac{\vec{F}_m}{q} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

El campo electrostático es el responsable de una ddp entre los ptos del conductor.

**Cálculo de la DDP:** La ddp entre dos ptos del conductor se obtiene integrando el CE a lo largo de la trayectoria entre ellos.

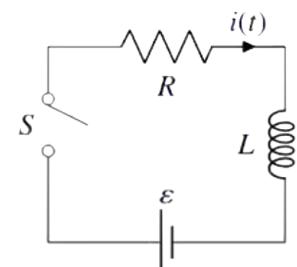
Expresión Inicial	$\Delta V = V_2 - V_1$
Reemplazamos con la integral del campo	$\Delta V = - \int_1^2 \bar{E} \cdot d\bar{r}$
Reemplazamos con la igualdad del campo	$\Delta V = \int_1^2 (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{r}$
Como $v$ y $B$ son ctes, las llevamos fuera de la integral.	$\Delta V = (\bar{v} \times \bar{B}) \int_1^2 d\bar{r}$
Llegamos a la expresión final.	$\Delta V = (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot \Delta \bar{r}$

### DDP en un Conductor en Mov respecto a un CM Cte

$$\Delta V = (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot \Delta \bar{r}$$

Por lo tanto, la ddp entre dos ptos de un conductor en movimiento dentro de un CM uniforme no depende de la forma del conductor, sino únicamente de la diff de posiciones en la dir paralela al CM.

**Energía Magnética:** Todo circuito con autoinductancia no nula por el que circule una corriente eléctrica posee una energía magnética acumulada. Para verlo consideraremos un circuito con una resistencia total  $R$  y un coef de autoinducción  $L$  por el cuál inicialmente circula una corriente estacionaria  $i_0$ .



Para facilitar su comprensión, el coeficiente de autoinducción se asocia a un componente llamado *inductor*, representado por un solenoide o bobina. Esto se debe a que su autoinducción es significativamente mayor que la del resto del circuito, permitiendo considerar despreciable la contribución de los demás eltos.

Su función es generar un flujo magnético en respuesta a la corriente eléctrica que lo atraviesa. Entenderemos después a detalle por qué, pero es este flujo el que almacena energía.

**Comportamiento del Circuito con CC:** Cuando la llave del circuito está cerrada y la corriente es cte, el solenoide no induce ninguna f.e.m.. En este caso, la corriente que circula por el circuito depende exclusivamente de la f.e.m. de la batería ( $\epsilon$ ) y de  $R$  según la relación:

### Corriente Inicial

$$i_0 = \frac{\epsilon}{R}$$

Aunque no hay f.e.m. inducida, mientras circule corriente, el flujo magnético generado por el solenoide almacena energía de su CM.

**Descarga del Circuito:** Si en el instante  $t = 0$ , se abre la llave y se desconecta la batería (la f.e.m. que generaba corriente), la corriente NO puede desaparecer de forma inmediata. Un cambio abrupto implicaría una derivada infinita de la corriente ( $\frac{di}{dt} = \infty$ ), lo que a su vez generaría un cambio infinito en el flujo magnético y una fem inducida infinita, algo físicamente imposible.

En su lugar, la corriente disminuye gradualmente de forma exponencial. Esto sucede porque desaparece la f.e.m. de la batería pero instantáneamente se genera una f.e.m. inducida por el inductor.

Para analizar este comportamiento, aplicamos la ley de Kirchhoff al circuito cerrado sin batería.

Ley de Kirchhoff.	$- i(t) R - L \frac{di}{dt} = 0$
La reacomodamos.	$\frac{di}{i} = - \frac{R}{L} dt$
Resolvemos la EDO.	$i(t) = A e^{-\frac{R}{L} t}$
La cte $A$ se determina con la cond inicial, $i(0) = i_0$ .	$i(t) = i_0 e^{-\frac{R}{L} t}$

### Corriente del Circuito

$$i(t) = i_0 e^{-\frac{R}{L} t}$$

Se trata de una corriente inducida por la variación de flujo magnético en el circuito. Podemos notar cómo decrece exponencialmente a partir del valor inicial, con un tiempo característico de decaimiento propio.

### Tiempo Característico

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Después de cinco tiempos característicos, la corriente se considera prácticamente nula.

**Inductor y Ley de Lenz:** El signo negativo en la f.e.m. inducida refleja la Ley de Lenz, según el cual el inductor se opone a cambios en la corriente. Esto evita que la corriente desaparezca abruptamente.

Mientras la corriente disminuye, el inductor genera una f.e.m. que la sostiene temporalmente, facilitando una transición suave hasta que la energía almacenada se disipa por completo.

**Conservación de la Energía en el Circuito:** Aunque la batería está desconectada, la corriente sigue circulando por un tiempo gracias a la energía almacenada en el CM del solenoide. A medida que la corriente decrece, esta energía se transforma en calor, disipándose a través de la resistencia.

La potencia disipada en función del tiempo se calcula como:

### Potencia Disipada en la Resistencia

$$P(t) = i^2(t) R = i_0^2 R e^{-2\frac{R}{L} t}$$

La energía total disipada, correspondiente a la energía almacenada inicialmente en el solenoide, se puede calcular.

Potencia disipada en la resistencia.	$P(t) = i_0^2 R e^{-2\frac{R}{L}t}$
Integramos desde $t = 0$ hasta $t = \infty$ .	$U_m = i_0^2 R \int_0^{\infty} e^{-2\frac{R}{L}t} dt$
Llegamos a la expresión final.	$U_m = \frac{1}{2} L i_0^2$
<b>Energía Almacenada en el Inductor</b>	$U_m = \frac{1}{2} L i_0^2$

Esto demuestra que toda la energía almacenada en el CM del solenoide se transforma en calor en la resistencia, respetando el pppio de conservación de la energía.

