

기초 선형대수 (벡터)

윤 정 훈

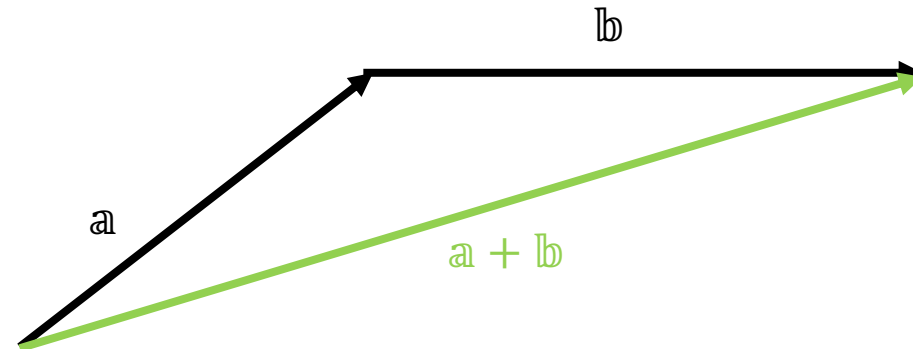
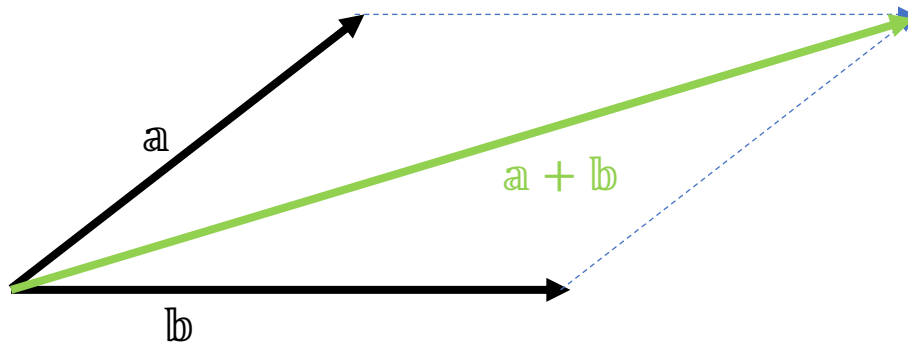
Vector란?

- Data를 분석할 때, Vector를 왜 배우는가?
 - 전통적인 선형대수학에서는 벡터를 숫자들의 list로 생각하도록 한다.
 - 사물을 list로 표현하여 데이터화 할 수 있다.
 - ▶ 사람을 (키, 몸무게, 나이)로 구성된 list로 표현할 수 있다.
 - ▶ 학생의 시험 성적을 (시험 1 점수, 시험 2 점수, 시험 3 점수, 시험 4 점수)의 list로 표현한다.
 - 벡터로 표현된 데이터는 계산하기 쉽다.
 - python의 list를 사용하여 벡터를 나타낼 수 있다.
 - ▶ python 예제 코드를 보자

