Las placas de un capacitor de placas paralelas están separadas por una distancia de 3,28 mm y cada una tiene un área de 12,2 cm^2. Cada placa tiene una carga con magnitud Q = 43,5 nC.
Las placas están en el vacío.

a) ¿Cuál es la capacidad C?
b) ¿Cuál es la ddp V entre las placas?
c) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico **E** entre las placas?

a) $C = \varepsilon_o A/d$

$$\mathbf{C = 3{,}29\ pF}$$

b) $C = Q/\Delta V \rightarrow \Delta V = Q/C \Rightarrow \mathbf{\Delta V = 13{,}2\ kV}$

c) E entre placas es uniforme $\rightarrow E = V/d$

$$\mathbf{E = 4\ MV/m}$$

Dos placas paralelas tienen cargas iguales de signo contrario. Cuando se establece el vacío entre las placas, el campo eléctrico es $3{,}2.10^5$ V/m. Cuando el espacio se llena con un dieléctrico, el campo eléctrico es $2{,}5.10^5$ V/m.

a) ¿Cuál es la densidad de carga en cada superficie del dieléctrico?
b) ¿Cuál es la constante dieléctrica relativa?
c) Hallar el valor de la densidad superficial de carga inducida σ_i

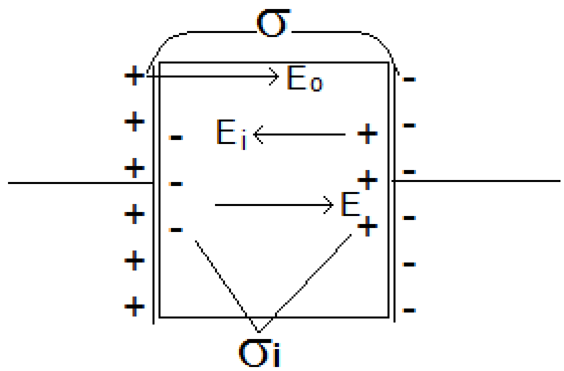
a) Para aire o vacío entre placas de un C: $E_0 = \sigma/\varepsilon_o \rightarrow \sigma = \varepsilon_o.E_0 \Rightarrow$

$$\mathbf{\sigma = 2{,}8\ \mu C/m^2}$$

Nótese: σ es densidad superficial de carga que posee cada placa (+ y –).
La densidad superficial de carga inducida σ_i es la densidad superficial de carga presente en la superficie del dieléctrico que se encuentra en contacto con la placa; esta densidad de carga inducida en el dieléctrico tiene carga opuesta a la de las placas, lo que provoca que el campo eléctrico **E** entre las placas sea menor para igual ddp aplicada entre las placas. Esta es una enorme ventaja que brinda la introducción de un dieléctrico.

b) Recordar que $\varepsilon_r = V_o/V \rightarrow \varepsilon_r = E_o/E \Rightarrow \mathbf{\varepsilon_r = 1{,}28}$

c) Cuando el campo atraviesa el die, el efecto polarización hace aparecer cargas sobre la sup. del die, lindante con las placas, de signo opuesto (fig.).



- El campo generado por las cargas libre (cargas que energiza la fuente y las posiciona en las placas) es $E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ → es el campo con el C sin die.

- El campo generado por el conjunto de cargas libre + las cargas en las superficies linderas del die es $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ (C con die)

- El campo generado por las cargas inducidas en el die es →

$E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_0}$; siendo $E_0 - E_i = E$ ∴ $3{,}2.10^5 - E_i = 2{,}5.10^5$ ∴

$E_i = 7.10^4 \ V/m$ ∴ $\sigma_i = \varepsilon_0 E_i = 8{,}85.10^{-12} . 7.10^4$

(*)

$$\boxed{\sigma_i \cong 0{,}62 \ \frac{\mu C}{m^2}}$$

Nótese:

Puede inducir a error, hallar el campo E generado x cargas inducidas, como x ejemplo $E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon}$

σ_i fue generado x E_o sobre el material die ⇒ x lo tanto el denominador debe ser ε_o ya que E_i, en el material, lo produjo σ_i y en σ_i está explícita la intervención del die ∴ la expresión $E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon}$ significa duplicar la acción del die!

