기초 선형대수
(벡터)

윤 정 훈

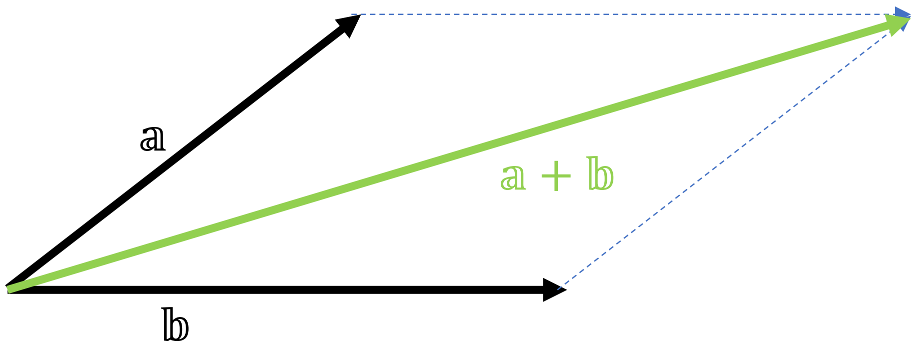
Vector란?

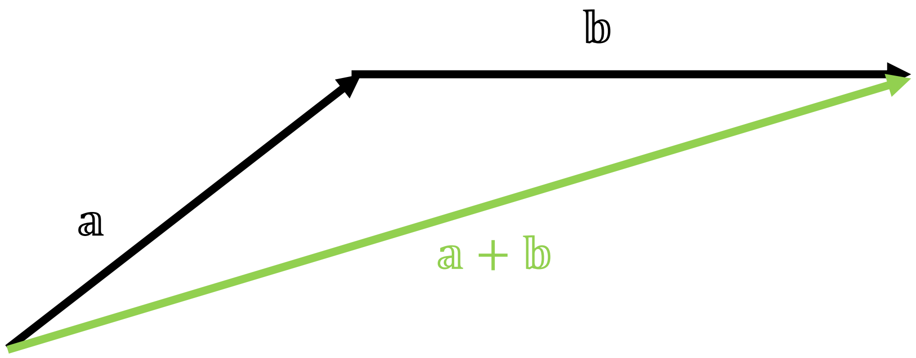
- Data를 분석할 때, Vector를 왜 배우는가?
  - 전통적인 선형대수학에서는 벡터를 숫자들의 list로 생각하도록 한다.
  - 사물을 list로 표현하여 데이터화 할 수 있다.
    - 사람을 (키, 몸무게, 나이)로 구성된 list로 표현할 수 있다.
    - 학생의 시험 성적을 (시험 1 점수, 시험 2 점수, 시험 3 점수, 시험 4 점수)의 list로 표현한다.
  - 벡터로 표현된 데이터는 계산하기 쉽다.
  - python의 list를 사용하여 벡터를 나타낼 수 있다.
    - python 예제 코드를 보자

Vector의 정의

- Vector의 수학적 정의
  - Scala는 물리에서 표현되는 물리적인 양(Quantity)으로서, 수치값으로 완전하게 표시할 수 있는 양이다.
    - 배의 속력은 10노트
  - Vector는 물리에서 표현되는 물리적인 양(Quantity)으로서, 수치값과 방향성이 있어야 완전하게 표시할 수 있는 양이다.
    - 배의 속도는 나침반 상에서 45도 북동방향으로 10노트

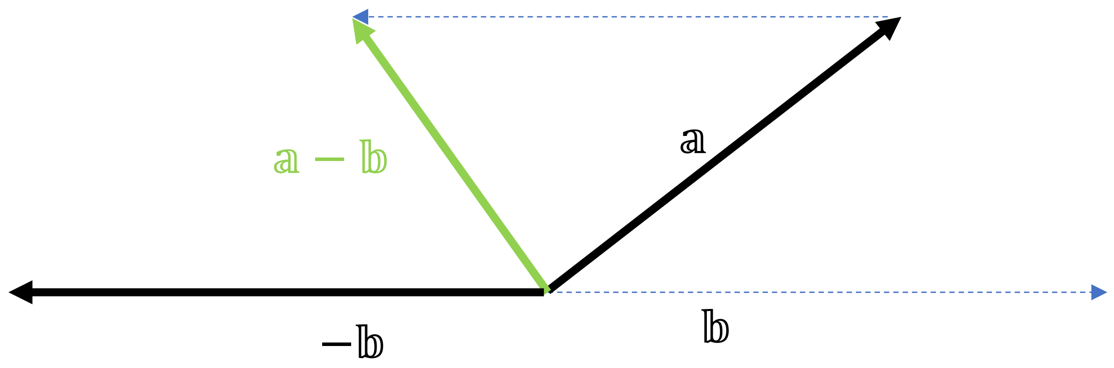
Vector의 덧셈연산 (기하학적 의미)

