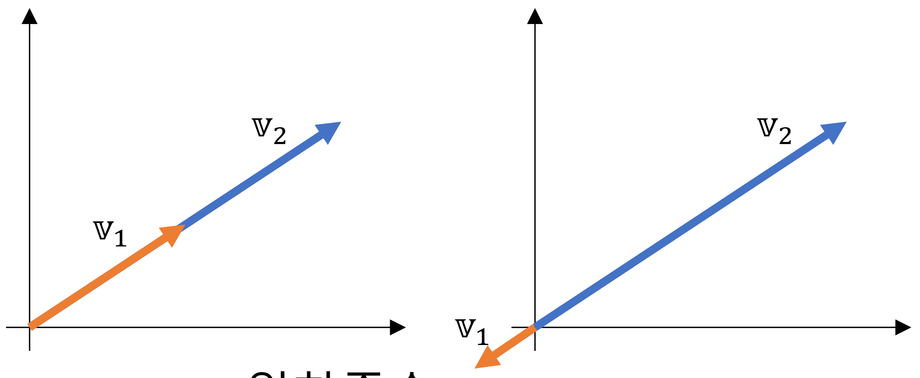
기초 선형대수
(Spectral Property – 함수/변환)

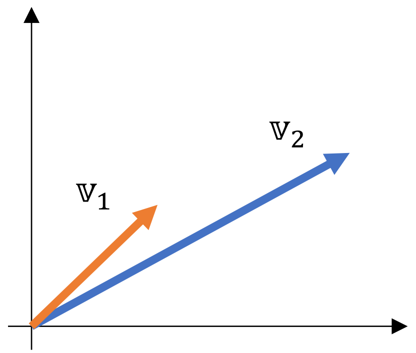
윤 정 훈

일차독립

- 방정식 $c_1\mathbb{v}_1 + c_2\mathbb{v}_2 + \cdots + c_s\mathbb{v}_s = \mathbb{0}$ 을 만족시키는 유일한 스칼라들 $c_1, c_2, \ldots, c_s$ 가
  - $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_s = 0$ 이면 R^n의 벡터들의 공집합이 아닌 집합 $S = \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \ldots, \mathbb{v}_s\}$ 는 **일차독립**(linearly independent) 이라고 한다.
  - $c_1, c_2, \ldots, c_s$ 중 1개 이상이 0이 아닌 경우, 집합 S 는 일차종속(linearly dependent) 이라고 한다.
- 일차종속의 경우, R^n 에서 두 개 이상의 벡터들의 집합 $S = \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \ldots, \mathbb{v}_s\}$ 에 대하여, S 의 벡터 중 적어도 하나는 다른 벡터들의 일차결합으로 표현할 수 있다.



일차종속



일차독립

함수

- 함수(function) f는 주어진 가능한 입력 집합 D에 대해, D의 각각의 입력과 유일한 출력을 연관시키는 규칙이다.
  - 집합 D는 f의 정의역(domain)이라고 한다.
  - 출력은 x에서 f의 값(value) 또는 f에 의한 x의 상(image)이라 한다.
  - 정의역 전체에 걸쳐서 산출한 모든 출력 y의 집합은 f의 치역(range)이라고 한다.
  - f가 x를 $f(x)$로 보낸다 또는 사상한다(map)라고 말한다.

