기초 선형대수
(행렬)

윤 정 훈

행렬

- 행렬(Matrix)의 어원
  - 어머니의 자궁 혹은 근원적인 고향의 뜻을 가졌고, 라틴어의 어원은 어머니 (mater) 이다.
  - 즉 행렬은 우리의 '마음의 고향' 이며, 어떤 수학적 object를 만나더라도 우리는 행렬부터 생각한다는 뜻이다.
  - 머신러닝과 딥러닝을 컴퓨터로 다룰 때, 행렬 형태로 데이터를 다루게 된다.

행렬

- 행렬(Matrix)의 정의
  - 성분(entry)이라 부르는 숫자들을 사각형의 형태로 정렬시켜 놓은 것
  - 다음과 같은 수치형 데이터를 행렬로 표현해보자.

< 요일별 과목을 공부하는 시간 >

	월요일	화요일	수요일	목요일	금요일	토요일	일요일
수학	2	1	2	0	3	0	1
영어	2	0	1	3	1	0	1
화학	1	3	0	0	1	0	1
물리	1	2	4	1	0	0	2

행렬

수치형 데이터

행렬

	월요일	화요일	수요일	목요일	금요일	토요일	일요일
수학	2	1	2	0	3	0	1
영어	2	0	1	3	1	0	1
화학	1	3	0	0	1	0	1
물리	1	2	4	1	0	0	2

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

행렬의 크기

- m개의 행과 n개의 열을 가졌으면 행렬의 크기(size)는 $m \times n$이라고 한다.

ex) 행렬의 크기 : 4×7

- R^7 인 행벡터 4개
- R^4 인 열벡터 7개

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

행벡터

열벡터

행렬의 표기

- $m \times n$ 크기를 갖는 행렬

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- $n \times n$ 크기를 갖는 정사각행렬

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- 행렬을 나타내는 다양한 표기법
  - $A = [a_{ij}]_{m \times n}$
  - $A = [a_{ij}]$

행렬의 항등, 덧셈 연산

- 두 행렬 A , B가 같다. (Equality)
  - 두 행렬의 크기가 같고, 대응하는 성분들이 모두 같다.

- 행렬의 합 $A + B$ (Sum)
  - A의 성분에 대응하는 B의 성분을 더하여 얻은 행렬
  - $(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

  ex)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

행렬의 뺄셈, 스칼라 곱 연산

- 행렬의 차 $A - B$ (difference)
  - A의 성분에서 대응하는 B의 성분을 빼서 얻은 행렬
  - $(A-B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

    ex) 예제

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

- 행렬의 scala 곱 cA (product)
  - A의 각 성분에 c를 곱하여 얻은 행렬이다.
  - $(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$

    ex) 예제

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, c = 2$$

열벡터, 행벡터를 이용하여 행렬 나타내기

- $1 \times n$ 행벡터
  - $\mathbb{r} = [r_1, \dots, r_n]$

- $m \times 1$ 열벡터
  - $\mathbb{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$

- $m \times n$ matrix를 열벡터를 이용하여 나타내기
  - $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\mathbb{c}_1 \ \mathbb{c}_2 \ \dots \mathbb{c}_n]$

- $m \times n$ matrix를 행벡터를 이용하여 나타내기
  - $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{r}_m \end{bmatrix}$

행렬의 곱셈 연산

- 행렬의 곱셈 $A\mathbb{x}$
  - 행렬의 곱셈은 행렬의 사이즈에 따라서 곱셈 가능 여부가 달라진다.
    - $(m\times \boldsymbol{n})(\boldsymbol{n}\times 1) = (m\times 1)$
  - $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ 라고 하자.

