

Дискретна математика

13. Визначити, чи є система Σ функцій, що задані формулами, базисом.

a) $\Sigma = \{x \rightarrow y, x \oplus y, x \vee y\}$

	T_0	T_1	M	L	C
$x \rightarrow y$	-	+	-	-	-
$x \oplus y$	+	-	-	+	-
$x \vee y$	+	+	+	-	-

1)

x	y	f_1	f_2	f_3	Самодвоїстість				$f_3(x,y)$	$f_3(x,\bar{y})$
		$x \rightarrow y$	$x \oplus y$	$x \vee y$	$\bar{f}_1(x,y)$	$\bar{f}_1(x,\bar{y})$	$\bar{f}_2(x,y)$	$\bar{f}_2(x,\bar{y})$	$\bar{f}_3(x,y)$	$\bar{f}_3(x,\bar{y})$
0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0

Оскільки $f_1(x,y) = \bar{f}_1(x,\bar{y})$, то $f_1 \notin C$
 $f_2(x,y) = \bar{f}_2(x,\bar{y})$, то $f_2 \notin C$
 $f_3(x,y) = \bar{f}_3(x,\bar{y})$, то $f_3 \notin C$

2) Линійність

$f_3(x,y) = \bar{x}y \oplus x\bar{y} \oplus xy = (x \oplus 1)y \oplus x(y \oplus 1) \oplus xy = xy \oplus y \oplus x\bar{y} \oplus x \oplus xy = x \oplus y \oplus xy$, тому $f_3 \notin L$

$f_2(x,y) = \bar{x}y \oplus x\bar{y} = (x \oplus 1)y \oplus x(y \oplus 1) = xy \oplus y \oplus x\bar{y} \oplus x = x \oplus y$, тому $f_2 \in L$

$f_1(x,y) = \bar{x}y \oplus \bar{x}y \oplus xy = (x \oplus 1)y \oplus 1 + (x \oplus 1)y \oplus xy = xy \oplus x \oplus y \oplus 1 + xy \oplus y \oplus xy = x \oplus 1 \oplus xy$, тому $f_1 \notin L$

3) Монотонність

Для f_1 : Оскільки $11 > 01$, а для монотонності має бути виконання нерівності в інший бік, то $f_1 \notin M$

Для f_2 : Оскільки для набору $(1,1)$ $f_2 = 0$, то $f_2 \notin M$

Для f_3 : $01 \leq 11$, $0 \leq 1$, $1 \leq 1$, тому $f_3 \in M$

Оскільки система Σ ф-ій є повною, а тому вона є базисом.

Визначимо: так

b) $\Sigma = \{x \oplus y \oplus z, x \vee y, 0, 1\}$

	T_0	T_1	M	L	C
$x \oplus y \oplus z$	+	+	-	+	+
$x \vee y$	+	+	+	-	-
0	+	-	+	+	-
1	-	+	+	+	-

x	y	z	$x \oplus y$	$x \vee y$	$f_1(x,y,z)$	$f_1(x,\bar{y},\bar{z})$
0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0

x	y	$x \vee y$	$\bar{f}_1(x,y)$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

$f_1(x,y,z) = \bar{f}_1(x,y,\bar{z})$, тому $f_1 \in C$

Линейность:

$$1) f_1(x, y, z) = \bar{x}yz \oplus x\bar{y}z \oplus x\bar{y}\bar{z} \oplus xyz = (x \oplus 1)(y \oplus 1)z \oplus (x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus x(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus xyz =$$

$$= x\bar{y}z \oplus x\bar{y}\bar{z} \oplus x\bar{y}z \oplus x\bar{y}\bar{z} \oplus x\bar{y}z \oplus x\bar{y}\bar{z} \oplus x\bar{y}z \oplus x\bar{y}\bar{z} \oplus x\bar{y}z \oplus x\bar{y}\bar{z} \oplus x\bar{y}z \oplus x\bar{y}\bar{z} = x \oplus y \oplus z, \text{ так как } f_1 \in L$$

$$2) f_2(x, y) = \bar{x}y \oplus x\bar{y} \oplus xy = (x \oplus 1)y \oplus x(y \oplus 1) \oplus xy = x\bar{y} \oplus y \oplus x\bar{y} \oplus x \oplus xy = x \oplus y \oplus xy, \text{ так как } f_2 \notin L$$

Отсюда из табличного задания системы Σ φ -н е базисом.