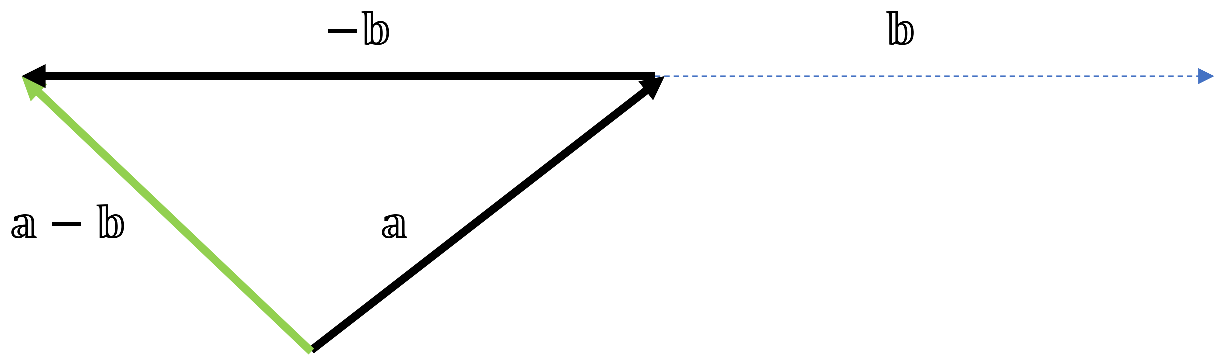




$\mathbb{a}$의 끝점이 $\mathbb{b}$방향으로 $\mathbb{b}$의 길이만큼 평행이동한 결과

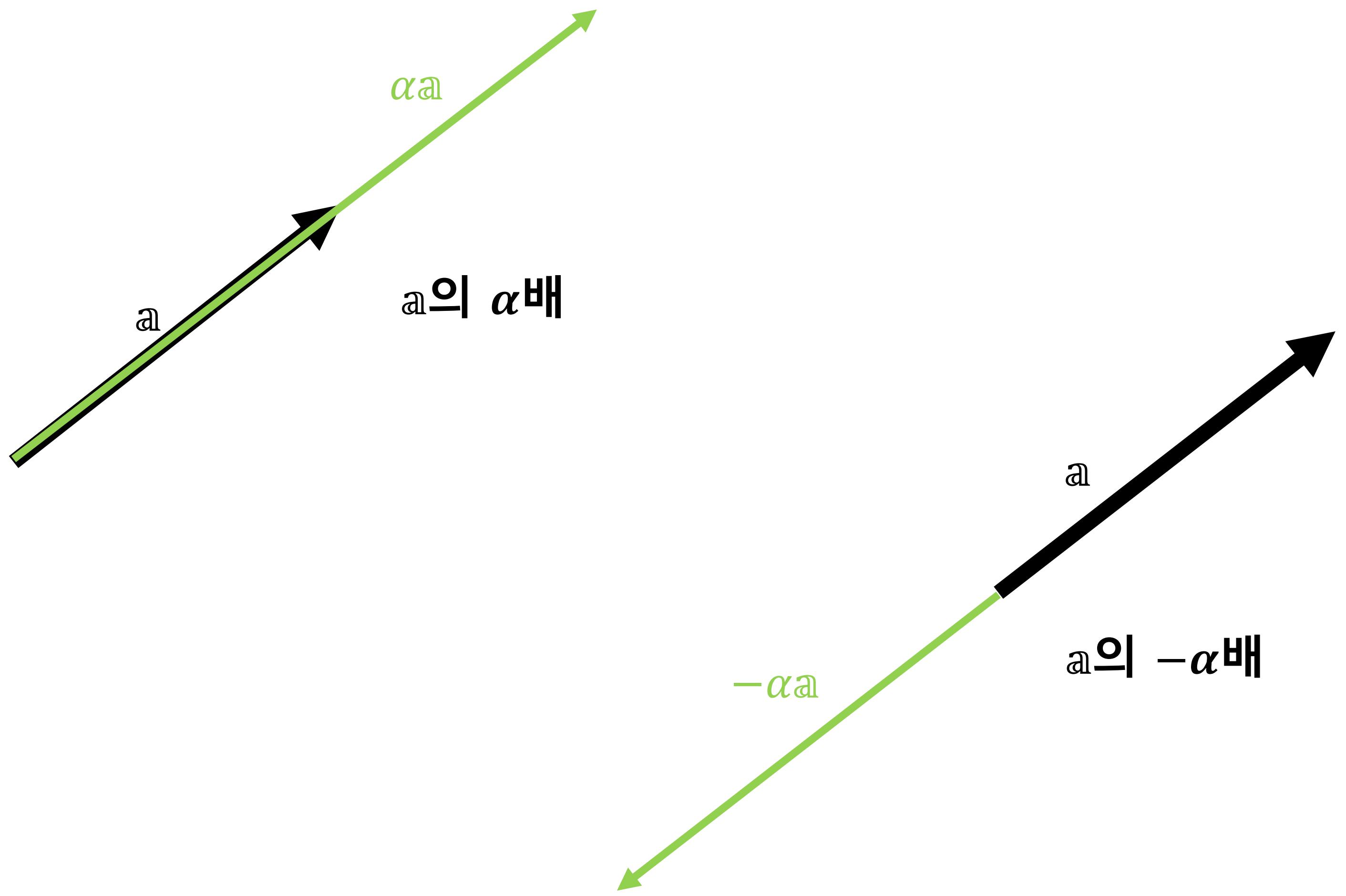
Vector의 뺄셈연산 (기하학적 의미)