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b} \Leftrightarrow A\mathbb{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \mathbb{b}$$

행렬의 곱셈 연산

○ 행렬의 곱셈을 열벡터의 선형결합(linear combination)으로 표현 할 수 있다.

$$A\mathbb{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{bmatrix} \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= x_1\mathbb{c}_1 + x_2\mathbb{c}_2 + \cdots + x_n\mathbb{c}_n$$

$$= \mathbb{b}$$

행렬의 곱셈 연산

- A가 $m \times n$ 행렬이고 $\mathbb{x}$가 $n \times 1$ 열벡터이면 곱 $A\mathbb{x}$는 A의 열벡터와 $\mathbb{x}$의 성분을 계수로 하는 일차결합으로 만들어진 $m \times 1$ 열벡터이다. A의 열벡터가 $\mathbb{c}_1, \mathbb{c}_2, \dots, \mathbb{c}_n$ 이면

$$A\mathbb{x} = \begin{bmatrix} \mathbb{c}_1 & \mathbb{c}_2 & \cdots & \mathbb{c}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbb{c}_1 + x_2\mathbb{c}_2 + \cdots + x_n\mathbb{c}_n$$

ex) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

- A가 $m \times n$ 행렬이면 R^n의 모든 열벡터 $\mathbb{u}$ 및 $\mathbb{v}$ 와 임의의 스칼라 c에 대하여 다음관계가 성립한다.
  - $A(c\mathbb{u}) = c(A\mathbb{u})$
  - $A(\mathbb{u} + \mathbb{v}) = A\mathbb{u} + A\mathbb{v}$

행렬의 곱셈 연산 (AB)

- A가 $m{\times}\boldsymbol{s}$행렬, B가 $\boldsymbol{s}{\times}n$행렬이고 B의 열벡터가 $\mathbb{b}_1$, $\mathbb{b}_2$, … , $\mathbb{b}_{\mathrm{n}}$이면 곱(product) AB는 $m{\times}n$ 행렬로서 $AB = [A\mathbb{b}_1 \quad A\mathbb{b}_2 \quad \cdots \quad A\mathbb{b}_n]$ 로 정의한다.

ex) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

점곱 규칙

- 행-열 규칙 또는 점곱규칙
  - 행렬곱 AB의 i행 j열의 성분은 A의 i행벡터와 B의 j열벡터의 곱, 즉 점곱(dot product)이다.
  - $AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix}$

ex) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & 26 & \end{bmatrix}$

$i = 2$

$j = 3$

$2 \times 4 + 6 \times 3 + 0 \times 5$

전치행렬

- A가 $m \times n$ 행렬이면 A의 전치행렬(transpose) A^T는 A의 행들을 열로하여 만들어진 $n \times m$ 행렬로 정의한다. 즉 A^T의 첫째 열은 A의 첫째 행, A^T의 둘째 열은 A의 둘째 행 등이다.

ex)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \leftrightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \leftrightarrow B^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$C = [4] \leftrightarrow C^T = [4]$$

행렬의 대각합

- A가 $n \times n$ 행렬이면 A의 대각합(trace) $tr(A)$는 A의 대각성분의 합이다.
- $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

ex)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \leftrightarrow tr(A) = 2 + 4 = 6$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \leftrightarrow tr(A) = 1 + 3 + 5 = 9$$

행렬의 내적과 외적

- $\mathbb{u}$와 $\mathbb{v}$가 같은 크기의 열벡터이면
  - 곱 $\mathbb{u}^T\mathbb{v}$를 $\mathbb{u}$와 $\mathbb{v}$의 행렬내적(matrix inner product)라고 한다.
  - 곱 $\mathbb{u}\mathbb{v}^T$를 $\mathbb{u}$와 $\mathbb{v}$의 행렬외적(matrix outer product)라고 한다.

ex) $\mathbb{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbb{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

- 내적 : $\begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$
- 외적 : $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$

행렬덧셈과 스칼라곱의 성질

a, b 는 스칼라이고, 행렬 A, B, C의 크기가 같은 경우, 다음이 성립한다.