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_o} = \frac{0{,}62 \cdot 10^{-6}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}} \cong 7 \cdot 10^4 \text{ V/m} \quad \text{(Valor ya hallado)}$$

En forma similar:

$$E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\varepsilon_0} = \frac{2{,}8 \cdot 10^{-6} - 0{,}62 \cdot 10^{-6}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}} \cong 2{,}5 \cdot 10^5 \text{ V/m}$$

El dieléctrico en un capacitor de placas paralelas tiene una constante relativa dieléctrica $\varepsilon_r = 3{,}6$ y su rigidez dieléctrica o valor de disrupción es $E = 1{,}6 \cdot 10^7$ V/m. El capacitor tiene una capacidad de C = 1,25 nF y debe soportar una diferencia de potencial máxima de V = 5.500 V ¿Cuál es el área que deben tener las placas del capacitor?

Observar: la relación entre la diferencia de potencial máxima y la rigidez dieléctrica (máximo valor de campo eléctrico que puede soportar el dieléctrico antes de su ruptura) es el valor de la separación entre las placas d y la rigidez dieléctrica depende de **d** y de la **permitividad eléctrica** del material entre placas del C.

$C = \varepsilon \frac{A}{d} = \frac{\varepsilon_0 . \varepsilon_r A}{d}$; $V_{máx} = 5500V$ y $E_{máx} = 1{,}6.10^7 V/m$

$\frac{V_{MÁX}}{E_{MÁX}} = \frac{5500V}{1{,}6.10^7 \frac{V}{m}} \approxeq 0{,}34$ mm ∴ la separación entre placas mín sera $d = 0{,}34$ mm y despejando A

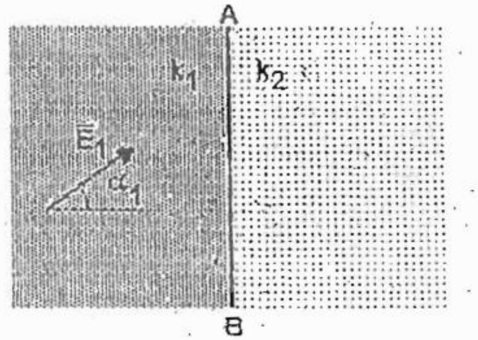
$A = \frac{C . d}{\varepsilon_0 . \varepsilon_r} = \frac{1{,}25.10^{-9} . 0{,}34 . 10^{-3}}{8{,}85.10^{-12} . 3{,}6} \Rightarrow \boxed{A \approxeq 0{,}013 \, m^2}$

NOTA: En la práctica, los C se los hace trabajar lejos del valor del campo máximo (un buen valor es al 25%)

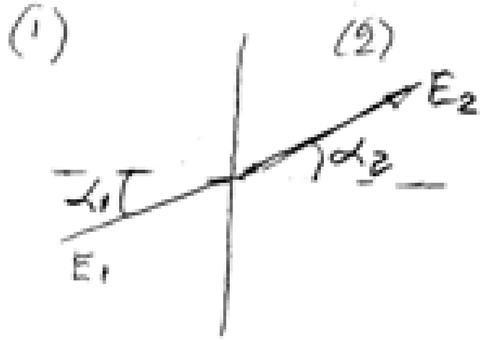
115) A ambos lados de la superficie de separación AB hay dos dieléctricos diferentes de constantes relativas k_1 y k_2. Usando explícitamente las condiciones de contorno en la superficie de separación de dos dieléctricos, calcular la intensidad del campo eléctrico $\vec{E}_2$.

