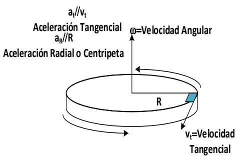
Física 1. Principios de la Mecánica - **Práctica**

Cuerpo rígido.
Cinemática del movimiento.

1 - Determinar los módulos de la velocidad angular, de la velocidad tangencial, de la aceleración normal; y de la aceleración tangencial de un punto de la periferia de un disco de diámetro 30 cm y que gira a con frecuencia angular constante de 78 r.p.m.



$$\nu = \frac{1}{T}\ Siendo \begin{cases} \nu\ Frecuencia \\ T\ Período \end{cases} \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{2\pi\nu}{60} = 8.17s^{-1} = \omega$$

$$\frac{dS}{r} = d\theta \Rightarrow v_t = \frac{dS}{dt} = \frac{d\theta}{dt}r = \omega r = \omega\frac{d}{2} = 122.55\frac{Cm}{s} = v_t$$

$$a_t = \frac{dv_T}{dt} = \frac{d\omega}{dt}r = \alpha r = 0r = 0\frac{Cm}{s} = a_t$$

$$\frac{v_t^2}{R} = 1000\frac{Cm}{s^2} = 10\frac{m}{s^2} = a_c$$

2 - Un volante gira disminuyendo su velocidad debido al rozamiento en sus apoyos. Al concluir el primer minuto su velocidad angular es el 80% de la inicial. Suponiendo constantes las fuerzas de rozamiento, determinar
a) la velocidad angular después de haber girado 210 segundos, si la inicial era 120 min^{-1}.
b) cuántas vueltas dio en ese intervalo.

El hecho de que exista una disminución de Velocidad angular nos está indicando que hay aceleración Tangencial o podríamos decir de igual manera que hay Aceleración Angular.

Si tenemos en cuenta, que además la única fuerza externa que existe es la de Roce y constante:

$$\sum \tau_{Ext} = \tau_{Roce} = \vec{r}x\vec{F}_{Roce} = I\vec{\alpha}\ si\ F_{Roce}\ Constante \Rightarrow \alpha\ Constante$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha \Longrightarrow \omega(t) = -\alpha t + w_0\ como\ 0.8\omega_0 = -\alpha 60 + \omega_0 \Rightarrow \frac{\frac{\omega_0}{60}}{300} = \frac{\omega_0}{18000} = \alpha \Rightarrow$$

$$-\frac{\omega_0}{18000}210s + \frac{\omega_0}{60} = 0.6\ s^{-1} = w(210s)$$

$$d\theta = \omega dt \Longrightarrow \theta(t) = -\frac{1}{2}\alpha t^2 + \frac{\omega_0}{60}t = 273Rad \Rightarrow \frac{273Rad}{2\pi Rad} = 43{,}44\ Vueltas$$

3 - Una rueda de 20 cm de diámetro gira en un determinado instante a razón de 120 r.p.m. . Transcurridos 20 segundos desde el instante anterior, ha efectuado 200 vueltas. Determinar :

a) el módulo de la aceleración angular, supuesta constante
b) el módulo de la velocidad angular final
c) la frecuencia final en r.p.m.
d) el módulo de la velocidad de un punto del borde de la rueda en los instantes inicial y final.
e) el módulo de las aceleraciones normal y tangencial, inicial y final.
f) el tiempo que ha necesitado para girar a 500 r.p.m.

$$Si\ \alpha = Constante \Rightarrow \begin{cases} \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t \\ \omega(t) = \alpha t + \omega_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2\pi\nu_0}{60} = 4\pi = \omega_0 \Rightarrow \theta(20s) = 200 * 2\pi \Rightarrow$$

$$\frac{(400\pi - \omega_0 20)2}{20^2} = 1.6\pi\ s^{-2} = \alpha$$

$$1.6\pi t_1 + 4\pi = 36\pi\ s^{-1} = \omega(20s)$$

$$\nu(t) = \frac{\omega(t)}{2\pi} \Rightarrow \nu(20s) = 18Hz = 1080\ RPM$$

$$v(t) = \omega(t)\frac{d}{2} \Rightarrow \begin{cases} \omega(0s)\frac{d}{2} = 0.4\pi\frac{m}{s} = v_i(0s) \\ \omega(20s)\frac{d}{2} = 3.6\pi\frac{m}{s} = v_f(20s) \end{cases}$$