$\mathbb{a}$의 끝점이 $-\mathbb{b}$방향으로 $\mathbb{b}$의 길이만큼 평행이동한 결과

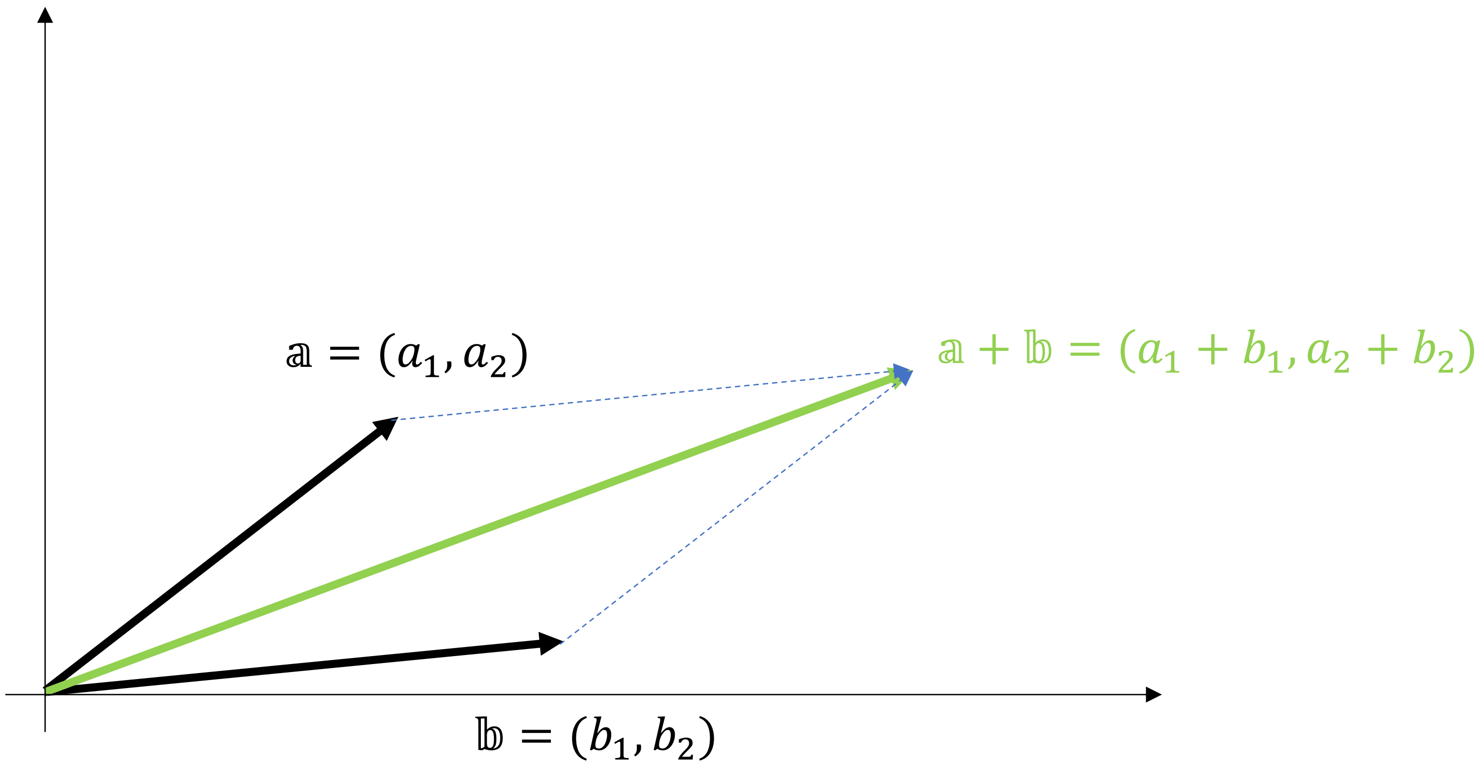
Vector의 스칼라곱 (기하학적 의미)



좌표공간에서의 Vector

- 화살표가 벡터를 기하학적으로 표현하는 데 유용하다.
- 우리는 벡터를 대수적으로 표현하려고하고 직교좌표계에 벡터가 있는 것으로 생각한다.
- 직교좌표공간안의 한점은 x축, y축 … 의 순서쌍과 1:1대응이 이루어진다. 순서쌍에 있는 좌표를 성분(component 또는 entry)이라고 부른다.
- 벡터는 어떤 유한한 차원의 공간에 존재하는 점들이다.
- 따라서 숫자로 구성된 list로 표현할 수 있다.