## T4: Corriente Alterna

★ **Generador de Tensión Alterna:** Transforma una forma de energía (como mecánica, química o solar), por inducción electromagnética, en una f.e.m. que varía de forma sinusoidal en el tiempo.

Representamos su tensión mediante una función seno o coseno, ya que ambas tienen la misma forma, pero están desplazadas en el tiempo. La elección entre ellas depende de cómo se quiera definir el pto de inicio de la onda, aunque coseno es la convención.

La fórmula para su tensión es:

**FEM - Corriente Alterna**

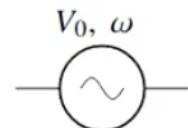
$$\varepsilon(t) = V_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

donde:

- \*  $V_0$ : amplitud máxima o tensión de pico. Siempre positiva.
- \*  $\omega$ : frecuencia angular o pulsación del generador, define cuántas oscilaciones ocurren por unidad de tiempo. Se mide en  $[s^{-1}]$  o  $[rpm]$ .
- \*  $\varphi$ : fase inicial, indica el desplazamiento de la onda en el tiempo. Es convención colocar la tensión del generador en  $\varphi = 0$ .

En particular, cuando se utiliza el coseno, la tensión alcanza su valor máximo ( $V_0$ ) en los momentos en que  $t = 0$  o  $t = k\pi$ , ya que en ellos  $\cos(t) = 1$ .

**Representación Circital:** En diagramas de circuitos eléctricos, los generadores de corriente alterna se representan mediante un símbolo estándar, acompañado de su amplitud y su velocidad angular.



### Frecuencia y Período del Generador

**Frecuencia**

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad [Hz]$$

**Período**

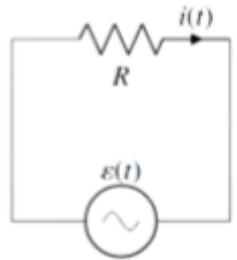
$$T = \frac{1}{f} \quad [s]$$

## Circuitos con un Único Elto Pasivo

Circuitos eléctricos en los que, además del generador de corriente alterna, se incorpora un elto pasivo. Este no aporta energía al circuito, sino que interactúa con la energía proporcionada por el generador. Solo el generador suministra energía al sist.

**Los eltos que analizaremos son:** Resistores, Capacitores e Inductores (bobinas).

★ **Círculo Resistivo Puro – CPR:** circuito constituido por un generador de tensión alterna y un resistor.



**Corriente:** Aplicando la Ley de Ohm en cada instante obtenemos la corriente circulante:

### Corriente - CRP

$$i(t) = \frac{V_0}{R} \cos(\omega t)$$

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t)$$

donde  $i_0$  se denomina *amplitud de corriente* (o *corriente de pico*).

**Relación entre Tensión y Corriente:** corriente y tensión tienen la misma forma de onda en el tiempo (cosenoidal,  $\cos(\omega t)$ ), por lo que son proporcionales. Es decir, alcanzan sus valores máx, min y ceros al mismo tiempo. Además, evolucionan juntas: cuando la tensión crece, la corriente también lo hace; cuando decrece, ocurre lo mismo con la corriente.

En términos gráficos, son dos funciones cosenoidales con diff amplitud, pero superpuestas. Decimos que las funciones **están en fase**.

**Potencia:** La potencia instantánea entregada por el generador, será igual a la disipada en la resistencia:

### Potencia Instantánea del Generador - CRP

$$P_G(t) = i(t) \varepsilon(t)$$

$$P_G(t) = \frac{V_0^2}{R} \cos^2(\omega t)$$

### Potencia Disipada por la Resistencia - CRP

$$P_R(t) = i^2(t) R$$

$$P_R(t) = P_G(t)$$

**Potencia Media/Potencia Activa:** valor medio de la potencia instantánea. Energía entregada por el generador en un período, dividida por el período.

Def original.	$P = \frac{1}{T} \int_0^T P_G(t) dt$
Todo lo que no depende de la variable de integración lo llevamos fuera de la integral.	$P = \frac{V_0^2}{RT} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt$
Resolvemos la integral y obtenemos las expresiones finales.	$P = \frac{V_0^2}{2RT} \quad \vee \quad P = \frac{i_0 V_0}{2} \quad \vee \quad P = \frac{i_0^2 R}{2}$

## Potencia Activa del Generador - CRP

$$P = \frac{V_0^2}{2 R T}$$

$$P = \frac{i_0 V_0}{2}$$

$$P = \frac{i_0^2 R}{2}$$

Estas expresiones de potencia media son análogas a las correspondientes a un circuito de CC, salvo el factor  $\frac{1}{2}$ .

Por este motivo se definen la tensión eficaz  $V_{ef}$  y la corriente eficaz  $i_{ef}$  como:

## Valores Eficaces

$$i_{ef} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$$

$$V_{ef} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

## PA Eficaz del Generador - CRP

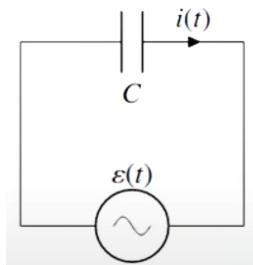
$$P = \frac{V_{ef}^2}{R T}$$

$$P = i_{ef} V_{ef}$$

$$P = i_{ef}^2 R$$

**★ Circuito Capacitivo Puro - CCP:** Aquí, el elto pasivo es un capacitor ideal (sin resistencia).

La corriente que fluye no es estacionaria. Si lo fuera, el cap actuaría como un circuito abierto, acumulando carga (ABS! para CC) y sin dejar pasar corriente. En cambio, en CA, el cap permite el paso de corriente debido a la acumulación y descarga alternada de carga en sus placas. La corriente nunca atraviesa el cap, sino habría un cortocircuito.



