33. Для заданого двійкового вектора $a \in B^n$ визначити кількість двійкових векторів довжини n

б) вага яких менша $||a||$

Порахуємо спочатку кількість векторів з вагою $||a||$. Це буде кількість перестановок 1 в векторі тобто комбінація $C_n^{||a||}$

Якщо розглянути вектор вага якого менша $||a||$ то ця вага може варіюватись від 0 до $(||a||-1)$

Тобто це буде сума $\boxed{\sum_{k=0}^{||a||-1} C_n^k}$

д) ~~вект~~ більших за вектор a

вектор b буде більший за a якщо для $\forall$ пар координат β_i в b та α_i в a: $\beta_i \geq \alpha_i$

Розглянемо вектор a щоб $b \geq a$ треба щоб якщо $\alpha_i = 1$ то β_i теж $= 1$, якщо $\alpha_i = 0$ то $\beta_i = 0 \vee \beta_i = 1$ тоді розглядатимем ~~н~~ координати де $\alpha_i = 0$ бо $\alpha_i = 1$ вже фіксовані

нехай ~~[illegible]~~ $||a||$ — вага вектора a

тоді ми на $n - ||a||$ позиціях ставимо 0 або 1

це $2^{n-||a||}$ можливих випадків. Віднімемо 1

$\Leftrightarrow$ що забрати варіант коли $b = a \Rightarrow \boxed{2^{n-||a||} - 1}$

е) Непорівнюваних з вектором a

щоб вектор b був непорівнюваний з a необхідно щоб не виконувалось співвідношення ні $b \geq a$ ні $a \geq b$

тобто $\exists\, i, j$, що так $\beta_i \geq \alpha_i$ ($\beta_i \leq \alpha_i$) та $\alpha_j \geq \beta_j$ ($\alpha_j \geq \beta_j$)

Оскільки координати в a фіксовані, то обираємо одну коорд. 1 та одну 0 і в векторі b фіксуємо на цих же позиціях замість 1 — 0 а замість 0 — 1 а решту координат заповнюємо довільно тоді маємо $\cancel{2^{n-2}}$ ~~непорівнюваних з a~~

~~вектор Оскільки ми маємо n позицій то маємо~~ $\cancel{C_n^2}$ ~~варіантів брати ці 2 позиції~~

~~тоді маємо~~ $\cancel{\boxed{2^{n-2}\cdot C_n^2}}$ $\boxed{2^{n-2}}$

є) порівнюваних з a

$\nexists\, i, j$ що $\beta_i \geq \alpha_i$ ($\beta_i \leq \alpha_i$) та $\beta_j < \alpha_j$ ($\beta_i \geq \alpha_j$)

Це буде сума тих які менші за a, більші за a та рівних. ~~більших~~ кількість більших: $2^{n-\|a\|}-1$

кількість менших: $2^{\|a\|}-1$ бо ми замість 1 ставимо 0 або 1 а 0 фіксовані. Рівних — 1 $\Rightarrow 2^{n-\|a\|}-1+2^{\|a\|}-1+1$

Відповідь: $\boxed{2^{n-\|a\|}+2^{\|a\|}-1}$