추정 이론

윤 정 훈

들어가기

- 통계적 추론(statistical inference) 에서 가장 중요하게 여겨지는 2가지의 분야
  - 추정이론(estimation theory)
  - 검정이론(testing theory)
- 추정이론
  - 연구나 관찰의 대상인 확률변수 X의 확률분포를 $P_\theta(x)$, $\theta \in \Omega$로 표현하자. 미지의 모수 θ를 제외하고는 확률분포의 유형이 결정되어 있다고 가정하자. 모수모형(parametric model)이라고 불리는 이런 경우에 모수 θ는 $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$로 표현되는 벡터일 수 있고, Ω는 모수가 가질 수 있는 값의 집합, 즉 모수공간을 뜻한다.

들어가기

- 확률분포 $P_\theta(x),\ \theta \in \Omega$로부터 크기가 n인 표본 $X_1, \dots, X_n$을 얻었다고 하자. $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$이다. 우리가 관심이 있는 문제는 확률분포 $P_\theta(x),\ \theta \in \Omega$를 특징짓는 모수 θ 또는 $g(\theta)$의 추정이다.
- $g(\theta)$에 대한 추정방법
  - 점추정(point estimation) : 표본에 근거한 통계량 $T(\mathbb{X}) = T(X_1, \dots, X_n)$을 사용하여 하나의 값으로 $g(\theta)$를 추정하는 방법
  - 구간추정(interval estimation) : 두 개의 통계량 $T_1(\mathbb{X}_1) = T_1(X_1, \dots, X_n)$과 $T_2(\mathbb{X}_2) = T_2(X_1, \dots, X_n)$을 사용하여 구간 $[T_1(\mathbb{X}), T_2(\mathbb{X})]$에 $g(\theta)$가 포함될 확률을 고려하는 추정법
- 추정량의 선택기준으로는 평균제곱오차(mean square error)의 최소화를 사용

추정량과 추정값

- 미지의 모수를 포함하지 않는 랜덤표본 $X_1, \dots, X_n$의 함수를 통계량 T라고 하자.
  - **추정량(estimator)** : 모수 θ의 함수 $g(\theta)$를 추정하기 위해 사용되는 통계량 $T(\mathbb{X}) = T(X_1, \dots, X_n)$을 $g(\theta)$의 추정량이라고 한다.
  - **추정치(estimate)** : 주어진 표본값 $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$을 대입해서 구해진 추정량의 특정값, $T(\mathbb{x}) = T(x_1, \dots, x_n)$을 추정값(치)라고 한다.
- 모수 θ와 그의 추정량을 구별하기 편리하도록, 많은 경우에 추정량을 $\hat{\theta}_n$ 또는 $\hat{\theta}$으로 표기하도록 한다. $\hat{\theta}_n$에서 첨자 n은 추정량을 구하는 데 사용된 표본의 크기가 n임을 강조하기 위해 쓴 것이다.

추정량과 추정값 예제

- $X_1, \dots, X_n$을 $N(\mu, \sigma^2)$으로부터 얻은 랜덤표본이라고 하자. 모평균 μ와 모분산 σ^2을 추정량 및 추정값을 구해보자.
  - ✓ 모평균 μ의 추정량 : 표본평균 $\hat{\mu} = T_1(\mathbb{X}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
  - ✓ 모평균 μ의 추정값 : 관찰된 표본이 주어졌을 때 그들의 값 $T_1(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
  - ✓ 모분산 σ^2의 추정량 : 표본분산 $\hat{\sigma}^2 = T_2(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X_n})^2}{n-1}$
  - ✓ 모분산 σ^2의 추정값 : 관찰된 표본이 주어졌을 때 $T_2(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x_n})^2}{n-1}$

최대가능도 추정법의 Motivation

- 성공률이 p인 베르누이 분포에서 크기가 10인 랜덤표본을 뽑는다고 가정해보자. 이 분포의 성공률은 0.1이거나 0.9 둘 중에 하나라는 것을 알고 있으며, 관측된 표본을 통해 성공률을 추정하려고 한다고 가정하자.
  - 만약 10개의 관측치의 합이 8이었다면(1의 값이 8번 나왔다면) 성공률은 0.1보다는 0.9로 추정하는 것을 선호할 것이다.
  - 왜 0.9를 선호하게 되었는가? 0.9가 참일 경우 합이 8인 관측치를 얻을 확률이 0.1이 참일 경우보다 높기 때문이다.
  - 추정량을 선택할 때, 관측된 자료를 얻을 확률이 가장 높을 추정량을 구한다.

가능도 함수

- 주어진(관찰된) 자료에 대하여, **해당 자료가 얻어질 가능성**을 **모수에 대한 함수**로 나타냄

- 확률변수 $X_1, \dots, X_n$ 의 결합 확률밀도함수가 $f(x_1, \dots, x_n; \theta)$라고 하자. 결합 확률밀도함수 $f(x_1, \dots, x_n; \theta)$는 고정된 모수 θ에 대하여 $(x_1, \dots, x_n)$ 의 함수로 사용된다. 그러나 반대로 $f(x_1, \dots, x_n; \theta)$를 관측치 $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ 이 주어졌을 때 모수 $\theta(\in \Omega)$의 함수로 생각해 볼 수도 있다. 즉 $\boldsymbol{L(\theta) = L(\theta; x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n; \theta)}$ 로 표기하고 이를 $X_1, \dots, X_n$ 의 **가능도함수**(likelihood function) 라고 한다.