## Corriente

Planteamos la Ley de Kirchhoff de nodos.	$\varepsilon(t) - V_C(t) = 0$
La ddp del capacitor es en cada instante proporcional a su carga.	$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$
Q(t) es la integral de la corriente que llega a las placas, considerando Q(0) = 0.	$Q(t) = \int_0^t i(t) dt$
Intercambiando la integral por una derivada.	$i(t) = \frac{dQ}{dt}$
Por la Ley de Kirchhoff planteada al ppio.	$i(t) = C \frac{d\varepsilon}{dt}$
Realizamos la derivada, teniendo en cuenta la def de ε, y llegamos a la fórmula final.	$i(t) = -C V_0 \omega \sin(\omega t)$

## Corriente - CCP

$$i(t) = -C V_0 \omega \sin(\omega t)$$

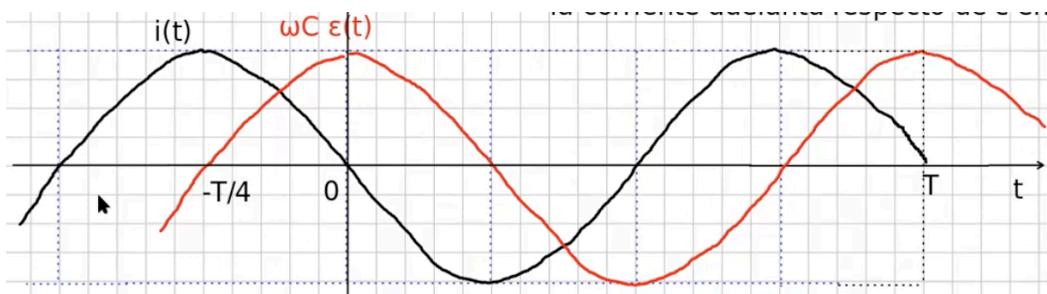
## Relación entre Tensión y Corriente

Dada la exp de la corriente.	$i(t) = -C V_0 \omega \sin(\omega t)$
Aplicamos la identidad trigonométrica $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha)$ .	$i(t) = C V_0 \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$
Teniendo en cuenta la def de $\varepsilon$ .	$i(t) = C \omega \varepsilon\left(t + \frac{\pi}{2\omega}\right)$

Notamos que la corriente está desplazada temporalmente respecto de la tensión. Es decir, la corriente en un tiempo  $t$  es proporcional a la tensión en un tiempo posterior  $t + \Delta t$ , siendo este

$$\Delta t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4}$$

donde  $T$  es el periodo de la tensión alterna. Gráficamente significa que la corriente alcanza sus max, min y ceros un cuarto de periodo antes que la tensión.



Se dice en este caso que "la corriente adelanta respecto de la tensión", teniendo entre ambas una *diff de fase*:

$$\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$$

**Potencia:** La potencia instantánea entregada por el generador, se emplea en cargar el capacitor:

PIG - CCP	$P_G(t) = i(t) \varepsilon(t)$	$  P_G(t) = -V_0^2 \omega C \cos(\omega t) \sin(\omega t)$
-----------	--------------------------------	--

La potencia instantánea es periódica y alterna entre valores positivos y negativos.

Físicamente, cuando la potencia es positiva, el generador transfiere energía al cap, cargando sus placas al mover las cargas eléctricas de una a otra. En cambio, cuando la potencia es negativa, el cap devuelve al generador la energía almacenada, restaurando las cargas a su posición original y descargándose en el proceso.

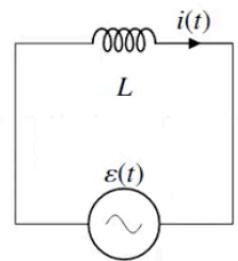
## Potencia Media

Potencia Media - CCP	$P = 0$
----------------------	---------

Esto se debe a que, en promedio, no hay transferencia neta de energía hacia el capacitor. Toda la energía que el generador entrega para cargarlo le es devuelta cuando éste se descarga y el ciclo vuelve a comenzar. Como no hay disipación de energía, esta se conserva.

★ **Circuito Inductivo Puro – CIP:** circuito formado por el generador y un inductor de autoinducción  $L$ .

Cuando la corriente varía con el tiempo, se genera un flujo magnético en el inductor, lo que da lugar a una f.e.m. inducida. Esta se opone al cambio de corriente según la Ley de Lenz.



## Corriente

<b>Planteamos la Ley de Kirchhoff.</b>	$\varepsilon(t) - L \frac{di}{dt} = 0$
<b>Reacomodamos la exp.</b>	$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon(t)}{L}$
<b>Planteamos la derivada como una integral, considerando <math>i(0) = 0</math>.</b>	$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t \varepsilon(t) dt$
<b>Llevamos fuera todo lo que no dependa de la variable de integración.</b>	$i(t) = \frac{V_0}{L} \int_0^t \cos(\omega t) dt$
<b>Resolvemos la integral y llegamos a la exp final.</b>	$i(t) = \frac{V_0}{\omega L} \operatorname{sen}(\omega t)$

## Corriente – CIP

$$i(t) = \frac{V_0}{\omega L} \operatorname{sen}(\omega t)$$

## Relación entre Tensión y Corriente

<b>Dada la exp de la corriente.</b>	$i(t) = \frac{V_0}{\omega L} \operatorname{sen}(\omega t)$
<b>Aplicamos la identidad trigonométrica</b> $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(\alpha)$ .	$i(t) = \frac{V_0}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$
<b>Teniendo en cuenta la def de <math>\varepsilon</math>.</b>	$i(t) = \frac{1}{\omega L} \varepsilon\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right)$

Notamos que la corriente está desplazada temporalmente respecto de la tensión. Es decir, la corriente en un tiempo  $t$  es proporcional a la tensión en un tiempo anterior  $t - \Delta t$ , siendo este

$$\Delta t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4}$$

donde  $T$  es el periodo de la tensión alterna. Gráficamente significa que la corriente alcanza sus max, min y ceros un cuarto de periodo después que la tensión.

