№21

Чи існує плоский граф, що має

а) 6 вершин і 9 граней

Оскільки граф плоский, то

для нього $|V| - |E| + |P| = 2 + K$, де

K - кількість компонент зв'язності графа.

1) $K = 1$

Тоді $|E| = |V| + |P| - 1 - K =$

$= 6 + 9 - 2 = 13$

Як відомо $|E| \leq 3|V| - 6 = 12$

$13 \leq 12$

Отже, не існує такого графа з даною компонентою зв'язності.

~~2) $K = 2$~~

~~Тоді $|E| = 12$~~

Доведемо, що даний

Нехай $f(n)$ – максимальна кількість ребер у плоского графа з n вершин.

Тоді $f(n) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ 3n-6, & n \geq 3 \end{cases}$

Покажемо, що $f(n) \geq f(x) + f(n-x), \forall x : x \in \mathbb{N} \wedge x < n$.

Зафіксуємо таке $x : x \in \mathbb{N} \wedge x < n$.

1) Нехай $x \geq 3 \wedge n - x \geq 3$

$\Rightarrow$ ~~$f(n) = 3n-6$~~ $n \geq 3$

$\Rightarrow f(n) = 3n-6$

$f(x) = 3x-6$

$f(n-x) = 3(n-x)-6$

$\Rightarrow 3n-6 \geq 3n-12$

2) ~~Очевидно~~ Нехай $x = 2 \wedge n - x \geq 3$

$$f(x)=0 \quad f(u-x)=3(u-x)-6$$

$$\Rightarrow 3u-6=0 \quad ? \quad 3u-9=0$$

$$\Rightarrow u=2 \quad ? \quad 3u=9$$

$$f(2) \quad ? \quad f(u)+f(1)$$

$$u-x=2$$

5) $x=1$ $\Rightarrow u=3$

$f(3) \neq f(u)+f(1)$

$3 \neq 0$

Impossible

3) $x=1$ $u-x=3$

$\Rightarrow u=3$

$f(x)=0 \quad f(u-x)=3(u-x)-6$

$f(u)=3u-6$

$f(x)=1$

$f(u-x)=3(u-x)-6$

$\Rightarrow 3u-6=1+3u-3x-6$

$\Rightarrow u=3$

б) $x = 2$ $\quad u - x = 2$

$\Rightarrow u = 4$

$f(4) \overset{\Rightarrow}{\Rightarrow} f(2) + f(2)$

Отже, дійсно твердження виконується.

Тоді маємо з цієї нерівності, що ~~роз~~ збільшувати кількість компонент зв'язності плоского графа невигідно, бо кількість ребер тільки зменшиться.

$|E| = |V| + |P| - 1 - K$

$|E| + K = |V| + |P| - 1$

При $K = 1$ ~~рів~~ графа не існує.

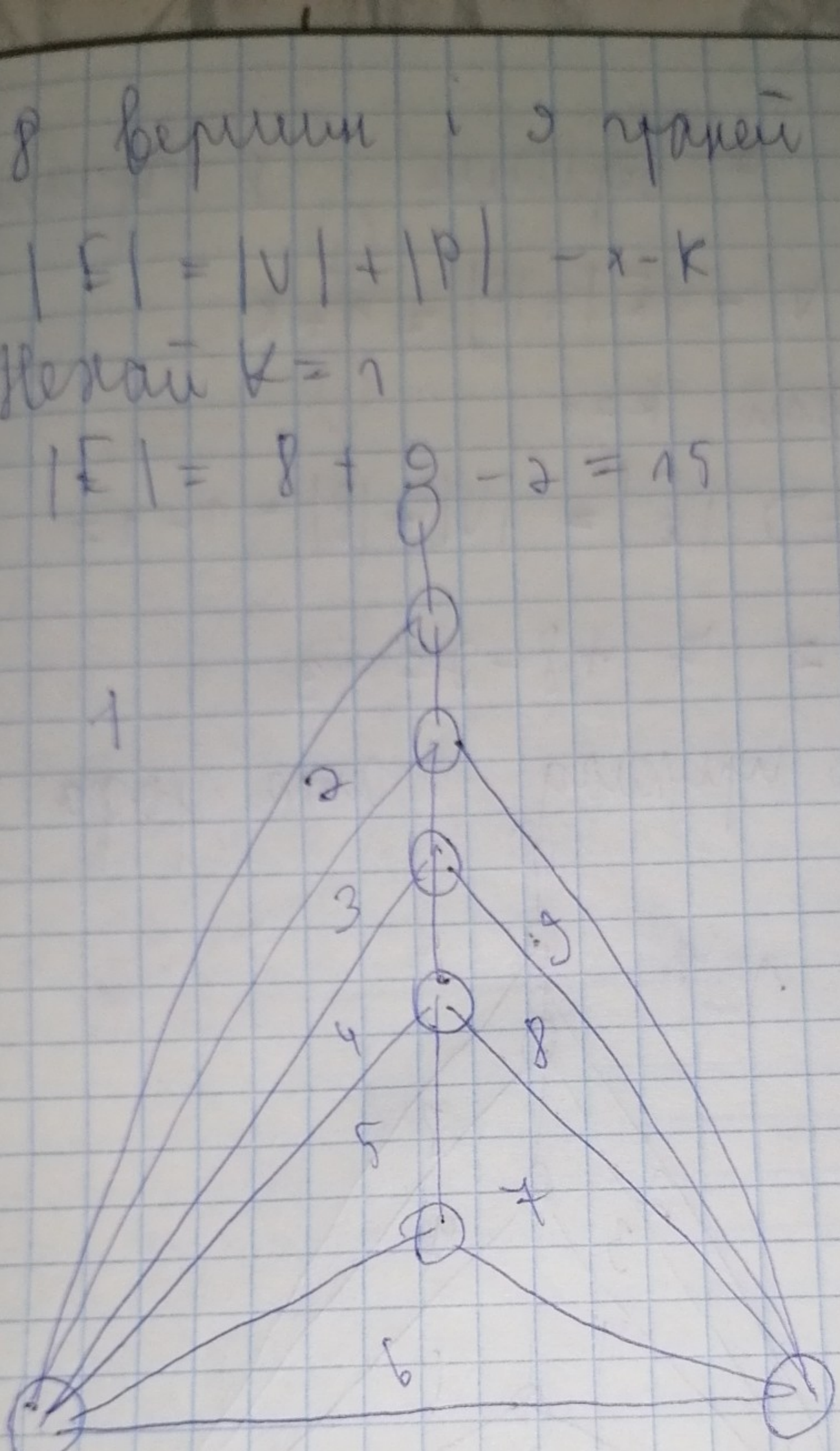
Але $|E| + K$ не збільшується при збільшенні K ~~з~~ (з отриманого вище твердження), отже такого графа не існує.