좌표공간에서의 Vector의 덧셈연산



각 컴포넌트를 표시하고 합으로 표현한다.

좌표공간에서의 Vector 연산

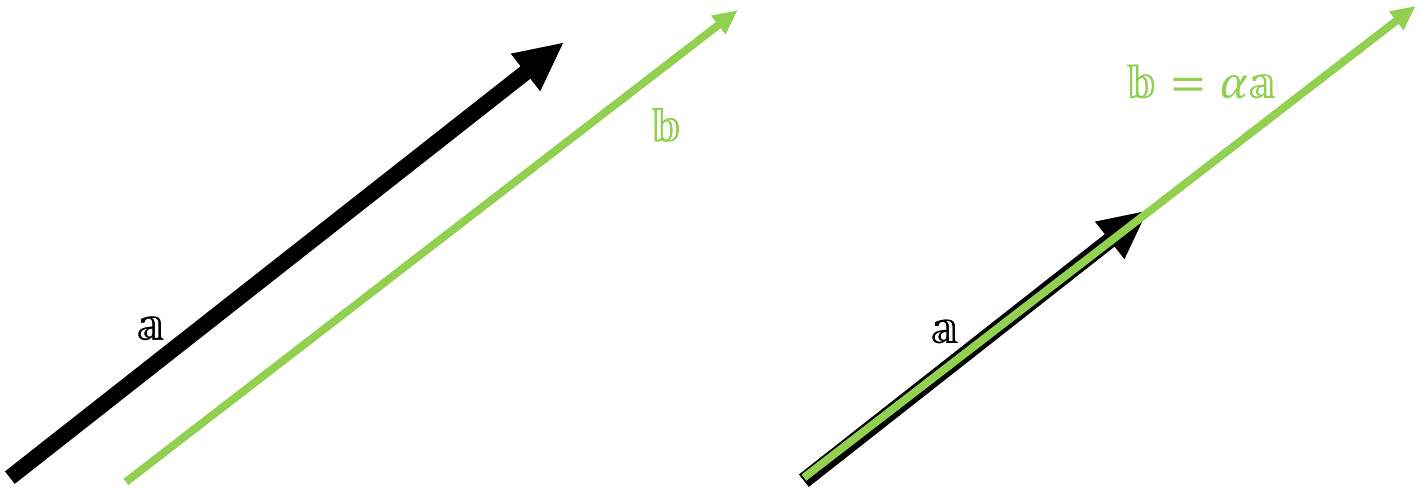
- 좌교공간에서의 vector 연산의 종류
  - n차원 실수공간 R^n내의 두 벡터 $\mathbb{v}$ = $(v_1, \dots, v_n)$, $\mathbb{w}$ = $(w_1, \dots, w_n)$와 임의의 스칼라 k에 대하여
    - $\mathbb{v} + \mathbb{w} = (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)$
    - $k\mathbb{v} = (kv_1, \dots, kv_n)$
    - $-\mathbb{v} = (-v_1, \dots, -v_n)$
    - $\mathbb{w} - \mathbb{v} = (w_1 - v_1, \dots, w_n - v_n)$

좌표공간에서의 Vector 연산

- 좌표공간에서의 vector의 연산의 성질
  - $\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{w}$: 벡터, k, l : 스칼라
    - 교환법칙 $\mathbb{u} + \mathbb{v} = \mathbb{u} + \mathbb{v}$
    - 결합법칙 $(\mathbb{u} + \mathbb{v}) + \mathbb{w} = \mathbb{u} + (\mathbb{v} + \mathbb{w})$
    - 항등원 $\mathbb{u} + \mathbb{O} = \mathbb{O} + \mathbb{u}$
    - 역원 $\mathbb{u} + (-\mathbb{u}) = \mathbb{O}$
    - $(k + l)\mathbb{u} = k\mathbb{u} + l\mathbb{u}$
    - $k(\mathbb{u} + \mathbb{v}) = k\mathbb{u} + k\mathbb{v}$
    - $k(l\mathbb{u}) = (kl)\mathbb{u}$
    - $1\mathbb{u} = \mathbb{u}$
    - $0\mathbb{v} = \mathbb{O}$
    - $k\mathbb{O} = \mathbb{O}$
    - $(-1)\mathbb{v} = -\mathbb{v}$

벡터의 평행

- 두 벡터가 평행(parallel), 동일직선상에 있다. (collinear)
  - 한 벡터가 다른 벡터의 스칼라배수인 경우를 뜻한다.