Vector의 정의

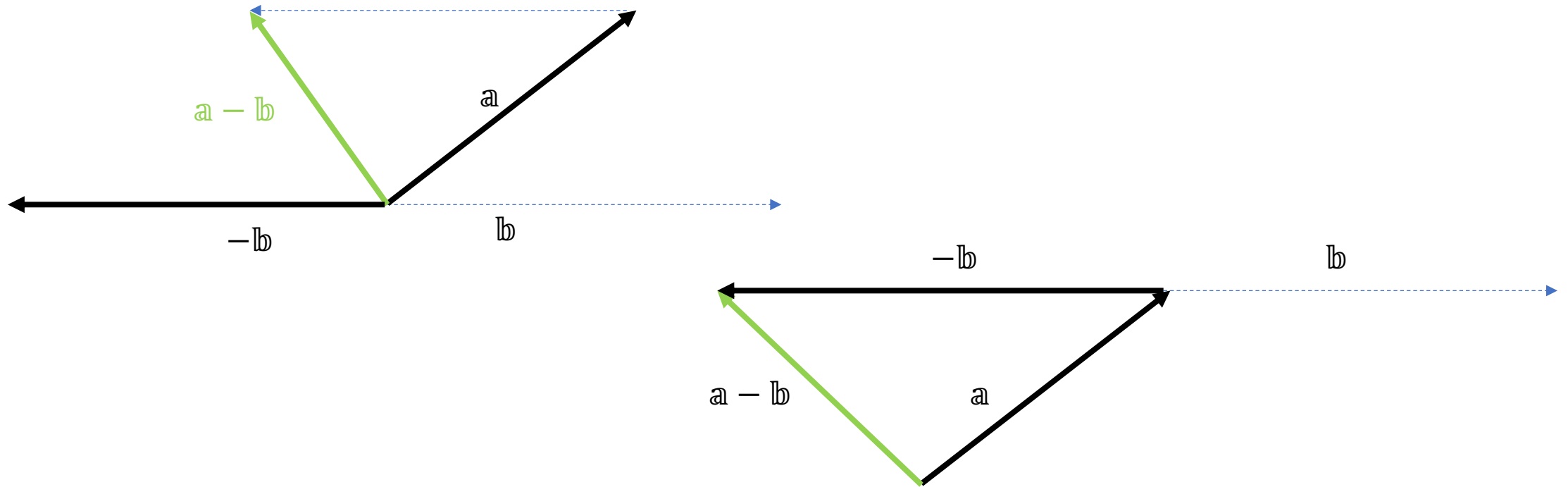
- Vector의 수학적 정의
 - Scalar는 물리에서 표현되는 물리적인 양(Quantity)으로서, 수치값으로 완전하게 표시할 수 있는 양이다.
 - ▶ 배의 속력은 10노트
 - Vector는 물리에서 표현되는 물리적인 양(Quantity)으로서, 수치값과 방향성이 있어야 완전하게 표시할 수 있는 양이다.
 - ▶ 배의 속도는 나침반 상에서 45도 북동방향으로 10노트

Vector의 덧셈연산 (기하학적 의미)



