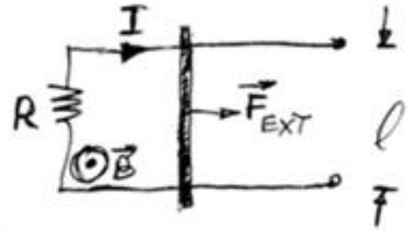
Fem de movimiento

Supongamos tener dos conductores rectos y // separados con R en dos de sus extremos:



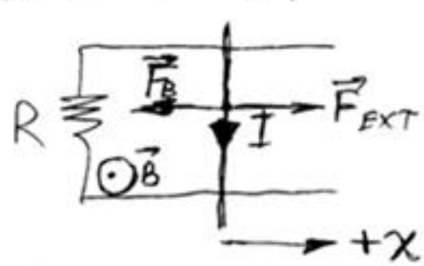
En dirección $\perp$ al plano de la espira, existe $\vec{B}$ uniforme

ℓ

Una barra de material conductor (fig), se desplaza con $v = cte$ x medio de un agente externo $\vec{F}_{EXT}$

Analicemos esta circunstancia:

Una F exterior mueve la barra hacia la derecha $\therefore$ la cantidad de B concatenada por la espira va en aumento $\Rightarrow$ se debe de generar una I inducida que tenga un sentido que, al generar su campo $\vec{B}_{(i)}$, se oponga al crecimiento del $\vec{B}$ (observar el sentido de I); entonces:



$$F_B = I\ell B$$
$$\vec{F}_B = I\ell B(-\hat{i})$$

Obsérvese que el sentido de F_{EXT} es la de $(\hat{i})$, pues debe oponerse a la $\vec{F}_B$, para que la barra se mueva a $v = cte$. $\therefore$ $\vec{F}_{EXT} = I\ell B\,\hat{i}$

O sea, la I inducida debe tener un sentido que provoque una B inducida que se oponga al crecimiento de la B (x el movimiento de la barra hacia la derecha) ⇐ Faraday - Lenz

Pero si hay una I inducida, debe de haber una fem inducida e_{IND}:

$$e_{IND} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

unidades: $[e]=[B\ell v]$; $[e] = V$

$[B\ell v] = T\,m\,\frac{m}{s} = \frac{Wb}{m^2}\frac{m^2}{s} = \frac{Wb}{s} = \frac{V\,s}{s} = V$

$$\Phi_B = \int_0^x B \cdot \ell\, dx = B\,\ell\, x$$

$$e_{IND} = -\frac{d}{dt}\left(B\,d\,x\right) = -B\,\ell\,\frac{dx}{dt}$$

! $\boxed{e_{IND} = -B\,\ell\, v}$ FEM de movimiento

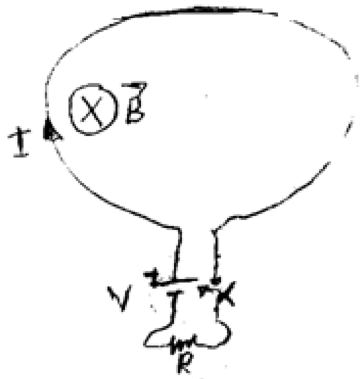
x lo tanto: $I = \frac{|e_{IND}|}{R} = \frac{B\,\ell\, v}{R}$

Esta I atraviesa R ∴ hay una Potencia disipada

$$P_R = I^2 . R = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R^2} R \Rightarrow \boxed{P_R = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R}}$$

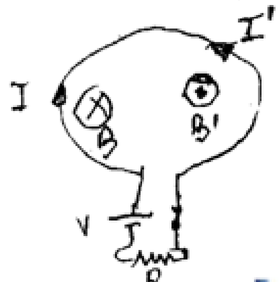
O sea: la P que generamos con la $\vec{F}_{EXT}$ se disipa enteramente en la R (∄ roce)

Autoinductancia o Inductancia L [H]

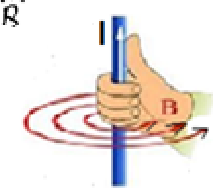


Una (o varias) espira es conectada a una fuente de continua V (fig.) En t=0 se cierra el interruptor y, en consecuencia, se genera una I en el sentido indicado

