20. Визначити число булевих ф-й, що залежать від n змінних і належать мн.:

а) $(L \cup C) \setminus T_1$

б) $C \setminus (T_0 \cup L)$

Розглянемо (а)

$|(L \cup C) \setminus T_1| = |L \cup C| - |(L \cup C) \cap T_1| = |L| + |C| - |L \cap C| -$

$- |(L \cap T_1) \cup (C \cap T_1)| = |L| + |C| - |L \cap C| - |L \cap T_1| - |C \cap T_1| +$

$+ |L \cap C \cap T_1|$

$|L| = 2^{n+1}$, бо це число способів обрати зн. для $n+1$ коеф-в $a_1, a_2, \dots a_n, a_{n+1}$ відповідного полінома Жегалкіна.

$|C| = 2^{2^{n-1}}$. Т.к. самодвоїста ф. залежить від половини наборів векторів (інша половина симетрична), то маємо 2^{n-1} наборів. Кожен може мати або 0 або 1 значення =>

$|C| = 2^{2^{n-1}}$

$|L \cap C| = 2^n$ (лінійна ф. $a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n \oplus a_{n+1}$ самодв.

$\Leftrightarrow$ кількість ії коефіцієнтів $a_1, \dots, a_n$, що $= 1$, непарна)

$|L \cap T_1| = 2^n$ (серед коеф-ів відповідного полінома Жегалкіна кількість одиничних має бути непарною, тобто $C_{n+1}^1 + C_{n+1}^3 + \dots + C_{n+1}^{2k+1}$, $k = \frac{n-1}{2}$

$|C \cap T_1| = 2^{2^{n-1}-1} - 2$)

$|L \cap C \cap T_1| = 2^{n-1} - 10$)

$|(L \cup C) \setminus T_1| = 2^{2^{n-1}-1} + 2^{n-1}$

б) $|C \setminus (T_0 \cup L)| = |C| - |C \cap (T_0 \cup L)| = |C| - |(C \cap T_0) \cup (C \cap L)| =$
$= |C| - |C \cap T_0| - |C \cap L| + |C \cap T_0 \cap L|$

$|C \cap T_0| = 2^{2^{n-1}-1}$

$|C \cap T_0 \cap L| = 2^{n-1}$, бо $L_1 = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n$

$L_2 = a_0 \oplus a_1 \bar{x}_1 \oplus \dots \oplus a_n \bar{x}_n = a_0 \oplus a_1 (x_1 \oplus 1) \oplus \dots \oplus a_n (x_n \oplus 1) =$
$= a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n \oplus a_1 \oplus \dots \oplus a_n \Longrightarrow$

$L_2 = L_1 \oplus \underbrace{a_1 \oplus \dots \oplus a_n}_{1}$

Т.к. $\underbrace{a_1 \oplus \dots \oplus a_n}_{1} \Rightarrow C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$, $a_0 = 0$

$|C \setminus (T_0 \cup L)| = 2^{2^{n-1}-1} - 2^{n-1}$

4) $|T_1 \cup C| = |T_1| + |C| - |T_1 \cap C| = 2^{2^n-1} + 2^{2^{n-1}} - 2^{2^{n-1}-1} =$
$= 2^{2^n-1} + 2^{2^{n-1}-1}$

$|T_1| = 2^{2^n-1}$, бо будь-яка ф. з кл. T_1 може набувати довільних значень (0 або 1) на $2^n - 1$ наборах значень змінних (на всіх крім $(1, 1, \dots, 1) = 1$)

8) $|C \setminus T_1| = |C| - |C \cap T_1| = 2^{2^{n-1}} - 2^{2^{n-1}-1} = 2^{2^{n-1}-1}$

10) $|L \cap T_1 \cap C| = 2^{n-1}$

13) $|(T_0 \cap T_1 \cap L \cap \overline{C}| =$

$L = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n \in T_0 \Rightarrow a_0 = 0$

$L_1 = a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n = 1 \; (L_1 \in T_1)$

1) $a_1 \oplus \dots \oplus a_n = 1$

$L_2 = a_1 \overline{x_1} \oplus \dots \oplus a_n \overline{x_n} = a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n \oplus a_1 \oplus \dots \oplus a_n$

$\in C$: $L_2 = L_1 \oplus \underbrace{a_1 \oplus \dots \oplus a_n}_{0}$

$\Rightarrow |(T_0 \cap T_1 \cap L) \setminus C| = 0$

2) $a_1 \oplus \dots \oplus a_n = 0$

14) $|(L \setminus T_1) \cap C| = |(L \cap \overline{T_1}) \cap C| = |(L \cap C) \setminus T_1| =$

$= |L \cap C| - |L \cap C \cap T_1| = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$