3.(б-д) Замінити у векторі a зірочки символами 0 і 1 так, щоб утворився вектор значень лінійної ф-ї f. Зобразити f поліномом:

б) $a=(0*11)=f(x,y)$

Запишемо таблицю істинності:

x y	f(x,y)
0 0	0
0 1	*
1 0	1
1 1	1

1) Якщо $*=0$, тоді $f(x,y)=x\bar{y}\oplus xy=x(y\oplus 1)\oplus xy=\cancel{xy}\oplus x\oplus \cancel{xy}=x$, тобто $f(x,y)\in L$.

2) Якщо $*=1$, тоді $f(x,y)=\bar{x}y\oplus x\bar{y}\oplus xy=x(y\oplus 1)\oplus(x\oplus 1)y\oplus xy=\cancel{xy}\oplus x\oplus \cancel{xy}\oplus y\oplus xy=$
$=x\oplus y\oplus xy$, тобто $f(x,y)\notin L$.

Отже, при $*=0$ ф-ія f буде лінійною, а поліном виглядатиме так: x.

Відповідь: $a=(0011)$, $f(x,y)=x$. ← поліном лінійної ф-ї f.

в) $a=(100*0**0)=f(x,y,z)$

Ф-я $f(x,y,z)$ точно не буде лінійною, якщо сума одиниць у векторі значень буде непарною, тому має бути замість однієї * одиниця, або ж замість трьох *.

Запишемо таблицю істинності для заданого вектора.

x y z	f(x,y,z)
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	*
1 0 0	0
1 0 1	*
1 1 0	*
1 1 1	0

Розглянемо випадок, коли усі три * рівні 1, тоді поліном матиме вигляд:

$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \oplus \bar{x}yz \oplus x\bar{y}z \oplus xy\bar{z} = (x\oplus1)(y\oplus1)(z\oplus1) \oplus (x\oplus1)yz \oplus xz(y\oplus1) \oplus xy(z\oplus1) =$

$= \cancel{xyz} \oplus \cancel{xy} \oplus \cancel{xz} \oplus x \oplus y \oplus z \oplus \cancel{yz} \oplus 1 \oplus \cancel{xyz} \oplus \cancel{yz} \oplus \cancel{xyz} \oplus \cancel{xz} \oplus \cancel{xyz} \oplus \cancel{xy} = x \oplus y \oplus z \oplus 1$

Оскільки $x\oplus y\oplus z\oplus 1$ є поліном лінійної ф-ї, то $f(x,y,z) \in L$.

Отже, вектор a має вигляд $a = (10010110)$, а поліном: $x\oplus y\oplus z\oplus 1$.

Відповідь: $a = (10010110)$, поліном: $x\oplus y\oplus z\oplus 1$.

г) $a = (*001**1*) - f(x,y,z)$

Функція, яка задана вектором значень, у якому непарна кількість одиниць, точно не є лінійною, тому вектор a має містити або 4 одиниці або 2 одиниці або жодної.

Заповнимо таблицю істинності:

x y z	f(x,y,z)
0 0 0	*
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	*
1 0 1	*
1 1 0	1
1 1 1	*

1) Поліном, у якого на місцях зірочок будуть усі чотири нулі, має вигляд: $\bar{x}yz \oplus xy\bar{z} = (x\oplus1)yz \oplus xy(z\oplus1) = \cancel{xyz} \oplus yz \oplus \cancel{xyz} \oplus xy = yz \oplus xy$, але поліном таким чином задати не є поліномом лінійної ф-ї.

2) Тому візьмемо зі значення * 1 у таких наборах, де $yz\oplus xy$ мають скорочення. Це має бути точно набір, де $x=0$, а він є лише один (0,0,0) та набір, де $y=0$, адже $yz\oplus xy$ скоротиться у наборі (0,0,0).

Отже, візьмемо у наборах (0,0,0) та (1,0,1) значення, які рівні 1.