$\varepsilon_{r1} = 3$ $\varepsilon_{r2} = 2{,}5$

$|\vec{E}_1| = 10^4$ V/m ; $\alpha = 30°$

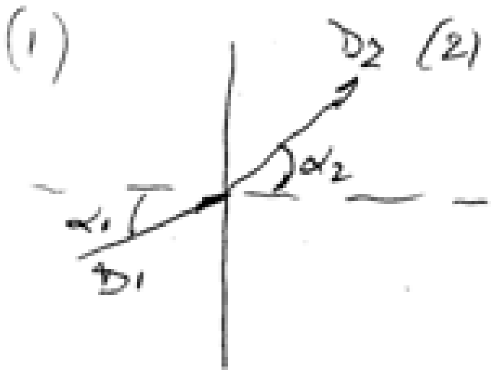


Condiciones de contorno o frontera de $\vec{E}$ y $\vec{D}$:



$$E_{t1} = E_{t2}$$

$$E_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = E_2 \operatorname{sen} \alpha_2$$



$$D_{N1} = D_{N2}$$

$$D_1 \cos \alpha_1 = D_2 \cos \alpha_2$$

$$\varepsilon_1 E_1 \cos \alpha_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos \alpha_2$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_1 \cos \alpha_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_2 \cos \alpha_2$$

$$D = \varepsilon . E$$

Relaciono:

$$\frac{E_{t1}}{D_{n1}} = \frac{E_{t2}}{D_{n2}} \Rightarrow \frac{E_1 \operatorname{sen} \alpha_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_1 \cdot \cos \alpha_1} = \frac{E_2 \operatorname{sen} \alpha_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_2 \cos \alpha_2}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \cos \alpha_1} = \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \cos \alpha_2} \Rightarrow \frac{tg \alpha_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} = \frac{tg \alpha_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}}$$

$$tg \alpha_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} tg \alpha_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} \therefore tg \alpha_2 = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} tg \alpha_1$$

$$= \frac{2,5}{3} tg 30 \rightarrow \alpha_2 = 25,7^{\circ}$$

$$E_2 \operatorname{sen} \alpha_2 = E_1 \operatorname{sen} \alpha \therefore E_2 = E_1 \frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha_2} \Rightarrow \boxed{E_2 = 11,5 \frac{kV}{m}}$$

Cuando se conecta un capacitor relleno con aire, de C = 360 nF de capacidad, a una fuente de potencia, la energía almacenada en el capacitor es de 1,85 10^{-5} J. Mientras el capacitor se mantiene conectado a la fuente de potencia, se inserta un trozo de material dieléctrico que llena por completo el espacio entre las placas; esto incrementa la energía almacenada en 2,32 10^{-5} J.

a) ¿Cuál es la diferencia de potencial V entre las placas del capacitor?
b) ¿Cuál es la constante dieléctrica ε_r del trozo de material?

$$U = \frac{1}{2} C V^2 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2U}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}85 \cdot 10^{-5}}{360 \cdot 10^{-9}}} \Rightarrow \boxed{V = 10{,}14\,V}$$

El C es un dispositivo que almacena U entre placas (el campo E presente entre ellas lo hace) y la mínima U almacenada, para un dado C, es cuando tiene aire/vacío entre sus placas; la inserción de un die aumenta la U almacenada en el valor de su ε_r.

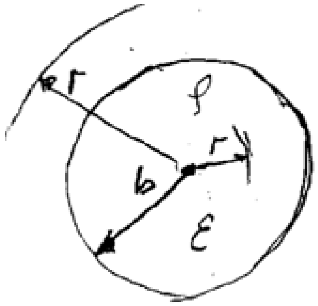
Leer bien el enunciado: ..." incrementa la U almacenada en $2{,}32 \cdot 10^{-5}$ J".

$$\varepsilon_r = \frac{(1{,}85 \cdot 10^{-5}) + (2{,}32 \cdot 10^{-5})}{1{,}85 \cdot 10^{-5}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_r \cong 2{,}25}$$

}

116) Encuentre el campo eléctrico E en el interior y en el exterior de una esfera no conductora de radio b, de permitividad ε cargada con densidad volumétrica $\rho = cte$. Grafique $E(r)$.

