최소제곱법을 이용한 선형 회귀에 대해 다음 표와 주어진 식을 보고 물음에 답하시오.

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_m
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_m

$$\begin{aligned} ax_0 + b &= y_0 \\ ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ ax_m + b &= y_m \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

(1) A의 열 벡터가 독립이면 $A^T A$는 symmetric positive definite 임을 보이시오.

(2) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$일 때, $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$라 하자. $\dfrac{\partial F}{\partial x}$와 $\dfrac{\partial F}{\partial y}$를 구하시오.

(3) $\|\boldsymbol{v}\|_2^2 = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v}$라 할 때, ℓ_2 오차함수는 $\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2$으로 나타낼 수 있다. 이때 최소제곱해 $\boldsymbol{x}^*$는 $A^T A \boldsymbol{x}^* = A^T \boldsymbol{b}$를 만족함을 보이시오.

(4) A는 특잇값 분해(SVD)에 의해 $A = USV^T$이고 $A^+ = VS^+U^T$라 하자. 여기서 $(S)_{ii} \neq 0$일 때 $(S^+)_{ii} = 1/(S)_{ii}$를 만족하고 S가 $m \times n$ 행렬일 때 S^+는 $n \times m$ 행렬이다. 그러면 $\boldsymbol{x}^+ = A^+ \boldsymbol{b}$는 최소제곱해임을 보이시오.