UNIVERSITE DE KINSHASA

Faculté polytechnique

B.P : 255 KINSHASA XI

Notes de Cours de
Trigonométrie et calcul numérique

A l'intention des étudiants en Prèpolytéchnique

Par

Corneille KAPUKU

Chef de travaux

2015

INTRODUCTION

Les notes de cours présentées ici sont destinées aux étudiants de prépolytechnique. Elles ont été rédigées en vue de doter cette promotion, d'un instrument de travail, conforme au programme.

Le cours de trigonométrie se base sur une solide connaissance des fonctions trigonométriques et des grandes formules de la trigonométrique.

Tout au long de la résolution des équations trigonométriques la notion d'anglais associés et celle d'inversion des fonctions Trigonométriques seront employées et approfondies. On constatera d'ailleurs que le cours est abordé de manière très « classique ». Nous estimons en effet que l'étudiant a pu assimiler au cycle secondaire un certain nombre de cours de calcul pour être à même de bien comprendre le cours. Nous poursuivons donc un but plutôt pratique. Il est évident que l'étudiant pourra par la lecture, ajouter certains compléments techniques non-expliqués dans ces notes.

Nous remercions tous ceux qui ont collaboré à l'édition de ces notes. Nous espérons que notre effort sera accueilli avec sympathie et nous souhaitons à tous ceux qui utilisent ces notes de cours un travail fructueux. Nous savons que de nouvelles étapes restent à parcourir aussi nous recevons avec reconnaissance toutes les observations qui nous permettront de servir encore mieux la cause qui nous est chère.

Corneille KAPUKU

PLAN DU COURS

1ère Partie : TRIGONOMETRIE

2ème Partie : CALCUL NUMERIQUE

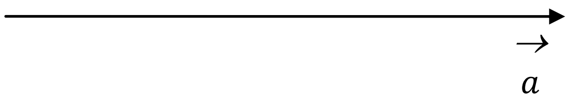
CHAPITRE 1 : NOTIONS DE GEOMETRIE ORIENTEE

I. SEGMENTS ORIENTES

1. Axe

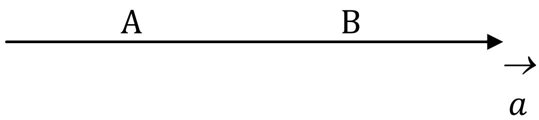
On appelle axe ou droite orientée, une droite sur laquelle on a choisi et indiqué le sens positif.

On désigne habituellement un axe par une lettre minuscule placée à côté de la tête de la flèche.



2. Segment orienté

Deux points quelconques A et B pris sur axe déterminent deux segments rectilignes : AB et BA



En géométrie orientée, ces deux segments ne sont pas identiques. In segment orienté AB est une portion de droite supposée parcourue par un mobile allant de la première lettre A à la deuxième lettre B ; A est l'origine du segment, B l'extrémité.

Ce segment AB est dit positif ou négatif suivant que le mobile qui le décrit se déplace dans le sens positif ou négatif.

3. Valeur algébrique d'un segment orienté

- La valeur absolue ou module d'un segment orienté AB est le nombre positif qui mesure, à l'aide d'une unité choisie, la longueur de ce segment : elle se note |AB| ou $\overline{AB}$.

Ainsi : $/AB/ = 5\ et\ /BA/ = 5*$

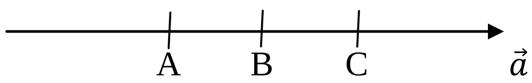
- La valeur algébrique d'un segment orienté AB est la valeur absolue de ce segment précédée du signe + ou – suivant que ce segment est positif ou négatif. Elle se note AB.
  AB = +5 et BA = -5

4. Relation fondamentale

Quelque soit le sens positif pour l'axe $\bar{a}$, on a entre les valeurs algébriques des segments orientés AB et BA la rélation : BA = -AB

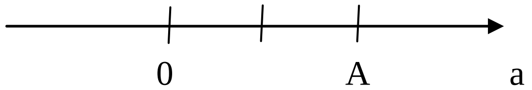
5. Relation de SHASLES

A, B, C étant trois points pris arbitrairement sur un axe, on a entre les valeurs algébriques des segments ouverts AB, BC, CA la relation $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$



6. Abscisse d'un point

Sur un axe $\vec{a}$, on choisi arbitrairement un point fixe 0 ayant adopté une unité de longueur, à tout point A de l'axe correspond un segment OA dont la valeur algébrique s'exprime par un nombre relatif réciproquement, à tout nombre relatif donné correspondant un seul segment OA, donc un point unique A le nombre qui fixe la position du point A. sur l'axe est appelé **abscisse** du point A.

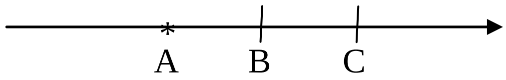


Dans la figure ci-dessus, l'abscisse de A est +2

Le point 0 est l'origine des abscisses.

7. *Valeur algébrique d'un segment en fonction des abscisses des ses extrémités*

Soit sur un axe le segment AB et l'origine 0



D'après 0

$0A + AB + B0 = 0 \Rightarrow AB = -B0 - 0A$

$$\boxed{\Rightarrow AB = 0B - 0A}$$

La valeur algébrique d'un segment situé sur un axe est égale à l'abscisse de l'extrémité moins l'abscisse de l'origine.

II. ARCS ET ANGLES ORIENTES

1. Angle

C'est une figure géométrique formée par deux droites issues d'un même point.

2. Circonférence

C'est l'ensemble des points équidistants d'un point fixe appelé centre.

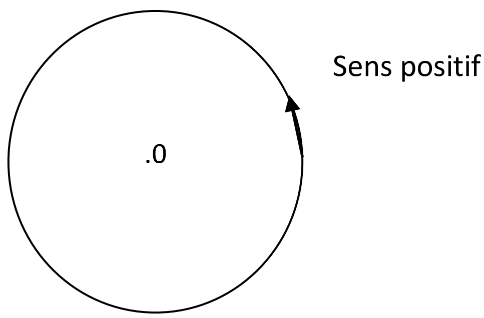
3. Cercle

C'est une figure géométrique limitée par une circonférence.

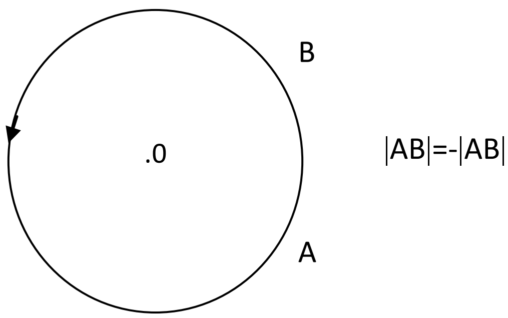
4. Circonférence orientée

C'est une circonférence sur laquelle on a choisi est indiqué un sens positif.

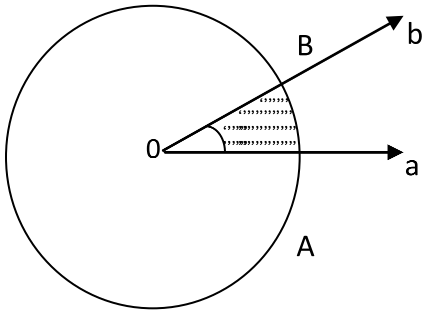
Par sens positif, il faut entendre le sens inverse à celui des aiguilles d'une montre.



5. **L'arc orienté,** est une portion de la circonférence orientée. Elle se note |AB|



6. **L’angle orienté,** est une portion du cercle orienté**.**



∝A0B

III. UNITES DES ARCS

1.**a) Un quadrant** (1Q) est le quart de la circonférence.

$C = 2\pi R$ (longueur de la circonférence). La circonférence contient 4Q

b) Un radian (1 ρ) est un arc dont la longueur est égale à celle du rayon.

$C = 2\pi R$

c) Un degré (1°) est la 90° partie du quadrant ; 1°=60' =3600''

La circonférence contient 360°.

d) Un grade (1gr) est la 100ème partie du quadrant ; la circonférence contient 400 grades.

2. Correspondances entre les différentes unités

$4Q = 2\pi\rho = 360° = 400gr$

$2Q = \pi\rho = 180° = 200gr$

$1Q = \frac{\pi}{2}\rho = 90° = 100gr$

Remarque : ne jamais dire : $\pi = 180°$; on écrit $\pi\rho = 180°$

a. Calcul d'un radiant en degré

Nous savons que $\pi\rho = 180°$ et $\pi = 3{,}1415$…..

$1\ \rho = \frac{180°}{3{,}14159} \Rightarrow 1\rho = 57{,}2958°$

$\Rightarrow 0{,}2958° = 0{,}2958 \text{x} 60'$

$= 17{,}748'$

$\Rightarrow 1\rho = 57°17'45''$

b. Calcul d'un degré en radian

$\pi\rho = 180°$

$1° \frac{3{,}14159}{180}\rho \Rightarrow 1° = 0{,}0174\rho$

IV. APPLICATION

1. Convertir un arc de 4,36ρ en (°,‘,‘‘)

   En degrés : 1ρ = 57,2958°

   4,36ρ = 4,36 x 57,2958°

   = 249,80969°

   En minute :

   0,80969° = 0,80969 x 60’

   = 48,5814’

   En secondes : (’’)

   0,5814 = 0,5814 x x60’

   = 35’’

   ⇒ <u>4,36ρ = 249°48’35’’</u>

2. Convertir un arc de 145°20’25’’ en radians.

   1° = 60’ = 3600’’

   145°20’25’’ = $\left(145 + \frac{20}{60} + \frac{25}{3600}\right)''$

   = (145 + 0,33333 + 0,00694)°

   = 145,34025°

   145,34025° = 145,34025 x 0,0174ρ

   = <u>2,52892ρ</u>

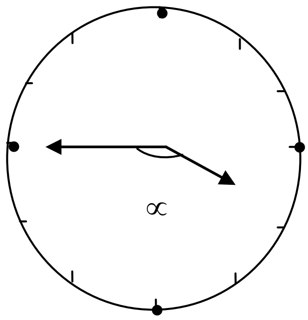
3. ∝ = 0,323ρ e degré (°,’,’’)

4. ∝ = 378°15’14’’ en radians

5. Combien de temps la terre met-elle pour tourner d’un arc égal à 4 minutes autours de son propre axe ?

6. Quel est l’angle formé par une aiguille d’une montre à 15h45’ ?

Les applications 3 à 6 sont laissées aux lecteurs.



$$45min = \frac{3}{4}h$$

$$= \frac{3}{4} . 30°$$

$$= 22,5°$$

$$\propto = 150° + \beta$$

où $\beta = 30° - 22,5°$

$$\propto = 150° + 7,5°$$

$$= 157,5°$$

Exercices sur le chapitre 1

01. Repérer sur un axe les points A, B et C d'abscisses respectives 4 ; -2 ; 9 et vérifier $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$.

02. On considère sur un axe les points A, B, C et D d'abscisses respectives -6, -2, 4 et 7.
    a. Déterminer : $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$,$\overline{CB}$
    b. Déterminer les abscisses des points B, C, D en prenant A pour nouvelle origine dans le sens de l'ancien repère.

03. Si X et Y ont pour abscisses respectives 2 et 6, calculer les abscisses de I, M, N tels que $\overline{IX}$=2IY ; 3$\overline{MX}$ - $\overline{MY}$= 0 ; $\frac{\overline{NX}}{\overline{NY}} = -\frac{1}{2}$

04. Calculer la longueur d'un arc de 41°20'15'' d'un cercle de 7cm de rayon

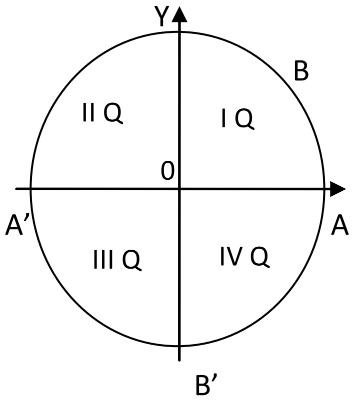
05. Calculer en degré, minutes et secondes l'arc de 1,6dm de longueur dans un cercle de 3dm de rayon

06. L'angle au centre d'un cercle de 28cm de rayon intercepte un arc de 4cm de longueur. Exprimer en degrés la mesure de cet angle.

CHAPITRE II. FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

I. CIRCONFERENCE TRIGONOMETRIQUE

La circonférence trigonométrique est une circonférence orientée dont le rayon est1 et sur laquelle on a choisi une origine des arcs.



I. Q : $0° \leq \propto \leq 90°$

II.Q : $90° \leq \propto \leq 180°$

III. Q : $180° \leq \propto \leq 270°$

IV. Q : $270° \leq \propto \leq 360°$

A : $\propto = 0°$

B : $\propto = 90°$

A' : $\propto = 180°$

B' : $\propto = 270°$

Remarque :

Si l'arc est supérieur à 360°, on le ramène dans l'un ou l'autre quadrant par la relation :

$\beta = 360° xn + \propto$ ou $n \in \geq$ $\propto$ est inferieur à 360°

Exemple 1.

$\beta = 860°$

$\beta = 360° \text{ x}2 + 140$

$\propto = 140° \in II$

Exemple 2.

$\beta = -1340°$

$\beta = 360° \; x \; (-3) - 260°$ ou encore $\begin{cases} \beta = 360° \mathrm{x}(-4) + 100° \\ \propto = 140° \in IIR \end{cases}$

$\propto = -260° \in II^{è} \; Q$

Exemple 3

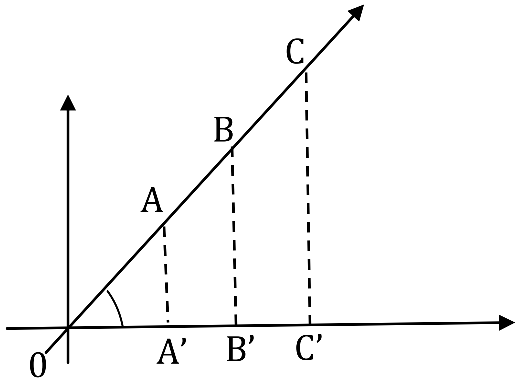
$\beta = -\, 2380°$

$\beta = 360° \text{ x } (-6) - 220°$ ou encore $\begin{cases} \beta = 360° \text{ x } (-7) + 140 \\ \propto = 140° \in IIQ \end{cases}$

$\propto = -220° \in IIe$ Q

II. DEFINITION DES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES f(∝)

Soit un rayon – vecteur $\vec{r}$ formant avec 0 x l'angle ∝.



$\overline{OA} = r_1$ $\overline{OA}' = x_1$ $\overline{AA'} = y_1$

$\overline{OB} = r_2$ $\overline{OB}' = x_2$ $\overline{BB} = y_2$

$\overline{OC} = x_3$ $\overline{OC'} = x_3$ $\overline{CC'} = y_3$

A, B et C sont les points quelconques sur $\vec{r}$.

O, projette orthogonalement A, B, et C sur OX pour obtenir A', B', et C′

Les triangles OAA', OBB' et OCC' sont semblables.

On écrit les apports des côtés homologues.

$$\frac{\overline{A}A'}{\overline{O}A} = \frac{\overline{B}B'}{\overline{O}B} = \frac{\overline{C}C'}{OC} \Rightarrow \frac{y_1}{r_1} = \frac{y_2}{r_2} = \frac{y_3}{r_3}$$

$$\frac{\overline{O}A'}{\overline{O}A} = \frac{\overline{O}B'}{\overline{O}B} = \frac{\overline{O}C'}{OC} \Rightarrow \frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2} = \frac{x_3}{r_3}$$

Ces rapports ne dépendent pas de la longueur du rayon – vecteur.

Pour changer $\frac{x}{r}$ = et $\frac{y}{r}$ il faut changer l'angle ∝

$\Rightarrow \frac{x}{r} = \int(\propto)$ et $\frac{y}{r} = \int(\propto)$

Par définition, on a :

$\boxed{\text{Sin} \propto = \frac{y}{r}}$ et $\boxed{\text{Cos} \propto = \frac{x}{r}}$

a. Sin ∝ = $\frac{y}{r} \Rightarrow -1 \leq \frac{y}{r} \leq 1$ (Car y est la projection de r)

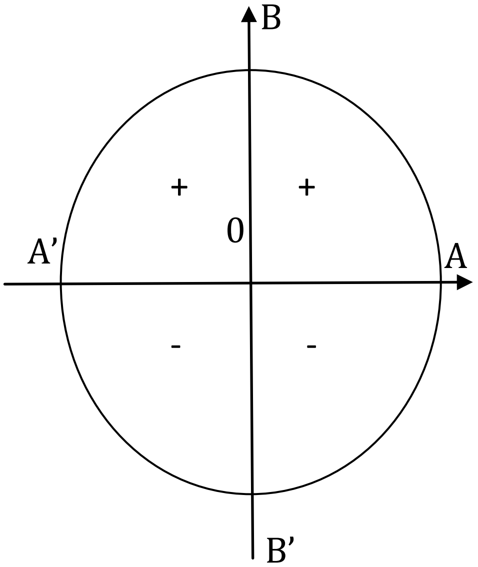
$\Rightarrow -1 \leq \sin \propto \leq 1$

Pour tout angle $\propto$ il existe toujours un sinus de cet angle.

Soit une circonférence trigonométrique. On a : $r = 1$.

$\text{Sin} \propto = \frac{y}{r} \Rightarrow \sin \propto = y$

$\Rightarrow$ y'o limité par la circonférence est l'axe des sinus

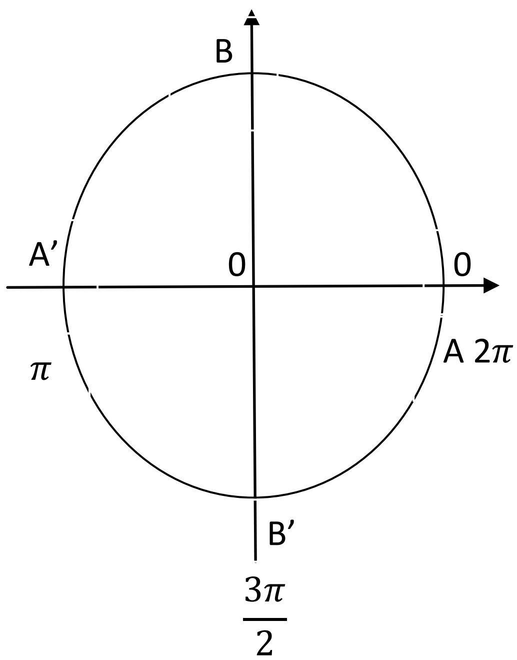


I^er^ Q : le sinus est positif

II^ème^ Q : le sinus est positif

III^ème^ Q : le sinus est négatif

IV^ème^ Q : le sinus est négatif



$$\left.\begin{array}{l} A : \propto=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \sin 0 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} B : \propto= \frac{\pi}{2} \\ y=1 \end{array}\right\} \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} A' : \propto= \pi \\ y=1 \end{array}\right\} \sin\pi = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} B' : \propto= \frac{3\pi}{2} \\ y=-1 \end{array}\right\} \sin\frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} A : \propto=2\pi \\ y=0 \end{array}\right\} \text{Sin}2\pi = 0$$

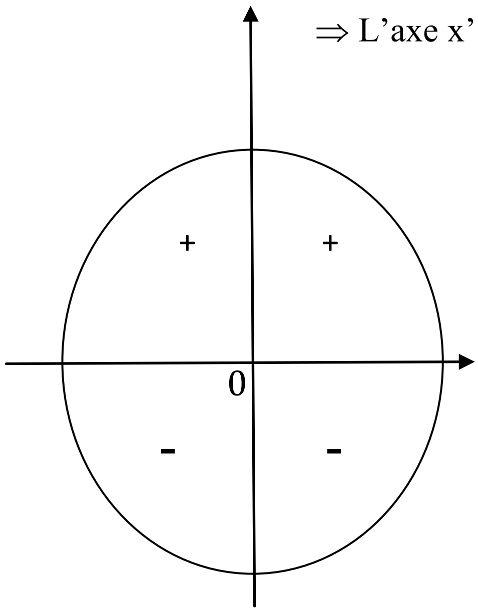
b. $\cos\propto = \frac{\chi}{\gamma}$ où $-1 \leq \frac{\chi}{\bar{r}} \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq \cos\propto \leq 1$

Soit une circonférence trigonométrique

$\text{Cos } \propto = \frac{\chi}{r} \Rightarrow \cos \propto = \chi$

$\Rightarrow$ L'axe x' 0x limité par la circonférence est l'axe des cosinus

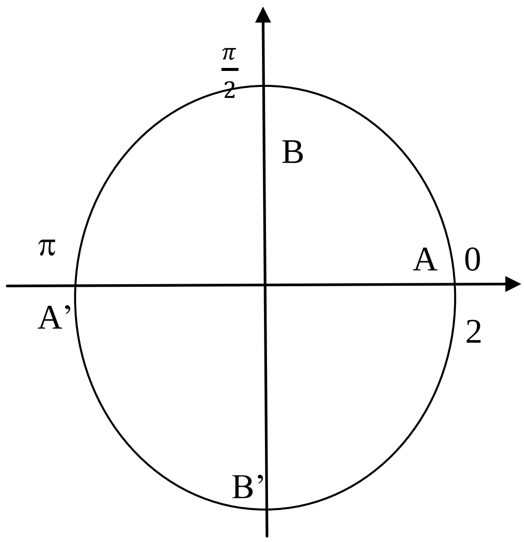


Iè Q : cos ∝ est positif

IIè Q : cos ∝ est négatif

IIIè Q : cos ∝ est négatif

IVè Q : cos ∝ est positif



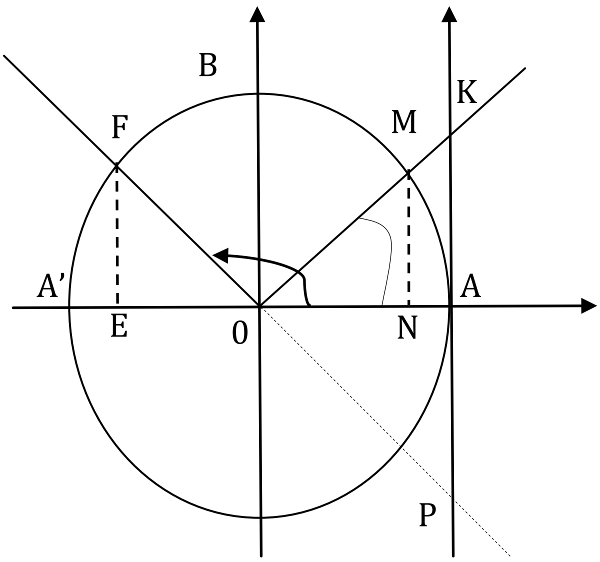
$$\left.\begin{array}{l} A : \propto = 0 \\ \quad x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos 0 = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} B : \propto = \frac{\pi}{2} \\ \quad x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} A' : \propto = \pi \\ \quad x = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos \pi = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} B' : \propto = \frac{3\pi}{2} \\ \quad x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{2} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} A : \propto = 2\pi \\ \quad y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos 2\pi = 1$$



c. Par définition tg $\propto$ = $\frac{sin \propto}{cos \propto}$

y

= $\frac{r}{x}$ = $\frac{y}{x}$

r

Soit une circonférence trigonométrique

On trace une droite perpendiculaire à 0X qui passe par A

- I^{er} Q : tg $\propto$ = $\frac{MN}{ON}$ $\qquad$ $0 \leq \propto \frac{\pi}{2}$

  On prolonge OM.

