(13) Довести, що коли два різні цикли графа G містять ребро e, то в графі G є цикл, серед ~~яких~~ ребер якого немає e.

Припустимо, що ребро e з'єднує вершини v і w. ($e = (v, w)$). Можна вважати, що вказані в умові два цикли, мають вигляд $(w, v, \dots, w)$ та $(w, \dots, v, w)$

Для зручності позначимо як L_1 та L_2 різні ланцюги, що не містять ребра e.

Тоді два цикли з умови мають вигляд (w, v, L_1, w) і (w, L_2, v, w).

Тоді (v, L_1, w, L_2, v) - замкнений маршрут. Вилучимо з нього усі пари однакових сусідніх ребер (включаючи ті, що утворюються після вилучень). Оскільки цикли різні, одержимо замкнений маршрут з різними сусідніми ребрами (маршрут нетривіальний, тобто містить більше однієї вершини, та хоча б одне ребро) і цей маршрут не містить ребра e.

Маємо теорему про те, що якщо в нетривіальному замкненому маршруті усі сусідні ребра різні, то маршрут містить цикл.

(Доведення: якщо дано замкнений маршрут $C = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$ в якому $v_0 = v_n = v$ (сусідні ребра в C різні), то для довільних сусідніх ребер e_i та e_{i+1}, $1 \le i < n$, $e_i \neq e_{in}$ і $e_1 \neq e_n$.

Якщо Усі ребра попарно різні $\overset{def}{\Rightarrow}$ він є циклом.

Інакше, в ньому є щонайменше 2 однакових ребра. Серед усіх пар однакових ребер маршруту є пара ребер $e_i = e_j$, $1 \le i < j \le n$, таких, що ребра $e_{i+1}, \dots, e_j$ попарно різні.

Але сусідні ребра попарно різні, тому $e_{i+1} \neq e_j$ і маршрут $(v_i, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, v_{j-1})$ містить принаймні одне ребро.

Припустимо, що $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, $e_j = (v_{j-1}, v_j)$.

Якщо $v_{i-1} = v_{j-1}$, то маршрут $(v_i, e_{i+1}, \ldots, e_j, v_j)$ є нетривіальним замкненим маршрутом з попарно різними ребрами (отже, циклом). Якщо $v_{i-1} = v_j$ то $v_i = v_{j-1}$, циклом є і маршрут $(v_i, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, v_{j-1})$

Повертаючись до задачі, за лемою наведеною вище, маршрут містить цикл. Отже, твердження доведено.