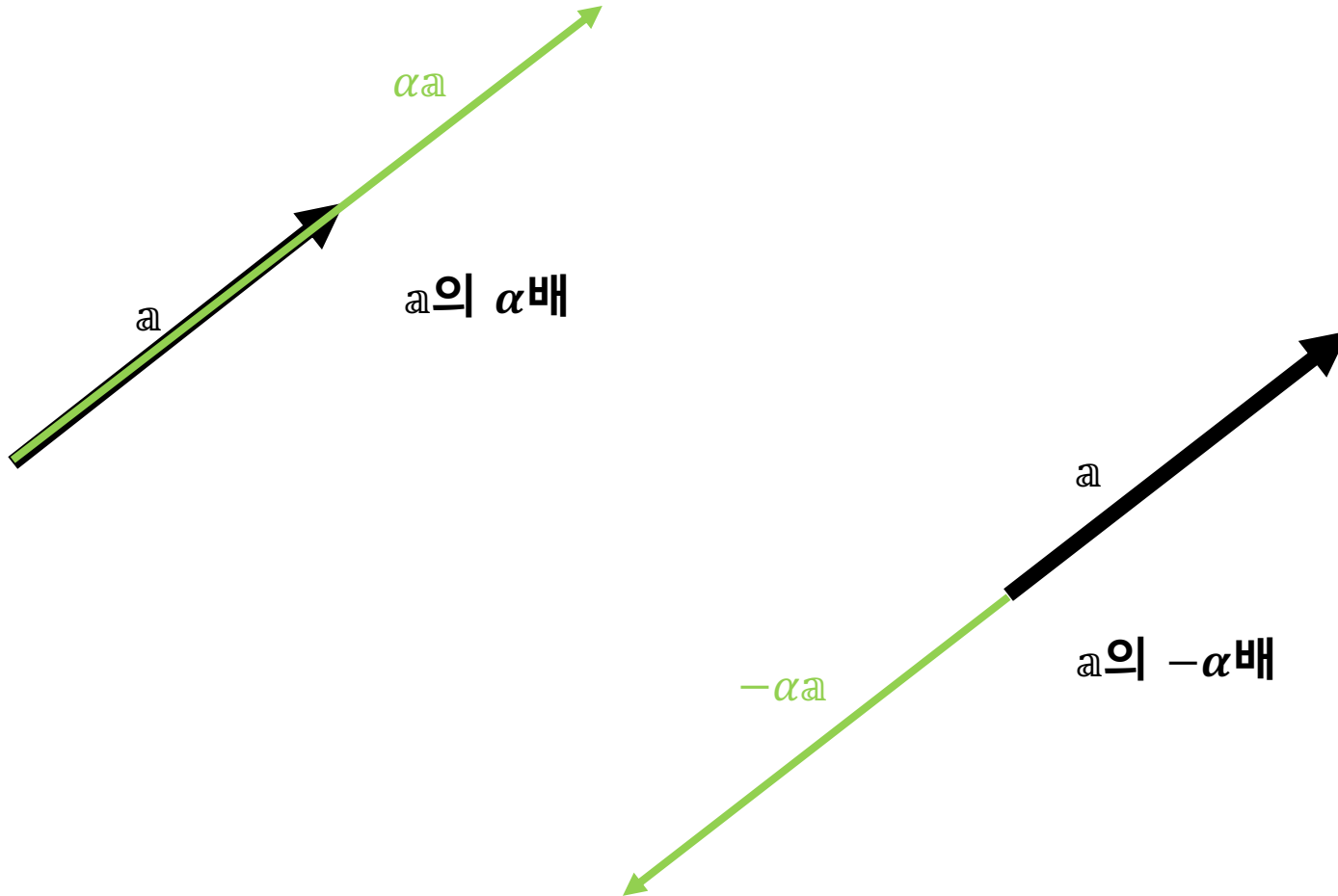
a 의 끝점이 b 방향으로 b 의 길이만큼 평행이동한 결과

Vector의 뺄셈연산 (기하학적 의미)