$$a_t(t) = \alpha r\ Constante = 0.503\ s^{-2}$$

$$a_r(t) = \frac{2v^2(t)}{d}\frac{d}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2v_i^2(0s)}{d} = 1.6\pi^2\frac{m}{s^2} = a_{ri}(0s) \\ \frac{2v_f^2(20s)}{d} = 129.6\pi^2\frac{m}{s^2} = a_{rf}(20s) \end{cases}$$

$$t = \frac{\omega(t) - \omega_0}{\alpha} \wedge \omega(t) = \frac{2\pi\nu}{60} \Rightarrow t = 7.92s$$

4 - Se deja en libertad una rueda de ruleta de 20 cm de diámetro, la que tarda en detenerse 20 s. Si en ese tiempo giró 8,5 revoluciones y se fue deteniendo con aceleración de módulo constante, determinar:

a) el módulo de la velocidad angular y de la frecuencia inicial,
b) el módulo de la aceleración angular.
c) el módulo de la aceleración tangencial y normal inicial de un punto del borde

$$Si\ \alpha = Constante \Rightarrow \begin{cases} \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t \\ \omega(t) = \alpha t + \omega_0 \end{cases} \Rightarrow \omega(20s) = 0 = -\alpha 20 + \omega_0 \Rightarrow \alpha = \frac{\omega_0}{20} \wedge \theta(20s) = 17\pi \Rightarrow$$

$$\theta(20s) = 17\pi = -\frac{1}{2}\frac{\omega_0}{20}20^2 + \omega_0 20 \Rightarrow \frac{17\pi}{10} = 1.7\pi s^{-1} = \omega_0 \wedge \frac{\omega_0}{2\pi} = 0.85\ Hz = \nu_0$$

$$\alpha = 0.085\pi s^{-2}$$

$$\alpha r = 0.0085\pi\frac{m}{s^2} = a_{ti} \wedge \frac{v(t)^2}{r} = \omega^2(t)r = 0.289\pi^2\frac{m}{s^2} = a_{ci}$$

5 - Un vehículo se desplaza en la carretera a una velocidad de módulo 5 m/s. Si el diámetro de sus ruedas es 1 m,
a) determinar el módulo de la velocidad angular de las mismas en grados por segundo y radianes por segundo.
b) si el vehículo partiera del reposo, calcular el módulo de su aceleración angular (supuesta constante) si cada rueda da 20 vueltas en 10 segundos.
c) Determinar el módulo de su aceleración tangencial y el de la velocidad angular final.

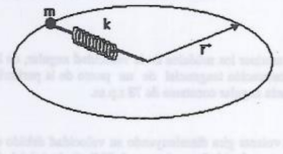
$$v_t = \frac{\omega d}{2} \Rightarrow \frac{2v_t}{d} = \begin{cases} 10\ s^{-1} = \omega_0 \\ 10 * \frac{180º}{\pi}\ s^{-1} = 273\ \frac{º}{s} = \omega_0 \end{cases}$$

$$\theta(10s) = 2\pi 20 = 40\pi = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow \frac{40\pi 2}{10^2} = 0.8\pi\ s^{-2} = \alpha$$

$$\alpha\frac{d}{2} = 0.4\pi\frac{m}{s^2} = a_t \wedge 0.8\pi * 10 = 8\pi\ s^{-1} = \omega(10s)$$

6 - Una partícula de masa m apoyada en una mesa horizontal sin rozamiento, gira con velocidad angular constante unido a un resorte de constante k.
Demostrar que |r| y |w| están relacionados por :

$$|\vec{r}| = |\vec{L}| + \frac{|\vec{L}|\, m\, |\vec{w}|^2}{k}$$



siendo L , la longitud del resorte sin estiramiento.

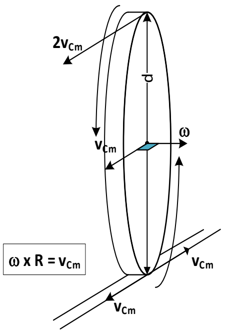
Considere : $\frac{m\,w^2}{k} \ll 1$

$$\sum F_C = F_e = k\Delta x = k(r - L) = ma_C = m\frac{v_t^2}{r} = m\omega^2 r \Rightarrow kr = kL + m\omega^2 r \Rightarrow \boldsymbol{r = L + \frac{m\omega^2 r}{k}}$$

7 - Un automóvil que circula a una velocidad de módulo 72 km/h tiene ruedas de 0,8 m de diámetro.
a) ¿Cuál es el módulo de la velocidad angular de las ruedas alrededor del eje?
b) Si las ruedas se frenan uniformemente, deteniéndose al cabo de 40 vueltas ¿Cuál es el módulo de la aceleración angular?
c) ¿Qué distancia recorre el automóvil durante ese lapso de frenado?

En estas condiciones, el dibujo está mal, el omega sigue la misma dirección, pero sentido contrario.

Movimiento de Rotación con Deslizamiento



$$\vec{v}_{Cm} = \vec{\omega}\, x\vec{R}\ como\ \vec{\omega} \perp \vec{R} \Rightarrow v_{Cm} = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v_{Cm}}{R} = \frac{2v_{Cm}}{d} = 50\ s^{-1}$$

$$\alpha = Constante \Rightarrow \begin{cases} \theta(t) = -\frac{1}{2}\alpha t^2 + 50t \\ \omega(t) = -\alpha t + 50 \end{cases} \Rightarrow$$

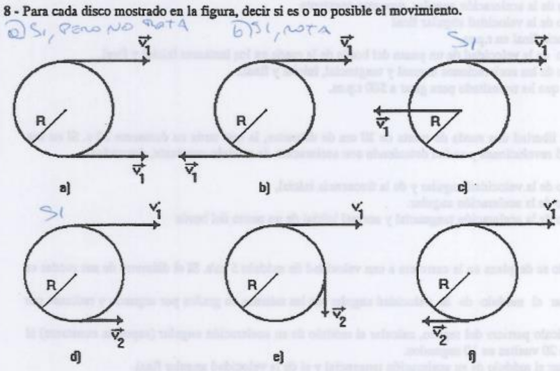
$$\begin{cases} \theta(t_0) = 40 * 2\pi = -\frac{1}{2}\alpha t_0^2 + 50t_0 \\ \omega(t_0) = 0 = -\alpha t_0 + 50 \Rightarrow 50 = at_0 \end{cases} \Rightarrow 80\pi = 25t_0 \Rightarrow t_0 = 3.2\pi s \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{50}{t_0} = 5s^{-2}$$

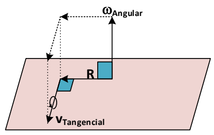
$$\begin{cases} x(t_0) = -\frac{1}{2}at_0^2 + 20t_0 = -50.53a + 201.06 \\ v(t_0) = 0 = -at_0 + 20 = -3.2\pi a + 20 \Rightarrow a = 2\frac{m}{s^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x(3.2\pi) = 100m$$

8 - Para cada disco mostrado en la figura, decir si es o no posible el movimiento.



Para todos los casos podemos sacar la siguiente conclusión:



$$\vec{v}_{Tangencial} \perp \vec{R} \wedge \vec{v}_{Tangencial} \perp \vec{\omega}_{Angular}$$

"La velocidad Tangencial es siempre perpendicular al Plano formado por el Radio y la Velocidad angular"

"Si hay rotación la Velocidad angular Medida desde cualquier radio no puede ser Nula y debe ser la misma en cualquier punto del Cuerpo Rígido".

"La Velocidad Tangencial debe ser distinta en cada punto del Cuerpo Rígido, a menos este a la misma distancia del eje elegido."

En el *primer caso* se da el corolario de la segunda definición, por lo tanto, **no hay Rotación**, pero es una **Traslación pura**.

En el ***segundo caso*** el eje de giro está evidentemente en el Diámetro central Vertical y además las velocidades son opuestas por lo que el centro está entre 2R:

$$\frac{v_1}{R_1} = \frac{v_1}{R_2} = \omega \wedge R_1 + R_2 = 2R \Rightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{1}{2R - R_1} \Rightarrow R_1 = R = 0Cm \wedge \omega = \frac{10}{10}\frac{Cm}{Cms} = 1\ s^{-1}$$

En el ***tercer caso*** hay **Roto traslación**:

$$\frac{v_1}{R_1} = \frac{v_1}{R_2} = \omega \wedge R_1 + R_2 = R \Rightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R - R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{R}{2} = 5Cm \wedge \omega = \frac{10}{5}\frac{Cm}{Cms} = 2\ s^{-1}$$