Se dice en este caso que “*la corriente atrasa respecto de la tensión*”, teniendo entre ambas una *diff de fase*:

$$\Delta\phi = -\frac{\pi}{2}$$

**Potencia:** La potencia instantánea entregada por el generador se emplea en establecer el flujo magnético en el inductor:

### PIG - CCP

$$P_G(t) = i(t) \varepsilon(t) \quad \left| \quad P_G(t) = \frac{V_0^2}{\omega L} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \right.$$

La potencia instantánea es periódica y alterna entre valores positivos y negativos.

Físicamente, cuando la potencia es positiva, el generador entrega energía para generar un flujo magnético en el inductor, almacenando energía magnética en él. En cambio, cuando la potencia es negativa, el flujo magnético se extingue, y la energía que almacenaba el inductor se devuelve al generador.

### Potencia Media

#### Potencia Media - CCP

$$P = 0$$

La potencia media nula se debe a que, en promedio, no hay transferencia neta de energía hacia el inductor. Toda la energía que el generador entrega para crear el flujo magnético le es devuelta como energía almacenada y el ciclo vuelve a comenzar. Como no hay disipación de energía, esta se conserva.

### CCP y CIP - Comportamiento con la Frecuencia

	CAPACITOR	INDUCTOR
Relación con $\omega$	Proporción Directa	Proporción Inversa
Frecuencias Bajas ( $\omega \rightarrow 0$ )	$i \rightarrow 0$ Estamos en el límite de la CC. Dado que un cap no permite el flujo de corriente a través de sus placas, en estas cond el circuito actúa como si estuviera abierto, y la corriente se reduce a cero.	$i \rightarrow \infty$ Cuanto más rápido varía la tensión aplicada, mayor es la tasa de cambio de carga en las placas del capacitor, lo que incrementa el flujo de corriente.
Frecuencias Altas ( $\omega \rightarrow \infty$ )	$i \rightarrow \infty$ Cuanto menos varia la corriente, menor es la oposición (f.e.m. inducida), y por ende, mayor es la amplitud de la corriente.	$i \rightarrow 0$ Cuanto más rápido intenta variar la corriente, más fuerte es la oposición (f.e.m.).

inducida), y por ende, menor es la amplitud de la corriente.

## Cuadro Comparativo

CIRCUITO	FASE ( $\varepsilon$ vs $I$ )	POTENCIA MEDIA	TENDENCIA CON $\omega$	ALMACENAMIENTO DE ENERGÍA
Resistivo	En fase	Positiva	Sin dependencia	No almacena energía
Capacitivo	$i$ adelanta $\varepsilon$ ( $+ \frac{\pi}{2}$ )	Cero	Mayor $\omega$ , mayor corriente	Almacena y libera energía eléctrica
Inductivo	$i$ atrasa $\varepsilon$ ( $- \frac{\pi}{2}$ )	Cero	Mayor $\omega$ , menor corriente	"" " energía magnética

Estos conceptos son fundamentales para entender el comportamiento de circuitos eléctricos y su análisis en CA, sentando las bases para trabajar con combinaciones más complejas de ellos.

## Tensión y Corriente Complejas - Impedancias

El análisis de circuitos de CA se simplifica mediante el uso de nros complejos, pareciéndose al análisis de CC, sin necesidad de derivar o integrar las funciones tensión y corriente.

**Representación de Nros Complejos:** Para evitar ambigüedades en la notación, utilizaremos la letra  $j$  para designar la unidad imaginaria ( $j^2 = -1$ ), reservando la letra  $i$  para la corriente.

Un nro complejo  $z$  se describe mediante dos formas pppales:

### Forma Cartesiana - Complejos

$$z = x + jy$$

donde  $x$  es la parte real e  $y$  es la parte imaginaria.

### Forma Polar - Complejos

$$z = |z| e^{j\varphi}$$

donde:

\*  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ : módulo o magnitud del nro complejo.

\*  $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{y}{x} \right)$ : arg o ángulo del nro complejo.

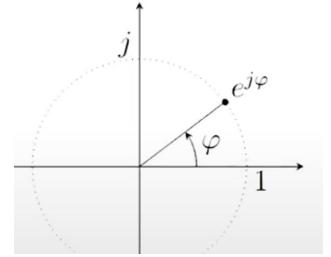
La representación polar utiliza la relación de Euler:

### Relación de Euler

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

Por ej:

- \*  $e^{j0}$ , ubicado en el eje real positivo.
- \*  $e^{j\frac{\pi}{2}}$ , ubicado en el eje imaginario positivo.
- \*  $e^{-j\frac{\pi}{2}}$ , ubicado en el eje imaginario negativo.



Un nro complejo con módulo 1 se encuentra sobre una circunferencia de radio 1 en el plano complejo. Así,  $e^{j\varphi}$  describe un pto que forma un ángulo  $\varphi$  con el eje real.

