45. Довести, що в зв'язному графі будь-які два прості ланцюги максимальної довжини мають принаймні одну спільну вершину. Чи правильно, що вони завжди мають спільне ребро?

Доведемо від супротивного.

Нехай L_1 та L_2 – два простих ланцюги максимальної довжини (n), що не мають спільної вершини. $\left(L_1=(v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}),\ L_2=(w_1, w_2 \ldots w_n, w_{n+1})\right)$

Оскільки граф зв'язний, існує простий ланцюг C, що з'єднує v_1 і w_1. Якщо v_k – остання вершина ланцюга C, що належить L_1, а w_m – перша і належить L_2.

Позначимо через X_1 той з ланцюгів $(v_1 \ldots v_k)$ і $(v_{n+1} \ldots v_k)$ довжина якого $\geq n/2$. Якщо їх довжини

рівні; нехай це $(v_1, \dots v_k)$. Через X_2
позначимо довший з $(w_m \dots w_1)$ і
$(w_m \dots w_{n+1})$. Нехай X - частина
ланцюга C - $(v_k \dots w_m)$. Очевидно,
що довжина $X \geq 1$. $\Rightarrow$ ($X_1 \cdot X \cdot X_2$ - простий
ланцюг, довжини $\geq n+1$)
Ми дійшли до суперечності, що
означає хибність припущення
$\Rightarrow L_1$ і L_2 мають спільну вершину.

Щодо спільного ребра, то прості
ланцюги максимальної довжини
можуть його і не мати

Наприклад: