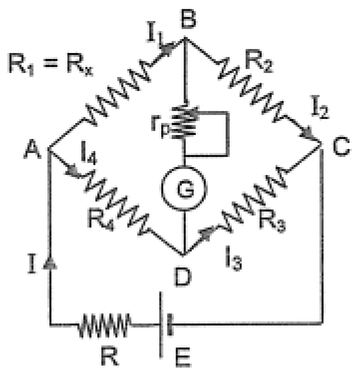
INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

El trabajo práctico tiene como objetivo obtener experimentalmente el valor de diferentes resistencias a través de un circuito llamado "puente de hilo" para:

1) Calcular la resistividad de una muestra de constantán.
2) Verificar las leyes de asociación de resistencias.
3) Analizar los errores de los puntos anteriores.

MARCO TEÓRICO

Para buscar el valor desconocido de una resistencia se emplea un circuito llamado "Puente de Wheatstone".



El circuito consta de 4 resistencias colocadas en los lados de un cuadrilátero ABCD, y en una de sus diagonales se encuentra un detector de cero o galvanómetro (amperímetro para corrientes muy chicas), mientras que en la otra se conecta la fuente de alimentación. Si se coloca la resistencia de valor desconocido en el lugar de la resistencia R1, se puede modificar el valor de las otras para que la corriente en la rama del galvanómetro sea 0, y en ese punto el puente se encuentre en equilibrio.

Si la corriente en la rama del galvanómetro es 0, el potencial en los puntos B y D es el mismo, por lo tanto:

$$I_1 = I_2 \; y \; I_3 = I_4$$

Y como los potenciales son iguales:

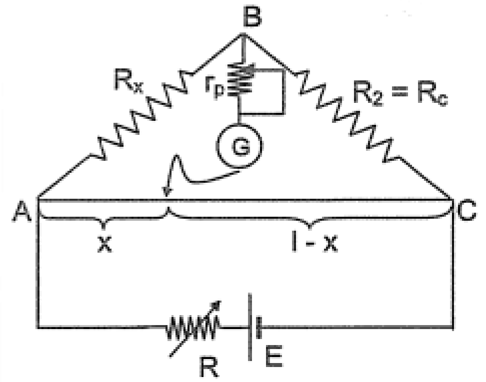
$$V_{AB} = V_{AD} \rightarrow R_X I_1 = R_4 I_4$$

$$V_{BC} = V_{DC} \rightarrow R_2 I_2 = R_3 I_3$$

Tomando en cuenta la igualdad de corrientes y dividiendo miembro a miembro:

$$R_x = \frac{R_4 R_2}{R_3} \qquad (1)$$

Por motivos de simplificación en el trabajo se utiliza un puente de hilo donde la única diferencia está en la transformación de las resistencias 3 y 4 en un hilo conductor homogéneo de sección constante.



En este circuito, R2 es una caja de décadas (instrumento que entrega resistencia con errores muy pequeños) que denominamos Rc. A su vez se coloca una resistencia Rp que hace de protección al galvanómetro.

Las resistencias 3 y 4 ahora serán relacionadas con la distancia desde el punto A hasta la rama del galvanómetro que ahora es variable a través de una chapita móvil o cursor.

Por lo tanto, resulta:

$$R_3 = \rho \frac{l_3}{S} \quad y \quad R_4 = \rho \frac{l_4}{S} \qquad (2)$$

Tomando (1) y (2):

$$R_x = \frac{l_4}{l_3} R_C \qquad (3)$$

Para lograr el equilibrio se varía la razón $\frac{l_4}{l_3}$ desplazando el cursor sobre el hilo. Si tomamos $l_4 = x$ y $l_3 = l - x$. Entonces la expresión queda:

$$R_x = \frac{x}{l - x} R_C$$

A su vez, introducimos el concepto de sensibilidad del puente que está relacionado directamente con el desplazamiento máximo del cursor sin que se detecte un movimiento en la aguja del galvanómetro. Entonces, definimos la sensibilidad absoluta como la relación entre la variación de divisiones del galvanómetro (Δα) y la variación en la posición de la chapita o cursor móvil (Δx) que provocó esa variación.

$$S = \frac{\Delta\alpha}{\Delta x}$$

Por último, la resistividad de una muestra se expresa de la siguiente manera:

$$R_x = \boldsymbol{\rho} \frac{L}{a}$$

Donde L es la longitud de la muestra, en este caso el alambre, y a la sección, que al ser un hilo, la expresión de la resistividad queda de la siguiente manera:

$$\rho_x = R_x \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4 \cdot L}$$