a 의 끝점이 $-b$ 방향으로 b 의 길이만큼 평행이동한 결과

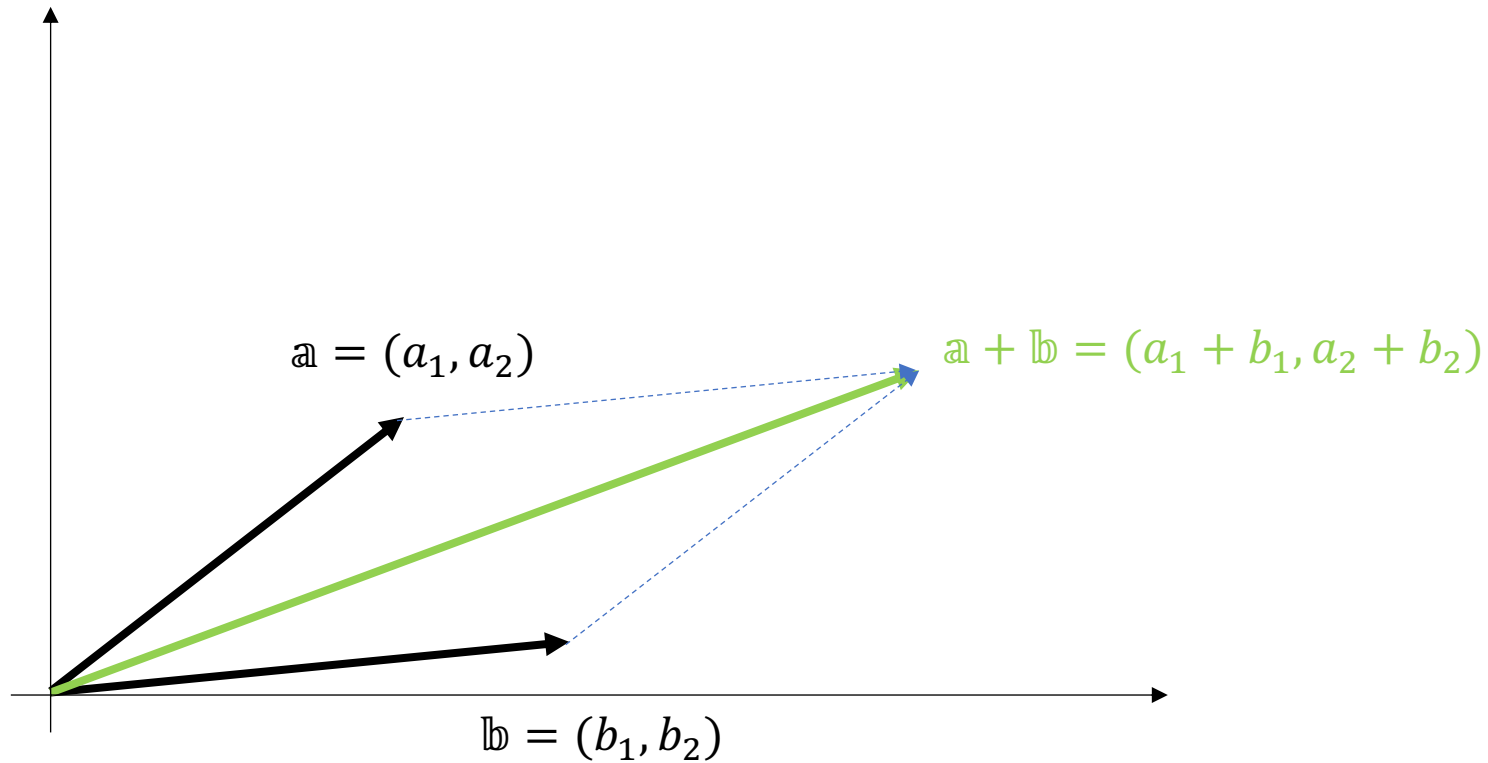
Vector의 스칼라곱 (기하학적 의미)