변환

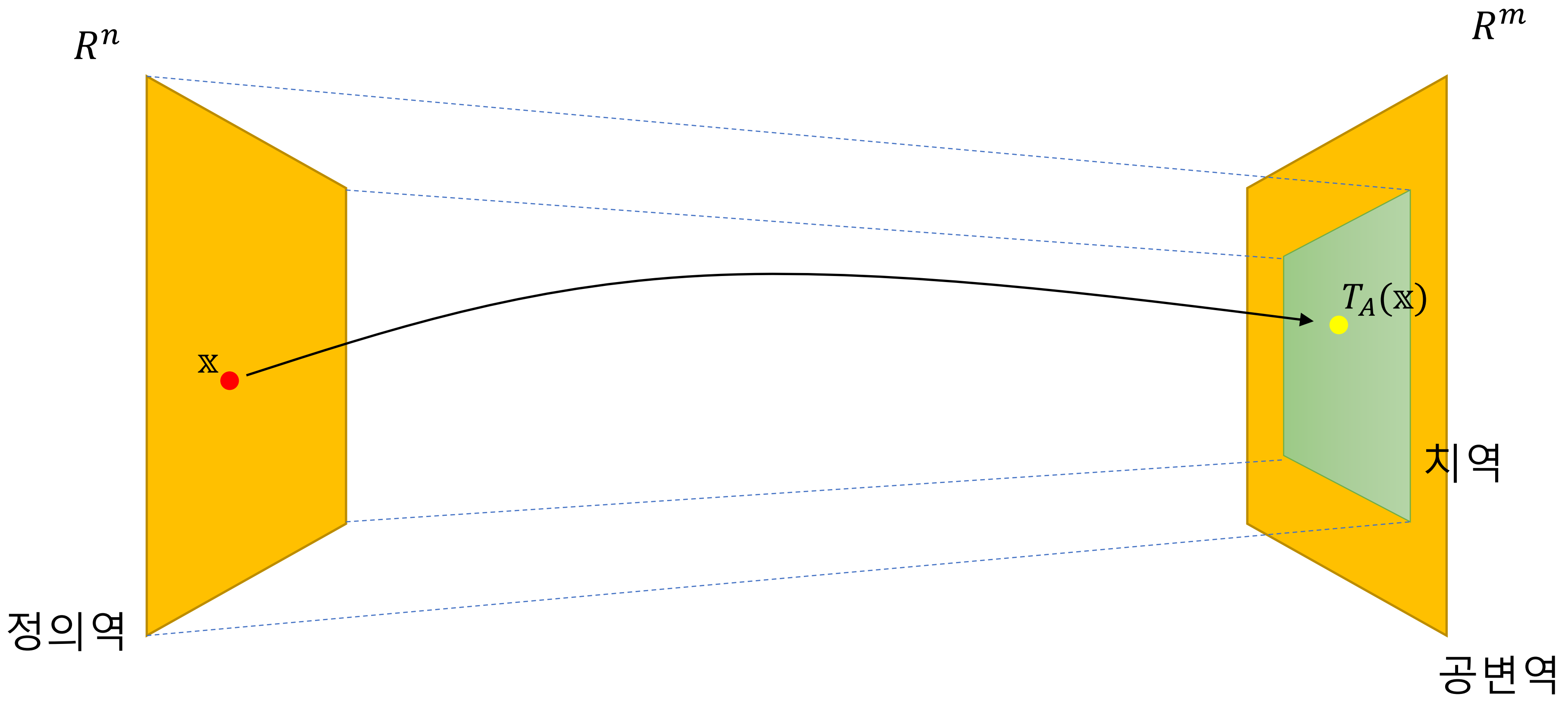
- 입력과 출력이 모두 벡터인 함수는 변환(transformation)이라 하고 일반적으로 변환은 대문자로 표시한다.

- T가 벡터 $\mathbb{x}$로부터 벡터 $\mathbb{w}$로 보내는 변환이면,
    - $\mathbb{w} \overset{T}{=} T(\mathbb{x})$
    - $\mathbb{x} \longrightarrow \mathbb{w}$