Vector의 일차결합

- Vector의 일차결합 (**Linear Combination**)
  - $\mathbb{w}, \mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_k \in R^n$, 스칼라 $c_1, \dots, c_k$가 주어졌을 때, 벡터 $\mathbb{w}$가 $\mathbb{w} = c_1\mathbb{v}_1 + c_2\mathbb{v}_2 + \cdots + c_k\mathbb{v}_k$로 표현되면, 벡터 $\mathbb{w}$는 벡터 $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \dots, \mathbb{v}_k$의 1차 결합이라고 한다.
  - 이 때 $c_1, c_2, \dots, c_k$는 계수(coefficient)라고 한다.

Row vector / Column vector

- 괄호표기(comma-delimited)로, R^n의 좌표공간내에서의 벡터 표기 $\mathbb{v} = (v_1, \ldots, v_n)$

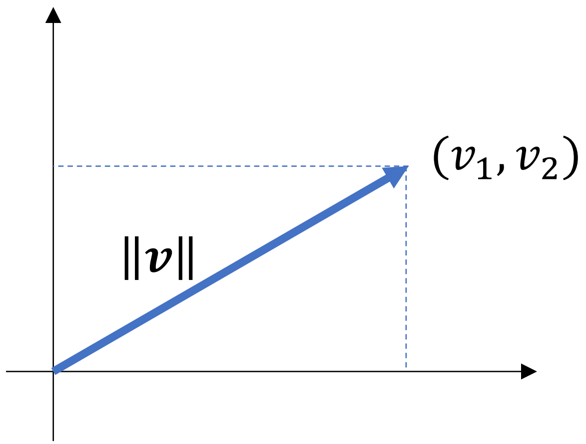
- 벡터표기란 n개의 성분(component)를 정해진 순서로 늘어놓은 것이기 때문에, 벡터의 성분을 올바른 순서대로 적어 주는 어떠한 형식의 표기방식이라도 괄호표기를 대신 할 수 있다.

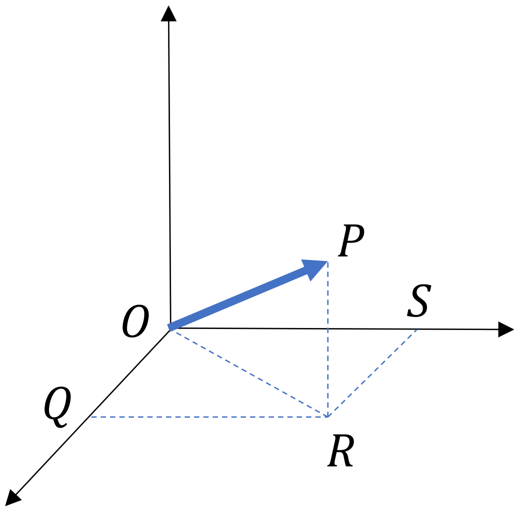
- $\mathbb{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$을 행벡터 형식이라고 한다. (row vector)

- $\mathbb{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]^T = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$를 열벡터 형식이라고 한다. (column vector)

2,3차원 Vector의 길이

- R^2에서 벡터 $\mathbb{v} = (v_1, v_2)$의 길이 $\|\mathbb{v}\|$는 Pythagoras의 정리에 의하여 다음과 같다.
  - $\|\mathbb{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$
  - ex) $\mathbb{v}$ = (-3, 2)의 norm?
- R^3에서 벡터 $\mathbb{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 의 길이 $\|\mathbb{v}\|$는 Pythagoras의 정리에 의하여 다음과 같다.
  - $\|\mathbb{v}\| = (OQ)^2 + (QR)^2 + (RP)^2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$
  - ex) $\mathbb{v}$ = (-3, 2, 1)의 norm?





n차원 Vector의 길이

- $\mathbb{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$이 R^n의 벡터이면 $\mathbb{v}$의 길이(length 또는 norm) 혹은 크기(magnitude)는 $\|\mathbb{v}\|$로 표시하며 다음과 같이 정의한다.
    - $\|\mathbb{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$
- 벡터 $\mathbb{v} \in R^n$와 임의의 스칼라 k에 대하여,
    - $\|\mathbb{v}\| \geqq 0$
    - $\|\mathbb{v}\| = 0$이 되기 위한 필요충분조건은 $\mathbb{v} = 0$이다.
    - $\|k\mathbb{v}\| \geqq |k|\|\mathbb{v}\|$

