상관 분석

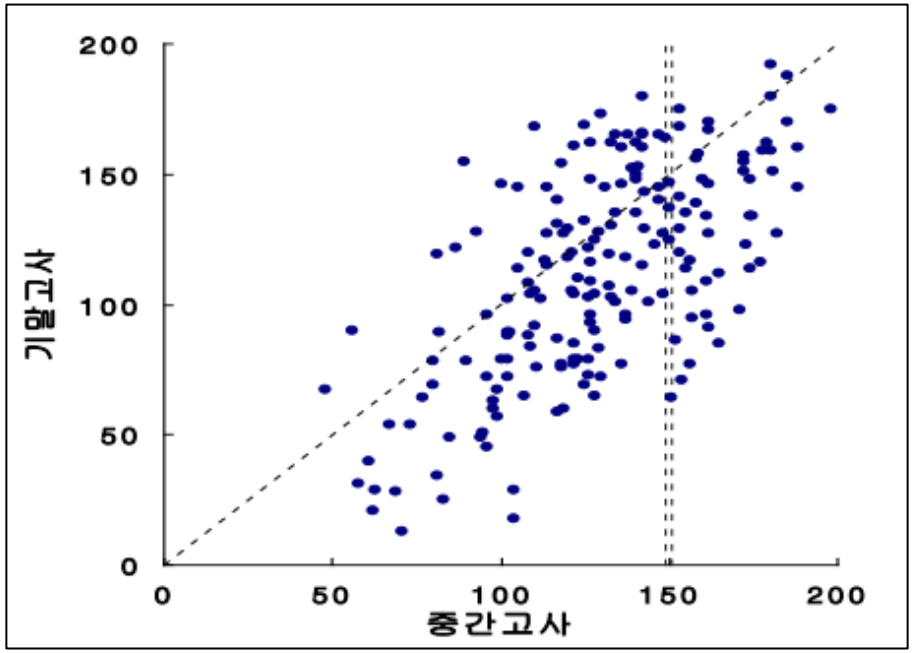
윤 정 훈

들어가기

- 과학적 실험이나자연 또는 사회현상의 관찰결과에 대한 분석의 중요한 목적 중 하나는 연구대상을 구성하는 변수들 사이의 관계를 규명하는 일이다.
  - 화학실험에서 실험온도(X)와 화학반응 속도(Y) 사이의 관계
  - 수학능력시험성적(X)과 대학평점(Y)과의 관계
  - 부모의 키(X)와 자녀의 키(Y) 사이의 관계
- 두 변수 사이의 선형관계가 유의한지, 어느 정도의 선형관계가 존재하는지 등을 상관계수를 통해 알아볼 수 있다. 이러한 상관계수의 추정과 검정을 상관분석(correlation analysis)이라고 한다.