가능도 함수

- 가능도함수 $L(\theta)$는 주어진 자료 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$에 대하여, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$이 얻어질 가능성을 모수 θ에 대한 함수로 나타낸 것이다.

- $X_1, \dots, X_n$이 서로 독립적이고, X_i 가 확률밀도함수 $f_i(x_i; \theta)$를 가질 때의 가능도함수 :

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{f(x_i; \theta)} = f_1(x_1; \theta) f_2(x_2; \theta) \dots f_n(x_n; \theta)$$

최대가능도 추정량

- 랜덤표본의 **가능도함수 $L(\theta; x_1, \ldots, x_n)$를 최대화하는 θ 의 값**을 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ 라고 할 때, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{X_1}, \ldots, \boldsymbol{X_n})$를 **모수 θ의 최대가능도 추정량**(maximum likelihood estimator)이라 한다.

- 최대가능도 추정량의 의미는 "실제로 관측된" 자료가 얻어질 확률을 가장 높게 만드는 (즉, 주어진 관측값을 가장 잘 설명하는) θ 의 값을 모수 θ 의 추정량으로 삼는 것이다.

최대가능도 추정량 예제

- $X_1, X_2, \ldots, X_5$가 서로 독립인 베르누이(p) 확률변수라고 하자. 이때 $Y = \sum_{i=1}^{5} X_i$는 $B(5, p)$ 분포를 따르며, Y의 확률밀도함수는 몇 가지 p에 대해서 다음과 같이 주어진다.

Y \ p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.59050	0.32768	0.16807	0.07776	0.03125	0.01024	0.00243	0.00032	0.00005	0.0
1	0.32800	0.40960	0.36015	0.25920	0.15625	0.07680	0.02835	0.00640	0.00045	0.0
2	0.07290	0.20480	0.30870	0.34560	0.31250	0.23040	0.13230	0.05120	0.00810	0.0
3	0.00810	0.05120	0.13230	0.23040	0.31250	0.34560	0.30870	0.20480	0.07290	0.0
4	0.00045	0.00640	0.02835	0.07680	0.15625	0.25920	0.36015	0.40960	0.32800	0.0
5	0.00005	0.00032	0.00243	0.01024	0.03125	0.07776	0.16807	0.32768	0.59050	1.0

Y의 값이 3일 경우,
$p = 0.6$일 때 가능도함수의 값이 제일 크다.

관측값 Y의 값이 크면, 성공확률이 높은 쪽으로 추정
관측값 Y의 값이 작으면, 성공확률이 작은 쪽으로 추정

로그 가능도함수

- 가능도함수를 최대화하는 문제는 로그 가능도함수를 최대화하는 문제와 같다.
  - $\log L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \log \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i; \theta) = \sum_{i=1}^{n} \log f_i(x_i; \theta)$를 최대화
  - $\frac{d}{d\theta} \log L(\theta; x_1, \dots, x_n) = 0$의 해를 구하는 문제로 귀착된다.

최대가능도 추정법 예제 1

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$을 $EXP(\theta)$에서 추출된 랜덤표본이라고 할 때, θ의 최대가능도 추정량을 구해보자.
  - ✓ 가능도 함수 :

$$L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta}\right)$$

  - ✓ 로그 가능도 함수 :

$$\log L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n) = -n \log \theta - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta}$$

  - ✓ 로그 가능도 함수를 θ에 대해 미분 :

$$\frac{d}{d\theta} \log L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n) = -\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta^2}$$

  - ✓ 미분값을 0으로 만드는 θ의 값은 $\bar{x}_n$이고, 이 값에서 로그가능도 함수의 이차 미분값은 0보다 작으므로, 이 값에서 로그가능도함수가 최대가 된다. 따라서 θ의 최대가능도 추정량은 $\bar{x}_n$이다.

최대가능도 추정법 예제 2

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$을 포아송 분포(λ)로부터 구한 랜덤표본이라고 할 때, λ의 최대가능도 추정량을 구하여라.
  - ✓ 가능도 함수 :

$$L(\lambda; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \lambda) = \frac{\exp(-n\lambda)\,\lambda^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

  - ✓ 로그 가능도 함수 :

$$\log L(\lambda; x_1, x_2, \ldots, x_n) = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i \log \lambda - \log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right)$$

  - ✓ 로그 가능도 함수를 λ에 대해 미분 :

$$\frac{d}{d\theta} \log L(\lambda; x_1, x_2, \ldots, x_n) = -n + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\lambda}$$

  - ✓ 미분값을 0으로 만드는 θ의 값은 $\bar{x}_n > 0$이고, 이 값에서 로그가능도 함수의 이차 미분값은 0보다 작으므로, 이 값에서 로그가능도함수가 최대가 된다. 따라서 θ의 최대가능도 추정량은 $\bar{x}_n$이다.