Выводы: так.

$$b) \Sigma = \{x \oplus y \oplus yz, x \oplus y \oplus 1\}$$

$x y z$	(1) $x \oplus y$	(2) $y \wedge z$	(3) $(1) \oplus (2)$	$f_1(x, y, z)$	$f_1(x, y, z)$	$f_2(x, y)$	$f_2(x, y)$
0 0 0	0	0	0	1	0	0	0
0 0 1	0	0	0	1	1	1	1
0 1 0	1	0	1	0	0	1	1
0 1 1	1	1	0	1	0	0	0
1 0 0	1	0	1	0	1	1	1
1 0 1	1	0	1	0	0	0	0
1 1 0	0	0	0	1	1	1	1
1 1 1	0	1	1	0	1	0	0

Самостоятельно!

1) Определим $f_1(x, y, z) \neq f_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, то $f_1(x, y, z) \notin C$, аналогично

2) $f_2(x, y) \neq f_2(\bar{x}, \bar{y})$, так как $f_2(x, y) \notin C$.

Линейность:

$$1) f_1(x, y, z) = \bar{x}y\bar{z} \oplus x\bar{y}z \oplus x\bar{y}\bar{z} \oplus xyz = (x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus x(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus xz(y \oplus 1) \oplus xyz =$$

$$= x\bar{y}z \oplus x\bar{y}\bar{z} \oplus x\bar{y}z \oplus x\bar{y}\bar{z} \oplus x\bar{y}z \oplus x\bar{y}\bar{z} \oplus x\bar{y}z \oplus x\bar{y}\bar{z} \oplus x\bar{y}z \oplus x\bar{y}\bar{z} \oplus x\bar{y}z \oplus x\bar{y}\bar{z} = x \oplus y \oplus yz, \text{ так как } f_1 \notin L$$

$$2) f_2(x, y) = \bar{x}y \oplus xy = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus xy = x\bar{y} \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus xy = x \oplus y \oplus 1, \text{ так как } f_2 \in L$$

Монотонность

1) $0010 < 1101$ - выполняются, $00 < 10$, выполняются, $11 \not< 01$, так как $f_1 \notin M$

2) $10 \not< 01$ - (не выполняются), так как $f_2 \notin M$

	T_0	T_1	M	L	C
$x \oplus y \oplus yz$	+	+	-	-	-
$x \oplus y \oplus 1$	-	+	-	+	-

Определим, какие системы Σ φ -н е невыполнимо, то база не е базисом.

Выводы: ни.

2) $\Sigma = \{xyvz, xy \oplus z, xy \sim z\}$

	T_o	T_i	M	b	C
$x_y \sim z$	+	+	+	-	-
$x_y \oplus z$	+	-	-	-	-
$x_y \sim z$	+	+	-	-	-

[illegible]

Самостоятельно

- 1) Que xyz : $f_1(x,y,z) \neq \bar{f}_1(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, hence $f_1(x,y,z) \notin C$
 2) Que $xy \oplus z$: $f_2(x,y,z) \neq \bar{f}_2(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, hence $f_2(x,y,z) \notin C$
 3) Que $xyz \sim z$: $f_3(x,y,z) \neq \bar{f}_3(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, hence $f_3(x,y,z) \notin C$.