  Les angles OMN et OKA obtenus sont semblables.

  Les rapports des côtés homologues donnent :

  $\frac{MN}{ON} = \frac{KA}{OA} = tg\propto$ or $\overline{OA} = 1$

  $\Rightarrow tg\propto = \overline{KA}$

- II$^{\text{ème}}$ Q : tg $\propto \beta = \frac{FE}{OE}$

  On prolonge OF

Les triangles OFE et OPA obtenus sont semblables.

Les rapports des côtés homologues donnent :

$\frac{FE}{OE} = \frac{PA}{OA}$ = tg $\propto$ or $\overline{OA}$ = 1

$\Rightarrow$ tg $\propto = \overline{PA}$

La valeur algébrique de la tangente est sur l'axe T' A T

$\Rightarrow$ T' A T est l'axe des tangentes.

$tg \propto = \frac{y}{x}$

I$^{\text{er}}$ Q : tg $\propto$ est positif

II$^{\text{ème}}$ Q : y est positif, x est négatif $\Rightarrow$ tg $\propto$ est négative.

III$^{\text{ème}}$ Q : y est négatif, x est négatif $\Rightarrow$ tg $\propto$ est positive.

IV$^{\text{ème}}$ Q : y est négatif, x est positif $\Rightarrow$ tg $\propto$ est négative.

tg 0 = 0

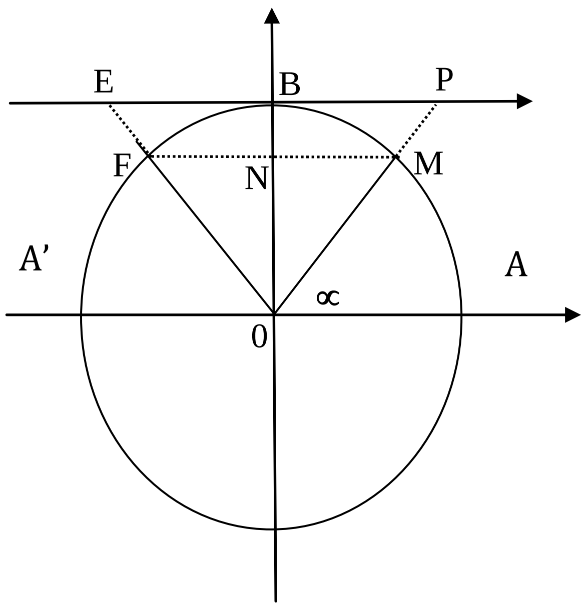
tg π = 0

$tg\,\frac{\pi}{2}$ et $tg\,\frac{3\pi}{2}$ n'existent pas ($tg \propto = \pm \infty$)

d. cot g $\propto = \frac{\cos \propto}{\sin \propto} = \frac{x}{y}$

Soit une circonférence trigonométrique ; r = 1

On trace une ⊥ à OY qui passe par B



I^{er} Q : $0 < \propto \leq \frac{\pi}{2}$

cotg $\propto = \frac{NM}{OM}$

On prolonge OM, les triangles OMN et OPB obtenus sont semblables.

$\frac{NM}{ON} = \frac{BP}{OB}$ or $\overline{OB}$=1

⇒cot g $\propto = BP$

$II^{è}$ Q: $\frac{\pi}{2} \leq \propto < \pi$

cot g $\beta = \frac{FY}{OY}$

On prolonge OF pour obtenir les triangles OEB et OFY semblables.

$\frac{FY}{OY} = \frac{EB}{OB}$ or $\overline{OB} = 1$

⇒ cotg β EB ⇒ l'axe K'BK est l'axe des cotangentes

cotg $\propto = \frac{x}{y}$

I^{er} Q : x est positif, y est positif ⇒ cotg ∝ est positive

$II^{ème}$ Q : x est négatif, y est négatif ⇒ cotg ∝ est négative

$III^{ème}$ Q : x est négatif, y est négatif ⇒ cotg ∝ est positive,

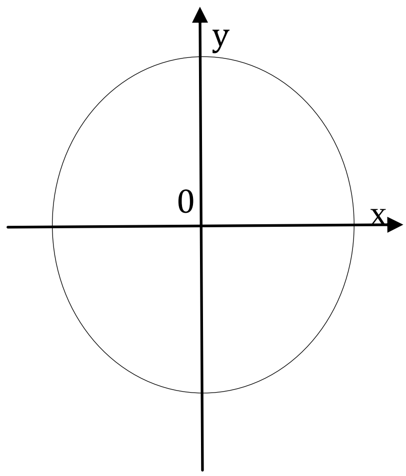
$IV^{ème}$ Q : y est négatif, x est positif ⇒ cotg ∝ est négative.

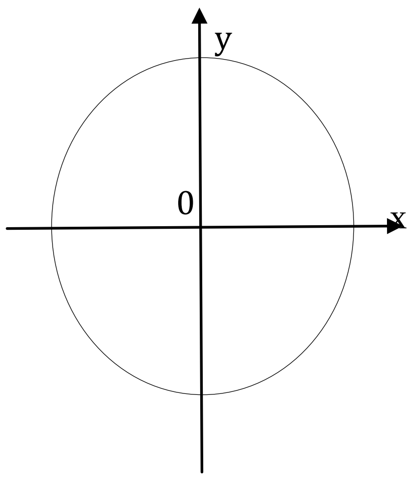
cot g $\frac{\pi}{2} = 0$

cotg $\frac{3\pi}{2} = 0$

cotg 0 et cotg π n'existent pas (cotg $\propto = \pm\infty$)

$\sec \propto = \frac{1}{\cos \propto} = \frac{r}{x}$ $\qquad$ $\cos ec \propto = \frac{1}{\sin \propto} = \frac{r}{y}$





III. GRAPHIQUE DES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

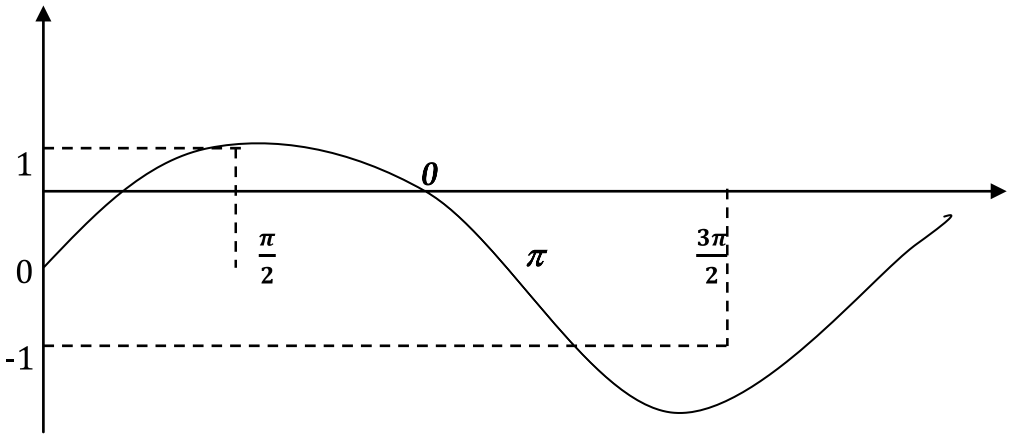
1. $y = \sin x$ où $-1 \leq y \leq 1$

$-\infty < x < +\infty$

a. ***tableau de variation***

X	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	2π
y		↗	1	↘	0	↘	- 1	↗	0

b. Graphique



Cette courbe porte le nom de sinusoïde

Y – sin x

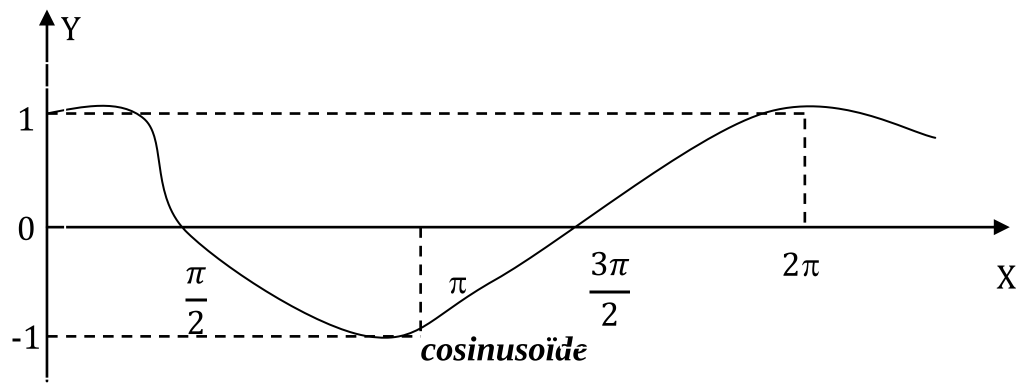
2. y = cos x   où   - 1 ≤ y ≤ 1

-∞ < x < +∞

a. Tableau de variation

X	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π	↗	$\frac{3\pi}{2}$	↗	2π
y	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1

b. Graphique

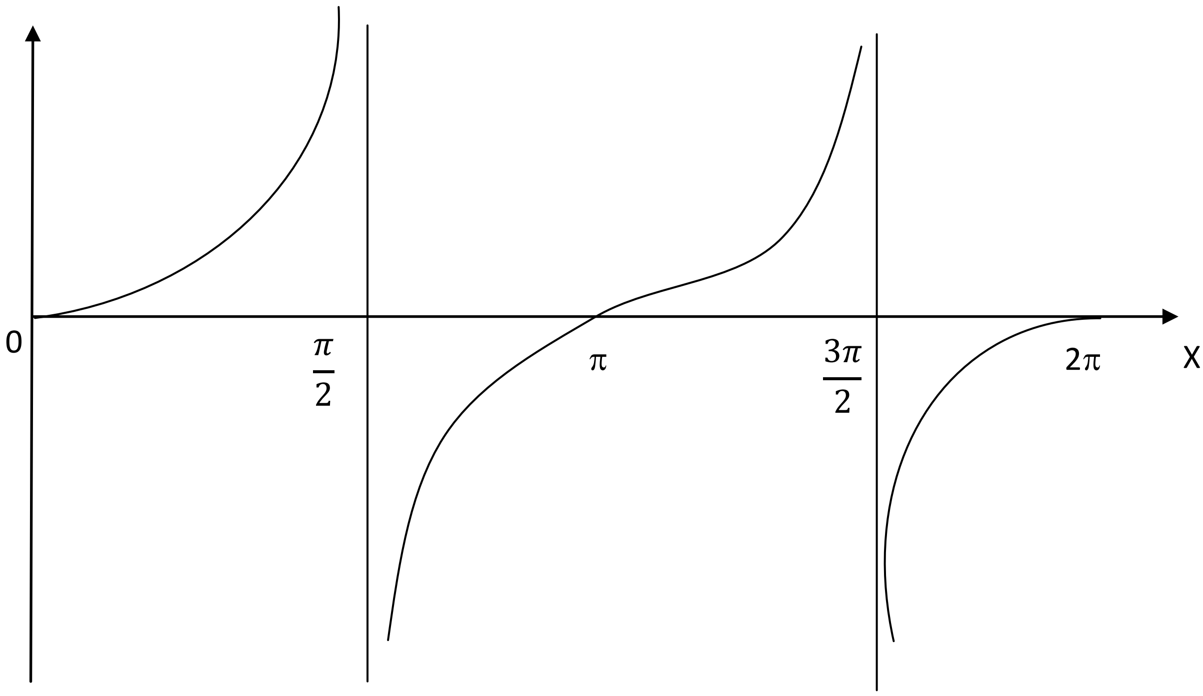


3. y = tgx ou -∞ ≤ y ≤ +∞

a. Tableau de variations

X	0 ↗ $\frac{\pi}{2}$ ↗ π ↗ $\frac{3\pi}{2}$ ↗ 2π
y	1 ↗ □ ↘ 0 ↘ □ ↗ 0

b. Graphique



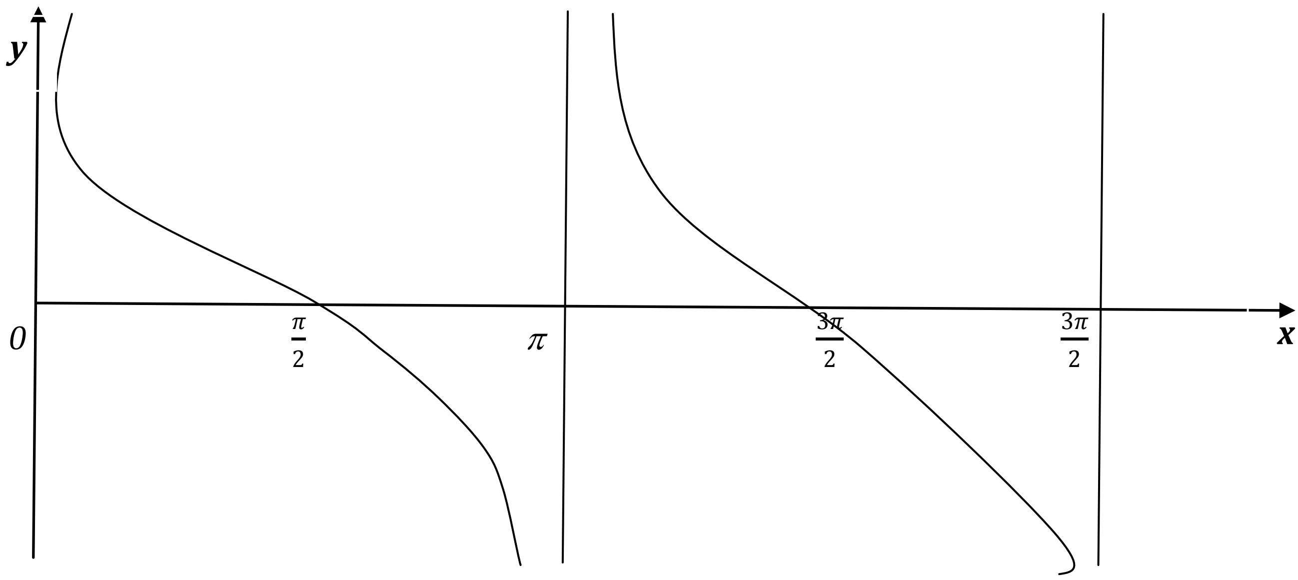
Y = tgx

4. *$y = cotg\ x$* *où* $-\infty < y < +\infty$

a. tableau de variation

X	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\nearrow$	2π
y	□	$\searrow$	0	$\searrow$	□	$\nearrow$	0	$\nearrow$	□

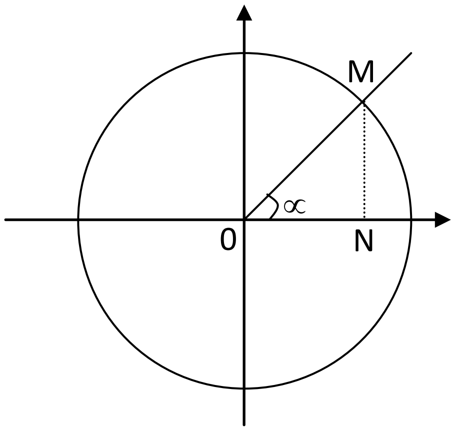
b. Graphique



$Y = cot\ g\ x$

IV. RELATION FONDAMENTALE ENTRE RAPPORT TRIGONOMETRIQUE D'UN MEME ARC

a) Soit une circonférence orientée par définition, on a :



$$sin \propto = \frac{\overline{MN}}{\overline{OM}} = sin^2 \propto = \frac{\overline{MN^2}}{\overline{OM^2}}$$

$$cos \propto = \frac{\overline{ON}}{\overline{OM}} \Rightarrow \cos^2 \propto = \frac{\overline{ON}^2}{\overline{OM}^2}$$

$$sin^2 \propto + cos^2 \propto = \frac{\overline{MN}^2}{\overline{OM}^2} + \frac{\overline{ON}^2}{\overline{OM}^2}$$

$$= \frac{\overline{MN}^2 + \overline{ON}^2}{\overline{OM}^2}$$

$$= \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OM}^2}$$

1. $\text{Sin}^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$

2. $\text{tg} \propto = \frac{\sin \propto}{\cos \propto}$ où $\propto \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

3. $\text{cotg} \propto = \frac{\cos \propto}{\sin \propto}$ où $\propto \neq k\pi$

4. $(2) \text{ x } (3) \Rightarrow \tan \propto . \text{cotg} \propto = 1$

5. $\sec \propto = \frac{1}{\sin \propto}; \sin \propto \neq 0$

6. $\text{cosec} \propto = \frac{1}{\sin \propto}; \cos \propto \neq 0$

7. On dérive (1) par $\cos^2 \propto$

$$\frac{\cos^2 \propto}{\cos^2 \propto} + \frac{\sin^2 \propto}{\cos^2 \propto} = \frac{1}{\cos^2 \propto} \Rightarrow 1 + tg^2 \propto = sec^2 \propto$$

8. On divise (1) par $\sin^2 \propto$

$$\frac{\sin^2\propto}{\sin^2\propto}+\frac{\cos^2\propto}{\sin^2\propto}=\frac{1}{\sin^2\propto}\Rightarrow 1+\cot g^2\propto\ = cosec^2\propto$$

b) Calcul des fonctions trigonométrique connaissant l'une d'elles

***1*°** On donne sin∝, calculer cos∝, tg∝, cotg∝

$\mathrm{Sin}^2\propto + \mathrm{cons}^2\propto = 1$

$tg\propto = \frac{\sin\ \propto}{\cos\ \propto} \Rightarrow tg\propto = \frac{\sin\propto}{\pm\sqrt{1-sin^2\propto}}$

$cotg\propto = \frac{1}{tg\propto} \Rightarrow cotg\propto = \frac{\pm\sqrt{1-sin^2\propto}}{\sin\propto}$

2° On donne cos∝, calculer sin∝, tg∝, cotg∝

$\sin\propto = \pm\sqrt{1-sin^2\propto}$

$tg\propto = \frac{\pm\sqrt{1-sin^2\propto}}{\cos\propto}$

$cotg\propto = \frac{\cos\propto}{\pm\sqrt{1-sin^2\propto}}$

3° On donne tg∝, calculer sin∝, cos∝, cotg∝

$cotg\propto = \frac{1}{tg\propto}$

$1+tg^2\propto = sec^2\propto \Rightarrow cos^2\propto = \frac{1}{1+tg^2\propto}$

$\Rightarrow \cos\propto = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\propto}}$

$$\boxed{tg\propto = \frac{\sin\propto}{\cos\propto} \Rightarrow sin\propto = tg\propto .\ cos\propto}$$

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1}+tg^2\propto}}$$

4° On donne cotg∝, calculer sin∝, cos∝, tg∝

$$\text{tg}\propto = \frac{1}{\text{cotg}\propto}$$

$$1 + \text{cotg}^2\propto = \text{cosec}^2\propto \Rightarrow \sin^2\propto = \frac{1}{1+\text{cotg}^2\propto}$$

$$\boxed{\Rightarrow \sin\propto = \frac{1}{\pm\sqrt{1+cotg^2\propto}}}$$

$$\text{cotg}\propto = \frac{\cos\propto}{\sin\propto} \qquad \boxed{\Rightarrow \ cos\propto = sin\propto . \ cotg\propto}$$

$$\boxed{\Rightarrow \cos\propto = \frac{\text{cotg}\propto}{\pm\sqrt{1+\text{cotg}^2\propto}}}$$

Exemples

1. Simplifier : $\sin^4\propto + \cos^4\propto$

$$\sin^4\propto + \cos^4\propto = \sin^4\propto + 2\sin^2\propto\cos^2\propto + \cos^4\propto - 2\sin^2\propto\cos^2\propto$$
$$= (\sin^2\propto + \cos^2\propto) - 2\sin^2\propto\cos^2\propto$$
$$= 1 - 2\sin^2\propto\cos^2\propto$$

2. Démontrer :

$$\text{Sin}\propto \cos^2\propto\,(1+\text{tg}^2\propto) + \cos^2\sin^2\propto\,(1+\text{cotg}^2\propto) = \sin\propto + \cos\propto$$

$$\text{Sin}\propto \frac{1}{\sec^2\propto}\sec^2\propto + \cos\propto \frac{1}{\cos^2\propto}\text{cosec}^2\propto = \sin\propto + \cos\propto$$

3. Simplifier :

$$2(\sin^6\propto + \cos^6\propto) - 3(\cos^4\propto + \sin^4\propto)$$

$2(\sin^6\propto + \cos^6\propto) - 3(\cos^4\propto + \sin^4\propto) = 2(\sin^2\propto + \cos^2\propto)(\sin^4\propto - \sin^2\propto\cos^2\propto + \cos^4\propto) - 3[(\sin^2\propto + \cos^2)^2 - 2\sin^2\propto\cos^2\propto]$

$$= 2(\sin^4\propto - \sin^2\cos^2\propto + \cos^4\propto) - 3(1 + 2\sin^2\cos^2\propto)$$

$= 2[(\sin^2\propto + \cos^2\propto)^2 - 3\sin^2\propto \cos^2\propto] - 3(1+2\sin^2\propto \cos^2\propto)$

$= 2 – 6 \sin^2\propto \cos^2\propto - 3+6\sin^2\propto \cos^2\propto$

$= 2 – 3$

$= - 1$

4. On donne tg $\propto$ = - 2 où $\frac{3\pi}{2} < \propto < 2\pi$

a. $\text{cotg} \propto = \frac{1}{tg \propto} \Rightarrow \text{cotg} \propto = \frac{1}{2}$

b. $\cos \propto = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 \propto}} \Rightarrow \cos \propto = \frac{1}{\sqrt{5}}$

c. $\sin \propto = \text{tg} \propto . \cos \propto \Rightarrow \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow sin \propto = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

5. Mettre l'impression E = $\sec^2 \propto \text{cosec}^2 \propto -4$ sous forme d'un carré parfait.

En effet :

$\text{Sec}^2\propto \text{cosec}^2 \propto -4 = (1 + \text{tg}^2 a)(1 + \text{cotgy}^2 a) -4$

$=1+ \text{cotg}^2 a + tg^2a + tg^2cotg^2a - 4$

$=1 + \text{cotg}^2 a + \text{tg}^2 a + 1 – 4$

$=\text{cotg}^2 a - 2 + \text{tg}^2 a$

$=\text{cotg}^2 a - 2\text{cotg tg } a + \text{tg}^2 a$

$=(\text{cotg } a - tg\ a)^2$

6. De l'égalité $\frac{tg(a-b)}{tga} + \frac{sin^2c}{sin^2a} = 1$. Déduire $\text{tg}^2c = \text{tg}a\text{tg}b$.

L'égalité proposée donne :

$$\frac{sin^2\text{c}}{sin^2a} = \frac{\text{tg}(a - \text{tg}(a - b)}{tga} \Rightarrow sin^2c = \frac{\sin a \sin b}{\cos(a - b)}$$

On trouve en suite

$Cos^2c = 1 – sin^2c = \frac{\cos\ a\ cosb}{\cos\ (a-b)}$

Il suffit alors de diviser $\sin^2 c$ par $\cos^2 c$ pour obtenir la relation donnée.