변환 예제

- T는 R^2 상의 벡터 $\mathbb{x} = (x_1, x_2)$를 R^2 상의 벡터 $2\mathbb{x} = (2x_1, 2x_2)$로 사상하는 변환
  - $T(\mathbb{x}) = 2\mathbb{x} \Rightarrow T(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2)$
  - $\mathbb{x} \xrightarrow{T} 2\mathbb{x} \Rightarrow (x_1, x_2) \xrightarrow{T} (2x_1, 2x_2)$
    - $\mathbb{x} = (-1,3)$ 이면, $T(\mathbb{x}) = 2\mathbb{x} = (-2,6)$
- T는 R^3 상의 벡터 $\mathbb{x} = (x_1, x_2, x_3)$를 각 성분들의 제곱인 R^3 상의 벡터로 보내는 변환
  - $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2)$
    - $\mathbb{x} = (1,3,-4)$ 이면, $T(\mathbb{x}) = (1,9,16)$

행렬변환



행렬변환

- A가 $m \times n$ 행렬이고 $\mathbb{x}$가 R^n 안의 열벡터이면 곱 $A\mathbb{x}$는 R^m 안의 벡터이며, $\mathbb{x}$에 A를 곱해서 만드는 변환은 R^n안의 벡터를 R^m안의 벡터로 보낸다. 정의역이 R^n이고 치역이 R^m 에서 정의된 이러한 변환 T를 A의 곱셈변환(multiplication by A) 또는 행렬변환(matrix transformation)이라 한다. 행렬 A를 강조하기 위해 이 변환을 T_A로 표시한다.
  - $T_A : R^n \longrightarrow R^m$
  - $T_A(\mathbb{x}) = A\mathbb{x}$
  - $\mathbb{x} \xrightarrow{T_A} A\mathbb{x}$

변환 예제 1

- $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, T_A 는 R^2 상의 2×1 열벡터 $\mathbb{x}$를 R^3 상의 3×1 열벡터 $A\mathbb{x}$로 보내는 변환
    - $T_A(\mathbb{x}) = A\mathbb{x}$ 또는 $\mathbb{x} \xrightarrow{T} A\mathbb{x}$ 로 표시할 수 있다.
    - $A\mathbb{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$ 이므로, $T_A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$ 로 나타낼 수 있다.
    - $T_A(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + 5x_2, 3x_1 + 4x_2)$
    - $T_A\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -4 \\ 13 \\ 9 \end{bmatrix}$ 또는 $T_A(-1,3) = (-4,13,9)$

변환 예제 2

- 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$에 대하여 행렬변환 $T_A: R^2 \longrightarrow R^3$ 을 생각해보자.
    - 만일 T_A에 의한 상이 벡터 $\mathbb{b} = [7 \quad 0 \quad 7]^T$가 되는 벡터 $\mathbb{x}$가 R^2 안에 존재한다면 이 벡터를 찾아라.
    - 만일 T_A에 의한 상이 벡터 $\mathbb{b} = [9 \quad -3 \quad -1]^T$가 되는 벡터 $\mathbb{x}$가 R^2 안에 존재한다면 이 벡터를 찾아라.

선형변환

- R^n안의 모든 벡터 $\mathbb{u}$와 $\mathbb{v}$, 그리고 모든 스칼라 c에 대해 아래 두가지 특성이 성립하면 함수 $T: R^n \longrightarrow R^m$을 R^n 부터 R^m 까지의 **선형변환(linear transformation)**이라고 한다.
  - 동차성 : $T(c\mathbb{u}) = cT(\mathbb{u})$
  - 가산성 : $T(\mathbb{u} + \mathbb{v}) = T(\mathbb{u}) + T(\mathbb{v})$
- $m = n$인 특별한 경우 선형변환 T를 R^n상의 선형연산자(linear operator) 라고 한다.

