(12) Довести, що довільний цикл містить простий цикл.

Припустимо, що дано цикл

$C = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n)$

(к-ть вершин більше або дорівнює 3).

Нехай $v_0 = v_1 = v$.

Тоді маршрут $(v_1, e_1, \ldots, e_n, v_n)$ не буде включати ребро (v_1, v_n) і $v_1 \neq v_n$ оскільки $v_0 \neq v_1$.

Маємо теорему про те, що будь-який маршрут, що веде з вершини v у w (і при цьому $v \neq w$) містить простий ланцюг, що веде з v у w.

(Доведення теореми: маршрут, маємо маршрут $C = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$ де $v_0 = v$, $v_n = w$. Нехай ми будуємо за цим маршрутом ланцюг, що веде з v у w. Якщо усі вершини з C різні, то C - простий ланцюг. Інакше, нехай $v_i = v_j$ при деяких i та j $(0 \leq i < j \leq n)$. Якщо вилучити частину маршруту C між v_i та v_j, отримаємо маршрут $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_i, v_i, e_{j+1}, v_{j+1}, \dots, e_n, v_n)$ і довжина цього маршруту < довжини C. Оскільки маємо умову, що $v \neq w$, то $i \neq 0$ або $j \neq n$, тому новий маршрут з'єднує v і w. Якщо він не є простим ланцюгом, можемо застосувати для нього таке ж скорочення як і для C. К-ть вершин графа та маршрут C - скінченні, на кожному кроці довжина маршруту зменшується, тому на деякому кроці отримаємо маршрут, що з'єднує v і w і є простим ланцюгом).

Повертаючись до задачі, за цією теоремою, маршрут $(v_1, e_1, \ldots, e_n, v_n)$ містить простий ланцюг, що веде з v_1 у v_n. Нехай, це буде простий ланцюг $K = (v_1, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}, v_n)$, за побудовою він не містить ребра $(v_1, v_n) = (v_0, v_1)$.

Тоді, маршрут $(v_0, v_1, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}, v_n)$ за означенням є простим циклом і міститься в C.

Отже, доведено.