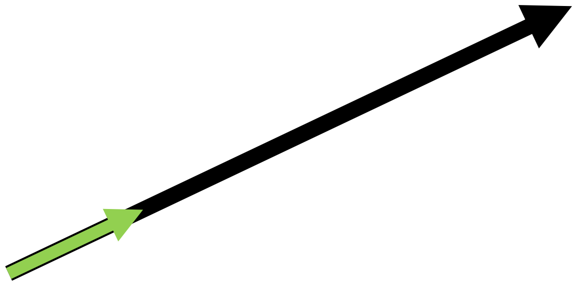
단위 벡터

- 단위 벡터(unit vector)
  - 길이가 1인 벡터를 단위벡터라고 한다.
- 영이 아닌 벡터 $\mathbb{v} \in R^n$와 같은 방향을 갖는 단위벡터 $\mathbb{u}$는 다음 식으로 구한다.

$$\mathbb{u} = \frac{1}{\|\mathbb{v}\|}\mathbb{v}$$

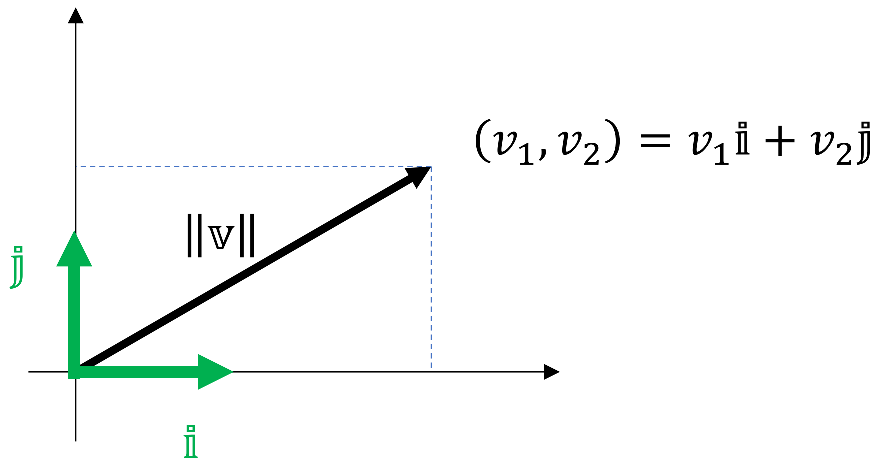
- 단위벡터를 구하는 과정을 정규화(normalizing)라 한다.

ex) v = (2, 2, -1)의 단위벡터는?



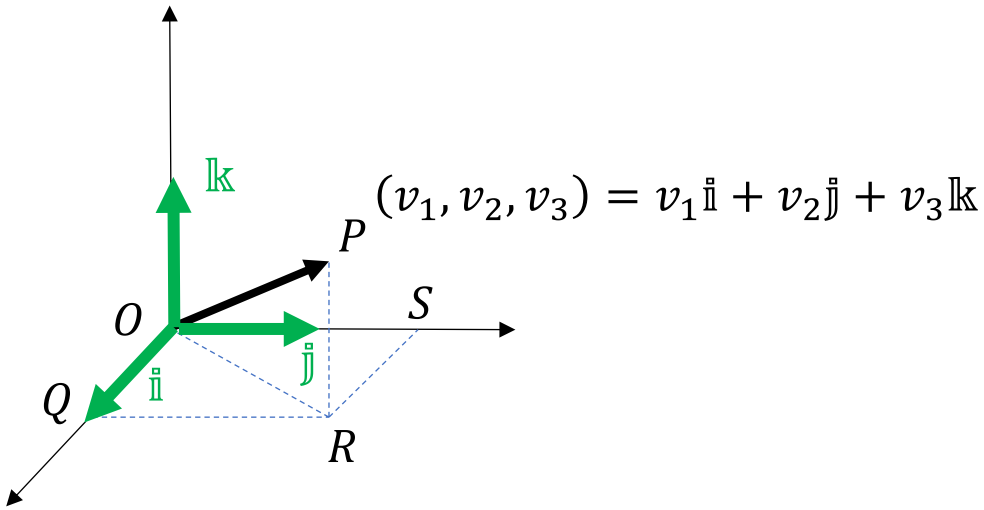
2차원 표준 단위 벡터

- R^2의 직교좌표계에서 양의 좌표축 방향의 단위벡터들을 표준단위벡터라 부른다.
  - R^2에서는 $\mathbb{i} = (1,0)$, $\mathbb{j} = (0,1)$
- R^2의 모든 벡터 $\mathbb{v} = (v_1, v_2)$는 다음과 같이 표준단위벡터들로 표현
  - $\mathbb{v} = (v_1, v_2) = v_1(1,0) + v_2(0,1) = v_1\mathbb{i} + v_2\mathbb{j}$