산포도

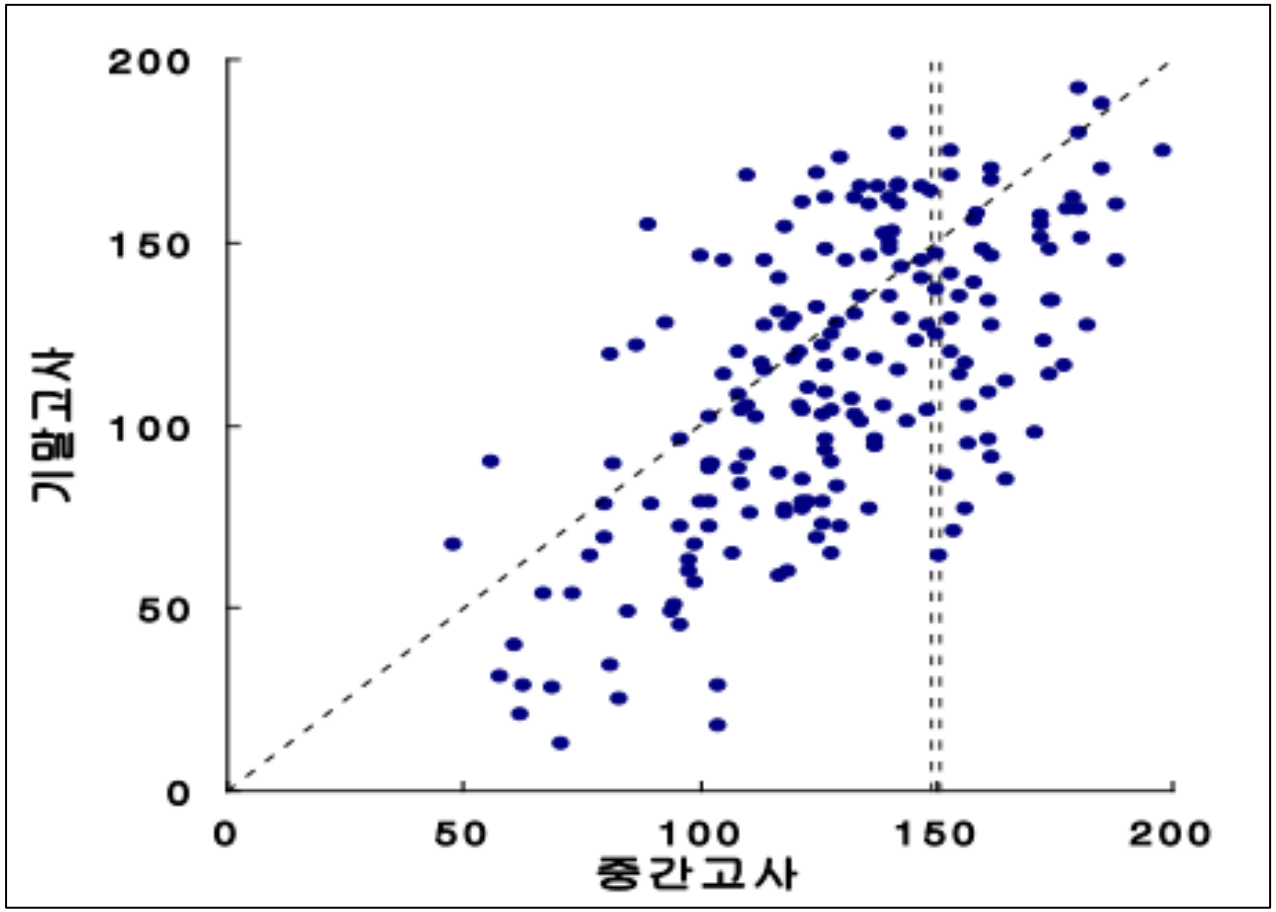
- 두 변수 사이의 관계를 살펴보기 위하여 산포도(scatter plot)를 이용한다.
  - 설명(독립)변수는 x로 표기하고 가로축에 표시
  - 종속변수는 y로 표기하고 세로축에 표시



