人口模型

2.1 问题提出

人类人口总数的增长情况如下：

- 1000年前：2.75亿
- 1830年：10亿
- 1930年：20亿
- 1960年：30亿
- 1975年：40亿
- 1987年：50亿

问题：人类人口增长的规律是什么？如何在数学上描述这一规律？

2.2 Malthus 模型

模型假设

1. 设 $x(t)$ 表示 t 时刻的人口数，且 $x(t)$ 连续可微。
2. 人口的增长率是**常数（增长率=出生率-死亡率）。**
3. 人口数量的变化是封闭的，即人口数量的增加与减少只取决于人口中个体的生育和死亡，且每一个体都具有同样的生育能力与死亡率。

建模与求解

由假设，t 时刻到 $t + \Delta t$ 时刻人口的增量为： $$x(t + \Delta t) - x(t) = rx(t)\Delta t$$ 于是得： $$\frac{dx}{dt} = rx$$ $$x(0) = x_0$$ 其解为： $$x(t) = x_0e^{rt}$$

模型评价

考虑二百多年来人口增长的实际情况，1961年世界人口总数为 3.06×10^9，在1961～1970年这段时间内，每年平均的人口自然增长率为2%，则（15）式可写为： $$x(t) = 3.06 \times 10^9 \cdot e^{0.02(t-1961)}$$ 根据1700～1961年间世界人口统计数据，我们发现这些数据与（16）式的计算结果相当符合。因为在这期间地球上人口大约每35年增加1倍，而（16）式算出每34.6年增加1倍。

2.3 阻滞增长模型（Logistic 模型）

增长率 r 表示为人口 $x(t)$ 的函数 $r(x)$，且 $r(x)$ 为 x 的减函数。

模型假设

1. 设 $r(x)$ 为 x 的线性函数，$r(x) = r - sx$。
2. 自然资源与环境条件所能容纳的最大人口数为 x_m，即当 $x = x_m$ 时，增长率 $r(x_m) = 0$。

建模与求解

由假设（i），（ii），可得 $r(x) = r\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$，则有： $$\frac{dx}{dt} = r\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)x$$ $$x(t_0) = x_0$$ （17）式是一个可分离变量的方程，其解为： [x(t) = \frac{x_m x_0}{x_0 + (x_m -

x_0)e^{-r(t-t_0)}}]

模型检验

由（17）式，计算可得：
$$\frac{d^2x}{dt^2} = r^2\left(1 - \frac{2x}{x_m}\right)x$$
人口总数 $x(t)$ 有如下规律：

1. $\lim_{t \to +\infty} x(t) = x_m$，即无论人口初值 x_m 如何，人口总数以 x_m 为极限。
2. 当 $0 < x < x_m$ 时，$\frac{dx}{dt} > 0$，这说明 $x(t)$ 是单调增加的，又由（19）式知：当 $x < \frac{x_m}{2}$ 时，$\frac{d^2x}{dt^2} > 0$，$x = x(t)$ 为凹，当 $x > \frac{x_m}{2}$ 时，$\frac{d^2x}{dt^2} < 0$，$x = x(t)$ 为凸。
3. 人口变化率 $\frac{dx}{dt}$ 在 $x = \frac{x_m}{2}$ 时取到最大值，即人口总数达到极限值一半以前是加速生长期，经过这一点之后，生长速率会逐渐变小，最终达到零。

2.4 模型推广

在 Malthus 模型上增加一个竞争项 $-bx^2 (b > 0)$，它的作用是使纯增长率减少。如果一个国家工业化程度较高，食品供应较充足，能够提供更多的人生存，此时 b 较小；反之 b 较大，故建立方程：
$$\left\{\begin{array}{l}\frac{dx}{dt}=x(a-bx)\quad(a, b>0),\\ x(t_0)=x_0,\end{array}\right.$$
其解为：
$$x(t) = \frac{ax_0}{bx_0 + (a - bx_0)e^{-a(t-t_0)}}$$
由（21）式，得：
$$\frac{d^2x}{dt^2} = (a - 2bx)(a - bx)x$$
对（20）$\sim$（22）式进行分析，有：

1. 对任意 $t > t_0$，有 $x(t) > 0$，且 $\lim_{t \to +\infty} x(t) = \frac{a}{b}$。
2. 当 $0 < x < \frac{a}{b}$ 时，$x'(t) > 0$，$x(t)$ 递增；当 $x = \frac{a}{b}$ 时，$x'(t) = 0$；当 $x(t) > \frac{a}{b}$ 时，$x'(t) < 0$，$x(t)$ 递减。
3. 当 $0 < x < \frac{a}{2b}$ 时，$x''(t) > 0$，$x(t)$ 为凹；当 $\frac{a}{2b} < x < \frac{a}{b}$ 时，$x''(t) < 0$，$x(t)$ 为凸。

令（20）式第一个方程的右边为 0，得 $x_1 = 0$，$x_2 = \frac{a}{b}$，称它们是微分方程（20）的平衡解。易知 $\lim_{t \to +\infty} x(t) = \frac{a}{b}$，故又称 $\frac{a}{b}$ 是（20）式的稳定平衡解。可预测：不论人口开始的数量 x_0 为多少，经过相当长的时间后，人口总数将稳定在 $\frac{a}{b}$。参数 a 和 b 可以通过已知数据利用 Matlab 中的非线性回归命令 nlinfit 求得。