En el ***cuarto caso*** hay **Rotación con Centro fuera del Cuerpo Rígido**:

$$\frac{v_1}{R_1} = \frac{v_2}{2R + R_1} = \omega \Rightarrow \frac{10}{R_1} = \frac{2}{2R + R_1} \Rightarrow R_1 = -\frac{5R}{2} = 25Cm \wedge \omega = \frac{10}{25}\frac{Cm}{Cms} = \frac{2}{5} = 0.4\ s^{-1}$$

En el ***quinto caso*** no hay **Movimiento posible**:

Observen que, si cruzamos los planos generadores, perpendiculares a la hoja y a la velocidad, obtenemos a la intersección, como la línea central del disco que pasa por el centro. Pero si así fuera, toda la velocidad tangencial al disco, sería la misma, cosa que no ocurre, siendo un caso IMPOSIBLE.

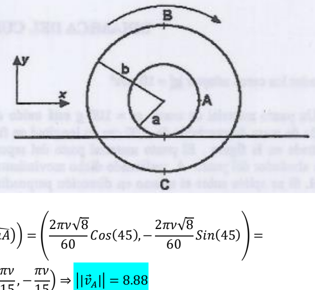
En el s***exto caso*** hay **Rotación con Centro entre 2R**:

$$\frac{v_1}{R_1} = \frac{v_2}{R_2} = \omega \wedge R_1 + R_2 = 2R \Rightarrow \frac{v_1}{R_1} = \frac{v_2}{2R - R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{5}{3}R = 16.6Cm \wedge \omega = \frac{10}{16.6}\frac{Cm}{Cms} = \frac{2}{3.4} = 0.6\ s^{-1}$$

9 - Un cilindro de radio b posee una ranura delgada de radio a. Rueda sin resbalar sobre una varilla rígida con una frecuencia de 30 r.p.m. en el sentido horario. Determinar las velocidades de los puntos A, B y C respecto de un sistema de referencia fijo en la Tierra.

a = 2 cm

b = 6 cm



$$\vec{v}_A = \left(\left|\left|\vec{\omega}\ x\ \overrightarrow{aA}\right|\right|Cos(\widehat{\omega aA}), -\left|\left|\vec{\omega}\ x\ \overrightarrow{aA}\right|\right|Sin(\widehat{\omega aA})\right) = \left(\frac{2\pi\nu\sqrt{8}}{60}Cos(45), -\frac{2\pi\nu\sqrt{8}}{60}Sin(45)\right) =$$

$$\left(\frac{\pi\nu\sqrt{8}}{60}\sqrt{2}, -\frac{\pi\nu\sqrt{8}}{60}\sqrt{2}\right) = \left(\frac{\pi\nu}{15}, -\frac{\pi\nu}{15}\right) \Rightarrow \left|\left|\vec{v}_A\right|\right| = 8.88\ \frac{Cm}{s}$$

$$v_b = \omega(a + b) = \frac{2\pi\nu}{60}(a + b) = 25.12\frac{Cm}{s}$$

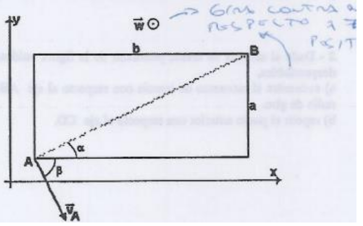
$$v_c = \omega(b - a) = -12.56\frac{Cm}{s}$$

10 - Los puntos A y B están sobre una lámina delgada que se mueve en el plano xy, Se sabe que el punto A tiene una velocidad de módulo 10 cm/s.

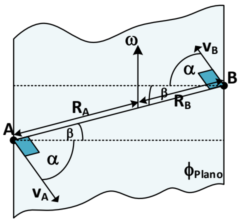
a) Determinar la velocidad del punto B respecto de un sistema de referencia fijo en la Tierra.

b) Hallar la posición del eje instantáneo de rotación.

α = 37°
β = 53°
a = 3 cm
b = 4 cm
f = 30 r.p.m.