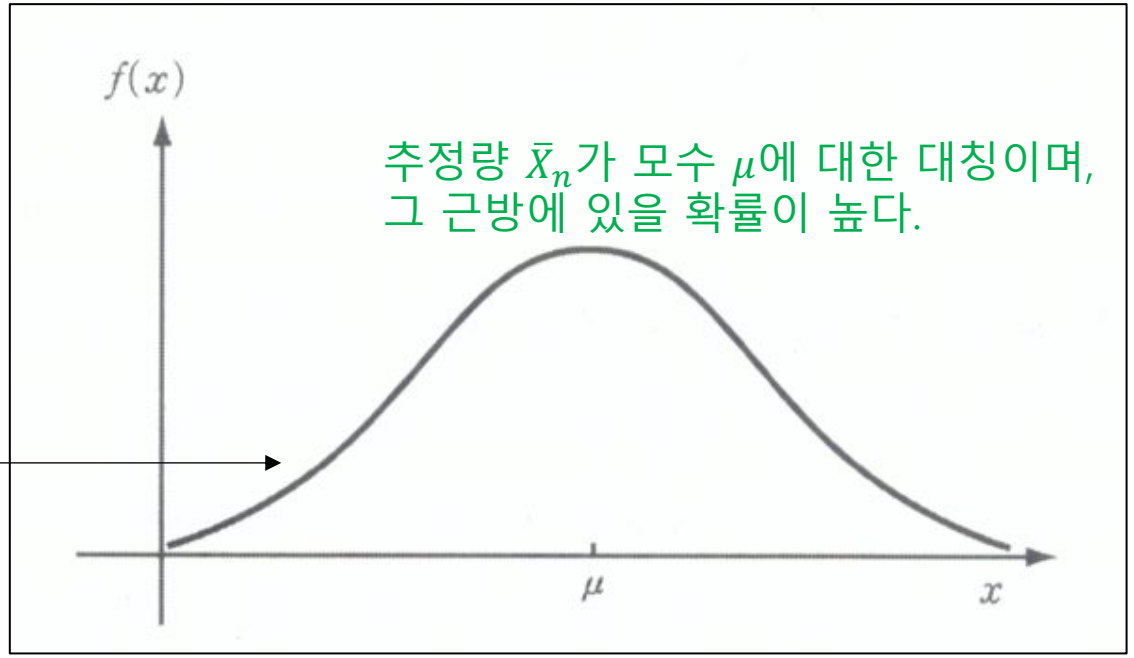
최대가능도 추정량의 불변성

- 불변성 원리 (invariance property)
  - θ 를 추정하는 어떤 추정량이 $T(X)$ 일 때, θ 의 함수 $g(\theta)$ 의 추정량이 $g(T(X))$ 가 되는 성질
- 최대가능도 추정량의 불변성
  - $X_1, \ldots, X_n$을 확률밀도함수 $f(x;\theta)$, $\theta \in \Omega$ 를 갖는 분포에서 얻은 랜덤표본이라고 하자. $\hat{\theta}_n$ 이 모수 θ 의 최대가능도 추정량이면, θ 의 함수인 $g(\theta)$ 에 대하여, $g(\hat{\theta}_n)$ 이 $g(\theta)$ 의 최대가능도 추정량이 된다.

추정량의 확률분포

- 표본의 함수인 추정량은 확률변수이다. 확률변수는 상응하는 확률분포를 가지므로 추정량도 그의 확률분포가 있다.
- 예를 들어, $X_1, X_2, \ldots, X_n$을 $N(\mu, \sigma^2)$으로부터 얻은 랜덤표본이라고 하자. 모평균 μ를 표본평균 $\bar{X}_n$로 추정할 때 추정량 $\bar{X}_n$의 확률분포는 모수(모평균)에 중심을 둔 $N(\mu, \sigma^2/n)$ 분포를 따른다.