ρ se distribuye uniforme en todo el volumen de la esfera.



a) Gauss para una sup. esférica gaussiana de radio r, para $r < b$

$\oint_{sup} \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q$ Q es la carga total libre (la que provee ρ) dentro esfera radio r

$$\rho = \frac{Q}{V} \left[\frac{C}{m^3}\right] \Rightarrow Q = \rho V \Rightarrow \oint_{sup} \vec{D} \cdot \vec{ds} = \rho V \qquad \vec{D} \parallel \vec{ds}$$

$$\oint_{sup} D\, ds = \rho V \rightarrow D\, 4\pi r^2 = \rho V \text{ con } V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Siendo: $4\pi r^2$ la superficie gaussiana y $\frac{4}{3}\pi r^3$ el volumen de radio r en que se encuentra la carga

$$D\, 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \therefore \boxed{D = \frac{\rho}{3} r}$$ válida para $r < b$

Si $r > b$ (Gauss con $r > b$)

$$\oint_{sup} \vec{D} \cdot \vec{ds} = \rho V \qquad D \parallel ds \qquad \oint_{sup} D\, ds = \rho V$$

$$ds = 4\pi r^2 \text{ y } V = \frac{4}{3}\pi b^3 \therefore D\, 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi b^3$$

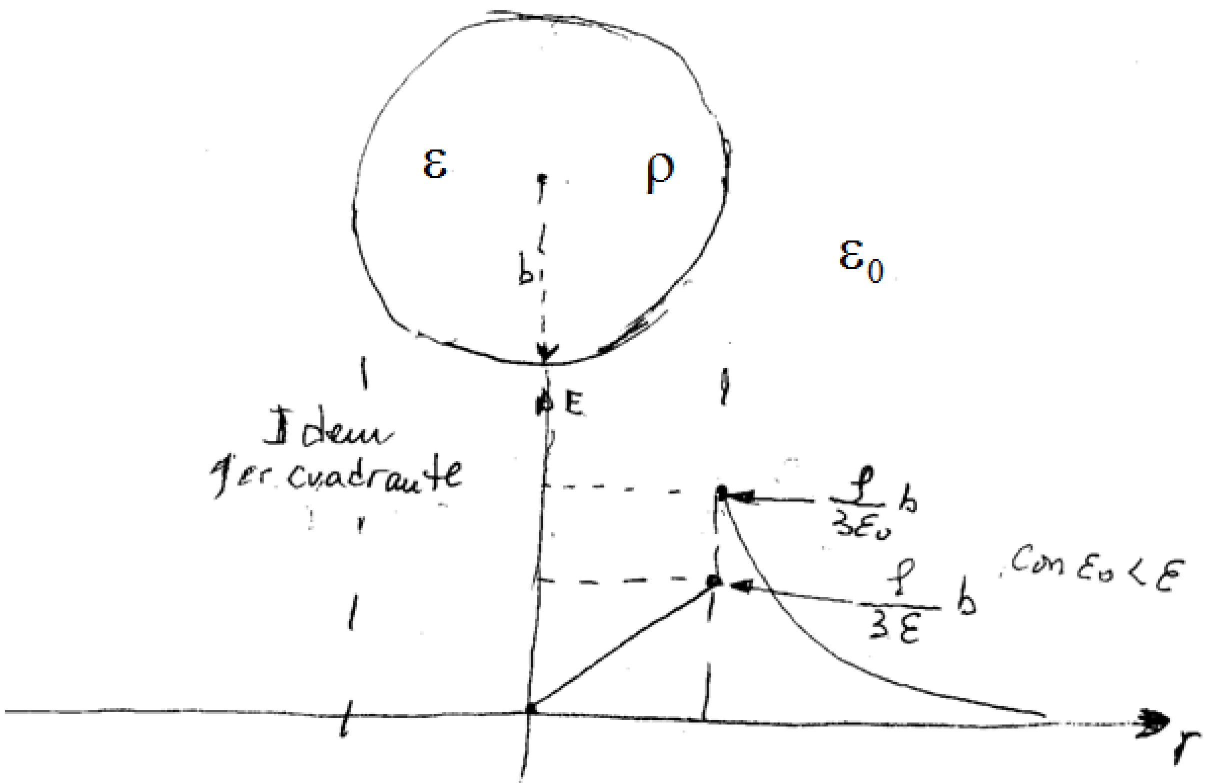
$$\boxed{D = \frac{\rho b^3}{3} \frac{1}{r^2}}$$ válido para $r > b$