7. Si l'on a $tg\propto + \sin\propto = m$ et $tg\propto - \sin\propto = n$.

Montrer que l'on a aussi $m^2 - n^2 = \pm 4\sqrt{mn}$ pour $0 < \propto < 180°$

En effet :

$$\begin{cases} tg \propto + \sin \propto = m & (1) \\ tg \propto - \sin \propto = n & (1) \end{cases}$$

(1) x (2) $\Rightarrow m\,n = tg^2\propto - \sin^2\propto$ (3)

$(1)^2 \Rightarrow m^2 = tg^2\propto + 2tg\propto \sin\propto + \sin^2\propto$ (4)

$(2)^2 \Rightarrow n^2 = tg^2\propto - 2tg\propto \sin\propto + \sin^2\propto$ (5)

(4) – (5) $\Rightarrow m^2 - n^2 = 4\, tg\propto \sin\propto$ (6)

Or (3) $\Rightarrow tg\propto \sin\propto = \pm\sqrt{mn}$ (7)

(7) dans (6) donne $m^2 - n^2 = \pm 4\sqrt{mn}$

$$mn = tg^2 \propto - sin^2 \propto$$

$$= (tg \propto - sin \propto)(tg \propto + sin \propto)$$

$$= \frac{sin^2\propto}{cos^2\propto} + sin^2 \propto$$

$$= \frac{sin^2\propto - sin^2\propto cos^2\propto}{cos^2\propto}$$

$$= \frac{sin^2\propto}{cos^2\propto}\frac{(1-cos^2\propto)}{sin^2\propto}$$

$$= sin^2 \propto tg^2 \propto$$

$$\Rightarrow tg \propto sin \propto = \pm\sqrt{mn}$$

Exercices sur le chapitre 2.

01. Simplifier les expressions suivantes :

a. $\cos x - \cos^3 x$

b. $\cos^2\propto(1+tg^2\, x)$

c. $\mathrm{cosec}\,x - (\mathrm{cotg}\,x)\cos u$

d. $\dfrac{2\cos x - cotgx}{\sin x - 1 + cosec\ x - \cos x\ cotg\ x}$

02. Vérifier les identités suivantes:

a. $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$

b. $\cos^2 x - \cos^2 y = \sin^2 y - \sin^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} - \frac{1}{1+tg^2 x}$

c. $\frac{-4\, sin^3 x + 3 \sin x}{4\, cos^3 x\; 3\cos x} = \frac{3\; tg\; x - tg^3\; x}{1-3\; tg^2\, x}$

d. $sin^6 x + cos^6 x = 1 - 3\; sin^2 x \cos x$

e. $\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}$

f. $\frac{\sin y}{1+\cos\; y} + \frac{1+\cos y}{\sin y} = 2 cosecy$

g. $\frac{1-\sin a \cos a}{\cos a(\sec a - cosec\; a)} - \frac{sin^2 a - cos^2 a}{sin^3 a + cos^3 a} = \sin a$

h. $(\sin a \cos b + \cos a \sin b)^2 + (\cos a \cos b - \sin a\; sin\; b)^2 = 1$

03. Calculer la valeur numérique de chacune des expressions suivantes :

a. $2 \sec \pi \cos^2 \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} + 3 \sin^2 \frac{\pi}{3} - \text{cosec} \frac{\pi}{2}$

b. $\frac{4}{3}\; sin^2\, 45° - \frac{1}{2} sec^2\, 60° - \frac{1}{3} cos^2\, 30°$

c. $4\; sin^3\; \frac{\pi}{6} + \; 2\; cos^3\; \frac{\pi}{4} - \frac{1}{16} sec^3\; \frac{\pi}{3}$

d. $\frac{2\; cotg\;\; 3x + cos^3\; 4x - \frac{1}{2} sin^2\, 4x + \frac{3}{4} tg^2\, 2x}{\sin\; 4x.cotg\;\; 2x.tg\;\; 3x}$ $\quad (pour\; x = 15°)$

04. Sachant que $\sin x = 0{,}8$. calculer $\text{tg} x + \sec x$

a. Si $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

b. Si $O < x < \frac{\pi}{2}$

05. Calculer les nombres trigonométriques d'arc x du 2ème quadrant sachant que $12\sin x + 5\cos x = 0$.

06. Si $\sec u = \frac{13}{3}$, trouver la valeur de $\frac{2 \sin u - 3 \cos u}{4 \sin u - 9 \cos u}$ lorsque :

a. u est un arc du Ier Q

b. u est un arc du 3ème Q

07. Exprimer les expressions suivantes en fonctions de tg$x$

a. Cos$x$ – sin$x$ cos$x$

b. $\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x$

c. $\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^4 x-\cos^4 x}$

d. $\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}$

CHAPITRE III. RELATIONS ENTRE LES RAPPORTS TRIGONOMETRIQUES D'ANGLES ASSOCIES ET REDUCTION AU PREMIER QUADRANT

I. RAPPORTS TRIGONOMETRIQUE D'ANGLES ASSOCIES

1. *Angle Quadrantal*

Un angle est dit quadrantal lorsqu'il vaut un multiple entier de l'angle de 0°, 90°, 180°, 360°, 450°,….

2. *Angle associé*

Deux angles sont dits associés si et seulement si leur somme ou leur différence vaut un angle quadrantal.

a. **Angles opposés**

1. *Définition*

On appelle angles opposés, deux angles dont la somme de mesure est égale à 0 à 2 $k\pi$ près.

Ainsi deux angles de mesures respectives $\propto$ et β son opposés si seulement si

$$\propto + \beta = 2\,k\pi \ (k \in \square)$$

Exemples :

$\propto = 30°$ et $\beta = 30°$ $\qquad$ $\propto = \frac{2\pi}{3}\ et\ \beta\ \frac{4\pi}{3}$

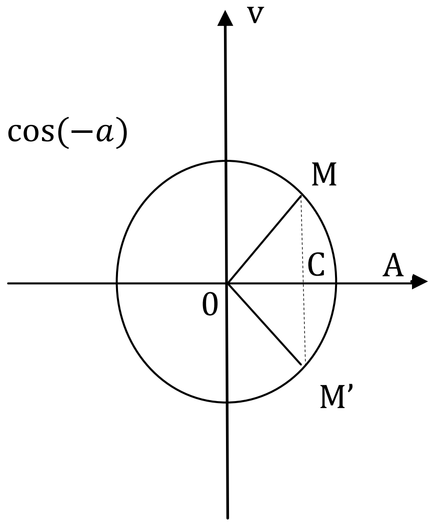
Les triangles COM et COM' sont isométriques (comme leurs hypoténuses sont égales et ils ont un côté commun OC).

On a : $\overline{CM'} = -\overline{CM}$

Or $\overline{CM} = \sin a \; et - \overline{CM'} = \sin(-a) et \; \overline{OC} = cosa = \cos(-a)$

Sin (-a) = - sin a

Cos (-a) = cos a



En résumé: tg (-a) = -tg a cotg (-a) = - cotg a

b. Angles Complémentaires

1. Définition

On appelle angles complémentaires, deux angles dont la somme de mesures est égale $\frac{\pi}{2}$ à $2k\pi$ près.

Ainsi deux angles de mesures respectives $\propto$ et β sont complémentaires si et seulement si :

$\propto + \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi (k \in \mathbb{Z})$

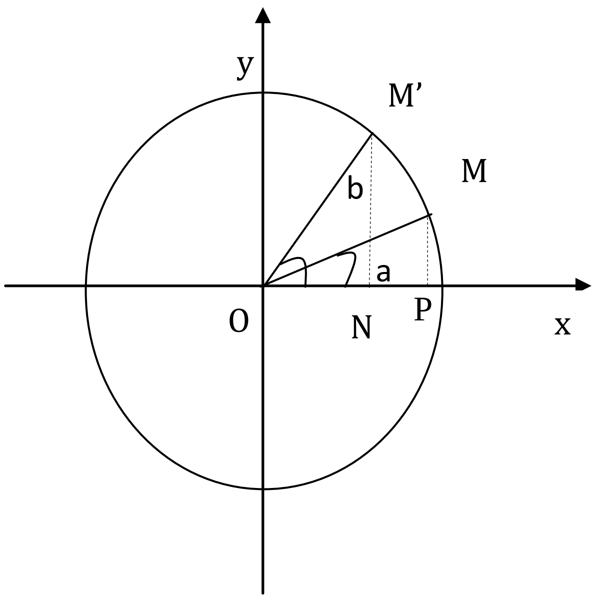
Exemples :

22° et 68° $\frac{\pi}{3} \; et \; \frac{\pi}{6}$

2. *Relations*

Les angles a et b étant complémentaires, on a ; $a : b = \frac{\pi}{2} - a$

Les triangles POM et NOM étant rectangles isométriques, on a :



$\overline{\mathrm{PM}} = \overline{ON} \; et \; \overline{\mathrm{OP}} = \overline{NM}'$

Or $\overline{PM} = \sin a \; . \overline{OP} = cos \; a$

$\overline{ON} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos b$

$sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin b$

$\sin a = \overline{PM} = \overline{ON} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$

En résumé:

$$\begin{array}{|l|}\hline \text{Sin}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos a \\ \text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin a \\ \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\text{cotg}\, a \\ \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\text{tg}\, a \\ \hline\end{array}$$

c. **Angles anti-complémentaires**

1. *Définition*

On appelle angles anti-complémentaires, deux angles dont la différence de mesures en valeur absolues est $\frac{\pi}{2}$ à $2k\pi \quad près$.

Ainsi deux angles de mesures respectives $\propto$ et β sont anti-complémentaires si et seulement si :

$$|\propto - \beta| = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad (k \in \square)$$

Exemple :

$\frac{\pi}{6}\ et\ \frac{2\pi}{3}$ $\qquad$ $\frac{\pi}{3}\ et\ \frac{5\pi}{6}$

2. ***Relations***

Soient a et b les mesures respectives de deux angles anti-complémentaires. On a :

$|b - a| = \frac{\pi}{2}\ ou\ b = \frac{\pi}{2} + a$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = sin\left[\frac{\pi}{2}-(-a)\right] = \cos(-a) = cos\ a$

$cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = cos\left[\frac{\pi}{2}-(-a)\right] = \sin(-a) = sina$

$= -sina$

d. Angles Supplémentaires

1. ***Definition***

On appelle angles supplémentaires, deux angles dont la somme de mesures égale π à $2k\pi$ près.

Ainsi, deux angles de mesures respectives $\alpha \; et \; \beta$ sont supplémentaires si est seulement si :

$$\alpha + \beta = \pi + 2k\pi \qquad\qquad (k \in \ )$$

Exemples :

60° et 120° $\qquad\qquad \frac{\pi}{6} \; et \; \frac{5\pi}{6}$

2. Relations

Soient a et b les mesures respectives de deux angles supplémentaires, on a :

$b = \pi - a$

Les triangles C’OM et COM étant rectangles isométriques, on a :

$\overline{OC'} = -\overline{OC} \; et \; \overline{CM} = \overline{C'M'}$

Or $\overline{OC'} = cosa \;\; et \;\; \overline{OC'} = cosb$

$\overline{CM} = sina \;\; et \;\; \overline{C'M'} = sinb$

D’où $\cos(\pi - a) = -cosa \;\; et \;\; \sin(\pi - a) = sina$

En résumé :

$\sin(\pi - a) = sina \; tg(\pi - a) = -tga$
$\cos(\pi - a) = -cosa \; cotg(\pi - a) = -cotga$

e. Angle anti – supplémentaires

1. Définition

On appelle angle – supplémentaires, deux angles dont différence de mesures en valeur absolue est égale à π . $\dot{a}$2kπ près.

Ainsi deux angles ∝ et β sont anti – supplémentaires si et seulement si :

$$|\propto - \beta| = \pi + 2k\pi \qquad (k \in \square)$$

Exemple : 30° et 210° $\frac{4\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{3}$

2. Relation

Soient a et b les mesures respectives de deux angles anti – supplémentaires, on a : b – a = π ou b = π + a

Sin (+a) = sin [π - (-a)] = sin (-a) = -sin a

Cos (π + a) = cos [π - (-a)] = -cos (-a) = -cos a

En résumé:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Sin}\,(\pi + a) = -\sin a \\ \text{Cos}\,(\pi + a) = -\cos a \\ \text{tg}\,(\pi + a) = \text{tg}\,a \\ \text{cotg}\,(\pi + a) = \text{cotg}\,a \end{array}}$$

II. REDUCTION AU PREMIER QUADRANT

Une importance application des formules d’angles associés est l’expression des rapports trigonométriques d’un angle quelconque supérieur à $\frac{\pi}{2}$ en fonction des R.T d’un angle associé du premier quadrant. Cette opération est appelée réduction au premier quadrant.

Envisageons les trois cas suivants :

1er cas : L'angle a est dans le 2ème quadrant. La réduction se fait à l'aide des formules d'angles supplémentaire ou anti – complémentaires.

Exemple :

$$\text{Cos}\,\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\text{Sin}\,\frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$

2ème cas : L'angle est dans le troisième quadrant. La réduction se fait à l'aide de formules d'angles anti – supplémentaires.

Exemple

$$sin\frac{8\pi}{7} = sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = -\sin\frac{\pi}{7}$$

3ème **cas** : L'angle a est dans le quatrième quadrant. La réduction se fait à l'aide des formules d'angles opposés.

Exemples :

$$\text{Cos}\,\frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{3}$$

Cos320° = cos (360° - 40°)

= cos (- 40°)

= cos 40°

Remarque :

Si l'angle à réduire au premier quadrant est supérieur à 2π, on retranche de l'angle donné autant de fois que possible pour se retrouver dans l'un des cas précédents.

Exemple :

Sin 1862° = sin (5.360° + 62°) = sin 62°

Sin $\frac{20\pi}{3} = \cos\left(3.2\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Exercices sur chapitres 3.

1. Calculer :

a) Cos $\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$
b) Cos $\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$
c) Sin $\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$
d) Cos $\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$
e) tg $\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

2. Simplifier

01. Sin $\left(\pi + \frac{3\pi}{2} + x\right)\cos(3\pi - x)tg\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right)$

02. $\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \pi\right) tg(2\pi - x)\sin\frac{2\pi}{2} - \cos\frac{4\pi}{3} tg(7\pi - x)$

03. $\cos(20\pi - x)\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\sin(x - 2\pi) - cos(+x)cotg\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)$

04. $\frac{\sin(90°+x)\cos(270°+x)\sin(90°-x)\sin(x-270°)}{\sin(180°+x)\cos(180°-x)\cos(90°+x)\cos(180°-x)}$

05. tg(270° - x) sin(180°+x).cos(540°- x).cos(90°+x)

06. $\mathrm{cotg}(\frac{\pi}{2} - x)\ tg(\frac{\pi}{2} + x)\ \cos(\pi - x)\ \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)$

07. $\frac{\sin(90°+x)\cos(270°+x)}{\sin(180°+x)\cos(180°-x)} - \frac{\sin(90°-x)\cos(x-270°)}{\cos(90°+x)\cos(180°-x)}$

3. Vérifier les identités suivantes

01. $\mathrm{tg}^2(\pi + x)\ \sec^2\left(\frac{5\pi}{3} - x\right) - sin^2 x cose\,c\left(x - \frac{5\pi}{3}\right) = 1$

02. $\frac{sin^2(\pi-2)}{1+\sin\left(a-\frac{\pi}{2}\right)} = 1 + \cos(2\pi + a)$

03. $\frac{sec^2(-a).cot^2(\pi+a)}{tg\,(2\pi a)}\frac{cotg\ (0{,}5\pi-a)}{cose\,c^2(0{,}5\pi+a)} = cosec^2(2\pi - a) - 1$

04. Réduire au premier quadrant les arcs : 150°, 2520°, 3200gr. $\frac{11\pi}{4}$

05. Calculer en fonction des R.I, de l'arc a ceux des arcs :

$5\pi + a,\ a - \frac{5\pi}{2}, \frac{13\pi}{2} + a, -\frac{7\pi}{2} - a$

06. Calculer la valeur de : $\sin^2 36° + \sin^2 54° + \sin^2 18° + \sin 72° =$

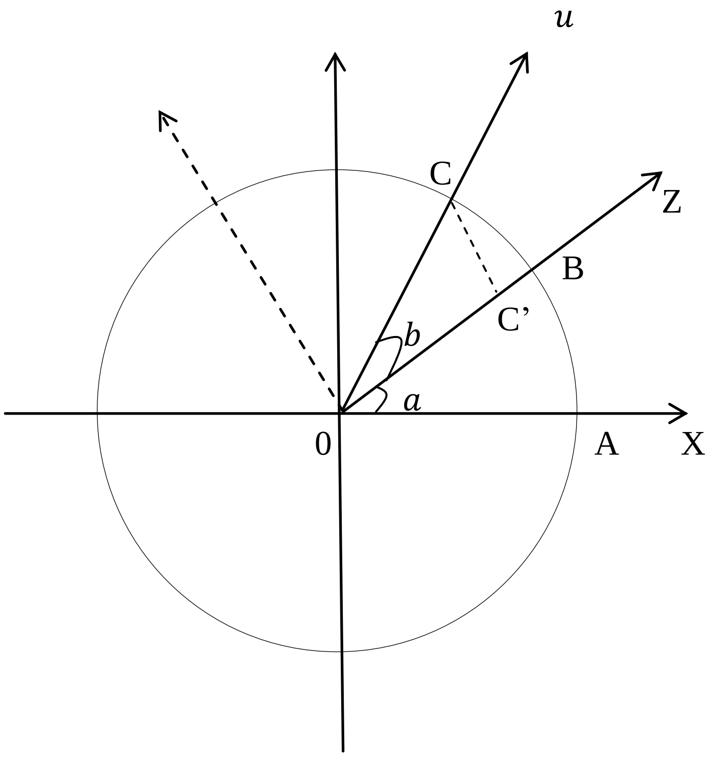
07. Calculer les nombres trigonométriques des angles suivants :

$135°, \frac{5\pi}{4}, \frac{17\pi}{6}, \frac{53\pi}{6}, -\ \frac{25\pi}{6}$

CHAPITRE IV. LES GRANDES FORMULES DE LA TRIGONOMETRIQUE

I. ADDITION ET SOUSTRACTION DES ARCS

a. Calcul de cos (a+b)



AÔB = a :   BÔC = b: AÔC = a+b

Projetons OC sur OZ pour avoir C' tel que dans le triangle rectangle OCC',

On ait :

$$\overline{OC'} = \cos b \quad et \quad \overline{CC'} = \sin b$$

Considérons l'égalité vectorielle $\overline{\mathrm{OC}} = \overline{\mathrm{OC'}} + \overline{\mathrm{CC'}}$ et projetons-la orthogonalement sur l'axe OX.

$$\overline{OC}\cos(\overline{ox}.\overline{oc}) = \overline{oc'}\cos(\overline{ox}.\overline{oc}) + \overline{cc'}\cos(\overline{ox}.\overline{cc'})$$

Cos (a+b) = cosb.cos a + sinb.cos$\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$

= cosa cosb + sinb.sin(-a)

$$\boxed{Cos\ (a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b} \qquad (1)$$

Exemple :

Calculer $\cos\frac{13\pi}{12}$

$$\cos\frac{13\pi}{12} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)$$

b. Calcul de cos (a-b)

Cos(a-b) = cos $[a + (-b)]$

=cosa cos(-b) – sina sin(-b)

$$\boxed{\text{Cos }(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b} \qquad (2)$$

c. Calcul de sin(a + b)

Sin(a + b) = $\cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right]$

= $\cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right]$

= $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b$

= $\sin a \cos b + \cos a \sin b$

$$\boxed{\text{Sin}(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin \text{b}} \qquad (3)$$

d. Calcul de sin(a- b)

$\sin(a - b) = \sin[a + (-b)]$

= $\sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b)$

= $\sin a \cos b - \cos a \sin b$

$$\boxed{\text{Sin}(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b} \qquad (4)$$

e. Calcul de tg(a + b)

$$tg\ (a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$

$$= \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

Divisons les deux termes de cette fraction par cos*b* ; il vient :

$$\boxed{\operatorname{tg}(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tgatgb}} \qquad (5)$$

Exemple :

Calculer tg 75°

$$\text{tg } 75° = \text{tg}(45° + 30°)$$

$$= \frac{tg\ 45° + tg\ 30°}{1 - tg\ 45°\ tg\ 30°}$$

$$= 2 \pm \sqrt{3}$$

f. Calcul de tg (a - b)

$$\text{tg}(a - b) = \text{tg}[a + (-b)]$$

$$= \frac{tg\,(a) + tg\,(-b)}{1 - tg\ a\ tg\,(-b)}$$

$$\boxed{\text{tg(a - b) b} = \frac{tga - tgb}{1 + tbatgb}} \qquad (6)$$

g. *Calcul de cotg(a+b)*

$$\text{cotg}(a + b) = \frac{1}{tg\ (a+b)}$$

$$= \frac{1 - tgatgb}{tga + tgb}$$

$$\boxed{\text{cotg}(a+b) = \frac{1 - tgatgb}{tga + tgb}} \qquad (7)$$

h. Calcul de cotg(a – b)

$$\text{cotg}(a - b) = \frac{1}{tg\ (a-b)}$$

$$= \frac{1 + tgatgb}{tga - tgb}$$

$$\boxed{\text{Cotg}(a - b) = \frac{1 + tgatgb}{tga - tgb}} \qquad (8)$$

II.MULTIPLICATION ET DIVISION DES ARCS

1. Multiplication des arcs

a) Multiplication par 2

(3)$\equiv \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Si a = b ⇒ $\boxed{\text{Sin } 2a = 2\sin a \cos a}$ (9)

(2) $\equiv \cos(a + b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Si a = b ⇒ $\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a}$ (10)