추정량 $\bar{X}_n$의 확률밀도함수

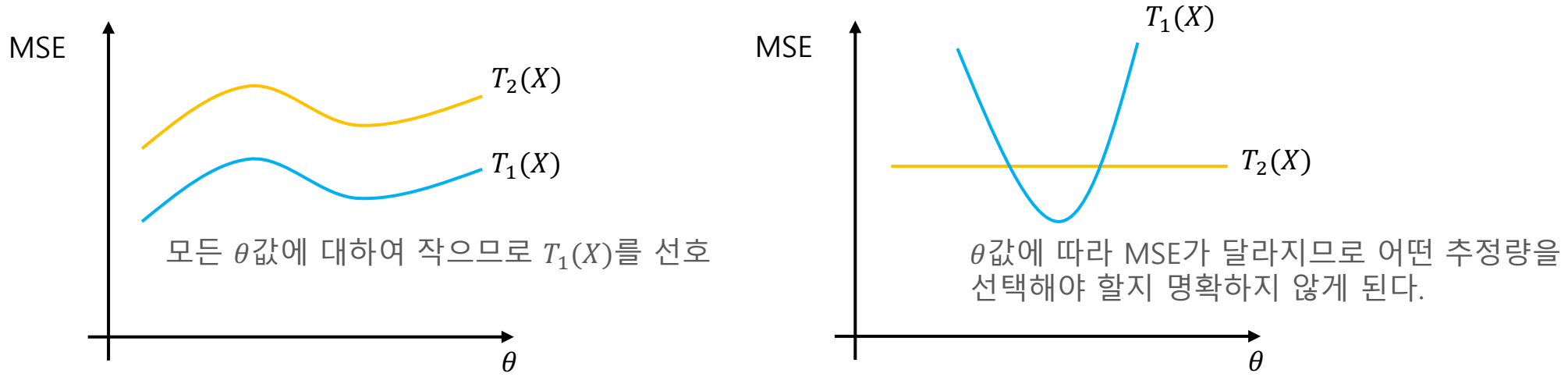


추정의 기준

- 우리가 원하는 바는 추정량 $T(\mathbb{X}) = T(X_1, \dots, X_n)$ 이 추정하고자 하는 모수 또는 모수의 함수 $g(\theta)$ 에 "가까운" 것이다.
- 추정량은 표본에 따라 값이 달라지므로 언제나 $g(\theta)$ 와 동일한 값을 가질 수는 없다. 대신 추정량이 $g(\theta)$ 에 "가까운" 값을 제공한다면 그것은 훌륭한 추정량이라고 할 것이다.
- "가까운"의 기준? **손실함수** (loss function)
  - 절대오차 (absolute error) : $|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})|$
  - 제곱오차 (squared error) : $\left(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})\right)^{\boldsymbol{2}}$
  - $w(\theta)$ 로 가중값을 준 가중제곱오차 (weighted squared error) : $\left(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})\right)^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\theta})$
- 이 손실함수들은 확률변수이다. 이들을 최소화하는 추정량 $T(X)$를 찾아내는 것은 불가능하며, 손실함수의 기대값을 기준으로 삼는다.

평균제곱오차

- 일반적으로 제곱오차의 기댓값인 평균제곱오차 (Mean Squared Error , MSE) 를 추정의 기준으로 많이 사용한다.
  - $MSE = E\big(T(X) - g(\theta)\big)^2$
- 평균제곱오차는 모수 θ에 대한 함수이기 때문에 이를 최소화하는 추정량을 찾는 것이 항상 가능하지는 않다. 또한 모든 $\theta \in \Omega$에 대하여 균일하게 최소화하는 추정량 $T(\mathbb{X})$는 일반적으로 존재하지 않는다.



두 추정량의 평균제곱오차 MSE 비교

비편향추정량

- θ를 추정하기 위한 어떤 추정량이 $T(\mathbb{X}) = \theta_0$ (어떤 정해진 상수) 이라고 하자. 즉 표본에서 어떤 값을 관측하든 추정값을 θ_0 으로 하겠다는 의미이다. 만약 미지의 모수값이 실제로 θ_0 이라면, 이 추정량의 평균제곱오차는 0 이 된다. 그러나 이러한, 표본과 무관한 추정방법은 θ가 θ_0로부터 멀리 떨어져 있을수록 평균제곱오차를 크게 만들 것이다. 이러한 추정량들은 고려대상에서 제외하는 것이 합리적이다.
- 이런 편협된 부적절한 추정량들을 제외하는 하나의 방법으로는 비편향추정량 (inbiased estimator) 들의 집합을 고려하고, 그 안에서 평균제곱오차를 최소화는 추정방법을 찾는 것이다.
- $T(\mathbb{X})$ 를 $g(\theta)$ 의 추정량이라고 할 때, $E[T(\mathbb{X})] - g(\theta)$ 를 $T(\mathbb{X})$ 의 편향 (bias) 이라고 하며, $E[T(\mathbb{X})] = g(\theta)$ (즉 편향 = 0) 이면 $T(\mathbb{X})$ 를 $g(\theta)$ 의 **비편향추정량**이라고 한다.

비편향추정량 예제

- $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$을 $N(\mu, \sigma_0^2)$으로부터 얻은 랜덤표본이라 하자. σ_0^2은 알려진 값이라고 하자.
  - ✓ $T_1(X) = \bar{X}_{10}$

    $$E[T_1(X)] = E\left[\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i\right] = \mu$$

  - ✓ $T_2(X) = \frac{X_1+X_2}{2}$

    $$E[T_2(X)] = E\left[\frac{X_1 + X_2}{2}\right] = \mu$$

  - ✓ $T_1(X)$, $T_2(X)$는 모평균 μ의 비편향추정량이다.