Para evitar confusiones nada importa acá la forma del Cuerpo, solo importa las Direcciones y Posiciones de las Variables Cinemáticas por lo que solo vamos a usar como Guía las Rotaciones y no el cuerpo:



Como vemos la Velocidad Tangencial en A Junto a la Velocidad Angular nos define que R_A está sobre la recta AB:

$$v_A = \omega R_A \Rightarrow R_A = \frac{v_A}{\omega} = \frac{60 v_A}{2\pi f} = 3.18\ Cm \Rightarrow$$

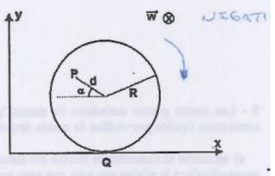
$$R_b = AB - R_A = \sqrt{a^2+b^2} - R_A = 1.82\ Cm \Rightarrow$$

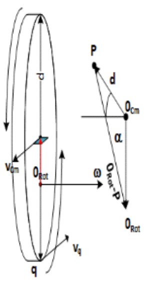
$$v_B = \omega R_B = \frac{2\pi f R_B}{60} = 5.72\frac{Cm}{s} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_B = \left(-v_B Cos(\beta), v_B Sin(\beta)\right) = (-3.44, 4{,}56)\frac{Cm}{s}$$

11 - Una rueda se mueve de tal modo que su centro tiene una velocidad de 1 m/s hacia la derecha. Sabiendo que su velocidad angular es de 5 s⁻¹, determinar las velocidades de los puntos P y Q respecto de un sistema de referencia fijo en la Tierra.

α = 30°
d = 20 cm
R = 30 cm





$$v_{Cm} = \omega R_{Cm} \Rightarrow R_{Cm} = \frac{v_{Cm}}{\omega} = 0.2\ m \downarrow del\ Centro\ Masa \Rightarrow R_q = R - R_{Cm} = 10Cm \Rightarrow$$

$$v_q = \omega R_q = -50\frac{Cm}{s}$$

Busquemos el Vector P:

$$\vec{P} = \left(-dCos(\alpha), dSin(\alpha)\right) = \left(-\sqrt{3}, 10\right)Cm \wedge O_{Rot} = (0, -20Cm) \Rightarrow$$

$$\vec{P} - \vec{O}_{Rot} = \vec{R}_P = \left(-10\sqrt{3}, 30Cm\right) \Rightarrow \vec{v}_P = \vec{\omega} x \vec{R}_P =$$

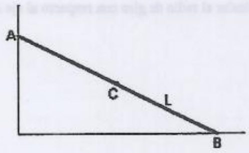
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -5 \\ -10\sqrt{3} & 30 & 0 \end{vmatrix} = 150\frac{Cm}{s} i - 50\sqrt{3}\frac{Cm}{s} j \Rightarrow$$

$$||\vec{v_P}|| = 173.2\frac{Cm}{s} \wedge \phi = 120 - 90 = 30$$

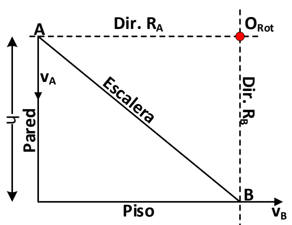
12 - Una escalera homogénea de 5 m de longitud se encuentra apoyada sobre una pared lisa. Si el punto A en el instante que se encuentra a 3 m de altura desciende a 3 m/s, hallar en dicho instante:

a) la velocidad del extremo B.

b) la velocidad del punto medio de la escalera (C).



Lo primero ue debemos interpretar es donde está el ***Punto de Giro,*** para ello analizaremos cuales son las direcciones de las velocidades en los extremos A y B en ese instante:



$$v_A = \omega R_A \Rightarrow \omega = \frac{v_A}{R_A} = \frac{v_A}{\sqrt{L^2-h^2}} = 0.75\ s_{-1} \odot\ (Saliente)$$

$$v_B = \omega R = 2.25\frac{m}{s}$$

$$C = 4mi + 1.5mj \Rightarrow \overrightarrow{O_{Rot}C} = \vec{C} - \vec{O}_{Rot} = -4mi - 1.5mj \Rightarrow \vec{v}_C =$$

$$\vec{\omega}\ x\ \overrightarrow{O_{Rot}C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 0.75 \\ -4 & -1.5 & 0 \end{vmatrix} = 1.125\frac{m}{s} i + 3\ \frac{m}{s} j \Rightarrow$$

$$v_C = 1.875$$