(5) $\equiv tg(a + b) = \frac{tga + tgb}{1 - tgatgb}$

Si a = b ⇒ $\boxed{\text{tg}2a = \frac{2tga}{1 - tg^2 a}}$ (11)

b) Multiplication par 3

b.1

$\sin 3a = \sin (2a + a)$

$= \sin 2a \cos a + \cos 2a \sin a$

$= \sin 2a \cos a + (\cos^2 a - \sin^2 a) \sin a$

$= 3\sin a - 4\sin^3 a$

$$\boxed{\sin 3a = 3 \sin a - 4 sin^3 a} \qquad (12)$$

b.2. $\cos 3a = \cos(2a + a)$

$= \cos 2a \cos a - \sin 2a \sin a$

$= (\cos^2 a - \sin a) - 2\sin a \cos a \sin a$

$= 4\cos^3 a - 3\cos a$

$$\boxed{\cos 3a = 4\cos^3 a - 3cos^3 a} \qquad (13)$$

b.3. *tg(a+b+c)* = $tg[(a+b)+c]$

$= \frac{tg\,(a+b)+tgc}{1-tg\,(a+b)tgc}$

$$\boxed{tg(a+b+c) = \frac{tga\ +tgb\ +tgc\ -tgatgbtgc}{1-tgatgb-tgatgc\ -tgbtgc}} \qquad (14)$$

Pour a = b = c = tg$[(a+b)+c]$

$tg3a = \frac{3tga-tg^3 a}{1-3tg^2 a}$ (15)

2. Division des arcs

a. Division d'un arc par 2

a) Sin$a$ = sin2$\left(\frac{a}{2}\right)$

$= 2\sin\ \frac{a}{2}\ \cos\ \frac{a}{2}$

$$\boxed{\sin a = 2sin\frac{a}{2}cos\frac{a}{2}} \qquad (16)$$

$\cos a = \ \cos 2\ \left(\frac{a}{2}\right)$

$= cos^2\ \frac{a}{2} - sin^2\frac{a}{2}$

$$\boxed{\cos a = \ \cos^2\frac{a}{2}\ \sin^2\ \frac{a}{2}} \qquad (17)$$

$$tga = tg2\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$= \frac{2tg\,\frac{a}{2}}{1-tg^2\frac{a}{2}}$$

$$\boxed{tga = \frac{2tg\,\frac{a}{2}}{1 - tg^2\,\frac{a}{2}}} \qquad (18)$$

b. *Calcul de sin $\frac{a}{2}$, cos $\frac{a}{2}$ et tg $\frac{a}{2}$*

Sachant que $cos^2\frac{a}{2}+ sin^2\frac{a}{2} = 1$ *et* $cos^2\frac{a}{2} - sin^2\frac{a}{2} = cosa$

$cos\,a = cos^2\frac{a}{2}sin^2\ \frac{a}{2}$. *on a le système:*

$$\begin{cases} \mathrm{Cos}^2\ \frac{a}{2} + sin^2\ \frac{a}{2}\ = 1 & (i) \\ cos^2\frac{a}{2} - \ sin^2\frac{a}{2} = cosa & (ii) \end{cases}$$

(i)+(ii) $\Rightarrow$ $\boxed{2cos^2\ \frac{a}{2} = 1 + \cos a} \qquad (19)$

(i) (ii) $\Rightarrow$ $\boxed{2\ sin^2\ \frac{a}{2} = 1 - \cos a} \qquad (20)$

$$\left.\begin{array}{l} (19) \Rightarrow \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\ a}{2}} \\ (20)\ \Rightarrow\ sin\ \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\ a}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{tg\ \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 -\ \cos\ a}{1 -\ \cos a}}} \qquad (21)$$

c. *Calcul de tg$\frac{a}{2}$ en fonction de sin a et cos a*

$$tg\,\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{a}{2}}{2\cos\frac{a}{2}\sin\frac{a}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{a}{2}}{\sin\,a} = \frac{1-\cos a}{\sin\,a}$$

$$\boxed{tg\,\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{\sin a}} \qquad (22)$$

$$\text{tg}\frac{a}{2} = \frac{sin\frac{a}{2}}{cos\frac{a}{2}} = \frac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{2cos^2\frac{a}{2}} = \frac{\sin\,a}{1+\cos\,a}$$

$$\boxed{tg\,\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1+\cos a}} \qquad (23)$$

d. *Calcul de sin a et cos a en fonction de tg $\frac{a}{2}$*

1° *sin a = 2sin* $\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$

$$= \frac{\boldsymbol{2\,sin\frac{a}{2}cos\frac{a}{2}}}{\boldsymbol{cos^2\frac{a}{2}+sin^2\,\frac{a}{2}}}$$

En divisant les deux termes de la fraction cos² $\frac{a}{2}$, il vient

$$\boxed{\sin a = \frac{2tg\,\frac{a}{2}}{1+tg^2\,\frac{a}{2}}} \qquad (24)$$

2° cos a = cos² $\frac{a}{2}$ $- sin^2\,\frac{a}{2}$

$$= \frac{cos^2\,\frac{a}{2} - sin^2\frac{a}{2}}{cos^2\,\frac{a}{2} + sin^2\,\frac{a}{2}}$$

En divisant les deux termes de la fonction par $\cos^2 \frac{a}{2}$, il vient

$$\boxed{\cos a \quad \frac{1 - tg^2 \frac{a}{2}}{1 + tg^2 \ \frac{a}{2}}} \qquad (25)$$

III. TRANSFORMATION D'EXPRESSIONS TRIGONOMETRIQUE

Nous savons que :

$\sin(\ a + b) = \sin a \cos a + \cos a \sin b \quad (1)$

$\sin(\ a - \ b) = \sin a \cos b - \ \cos a \sin b \quad (2)$

$\cos(\ a + b) = \cos a \cos b - \ \sin a \sin b \quad (3)$

$\cos(\ a - b) = \cos a \cos b + \mathrm{sina} \sin b \quad (4)$

1. *Transformation de produits en sommes*

(1) + (2) $\Rightarrow 2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$

$$\boxed{\sin a \cos b \ = \ \frac{1}{2}\ [\sin(a + b) + \sin(a - b)]} \qquad (26)$$

(2) + (4) $\Rightarrow 2 \cos a \cos b \ = \cos(a + b) + \cos(a - b)$

$$\boxed{\cos a \cos b \ = \ \frac{1}{2}\ [\cos(a + b) + \cos(a - b)]} \qquad (27)$$

(4) - (3) $\Rightarrow 2 \sin a \sin b = \cos(\ a - b) - \cos(a + b)$

$$\boxed{\sin a \sin b \ = \ \frac{1}{2}\ [\ \cos(a - b) - \ \cos(a + b)]} \qquad (28)$$

2. *Transformation de sommes en produits*

$$a + b = p \quad et \quad a - b = q \qquad \Rightarrow a = \frac{p+q}{2}$$

$$b = \frac{p-q}{2}$$

(1) +(2) $\Rightarrow$ $$\boxed{\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\ cos\frac{p-q}{2}} \qquad (29)$$

(1) - (2) $\Rightarrow$ $$\boxed{\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\ sin\frac{p-q}{2}} \qquad (30)$$

(3)+(4) $\Rightarrow$ $$\boxed{\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\ cos\frac{p-q}{2}} \qquad (31)$$

(3)-(4) $\Rightarrow$ $$\boxed{\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\ sin\frac{p-q}{2}} \qquad (32)$$

Exemple :

Transformer en produit :

01. $cos3a + \cos 4a = 2cos\frac{7a}{2}\cos\left(-\frac{a}{2}\right)$

$= 2cos\frac{7a}{2}\cos\frac{a}{2}$

02. $Sin\ 3a + \sin 5a + 2\sin 4a = (\sin 3a + \sin 5a) + 2\sin 4a$

$= 2\sin 4a\cos(-a) + 2\sin 4a$

$= 2\sin 4a\cos a + 2\sin 4a$

$= 2\sin 4a\,(1 + \cos a)$

$= 4\sin 4a\ cos^2\ \frac{a}{2}$

03. *Démontrer que*

$$sin^4\ \frac{\pi}{8} + sin^4\frac{\pi}{8} + sin^4\frac{5\pi}{8} + sin^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$$

Nous remarquons que :

$$\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}=\pi\ et\ \ \frac{3\pi}{8}+\ \frac{5\pi}{8}=\pi$$

$\Rightarrow$ *Les angles* $\frac{\pi}{8}$ *et* $\frac{7\pi}{8}.\frac{3\pi}{8}$ *et* $\frac{5\pi}{8}$ *sont supplémentaires deux à deux*

$\Rightarrow sin\ \frac{\pi}{8}=\sin\frac{7\pi}{8}\ et\sin\frac{3\pi}{8}\ et\ sin\frac{5\pi}{8},\ \ on\ a$:

$$sin^4\frac{\pi}{8}+sin^4\frac{3\pi}{8}+sin^4\frac{5\pi}{8}+sin^4\frac{7\pi}{8}=2sin^4\frac{\pi}{8}+2sin^4\frac{3\pi}{8}$$

$$=2\ \left(sin^4\frac{\pi}{8}+sin^4\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$=2\ \left[\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2}\right)^2\right]$$

$$=2\ \left(\frac{1-2\cos\frac{\pi}{4}+cos^2\frac{\pi}{4}}{4}+\ \frac{1-2\cos\frac{3\pi}{4}+\cos^2\frac{3\pi}{4}}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ 1-2\frac{\sqrt{2}}{2}+\ \frac{2}{4}+1+2\frac{\sqrt{2}}{2}+\ \frac{2}{4}\right)$$

$$=\frac{3}{2}$$

Autrement $\frac{\pi}{8}$ et $\frac{3\pi}{8}$ sont complémentaires

$$=2\ \left(sin^4\frac{\pi}{8}+sin^4\frac{3\pi}{8}\right)=2\ \left(sin^4\frac{\pi}{8}+cos^4\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=2\ \left[\left(sin^2\frac{\pi}{8}+cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2-2\ sin^2\frac{\pi}{8}\ cos^2\frac{\pi}{8}\right]$$

$$=\left[2-4\left(\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\right)^2\right]=2-\left(2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\ \right)^2$$

$$=2-sin^2\frac{\pi}{4}$$

$$= 2 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

04. Démontrez que si M sin B = *n sin* (2A + B) on a aussi *cotg*(*A* + *b*) = $\frac{m-n}{m+n}$ *cotgA*

En effet m a : $\frac{m}{n} = \frac{\sin(2A+B)}{\sin B} \Leftrightarrow \frac{m-n}{m+n} = \frac{\sin(2A+B)-\sin B}{\sin(2A+B)+\sin B}$

$$\frac{m-n}{m+n} = \frac{\cos(A+B)\sin A}{2\sin(A+B)\cos A}$$

$$= \text{cotg}\,(A + B)\, tgA$$

$$\Rightarrow cotg\,(A + B) = \frac{m-n}{m+n}\, cotgA$$

Exercices sur le chapitre 4

01. Trouver les N.T (nombres trigonométriques) de 15°

02. Calculer :

a) Sin 10° cos20° + cos10° sin20°
b) Cos 10° cos70° + sin10° sin70°

03. On donne $tga = \frac{n}{n+1}$ $et\ tgb = \frac{1}{2n+1}$

Calculer *tg(a+b*)

04. Simplifier les expressions :

a) $cos^2(a+b) + cos^2(a-b) - cos2acos2b$
b) $\frac{sina + 2sin3a + sin5a}{sin3a + 2sin5a + sin7a}$
c) $\frac{cos2 - cos4a}{cos2 + cos4a}$

05. Calculer :

a) $3 - 4cos2a + cos4a$

b) $\frac{(1-a^2)sin\,2x-2acos\,2x}{sinx-acosx}$

06. Démontrer :

a) $\frac{sin\,2a}{1-cos\,2a}\,\frac{sina}{1-sina} = tg\left(45° + \frac{a}{2}\right)$

b) $sin2a = \frac{2}{tga\ + cotga}$

07. Soit *tg(a+b)=m, tg(a+c)=n, tg(b+c)=p*

Calculer *tg2a* en fonction de *m, n et p.*

08. Montrer que chacune des expressions suivantes est indépendante de *x* :

a) $sinx + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$

b) $cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

09. Démontrer les identités suivantes :

a) $\frac{sin\,2a}{1+cos\,2a} . \frac{cosa}{1+cosa} = tg\,\frac{a}{2}$

b) $\frac{cotg^{\,2}a-1}{cotg^{\,2}a+1} = cos2a$

c) $\frac{1-sin2a}{1+sin2a} = tg^2\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$

d) $\frac{1-tg^{\,2}\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}{1+tg^{\,2}\left(\frac{\pi}{4}-a\right)} = sin2a$

10. On donne :

$$sina = \frac{5}{13}\ et\ cosa < 0$$
$$cosb = \frac{3}{4}\ et\ sinb > 0$$

Calculer sin(a+b) et cos(a+b)

11. Résoudre les équations suivantes :

a) $x^2 - \frac{1}{tga}x - \frac{1}{4} = 0$
b) $sinacosax^2 - x + sinacosa = 0$

12. On donne :

a) $\sin(a+b) = \frac{21}{29}\ et \cos(a+b) < 0$
b) $sina = \frac{4}{5}\ et\ cosa < 0$

Calculer sin b et cos b

13. Si A et B sont des angles tels que $tga = \frac{1}{5}\ etA + B = 135°$, calculer B.

14. Si a, b, c, sont des angles d'un triangle, démontrer que $tga + tgb. tga + tgb + tgc = tgatgbtgc$

15. Transformer en produit :

a) Sin2a+sin6a
b) Cosa+cos4a
c) $sin3asin4a - 2cos\frac{a}{2}sina$
d) $sin3a + sin5a + 2sin4a$
e) $1 + 2cos2a + cos4a$
f) $cos^2a - cos^2 2a$
g) $sin4a + 2sin3a(cos3 + cosa)$

16. Transformer en somme :

a) $2cosa\ cos3$
b) $4sina\ sin5$
c) $\sin(b - 2a)\cos(a - 2b)$

17. Si a, b sont les mesures en radian des angles aigues d'un triangle rectangle, démontrer que :

a) $sin2a + sin2b = 2\cos(a - b)$

b) $cosa - cosb = \sqrt{2}sin\frac{(b-a)}{2}$

c) $(tga + tgb)cos^2b = 1$

18. Montrer que $\frac{cos^2a - cos^2b}{\sin(a+b)} = \sin(b - a)$

19. Vérifier les identités suivantes :

a) $\sin(a+b).\sin(a-b) = sin^2a - sin^2b = cos^2b - cos^2a$

b) $\cos(a+b).\cos(a-b) = cos^2a - sin^2b = cos^2b - sin^2a$

20. Calculer les N.T. de l'arc a + b + c, sachant que $sina = \frac{3}{5}, sinb = \frac{12}{13}, sinc = \frac{7}{25}$, et que les angles a, b et c sont aigus.

21. Calculer $tg(x - y)$ en fonction de tgx sachant que $4tgx = 5tgy$

22. Calculer $\cos(x+y)$, sachant que $sinx - siny = \propto \ et\ cosx + cosy = \beta$

23. Démontrer que l'expression : $sin^2x + sin^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$ est indépendante de x

24. Montrer que sin 10° sin 30° sin 50° sin 70° = $\frac{1}{16}$.

25. Montrer que cotg (x + 15°) – tg (x – 15°) =$\frac{4\cos 2x}{2\sin 2x+1}$

26. Simplifier :

a. $\frac{\sin 4a - \sin 2a}{\cos 4a + \cos 2a}$

b. $\frac{\sin 9a}{\sin 3a} + \frac{\cos 9a}{\cos 3a}$

c. $\frac{\cos 4a - \cos 2a - \sin a}{\sin 4a + \sin 2a + \cos a}$

d. $\frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{\sin(a+b) + \sin(a-b)}$

27. Démontrer :

a. Cos 20° - cos 40° = sin 10°

b. $sin\frac{7\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

c. $\sin 52° \sin 68° - \sin 47° \cos 77° - \cos 65° \cos 81° = \frac{1}{2}$

d. $\frac{\sin x \sin 2x + \sin 3x \sin 6x}{\sin x \cos 2x + \sin 3x \cos 6x} = tg5x$

28. Vérifier les identités :

a. $\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{tg\ x + tg\ y}{tg\ x - tg\ y}$

b. Sin $3x$ sin x = $\sin^2 2x - \sin^2 x$

c. $Sinx + 2sin2x + sin3x = 4sin\ 2x \cos^2\frac{x}{2}$

d. $\frac{1 - tg\ x}{1 + tg\ x\ cotg\ 2x} = \frac{\sin x}{\sin 2x}$

e. $\text{Cos}^2 x + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + cos^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$

f. $\frac{\sin 2x + \sin x}{1 + \cos x + \cos 2x} = tg\ x$

g. $\frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{\sin(x+y) + \sin(x-y)} = cotg\ x$

h. $4 \cos x \sin^3 x + \sin 4x = 2 \sin 2x \cos^2 x$

i. $\frac{1}{tg\ x + tg\ 3x} - \frac{1}{cotg\ 3x + cotg\ x} = cotg\ 4x$

j. $\frac{\sin x + 2\sin 2x + \sin 3x}{\sin 3x + 2\sin 4x + \sin 5x} = \frac{1}{2\cos 2x}$

29. Démontrer :

a. Sin $\frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{1}{4}$

b. Sin $\frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{12\pi}{24} = 16$

c. Sin $\frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \sin \frac{3\pi}{9} \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{3}{16}$

30. Sachant que cos $x = \frac{a}{b+c}$: $\cos y = \frac{b}{c+a}$: $\cos z = \frac{c}{a+b}$, démontrer que $tg^2 \frac{x}{2} + tg^2 \frac{y}{2} + tg^2 \frac{z}{2} = 1$

31. Soit A. B. C trois angles d'un triangle quelconque tels que ;
Sin $\left(A + \frac{B}{2}\right) = x \sin \frac{B}{2}. Démontrer\ que\ tg\ \frac{A}{2}\ tg\ \frac{c}{2} = \frac{x-1}{x+1}$

CHAPITRE V. INVERSION DES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

I. FONCTIONS *arc sin x, arc cos x*

a) *Fonction y = arc sin x*

Soit f(x)= sin x *où* $-\infty \prec x \prec +\infty$

$-1 \leq y \leq 1$

La fonction y = sin x est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *dans* $[-1,1]$

Nous pouvons donc trouver l’inverse de la fonction y=sin x

$y = \sin x \Rightarrow x = \arcsin y$

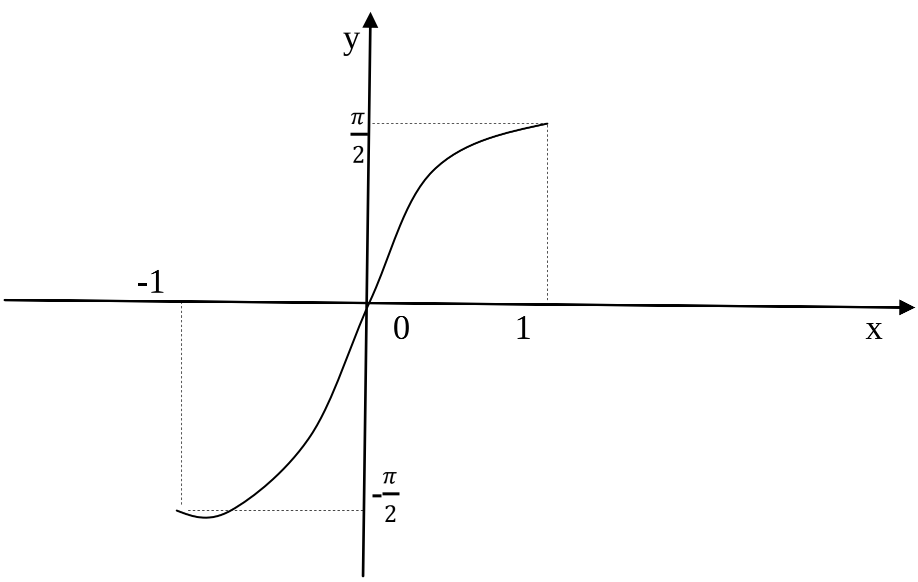
$$\int^{-1}(x) = \arcsin x$$

La fonction y = arc sin x définie de $[-1, 1]$ $vers$ $\left[-\frac{\pi}{2}.\frac{\pi}{2}\right]$ est l’inverse de la fonction y = sin x.