평균제곱오차의 성질

- 모수의 함수 $g(\theta)$ 의 추정량 $T(\mathbb{X})$ 의 평균제곱오차(MSE) 는 $\boldsymbol{MSE = Var\big(T(\mathbb{X})\big) + (bias)^2}$ 을 만족한다.
- 평균제곱오차를 기준으로 추정할 때에는 분산과 편향의 두 요소가 존재함을 알 수 있다. 즉 평균제곱오차를 작게 하는 추정량은 편향의 절대값과 분산, 둘 다 작은 값을 가져야 한다.
- 비편향추정량들만의 집합을 고려할 때는 평균제곱오차를 최소화하는 추정량을 구하기 위해 분산을 최소화하는 추정량을 구하면 된다. 이 경우는 분산의 비 (variance ratio) 를 이용하면 편리하다.
- $T_1(\mathbb{X})$ 와 $T_2(\mathbb{X})$ 가 $g(\theta)$ 의 비편향추정량일 때, 그 분산의 비, 즉 $\frac{Var[T_2(\mathbb{X})]}{Var[T_1(\mathbb{X})]}$ 를 사용하고, 분산의 비를 추정량 $T_1(\mathbb{X})$ 의 $T_2(\mathbb{X})$ 에 대한 상대효율 (relative efficiency) 이라고 한다.

최소분산 비편향추정량

- 확률변수 $X_1, \ldots, X_n$ 의 결합 확률밀도함수가 $f(x_1, \ldots, x_n; \theta)$ 라고 하자. 함수 $g(\theta)$ 의 추정량 $T^*(\mathbb{X})$ 가 다음의 조건을 만족시키면 이를 $g(\theta)$ 의 **최소분산 비편향추정량**(Minimum Variance Unbiased Estimator, MVUE)이라고 한다.
  - $E[T^*(\mathbb{X})] = g(\theta)$
  - $Var\big(T^*(\mathbb{X})\big) \leq Var(T(\mathbb{X}))$

- $g(\theta)$의 최소분산 비편향추정량을 구하는 데에 사용되는 두 가지 방법
  - 분산의 하한값인 "크래머-라오 하한값"을 갖는지 확인하는 방법
  - 완비 충분통계량을 활용하여 "라오-블랙웰의 정리"와 "레만-쉐페의 정리"를 사용하는 방법

구간추정은 왜 하는가?

- 모수의 함수에 대한 최적추정량들은 점추정문제여서 통계적 정확도(statistical accuracy)를 표현하지 못한다는 결점이 있다.
  - 포아송(λ)의 경우 모수 λ의 추정량으로서 표본평균 $\bar{X}_n$은 최적성 등의 좋은 성질을 가지고 있으나, 정확성에 대한 아무런 정보를 포함하고 있지 않다.
- 실제 관측된 자료로부터 계산된 추정량(예를 들어, 표본평균)의 값이 정확히 모수와 같을 것이라 생각할 수 없다. 그러면, 이 값은 모수로부터 어느 정도 떨어져 있을까?
- 구간추정에서는 랜덤표본 $X_1, \ldots, X_n$ 에 근거하여 모수에 대한 신뢰구간(=확률구간, random interval)을 정의하고 그 구간 내에 모수가 포함될 확률로써 통계적 정확도를 표현

신뢰구간

- 랜덤표본 $X_1, \dots, X_n$의 확률밀도함수가 $f(x;\theta)$, $\theta \in \Omega$라고 하자. 확률구간 $[L(X_1, \dots, X_n), U(X_1, \dots, X_n)]$이, $0 < \alpha < 1$ 에 대하여 $\boldsymbol{P[L(X_1, \dots, X_n) \le \theta \le U(X_1, \dots, X_n)] = 1 - \alpha}$ 를 만족시키면 이를 **모수 $\boldsymbol{\theta}$ 의 $\boldsymbol{100(1-\alpha)\%}$ 신뢰구간(confidence interval)** 이라 부른다. 또한 $L(X_1, \dots, X_n)$과 $U(X_1, \dots, X_n)$을 각각 신뢰구간 하한 (lower limit) 과 상한 (upper limit) 이라 말한다.
  - 수많은 랜덤표본을 뽑아서 각 표본에 대해 같은 방법으로 신뢰구간을 구하면, 구해진 많은 신뢰구간들 가운데 $100(1-\alpha)\%$ 만큼의 신뢰구간들이 모수를 포함
  - $1 - \alpha$ 는 신뢰계수(confidence coefficient) 또는 신뢰도(confidence level)라고 한다.

추축변량

- 랜덤표본 $X_1, \dots, X_n$의 분포가 확률밀도함수 $f(x;\theta)$, $\theta \in \Omega$를 따른다 하자. 이때 표본과 모수 θ 의 함수인 **확률변량(확률변수) $T(X_1, \dots, X_n; \theta)$의 분포가 모수 θ 에 의존하지 않으면** 이를 추축변량이라고 한다.
  - ✓ 예를 들어 $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 랜덤표본에서,
    - $S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X}_n)^2}{n-1}$일 때, $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S}$의 분포는 $t(n-1)$로 모수 (μ, σ^2)에 의존하지 않으므로 추축변량이다.