좌표공간에서의 Vector

- 화살표가 벡터를 기하학적으로 표현하는 데 유용하다.
- 우리는 벡터를 대수적으로 표현하려고하고 직교좌표계에 벡터가 있는 것으로 생각한다.
- 직교좌표공간안의 한점은 x 축, y 축 ... 의 순서쌍과 1:1대응이 이루어진다. 순서쌍에 있는 좌표를 성분(component 또는 entry)이라고 부른다.
- 벡터는 어떤 유한한 차원의 공간에 존재하는 점들이다.
- 따라서 숫자로 구성된 list로 표현할 수 있다.

좌표공간에서의 Vector의 덧셈연산



각 컴포넌트를 표시하고 합으로 표현한다.

좌표공간에서의 Vector 연산

- 좌표공간에서의 vector 연산의 종류

- n 차원 실수공간 R^n 내의 두 벡터 $\mathbb{V} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathbb{W} = (w_1, \dots, w_n)$ 와 임의의 스칼라 k 에 대하여

- ▶ $\mathbb{V} + \mathbb{W} = (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)$

- ▶ $k\mathbb{V} = (kv_1, \dots, kv_n)$

- ▶ $-\mathbb{V} = (-v_1, \dots, -v_n)$

- ▶ $\mathbb{W} - \mathbb{V} = (w_1 - v_1, \dots, w_n - v_n)$

좌표공간에서의 Vector 연산

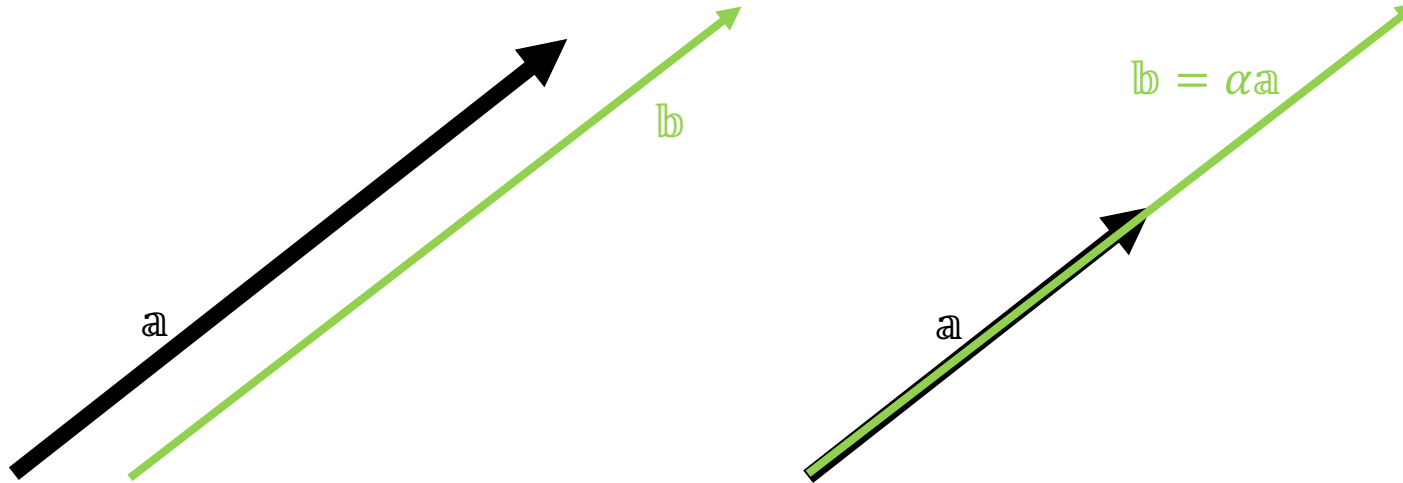
- 좌표공간에서의 vector의 연산의 성질

- $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$: 벡터, k, l : 스칼라

- ▶ 교환법칙 $\mathfrak{u} + \mathfrak{v} = \mathfrak{v} + \mathfrak{u}$
 - ▶ 결합법칙 $(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}) + \mathfrak{w} = \mathfrak{u} + (\mathfrak{v} + \mathfrak{w})$
 - ▶ 항등원 $\mathfrak{u} + \mathbb{O} = \mathbb{O} + \mathfrak{u}$
 - ▶ 역원 $\mathfrak{u} + (-\mathfrak{u}) = \mathbb{O}$
 - ▶ $(k + l)\mathfrak{u} = k\mathfrak{u} + l\mathfrak{u}$
 - ▶ $k(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}) = k\mathfrak{u} + k\mathfrak{v}$
 - ▶ $k(l\mathfrak{u}) = (kl)\mathfrak{u}$
 - ▶ $1\mathfrak{u} = \mathfrak{u}$
 - ▶ $0\mathfrak{v} = \mathbb{O}$
 - ▶ $k\mathbb{O} = \mathbb{O}$
 - ▶ $(-1)\mathfrak{v} = -\mathfrak{v}$

벡터의 평행

- 두 벡터가 평행(parallel), 동일직선상에 있다. (collinear)
 - 한 벡터가 다른 벡터의 스칼라배수인 경우를 뜻한다.



Vector의 일차결합

- Vector의 일차결합 (**Linear Combination**)

- $\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in R^n$, 스칼라 c_1, \dots, c_k 가 주어졌을 때, 벡터 \mathbf{w} 가 $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k$ 로 표현

되면, 벡터 \mathbf{w} 는 벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ 의 1차 결합이라고 한다.

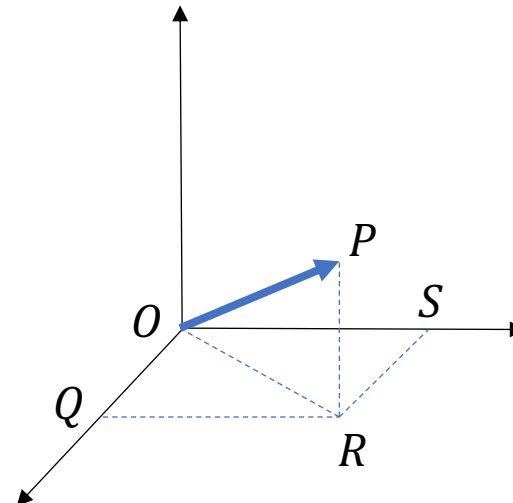
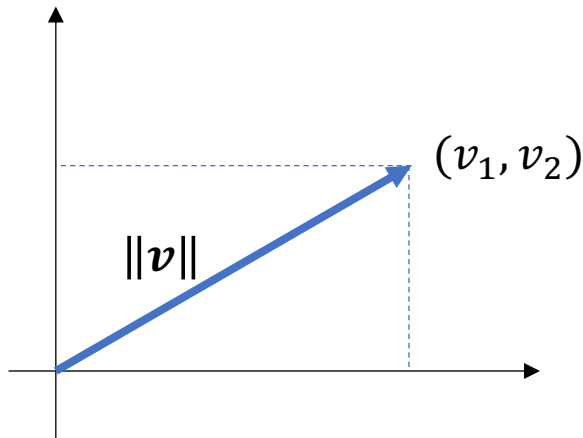
- 이 때 c_1, c_2, \dots, c_k 는 계수(coefficient)라고 한다.