Graphique :

Tableau de variation de *y = arc sin x*

X	-1		0		1
f(x)	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}$



Propriétés

1. $-1 \leq x \leq 1$
2. $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
3. La fonction arc sin x est une fonction croissante.
4. La fonction arc sin x est une fonction impaire, c'est-à-dire arcsin(-x) = - arcsin$x$
5. Le graphique de la fonction arcsin$x$ coupe ox et oy à l'origine.
6. La fonction arc sin x est $\begin{cases} + \; si \; o \leq x \leq 1 \\ - \; si \; -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$

b) *La fonction arc cos x*

Soit la fonction f : $\mathbb{R} \rightarrow [-1.1]$
$x \longrightarrow f(x) = \cos x$

La fonction cos x est bijective de $[0.\pi]$ dans $[-1.1]$
On peut donc trouver l'inverse de la fonction y = cos$x$

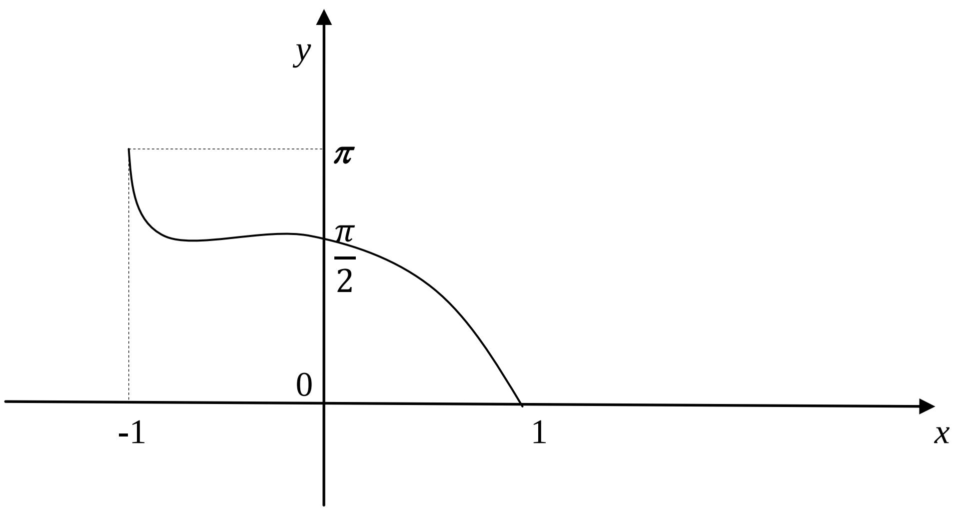
$y = \cos x \Rightarrow x = \arccos y$
$f'(x) = \arccos x$

La fonction $f : [-1.1] \longrightarrow [0.\pi]$
$x \rightarrow f(x) = arc \cos x$ *est la réciproque de la fonction* $y = \cos x$

Graphique

Tableau de variation de la fonction *y = arc cos x*

x	1		0		1
f(x)	π	↘	$\frac{\pi}{2}$	↘	0



Propriété

1. $-1 \leq x \leq 1$
2. $0 \leq y \leq \pi$
3. La fonction f(x) = arc*x* n'est ni paire ni impaire, c'est-à-dire arccos*(-x)* = π - arccos*x*.
4. Le graphique de y = arc *cosx* coupe *ox* au point (1,0) et *oy* au point (0, $\frac{\pi}{2}$)
5. La fonction y = arc cos x est positive, $\forall\, x \in [-1.1]$

c) la fonction y = arc tg x

Soit la fonction f : $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \rightarrow \mathbb{R}$

x ⟶ *f* (x) = *tg x*

La fonction y = tgx est bijective de $\left]\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *dans* $\mathbb{R}$

On peut donc trouver l'inverse de la fonction *y = tg x*

$y = tgx \;\Rightarrow arctgy$

$\int^{-1} = arctgx$

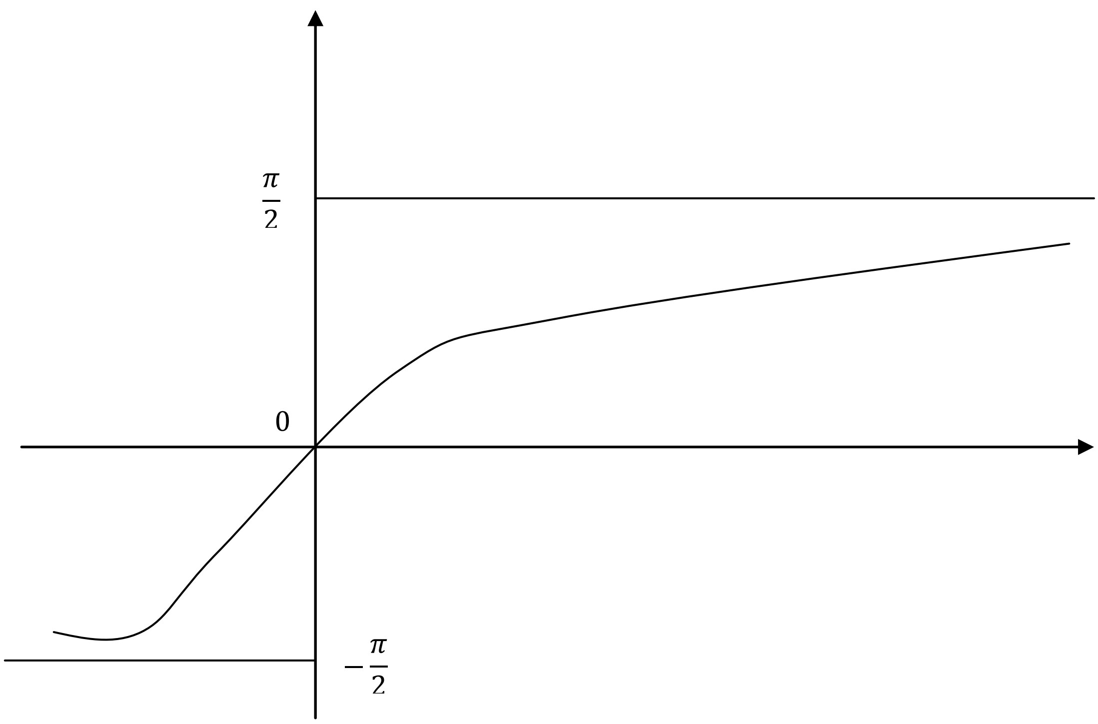
La fonction $f\mathbb{R} \;\rightarrow \left]\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$x \;\longmapsto f(x) = arctg\ x\ est\ l^{'}inverse$ de $f(x) = tgx$

Graphique

Tableau de variation de f(x) = arc tg x

X	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$



Propriétés

1) $-\infty \prec x \prec +\infty$

2) $-\frac{\pi}{2} \prec y \prec \frac{\pi}{2}$

3) $la\ fonction\ y = arc\ tgx\ est\ une\ fonction\ croissante$

4) La fonction y = arc tg x est une fonction impaire, c'est-à-dire

Arc tg (- x) = - arc tg x

5) Le graphique de la fonction y = arc tg x coupe ox et oy à l'origine des axes

6) Les droites $y = -\frac{\pi}{2}\ et\ y = \frac{\pi}{2}$ sont les asymptotes.

7) La fonction $y = arc\ tg\ x$ est

$$\begin{cases} +\ si\ 0\ \leq x \prec +\infty \\ -si - \infty \prec x \leq 0 \end{cases}$$

d) La fonction y = arc cotg x

Soit la fonction *f* : $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \int(x) = \cot gx$$

La fonction y= cotg x est bijective de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$. On peut trouver l'inverse de la fonction y = cotg x

$$y = cotg\ x\ \ \Rightarrow x\ arc \cot gy$$

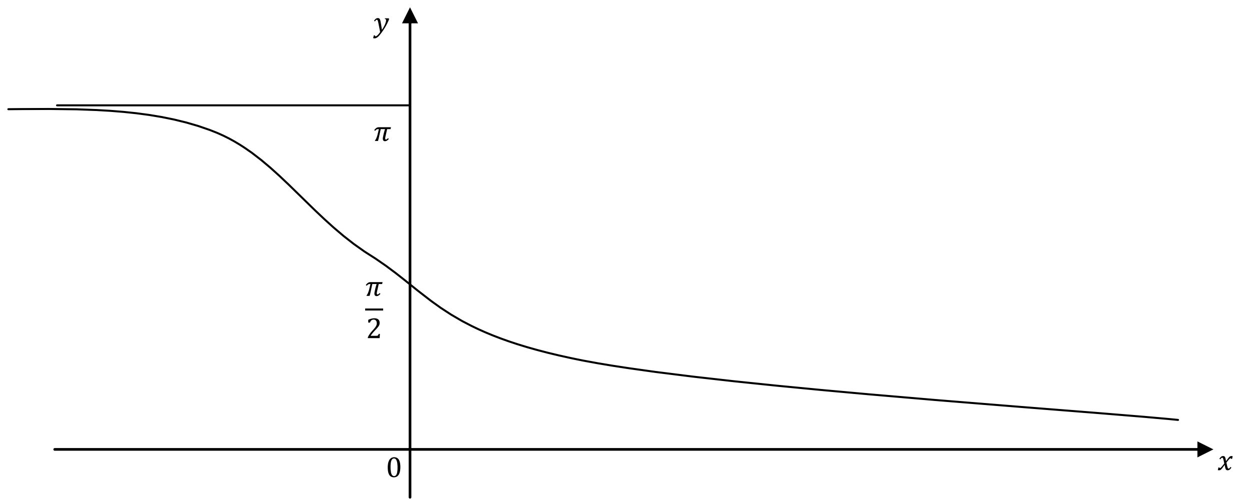
$$f^{-1}(x) = arccotgx$$

La fonction *f :* $\mathbb{R} \rightarrow]0, \pi[$

$x \longmapsto f(x) = arctgx$ est la réciproque de la $fonction\ y = \cot gx$

Graphique

X	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	π	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0



Propriétés

1) $-\infty \prec x \prec +\infty$

2) $0 \prec x \prec \pi$

3) La fonction y = arc cotg *x* n'est ni paire ni impaire, c'est-à-dire $arc\cot g\,(-x) = \pi - arc\ cotg\ x$

4) La fonction y = arc cotg *x* est une fonction décroissante.

5) Le graphique de la fonction y = arc cotg x cou pe oy au point $(0, \frac{\pi}{2})$

6) Les droites d'équation $y = \pi\ et\ y = 0$ sont les asymptotes

7) La fonction y = arc cotg x est positive, $\forall x \in \mathbb{R}$

II. OPERATIONS SUR LES RECIPROQUES DES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

a. *Formules*

1° *par définition sin(arc sin x) = x*

Cos(arccos x) = x

tg(arctg x) = x

cotg(arc cotg x) = x

2° sin(arc cos x)

Posons arccos$x$ = $\propto$ $\Rightarrow$ cos$\propto$ = x

$$\sin \propto = \pm\sqrt{1 - cos^2 \propto}$$

$$\Rightarrow \sin\propto = \pm\sqrt{1 - cos^2(\arccos \propto)}$$

$$= \pm\sqrt{1 - \propto^2}$$

$$\Rightarrow \sin(\text{arc } \cos x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Or $0 \leq arc\ cosx \leq \pi$

$$\Rightarrow \sin(arc\ cosx) = \sqrt{1 - x^2}$$

3° Cos (arc sin x)

Posons arc sin x = $\propto$ $\Rightarrow$sin $\propto$ = x

Cos $\propto = \pm\sqrt{1 - sin^2 \propto}$ $\Rightarrow \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \propto^2}$

cos $\propto = \pm\sqrt{1 - sin^2 \propto} \Rightarrow cos(arc\ sinx) = \pm\sqrt{1 - x^2}$

d'où $cos(arc\ sinx) = \sqrt{1 - x^2}$

Car $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$

4° tg(arc cotg$x$) = $\frac{1}{cotg(arc\ cotg\ x)}$

$= \frac{1}{x}$

5° cotg (arctg$x$) = $\frac{1}{tg\,(arctg\ x)}$

$= \frac{1}{x}$

6° tg($arsin$ x) = $\frac{\sin(\arcsin\ x)}{\cos(\arcsin\ x)}$

$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

7° cotg(arcsin x) = $\frac{\cos(\arcsin\ x)}{\sin(\arcsin\ x)}$

$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

8° tg(arc cos$x$) = $\frac{\sin(arc\ \cos\ x)}{\cos(arc\ \cos\ x)}$

$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

9° cotg(arc cos$x$) = $\frac{\cos(arc\ \cos\ x)}{\sin(arc\ \cos\ x)}$

$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

10° sin(arctg x) = cos(arctg x) tg(arctg x)

$= \frac{tg\ (arc\ tgx)}{\sec(arc\ tgx)}$

$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

11° sin(arc cotg$x$) = $\frac{\frac{1}{1}}{\sin(arc\ \cot\ g\ x)}$

$= \frac{1}{cosec\ (arc\ \cot\ gx)}$

$= \frac{1}{\sqrt{1+\cot g^2\,(arc\ \cot\ gx)}}$

$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

12° cos(arctgx) = $\frac{1}{\sec(arc\ tgx)}$

$= \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\ (arctgx\ )}} \quad = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

13° cos(arc cotg$x$) = sin(arc cotg$x$) cotg(arc cotg$x$)

$$= \frac{\cot g(arc \cot gx)}{cosec\,(arc \cot gx)}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

b. ***Formules d'addition***

1. $\forall x \in [-1,1]$, on a: arcsin x + arcos x = $\frac{\pi}{2}$

Posons :

Arcsin $x = \propto$, arc $cos\ x = \beta$ $\propto + \beta = \frac{\pi}{2}$, *il faut montrer que :*

sin$(\propto + \beta)$ = 1

$\propto + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(\propto + \beta) = 1$

Arc sin$x$ = arc cos$x$ = $\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin(\arcsin x + arc \cos x) = \sin\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ sin(arcsin$x$) cos(arc cos$x$) + cos(arc sin$x$) sin(arccos$x$) = 1

$xx + \sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow x^2 + 1 - x^2 = 1$

1=1

2. $\forall x \in$ □ , on a : *arctgx* + *arccotgx* = $\frac{\pi}{2}$ (*la preuve est laissée au lecteur*)

Exemples :

Vérifier,

Arcsin $\frac{4}{5} + arc \sin\frac{5}{13} + arc \sin\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ arc sin $\frac{4}{5} + arc \sin\frac{5}{13} = \frac{\pi}{2} - arc \sin\frac{16}{15}$

$\Rightarrow \sin\left(arc \sin\frac{4}{5} + arc \sin\frac{5}{13}\right) = sin\left(\frac{\pi}{2} - arc\ sin\ \frac{16}{65}\right)$

(1) (2)

(1) $\Rightarrow \sin\left(arsin\ \frac{4}{5}\right)\ cos\left(arc\sin\frac{5}{13}\right) + \cos\left(arc\sin\frac{4}{5}\right)\sin\left(arc\sin\frac{5}{13}\right)$

$$\Rightarrow \frac{4}{5}\sqrt{1-\frac{25}{169}} + \sqrt{1-\frac{16}{25}}.\frac{5}{13} = \frac{4}{5}.\frac{12}{13} + \frac{3}{5}.\frac{5}{13} = \frac{63}{65}$$

(2) $\Rightarrow \sin\frac{\pi}{2}\cos\left(arc\sin\frac{16}{25}\right) - \cos\frac{\pi}{2}\ \sin(arc\sin\frac{16}{25}$

$\Rightarrow 1\sqrt{1-\frac{256}{4225}} - 0 = \frac{63}{65}$ d’où (1)=(2)

Exercices sur le Chapitre 5.

1. *Vérifier:*

01. $arcsin\frac{5}{13} + arcsin\frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$

02. $arctg\frac{1}{3} + arctg\frac{1}{5} + arctg\frac{1}{7} + arctg\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

03. $arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + arccotg3 = \frac{\pi}{4}$

04. $arc\ cos\left(\frac{9}{\sqrt{82}}\right) + arc\ cosec\ \frac{\sqrt{41}}{4} = \frac{\pi}{4}$

05. $cos\left(2arctg\frac{1}{7}\right) = sin\left(4arc\ tg\ \frac{1}{3}\right)$

06. $arccosx + arccos\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right) = \frac{\pi}{3}$

07. $2arctg\left(-7+5\sqrt{2}\right) + arctg\ \frac{1}{3} = arctg\ \frac{1}{2}$

08. $arctg\frac{2a-b}{b\sqrt{3}} + arctg\ \frac{2b-a}{a\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$

09. $arctg5 + arctg\frac{1+5\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$

2. *Calculer*

01. $\frac{1}{2} - cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\ arcsin\frac{3}{5}\right)$

02. $sin\left(2arctg\frac{3}{4}\right) + tg\left(\frac{1}{2}arcsin\frac{5}{13}\right)$

03. $tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ arc\ cos\frac{a}{b}\right) + tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ arc\ cos\frac{a}{b}\right)$

04. $sin\left[arc\,sec\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

05. $cotg\left[arc\ tg\ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\ arc\ tg\left(-\sqrt{3}\right)\right]$

06. $Sin\left[arc\,sin\left(\frac{11}{13}\right)-\ arc\,sin\left(\frac{5}{7}\right)\right]$

07. $Sin\left[arc\,sin\,1-arc\,cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

08. $Cos\left[arc\ tg\ \left(\frac{15}{8}\right)-\ arc\,sin\left(\frac{7}{25}\right)\right]$

09. $Cos\left[arc\,sin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]+\ arc\,cos\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]+\ arc\,cos\left[tg\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

3. Prouver les égalités suivantes :

a. arc sin $\frac{12}{13}=arc\ cotg\ \frac{5}{12}$

b. arc cos $\frac{3}{4}=arc$ sin $\frac{\sqrt{7}}{4}$

c. 2arc cotg 7 + arc cos $\frac{3}{5}=arc\ cosec\ \frac{125}{117}$

d. Arc sin $\frac{4}{5}+\ arc\cos\frac{12}{13}+\ arc\sin\frac{16}{65}=\ \frac{\pi}{2}$

4. Vérifier les identités suivantes :

a. $\frac{\pi}{2}-\ arc\sin\frac{\sqrt{3}}{2}=arc\sin\frac{1}{2}$

b. $\arcsin\frac{1}{2} - arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right) = arc\,tg(-1)$

c. arc sin(-1) + arc cotg 1 = arc tg (-1)

d. $\sin\left(2\arcsin x\right) = 2x\sqrt{1-x^2}$

e. arc cos$x$ = 2arc sin $\frac{\sqrt{1-x}}{2}$

f. 2arc tg $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}\right) = arc\cos\frac{a-x}{a+x}$

g. arc sina – arc cosb = arc cos $\left(b\sqrt{1-a^2} + a\sqrt{1-b^2}\right)$

h. 3arc cos $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 2arc\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = arctg0$

i. arc tg$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + arc\,cotg\left(-\sqrt{3}\right) = -arc\sec(-1)$

5. Prouver les identités suivantes :

a. arc sin $\frac{77}{85} - arc\sin\frac{3}{5} = arc\cos\frac{15}{17}$

b. arc cotg $\frac{43}{32} - arc\,tg\,\frac{1}{4} = arc\cos\frac{12}{13}$

c. 2arc tg $\frac{1}{3} + arc\,\mathrm{tg}\frac{1}{7} = arc\sec\frac{\sqrt{34}}{5} + arc\,cosec\,\sqrt{17}$

d. arc sin $\frac{3}{5} + arc\sin\frac{15}{17} = arc\cos\left(-\frac{13}{85}\right)$

e. arc cos $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - arc\cos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3.}} = \frac{\pi}{6}$

f. arc tg$x$ = arc tg$\frac{x-y}{1+xy} + arc\,tg\,\frac{y-z}{1+yz} + arc\,tg\,z$

6. ***Résoudre les équations suivantes :***

a. $arc\ cotg\ x = \frac{\pi}{6}$

b. $2arc\ cotg2 + arc\ cos\frac{3}{5} = arc\ cos\ x$

c. $arc\ cos\frac{1-a^2}{1+a^2} - arc\ cos\frac{1-b^2}{1+b^2} = 2arc\ tgx$

d. $arc\ tgx + arc\ tg\ (1 - x) = 2arc\ tg\sqrt{x - x^2}$

e. $arc\ tg\ (x + 1) - arc\ tg(x - 1) = arc\ cotg\ 2$

7. $\boldsymbol{si\ a = arc\cos\frac{x}{a} + arc\cos\frac{y}{b}},$

Montrer que $sin^2\ a = \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos a + \frac{y^2}{b^2}$

8. a. Déterminer x sachant que $\sin\{\boldsymbol{2arc\ cos}[\boldsymbol{cotg}(\boldsymbol{2arc\ tgx})]\} = \boldsymbol{0}$

b. Déterminer $x\ si\ 2arc\ tg(\cos x) = arc\ tg(2\ cosecx)$

c. Soit $\sin(\pi\cos x) = \cos(\pi\sin x), montrer\ que\ 2x = arc\sin\frac{3}{4}$

CHAPITRE VI. LES TRIANGLES

PROPRIETES FONDAMENTALES DES TRIANGLES

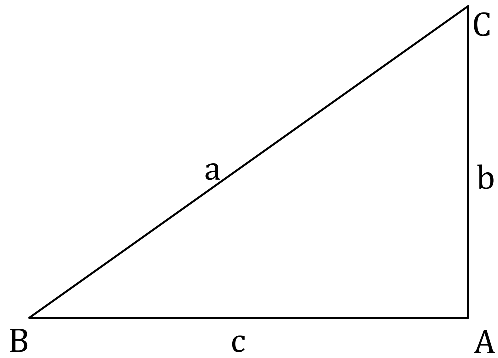
I. TRIANGLE

a. Propriétés fondamentales

Considérons un triangle A B C rectangle en A. désignons par a, b, c les mesures des côtés et par B, C les mesures des angles aigues. Par définition,

$sin\, B = \frac{b}{a}$ $\qquad$ $sin\, C = \frac{c}{a}$

$cos\, B = \frac{c}{a}$ $\qquad$ $cos\, C = \frac{b}{a}$



D’où, par voie de division :

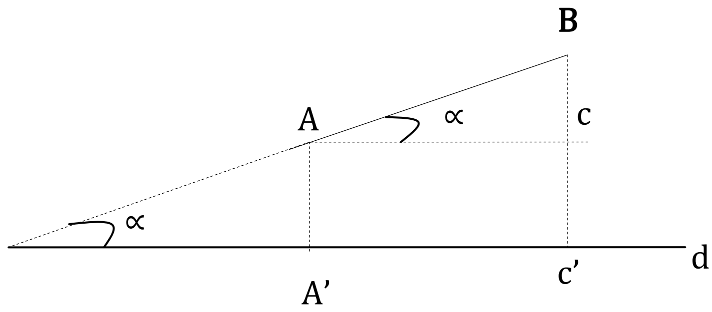
$$tg\ B = \frac{b}{c}, \qquad tg\ C = \frac{c}{b}$$

b. ***Conséquences :*** en résolvant les formules ci-dessus successivement par rapport à b et c, on trouve :

$$\boxed{\begin{array}{c} b = a \sin B = a \cos C = ctg\ B = c \cot gc \\ c = a \sin c = a \cos B = btgc = b \cot g\ B \end{array}}$$

*c. **Théorème 1***

La projection orthogonale d'un segment sur une droite est égale à ce segment multiplié par le cosinus de l'angle aigu qu'il fait avec la droite



En effet, si on mène AC parallèle à d, on peut écrire :

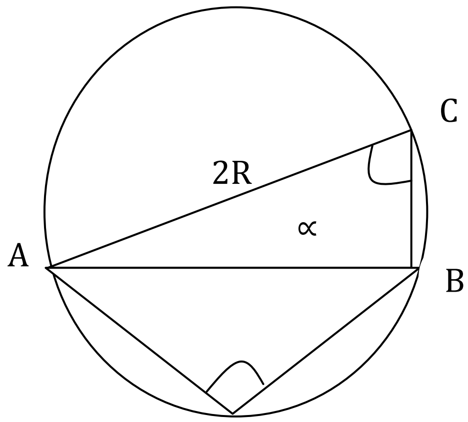
$\cos \propto = \frac{AC}{AB} = \frac{A^{'}C'}{AB}$; $d^{'}o$ù $\quad A^{'}B^{'}$ $\boxed{= AB\cos \propto}$

d. Théorème 2

Toute corde d'une circonférence est égale au diamètre de cette circonférence multiple par le sinus de l'angle inscrit dans l'un ou l'autre des arcs sous-tendus par la corde.

En traçant le diamètre AC et la corde BC, on obtient le triangle rectangle ABC.