중간고사와 기말고사와의 관계를 나타내는 산포도

산포도 예제

중간고사 / 기말고사 성적간 관계가 약한 경우

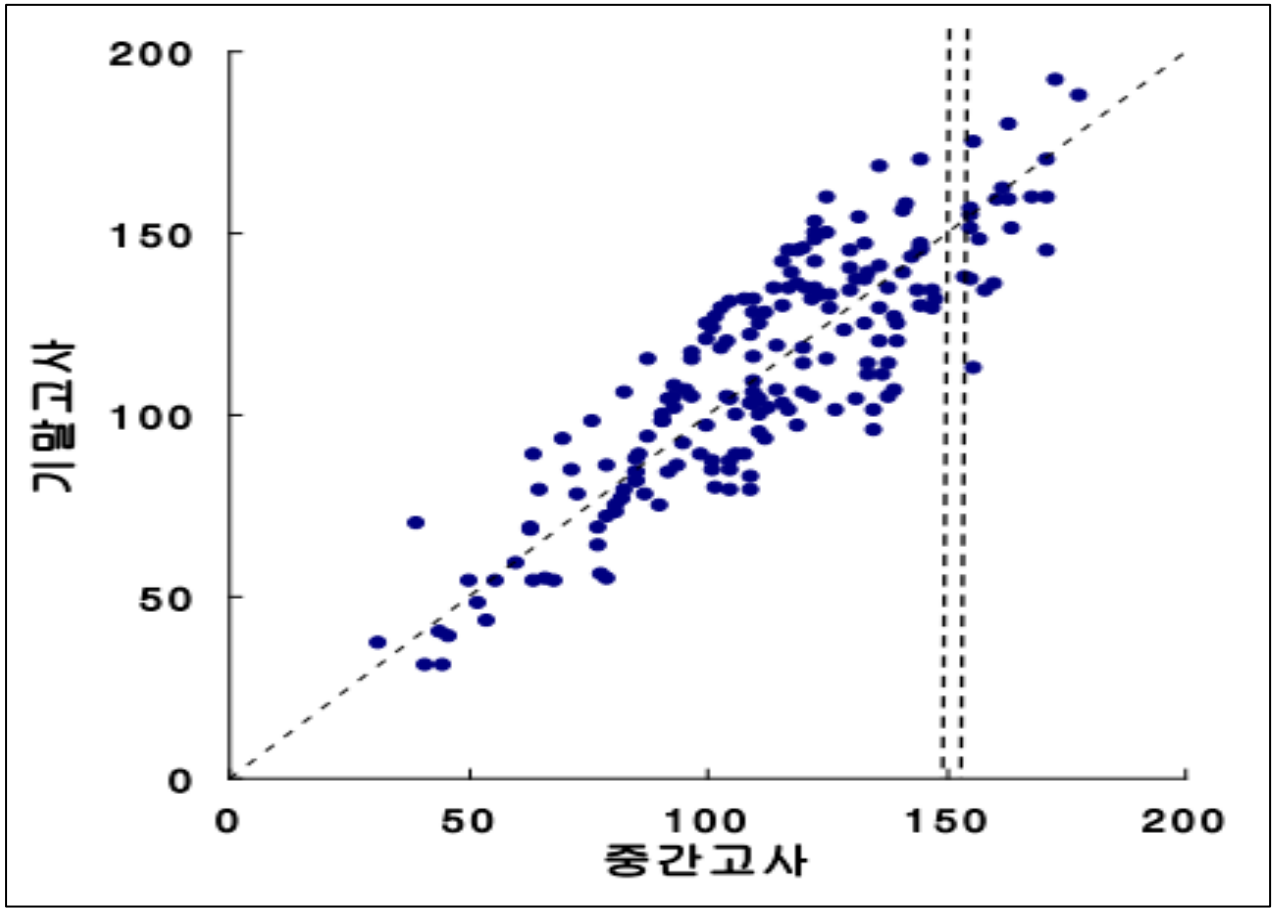


① 변수 사이의 관계가 약하면 한 변수 값이 다른 변수 값을 예측하는 데 큰 도움이 안된다.

② 중간고사에서 150점을 받은 학생들의 기말고사 성적은 55점에서 175점 사이에 분포한다.

산포도 예제

중간고사 / 기말고사 성적간 관계가 강한 경우



① 변수 사이의 관계가 강하면 한 변수 값이 다른 변수 값을 예측하는 데 큰 도움이 된다.

② 중간고사에서 150점을 받은 학생들의 기말고사 성적은 105점에서 175점 사이에 분포한다.