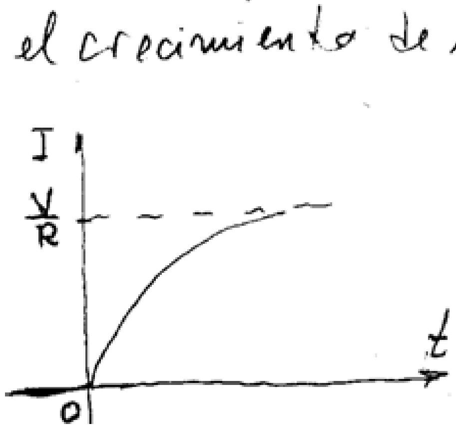
Pero esa I es generadora de un campo $\vec{B}$ (Ampere), de dirección y sentido en la figura.
Este $\vec{B}$, que hacía un instante no existía, desde t=0 crece rápidamente hasta su valor final (exactamente = que lo hace la I que la generó) ∴ hay una $\vec{B}$ variable en t enmarcada por la espira conductora ⇒ Faraday-Lenz se hacen presente:



Aparece una fem (Faraday) quien generará una corriente I', quien a su vez generaría otro campo $\vec{B}'$ que se opondrá (Lenz) al cambio $\vec{B}$ que viene creciendo.



Macroscópicamente, se observa un retardo en el crecimiento de la I que impone la fuente V.



Este retardo es poco detectable si se trata de una o pocas espiras (se tiene que tener instrumentos que detecten Δt muy pequeños)

O sea, la fem e está "autoinducida" en el circuito y se debe a los cambios que ocurren en el propio circuito ⇒ la corriente I (impuesta por la batería V) actúa sobre sí misma, oponiéndose al cambio: esto dá como resultado una moderación en su variación.

$$\Phi_B = \int_{sup} \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad ; \text{ como } B \sim I \therefore \Phi_B \sim I$$

La cte. de proporcionalidad que convierte a ↑ en una ecuación es **L**:

$$\Phi_B = L\, I \qquad L: \text{autoinductancia o inductancia}$$

$$L = \frac{\Phi_B}{I} \left[\frac{Wb}{A} = H\right] \qquad H \equiv \text{Henry (no confundir con } \vec{H}\text{)}$$

La inductancia **L** es el 3er. (y último) dispositivo pasivo necesario para modeliza a todo circuito eléctrico, con el R y el C.

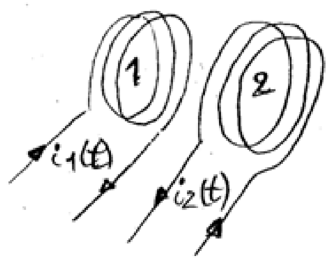
$$e = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} L I \quad \text{pero para un circuito: } L = cte$$

$$\boxed{e = -L\frac{dI}{dt}}$$

Observar que L depende de Φ_B; Φ_B depende de $\vec{B}$ y $\vec{B}$ depende del material (μ) $\therefore$ $L = f(\mu; geo)$, como lo son R y C.

$$[L] = \left[\frac{\Phi_B}{I}\right] = \frac{Wb}{A} = \frac{V.s}{A} = \Omega . s = H$$

Inducción mutua M [H]



Dos bobinas cercanas, estáticas; por c/bobina circula corriente que varía con t ⇒ los campos $\vec{B}$ que estas producen también varían con t.

El flujo del campo $\vec{B}$ que atraviesa c/vuelta de la bobina 2 cambiará debido a la variación de la corriente en la bobina 1. Igualmente, el flujo que atraviesa c/vuelta de la bobina 1 cambiará debido a la variación de la corriente en la bobina 2. Estas contribuciones a las variaciones de flujo y sus correspondientes fem inducidos se suman a las autoinducidas.

Como aparece una fem inducida en c/bobina debido a un cambio en la otra bobina ⇒ existe una interacción mutua entre ambas ∴ se lo llama a este efecto Inducción Mutua.

Consideremos la fem inducida en la bobina 2 (x ej.), debido a la variación de la i_1 en la bobina 1: el flujo que atraviesa c/vuelta de la bobina 2 tiene una contribución debido al campo $\vec{B}_1$ creado por la bobina 1: llamamos Φ_{21} a esta contribución al flujo que atraviesa una vuelta de la bobina 2 debido al campo $\vec{B}$ que crea la bobina 1.