Nótese: para **r > b**, la superficie de la integral tiene por radio **r**, que es externo a la esfera. En el segundo miembro de Gauss, pide la carga **Q TOTAL** involucrada, y como estamos fuera de la esfera → la carga total involucrada que genera campo fuera de la esfera es la esfera que contiene a toda la carga ➔ esfera de radio **b**.

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ (dentro de la esfera)
$\vec{D} = \varepsilon_0 E$ (fuera - - - -) con $\varepsilon > \varepsilon_0$

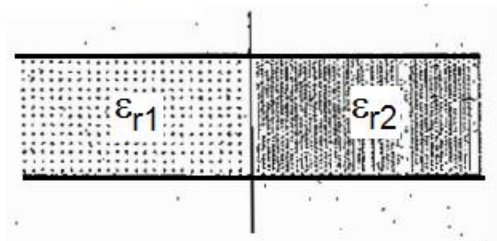
si $r < b \Rightarrow E = \dfrac{D}{\varepsilon} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon} r$ (crece linealmente)

si $r > b \Rightarrow E = \dfrac{D}{\varepsilon_0} = \dfrac{\rho b^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}$ (decrece como $1/r^2$)



que E es una función discontinua, ya que para
tiene a $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ en el denominador y
- - ε_0 - -

120) Hallar la expresión de C para esta composición de capacitores en paralelo.



Es un C de placas planas //.: $C = \varepsilon \frac{A}{d}$; aquí hay 2 capacitores x q para pasar de la placa superior a la inferior tenemos 2 posibilidades: x el C_1 de cte. ε_{r1} y C_2 de cte ε_{r2}

$$C_1 = \varepsilon_1 \frac{A/2}{d} \quad y \quad C_2 = \varepsilon_2 \frac{A/2}{d}$$

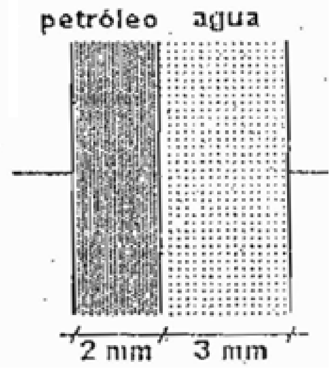
2 C en // $\Rightarrow C = C_1 + C_2$

$$C = \varepsilon_1 \frac{A/2}{d} + \varepsilon_2 \frac{A/2}{d}$$ con $\varepsilon_1 = \varepsilon_{r1}\varepsilon_0$ y $\varepsilon_2 = \varepsilon_{r2}\varepsilon_0$

$$\boxed{C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}\left(\frac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{2}\right)}$$

121) A un capacitor plano de área $S = 0{,}1\ m^2$ y separación $d = 5$ mm., con dieléctrico aire, se le aplica un potencial de 5000 V. Hallar:

a) La capacidad.
b) La carga en cada placa.
c) El vector desplazamiento eléctrico.
d) La intensidad del campo eléctrico.