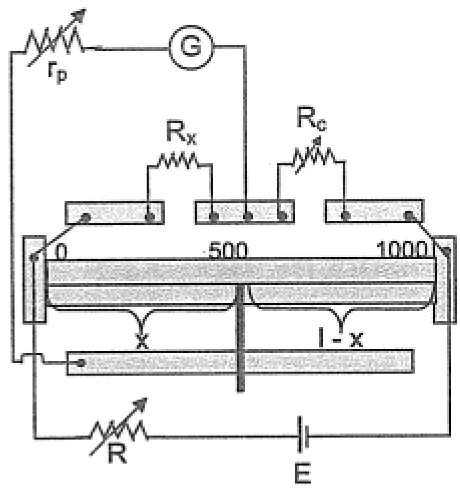
DESARROLLO

01. Materiales empleados

- Fuente de corriente continua.
- Resistencia variable.
- Puente de hilo.
- Caja de resistencias por décadas.
- Placa de resistencias para conexión serie-paralelo.
- Muestra de Constantán.
- Galvanómetro.

02. Armado de circuito

El circuito se armó de la siguiente manera:



03. Mediciones y cálculos

Al tener todo conectado con la primera muestra, que en este caso era un alambre, se forzó en Rc una resistencia de algún valor que sea similar al esperado del alambre y moviendo el cursor se buscó que en la rama del galvanómetro, con la resistencia variable al máximo, la corriente sea nula. En este punto se puso la resistencia variable en 0 y se ajustó el cursor para que la corriente vuelva a ser nula y se midió con la regla milimetrada propia del puente de hilo. Una vez que se tenía esta distancia se buscó la sensibilidad del puente, para esto se movió el cursor hasta que en el galvanómetro la corriente se mueva 5 divisiones hacia la izquierda, en este punto se midió la distancia y se calculó el Δx_{izq}, luego se volvió el cursor a la distancia para corriente nula y se hizo lo mismo para el otro lado, calculando Δx_{der}. Esto se repitió para dos resistencias, y para esas dos resistencias en serie y en paralelo. En total 5 muestras. Para todas las muestras se utilizó el mismo Δα ya que es la cantidad de divisiones que se mueven para el cálculo de Δx, tanto para izquierda y derecha.

VALORES MEDIDOS:

	Rc	x	Δα	Δx_{izq}	Δx_{der}	Δx_1	d	Δd	D	ΔD
	Ω	mm	div	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
R_A	11	569	5	10	12	**1**	1000	1	0,1	0,01
R_1	455	360	5	11	11	**1**				
R_2	1K8	345	5	12	13	**1**				
R_S	1K5	449	5	12	14	**1**				
R_P	300	405	5	11	12	**1**				

A partir de estos valores, se calculó en primer lugar la resistencia desconocida Rx, utilizando la ecuación:

$$R_x = \frac{x}{l - x} R_C$$

Donde l=d=1000mm y x es la distancia medida.

Luego, se buscó la sensibilidad. Inicialmente se calculó la sensibilidad para cada lado, y luego se promedió para buscar la sensibilidad absoluta S.

A partir de la sensibilidad, se determinó Δx_2, teniendo en cuenta que es la indeterminación en la posición del cursor debida a la sensibilidad del puente donde la cota máxima será la máxima variación en la posición del cursor que no produzca una variación apreciable en la posición de la aguja. Por lo tanto se calcula con la variación de divisiones como 0,5 ya que es la mínima apreciación. Entonces:

$$\Delta x_2 = \frac{\Delta \alpha_2}{S}$$

Y luego, si tenemos en cuenta la situación donde el error es máximo:

$$|\Delta x| = |\Delta x_1| + |\Delta x_2|$$

Para calcular el error relativo de Rx (que es lo mismo que hacer ΔRx/Rx), se utiliza la ecuación:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{I}{I - x} \cdot \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta R_c}{R_c}$$

Donde ΔRx/Rx es constante y su valor es 0,005 ya que el error de la caja de resistencias es de 0,5%.

Para el error relativo de la resistividad se utilizó la siguiente expresión:

$$\left|\frac{\Delta\rho_x}{\rho_x}\right| = \left|\frac{\Delta\pi}{\pi}\right| + \left|\frac{\Delta R_x}{R_x}\right| + \left|\frac{\Delta d}{d}\right| + 2\left|\frac{\Delta D}{D}\right|$$

En este caso se desprecia el error de pi ya que se usan todos los decimales que entrega la calculadora.