8) 8 вершин і 9 ребер

$|E| = |V| + |P| - 1 - k$

Нехай $k = 1$

$|E| = 8 + 9 - 1 = 16$



Ось приклад такого графа.

в) 7 вершин і 8 ребер

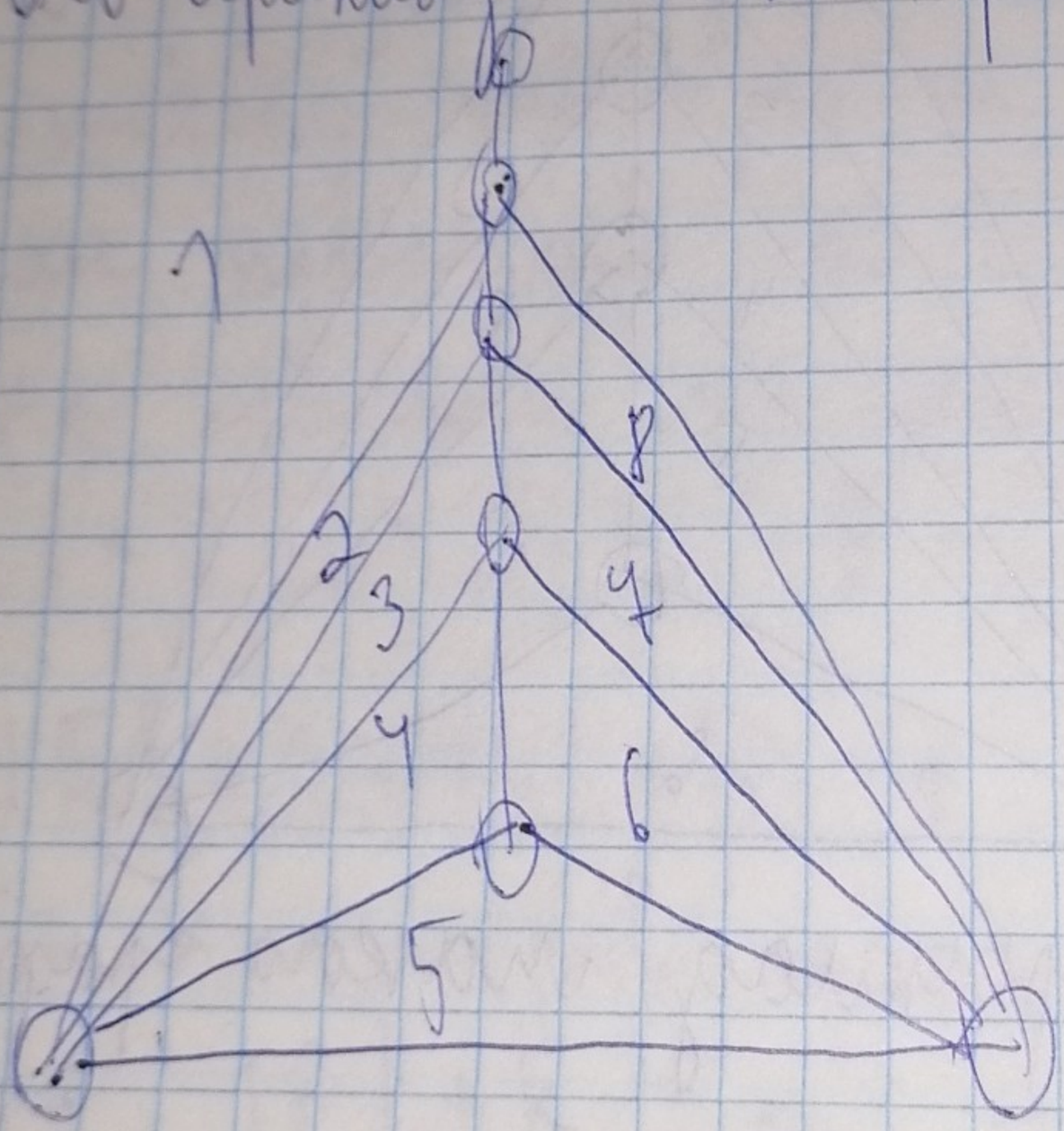