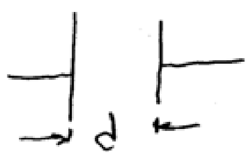
Desconectar el capacitor de la fuente de tensión manteniéndolo aislado de modo que la carga de sus placas permanezca constante y colocar un dieléctrico de petróleo ($\varepsilon_{r_{petr}} = 2$) de 2 mm de espesor y otro de agua de 3 mm de espesor ($\varepsilon_{r_{agua}} = 81$). Calcular:

e) El vector desplazamiento eléctrico D en cada dieléctrico.
f) La intensidad de campo en cada dieléctrico.
g) La diferencia de potencial entre placas.
h) La capacidad.

Este C tiene una configuración SERIE (para pasar de la placa de la izq. a la placa de la der., hay un sólo camino.

• C sin die sólido

a)



$d = 5\ mm$

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{0{,}1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{5 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{C \cong 177\ pF}$$

b) $$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = C\,V = 1{,}77\ pF \cdot 5000V \Rightarrow \boxed{Q = 0{,}88\ \mu C}$$

c) $$\oint_{SUP} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \qquad \vec{D} \text{ es uniforme } (= \text{ que } \vec{E})$$

$$D \oint_{SUP} ds = Q \Rightarrow Q = D \cdot A$$ ← Area de la placa

Recordar que en un conductor (las placas del C lo son) $|\vec{D}| = \sigma$ o sea, el módulo del vector inducción coincide con σ

$$y\ \sigma = \frac{Q}{A} = \frac{0{,}88\ \mu C}{0{,}1\ m^2} = 8{,}8 \frac{\mu C}{m^2} \therefore \boxed{D = 8{,}8 \frac{\mu C}{m^2}}$$

d) $E = \frac{D}{\varepsilon_0}$ (aquí hay aire o vacío entre placas)

$$E = \frac{8{,}8\ \mu C/m^2}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\ C^2/N \cdot m^2} \Rightarrow \boxed{E = 1\ \frac{MN}{C}}$$

· Desconecta el C de la energía y se coloca die (fig.)

e) Al desconectar la fuente de tensión, las q en las placas no cambian y haya o no die, no modifica $\vec{D}$, ya que depende de las cargas libres

$$\boxed{D = 8{,}85\ \frac{\mu C}{m^2}}$$

f) E sí influyen los die

<u>H_2O</u>: $\varepsilon_r = 81 \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 = 7{,}17 \cdot 10^{-10}\ \frac{C^2}{N \cdot m^2}$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{8{,}85\ \mu C/m^2}{7{,}17 \cdot 10^{-10}\ C^2/N \cdot m^2} \Rightarrow \boxed{E_{H_2O} = 1{,}23 \cdot 10^{-4}\ N/C}$$

<u>Petro</u>: $\varepsilon_r = 2$ $\quad \varepsilon = 1{,}77 \cdot 10^{-11}\ C^2/Nm^2$

$$E = \frac{8{,}85\ \mu C/m^2}{1{,}77 \cdot 10^{-11}\ C^2/Nm^2} \Rightarrow \boxed{E_{PETRO} = 0{,}5\ MN/C}$$

h) Estos C están en serie: C_1 s C_2

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

<u>VIDRIO</u>: C_1

$$C_1 = \varepsilon \frac{A}{d} = 2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{0{,}1}{2 \cdot 10^{-3}} = 8{,}85 \cdot 10^{-10}\ F$$

H_2O : C_2

$$C_2 = 81 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{0{,}1}{3 \cdot 10^{-3}} = 2{,}38 \cdot 10^{-8}\ F$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{8{,}85 \cdot 10^{-10}} + \frac{1}{2{,}38 \cdot 10^{-8}} \therefore \boxed{C \cong 0{,}85\ nF}$$

g)

$$V = \frac{q}{C} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-7}}{0{,}85\ nF} \Rightarrow \boxed{V \cong 1040\ V}$$