VALORES CALCULADOS:

	Rx	S_{izq}	S_{der}	**S**	Δx_2	**Δx**	$\frac{\Delta R_x}{R_x}$	$2\left\|\frac{\Delta D}{D}\right\|$	$\left\|\frac{\Delta d}{d}\right\|$	$\left\|\frac{\Delta \rho_x}{\rho_x}\right\|$
	Ω	**div/mm**	**div/mm**	**div/mm**	**mm**	**mm**	**mm**	**mm**	**mm**	**mm**
R_A	14,522	0,5	0,416	0,458	1,092	2,092	0,013	0,2	0,001	0,214
R_1	255,937	0,45	0,45	0,45	1,11	2,11	0,014			
R_2	948,092	0,416	0,38	0,398	1,256	2,256	0,015			
R_S	1222,323	0,416	0,36	0,388	1,288	2,288	0,014			
R_P	204,202	0,45	0,416	0,433	1,155	2,155	0,014			

Para conocer el valor real de las resistencias, y conociendo el valor representativo y el error relativo, se busca el error absoluto utilizando la siguiente igualdad:

$$\Delta R_x = R_x * \epsilon_{R_x}$$

A su vez,

$$R_x = R_{x_0} \pm \Delta R_x$$

Entonces, para las 5 muestras, los valores reales (redondeados) son los siguientes:

$$R_A = 14{,}5 \pm 0{,}2$$

$$R_1 = 256 \pm 4$$

$$R_2 = 950 \pm 10$$

$$R_S = 1220 \pm 17$$

$$R_P = 204 \pm 3$$

Además, para conocer el valor representativo de resistividad de la muestra de constantán, se procede de la siguiente manera:

$$\rho_A = R_A \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4 \cdot L}$$

$$\rho_A = 14{,}522\Omega \cdot \frac{\pi \cdot (0.1mm)^2}{4 \cdot 1000mm}$$

$$\rho_A = (0.00011 \pm 0.00002)\Omega\text{mm}$$

Por último, con los valores de R1 y R2 se calcula la resistencia en serie y en paralelo, para luego comparar con los valores medidos con la asociación experimental.

Por leyes de asociación de resistencias sabemos que:

$$R_S = R_1 + R_2$$

$$R_P = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2}$$

Por lo tanto, con nuestros valores:

$$R_S{}' = 1204{,}029$$

$$R_P{}' = 201{,}533$$

Luego, para calcular el valor absoluto utilizamos las ecuaciones:

$$\Delta R_S{}' = \Delta R_1 + \Delta R_2$$

$$\Delta R_P{}' = R_P{}'^2 \left[\frac{\Delta R_1}{R_1{}^2} + \frac{\Delta R_2}{R_2{}^2}\right]$$

Entonces:

$$\Delta R_S' = 17{,}804$$

$$\Delta R_P{}' = 2{,}863$$

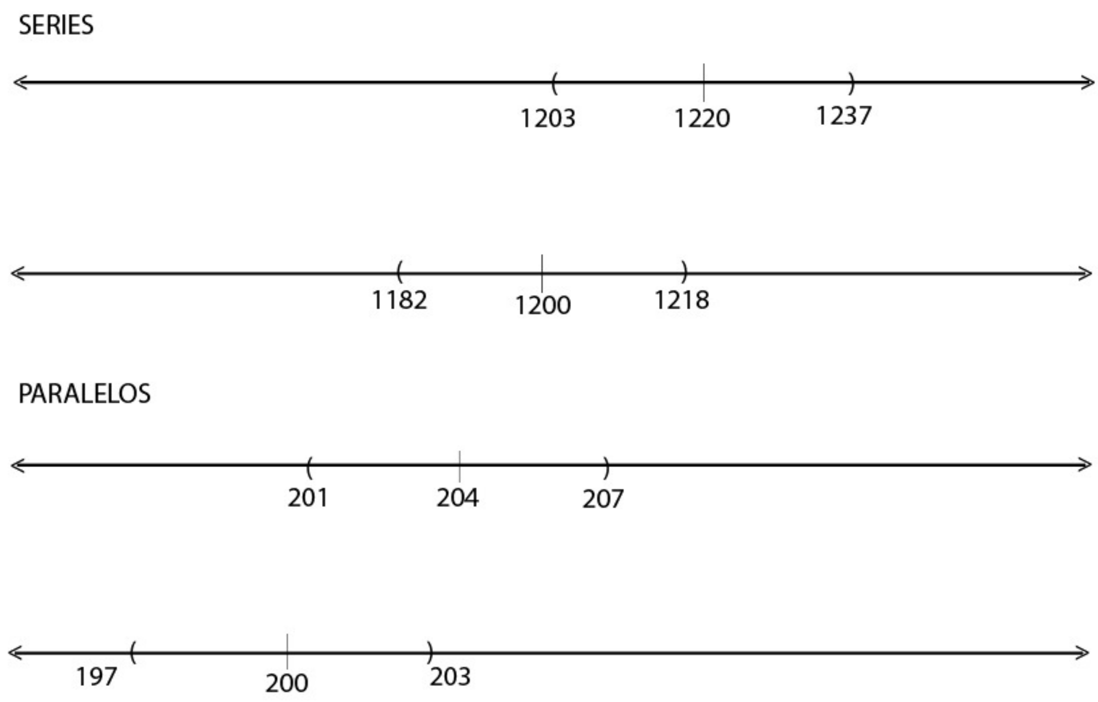
Los valores reales de las asociaciones de resistencias analíticas son:

