32. Довести, що ліс який має n вершин і скл. з k дерев має $n-k$ ребер

Нехай ліс має k компонент зв'язності з кількостями вершин $n_1, n_2, \ldots, n_k$, (тобто $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$).

Для кожного дерева виконується наступне: (T-граф з n вершинами і m ребрами)

1) T - дерево, тобто ациклічний зв'язний граф

2) T - зв'язний граф і $m = n-1$

3) T - ациклічний граф і $m = n-1$

Ці твердження рівносильні

З 1) ⇒ 2): За означенням дерева достатньо довести, що $m = n-1$.

При $n=1$ та $n=2$ деревами є K_1 і K_2 в яких $m = n-1$.

Припустимо, що твердження виконується для всіх дерев з k-то вершин t $(t \geq 2)$. Розглянемо довільне дерево з $t+1$ вершиною і вилучимо з нього довільне ребро. Граф ациклічний, тому одержимо граф з двома комп. зв'язності. Кіль-ті вершин t_1 і t_2 у цих компонентах не більше t, тому для них виконується припущення індукції, тому загальна кількість ребер в одержаному графі $= (t_1 - 1) + (t_2 - 1)$ і при цьому $t_1 + t_2 = t+1$

Якщо врахувати вилучене ребро, загальна к-ть ребер у дереві з $t+1$ вершиною $= (t_1 - 1) + (t_2 - 1) + 1 = t$.

Отже, за індукцією твердження доведено.

2) → 3):

Достатньо довести ациклічність.

Припустимо супротивне: зв'язний граф з $n-1$ ребром має цикл.

Тоді $\forall$ ребро, що входить до циклу можна вилучити і одержати зв'язний граф. У графі залишиться $n-2$ ребра, а це неможливо оскільки зв'язний n-вершинний граф повинен мати щонайменше $n-1$ ребро. Ми дійшли до суперечності.

$3) \to 1)$:

Достатньо довести зв'язність.

Припустимо супротивне: нехай він має k компонент зв'язності з кількостями вершин $n_1, n_2, \dots n_k$;

$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Граф ациклічний, тому кожна його компонента зв'язності є деревом і за $1) \Rightarrow 2)$ i-а компонента має $n_i - 1$ ребро. Тоді граф має $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_i - 1) = n - k$ ребер.

За умовою, к-ть ребер $= n - 1$, тому $k = 1$, тобто граф зв'язний.

З вищенаведеного, можна зробити висновок, що застосувавши це до кожного дерева з лісу, отримаємо що граф має $\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = \underline{n-k}$ ребер.
Доведено.