$\sin \propto = \frac{AB}{2R}$; $\quad d'o$ù $\boxed{AB = 2R\sin \propto}$



II. TRIANGLE QUELCONQUE

a. *Notions*

Considérons un triangle ABC ; nous désignerons par a, b, s les mesures de ses côtés, par A, B, C celles de ses angles, par S celle de son aire et par R celle du rayon de la circonférence circonscrite. Nous établirons trois groupes de relations fondamentales entre ces éléments.

b. Théorème 1 (Règle des sinus)

Les côtés d'un triangle sont proportionnels aux sinus des angles opposés ; le facteur de proportionnalité est le diamètre de la circonférence.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Corollaire :

Deux côtés d'un triangle sont entre eux comme les sinus des angles opposés :

$$Ainsi : \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B'} ; \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C'} ; \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

c. Théorème 2 (règle du cosinus)

Le carré d'un côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés diminuée du double produit de ces côtés et du cosinus de leur angle.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

d. ***Théorème 3 (aire du triangle)***

L'aire d'un triangle est égale au demi-produit de deux côtés et du sinus de leur angle.

$$\boxed{\boldsymbol{S} = \frac{bcsinA}{2} = \frac{acsin\,B}{2} = \frac{absin\,C}{2}}$$

Note

a. En utilisant le théorème 3, les relations du théorème 2 s'écrivent :

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 4S\cot gA \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 4S\cot gB \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 4S\cot \mathrm{g}\,C \end{aligned}}$$

b. Le théorème 3 $\Rightarrow S = \frac{bc\sin A}{2} = \frac{ac\sin B}{2} = \frac{ab\sin C}{2}$

On a donc $S = \frac{bcsin\ A}{2}$

$$= \frac{2bc\sin\frac{A}{2}cos\frac{A}{2}}{2}$$

$$= bc\ sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

Nous savons que :

$$2sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A$$

$$= 1 - \frac{b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$= \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

Si l'on pose a + b + c = 2p (p : périmètre du triangle)

$a + b - c = 2(\mathrm{p} - \mathrm{c})$ et $a - b + c = 2(\mathrm{p} - \mathrm{b})$, alors on a :

$$2sin^2\frac{A}{2} = \frac{4(p-b)(p-c)}{2bc}$$

$$sin^2\frac{A}{2} = \frac{4(p-b)(p-c)}{2bc} \Rightarrow sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \qquad \text{(i)}$$

Et,

$$2cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A$$

$$=1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

Si l'on pose $a + b + c = 2\mathrm{p}$

et $b + c - a = 2(p - a)$, alors on trouve :

$$2cos^2\frac{A}{2} = \frac{4p(p-a)}{2bc}$$

$$cos^2\frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}$$

$$cos^2\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \qquad (ii)$$

(i) et (ii) dans (1) $\Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

Exercice

Etablir la même relation à partir du théorème 3 en utilisant les égalités restantes.

Travail Pratique

Calculer, en fonction des côtés a, b, c et des angles A, B, C d'un triangle ABC :

a) La longueur des hauteurs du triangle

b) La longueur des médianes du triangle

c) La longueur des bissectrices intérieures du triangle

Le rayon du cercle inscrit dans le triangle

Exemple :

01. Montrer qu'un triangle est équilatéral quand on a simultanément $\frac{b^3+c^3+a^3}{b+c-a} = a^2 \; et \sin B \sin C = \frac{3}{4}$

En effet :

$$\frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} = a^2 \Rightarrow b^3 + c^3 - a^3 = a^2b + a^2c - a^3$$

$$\Rightarrow b^3 + c^3 = a^2b + a^2c$$

$$\Rightarrow b^3 + c^3 = a^2(b + c)$$

$$\Rightarrow (b + c)(b^2 - bc + c^2) = a^2(b + c)$$

$$\Rightarrow b^2 - bc + c^2 = a^2 \qquad \textbf{(1)}$$

d'après *V12.C :* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, cosA$ **(2)**

(1) dans (2) $\Rightarrow b^2 - bc + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$\Rightarrow 2bc \cos A = bc$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{3} \qquad \textbf{(3)}$$

Par hypothèse, on a aussi

$\sin B \sin C = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 2 sinB \sin C = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \cos(B-C) - \cos(B+C) = \frac{3}{2} \ d'après \ IV.3.1 \ (28)$$

$$\Rightarrow \cos(B-C) - \cos(\pi - A) = \frac{3}{2}$$

$$\cos(B-C) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\cos(B-C) - cos\frac{2\pi}{3} = \frac{3}{2}$$

$$\cos(B-C) = 1 \Rightarrow B - C = 0 \Rightarrow B = C \qquad \textbf{(4)}$$

Dans tous triangles ABC, on a A + B + C = π $\Rightarrow \frac{\pi}{3} + B + C = \pi$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3} + 2B = \pi \ d'après \ (4)$$

$$\Rightarrow 2B = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow B = \frac{\pi}{3}$$

On a A = B = C = $\frac{\pi}{3}$ ⇒ le triangle ABC est équilatéral.

02. Montrer que dans le Δ ABC , on :

$$\frac{b-2a\cos C}{a\sin C} + \frac{C-2bcos\ A}{b\sin A} + \frac{a-2c\cos B}{c\sin B} = 0$$

En effet,

$$\frac{b-2a\ cosc}{a\sin c}+\frac{c-2b\cos A}{b\sin A}+\frac{a-2c\ cosB}{C\sin B}=\frac{b}{a\sin c}-\frac{2a\cos C}{a\sin c}+\frac{c}{bsin\ A}-\frac{2bcosA}{bsinA}+\frac{a}{C\sin B}-\frac{2c\cos B}{C\sin B}$$

$$=\frac{b}{a\sin C}-\frac{2\cos c}{sinC}+\frac{C}{b\sin A}-\frac{2\cos A}{\sin A}+\frac{a}{C\sin B}-\frac{2\cos B}{\sin B}$$

$$=\left(\frac{b}{a\sin C}+\frac{c}{b\sin A}+\frac{a}{c\sin B}\right)-\left(\frac{2\cos C}{\sin C}+\frac{2\cos A}{\sin A}+\frac{2\cos B}{\sin B}\right)$$

$$=\left(\frac{b^2}{ab\sin C}+\frac{c^2}{bc\sin A}+\frac{a^2}{ac\sin B}\right)-2\left(\frac{\cos C}{\sin C}+\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{2\cos B}{\sin B}\right)$$

$$=\left(\frac{b^2}{ab\sin C}+\frac{c^2}{bc\sin A}+\frac{a^2}{c\sin B}\right)-2\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2\text{ab}\sin C}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin A}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac\sin B}\right)$$

$$=\left(\frac{b^2}{ab\sin C}+\frac{c^2}{bc\sin A}+\frac{a^2}{c\sin B}\right)-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{\text{ab}\sin C}+\frac{b^2+c^2-a^2}{bc\sin A}+\frac{a^2+c^2-b^2}{ac\sin B}\right)$$

$$=\left(\frac{b^2}{2S}+\frac{c^2}{2S}+\frac{a^2}{2S}\right)-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2S}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2S}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2S}\right)$$

d'après IV.2.D

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{2S}-\frac{a^2+b^2+c^2}{2S}$$

$$=0$$

03. Même question que 02

$$\frac{a\ sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{b\ sin\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{c\ sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

04. Le triangle ABC est rectangle en A, calculer les angles

$$Si\ \frac{b-c}{b+c}=\frac{1}{2}$$

05. Montrer que dans le triangle ABC rectangle en A :

a. $\sec 2B - tg\ 2C = \frac{c+b}{c-b}$

b. $2bc = (b^2 - c^2)tg\ 2C$

06. Montrer que le triangle ABC est rectangle si on a :

a. $\sin A - \cos A = \cos B - \sin B$

b. $tg\ B = \frac{\cos(C-B)}{\sin A + \sin(C-B)}$

c. $\frac{\sin B}{\cos C} = \sin A + \cos A cotg\ B$

d. $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 0$

07. Calculer les angles du triangle ABC rectangle en A, si la surface vaut *105 et* $b^2 - c^2 = 210$

08. Dans un cercle de rayon R, on mène une corde AB=2n et les tangentes aux points A et B qui se coupent en C.
Calculer les angles et l'aire du triangle ABC en fonction de R et n

09. Montrer que dans un triangle quelconque, on a :

a. $b^2 \sin 2C + C^2 \sin 2B = 2bc \sin A$

b. $\frac{a^2 \sin(B-C)}{\sin B + \sin C} + \frac{b^2 \sin(C-A)}{\sin C + \sin A} + \frac{c^2 \sin(A-B)}{\sin A + \sin B} = 0$

c. $\frac{b-2a\cos C}{a \sin C} + \frac{c-2a\cos A}{b \sin A} + \frac{a\ -2\,\mathrm{ccos}\ B}{c \sin B} = 0$

d. $\frac{c^2+a^2-b^2}{c+b^2-a^2} = \frac{tg\ A}{tg\ B}$

e. $\frac{a \sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{b \sin\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{c \sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = 0$

f. $b\ \left(tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2}\right) + C\left(tg\frac{A}{2} + tg\frac{C}{2}\right) = 4R$

10. Si les angles d'un triangle sont tels que, $\sin \mathrm{A} - \sin \mathrm{B} = \sin \mathrm{B} - \sin \mathrm{C}$, on a $\cot g\ \frac{A}{2} - \cot g\ \frac{B}{2} = \cot g\ \frac{B}{2} - cotg\frac{C}{2}$

11. On donne, dans un triangle, la relation $b = 4c\ \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{A}{2}\right)$, démontrer les égalités $b = c\ (1 + 2\cos A),\ A = 2C$.

12. Démontrer que dans tout triangle ABC, on a :

   a. $sin^2B + sin^2C - sin^2A = 2\cos A\ \sin B\ \sin C$

   b. $cos^2B + cos^2C - cos^2A = 1 - 2\cos A \sin B \sin C$

   c. $\left(1 + \mathrm{tg}\frac{A}{4}\right)\left(1 + \mathrm{tg}\frac{B}{4}\right)\left(1 + \mathrm{tg}\frac{C}{4}\right) = 2 + \mathrm{tg}\frac{A}{4}\mathrm{tg}\frac{B}{4}\mathrm{tg}\frac{C}{4}$

13. La hauteur sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle divise l'hypoténuse en deux segments qui mesurent respectivement 13 cm et 15 cm. Calculer les côtés de l'angle droit de ce triangle.

14. On prolonge chacun des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, du côté de l'hypoténuse, d'une longueur égale à lui-même et on joint chaque extrémité de ces prolongements au sommet opposé au côté prolongé. Montrer que la somme des carrés de mesures de ces deux derniers segments égale 5 fois le carré de la mesure de l'hypoténuse.

15. Dans un cercle de diamètre mesurant 24cm, on considère une corde [AB]. De l'extrémité A, on abaisse la perpendiculaire au diamètre aboutissant à l'autre extrémité de la corde. Le pied H de la perpendiculaire est aux $\frac{2}{3}$ du centre du cercle. On construit ensuite le triangle rectangle en A inscrit au cercle dont un coté de l'angle droit est la corde [AB] et l'hypoténuse est le diamètre aboutissent en B. Calculer la mesure de la perpendiculaire [AH] et les mesures des côtés de l'angle droit.

CHAPITRE VII. EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

I. EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

1. Equations simples

a. Définition

On appelle équation simple, des équations de la forme :

$\sin x = a;$ $cosx = a,$ $tgx = a,$ $\cot gx = a$

b. Résolution

1. $sinx = a$

Tous les arcs *x* ayant sinus un nombre donné a sont :

$$\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} \quad où\ \alpha = \arcsin a$$

Solution :

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2k\pi \\ x = \pi - arcsina + 2k\pi \end{array}}$$

Exemple :

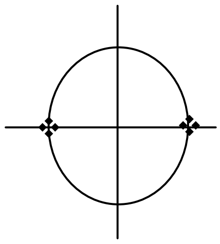
L'équation : $sinx = \frac{1}{2}$

On sait que $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

Solution

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ Ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

Cas particuliers :



a. $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

b. $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

c. $\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

2. $cos\, x = a$

Tous les arcs *x* ayant pour cosinus un nombre donné a sont :

$$x = \pm\alpha + 2k\pi \text{ } o\text{ù } \alpha = \pm \arccos a$$

D'où la solution : $\boxed{x = \pm \arccos a + 2k\pi}$

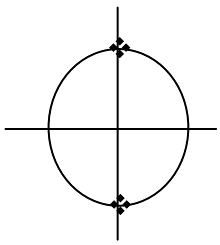
Exemple :

$$cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

Solution : $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

Cas particuliers :



a. $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

b. $cosx = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$

c. $cosx = -1 \Rightarrow x\pi + 2k\pi$

3. $tg\,x = a$

Tous les arcs *x* ayant pour tangente un nombre donné a sont :

$a = a + 2k\pi\ et\ x = \pi + a + 2k\pi$ où α $= arctga$

Ces deux familles peuvent être groupées en une seule car on peut remplacer les formues :

$$\left.\begin{aligned} a &= a + 2k\pi \\ \mathrm{x} &= a + (2k+1)\pi \end{aligned}\right\} \qquad par\ xa + k\pi$$

D'où la solution : $\boxed{x = arctga + k\pi}$

Exemple :

$$tgx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

On sait que : $arctg\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$$

4. $cotg\ x = a$

On a bien : $\boxed{x = arc\ cotga + k\pi}$

Exemple :

$$cotg\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$on\ sait\ que : arc\ cotg\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

2. *Equation de la forme* $\boldsymbol{A.B.C = 0}$.

Nous avons vu en algèbre qu'une équation de la forme A,B,C = 0 équivaut à A = 0 ou B = 0 ou C = 0.

Exemple :

Soit à résoudre les équations suivantes :

01. $\sin 3x + sinx = O \Leftrightarrow 2\sin 2x\, cosx = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0$

$$ou\ cosx = 0$$
$$\Rightarrow 2x = k\pi$$
$$ou\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \Rightarrow x = k\frac{\pi}{2}$$
$$ou\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

02. $\sin x + sin2x + sin3x = 1 + cosx + cos2x$

$$\Rightarrow \sin 2x + 2\sin 2x \cos x = 2\, cos^2 x + \cos x$$
$$\Rightarrow \sin 2x(1 + 2\cos x) = \cos x(1 + 2\cos x)$$
$$\Rightarrow (1 + 2cosx)(2\sin x \cos x - cosx) = 0$$
$$\Rightarrow cosx(1 + 2\cos x)(2\sin x - 1) = 0$$
$$\cos x = 0\ ou\ 1 + 2\cos x = O\ ou\ 2\sin x - 1 = 0$$
$$\cos x = 0, \quad 1 + 2\cos x = O, \quad 2\sin x - 1 = 0$$
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \cos x = \frac{-1}{2} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \text{ ou } \ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

03. $\sin 7x - \cos 4x = \sin x$

$$\Rightarrow \sin 7 - \sin x \cos 4x = 0$$
$$2\sin 3x \cos 4x - \cos 4x = 0$$
$$\cos 4x(2\sin 3x - 1) = 0$$
$$\cos 4x = 0\ \ ou\ \ 2\sin 3x - 1 = 0$$

$4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \sin 3x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \qquad 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$

$3x = \frac{5\pi}{8} + 2k\pi \qquad x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$

3. *Equations quelconques*

Méthode quasi générale : on tache d'exprimer tous les rapports trigonométriques figurant dans l'équation en fonction d'un seul. On est alors ramené à résoudre une équation algébrique par rapport au rapport trigonométrique restant.

Exemple :

Soit à résoudre les équations suivantes :

$01.\ 3\ cos^2x + 2sin^2x = \frac{11}{4} \Rightarrow 3(1 - sin^2x) + 2sin^2x\,\frac{11}{4}$

$\Rightarrow 3 - 3sin^2x + 2sin^2x = \frac{11}{4}$

$\Rightarrow -sin^2x = -\frac{1}{2}$

$sin^2x = -\frac{1}{4} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{2}$

a) $\sin x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2$

b) $\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

02. $2sin^2x + 4\sin x\cos x - 4\,cos^2x = 1$

$\Rightarrow 2sin^2x + 4sinxcosx - 4cos^2x - cos^2x - sin^2x = 0\ (cos^2x + sin^2x = 1)$

$\Rightarrow sin^2x + 4\sin xcos\,x - 5cos^2x = 0 \qquad /cos^2x$

$\Rightarrow tg^2x + 4tgx - 5 = 0$

$\Delta' = 4 + 5 = 9$

$\sqrt{\Delta'} = 3$

$$tgx = \frac{-2 \pm 3}{1} \begin{cases} tgx = 1 \\ tgx = 5 \end{cases}$$

a) $tgx = 1$ b) $tgx = -5$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $x = arctg(-5) + k\pi$

03. $cos^2x - sin^2x + tg^2x = \frac{5}{6}$

$\Rightarrow cos^2x - 1 + cos^2x + \frac{1-cos^2x}{cos^2x} = \frac{5}{6}$

$$\Rightarrow cos^2x = \begin{cases} 3/4 \\ 2/3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ $x = \pm\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} + k\pi$

4. *Equations classiques*

Soit à résoudre l'équation :$a\sin x + b\cos x = c(a.b.c \neq 0)$

1ère Méthode

On fait appel à un triangle auxiliaire.

L'équation peut s'écrire : $\sin x + \frac{a}{b}\cos x = \frac{c}{a}$

Posons $\frac{b}{a} = tga, elle\ devient\ \sin x + \frac{\sin \alpha}{2 \cos \alpha}\cos x\ \frac{c}{a} \Rightarrow \sin x \cos ax = \cos \alpha$

$\Rightarrow \sin(x + a) = \cos a$

Les solutions sont :

$$x + \alpha = \arcsin\left(\frac{c}{a}\cos x\right) + 2k\pi$$

et $$x + \alpha = \pi - \arcsin\left(\frac{c}{a}\cos \alpha\right) + 2k\pi$$

Exemple

Soit à résoudre l'équation :

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1 \Rightarrow \sin x - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sin x - tg\ \frac{\pi}{6}\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x \frac{\pi}{6}\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sin x \cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad \Rightarrow \qquad x = \pi + 2k$$

2ème Méthode

On exprime sin$x$ et cos$x$ en fonction de $tg\,\frac{x}{2}$. On sait en effet que les relations qui lient ces nombres trigonométriques sont rationnelles :

On a : $a.\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + b.\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 1$

Exemple :

Soit à résoudre l'équation :

$$2\sin x - \cos x = 1 \Rightarrow \frac{4tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}} - \frac{1-tg^2\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow 4tg\,\frac{x}{2} - 1 + tg^2\,\frac{x}{2} = 1tg^2\,\frac{x}{2}$$

$$4tg\;\frac{x}{2} = 2tg\,\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = arctg\;\frac{1}{2} + k\pi$$

$$\Rightarrow x = 2arctg\;\frac{1}{2} + k\pi$$

II. SYSTEME DE DEUX EQUATIONS A DEUX INCONNUES

1. L'une des équations est algébrique, l'autre est trigonométrique

Exemple

Soit à résoudre le système suivant :

01.
$$\left.\begin{array}{r} x+y=\frac{\pi}{3} \\ \\ \sin x+\sin y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\frac{\pi}{3} \\ 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=\frac{\pi}{3} \\ 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=\frac{\pi}{3} \\ \cos\frac{x-y}{2}=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=\frac{\pi}{3} \\ \frac{x-y}{2}=2k\pi \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} x+y=\frac{\pi}{3} \\ x-y=4k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x=\frac{\pi}{3}+4k\pi \\ 2y=\frac{\pi}{3}-4k\pi \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ y=\frac{\pi}{6}-2k\pi \end{cases}$$

02. $\begin{cases} tg\,x\cot y = 2 \\ \\ x + y = \frac{\pi}{3} \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} \frac{tgx}{tgy} = \frac{2}{1} \\ \\ x + y = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{tgx - tgy}{tgx + tgy} = \frac{2-1}{2+1} \\ \\ x + y = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)} = \frac{1}{3} \\ \\ x + y = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(x-y) = \sin\frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{3} \\ \\ x + y = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(x-y) = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \\ x + y = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

1) $\begin{cases} x - y = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{6} + 2k\pi \\ \\ x + y = \frac{\pi}{3} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{6} + 2k\pi \\ \\ x + y = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

***NB**. Il est recommandé au lecteur de terminer la résolution de ces systèmes*

2. *Les deux équations sont trigonométriques :*

Exemple :

Soit r résoudre les systèmes suivants :

$$01.\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2} & (1) \\ \cos 2y - \cos 2x = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow cos^2y - sin^2 - cos^2x + sin^2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2(sin^2x - sin^2y) = \frac{1}{2}$$

$$2(\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x - \sin y = \frac{1}{2} \qquad (3)$$

On a le système :

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2} \\ \sin x - \sin y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2sinx = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{matrix}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$2 \sin y = 0 \Rightarrow \sin y = 0$$

$$y = k'\pi$$

02. $\begin{cases} 2\cos x \cos y) = 1 \\ tgx + tgy = 2 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} 2\cos x \cos y = 1 \\ \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(x+y) + \cos(x-y) = 1 \\ \sin(x+y) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + \cos(x-y) = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(x-y) = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 2k'\pi \\ x + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2(k+k')\pi \\ 2y = \frac{\pi}{2} + 2(k+k')\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2(k+k')\pi \\ y = \frac{\pi}{4} + (k+k')\pi \end{cases}$$

III. ELIMINATION

a. Elimination une inconnue x entre deux équations $f_1(x)=0$ et $f_2(x)=0$. C'est chercher la condition de compatibilité de ces équations, c'est-à-dire la relation nécessaire et suffisante qui doit exister entre leur coefficients pour qu'elles admettent au moins une racine commune.

b. Eliminer deux inconnues x et y entre trois équations $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$, $f_3(x,y)=0$, c'est chercher la condition de compatibilité de ces équations.

Exemple :

01. Eliminer α entre les équations :

$$\cos\alpha + \sin\alpha = a \qquad (1)$$
$$\cos 2a = b \qquad (2)$$

$$(2) \Rightarrow cos^2\alpha - sin^2 a = b$$
$$\Rightarrow (\cos\alpha - sin^2\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha) = b$$
$$\Rightarrow \cos\alpha - sin\alpha = \frac{b}{a} \qquad (3)$$

$$(1) \text{ et } (3) \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha + \sin\alpha = a & (1) \\ \cos\alpha + \sin\alpha = \frac{b}{a} & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2\cos\alpha = a + \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{a^2+b}{2a} \qquad (4)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 2\sin\alpha = a - \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{a^2-b}{2a} \qquad (5)$$

$$\text{Or } sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2 + \left(\frac{a^2+b^2}{2a}\right)^2 = 1$$

$$\boxed{\Rightarrow a^2 + b^2 = 2a^2}$$

02. Eliminer α entre les équations

$$\cot g\alpha + \cos\alpha = a \qquad (1)$$
$$cotg\ \alpha - \cos\alpha = b \qquad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \quad 2cotg\alpha = a + b \ \Rightarrow \ \ \mathrm{cotg}\alpha = \frac{\mathrm{a+b}}{2} \qquad (3)$$

$$(1)\text{-}(2) \ \Rightarrow 2\cos\alpha = a - b \ \Rightarrow \qquad \cos\alpha = \frac{\mathrm{a+b}}{2} \qquad (4)$$

$$\text{or } 1 + cotg^2\alpha = cosec^2\alpha \ \Rightarrow \ \ 1 + \mathrm{cotg}\alpha = \frac{1}{1-\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{1-\frac{(a-b)^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \ \boxed{(\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}) = 16\mathrm{ab}}$$

03. Eliminer x et y entre les équations :

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ \cos x + \cos y = b \\ tg\frac{x}{2}tg\frac{y}{2} = tg^2\frac{c}{2} \end{cases}$$

Ce dernier exemple est laissé au lecteur.