$$R_S{}' = 1200 \pm 18$$

$$R_P{}' = 200 \pm 3$$

Gráficos

En el siguiente gráfico, se puede ver la relación de las asociaciones de resistencias. En ambos casos, la primera recta se corresponde a las resistencias experimentales mientras que la segunda lo hace con las resistencias analíticas.



Conclusiones

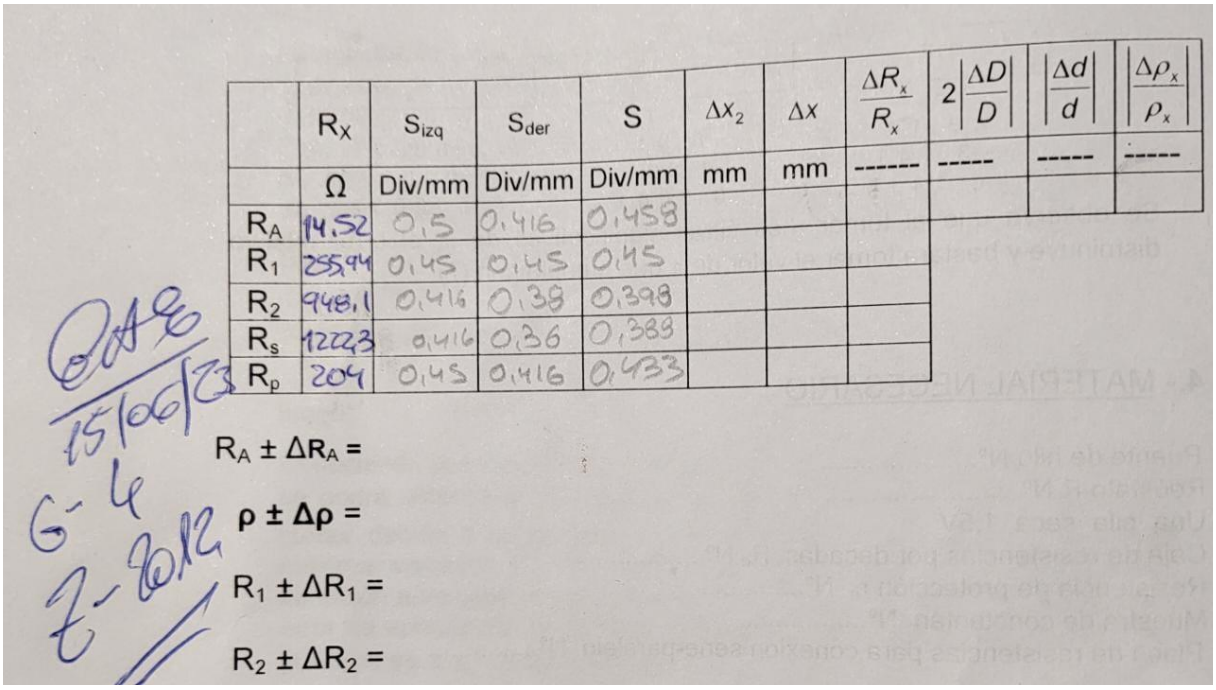
En la realización del trabajo práctico, a través de una simplificación del puente de Wheatstone, se pudo poner a prueba los conocimientos adquiridos en las clases teóricas, tanto la resistividad de un conductor como las leyes de asociación de resistencias.