추축변량을 이용한 신뢰구간

- 추축변량을 활용하여 모수의 신뢰구간을 구하는 방법
  - $T = T(X_1, \dots, X_n; \theta)$가 추축변량이면, 고정된 $0 < \alpha < 1$에 대하여 $P(t_1 < T < t_2) = 1 - \alpha$를 만족하는 t_1 , t_2를 구한다.
  - T의 분포가 모수에 의존하지 않으므로 t_1과 t_2는 α의 값이 주어지면 상수값이 될 것이다.
  - 부등식 $t_1 < T(x_1, \dots, x_n; \theta) < t_2$를 $L(x_1, \dots, x_n) < \theta < U(x_1, \dots, x_n)$의 꼴로 바꿔쓸 수 있다면, $P\big(L(X_1, \dots, X_n) < \theta < U(X_1, \dots, X_n)\big) = 1 - \alpha$가 된다.
  - $[L(X_1, \dots, X_n), U(X_1, \dots, X_n)]$은 θ에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간이 된다.

정규분포의 모수에 대한 신뢰구간

- 모평균에 대한 신뢰구간
- 모분산에 대한 신뢰구간

모평균에 대한 신뢰구간 (모분산을 알 때)

- $X_1, \dots, X_n$을 $N(\mu, \sigma^2)$으로부터의 랜덤표본이라고 하고, 모평균 μ에 대한 신뢰구간을 구해 보자.
  - 모분산 σ^2이 알려져 있으면, 변량 $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}$의 분포는 $N(0,1)$으로서 모수 (μ, σ)에 의존하지 않으므로 추축변량이다.
  - $P\left[-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$이다.
  - $P\left[\bar{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$이다.
  - 결과적으로 모평균 μ 에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간 $[\bar{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ 을 구할 수 있다.

모평균에 대한 신뢰구간 예제(모분산을 알 때)

- 우리나라 대학교재 가운데서 64권을 표본 추출하여 한 문장을 이루고 있는 글자 수를 조사하였다. 표본조사 결과에 의하면 한 문장은 평균 60자로 되어 있다. 단 전체 대학교재에서 한 문장을 이루는 글자 수의 표준편차는 32자라고 한다. 그렇다면 우리나라에서 대학교재로 쓰이는 모든 책은 한 문장이 평균 몇 글자로 되어 있을까? 95%를 신뢰계수로 구간 추정하라.

모평균에 대한 신뢰구간 예제(모분산을 알 때)

- $1-\alpha=0.95$, $\sigma=32$, $\bar{x}=60$, $n=64$
- $P\left[-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)}{\sigma} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right]=P\left[-z_{\frac{0.05}{2}} \leq \frac{\sqrt{64}(60-\mu)}{32} \leq z_{\frac{0.05}{2}}\right]=0.95$
- $P\left[\bar{X}_n-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]=P\left[60-1.96\frac{32}{\sqrt{64}} \leq \mu \leq 60+1.96\frac{32}{\sqrt{64}}\right]=0.95$
- $\left(60-1.96\frac{32}{\sqrt{64}} \leq \mu \leq 60+1.96\frac{32}{\sqrt{64}}\right)=(52.16 \leq \mu \leq 67.84)$
- 따라서 95%를 신뢰계수로 할 때, 대학교재에서 한 문장을 이루는 평균 글자 수는 약 52자에서 68자 사이일 것이다.

모평균에 대한 신뢰구간 (모분산을 모를 때)

- $X_1, \dots, X_n$을 $N(\mu, \sigma^2)$으로부터의 랜덤표본이라고 하고, 표본이 적은 경우 모평균 μ에 대한 신뢰구간을 구해 보자.
  - 모분산 σ^2 이 알려져 있지 않은 경우에는, $[\bar{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ 이 모수인 σ^2 의 값에 의존하기 때문에 사용할 수 없다.
  - σ^2 를 $S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X}_n)^2}{(n-1)}$ 으로 추정하게 되면 추축변량 $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n}$ 은 자유도가 $(n-1)$ 인 t 분포를 따르게 된다.
  - $P\left[-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} \le t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right] = 1 - \alpha$이다.
  - $P\left[\bar{X}_n - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X}_n + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$이다.
  - 결과적으로 모평균 μ 에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 의 신뢰구간 $\left[\bar{X}_n - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X}_n + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]$을 구할 수 있다.

모평균에 대한 신뢰구간 예제(모분산을 모를 때)

- 외부세계로부터 얻는 정보 중에서 85%는 시각을 통해서 들어온다고 한다. 그래서 같은 정보량일지라도 귀로 듣기보다 활자로 읽는 편이 빠르다. 일반적으로 보통 책 한쪽에는 600자 글자가 적혀있다. 대학생 16명을 표본으로 뽑아 책 한 쪽을 읽는데 걸리는 시간을 조사하였다. 조사 결과 한 쪽을 읽는 데 걸리는 시간은 평균 90초이고 표준편차는 24초이다. 그렇다면 대학생 모든 학생들이 책 한 쪽을 읽는 데 걸리는 평균 시간에 대하여 95%를 신뢰계수로 구간추정하라.