Row vector / Column vector

- 괄호표기(comma-delimited)로, R^n 의 좌표공간내에서의 벡터 표기 $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$
- 벡터표기란 n 개의 성분(component)를 정해진 순서로 늘어놓은 것이기 때문에, 벡터의 성분을 올바른 순서대로 적어 주는 어떠한 형식의 표기방식이라도 괄호표기를 대신 할 수 있다.
- $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ 을 행벡터 형식이라고 한다. (row vector)
- $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ 를 열벡터 형식이라고 한다. (column vector)

2,3차원 Vector의 길이

- R^2 에서 벡터 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ 의 길이 $\|\mathbf{v}\|$ 는 Pythagoras의 정리에 의하여 다음과 같다.
 - $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$
 - ex) $\mathbf{v} = (-3, 2)$ 의 norm?
- R^3 에서 벡터 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 의 길이 $\|\mathbf{v}\|$ 는 Pythagoras의 정리에 의하여 다음과 같다.
 - $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(OQ)^2 + (QR)^2 + (RP)^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$
 - ex) $\mathbf{v} = (-3, 2, 1)$ 의 norm?



n 차원 Vector의 길이

- $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 이 R^n 의 벡터이면 \mathbf{v} 의 길이(length 또는 norm) 혹은 크기(magnitude)는 $\|\mathbf{v}\|$ 로 표시하며 다음과 같이 정의한다.
 - $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$
- 벡터 $\mathbf{v} \in R^n$ 와 임의의 스칼라 k 에 대하여,
 - $\|\mathbf{v}\| \geq 0$
 - $\|\mathbf{v}\| = 0$ 이 되기 위한 필요충분조건은 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 이다.
 - $\|k\mathbf{v}\| \geq |k|\|\mathbf{v}\|$

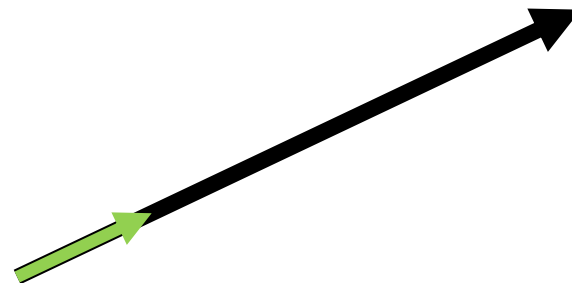
단위 벡터

- 단위 벡터(unit vector)
 - 길이가 1인 벡터를 단위벡터라고 한다.
- 영이 아닌 벡터 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 와 같은 방향을 갖는 단위벡터 \mathbf{u} 는 다음 식으로 구한다.

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v}$$

- 단위벡터를 구하는 과정을 정규화(normalizing)라 한다.

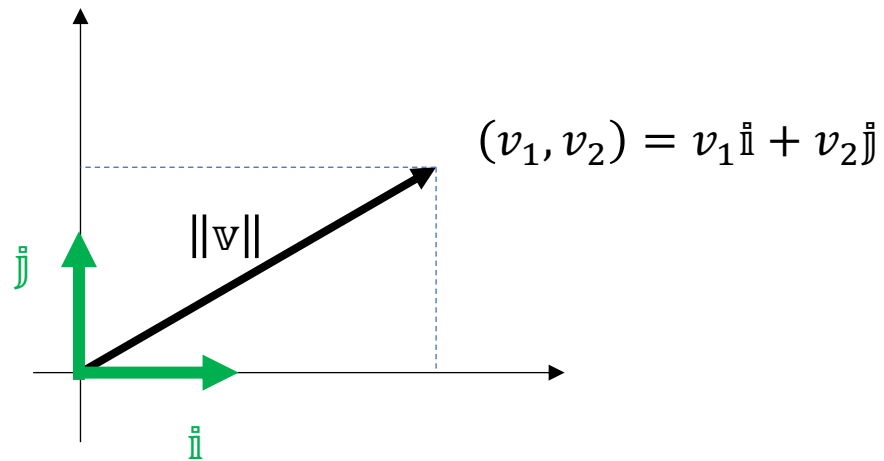
ex) $\mathbf{v} = (2, 2, -1)$ 의 단위벡터는?