Exercices sur le Chapitre 7

01. Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle $|0{,}2\pi|$

a. $\cos x - 1 = 0$

b. $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = -\cos 3\text{x}$

c. $\cos(x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d. $\text{tg}(x - \frac{\pi}{4}) = +1 = 0$

e. $tg(\frac{\pi}{3} - 6x) + \sqrt{3} = 0$

02. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a. $\cos 4x = \cos x$

b. $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \cos 3x$

c. $\sin 5x = \sin 2x$

d. $tg2x = tg\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

e. $tg3x = -tg\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

f. $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$

g. $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

h. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

03. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a. $tg^2x - 3tgx + 2 = 0$

b. $8sin^2x - 7cosx - 8 = 0$

c. $2sin^2x - 3\sin x\cos x + cos^2x = 0$

d. $\sin x + \sin 3x + \sin 9x = \sin 5x$

e. $tg\ 2x + \left(\sqrt{3} - 1\right)tgx - \sqrt{3} = 0$

04. Soit m un réel, on considère l'équation : $cos^2x + 3\cos x + m = 0$

a. Discuter le nombre de solutions de l'équation qui appartiennent à [0,2π]

b. Résoudre l'équation pour $m = -\frac{7}{4}$

05. Soit m un réel. On considère l'équation :$2sin^2x - 2\sin x - m = 0$

a. Discuter le nombre de solution de l'équation dans $\left]-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}\right[$

b. Résoudre l'équation pour $m = 1 - \sqrt{2}$

06. Résoudre dans$\mathbb{R}$, Les équations suivantes :

a. $cos^3x + sin^3x = 0$

b. $2cos^3x + 3sin^2xcos\ x = 0$

c. $cos^4x + sin^4x = 4sin^2xcos^2x$

d. $2cos^4x + \sin x\, cos^3x - sin^2xcos^2x = 0$

e. $4sin^2x + 11sinx\cos x = -6cos^2x$

f. $2sin^2x - 4\sin x\cos x - 4cos^2x = -3$

07. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, les systèmes suivants :

a. $\begin{cases} \sqrt{3}(\sin x + \sin y) = \cos x + \cos y \\ x - y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

b. $\begin{cases} \sin x = \sin y \\ \frac{x}{2} = \frac{4}{2} \end{cases}$

c. $\begin{cases} \cos x = \cos y \\ x + 2y = \pi \end{cases}$

d. $\begin{cases} \sin x + \cos x = 1 \\ \sin x + 2\cos x = \sqrt{2}\sin 2x \end{cases}$

08. Déterminer $\cos x$ et $\cos y$ sachant que :

$\cos x + \cos y = 0{,}5$ et $cos^2 x + cos^2 y = -0{,}5$

2ème partie

CALCUL NUMERIQUE

Chapitre I : GRANDEURS PHYSIQUES ET LEURS MESURES

1.1 GRANDEUR PHYSIQUE

Définition : On appelle grandeurs physiques, les différentes intensités que peut présenter un phénomène naturel, une qualité déterminée ou une propriété d'un corps.

1.2 NOTIONS D'ERREURS

Toute mesure d'une grandeur physique ne peut jamais donner la valeur exacte de cette grandeur. Ceci est vrai quelque soit le niveau de perfectionnement de l'appareil de mesure et quelque soit l'habilité de l'expérimentateur. Il s'introduit donc toujours des erreurs de toutes sortes lors des mesures. La connaissance de ces erreurs est donc indispensable pour juger de l'intérêt à porter sur les résultats de ces mesures. Cependant, ces erreurs ne peuvent pas être connues exactement car, cette connaissance exacte implique la vraie valeur de la grandeur mesurée. Par conséquent, en partant de l'erreur, il s'agira plutôt l'estimation de l'erreur.

2.1 ERREUR ABSOLUE

Définition : On appelle erreurs absolues, la valeur absolue de la différence entre la valeur mesurée d'une grandeur et sa vraie valeur.

Soit G et G' respectivement la vraie valeur et la valeur mesurée d'une grandeur, par définition l'erreur absolue ε_a est donnée par :

$$\varepsilon_\alpha=|G-G'| \quad (1)$$

De (1), on voit que l'erreur absolue ε_α s'exprime avec les mêmes unités que la grandeur mesurée. De plus, puisque la vraie grandeur n'est jamais connue, l'erreur absolue ne sera pas non plus connue exactement. Il est cependant possible d'en calculer la limite supérieure que nous appellerons erreur absolue :

$$\varepsilon_\alpha = |G-G'| \leq \Delta G \quad (2)$$

Où ΔG est la limite supérieure de l'erreur commise sur la mesure de grandeur G. De (2), on obtient l'inégalité triangulaire :

$$G' - \Delta G \leq G \leq G' + \Delta G \quad (3)$$

Qui exprime que la valeur exacte de la grandeur mesurée G est comprise dans l'intervalle fermé $|G' - \Delta G, G' + \Delta G|$.

La mesure de G est d'autant plus précise que cet intervalle est petit. Toutes fois, l'information apportée par l'erreur absolue ne suffit pour caractériser la précision d'une mesure. Il faut donc introduire la notion de l'erreur relative.

2.2 ERREUR RELATIVE

Définition : l'erreur relative est le rapport entre l'erreur absolue et la vraie valeur de la grandeur. Puisque la vraie valeur de la grandeur et l'erreur absolue ne sont pas connues, c'est plutôt le rapport entre la limite supérieure de l'erreur absolue et la valeur mesurée de la grandeur qui définit l'erreur relative.

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta G}{G'} \quad (4)$$

2.3 ERREURS SYSTEMATIQUES

Définition : les erreurs systématiques sont des erreurs commises toujours dans le même sens.

2.4 ERREURS ACCIDENTELLES

Définition : ce sont des erreurs qui se commettent au hasard c'est-à-dire dans un sens tout comme dans l'autre.

En général, quand on parlera d'erreur, il s'agira plus des erreurs accidentelles que d'erreur systématique.

2.5 APPLICATION

1) A l'aide d'une éprouvette graduée, on procède au remplissage d'un récipient en y versant successivement $(180 \pm 2)cm^3$, $(150 \pm 2)cm^3$ et $(120 \pm 2)cm^3$ d'eau. Calculer le contenu du récipient ainsi que les erreurs absolues et relatives.

Solution

Le contenu minimal du récipient est donné par :

$$178 + 148 + 118 = 444\ cm^3$$

Le contenu maximal du récipient est donnée par :

$$182 + 152 + 122 = 456\ cm^3$$

Soit c'est ΔC la valeur mesurée du contenu et la limite supérieure de l'erreur absolue

$$C' + \Delta C = 456cm^3 \quad (1)$$

$$C' - \Delta C = 444cm^3 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2C' = 900cm^3$$

$$\Rightarrow C' = 450cm^3$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 2\Delta C = 12cm^3$$

$$\Rightarrow \Delta C = 6cm^3$$

Par conséquent, la vraie valeur du contenu du récipient es donnée par :

$$C = (450 \pm 6)cm^3.$$

Et l'erreur relative se met sous la forme suivante :

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta C}{C'}$$

$$= \frac{6}{450}$$

$$= \frac{1}{75}$$

2) La mesure du demi-périmètre d'un rectangle est de $(9 \pm 0{,}02)m$ et celle de la largeur est de $(3 \pm 0{,}02)m$. Calculer la longueur du rectangle ainsi que les erreurs absolues et relatives.

Solution

Le demi-périmètre minimal est de 8,58m et le demi-périmètre maximal est de 9,02m. De même les longueurs minimale et maximale sont de 2,98m et 3,02m.

La longueur minimale du rectangle est de $(8{,}98 - 3{,}02)m = 5{,}96m$.

La longueur maximale du rectangle est de $(9{,}02 - 2{,}98)m = 6{,}04m$.

Soit L' et ΔL la valeur mesurée de la longueur et la limite supérieure de l'erreur absolue, on a :

$$L' + \Delta L = 6{,}04m \qquad (1)$$

$$L' - \Delta L = 5{,}96m \qquad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2L' = 12m$$

$$L' = 6m$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 2\Delta L = 0{,}08m$$

$$\Rightarrow \Delta L = 0{,}04m$$

La vraie valeur de la longueur du rectangle est donc : $L = (6 \pm 0{,}04)m$

Par conséquent, l'erreur relative est de : $\varepsilon_r = \frac{0{,}04}{6} = \frac{2}{3}$

Chapitre II : FONCTIONS ET EQUATIONS LOGARITHMIQUES EXPONENTIELLES ET CALCUL APPROCHE DES RACINES REELLES D'UNE EQUATION

II.1. LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES

1. **La fonction logarithme népérien** est la primitive nulle au point 1 de la fonction définie sur]0, +∞[par $x \to \frac{1}{X}$. Avec les notations du calcul intégral, *lnx* = $\int_1^x \frac{dt}{t}$.

   La fonction ***ln*** est, sur son ensemble de définition $]0, +\infty[$:

   - Continue ;
   - Dérivable ;
   - Strictement croissante.

Propriétés algébriques :

$\forall(a,b) \in R'_+ \times R'_+$, $lnab = lna + lnb$

$$ln\frac{1}{a} = -lna$$

$$ln\frac{a}{b} = lna - lnb$$

Limite à connaître:

$lim_0\, lnx = -\infty$ $\qquad$ $lim_{+\infty}\, lnx = +\infty$

$lim_0\, xlnx = 0$ $\qquad$ $lim_{+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

$lim_0 \frac{ln(1+x)}{x} = 1$ $\qquad$ $lim_0\, x^2 lnx = 0$ $\qquad$ $(\infty>0)$

2. **Logarithme de base a :**

Pour a∈R'$_+$ et a ≠ 1, $\qquad log_a x = \frac{lnx}{lna}$

3. Exponentielle naturelle

Bijection de R sur R^*_+ réciproque de la bijection *ln* de R^*_+ sur R.

$x = lny \Leftrightarrow y = exp(x)$

exp x est notée e^x.

La fonction exp est sur R :

- Continue
- Dérivable
- Strictement croissante.

Propriétés algébriques :

$\forall (a,b) \in R^2, \quad e^{a+b} = e^a . e^b$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$e^a = 1$$

Limites à connaitre:

$\lim_{-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{+\infty} e^x = +\infty$

$a > 0 \quad \lim_{+\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty \qquad \lim_{-\infty} |x|^a e^x = 0$

4. Exponentielle de base a (*a* > 0) :

$a^x = e^{xlna}$

$x = log_a y \Leftrightarrow y = a^x$

II.2. EXCERCICES

1. Résoudre dans ℝ, les équations suivantes :

$01.\ lnx + ln(x-1) - ln6 = 0$

02. $2\ln 2 + \ln(x^2 - 1) = \ln(-4x-1)$
03. $\ln(x-3) + \ln(x+1) = \ln(x+7)$
04. $\ln(x-3)(x+1) = \ln(x+7)$
05. $\ln(x+1) + \ln(x+5) = \ln 96$
06. $\ln(x-3) + \ln(x-5) = \ln 3$
07. $\ln(5-x) - \ln 3 + \ln(1-x) = \ln(3-x)$

2.a) Soit $f(x) = \ln x + \ln(2x-1) - \ln(14-x^2)$. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction *f*.

b) Résoudre dans ℝ, l'équation $f(x)=0$

3. Soit f, la fonction numérique définie par $f(x) = \ln(\ln x)$

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
b) Calculer $f'(x)$

4. Résoudre dans ℝ, les équations suivantes :

a) $2\log^2 x - 19\log x - 10 = 0$
b) $\log_3 x - \log_3(2-x) = 1$
c) $\frac{1}{\log_x 2} + 2\log_4(6x^2+1) = 3\log_8 5x^2$
d) $\log_6 e|\ln(e^x - 1)| = 1 - x\log_6 e$
e) $\log_3 x - \frac{1}{2}\log_3(x+4) = \log_3 5 - 1$
f) $\log_x(x^2+2x-3).\log_{x+3} x - \log_{x+3} x^{\frac{i}{\log 3x}} = \log_x x$
g) $\log_x 10 + 6\log_{10x} 10 - 8{,}4\log_{100x} 10 = 0$

5. a) On considère l'équation d'inconnue *x*, de paramètre *m* :

$$x^4 - 4x^2 + m^2 = 0$$

Résoudre dans ℝ, cette équation pour m= −2, m=0 et m=1

b) Pour les valeurs précédentes de m, résoudre dans ℝ, l'équation d'inconnue x.

$$e^{4x} - 4e^{2x} + m^2 = 0$$

6. a) Effectuer, dans ℝ, le produit $(x+3).(x^2-1)$

   b) Résoudre dans ℝ, les équations suivantes où x est l'inconnue

      1) $ln^3x + 3ln^2x - lnx - 3 = 0$
      2) $e^{-6x} + 3e^{-4x} - e^{-2x} - 3 = 0$

7. Soit $P(x) = 2x^3 - 13x^2 - 10x + 21$

   1) Montrer qu'il existe trois nombres réels a, b et c tels que $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ et les déterminer. Puis résoudre dans ℝ l'équation $P(x) = 0$.
   2) En déduire les solutions dans ℝ des équations suivantes :
      a. $2(lnx)^3 - 13(lnx)^2 - 10lnx + 21 = 0$
      b. $10 + 13e^x - 2e^{2x} = 21e^{-x}$

8. a. Résoudre dans ℝ l'équation d'inconnue x

   $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$

   b. En déduire la résolution dans ℝ des équations d'inconnue x suivantes :

   $4(lnx)^4 - 37(lnx)^2 + 9 = 0$

   $4e^{4x} - 37e^{2x} + 9 = 0$

9. Résoudre dans ℝ, les équations suivantes :

   a) $\frac{1}{2} ln2x = ln(3 - x) - ln\sqrt{x + 1}$
   b) $2^{4x-5} + 2^{2x-1} - 6 = 0$
   c) $e^{3x} - 5e^{2x} - 24e^x = 0$
   d) $(lnx)^3 - 5(lnx)^2 - 24lnx = 0$
   e) $2x^3 - 3x^2 + x = 0$
   f) $2e^{3x} - 2e^{2x} + e^x = 0$

10. Résoudre dans ℝ × ℝ les systèmes suivants :

   a) $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ -6x + 5y = -19 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2logx + 3logy = 9 \\ -6logx + 5logy = -19 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2e^x - 30^y = 9 \\ -6e^x + 5e^y = -19 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 7e \\ lnx + lny = ln12 + 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} xy = a^2 \\ ln^2x + ln^2y = \frac{20}{9} ln^2a \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2^x = y^2 \\ 2^{x+1} = y^{2+x} \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2^x = 3^y \end{cases}$

h) $\begin{cases} 32^{x+y} = 1024^{x-1} \\ 81^{y+2x} = 3^{4(x+1)} \end{cases}$

i) $\begin{cases} y = \frac{256}{x} \\ 7\log_x y + \frac{7}{\log_x y} = 50 \end{cases}$

j) $\begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ e^{2(x+y)} = 36 \end{cases}$

k) $\begin{cases} xy = 14 \\ e^x . e^y = e^{-9} \end{cases}$

11. Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

Soit P un point de la courbe représentative de la fonction $x \rightarrow e^x$. La tangente en P à x cette courbe coupe en H l'axe des abscisses. Montrer que la projection orthogonale du segment $|HP|$ sur l'axe des abscisses à une longueur constante.

12. On considère la fonction numérique f définie par :

$x \to f(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x})$

Où e désigne la base des logarithmes népérien

a) Montrer que pour tout nombre réel x, on a :

$f(2x)=2[f(x)]^2 - 1$

b) Résoudre dans R l'équation suivante d'inconnue x:

$f(2x)-6f(x)+5=0$

13. Soit la fonction définie par :

$x \to f(x) = e^{2x} - 2e^{x} - 3$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Calculer la fonction dérivée de f et déterminer le signe de cette dérivée suivant les valeurs de x.
3) Calculer, $\lim_{-\infty} f(x)$.

II.3. CALCUL APPROCHE DES RACINES REELLES D'UNE EQUATION

Soit f(x) = 0 une équation en x donnée. Si f(x) est algébrique de degré 1, 2, 3, 4, il existe des formules utilisant des coefficients pour calculer les racines de l'équation.

On appelle racines ou solution de l'équation les valeurs de x telles que son ordonnée f(x) = y est nulle.

Les formules de résolution de l'équation n'existent pas pour certaines équations du 3^{ième} degré, 4^{ième} degré non réciproques et voir même dans les cas général des degrés supérieurs à 4. Ainsi, il est possible d'estimer ou de calculer ces racines avec certaines méthodes. Entre autre :

II.3.1. Méthode de Lagrange ou méthode des cordes ou des parties proportionnelles

Soit f(x)=0 une équation donnée à variable x, continue et dérivable d'ordre 2 dans l'intervalle donné $]a,b[$ et s'il existe un intervalle $]x_1,x_2[$ inclus dans les

]*a,b*[tel que *f(x)* soit monotone croissante (décroissante) et prenant des valeurs des signes contraires aux extrémités x_1 et x_2 de l'intervalle c'est-à-*dire* $f(x_1)>0$ *et* $f(x_2)<0$ ou $f(x_1)<0$ *et* $f(x_2)>0$. Il existe une valeur de x annulant f(x) dans l'intervalle $|x_1, x_2|$ qui est la valeur approchée de la racine cherchée.

On pose soit a_1 cette racine à calculer avec l'équation de la corde ou droite passant par deux points qui sont $|x_1, f(x_1)|$ *et* $|x_2, f(x_2)|$.

$$a_1 = x_1 + \frac{|y-f(x_1)|(x_2-x_1)}{f(x_2)-(x_1)} \ \textit{avec } y = 0 \rightarrow a_1 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_2-x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}$$

Pour améliorer ou tendre vers la précision de la valeur exacte de la racine. On cherche à réduire l'intervalle en vérifiant de nouveau le signe de $f(a_1)$ à comparer avec celui de $f(x_1)\ de\ f(x_2)$ et prendre l'intervalle considerée.

Soit a_2 la nouvelle racine et procéder ainsi plusieurs fois.

Exemple

Trouver les valeurs approchées des racines des équations suivantes :

1) $x^3-6x+2=0$
2) $x^3-12x+3=0$

Soit $x^3-6x+2=0$ (1) à résoudre comme l'intervalle n'est pas donné, cherchons les intervalles de monotonie.

$f'(x) = 3x^3-6$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$= \pm 1{,}4$

On a ainsi 3 intervalles de monotonie, à savoir :

$]-\infty,\ -1{,}4[,\qquad]-1{,}4,\ 1{,}4[\ ,\qquad]1{,}4\ ,\ +\infty[$

Prenons par exemple l'intervalle : $]-1{,}4\ ,\ 1{,}4[$

Nous avons l'intervalle $|0{,}1|\ C\ |-1{,}4,\ 1{,}4|$

$f(0) > 0$ et $f(1) < 0$, ainsi la valeur approchée de la racine cherchée est entre 0 et 1.

$n_1 = 0,\ \ f(x_1) = f(0) = 2$

$n_2 = 1,\ \ f(x_2) = f(1) = -3$ *on pose a_1 = la racine*

$$a_1 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

$$= 0 - \frac{2(1-0)}{-3-2}$$

$$= \frac{2}{5}$$

$$= 0{,}4$$

Pour améliorer les précisions de la racine, calculons $f(a_1) = f(0{,}4) = -0{,}336$. $f(a_1)$ a le signe contraire par rapport à f(0).

On a : $a_2 = \frac{-2(0{,}4-0)}{-0{,}336-2} = \frac{0{,}8}{2.336} = 0{,}342$ et ainsi de suite on prendra de même les intervalles $]-\infty,\ -1{,}4[\ldots$

II.3.2 Méthode de newton ou méthode des tangentes

Soit *f(x)* une fonction en x donnée définie, continue et dérivable d'ordre 2 dans un intervalle$|a,b|dont\ l'équation\ est\ de\ la\ forme\ f(x) = 0\ telle\ que$ $\forall |x_1,\ x_2| \text{C} |a,b|$ on a : $f(x_1)\ et\ f(x_2)$ des signes contraires et $f'(x)$ conserve son signe sur $|x_1,\ x_2|$.

Si $f'(x)$ conserve également son signe, alors f(x)=0 admet une racine entre x_1 *et* x_2 et soit a_1, cette racine qui est la valeur de x où la tangente menée par une des extrémités de l'intervalle coupe l'axe 0X pour que l'ordonnée soit nulle.

L'équation de la tangente à une courbe menée par un point étant :

$$f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \text{ ou } y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2)$$

Avec y = 0 on a : $x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ ou $x = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$

Puis faire $x = a_1$ la valeur approchée de la racine cherchée.

On procédera de même pour améliorer cette racine comme précédemment.

NB : Si la tangente menée au point $|x_1, f(x_1)|$ ne passe pas par l'intérieur de l'intervalle, on mène la tangente à la courbe à partir du 2ème point $|x_2,\ f(x_2)|$

Exemple

1) Avec la méthode de la sécante, trouver les valeurs approchées des racines de l'équation $x^2 + 5x - 6 = 0$ dans les intervalles $[-7,\ -5]$ et $[0, 3]$.
2) Estimer les valeurs approchées des racines de l'équation $x^2 - 6x + 2 = 0$ en utilisant la méthode de la tangente et estimer ces racines à 10^{-3} près avec chiffre exacts.

Pour l'équation $x^3 - 6x + 2 = 0$ avec la méthode des tangentes, les bornes ne sont pas définies et que la fonction est dérivable. $f(x) = 3x^2 - 6$, $f(x) = 0 \iff 3x^2 - 6 = 0$. Si *x*=±*1,4*.

Ainsi comme on l'a défini précédemment, la fonction est monotone.

Dans les intervalles : $|-\infty,\ -1{,}4|$, $|-1{,}4,\ 1{,}4|$, $|1{,}4\ ,+\infty|$

Estimons la racine dans l'intervalle $|-1{,}4\ ,\ 1{,}4|$

Prenons par exemple l'intervalle $|1{,}1|$ C $|-1{,}4,\ 1{,}4|$

x_1=$-1 \Rightarrow f(x_1) = f(-1) = 7$

$x_2 = 1 \Rightarrow f x_2 = f(1) = -3$ *sont des signes contraires*

$f^{'}(x_1)$= $f^{'}(-1) = -3$

La formule des tangentes nous donne :

$$a = x_1 - \frac{f(x_1)}{f^{'}(x_1)} \Rightarrow a = -1 - \frac{7}{-3}$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$= 1{,}333 \notin |-1{,}1|$$

Mener la tangente au point $|x_2, f(x_2)|$.

Procéder de même pour les autres intervalles.