Монотонность

- 4) Две xyz : $01 \leq 01$ - ~~не~~ $0101 \leq 0111$ - выполняется,
 $01 \leq 01$ - выполняется
 $01 \leq 11$ - выполняется, тогда $f_1(x,y,z) \in M$
- 2) Две $xy \oplus z$: $0101 \leq 0110$ - выполняется, ~~не~~
 $01 < 10$ - выполняется, ~~не~~
 $1 \neq 0$ - (не выполняется), тогда $f_2(x,y,z) \notin M$
- 3) Две $xy \sim z$: $1010 < 1001$ - не выполняется, тогда $f_3(x,y,z) \notin M$

Личность

$$1) f_1(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}z \oplus \bar{x}yz \oplus x\bar{y}z \oplus xy\bar{z} \oplus xyz$$

Оскільки \vec{z} задає напрям n -то зменшення того жданок KZ f_1 буде свідчити про неможливість f_1 тому $f_1(x, y, z) \neq 1$

$$\begin{aligned} 2) f_2(x, y, z) &= \bar{x}\bar{y}z \oplus \bar{x}yz \oplus x\bar{y}z \oplus xy\bar{z} = (x \oplus 1)(y \oplus 1)z \oplus (x \oplus 1)yz \oplus xz(y \oplus 1) \oplus xy(z \oplus 1) \\ &= \cancel{xyz} \oplus \cancel{xz} \oplus \cancel{yz} \oplus \cancel{z} \oplus \cancel{xyz} \oplus \cancel{yz} \oplus \cancel{xy} \oplus \cancel{xz} \oplus \cancel{xy} = xy \oplus z, \text{ really} \\ & \quad f_2 \notin L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) f_3(x, y, z) &= \bar{x}\bar{y}\bar{z} \oplus \bar{x}y\bar{z} \oplus \bar{x}y\bar{z} \oplus x\bar{y}\bar{z} = (\bar{x} \oplus 1)(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus (\bar{x} \oplus 1)(z \oplus 1)y \oplus x(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus xyz \\ &= \cancel{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} \oplus \bar{x}\bar{z} \oplus y\bar{z} \oplus z \oplus x\bar{y} \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus x\bar{y}\bar{z} \oplus x\bar{y} \oplus y\bar{z} \oplus y \oplus x\bar{y}\bar{z} \oplus x\bar{y} \oplus x\bar{z} \oplus x\bar{y}\bar{z} \end{aligned}$$

Отсюда, 3 таблица базиса, но система \in нулю, а Bisnovo : так, $f_3(x, y, z) \neq 0$

g) $\Sigma = \{x \rightarrow y, 0\}$

	T_0	T_1	M	L	C
$x \rightarrow y$	-	+	-	-	-
0	+	-	+	+	-

x, y	$x \rightarrow y$	$f_1(x, y)$	$\bar{f}_1(x, y)$	$f_2(x, y)$	$\bar{f}_2(x, y)$	$\bar{f}_2(x, y)$
00	1	0	0	0	1	1
01	1	0	1	0	1	1
10	0	1	0	0	1	1
11	1	0	0	0	1	1

Самодвойственность

1) $f_1(x, y) \neq \bar{f}_1(x, y)$, потому $f_1(x, y) \notin C$

2) $f_2(x, y) \neq \bar{f}_2(x, y)$, потому $f_2(x, y) \notin C$

Монотонность

1) Про $f_1(x, y)$: $11 \leq 01$ - не выполняется, потому $f_1(x, y) \notin M$

2) Про $f_2(x, y)$: $00 \leq 00$ - выполняется, монотонность у каждой функции оребуса, потому $f_2(x, y) \in M$

Линейность

1) Про $f_1(x, y)$: $f_1(x, y) = \bar{x}y \oplus \bar{x}y \oplus xy = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus (x \oplus 1)y \oplus xy = xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus xy \oplus y \oplus xy = x \oplus 1 \oplus xy$, потому $f_1(x, y) \notin L$

2) Про $f_2(x, y)$: $f_2(x, y) = 0$, потому $f_2(x, y) \in L$

Отно, з заданной системы, что система Σ ф-и не полная, а потому база не задана.