모평균에 대한 신뢰구간 예제(모분산을 모를 때)

- $1-\alpha=0.95$, $S_n=24$, $\bar{x}=90$, $n=16$
- $P\left[-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)}{S_n} \le t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right] = P\left[-2.131 \le \frac{\sqrt{16}(90-\mu)}{24} \le 2.131\right] = 0.95$
- $P\left[\bar{X}_n - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X}_n + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right] = P\left[90-2.131\frac{24}{\sqrt{16}} \le \mu \le 90+2.131\frac{24}{\sqrt{16}}\right] = 0.95$
- $\left(90-2.131\frac{24}{\sqrt{16}} \le \mu \le 90+2.131\frac{24}{\sqrt{16}}\right) = (77.21 \le \mu \le 102.79)$
- 따라서 95%를 신뢰계수로 할 때, 책 한쪽을 읽는데 걸리는 평균 시간은 약 77.21초에서 102.79초 사이일 것이다.
- 표본의 수가 더 많은 경우는 Z 확률변량을 추축변량으로 사용하고, σ를 대신하여 S를 사용한다.

신뢰구간의 의미

- 관찰값이 $X_1 = x_1 \ , \ \dots \ , \ X_n = x_n$ 으로 주어지면, 이들의 평균을 $\bar{x}_n$ 라 했을 때, 신뢰구간은 $[\bar{x}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_n + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ 의 값이 알려진 구간이 된다.
  - $\bar{x}_n$ 에 대해 대칭
  - 구간의 길이는 모분산 σ^2 이 작을수록 표본의 크기 n 이 커질수록 짧아진다.

- 주어진 표본에 대해 모수(여기서는 모평균)의 신뢰구간은 그 모수를 포함하거나 포함하지 않거나 둘 중의 하나이다. 독립된 여러 개의 표본에 근거하여 모수의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간들을 구해보면, **그 신뢰구간들 중에서 $100(1-\alpha)$ 개의 신뢰구간들이 모수를 포함한다는 의미**이다.

모분산에 대한 신뢰구간 (모평균을 알때)

- $X_1, \dots, X_n$ 을 $N(\mu, \sigma^2)$ 으로부터의 랜덤표본이라고 할 때, 모분산 σ^2 에 대한 신뢰구간을 구해보자.
  - 모평균 μ 가 알려진 경우 $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$ 는 자유도가 n 인 카이제곱분포를 따르는 추축변량이 된다.
  - $P\left[\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) \le \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right] = 1-\alpha$이다.
  - $P\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)} \le \sigma^2 \le \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right] = 1-\alpha$이다.
  - $\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]$ 이 모분산 σ^2 에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간이 된다.

모분산에 대한 신뢰구간 (모평균을 모를 때)

- $X_1, \dots, X_n$ 을 $N(\mu, \sigma^2)$ 으로부터의 랜덤표본이라고 할 때, 모분산 σ^2 에 대한 신뢰구간을 구해보자.
  - 모평균이 알려지지 않는 경우에는, μ 를 표본평균 $\bar{X}_n$ 로 추정한 통계량 $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X}_n)^2}{\sigma^2}$ 을 추축변량으로 사용한다. 이 추축변량은 자유도가 $n-1$ 인 카이제곱분포를 따른다.
  - $P\left[\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X}_n)^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right] = 1-\alpha$
  - $P\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right] = 1-\alpha$
  - 따라서 $\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$ 는 모분산 σ^2 에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간이 된다.

모분산에 대한 신뢰구간 예제 (모평균을 모를 때)

- A은행에서 새로운 시스템을 도입한 이후 이용고객들의 불편신고가 오히려 옛날보다 많이 증가하였다. 이에 은행에서 실제 이용고객 10명을 대상으로 은행 업무를 보기 위하여 기다리는 시간(단위 : 분)을 측정하여 다음 자료를 얻었다. 대기시간의 분산에 대한 90% 신뢰구간을 구하라. 대기시간은 정규분포를 따른다고 가정한다.
    - 3.00 5.50 2.07 7.30 4.97 5.90 10.35 4.10 6.13 5.83

모분산에 대한 신뢰구간 예제 (모평균을 모를 때)

- $\bar{x}_n = 5.515$, $S^2 = 5.298$, $\chi^2_{0.05}(9) = 16.92$, $\chi^2_{0.95}(9) = 3.33$, $\alpha = 0.1$
- $P\left[\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\bar{X}_n)^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right] = P\left[3.33 \le \frac{9\times5.298}{\sigma^2} \le 16.92\right] = 0.90$
- $P\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right] = P\left[\frac{9\times5.298}{16.92} \le \sigma^2 \le \frac{9\times5.298}{3.33}\right] = 0.90$
- $\left(\frac{9\times5.298}{16.92} \le \sigma^2 \le \frac{9\times5.298}{3.33}\right) = (2.82 \le \sigma^2 \le 14.32)$
- 따라서, 90%를 신뢰계수로 할 때, 모분산의 신뢰구간은 $(2.82 \le \sigma^2 \le 14.32)$이다.