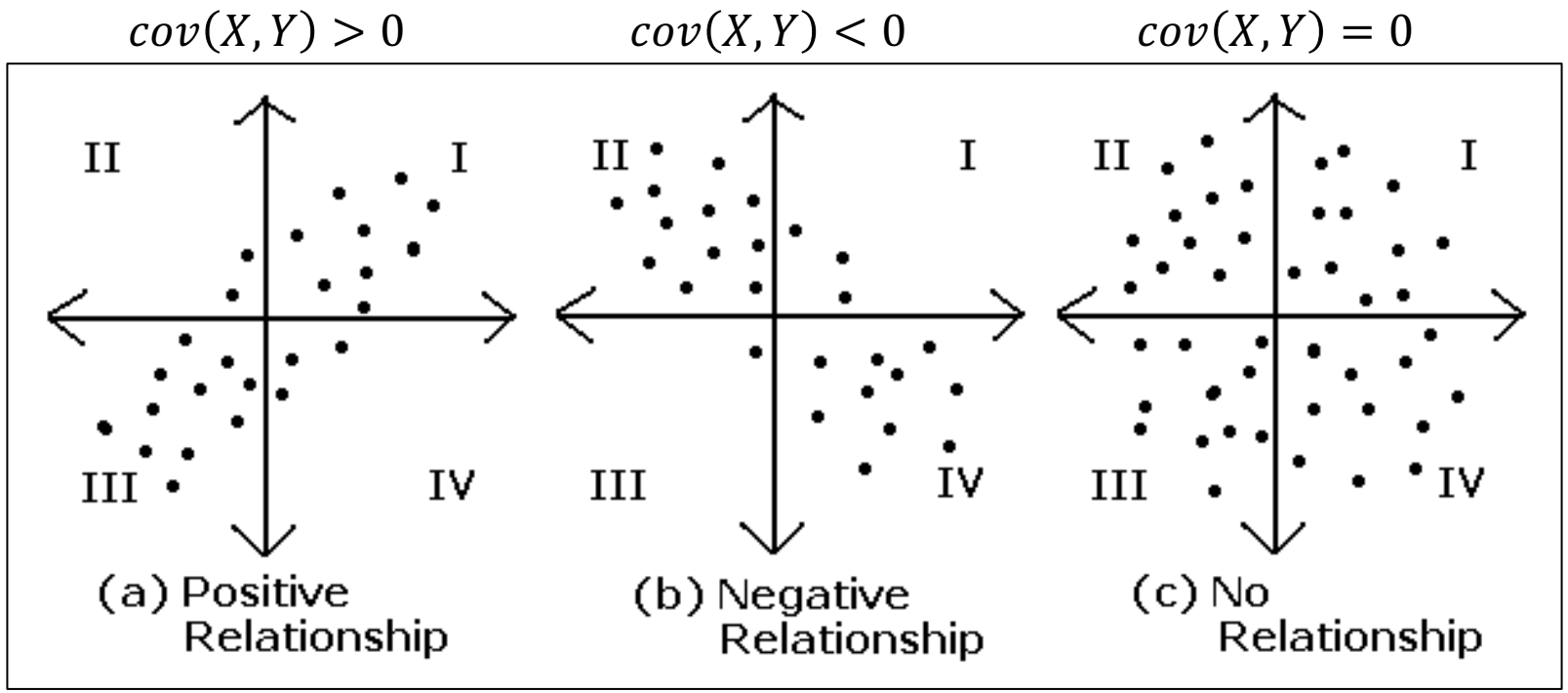
변수간 상관관계

- 두 변수간 선형관계의 방향과 강도가 얼마나 되는지 측정할 필요성이 있다.
  - 공분산
  - 상관계수

공분산

- 두 확률변수 X와 Y 사이의 흩어진 관계를 측정하는 통계량으로 공분산을 사용한다.
  - ✓ 확률변수 X의 기대값 : $E[X]$
  - ✓ 확률변수 Y의 기대값 : $E[Y]$
  - 공분산 : $cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$

공분산



$cov(X,Y) > 0 : X$가 증가할 때 Y도 증가한다.

$cov(X,Y) < 0 : X$가 증가할 때 Y도 감소한다.

$cov(X,Y) = 0 : X$와 Y는 독립이다.

공분산의 단점

- 공분산은 변수의 측정단위(measurement unit)에 의존한다.
- 변수 X와 변수 Y의 측정단위를 바꾸면 변수 사이의 관계가 변하는 것이 아닌데, 공분산의 값이 변한다.