**★ Tensión y Corrientes Complejas:** Mediante nros complejos, las expresiones de la tensión y la corriente se convierten en:

### Tensión Compleja

$$V_i(t) = V_0 e^{j\omega t}$$

### Corriente Compleja - CRP

$$i_{iR}(t) = \frac{V_0}{R} e^{j\omega t} \quad \mid \quad i_{iR}(t) = \frac{V_i(t)}{R}$$

### Corriente Compleja - CCP

$$i_{iC}(t) = C V_0 \omega e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} \quad \mid \quad i_{iC}(t) = C \omega V_i(t) e^{j\frac{\pi}{2}}$$

### Corriente Compleja - CIP

$$i_{iL}(t) = \frac{V_0}{\omega L} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} \quad \mid \quad i_{iL}(t) = \frac{V_i(t)}{\omega L} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Donde su parte real corresponde a la tensión y corriente reales, respectivamente. Este enfoque permite analizar el desfasaje entre tensión y corriente más fácilmente.

**★ Ley de Ohm Generalizada:** Vemos que, en cada caso, la corriente compleja es proporcional a la tensión compleja. Si despejamos las tensiones en función de las corrientes obtenemos:

### Tensión Compleja - CRP

$$V_{iR}(t) = R i_{iR}(t)$$

### Tensión Compleja - CCP

$$V_{iC}(t) = \frac{-j}{\omega C} i_{iC}(t)$$

### Tensión Compleja - CIP

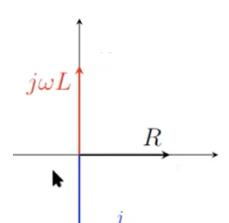
$$V_{iL}(t) = j \omega L i_{iL}(t)$$

Notamos que todas las exps toman una forma particular, que denominamos como:

### Ley de Ohm Generalizada

$$V_i(t) = Z i(t)$$

donde  $Z$  es la *impedancia* del circuito.



★ **Impedancia:** nro complejo que incorpora tanto la resistencia al flujo de corriente del circuito como el desfasaje entre tensión y corriente. Dependiendo del tipo de componente, la impedancia adopta diff formas.

### Impedancia - CRP

$$Z_R = R$$

### Impedancia - CCP

$$Z_C = - \frac{j}{\omega C}$$

### Impedancia - CIP

$$Z_L = j \omega L$$

Mediante el uso de la Ley de Ohm Generalizada y de las impedancias, se puede resolver cualquier circuito de CA de manera análoga a uno de CC.

Vemos que el único elto cuya impedancia es un nro real es el resistor, por ello, a la parte real de  $Z$  de un circuito se la denomina **resistencia  $R$** . Las impedancias del capacitor y del inductor son, en cambio, imaginarias. A la parte imaginaria de  $Z$  se la denomina **reactancia  $X$** , de modo que la reactancia de un capacitor es negativa y la de un inductor positiva.

### Impedancia

$$Z = R + j X$$

$$X_C < 0, X_L > 0$$

**Relación Impedancia y Frecuencia:** La impedancia de un resistor es independiente de  $\omega$ .

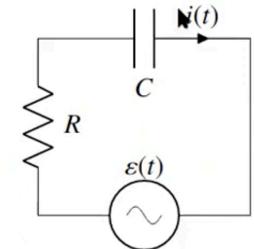
	CAPACITOR	INDUCTOR
Relación con $\omega$	Proporción Inversa	Proporción Directa
Frecuencias Bajas ( $\omega \rightarrow 0$ )	$Z_C \rightarrow \infty$ Actúa como un conductor ideal.	$Z_L \rightarrow 0$ Corriente pequeña, f.e.m inducida tbien pequeña, por lo que no habrá mucha oposición.
Frecuencias Altas ( $\omega \rightarrow \infty$ )	$Z_C \rightarrow 0$ Bloquea gradualmente el flujo de corriente, siendo nula en $\omega = 0$ , donde la corriente pasa a ser CC.	$Z_L \rightarrow \infty$ Bloquea frecuencias altas debido a la generación de una f.e.m. inducida que se opone al flujo de corriente.

# Circuitos de una Sola Malla y 2 Eltos Pasivos:

Aquellos por donde todos los componentes pasa la misma corriente y estan conectados por un único camino.

## ★ Circuito RC - Resistor y Capacitor en Serie

**Impedancia:** Cuando los eltos están en serie, la impedancia total del circuito es la suma de las impedancias individuales.



### Impedancia - RC

$$Z_{RC} = R + \frac{j}{\omega C}$$

## Corriente

Utilizamos la forma polar para expresar $Z$ , dónde aquí $\varphi$ está cambiado de signo.	$Z =  Z  e^{-j\varphi}$
Argumento de $Z$ .	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\omega R C}$
Módulo de $Z$ .	$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$
Exp de la corriente compleja.	$i_i(t) = \frac{1}{Z} V_i(t) e^{j\varphi}$
Juntamos todas las exps, llegamos a la exp final de la corriente.	$i_{iRC}(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} e^{j(\omega t + \varphi)}$

### Corriente Compleja - RC

$$i_{iRC}(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

**Relación entre Corriente, Tensión e Impedancia:**  $Z$  es la suma vectorial de la resistencia ( $R$ ) y la reactancia capacitiva ( $X_C$ ), representada gráficamente como un triángulo en el plano complejo.  $R$  está alineada con el eje real, mientras que  $X_C$  apunta hacia abajo en el eje imaginario negativo.

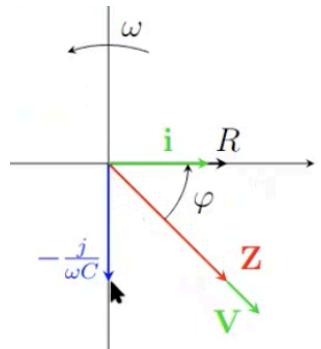
Cuando se multiplica la corriente  $i$  por  $Z$ , se obtiene la tensión compleja ( $V_i$ ). Si ubicamos a  $i$  sobre el eje real (es decir, asumimos que  $i$  es real en ese instante), la tensión tendrá el mismo arg (dir angular) que  $Z$ . Esto significa que el desfase angular entre  $i$  y  $V_i$  es igual al arg de  $Z$ .