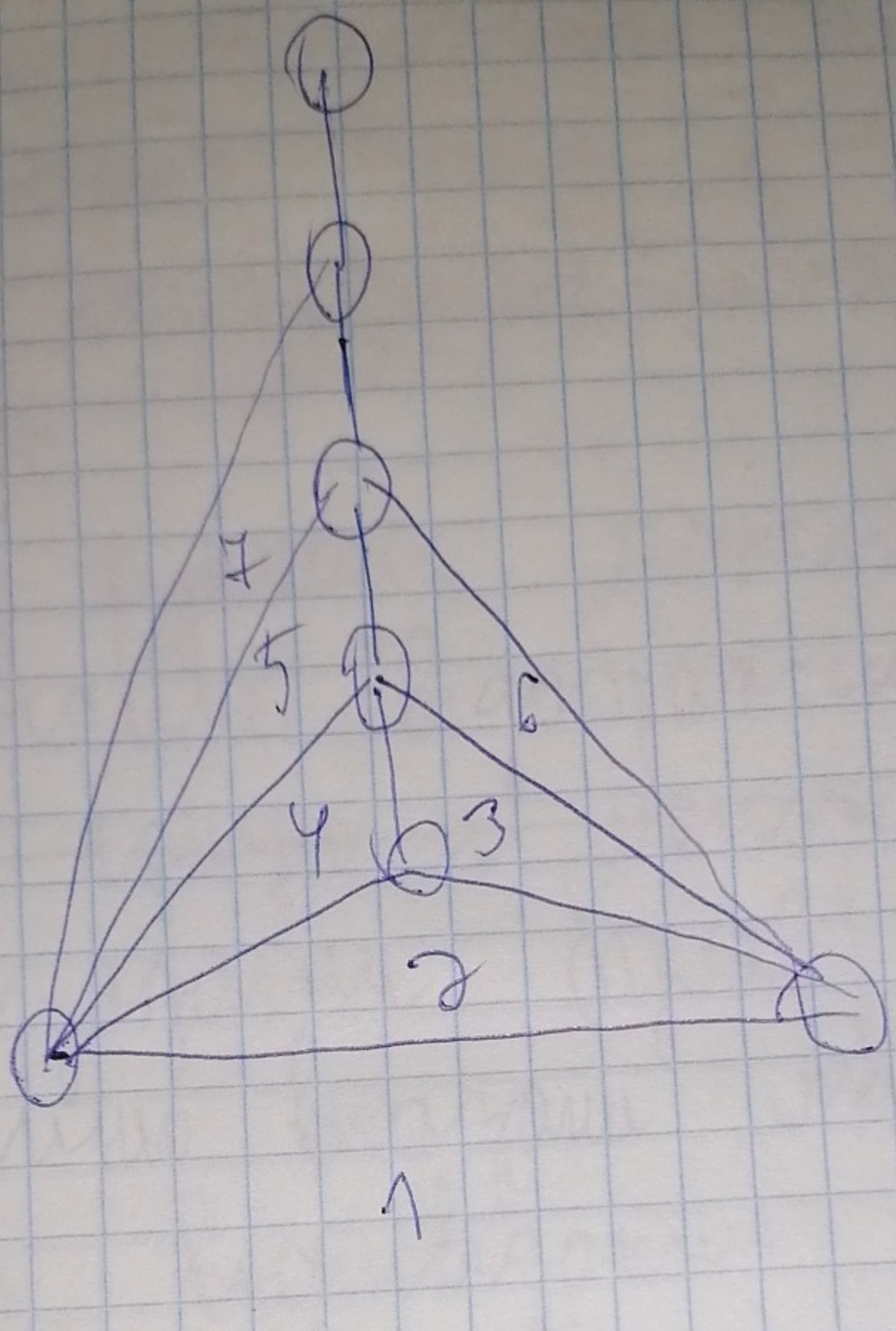
$|V| - |E| + |P| = 1 + k$

Нехай $k > 1$

$\Rightarrow |F| = |V| + |P| - 1 - 1 =$

$= 7 + 8 - 2 = 13$

Ось приклад такого графа



г) 7 вершин і 7 ребер