상관계수

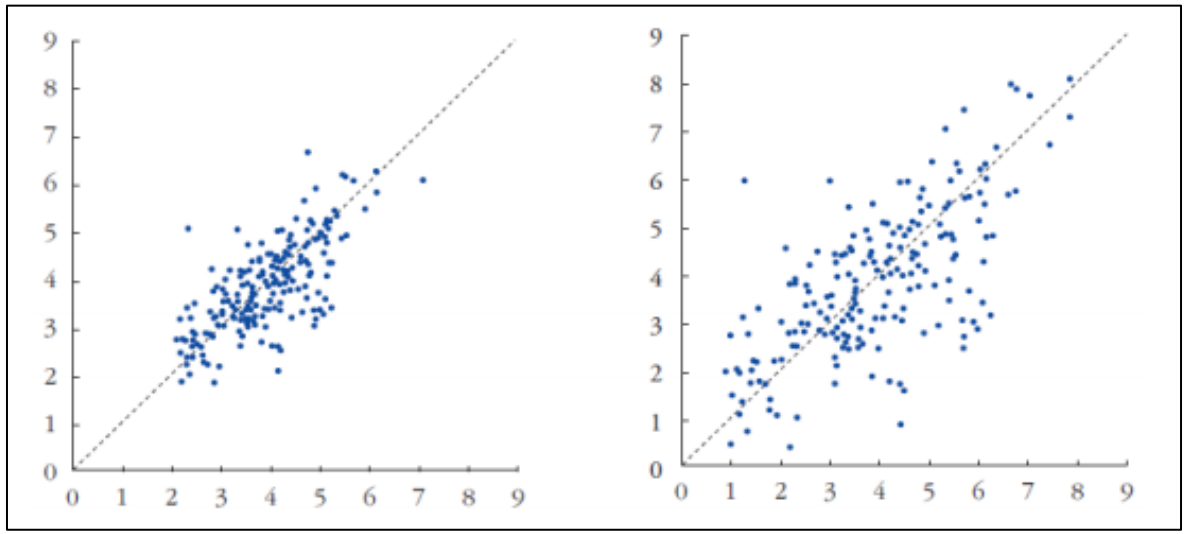
- 단위에 의존하지 않도록, 공분산을 두 변수의 표준편차의 곱으로 나누는 것을 상관계수(correlation coefficient)라 정의하고, 이것을 두 변수 사이의 선형관계를 측정하는 단위로 주로 사용한다.

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{SD(X)\times SD(Y)}$$

- 표준화된 두 변수 사이의 공분산과 동일하다.
  - ✓ 상관계수의 절대값은 1을 넘을 수 없다. $-1 \le \rho \le 1$
  - ✓ 확률변수 X, Y가 독립이라면 상관계수는 0이다.
  - ✓ X, Y가 완전한 선형적 관계라면 상관계수는 1 혹은 -1이다.

상관계수의 유의점

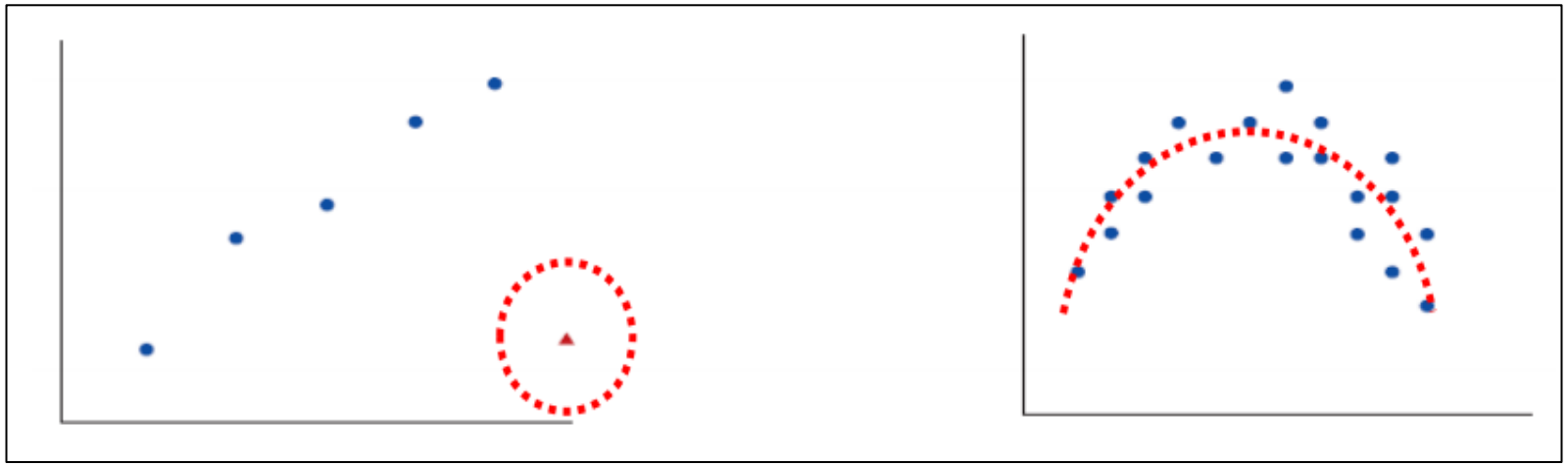
- 상관계수의 의미
  - 상관계수 0.8은 80%의 점들이 선형관계를 이루며 빽빽하게 밀집해 있는 것을 의미하지 않는다.
  - 상관계수 0.8은 상관계수 0.4보다 선형관계의 강도가 강하기는 하지만, 정확히 2배가 강하다는 것을 의미하지 않는다.