Вывод: так.

e) $\Sigma = \{x \rightarrow y, \neg x\}$

	T_0	T_1	M	L	C
$x \rightarrow y$	-	+	-	-	-
$\neg x$	-	-	-	+	+

x, y	$x \rightarrow y$	$f_1(x, y)$	$\bar{f}_1(x, y)$	$\neg x$	$f_2(x, y)$	$\bar{f}_2(x, y)$
00	1	0	0	1	0	1
01	1	0	1	1	0	1
10	0	1	0	0	1	0
11	1	0	0	0	1	0

Самодвойственность

1) Про $f_1(x, y)$: $f_1(x, y) \neq \bar{f}_1(x, y)$, потому $f_1 \notin C$

2) Про $f_2(x, y)$: $f_2(x, y) = f_2(x, y)$, потому $f_2 \in C$

Монотонность

1) Про $f_1(x, y)$: $11 \leq 01$ - не выполняется, потому $f_1 \notin M$

2) Про $f_2(x, y)$: $11 \leq 00$ - не выполняется, потому $f_2 \notin M$

Линейность

1) Про $f_1(x, y) = \bar{x}y \oplus \bar{x}y \oplus xy = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus (x \oplus 1)y \oplus xy = xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus xy \oplus y \oplus xy = x \oplus 1 \oplus xy$, потому $f_1 \notin L$

2) $f_2(x, y) = \bar{x}y \oplus \bar{x}y = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus (x \oplus 1)y = xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus xy \oplus y = x \oplus 1$, потому $f_2 \in L$

Отно, система Σ ф-и не полная, а потому не задана.

Вывод: так.

e) $\Sigma = \{x \oplus y, x \sim yz\}$

	T_0	T_1	M	L	C
$x \oplus y$	+	-	-	+	-
$x \sim yz$	-	+	-	-	-

$x y z$	$y \wedge z$	$x \sim (y \wedge z)$	$f_1(x, y)$	$f_2(x, y, z)$
0 0 0	0	1	0	0
0 0 1	0	1	0	1
0 1 0	0	1	0	1
0 1 1	1	0	1	1
1 0 0	0	0	1	1
1 0 1	0	0	1	0
1 1 0	0	0	1	0
1 1 1	1	0	0	0

$x y$	$x \oplus y$	$f_1(x, y)$	$\bar{f}_1(x, y)$
0 0	0	1	1
0 1	1	0	0
1 0	1	0	0
1 1	0	1	1

Самодвойственность

- 1) Проверим $f_1(x, y) \neq \bar{f}_1(\bar{x}, \bar{y})$, то $f_1(x, y) \notin C$
 2) Проверим $f_2(x, y, z) = \bar{f}_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, то $f_2(x, y, z) \notin C$

Монотонность

1) Для f_1 : $01 \leq 10$ - выполняется, а для $1 < 0$ - не выполняется, так как $f_1 \notin M$

2) Для f_2 : $1110 \leq 0001$ - не выполняется, так как $f_2(x, y, z) \notin M$

Линейность:

1) $f_1(x, y) = \bar{x}y \oplus x\bar{y} = (x \oplus 1)y \oplus x(1 \oplus y) = xy \oplus y \oplus xy \oplus x = x \oplus y$, так как $f_1 \in L$

2) $f_2(x, y, z) = \bar{x}yz \oplus x\bar{y}\bar{z} \oplus x\bar{y}z \oplus xy\bar{z} = (x \oplus 1)yz \oplus x(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus xz(y \oplus 1) \oplus xy(z \oplus 1) =$
 $= xyz \oplus yz \oplus x\bar{y}z \oplus x\bar{y} \oplus x \oplus xy\bar{z} \oplus x\bar{z} \oplus x\bar{y}z \oplus xy\bar{z} = x \oplus yz$, так как $f_2 \notin L$.

Вывод: на двух таблицах, системе Σ ф-и f не являются, а так как $f_1 \in L$ и $f_2 \notin L$

Вывод: так,