선형변환 예제1

- 행렬변환은 선형변환인가?
  - 행렬 A는 $m \times n$이고, 열벡터 $\mathbb{u}, \mathbb{v} \in R^n$ 이고, c가 스칼라일때, 행렬 연산의 성질에 의하여 다음을 만족한다.
    - $A(c\mathbb{u}) = c(A\mathbb{u})$
    - $A(\mathbb{u} + \mathbb{v}) = A\mathbb{u} + A\mathbb{v}$
  - 따라서 선형변환의 동차성 및 가산성 모두 만족한다.
    - $T_A(c\mathbb{u}) = A(c\mathbb{u}) = c(A\mathbb{u}) = cT_A(\mathbb{u})$
    - $T_A(\mathbb{u} + \mathbb{v}) = A(\mathbb{u} + \mathbb{v}) = A\mathbb{u} + A\mathbb{v} = T_A(\mathbb{u}) + T_A(\mathbb{v})$

선형변환 예제2

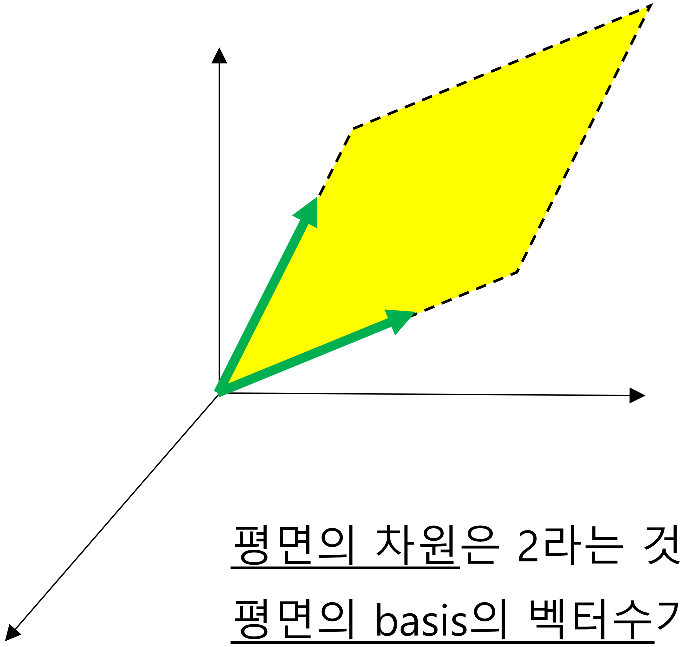
- $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2)$
  - 동차성 위반 : $T(c\mathbb{u}) = T(cu_1, cu_2, cu_3) = (c^2u_1^2, c^2u_2^2, c^2u_3^2) = c^2(u_1^2, u_2^2, u_3^2) = c^2T(\mathbb{u})$
  - 가산성 위반
    - $T(\mathbb{u} + \mathbb{v}) = T(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) = ((u_1 + v_1)^2, (u_2 + v_2)^2, (u_3 + v_3)^2)$
    - $T(\mathbb{u}) + T(\mathbb{v}) = (u_1^2, u_2^2, u_3^2) + (v_1^2, v_2^2, v_2^2) = (u_1^2 + v_1^2, u_2^2 + v_2^2, u_3^2 + v_3^2)$

기저 (Basis)

- R^n의 부분공간 V의 벡터들의 집합이 일차독립이고 V를 생성한다면 이 집합을 V에 대한 기저(basis)라 한다.
  - $V \in R^n$가 원점을 지나는 직선이라면, 직선 위의 영이 아닌 벡터는 V의 기저를 행성한다.
  - $V \in R^n$가 원점을 지나는 평면이라면, 서로 스칼라배수가 아니고 영이 아닌 평면 위의 두 개의 벡터는 V의 기저를 형성한다.
- 표준단위벡터 $\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \dots, \mathbb{e}_n$는 R^n의 표준기저(standard basis)이다.
  - 일차독립이다.
  - R^n을 생성한다.
    - $\forall \mathbb{x} \in R^n$에 대하여, $\mathbb{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1\mathbb{e}_1 + x_2\mathbb{e}_2 + \cdots + x_n\mathbb{e}_n$

차원 (Dimension)

- 0이 아닌 부분공간, $V \in R^n$에 대하여, V의 차원(dimension)은 V의 기저에 대한 벡터의 수로 정의하며, $\dim(V)$라고 쓴다.
  - R^n의 원점을 통과하는 직선의 차원은 1이다.
  - R^n의 원점을 지나는 평면의 차원은 2이다.
  - R^n의 차원은 n이다. (표준단위벡터 $\mathbb{e}_1, \dots, \mathbb{e}_n$)



<u>평면의 차원</u>은 2라는 것은

<u>평면의 basis의 벡터수</u>가 2라는 것이다.