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $(ab)A = a(bA)$
- $(a + b)A = aA + bA$
- $(a - b)A = aA - bA$
- $a(A + B) = aA + aB$
- $a(A - B) = aA - aB$

행렬곱셈의 성질

a, b 는 스칼라이고, 행렬 A, B, C의 크기가 주어진 연산이 정의되는 경우, 다음이 성립한다.

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$
- $A(B - C) = AB - AC$
- $(B - C)A = BA - CA$
- $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

영행렬 / 항등행렬

영행렬

모든 성분이 0인 행렬 (zero matrix)

항등행렬

주대각선 상의 성분들이 모두 1이고 그 밖에는 모두 0인 정사각행렬

ex) 영행렬

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ex) 항등행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

역행렬

역행렬

A는 정사각행렬이고 $AB = BA = I$가 되는 A와 같은 크기의 행렬 B가 존재하면, A는 가역행렬 (invertible matrix) 또는 정칙행렬 (nonsingular matrix) 이라 한다. B는 A의 역행렬 (inverse matrix) 이라 한다. 이 성질을 만족시키는 행렬 B가 존재하지 않으면 A는 특이행렬 (singular matrix) 이라 한다.

ex) B는 A의 역행렬인가?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

역행렬

2×2 행렬의 역행렬

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\boxed{ad - bc}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

행렬식 (determinant)

ex) A의 역행렬은?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow ?$$

역행렬의 성질

A와 B가 같은 크기의 가역행렬이면

- AB 는 가역행렬이다.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- A^{-1} 이 가역이고, $(A^{-1})^{-1} = A$
- A^{n} 이 가역이고, $(A^{n})^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^{n}$ 이다.
- 임의의 영이 아닌 스칼라 k에 대하여 kA가 가역이고 $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$이다.

ex) 각각을 증명해보자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

전치행렬의 성질

행렬 A와 B 에 대하여,

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(A-B)^T = A^T - B^T$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

ex) 각각을 증명해보자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

대각합의 성질

같은 크기의 정사각행렬 A와 B 에 대하여,

- $tr(A^T) = tr(A)$
- $c \times tr(A) = tr(cA)$
- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(A - B) = tr(A) - tr(B)$
- $tr(AB) = tr(BA)$

ex) 각각을 증명해보자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

대각행렬

- 주 대각선 밖의 모든 성분이 영인 정사각행렬

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} d_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^{-1} \end{bmatrix} \qquad A^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

ex) 대각행렬의 예

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = ? \qquad A^k = ?$$

삼각행렬

- 주 대각선보다 위에 있는 모든 성분이 영인 정사각행렬을 하부삼각행렬(lower triangular matrix) 그리고 주대각선보다 아래에 있는 모든 성분이 영인 정사각행령은 상부삼각행렬(upper triangular matrix)d 이라 한다. 상부 또는 하부삼각행렬을 삼각행렬(triangular matrix)이라 부른다.

ex) 하부대각행렬 / 상부삼각행렬

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

대칭행렬

- 정사각행렬 A가 $\boldsymbol{A^T = A}$이면 대칭행렬(symmetric matrix) 이라 한다. 즉 $a_{ij} = a_{ji}$인 행렬

ex) 대칭행렬 예시

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & -6 \\ 5 & -6 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

※ A^TA , AA^T 모두 대칭행렬이다. 증명해보자.

Linear system (선형계)

선형방정식

n개의 변수 $x_1, x_2, \dots, x_n$, n개의 0이 아닌 상수 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 상수 b에 대하여

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

를 선형방정식 (Linear equation) 이라고 한다.

ex) $x + 3y = 7$

Linear system (선형계)

선형계

선형방정식을 유한개 모아 놓은 것을 선형방정식의 계 (system of linear equation) 또는 선형계 (linear system)라 한다.

n개의 미지수 $x_1, x_2, \dots, x_n$을 가진 m개의 방정식으로 된 일반적인 동차 선형계

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

방정식의 수보다 미지수가 더 많은 동차 선형계는 무한히 많은 해를 가진다.