El flujo que atraviesa c/u de las N_2 vueltas de la bobina 2 es el mismo ∴ $N_2\Phi_{21}$ es el flujo que atraviesa las N_2 vueltas de la bobina 2 debido al campo $\vec{B}$ creado por la bobina 1

Por Biot y Savart, el campo $\vec{B}_1$ será proporcional a i_1 ⇒ $N_2\Phi_{21}$ será proporcional a i_1 ∴

$$N_2\Phi_{21} = M_{21}\, i_1$$

M_{21} ≡ coeficiente de inductancia mutua

Si derivamos ambos miembros: $N_2 \frac{d}{dt}\Phi_{21} = M_{21}\frac{d}{dt} i_1$

Por Faraday:

$$e_{21} = -N_2 \frac{d}{dt}\Phi_{21} = -\frac{d}{dt}(N_2\Phi_{21}) = -\frac{d}{dt}(M_{21} i_1)$$

$$\boxed{e_{21} = -M_{21}\frac{d}{dt} i_1}$$

La fem e_{21} inducida en la bobina 2 es proporcional a la rapidez de la variación de la corriente i_1 de la bobina 1

M_{21} depende de factores como las formas de las bobinas, su construcción, su separación y orientación relativa.

Invirtiendo las funciones de ambas bobinas:

$$\boxed{e_{12} = -M_{12}\frac{d}{dt} i_2} \qquad [M] = H$$

En gral., si por un componente circula una corriente variable, inducirá una fem en otro componente cercano.

Siempre $M_{12} = M_{21}$

Unidades

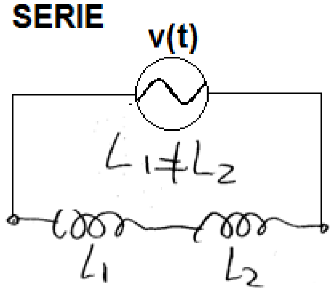
$$e = N\frac{d\Phi_B}{d}, \quad V = \frac{Wb}{s}, \quad [Wb] = V.s$$

$$\Phi_B = \int_\Sigma \vec{B} \bullet d\vec{s}, \quad [B] = \frac{Wb}{m^2}$$

$$\vec{B} = \mu.\vec{H}, \quad \frac{Wb}{m2} = \mu.\frac{A}{m}, \quad \mu = \frac{Wb}{A.m}$$

Asociación de L

SERIE

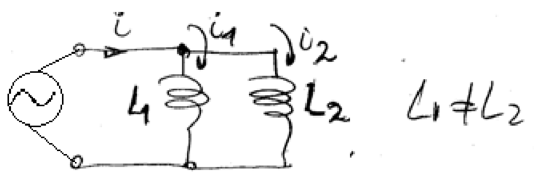


Si los L está sufi separados (no hay mutuainducción) → $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$, entonces:

$$\frac{L.di(t)/dt}{v(t)} = \frac{L_1.di(t)/dt}{v_1(t)} + \frac{L_2.di(t)/dt}{v_2(t)}$$

$$\boxed{L = \Sigma L_n}$$

Paralelo



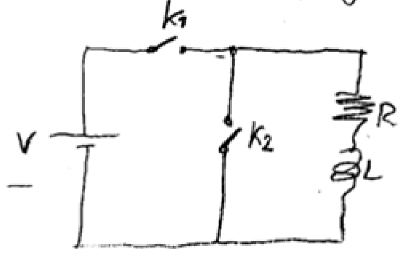
$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t)$$

$$\frac{v(t)}{L} = \frac{d}{dt}i(t)\ ; \quad \frac{v(t)}{L_1} = \frac{d}{dt}i_1(t)\ , \quad \frac{v(t)}{L_2} = \frac{d}{dt}i_2(t)$$

$$\frac{v(t)}{L} = \frac{v(t)}{L_1} + \frac{v(t)}{L_2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{L} = \sum \frac{1}{L_n}}$$

Circuito RL

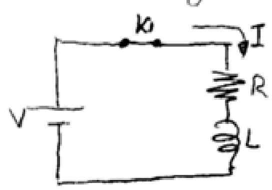
En forma similar, cuando nos encontramos con los resistores y los capacitores y desarrollamos el circuito RC, ahora lo hacemos con el RL, en carga y descarga



Datos: V, R y L

CARGA

k_1 cerrado y k_2 abierto;



$$V = V_R + V_L = RI + L\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{V}{R} = I + \frac{L}{R}\frac{dI}{dt} \; ; \; \frac{V}{R} - I = \frac{L}{R}\frac{dI}{dt}$$

$$dt\left(\frac{V}{R} - I\right) = \frac{L}{R}\,dI \;\therefore\; \frac{dt}{\frac{L}{R}} = \frac{dI}{\frac{V}{R} - I}$$ integrando ambos:

$$\frac{t}{\frac{L}{R}} = -\ln\left(\frac{V}{R} - I\right) + C \quad (*)$$

Hallamos la de C, con la condición inicial: en $t = 0 \Rightarrow I = 0$

En $(*)$: $0 = -\ln\frac{V}{R} + C \;\therefore\; C = \ln\frac{V}{R}$

Reemplazamos en $(*)$: $\frac{t}{\frac{L}{R}} = -\ln\left(\frac{V}{R} - I\right) + \ln\frac{V}{R}$ $(**)$