**Desfase - Corriente y Tensión:**  $\varphi$  representa el desfase de una señal respecto de la otra. En este caso:

- \* Si partimos desde  $V_i$  y avanzamos hacia  $i$ , atravesamos un ángulo  $\varphi > 0$  en sentido antihorario.
- \* Este desfase positivo indica que **la corriente adelanta a la tensión en un circuito RC**.

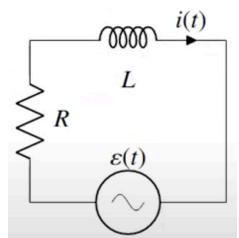
**Representación Gráfica:** En un diagrama de fasores:

- \*  $i$  se representa sobre el eje real en el instante en el que atraviesa su valor máx.
- \*  $V_i$  aparece desfasada respecto a  $i$  en la misma dir angular que  $Z$ .
- \* Tanto  $i$  como  $V_i$  giran en sentido antihorario con una velocidad angular  $\omega$ , que corresponde a la frecuencia de la señal alterna.



**Relación con la Frecuencia:** La amplitud de corriente tiende a 0 cuando  $\omega \rightarrow 0$

(CC) y tiende a  $\frac{V_0}{R}$  cuando  $\omega \rightarrow \infty$ , indicando que la impedancia del capacitor es despreciable (como ya habíamos visto).



## ★ Circuito RL - Resistor e Inductor en Serie

**Impedancia:** Cuando los eltos están en serie, la impedancia total del circuito es la suma de las impedancias individuales.

### Impedancia - RL

$$Z_{RC} = R + j\omega L$$

## Corriente

Utilizamos la forma polar para expresar $Z$ , dónde aquí $\varphi$ está cambiado de signo.	$Z =  Z  e^{-j\varphi}$
Argumento de $Z$ .	$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega L}{R}$
Módulo de $Z$ .	$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$
Exp de la corriente compleja.	$i_i(t) = \frac{1}{Z} V_i(t) e^{j\varphi}$
Juntamos todas las exps, llegamos a la exp final de la corriente.	$i_{iRL}(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\omega t + \varphi)}$

### Corriente Compleja - RL

$$i_{iRL}(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

**Relación entre Corriente, Tensión e Impedancia:**  $Z$  es la suma vectorial de la resistencia ( $R$ ) y la reactancia inductiva ( $X_L$ ), representada gráficamente como un triángulo en el plano complejo.  $R$  está alineada con el eje real, mientras que  $X_L$  apunta hacia arriba en el eje imaginario positivo.

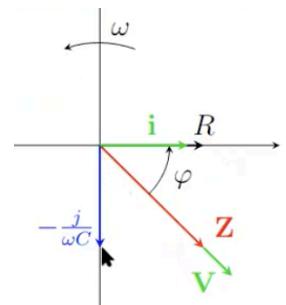
Cuando se multiplica la corriente  $i$  por  $Z$ , se obtiene la tensión compleja ( $V_i$ ). Si ubicamos a  $i$  sobre el eje real (es decir, asumimos que  $i$  es real en ese instante), la tensión tendrá el mismo arg (dir angular) que  $Z$ . Esto significa que el desfase angular entre  $i$  y  $V_i$  es igual al arg de  $Z$ .

**Desfase - Corriente y Tensión:**  $\varphi$  representa el desfase de una señal respecto de la otra. En este caso:

- \* Si partimos desde  $V_i$  y avanzamos hacia  $i$ , atravesamos un ángulo  $\varphi < 0$  en sentido antihorario.
- \* Este desfase negativo indica que la **tensión adelanta a la corriente en un circuito RL**, al revés que un RC.

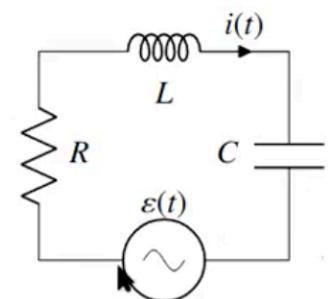
**Representación Gráfica:** En un diagrama de fasores:

- \*  $i$  se representa sobre el eje real en el instante en el que atraviesa su valor máx.
- \*  $V_i$  aparece desfasada respecto a  $i$  en la misma dir angular que  $Z$ .
- \* Tanto  $i$  como  $V_i$  giran en sentido antihorario con una velocidad angular  $\omega$ , que corresponde a la frecuencia de la señal alterna.



**Relación con la Frecuencia:** La amplitud de corriente tiende a 0 cuando  $\omega \rightarrow \infty$  (por efecto de la f.e.m. inducida) y tiende a  $\frac{V_0}{R}$  cuando  $\omega \rightarrow 0$ , indicando que la impedancia del inductor es despreciable (como ya habíamos visto).

**Circuito RLC Serie:** Circuito compuesto por una resistencia ( $R$ ), un inductor ( $L$ ) y un capacitor ( $C$ ) conectados en serie. Su comportamiento eléctrico varía significativamente según  $\omega$ , lo que afecta la impedancia, el desfase entre corriente y voltaje, y la amplitud de la corriente.



**Impedancia:** Cuando los ictos están en serie, la impedancia total del circuito es la suma de las impedancias individuales.

### Impedancia - RLC Serie

$$Z_{RLC} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

- \* Parte Real: Representada por  $R$ , siempre es positiva y no depende de la frecuencia.
- \* Parte Imaginaria: Depende de la frecuencia.