모분산 비에 대한 신뢰구간 (모평균을 알 때)

- 두 개의 독립인 랜덤표본 $X_1, \dots, X_n$과 $Y_1, \dots, Y_m$의 분포가 각각 $N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$이라고 할 때, 모분산 비에 대한 신뢰계수 $100(1-\alpha)$의 신뢰구간을 구하여라.
  - 모평균 μ_X 와 μ_Y 를 아는 경우의 $\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$, 확률변량 $\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_X)^2}{n\sigma_X^2}}{\frac{\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\mu_Y)^2}{m\sigma_Y^2}} = \frac{\frac{S_X^2}{\sigma_X^2}}{\frac{S_Y^2}{\sigma_Y^2}} \sim F(n,m)$는 추축변량이다.
  - $P\left[F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n,m) \le \frac{\frac{S_X^2}{\sigma_X^2}}{\frac{S_Y^2}{\sigma_Y^2}} \le F_{\frac{\alpha}{2}}(n,m)\right] = 1-\alpha$이다.
  - $\left[\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2}\right)F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,n), \left(\frac{S_X^2}{S_Y^2}\right)F_{\frac{\alpha}{2}}(m,n)\right]$ 가 모분산 비의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간이다.

모분산 비에 대한 신뢰구간 (모평균을 모를 때)

- 두 개의 독립인 랜덤표본 $X_1, \dots, X_n$과 $Y_1, \dots, Y_m$의 분포가 각각 $N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$이라고 할 때, 모분산 비에 대한 신뢰계수 $100(1-\alpha)$의 신뢰구간을 구하여라.
  - 모평균 μ_X 와 μ_Y 를 모르는 경우 $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2}{\sigma_X^2} \sim \chi(n-1)$, $\frac{\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\bar{Y}_m)^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi(m-1)$이고 $\frac{\frac{S_X^2}{\sigma_X^2}}{\frac{S_Y^2}{\sigma_Y^2}} \sim F(n-1, m-1)$을 추축변량으로 사용한다.
  - $P\left[F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1) \le \frac{\frac{S_X^2}{\sigma_X^2}}{\frac{S_Y^2}{\sigma_Y^2}} \le F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)\right] = 1-\alpha$
  - 모분산 비 $\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$ 에 대한 신뢰도 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 $[\frac{S_X^2}{S_Y^2} F_{1-\frac{\alpha}{2}(m-1,n-1)}$, $\frac{S_X^2}{S_Y^2} F_{\frac{\alpha}{2}(m-1,n-1)}]$

모평균의 차이에 대한 신뢰구간

- 독립인 두 개의 랜덤표본 $X_1, \dots, X_n$ 과 $Y_1, \dots, Y_m$ 의 분포가 각각 $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ 와 $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ 일 때, 모평균의 차이 $\mu_X - \mu_Y$에 대한 신뢰구간을 구하라.
  - 모분산 σ_X^2 , σ_Y^2 를 아는 경우 확률변량 $Z = \frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_n) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}}$ 는 표준정규분포 $N(0,1)$ 를 따르고 추축변량이 된다.
  - $P\left[-z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_n) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$
  - $\left[(\bar{X}_n - \overline{Y_m}) - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}, (\bar{X}_n - \overline{Y_m}) + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}\right]$ 이 모평균의 차 $\mu_X - \mu_Y$ 에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 의 신뢰구간이다.

모평균의 차이에 대한 신뢰구간

- 모분산 σ_X^2 , σ_Y^2 를 모르는 경우
  - $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$의 경우
    - 합동추정량(pooled estimator)를 사용한다. $S_p^2 = \frac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{n+m-2}$ $(S_X = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)}{n-1}$, $S_Y = \frac{\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\bar{Y}_m)}{m-1})$
  - $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$의 경우
    - 웰치에 의해 제안된 방법을 사용한다.

근사신뢰구간

- 모분포가 정규분포를 따르지 않더라도 중심극한정리를 사용하여 모수에 대한 신뢰구간을 근사적으로 구할 수 있다.
- 랜덤표본 $X_1, X_2, \dots, X_n$의 분포의 평균과 분산이 각각 μ, σ^2이라고 할 때 모평균 μ에 대한 신뢰구간을 구하자.
  - 표본의 크기가 크면 확률변량 $Z_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n}$의 분포는 표준정규분포 $N(0,1)$로 수렴한다. 이것을 추축변량으로 사용한다.
  - $P\left[-z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right] \approx 1 - \alpha$이다.
  - $P\left[\bar{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right] \approx 1 - \alpha$이다.
  - 결과적으로 모평균 μ 에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간 $[\bar{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}}]$ 을 구할 수 있다.

표본의 크기

- 모분산 σ^2가 알려진 경우에 모평균 μ의 추정량 $\hat{\mu} = \bar{X}$에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 오차한계를 d 이하로 만드는 표본크기 n은?
  - $\left[\bar{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$의 길이가 $2d$ 이하가 될 것이다.
  - $z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq d$ 즉, $n \geq \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{d}\right)^2$
  - 이것은 모집단의 분포가 정규분포인 경우에는 정확한 것이고, 표본크기가 큰 경우에는 임의의 모집단에 대하여 근사적으로 적용될 수 있다.