排队模型

X/Y/Z/A/B/C

泊松分布

1. 不相重叠的时间区间内顾客到达数相互独立
2. 时间区间$[t, t+\Delta t)$内有一个顾客到达的概率与t无关，与区间长Δt成正比
3. 充分小的Δt 中有两个或两个以上故可到达概率极小。

$[0,t)$区间内有n个顾客的概率 $P_n(t)$:
$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

期望$E[N(t)] = \lambda t$, 方差$Var[N(t)] = \lambda t$。

顾客相继到达的时间间隔T的分布密度
$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

累计概率分布
$$F(t) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

其他连续分布

均匀分布、正态分布、指数分布（无记忆性）、Gamma分布、Weibull分布、Beta分布

生灭过程

系统处于**平衡状态**时顾客人数（即队长）为n的概率表示为p_n。下一个顾客到达与离去的时间分别服从参数为λ_n、μ_n的指数分布

令 $C_n = \dfrac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1}$，有
$$p_n = C_n p_0，\ p_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}C_n}$$

这是M/M/s等待模型的生灭过程

M/M/s 等待模型

$C_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n$。

称$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$为 服务强度 ，**服务强度小于1才能达到平衡状态。**

- 平均队长
  $L_s = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$
- 平均排队长
  $L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)p_n = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$

平均逗留时间

服从参数为$\mu - \lambda$的复指数分布，平均逗留时间：

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

忙期与闲期

- 忙期与闲期出现的概率分别为ρ与$1 - \rho$
- 充分长的时间里，忙期与闲期出现平均次数相同
- 闲期长度分布应与顾客到达时间分布相同

得平均忙期：
$\bar{B} = \frac{\rho}{1-\rho}\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$

平均逗留时间=平均忙期

Matlab仿真模拟

```
lambda = 2;
mu = 3;
N = 100; % 模拟的总时间
M = 20; % 系统的最大顾客数

time = 0;
queue = []; % 顾客到达时间
serverBusy = false;
serverFreeTime = 0;

for t = 1:N
    % 到达过程（泊松过程）
    if rand() < lambda * 1
        if serverBusy
            queue = [queue, time];
        else
            serverBusy = true;
            serviceTime = exprnd(1/mu);
            serverFreeTime = time + serviceTime;
        end
    end

    % 服务完成
    if serverBusy && time >= serverFreeTime
        serverBusy = false;
        if ~isempty(queue)
            firstInLine = queue(1);
            queue(1) = [];
            serviceTime = exprnd(1/mu);
            serverFreeTime = time + serviceTime;
        else
            serverFreeTime = 0;
        end
    end

    time = time + 1;
end
```