길이가 1인 단위벡터 \mathbf{u}

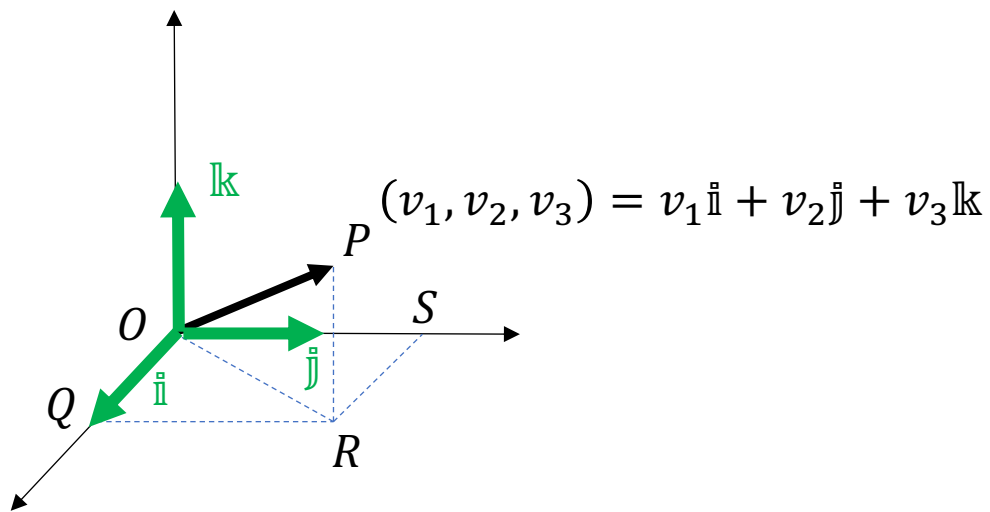
2차원 표준 단위 벡터

- R^2 의 직교좌표계에서 양의 좌표축 방향의 단위벡터들을 표준단위벡터라 부른다.
 - R^2 에서는 $\hat{i} = (1,0)$, $\hat{j} = (0,1)$
- R^2 의 모든 벡터 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ 는 다음과 같이 표준단위벡터들로 표현
 - $\mathbf{v} = (v_1, v_2) = v_1(1,0) + v_2(0,1) = v_1\hat{i} + v_2\hat{j}$



3차원 표준 단위 벡터

- R^3 의 직교좌표계에서 양의 좌표축 방향의 단위벡터들을 표준단위벡터라 부른다.
 - R^3 에서는 $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$
- R^3 의 모든 벡터 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 는 다음과 같이 표준단위벡터들로 표현
 - $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$

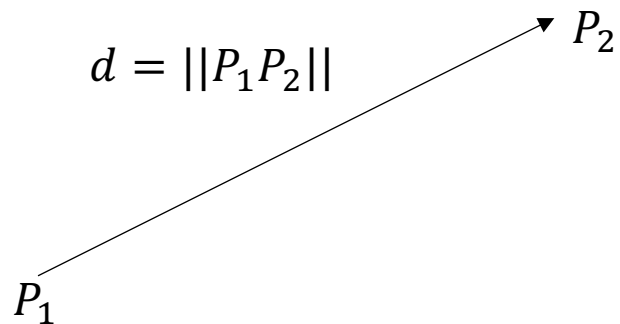


n 차원 표준 단위 벡터

- 일반적으로 R^n 에서의 표준단위벡터는
 - $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ... , $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$
- R^n 의 벡터 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 가 다음과 같이 표준단위벡터들으로써 표현될 수 있다.
 - $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \dots + v_n\mathbf{e}_n$
 - 즉, 벡터가 표준단위벡터의 선형결합(linear combination)으로 나타내어진다.

2,3차원의 점들 간의 거리

- P_1 과 P_2 가 R^2 또는 R^3 사이의 점이면 벡터 P_1, P_2 의 길이는 두 점 간 거리 d 와 일치한다.
 - 2차원 : $d(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}) = \|P_1 P_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
 - 3차원 : $d(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}) = \|P_1 P_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$



n 차원의 점들 간의 거리

- $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\mathfrak{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 이 R^n 의 점이면 이들 \mathfrak{u} 와 \mathfrak{v} 사이의 거리(distance)를 $d(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ 로 표시하며 다음과 같이 정의한다.