3차원 표준 단위 벡터

- R^3의 직교좌표계에서 양의 좌표축 방향의 단위벡터들을 표준단위벡터라 부른다.
  - R^3 에서는 $\mathbb{i} = (1,0,0)$, $\mathbb{j} = (0,1,0)$, $\mathbb{k} = (0,0,1)$
- R^3의 모든 벡터 $\mathbb{v} = (v_1, v_2, v_3)$는 다음과 같이 표준단위벡터들로 표현
  - $\mathbb{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1) = v_1\mathbb{i} + v_2\mathbb{j} + v_3\mathbb{k}$

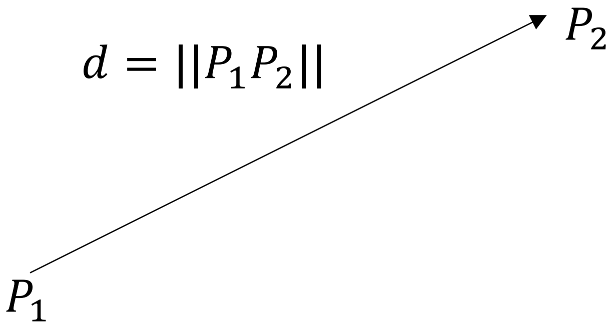


n차원 표준 단위 벡터

- 일반적으로 R^n에서의 표준단위벡터는
  - $\mathbb{e}_1 = (1,0,\dots,0)$, $\mathbb{e}_2 = (0,1,\dots,0)$, … , $\mathbb{e}_n = (0,0,\dots,1)$
- R^n의 벡터 $\mathbb{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$가 다음과 같이 표준단위벡터들로써 표현될 수 있다.
  - $\mathbb{v} = (v_1, \dots, v_n) = v_1\mathbb{e}_1 + v_2\mathbb{e}_2 + \cdots + v_n\mathbb{e}_n$
  - 즉, 벡터가 표준단위벡터의 선형결합(linear combination)으로 나타내어진다.

2,3차원의 점들 간의 거리

- P_1과 P_2가 R^2또는 R^3사이의 점이면 벡터 P_1, P_2의 길이는 두 점 간 거리 d와 일치한다.
  - 2차원 : $d(\mathbb{u}, \mathbb{v}) = ||P_1P_2|| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
  - 3차원 : $d(\mathbb{u}, \mathbb{v}) = ||P_1P_2|| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)}$



n차원의 점들 간의 거리

- $\mathbb{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\mathbb{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$이 R^n의 점이면 이들 $\mathbb{u}$와 $\mathbb{v}$사이의 거리(distance)를 $d(\mathbb{u}, \mathbb{v})$로 표시하며 다음과 같이 정의한다.
  - $d(\mathbb{u}, \mathbb{v}) = \|\mathbb{u} - \mathbb{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)}$

    ex) $\mathbb{u} = (1, 3, -2, 7)$, $\mathbb{v} = (0, 7, 2, 2)$ 두 점 사이의 거리는?

- 거리의 성질
  - $d(\mathbb{u}, \mathbb{v}) \geq 0$
  - $d(\mathbb{u}, \mathbb{v}) = 0$이 되기 위한 필요충분조건은 $\mathbb{u} = \mathbb{v}$이다.
  - $d(\mathbb{u}, \mathbb{v}) = d(\mathbb{v}, \mathbb{u})$

벡터의 내적

- 벡터의 내적(Inner product)은 두 벡터 사이의 각을 재거나 두 벡터가 서로 수직이라는 것을 판별하는데 유용한 곱셈

- $\mathbb{u} = (u_1, \ldots, u_n)$과 $\mathbb{v} = (v_1, \ldots, v_n)$이 R^n의 벡터일때, $\mathbb{u}$와 $\mathbb{v}$의 점곱(dot product) 또는 $\mathbb{u}$와 $\mathbb{v}$의 Euclid 내적(Euclidean inner product)은 $\mathbb{u} \cdot \mathbb{v}$로 표기하며 다음 식과 같이 정의한다.
  - $\mathbb{u} \cdot \mathbb{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$

    ex) $\mathbb{u} = (-1,3,5,7)$, $\mathbb{v} = (5,-4,7,0)$

내적의 성질

- $\mathbb{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$
  - $\mathbb{v} \cdot \mathbb{v} = v_1 v_1 + v_2 v_2 + \cdots + v_n v_n = \|\mathbb{v}\|^2$