DOMINANCIA	SIGNO	NATURALEZA
$\omega L > \frac{1}{\omega C}$	Positivo	Inductivo
$\omega L < \frac{1}{\omega C}$	Negativo	Capacitivo

$\omega L = \frac{1}{\omega C}$	Cero	Resistivo
---------------------------------	------	-----------

## Corriente

Utilizamos la forma polar para expresar $Z$ , dónde aquí $\varphi$ está cambiado de signo.	$Z =  Z  e^{-j\varphi}$
Argumento de $Z$ .	$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{R} \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$
Módulo de $Z$ .	$Z = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$
Exp de la corriente compleja.	$i_i(t) = \frac{1}{Z} V_i(t) e^{j\varphi}$
Juntamos todas las exps, llegamos a la exp final de la corriente.	$i_{iRL}(t) = -\frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} e^{j(\omega t + \varphi)}$

### Corriente Compleja - RLC Serie

$$i_{iRL}(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

**Frecuencia de Resonancia ( $\omega_0$ )**: Ocurre cuando las reactancias inductiva y capacitiva se compensan.

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

### Frecuencia de Resonancia

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L C}}$$

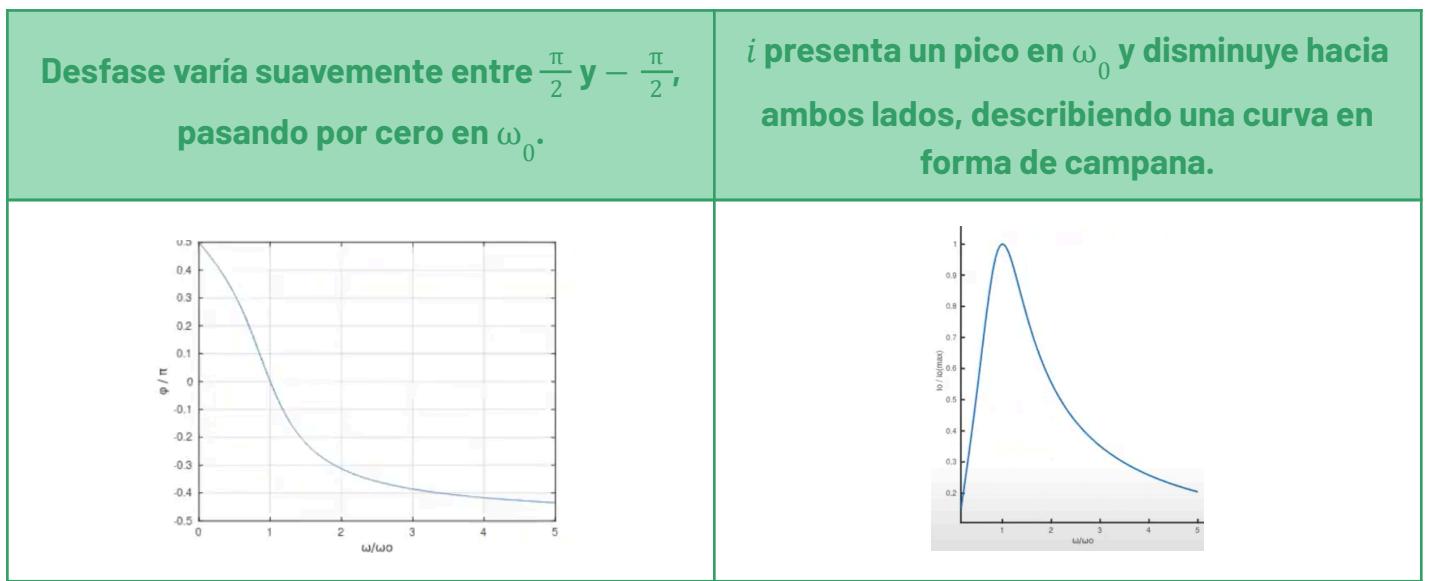
En esta condición:

- \* La impedancia es puramente resistiva ( $Z = R$ ), y el circuito es de naturaleza CRP.
- \* El desfase entre corriente y voltaje es nulo.
- \* La corriente alcanza su valor máx, ya que no hay oposición reactiva.

**Desfase - Corriente y Tensión:** El desfase ( $\varphi$ ) depende de  $\omega$  en relación con  $\omega_0$

- \* Frecuencias Bajas ( $\omega < \omega_0$ ): capacitor domina y el desfase es positivo, aproximándose a  $\frac{\pi}{2}$  cuando  $\omega \rightarrow 0$ .
- \* En Resonancia ( $\omega = \omega_0$ ): desfase nulo, indicando un CRP.

- \* Frecuencias Altas ( $\omega > \omega_0$ ): inductor domina y el desfase es negativo, aproximándose a  $-\frac{\pi}{2}$  cuando  $\omega \rightarrow \infty$ .



## Factor de Potencia, Potencias Reactiva y Aparente

En los circuitos eléctricos de CA, entender cómo fluye y se utiliza la energía requiere analizar 3 tipos de potencia: activa, reactiva y aparente. Cada una de ellas tiene un propósito específico y contribuye de manera distinta al comportamiento general del sistema eléctrico.

**★ Potencia Activa/Real:** Energía que se consume para realizar trabajo útil, como generar calor, movimiento o iluminación. Es la potencia disipada en las resistencias del circuito y corresponde a la parte de la energía que no se devuelve al generador.

Matemáticamente, la potencia activa se expresa igual que en un CPR:

<b>Potencia Activa en un CPR.</b>	$P = \frac{1}{2} i_0^2 R$
<b>Aplicando la def de corriente eficaz.</b>	$P = i_{ef}^2 R$
<b>Aplicando la Ley de Ohm.</b>	$P = \frac{1}{2} i_0 V_0 \frac{V_0}{Z} R$
<b>Aplicando <math>\frac{R}{Z} = \cos \varphi</math>, llegamos a la exp final.</b>	$P = \frac{1}{2} i_0 V_0 \cos \varphi$

<b>Potencia Activa</b>	$P = \frac{1}{2} i_0 V_0 \cos \varphi$	$P = i_{ef} V_{ef} \cos \varphi$
------------------------	--	----------------------------------

donde  $\cos \varphi$  es el factor de potencia, que mide el desfase entre la corriente y la tensión.