En primer lugar, se pudo conocer que la resistividad del alambre es muy chica, tal como lo habíamos hablado previamente en algunas ejercitaciones de la guía. Luego, analizando el gráfico comparativo de las asociaciones de resistencias experimentales y analíticas, podemos ver como los valores se encuentran relacionadas en su rango de valores, por lo tanto podemos dar como verídicas las leyes dadas en la materia.

Otro punto a tener en cuenta es que los errores relativos de las resistencias son muy similares, esto se da ya que en la realización del trabajo no se utilizan errores muy grandes en las mediciones,

Por último, en nuestro caso utilizamos redondeos sin decimales ya que las resistencias comerciales suelen tener valores del mismo tipo, y queríamos acercarnos más a la realidad.

ANEXO



	R_X	S_{izq}	S_{der}	S	Δx_2	Δx	$\frac{\Delta R_x}{R_x}$	$2\left\lvert\frac{\Delta D}{D}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{\Delta d}{d}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{\Delta \rho_x}{\rho_x}\right\rvert$
	Ω	Div/mm	Div/mm	Div/mm	mm	mm	------	-----	-----	-----
R_A	14.52	0,5	0,416	0,458						
R_1	255,94	0,45	0,45	0,45						
R_2	948,1	0,416	0,38	0,398						
R_s	1222,3	0,416	0,36	0,388						
R_p	204	0,45	0,416	0,433						

$R_A \pm \Delta R_A =$

$\rho \pm \Delta\rho =$

$R_1 \pm \Delta R_1 =$

$R_2 \pm \Delta R_2 =$

ANEXO DE CALCULOS

Error de R_x

Como $R_x = f(x, R_x)$, se puede aplicar el teorema del valor medio para propagar errores, entonces:

$$\Delta R_x = \frac{\partial R_x}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial R_x}{\partial R_x} \cdot \Delta R_c$$

De donde:

$$\Delta R_x = \frac{(I - x) - (-1)^x}{(I - x)^2} \cdot R_c \cdot \Delta x + \frac{x}{(I - x)} \cdot \Delta R_c$$

Si se multiplica ambos lados por 1/Rx, se obtiene:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{I}{(I - x)^2} \cdot R_c \cdot \Delta x \cdot \frac{I - x}{x} \cdot \frac{1}{R_c} + \frac{x}{(I - x)} \cdot \Delta R_c \cdot \frac{I - x}{x} \cdot \frac{1}{R_c}$$

Que es lo mismo que la expresión que se utiliza en el desarrollo del informe:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{I}{I - x} \cdot \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta R_c}{R_c}$$

Error asociación de resistencias

Para no confundir, las resistencias que se calculan analíticamente se priman.

Serie

Inicialmente, se tiene que $R'_s = R_1 + R_2$, propagando errores:

$$\Delta R'_s = \frac{\partial R'_s}{\partial R_1} \cdot \Delta R_1 + \frac{\partial R'_s}{\partial R_2} \cdot \Delta R_2$$

$$\Delta R'_s = 1 \cdot \Delta R_1 + 1 \cdot \Delta R_2 \rightarrow \Delta R'_s = \Delta R_1 + \Delta R_2$$

Paralelo

A su vez, teniendo $R'_p = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$:

$$\Delta R'_p = \frac{\partial R'_p}{\partial R_1} \cdot \Delta R_1 + \frac{\partial R'_p}{\partial R_2} \cdot \Delta R_2 = \frac{R_2(R_1 + R_2) - R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot \Delta R_1 + \frac{R_1(R_1 + R_2) - R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot \Delta R_2$$

$$\Delta R'_p = \frac{{R_2}^2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot \Delta R_1 + \frac{{R_1}^2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot \Delta R_2$$

Multiplicando y dividiendo por ${R'_p}^2$

$$\Delta R'_p = (\frac{{R_2}^2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot \Delta R_1 + \frac{{R_1}^2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot \Delta R_2) \cdot \frac{{R'_p}^2}{\frac{{R_1}^2 \cdot {R_2}^2}{(R_1 + R_2)^2}}$$

$$\Delta R'_p = {R'_p}^2 \cdot (\frac{{R_2}^2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot \frac{(R_1 + R_2)^2}{{R_1}^2 \cdot {R_2}^2} \cdot \Delta R_1 + \frac{{R_1}^2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot \frac{(R_1 + R_2)^2}{{R_1}^2 \cdot {R_2}^2} \cdot \Delta R_2)$$

$$\Delta R'_p = {R'_p}^2 \cdot (\frac{\Delta R_1}{{R_1}^2} + \frac{\Delta R_2}{{R_2}^2})$$