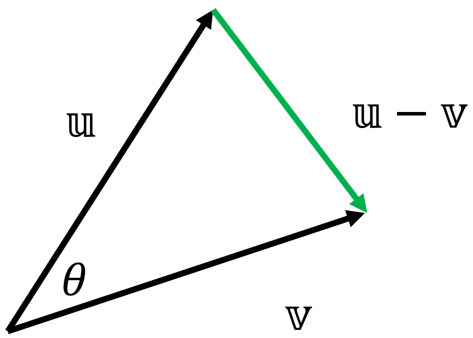
- 내적의 기본 성질들
  - $\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{w}$가 R^n의 벡터이고 k가 실수이면
    - $\mathbb{u} \cdot \mathbb{v} = \mathbb{v} \cdot \mathbb{u}$(대칭성)
    - $\mathbb{u} \cdot (\mathbb{v} + \mathbb{w}) = \mathbb{u} \cdot \mathbb{v} + \mathbb{v} \cdot \mathbb{w}$(분배성)
    - $k(\mathbb{u} \cdot \mathbb{v}) = (k\mathbb{u}) \cdot \mathbb{v} = \mathbb{u} \cdot (k\mathbb{v})$ (동치성)
    - $\mathbb{v} \cdot \mathbb{v} \geq 0$ 이고$\mathbb{v} \cdot \mathbb{v} = 0$의 필요충분조건은 $\mathbb{v} = 0$ (양수성)
    - $\mathbb{O} \cdot \mathbb{v} = \mathbb{v} \cdot \mathbb{O}$
    - $(\mathbb{v} + \mathbb{u}) \cdot \mathbb{w} = \mathbb{v} \cdot \mathbb{w} + \mathbb{u} \cdot \mathbb{w}$
    - $\mathbb{u} \cdot (\mathbb{v} - \mathbb{w}) = \mathbb{u} \cdot \mathbb{v} - \mathbb{v} \cdot \mathbb{w}$
    - $(\mathbb{v} - \mathbb{u}) \cdot \mathbb{w} = \mathbb{v} \cdot \mathbb{w} - \mathbb{u} \cdot \mathbb{w}$

벡터의 사잇각

- 만약 $\mathbb{u}$와 $\mathbb{v}$가 R^2 또는 R^3의 벡터들이고 θ가 이들 벡터의 사잇각이라 하면

$$\cos\theta = \frac{\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}}{\|\mathbb{u}\|\|\mathbb{v}\|}$$

  - $\mathbb{u}\cdot\mathbb{v} = \|\mathbb{u}\|\|\mathbb{v}\|\cos\theta$
    - 영벡터가 아닌 $\mathbb{u}$ 와 $\mathbb{v}$ 가 수직이기 위한 필요충분조건은 두 벡터의 내적이 0



도출방법)

1. 코사인 제2법칙 : $\|\mathbb{v}-\mathbb{u}\|^2 = \|\mathbb{v}\|^2 + \|\mathbb{u}\|^2 - 2\|\mathbb{v}\|\|\mathbb{u}\|\cos\theta$

2. 벡터의 길이 : $\|\mathbb{v}-\mathbb{u}\|^2 = (\mathbb{v}-\mathbb{u})\cdot(\mathbb{v}-\mathbb{u})$

이 두개가 같음을 보이면, 사잇각이 도출된다.

벡터의 직교

- R^n의 벡터 $\mathbb{u}$와 $\mathbb{v}$가 직교한다(orthogonal)는 것은 $\mathbb{u} \cdot \mathbb{v} = 0$을 만족시키는 경우를 말한다.

- 공집합이 아닌 R^n의 벡터들의 집합이 **직교집합**(orthogonal set)이라는 것은 이 집합의 임의의 서로 다른 한 쌍의 벡터가 직교하는 것을 말한다.

  ex) 다음 벡터들이 R^4에서 직교집합을 이루고 있음을 보여라.

  $\mathbb{v}_1 = (1,2,2,4)$, $\mathbb{v}_2 = (-2,1,-4,2)$, $\mathbb{v}_3 = (-4,2,2,-1)$

벡터의 정규직교

- R^n의 두 벡터 $\mathbb{u}$와 $\mathbb{v}$가 정규직교(orthonormal)라는 것은 이들이 직교하고 길이가 1인 경우를 뜻한다.
  - $\mathbb{u} \cdot \mathbb{v} = 0$
  - $\|\mathbb{u}\| = 1,\ \|\mathbb{v}\| = 1$

- 벡터들의 집합이 **정규직교집합**(orthonormal set)이라는 것은 이 집합의 모든 벡터들의 길이가 1이고 이 집합 속의 서로 다른 임의의 한 쌍의 벡터들이 직교하는 경우를 뜻한다.

ex) 표준단위벡터 $\mathbb{e}_1 = (1,0,\dots,0)$, $\mathbb{e}_2 = (0,1,\dots,0)$, … , $\mathbb{e}_n = (0,\dots,0,1)$

ex) 다음이 정규직교집합을 이루는 것을 보여라.

$\mathbb{q}_1 = (\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5})$, $\mathbb{q}_2 = (-\frac{2}{5},\frac{1}{5},-\frac{4}{5},\frac{2}{5})$, $\mathbb{q}_3 = (-\frac{4}{5},\frac{2}{5},\frac{2}{5},-\frac{1}{5})$