En un CRP, no hay desfase ( $\varphi = 0$ ,  $\cos \varphi = 1$ ). En ese caso, toda la potencia entregada por el generador se convierte en potencia activa. En CCP y CIP, hay desfase ( $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \varphi = 0$ ), por lo que no hay potencia activa.

**★ Potencia Reactiva:** Asociada con los componentes del circuito que almacenan energía temporalmente en forma de CEs (capacitores) o CMs (inductores). Aunque no produce trabajo útil, es indispensable para el funcionamiento del circuito, ya que permite establecer dichos campos. Como consecuencia, se cargan los capacitores o se genera flujo en los inductores.

**Potencia Instantánea Total:** Consideremos un circuito con capacidad eq  $C$  en serie con una inductancia eq  $L$ . Calculamos la *potencia instantánea total* suministrada por el generador a los eltos reactivos del circuito:

<b>Con <math>q(t)</math> la carga en el capacitor e <math>i(t)</math> la corriente circulante, las energías eléctricas y magnéticas almacenadas son...</b>	$U_C(t) = \frac{1}{2C} q^2(t)$ $U_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$
<b>Teniendo en cuenta que la carga es la integral de la corriente, tenemos...</b>	$i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$ $q(t) = \frac{i_0}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$
<b>Reemplazando en las energías.</b>	$U_C(t) = \frac{i_0^2}{2\omega^2 C} \sin^2(\omega t + \varphi)$ $U_L(t) = \frac{1}{2} L i_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$
<b>Derivamos las expresiones respecto del tiempo y las sumamos. Obtenemos la exp final.</b>	$Q(t) = i_0^2 \left( \frac{1}{\omega C} - \omega L \right) \sin(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi)$

### Potencia Instantánea Total

$$Q(t) = i_0^2 \left( \frac{1}{\omega C} - \omega L \right) \sin(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi)$$

**Potencia Reactiva Instantánea:** Observemos que el paréntesis es la reactancia  $X$  del circuito cambiada de signo, entonces la *potencia reactiva instantánea* se expresa como:

<b>Potencia Instantánea Total</b>	$Q(t) = i_0^2 \left( \frac{1}{\omega C} - \omega L \right) \sin(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi)$
<b>Igualdad con Reactancia</b>	$Q(t) = i_0^2 X \sin(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi)$

Aplicamos identidad trigonométrica y llegamos a exp final.

$$Q(t) = -\frac{1}{2} i_0^2 X \operatorname{sen}(2\omega t + 2\varphi)$$

## Potencia Reactiva Instantánea

$$Q(t) = -\frac{1}{2} i_0^2 X \operatorname{sen}(2\omega t + 2\varphi)$$

Como ya sabemos en CRP el valor medio de esta potencia es nulo, ya que la energía entregada al inductor y al capacitor siempre retorna al generador. Sin embargo, debemos tener en cuenta que el generador debe ser capaz de entregar esta potencia para que la corriente se pueda establecer. Por eso se define la *potencia reactiva*  $Q$ .

**Potencia Reactiva:** valor máx de la potencia reactiva instantánea que el generador debe suministrar.

Exp inicial potencia reactiva.

$$Q = \frac{1}{2} i_0^2 |X|$$

Aplicamos la Ley de Ohm.

$$Q = \frac{1}{2} i_0 \frac{V_0}{Z} |X|$$

Aplicamos  $\frac{X}{Z} = \operatorname{sen} \varphi$  y llegamos a la exp final.

$$Q = \frac{1}{2} i_0 V_0 |\operatorname{sen} \varphi|$$

## Potencia Reactiva

$$Q = \frac{1}{2} i_0 V_0 |\operatorname{sen} \varphi| \text{ [VAR]}$$

$$Q = i_{ef} V_{ef} |\operatorname{sen} \varphi| \text{ [VAR]}$$

La potencia reactiva no se mide en Watts porque no es una potencia consumida, sino que va y vuelve, se mide en Volt-Ampere Reactivos [VAR].

**★ Potencia Aparente:** al analizar las potencias activa y reactiva, vemos que ambas magnitudes pueden considerarse las "longitudes" de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el producto de la tensión y la corriente eficaces.

Esta cant, independiente del desfasaje, se denomina *potencia aparente*  $S$ , y representa la energía total que parece estar siendo entregada al circuito. Es imp porque engloba toda la potencia que el generador debe proporcionar, independiente de cómo se utiliza.

Potencia Activa.

$$P = i_{ef} V_{ef} \cos \varphi$$

Potencia Reactiva.

$$Q = i_{ef} V_{ef} |\operatorname{sen} \varphi|$$

Hipotenusa del triangulo.

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Resolvemos y llegamos a la exp final.

$$S = i_{ef} V_{ef}$$

## Potencia Aparente

$$S = i_{ef} V_{ef} \quad [VA]$$

Su unidad de medida es el Volt-Ampere [VA], y en un CRP coincide con la potencia activa.

**Importancia del Factor de Potencia:** El factor de potencia es clave para medir la eficiencia del sist. Un valor cercano a 1 indica que casi toda la potencia aparente se convierte en activa, lo cual es deseable. Por el contrario, factores de potencia bajos significan que el circuito requiere una mayor cant de potencia reactiva, lo que puede sobrecargar generadores y líneas de transmisión.