18) Довести, що у графі, степені всіх вершин якого >1, ~~існує~~ є цикл.

Нехай шуканий цикл побудовано.

Візьмемо довільну вершину v_0 графа, нехай вона є початком маршруту.

Оскільки степені усіх вершин >1, то v_0 має щонайменше 2 суміжні вершини. Нехай v_1 суміжна до v_0.

Додаємо до маршруту ребро (v_0, v_1) та вершину v_1. Отримаємо простий ланцюг $L_1 = (v_0, v_1)$. Таким чином, на деякому кроці ми можемо отримати простий ланцюг $L_n = (v_0, v_1, \dots, v_n)$. Вершина v_n, окрім вершини v_{n-1} має ще хоча б одну суміжну вершину (за умовою) нехай це вершина – v_{n+1}.

Для вершини v_{n+1} існує 2 випадки:

1) $v_{n+1} = v_i$ при деякому i такому що $0 \leq i < n-1$. Тоді, маршрут $(v_i, \dots, v_n, v_{n+1})$ є простим циклом.

2) v_{n+1} не входить до L_n.

Тоді можемо додати v_{n+1} до маршруту, одержимо простий ланцюг

$L_{n+1} = (v_0, v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$

Оскільки множина вершин графа очевидно скінченна, а довжина простого ланцюга менша за число вершин графа, то на деякому кроці ми знайдемо простий цикл (виникне випадок 1))

Отже, доведено