둘의 상관관계수는 같다.

상관계수의 유의점

- 상관계수의 유용성
  - 이탈값(outlier)가 존재하면 상관계수의 값은 유용하지 않다.
  - 두 변수간 관계가 비선형인 경우 상관계수의 값은 유용하지 않다.



이탈값 존재

비선형 관계

표본상관계수

- Sample Correlation Coefficient
- 크기가 n인 이변량 랜덤표본 (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) ,…, (X_n, Y_n)에 대한 상관계수 R

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n} \right\}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X}_n)^2}{n}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i - \bar{Y}_n)^2}{n}}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i Y_i}{n} - \bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X}_n)^2}{n}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i - \bar{Y}_n)^2}{n}}}$$

표본상관계수의 분포이론 (피어슨 상관계수)

- 랜덤표본 (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) ,…, (X_n, Y_n) 의 모분포를 모수벡터가 $(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$인 이변량 정규분포라고 하자. 이 때 $\rho(X, Y) = 0$이면 표본상관계수 R의 함수인 통계량 T는 자유도가 $(n-2)$인 t분포를 따른다.

$$T = \frac{R\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}}$$

상관관계의 가설검정 $(H_0 : \rho = 0)$

- 표본상관계수 R의 함수인 통계량 T는 이변량 정규성하에서 모상관계수에 대한 가설검정에 사용된다.
  - $H_0 : \rho = 0$
  - $H_1 : \rho \neq 0$
  - $|T| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$가 관측되었을 때 귀무가설을 유의수준 α에서 기각

상관관계의 가설검정 $(H_0 : \rho = \rho_0)$

- $\rho(X, Y) \neq 0$ 인 경우 표본상관계수 R의 분포
  - $H_0 : \rho = \rho_0 (\neq 0)$ 의 귀무가설을 검정할 경우는 근사적인 분포이론을 이용해야 한다.
  - $Z = \frac{1}{2}\log\frac{1+R}{1-R}$ 통계량은 정규분포를 근사적으로 따른다.
    - ✓ $E(Z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{1-\rho}$
    - ✓ $Var(Z) = \frac{1}{n-3}$
  - 이것에 근거하여 모상관계수 ρ에 관한 근사검정법과 근사신뢰구간을 구축한다.

특수한 상관계수 1 (스피어만 순위상관계수)

- 변수값이 서열을 나타낼 경우 사용한다.
- 두 관측값들의 순위가 $a_i, b_i, i = 1, \dots, n$ 일 때, 스피어만 순위상관계수는 다음과 같다.

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2}{n^3 - n}$$

- '두 순위간에는 상관관계가 없다'는 귀무가설 $H_0: \rho = 0$을 검정하기 위한 통계량은 아래와 같다. 검정통계량 T_0는 표본의 크기 $n \geq 10$일 때 자유도 $n-2$인 t분포를 근사적으로 따른다.

$$T_0 = r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}}$$