$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \oplus \bar{x}yz \oplus x\bar{y}z \oplus xy\bar{z} = (x\oplus1)(y\oplus1)(z\oplus1) \oplus (x\oplus1)yz \oplus xz(y\oplus1) \oplus xy(z\oplus1) =$
$= \cancel{xyz} \oplus \cancel{xy} \oplus \cancel{xz} \oplus \cancel{yz} \oplus x \oplus y \oplus z \oplus 1 \oplus \cancel{xyz} \oplus \cancel{yz} \oplus \cancel{xyz} \oplus \cancel{xz} \oplus \cancel{xyz} \oplus \cancel{xy} = x\oplus y\oplus z\oplus 1$

Отже, якщо покласти у наборах (0,0,0) та (1,0,1) значення рівні 1, а у наборах (1,0,0), (1,1,1) – рівні 0, то $f(x,y,z) \in L$, а поліном має такий вигляд: $x\oplus y\oplus z\oplus 1$.

Відповідь: $a = (10010110)$, $f(x,y,z) = x\oplus y\oplus z\oplus 1$.

д) $a = (1*101***) - f(x,y,z)$

Функція, яка задана вектором значень, у якому непарна кількість одиниць, точно не є лінійною, тому заданий вектор a має містити ще одну одиницю або ще три одиниці.

Побудуємо таблицю істинності для заданого вектора a:

x y z	f(x,y,z)
0 0 0	1
0 0 1	*
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	*
1 1 0	*
1 1 1	*

Поліном ~~без~~ з нулями замість зірочок має вигляд:
$\bar{x}\bar{y}\bar{z} \oplus \bar{x}y\bar{z} \oplus x\bar{y}\bar{z} = (x\oplus1)(y\oplus1)(z\oplus1) \oplus (x\oplus1)(z\oplus1)y \oplus x(y\oplus1)(z\oplus1) =$
$= xyz \oplus \cancel{xy} \oplus \cancel{xz} \oplus \cancel{yz} \oplus \cancel{x} \oplus \cancel{y} \oplus z \oplus 1 \oplus \cancel{xyz} \oplus xy \oplus \cancel{yz} \oplus \cancel{y} \oplus \cancel{xy} \oplus \cancel{xz} \oplus \cancel{xyz} \oplus \cancel{x} =$
$= xyz \oplus xy \oplus z \oplus 1$. Нам потрібно обрати такий набір, у якому зникнуть xyz та xy скорочення, тому нехай це буде набір, де буде $xy(z\oplus1)$, тобто $xy\bar{z}$, тобто (1,1,0).

Оберемо значення * у наборі (1,1,0) одиницю і запишемо поліном:

$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \oplus \bar{x}y\bar{z} \oplus x\bar{y}\bar{z} \oplus xy\bar{z} = (x\oplus1)(y\oplus1)(z\oplus1) \oplus (x\oplus1)(z\oplus1)y \oplus x(y\oplus1)(z\oplus1) \oplus xy(z\oplus1) =$
$= \cancel{xyz} \oplus \cancel{xy} \oplus \cancel{yz} \oplus \cancel{xz} \oplus \cancel{x} \oplus \cancel{y} \oplus z \oplus 1 \oplus \cancel{xyz} \oplus \cancel{xy} \oplus \cancel{yz} \oplus \cancel{y} \oplus \cancel{xyz} \oplus \cancel{xy} \oplus \cancel{xz} \oplus \cancel{x} \oplus \cancel{xyz} \oplus \cancel{xy} =$
$= z \oplus 1.$

Отже, якщо значення * у наборі (1,1,0) записати 1, а у наборах (0,0,1), (1,0,1), (1,1,1) записати 0, то $f(x,y,z) \in L$.
А поліном ф-ї матиме вигляд: $z \oplus 1$.

Відповідь: $a = (10101010)$, $f(x,y,z) = z \oplus 1$.