- $d(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = \|\mathfrak{u} - \mathfrak{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$

ex) $\mathfrak{u} = (1, 3, -2, 7)$, $\mathfrak{v} = (0, 7, 2, 2)$ 두 점 사이의 거리는?

- 거리의 성질

- $d(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) \geq 0$
- $d(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = 0$ 이 되기 위한 필요충분조건은 $\mathfrak{u} = \mathfrak{v}$ 이다.
- $d(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = d(\mathfrak{v}, \mathfrak{u})$

벡터의 내적

- 벡터의 내적(inner product)은 두 벡터 사이의 각을 재거나 두 벡터가 서로 수직이라는 것을 판별하는데 유용한 곱셈
- $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ 과 $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ 이 R^n 의 벡터일때, \mathbf{u} 와 \mathbf{v} 의 점곱(dot product) 또는 \mathbf{u} 와 \mathbf{v} 의 Euclid 내적(Euclidean inner product)은 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ 로 표기하며 다음 식과 같이 정의한다.
 - $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$
 - ex) $\mathbf{u} = (-1, 3, 5, 7)$, $\mathbf{v} = (5, -4, 7, 0)$

내적의 성질

- $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$
 - $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1 v_1 + v_2 v_2 + \dots + v_n v_n = \|\mathbf{v}\|^2$
- 내적의 기본 성질들
 - $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 가 R^n 의 벡터이고 k 가 실수이면
 - ▶ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (대칭성)
 - ▶ $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ (분배성)
 - ▶ $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$ (동치성)
 - ▶ $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ 이고 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ 의 필요충분조건은 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (양수성)
 - ▶ $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{0}$
 - ▶ $(\mathbf{v} + \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
 - ▶ $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
 - ▶ $(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

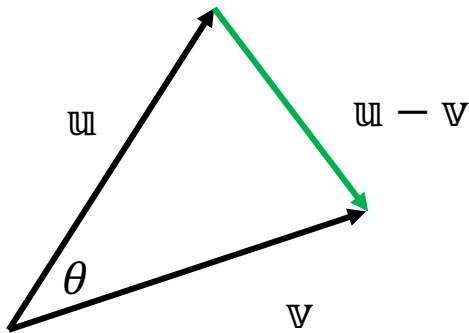
벡터의 사잇각

- 만약 \mathbf{u} 와 \mathbf{v} 가 R^2 또는 R^3 의 벡터들이고 θ 가 이들 벡터의 사잇각이라 하면

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

○ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$

- ▶ 영벡터가 아닌 \mathbf{u} 와 \mathbf{v} 가 수직이기 위한 필요충분조건은 두 벡터의 내적이 0



도출방법)

1. 코사인 제2법칙 : $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 - 2\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}\|\cos \theta$

2. 벡터의 길이 : $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u})$

이 두개가 같음을 보이면, 사잇각이 도출된다.

벡터의 직교

- R^n 의 벡터 \mathbf{u} 와 \mathbf{v} 가 직교한다(orthogonal)는 것은 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ 을 만족시키는 경우를 말한다.
- 공집합이 아닌 R^n 의 벡터들의 집합이 **직교집합**(orthogonal set)이라는 것은 이 집합의 임의의 서로 다른 한 쌍의 벡터가 직교하는 것을 말한다.

ex) 다음 벡터들이 R^4 에서 직교집합을 이루고 있음을 보여라.

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 2, 4), \mathbf{v}_2 = (-2, 1, -4, 2), \mathbf{v}_3 = (-4, 2, 2, -1)$$

벡터의 정규직교

- R^n 의 두 벡터 \mathbf{u} 와 \mathbf{v} 가 정규직교(orthonormal)라는 것은 이들이 직교하고 길이가 1인 경우를 뜻한다.

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

- $\|\mathbf{u}\| = 1, \|\mathbf{v}\| = 1$

- 벡터들의 집합이 **정규직교집합**(orthonormal set)이라는 것은 이 집합의 모든 벡터들의 길이가 1이고 이 집합 속의 서로 다른 임의의 한 쌍의 벡터들이 직교하는 경우를 뜻한다.

ex) 표준단위벡터 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ... , $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$

ex) 다음이 정규직교집합을 이루는 것을 보여라.

$$\mathbf{q}_1 = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right), \mathbf{q}_2 = \left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right), \mathbf{q}_3 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$$