Siendo $\frac{V}{R}$ la I máxima: $I_0 \Rightarrow \frac{V}{R} = I_0$

Análisis de $\frac{L}{R}$

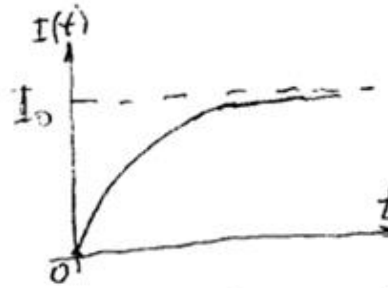
$$\left[\frac{L}{R}\right] = \frac{H}{\Omega} = \frac{Wb}{A}\,\frac{1}{\Omega} = \frac{V.s}{A.\Omega} = \frac{\Omega\, s}{\Omega} = s \,!$$

El cociente $\frac{L}{R}$ es un tiempo y lo llamamos τ_L **constante de tiempo inductiva del circuito RL** (Recordar τ_C)

de (**): $\frac{t}{\tau_L} = -\ln\left(I_0 - I\right) + \ln I_0 \quad \times(-1)$:

$$-\frac{t}{\tau_L} = \ln\left(I_0 - I\right) - \ln I_0 \;\therefore\; -\frac{t}{\tau_L} = \ln \frac{I_0 - I}{I_0}$$

$$e^{-\frac{t}{\tau_L}} = \frac{I_0 - I}{I_0} \Rightarrow \boxed{I = I_0\left(1 - e^{-t/\tau_L}\right)}$$ expresión de la I $\forall t$, $\therefore I(t)$

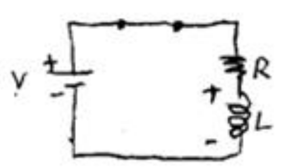


Para $t \geq 5\tau_L \Rightarrow I(t) = I_0 \rightarrow$ considérase el valor final $I_0 = V/R$

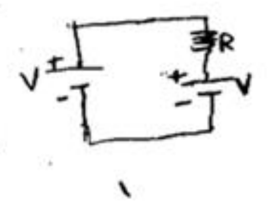
Para $t \geq 5\tau_L$ se lo llama Régimen transitorio (I cambia con t)

<u>Análisis del comportamiento del **RL** desde la Ley de Faraday - Lenz</u>

Circuitalmente, si en $t = 0$ cierro K_1 y resulta que $I = 0$, debe observarse que la ddp = V de la ddp = V de la fuente se encuentra totalmente sobre el L, ya que si sobre la R hubiera ddp $\Rightarrow$ habría I, ya que sobre un dispositivo óhmico no puede dejar de cumplirse la ley de Ohm $\therefore I = V/R \;\therefore$ toda la V de la fuente está aplicada sobre el **L**:

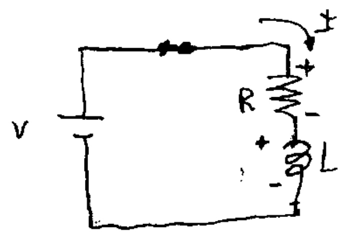


$\Rightarrow$ Justo en $t = 0$, cuando cierro K_1, puedo hacer el siguiente circuito equivalente



$I = 0$!

Pero, desde la teoría de campos ¿Qué sucede?
Antes de cerrar K_1, la I y consecuentemente $\vec{B}$, en el inductor L es nulo ∴ cuando cierro K_1, quiere establecerse una corriente generada x la fuente de ddp V, pero esto significa la presencia de un $\vec{B}$ (que un instante antes no lo había), x lo tanto sucede la limitación de Lenz, y para que no se establezca el $\vec{B}$, I debe ser nulo ∴ sobre la R no debe de haber ddp alguna ⇒ para que se cumpla Kirhhoff, toda la ddp de encontrarse sobre el L; esto es de muy pequeña duración (depende del valor de L): supongamos para hacer números fáciles, que V=10V:
Justo cuando cierro K_1, sobre el L hay exactamente una ddp $V_L = 10V$ (sentido contrario a la fem de la fuente) ⇒ I = 0; un Δt después, sobre el L hay una ddp $V_L = 9V$ y, x lo tanto, sobre la R hay una ddp $V_R = 1V$:

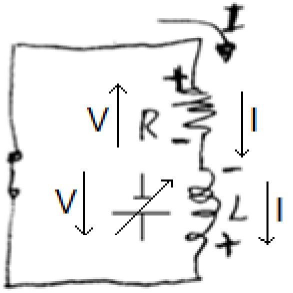


Entonces habrá una I asociada a la ddp sobre la R: $V_R = 1V$ ∴ $I = \frac{V_R}{R}$
A medida que Δt crece, Lenz moderadamente permite aumentar I y ⇒ $\vec{B}$↑

Hasta que, en $t \geq 5\tau_L$, toda la ddp está sobre la R: $V_R = 10V$ y la I es máxima $I_0 = \frac{10V}{R}$ ⇒ sobre el L habrá un campo $\vec{B}$ máximo generado x una I_0 (máx) pero ese campo $\vec{B}$ es cte en t (como lo es I) ∴ ∄ oposición de Lenz.

DESCARGA

Si después de un $t \geq 5\tau_L$, desconectamos la fuente, abriendo K_1 y cerramos K_2 y llamamos $t=0$ el instante de cierre de K_2:



Ahora, para $t = 0 \Rightarrow I = I_0 \therefore$ en el núcleo del L hay un $\vec{B}$ asociado a la I_0, pero al desaparecer la fuente, la I_0 (que era generada x la fuente) quiere desaparecer y con ella quiere desaparecer el $\vec{B}$ que la I_0 genera.

x lo tanto, Lenz se opone al cambio que le sucede al $\vec{B}$ y para ello, tiende a mantener I_0 igual que cuando estaba conectada la fuente, para ello, en la R deberá de subsistir la ddp que había justo antes de desconectarse la fuente (fig.) y para que se cumpla Kirchhoff, sobre el L habrá una ddp con la polaridad de la fig $\Rightarrow -V_R + V_L = 0$

$-RI + L\frac{dI}{dt} = 0 \rightarrow$ pero la I, que arranca, en la descarga con un máximo (I_0), decrece con $t \therefore \frac{dI}{dt} < 0$

$$-RI - L\frac{dI}{dt} = 0 \therefore RI = -L\frac{dI}{dt} \rightarrow I\,dt = -\frac{L}{R}dI$$

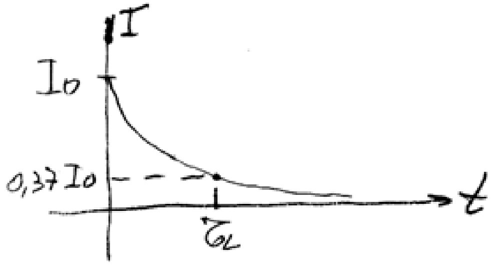
$$\frac{dt}{\frac{L}{R}} = -\frac{dI}{I} \Rightarrow -\frac{dt}{\frac{L}{R}} = \frac{dI}{I} \therefore -\frac{t}{\frac{L}{R}} = \ln I_0 + C \quad (*)$$

Para $t=0 \Rightarrow I = I_0 \rightarrow$ en $(*)$ $0 = \ln I + C$

$$C = -\ln I_0 \therefore \text{en } (*): -\frac{t}{\frac{L}{R}} = \ln I - \ln I_0 \Rightarrow -\frac{t}{\frac{L}{R}} = \ln\frac{I}{I_0}$$

tomando antiln :

$$e^{-\frac{t}{L/R}} = \frac{I}{I_0} \therefore \boxed{I = I_0 e^{-\frac{t}{\overbrace{L/R}^{\tau_L}}}}$$



si : $t = \tau_L \Rightarrow$

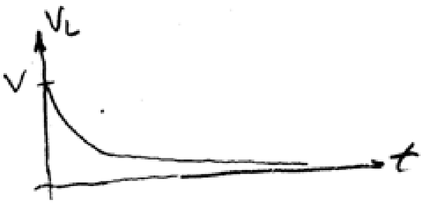
$I_{t=\tau_L} \cong 37\%\, I_0$

Veamos la ddp sobre el L : V_L

$$V_L = -L\frac{dI}{dt} = -L\frac{d}{dt}\left(I_0 e^{-\frac{t}{L/R}}\right)$$

$$= I_0 R\, e^{-\frac{t}{L/R}}$$

$$\boxed{V_L = V e^{-\frac{t}{\tau_L}}}$$



si $t = 0 \Rightarrow V_L = V$; para que se cumpla Ley de Mallas de Kirchhoff $\Rightarrow$ si $V_L = V \therefore V_R = -V$

Esto indica que en R hay una ddp $V_R \Rightarrow$ si hay una ddp sobre un dispositivo óhmico $\Rightarrow$ hay una I, como la ddp es máxima $\Rightarrow$ la I es máxima : I_0 (ver gráfico de I).