기저와 차원의 성질

- $S = \{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_k\}$가 R^n의 부분공간 V의 기저라면, $\forall \mathbb{v} \in V$는 정확히 한 가지 방법으로 S의 벡터들에 의해 일차결합으로 표현된다.
- R^n의 영이 아닌 k차원 부분공간에서 k개의 일차독립벡터들의 집합은 그 부분공간의 기저이다.
- R^n의 영이 아닌 k차원 부분공간을 생성하는 k개의 벡터들의 집합은 그 부분공간의 기저이다.
- R^n의 영이 아닌 k차원 부분공간에서 k개보다 적은 일차독립벡터들의 집합은 그 부분공간을 생성할 수 없다.
- R^n의 영이 아닌 k차원 부분공간에서 k개보다 많은 벡터들의 집합은 일차 종속이다.

행렬의 기본공간

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$ 행렬의 행벡터들

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$ 행렬의 열벡터들

- A가 $m \times n$행렬일 때,
  - A의 행공간(row space) : A의 행벡터들에 의해 생성되는 R^n의 부분공간, row(A)
  - A의 열공간(column space) : A의 열벡터들에 의해 생성되는 R^m의 부분공간, col(A)
  - A의 영공간(null space) : $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$의 해공간인 R^n의 부분공간, null(A)

계수

- 행렬 A의 행공간의 차원(dimension)은 A의 계수(rank)라 하고 rank(A)로 표시
    - 행렬의 행공간 basis의 벡터의 갯수
- 행렬 A의 영공간(null space)의 차원은 영공간의 차원(nullity)이라 하고 nullity(A) 로 표시

행공간 및 계수의 예제

- 다음 벡터들에 의해 성성된 R^5의 부분공간 W에 대한 기저를 구하라.

$$\mathbb{v}_1 = (1,0,0,0,2)$$

$$\mathbb{v}_2 = (-2,1,-3,-2,-4)$$

$$\mathbb{v}_3 = (0,5,-14,-9,0)$$

$$\mathbb{v}_4 = (2,10,-28,-18,4)$$

  - 주어진 벡터들에 의해 생성된 부분공간은 그 행렬 A의 행공간이다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & -14 & -9 & 0 \\ 2 & 10 & -28 & -18 & 4 \end{bmatrix}$$

행공간 및 계수의 예제

- 이 행렬을 행사다리꼴로 변형시킴으로써 다음 행렬을 얻는다.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 0이 아닌 행을 추출하면 기저벡터들을 생성한다.

$$\mathbb{w}_1 = (1,0,0,0,2)$$

$$\mathbb{w}_2 = (0,1,-3,-2,0)$$

$$\mathbb{w}_3 = (0,0,1,1,0)$$

- 따라서, 주어진 벡터들에 의해 생성되는 공간의 기저는 3이고, 주어진 벡터에 의해 생성되는 부분공간은 그 행렬 A의 행공간이므로, 행공간의 차원 즉, rank는 3이다.
- 주어진 벡터 4개로 생성되는 부분공간 W를 생성하기 위해서는 결국 주어진 벡터 4개까지 필요없고, 3개의 벡터(기저)만 있으면 된다. 즉 벡터의 갯수로 보면 1개가 필요없는 것이 된다. W를 나타내기 위해서는 계수만큼의 벡터만 있으면 된다.