Exercices

En utilisant la méthode des tangentes, estimer et améliorer une fois les racines à 10^{-3} chiffres exacts pour les équations suivantes :

1) $x^3 - 4x + 2 = 0$
2) $2x^5 - 3x^3 + 1 = 0$
3) $x^4 + 2x^3 - 6x + 2 = 0$
4) $x^3 - 4x^2 - 5x - 1 = 0$
5) $x - tgx = 0$ dans l'intervalle $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$
6) $\sin x = 1$ dans l'intervalle $[0,\ \pi]$

II.4. RESOLUTION DE L'EQUATION DU 3ème DEGRE NON RECIPROQUE

L'équation non réciproque du 3ième degré est ramenée à la forme générale $x^3 + ax^2 + bx + c = O$ car le coefficient de x^3 est non nul.

On utilise la méthode de Cardan

On donne l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = O$ (1)

On pose $x = y - \frac{a^2}{3}$ (2)

(2) dans (1) $\Rightarrow y^3 + py + q = 0$ (3)

Avec $p = b - \frac{a^2}{3}$

$q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$

Les racines de l'équation (2) sont :

$y_1 = u + v;\ \ y_2 = \propto_1 u + \alpha_2 v;\ \ y_3 = \propto_2 u + \propto_1 v$

Avec $i = _1^2\propto_i$ les racines cubiques de l'unité sont :

$\propto_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\propto_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

Ainsi, on a :

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\ , \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Pour les remplacer respectivement dans les y_i et dans x.

Exemple

Résoudre l'équation :

$$2x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$$

Cette équation se ramène à la forme : $x^3 + 3x^2 + 2x - 4 = 0$ (1)

On pose : $x = y - \frac{a}{3}$ soit $x = y - 1$ (2)

$a = 3, \qquad b = 2, \qquad c = -4$

$p = 2 - 3 = -1,$

$q = 2 - 2 - 4 = -4$

(2) dans (1)$\Rightarrow y^3, \quad y^4 = 0$, on a :

$$u = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{2^2 + \frac{1}{9}}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{\frac{35}{9}}}$$

$$= \sqrt[3]{3{,}97}$$

$$= 1{,}58$$

$$v = \sqrt[3]{2 - \sqrt{\frac{35}{9}}} = \sqrt[3]{0{,}028}$$

$$= 0{,}3$$

$y_1 = 0{,}3 + 1{,}58 = 1{,}88 \qquad \rightarrow \qquad x_1 = 0{,}9$

$y_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.1{,}58 + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.0{,}3 = -1+i \qquad \rightarrow x_2 = -2+i$

$y_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.1{,}58 + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.0{,}3 = -1-i \qquad \rightarrow x_3 = -2-i$

II.4.2. Equation du 4^{ième} degré non-réciproque

La forme conique de cette équation est $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ car le coefficient de $x^4 \neq 0$

On pose : $r = -b, \;\; s = ac - 4d, \;\; t = d(4b - a^2) - c^2$

L'équation se ramène à celle du 3ème degré vue précédemment et de la forme : $y^3 + ry^2 + sy + t = 0$

Les racines de cette équation étant $y_1,\; y_2, y_3$, on pose *y* = *sup* (y_1, y_2, y_3).

Puis calculer les coefficient $p, q, p_{1,} q_1$ avec les formules

$p = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b + y}, \qquad q = \frac{y}{2} + 2\sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - d}$

$p_1 = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b + y}$

$q_1 = \frac{y}{2} - \varepsilon\sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - d}$

CHAPITRE III. EQUATIONS DIFFERENTIELLES

III.1. EQUATION LINEAIRE DU 1er ORDRE

Soit a et b des nombres réels $(a \neq 0)$ et g une fonction numérique définie sur ℝ. Chercher les fonctions f définies sur ℝ, dérivables et telles que : $af^{'} + bf = g$ (1)

C'est résoudre (ou « intégrer ») l'équation différentielle (I), qu'on écrit aussi. $af^{'}(x) + bf(x) = g(x)$.

En sous-entendant « quel que soit le nombre réel x… », Lorsque g est la fonction nulle, l'équation s'écrit : $af^{'} + bf = 0$ et est dite homogène.

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène du 1er ordre est un espace vectoriel réel de dimension 1. Il suffit d'en déterminer un élément non nul, on le cherche sous la forme d'une fonction exponentielle.

$x \to e^{mx}$

On pourra rencontrer, en physique notamment, des équations non-homogènes : $af^{'} + bf = g$ (2)

La remarque utile est :

L'ensemble des solutions de l'équation (2) est l'ensemble des fonctions qui sont somme d'une solution particulière f_0 de (2) et d'une solution quelconque de l'équation homogène associée.

Un exercice sur une telle équation comporte alors en général deux questions :

a. Vérifier que la fonction suivante (…) satisfait à l'équation (2)
b. Trouver toutes les fonctions satisfaisant à l'équation (2).

III.2. EQUATIONS LINEAIRES DU 2ème ORDRE

Soit a, b, c des nombres réels $(a \neq 0)$ et g une fonction numérique définie sur ℝ. Chercher les fonctions f définies sur ℝ, deux fois dérivables et telles que :

$af'' + bf' + cf = g,$ (1)

C'est résoudre (ou « intégrer ») l'équation différentielle (1)

Lorsque g est la fonction nulle, l'équation s'écrit : $af'' + bf' + cf = 0$ et est dite homogène.

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène du 2ième ordre est un espace vectoriel réel de dimension 2. Il suffit d'en déterminer une base, c'est-à-dire un couple (f_1, f_2) de solutions qui ne soient pas proportionnelles.

La méthode pratique de résolution consiste à chercher des solutions sous forme de fonctions exponentielles.

$$x \to e^{mx}$$

Alors,

- Si cette équation admet deux racines distinctes $m_1\ et\ m_2, les\ fonctions\ x \to e^{m_1 x}\ et\ x \to e^{m_2 x}$ répondent à la question
- Si cette équation admet une racine double m_0, les fonctions $x \to e^{m_0 x}$ et $x \to xe^{m_0 x}$ répondent à la question.
- Si cette équation admet deux racines complexes conjuguées. $m_1 = -\frac{b}{2a} + iw$ et $m_2 = -\frac{b}{2b} - iw$, les fonctions.

  $\varphi_1 : x \to e^{m_1 x}, \qquad \varphi_2 : x \to e^{m_2 x}$

Vérifient l'équation. Il peut être préférable de remarquer que les fonctions $f_1\ et\ f_2$ telle que :

$$f_1 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)\ ,\ \ f_2 = \frac{1}{2i}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

III.3. EQUATIONS NON-HOMOGENES

En vue des applications à la physique, on pourra rencontrer des équations différentielles linéaires non-homogènes de la forme :

$$af''(x) + bf'(x) + cf(x) = kcos(w_1 - \varphi)$$

Comme au premier ordre, les solutions d'une telle équation s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière f_0 une solution quelconque de l'équation homogène associée.

La fonction f_0 peut être donnée par l'énoncé, ou « devinée » grâce à la remarque suivantes :

- Si le « second nombre » g n'est pas solution de l'équation homogène associée, on cherchera f_0 sous la forme λg ($\lambda \epsilon \mathbb{R}$).
- Si le « second nombre » est solution de l'équation homogène associée (on dit qu'il y a « résonance ») on cherchera f_0 sous forme $x \rightarrow \lambda x g$ (x), ($\lambda \epsilon \mathbb{R}$).

Sont réelles ou coefficient l'équation différentielle.

Sans qu'il ne soit nécessaire de retenir des formules qu'on retrouve dans chaque cas, on voit que, pour tout nombre réel x :

$$f_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x} coswx, \qquad f_2(x) = e^{-\frac{b}{2a}x} sinwx$$

EXERCICES

I. Résoudre l'équation différentielle donnée :

a. $y^{'} + 4y = 0$
b. $y^{'} - 2y = 0$
c. $y^{'} = y$
d. $y^{'2} + 4y^{'}y + 4y^2 = 0$

II. Déterminer la solution de l'équation différentielle donnée qui vérifie les conditions initiales indiquées.

01. $y^{'} - 3y = 0, \quad y(1) = 4$
02. $4y^{'} + 7y = 0, \quad y(0) = 1$
03. $5y^{'} + 3y = 0, \quad y(2) = 2$
04. On considère l'équation différentielle $y^{'} - 3y = -5$
    a) Montrer qu'elle admet une solution constante $x \rightarrow k$.

b) Soit y une solution de l'équation donnée. Démontrer que la fonction $y - k$ vérifie une équation différentielle homogène qu'on écrira et qu'on résoudra.
c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation donnée.

05. On considère l'équation différentielle $4y' + y + 5 = 0$
a) Montrer qu'elle admet une solution constante $x \to k$.
b) Soit y une solution de l'équation donnée. Démontrer que la fonction y-k vérifie une équation différentielle homogène qu'on écrira et qu'on résoudra.
c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation donnée.

III. Résoudre l'équation différentielle donnée :

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$
2) $y'' - 7y' + 12y = 0$
3) $y'' + y' - y = 0$
4) $y'' = 4y$
5) $y'' - 10y' + 25y = 0$
6) $y'' + 49y = 14y'$
7) $y' = \frac{y'+y''}{2}$
8) $y'' + w^2y = 0 \quad \omega\epsilon\mathbb{R}$
9) $y'' + y' + y = 0$
10) $y'' - 3y' + 4y = 0$

IV. Déterminer la solution de l'équation différentielle donnée qui vérifie les conditions indiquées :

01. $y'' - 4y' - 12y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$
02. $y'' - 4y' + 5y = 0,\quad y(1) = 2,\quad y'(1) = -1$
03. $y'' - 9y = 6y'\quad y(0) = 0\quad y'(0) = 3$
04. $y'' - 9y = 0\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
05. $y'' - \frac{1}{2}y' + y = 0\quad y(0) = 1\quad y'(0) = 0$

V. Résoudre l'équation différentielle :

01. $y'' + 4y = 5cosx$
02. $y'' + y = cos2x$

03. $3y'' + y' + y = cosx + sinx$
04. $y'' + 9y = cos3x$
05. $4y'' + y = 2cos\frac{x}{2}$

Chapitre IV : PUISSANCES ET PROGRESSIONS

IV.I. PUISSANCES

1) Rappel des propriétés des puissances

a. $a^m.a^n = a^{m+n}$
b. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
c. $(a^m)^n = a^{m.n}$
d. $(a.b)^n = a^n.b^n$
e. $a^0 = 1 \qquad a \neq 0$
f. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad b \neq 0$
g. $a^1 = a$
h. $a^{-m} = \frac{1}{a^m} \qquad a \neq 0$

2) Racine nième arithmétique

01. ***Définition*** : a étant un nombre positif ou nul. La racine n^{ème} arithmétique de a est le nombre positif ou nul dont la n^{ième} puissance est a représenté par $\sqrt[n]{a}.$

$\sqrt[n]{\ } : signe\ radical$

a : radical

n : indice

$\sqrt[n]{a}$: radical arithmétique d'indice *n*

Par définition on a $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \ \ et \ \sqrt[n]{0} = 0$

02. Conséquences de la définition

$$\sqrt[n]{a} = x \iff \begin{cases} x > 0 \\ x^n = a \end{cases}$$

03. Propriétés des radicaux arithmétiques

1. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad n \neq 0$
2. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
3. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
4. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad b \neq 0$
5. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

   $conséquence: \sqrt[ns]{a^{ms}} = \sqrt[n]{a^m}$

6. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad a > 0$

04. Opérations sur radicaux arithmétiques :

1. Somme algébrique des radicaux semblables (même indice et même radicand).

   Exemple : effectuer :

   a) $7\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{a} - 6\sqrt[3]{a}$
   b) $2\sqrt[5]{a} + 3\sqrt[10]{a^2} - \sqrt[5]{a^6}$

2. Produit et quotient des radicaux :

   On réduit les radicaux au même indice pour appliquer les propriétés vues.

   Exemples : effectuer :

   a) $\sqrt[3]{2}.\sqrt[4]{3}$
   b) $\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a}}$

3) Racines n^ième^

1) ***Définition*** : on appelle racine $n^{ième}$ d'un nombre a, le nombre x tel que $x^n = a$.

2) Conséquences de la définition.

a. <u>n pair</u>

- si $a > 0$, il existe 2 racine n$^{\text{ième}}$ réelles opposées $\sqrt[n]{a}\ et\ -\sqrt[n]{a}$
- si $a = 0$, il existe I racine
- si $a < 0$, il n'existe pas des racines réelles

b. <u>n impair</u>

- si $a > 0$, il existe I racine n$^{\text{ème}}$ (réelle) positive : $\sqrt[n]{a}$
- si $a = 0$, il existe I racine n$^{\text{ème}}$: 0
- si $a < 0$, il existe I racine n$^{\text{ème}}$ (réelle) négative : $-\sqrt[n]{|a|}$

4) Radicaux algébriques

1) le symbole $\sqrt[n]{a}$ n'a été défini jusqu'ici que pour $a \geq 0$, on complète l'écriture ajoutant les cas où n est impair et a négatif. $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$ pour obtenir un radical algébrique $\sqrt[n]{a}$.
2) Les propriétés des radicaux arithmétiques ne sont pas appréciables aux radicaux algébriques. Pour opérer sur ces derniers, il faut passer aux radicaux arithmétiques.

Exemple : $\sqrt[3]{-4}.\sqrt[6]{2} = -\sqrt[3]{4}.\sqrt[6]{2} = -\sqrt[6]{16}.\sqrt[6]{2}$

$$= -\sqrt[6]{32}$$

EXERCICES

I. Calculer (a positif)

01. $\sqrt[3]{a^6}.\sqrt[5]{a^{15}}$
02. $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[4]{81}$

II. Simplifier (a,b,c positif)

O1. $\sqrt{a^7.b^8c}$, $\sqrt[4]{a^8b^5}$, $\sqrt[3]{a^{14}b^7c^{12}}$

02. $\sqrt[4]{32a^4b^7}$, $\sqrt[3]{216a^6b^4}$

03. $\sqrt[n]{a^{n+1}}$, $\sqrt[n]{2^na^{n+1}b^{n+2}}$

III. Simplifier (a,b,c positif)

1) $\sqrt[3]{\frac{8a^3}{b^6}}$, $\sqrt{\frac{12a^3}{b^4}}$, $\sqrt[4]{\frac{48a^4b^5}{c^8}}$
2) $\sqrt[n]{\frac{a^{n+1}}{b^n}}$, $\sqrt[n]{\frac{a^{2n}}{b^{3n}}}$

IV. Calculer (a positif)

1) $\sqrt{\sqrt[3]{4a^3}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{8a^6}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{8a^3b^{12}}}$
2) $\sqrt[n]{\sqrt{a^{2n}}}$, $\sqrt{\sqrt[n]{a^{2n+4}}}$, $\sqrt[n]{\sqrt[3]{a^{2n}b^{3n}}}$

V. Calculer

1) $\sqrt{10}$, $\sqrt[5]{125}$, $\sqrt{2}$
2) $\sqrt{24}$, $\sqrt[3]{36}$, $\sqrt{2}$
3) $\frac{\sqrt[3]{9a^4}}{\sqrt{3a^2}}$
4) $25^{0,5}$, $4^{1,5}$, $2^{-3,5}$, $9^{1,75}$, $(0,25)^{0,5}$

IV.2. PROGRESSION

1. Progressions arithmétique (P.A)

01. Définition : On appelle progression arithmétique, une suite de nombre appelés termes tels que chacun d'eux égales le précédent augmenté d'un nombre constant appelé raison (r).

NB : si $r > 0$, la PA est croissante.

Si, $r < 0$, la PA est décroissante

On suppose $r \neq 0$

Exemple : 3,7, 11, 15, 19, est une P.A de raison 4.

9, 7, 5, 3, 1, −1, −3, −5, est une P.A de raison −2.

02. Conséquences de la définition

Désignons par $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ les termes d'une P.A de raison r.

1) Par définition, on a $t_2 = t_1 + r \Leftrightarrow t_2 - t_1 = r$

$$t_3 = t_2 + r \Leftrightarrow t_3 - t_2 = r$$

$$t_1 = t_3 + r \Leftrightarrow t_4 - t_3 = r$$

$$t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = \cdots = r$$

« La différence entre un terme d'une P.A et le terme qui le précède est constante ».

2) $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 \Leftrightarrow 2t_2 = t_1 + t_3 \Leftrightarrow t_2 = \frac{t_1+t_3}{2}$

De même $t_3 - t_2 = t_4 - t_3 \Leftrightarrow 2t_3 = t_2 + t_4 \Rightarrow t_3 = \frac{t_2+t_4}{2}$

D'où

« Tout terme d'une P.A est moyenne arithmétique des termes qui le comprennent »

Corollaire

Trois nombres a, b, c sont en P.A ssi $b = \frac{a+c}{2}$

03. Calcul d'un terme d'une P.A

$$t_2 = t_1 + r$$

$$t_3 = t_1 + 2r$$

$$t_4 = t_1 + 3r$$

$$\boxed{t_n = t_1 + (n-1)r}$$

04. Problèmes

A. Insérer n moyens arithmétiques entre 2 nombres a et b.

<u>*Solution*</u>

Le problème revient à former une PA de $(n+2)$ termes dont :

$t_1 = a \ et \ t_{n+2} = b$

$b = a + (n+2-1)r$

$b = a + (n+1)r \Leftrightarrow \boxed{r = \dfrac{b-a}{n-1}}$

Exemple : Insérer 6 moyens arithmétiques 3 et 38

$$r = \frac{38-3}{7} = 5$$

P.A : 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38

B. Insérer n moyens arithmétiques entre 2 termes consécutifs d'une P.A de raison r.

$$\underbrace{t_1 xxxx\, t_2}_{1} \qquad t_3 \qquad t_4$$

Insérons n moyens arithmétiques entre t_1 et t_2

$$r' = \frac{t_2 - t_1}{n+1}$$

$$\boxed{r' = \frac{r}{n+1}}$$

Exemple : Insérer 2 moyens arithmétiques entre les termes consécutifs de la P.A 7, 19, 31.

$r = 19 - 17 = 12$ $\qquad r' = \frac{12}{3} = 4$ $\qquad n = 2$

P.A : 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31.

05. Somme des termes d'une P.A

Soit la PA $t_1, \quad t_1 + r, \quad t_1 + 2r, \;\; t_1 + 3r, \ldots\ldots, t_1 - 2r, \;\; t_n - r, \;\; t_n$

Nous constatons que la somme des termes équidistant des extrêmes égale la somme des termes extrêmes.

Si *Sn* désigne la somme des n termes d'I PA, on a alors :

$$Sn = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_{n-2} + t_{n-1} + t_n$$

$$= t_n + t_{n-1} + t_{n-2} + \cdots + t_3 + t_2 + t_1$$

$$2Sn = (t_1 + t_n) + (t_1 + t_n) + (t_1 + t_n) + \cdots$$

$$2Sn = (t_1 + t_n)n$$

$$\boxed{sn = \frac{(t_1 + t_n)n}{2}}$$

2. Progression géométrique (PG)

01. Définition :

Une PG est une suite de nombre appelés termes, tels que chacun d'eux gale le précédent multiplié par un nombre constant $q \neq 1$ appelé raison $(q \neq 0)$.

NB : Si $q > 1, la\ PG\ est\ croissnte,$

Si $q < 1, la\ PG\ est\ décroissante.$

Exemple : 2, 6, 18, 54, 162, ….. est PG de raison $q = 3$

$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ... est I PG de raison $q = \frac{1}{2}$

02. Conséquences de la définition

Si $t_1, t_2, \dots, t_n$ désignent les termes d'une *PG*

On a :

$t_2 = t_1 . q \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t_2}{t_1} = q$

$t_3 = t_2 . q \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t_3}{t_2} = q$

1) $\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \frac{t_4}{t_3} = \cdots = q$
2) $\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} \quad \Leftrightarrow \quad t_2^2 = t_1 . t_3 \quad \Leftrightarrow \quad t_2 = \sqrt{t_1 . t_3}$

$$t_3^2 = t_2 . t_4 \quad \Leftrightarrow \quad t_3 = \sqrt{t_2 t_4}$$

D'où, tout terme d'une PG est moyenne géométrique des termes qui le comprennent.

Corollaire

Trois nombres a, b et c forme une PG ssi :

$$\boxed{b^2 = ac \Leftrightarrow b = \sqrt{ac}}$$

03. Calcul d'un terme d'une PG

$t_2 = t_1 . q$

$t_3 = t_1 . q^2$

$t_4 = t_1 . q^3$

$t_5 = t_1 . q^4$

$$\boxed{t_n = t_1 . q^{n-1}}$$

04. Problèmes

1) Insérer n moyens géométriques entre 2 nombres donnés :

$a \times\times\times\times b$

$b = aq^{n+1} \iff q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$

Exemple : Insérer 3 moyennes géométriques entre 6 et 96

$n = 3 \qquad q = \sqrt[4]{\frac{96}{6}} = \sqrt[6]{16}$

$= 2$

P.G : 6, 12, 24, 48, 96.

2) Insérer n moyennes géométriques entre 2 termes consécutifs d'I PG

$t_1 \times\times\times t_2 \qquad t_3 \qquad t_4$

$$\boxed{q' = \sqrt[n+1]{q}}$$

Avec *q* la raison de la PG

Exemples : Insérer 2 moyens géométriques entre les termes de la PG : 10, 80, 640.

$q = 8 \quad n = 2 \quad q' = \sqrt[4]{8} = 2$

D'où PG : 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640.

05. Produit des termes d'I P.G

$$t_1, t_1.q, t_1.q^2, \dots, \frac{t_n}{q^2}, \frac{t_n}{q}, t_n$$

Le produit des termes équidistants des extrêmes égale le produit des termes extrêmes.

$$p_n = t_1.t_2.t_3 \dots t_{n-1}.t_n$$

$$p_n = t_n.t_{n-1} \dots t_2.t_1$$

$$p_n^2 = (t_1.t_n)^n \iff \boxed{p_n = \sqrt{(t_1.t_n)^n}}$$

Exemple

On donne la PG 2, 6, 18, 54, $q = 3$

Calculer $p_{12} =$

On calculé d'abord $t_{12} = t_1.q^{11}$

$$= 2.3^{11}$$

$$p_{12} = \sqrt{(2.2.3^{11})^{12}}$$

$$= (4.3^{11})^6$$

3. Complément

1) Somme des termes d'une PG

$$\boxed{s_n = t_n.\frac{1 - q^n}{1 - q}}$$

2) Progression illimitées

Une progression est dite illimite lors qu'elle a autant de termes que l'on veut.

- La limite de la somme des termes d'une P.G illimitée est :

$\lim s_n = \frac{t_1}{1-q}$

EXERCICES

1. On donne les progressions arithmétiques suivantes :

   a) 3, 5, 7 t_{20} ? s_{20}?
   b) ½, 2, $\frac{7}{2}$ t_{12}? s_9?
   c) $15, 28, 41$ t_{50}? s_{50}?
   d) $70, 65, 60$ t_{40}? s_{40}?

2. Former les progressions arithmétiques dont on donne :

   a) $S = 253,$ $t_1 = 8$ 11 $n = 11$
   b) $S = -98,$ $t_1 = -29$ $n = 7$
   c) $S = 0,$ $t_1 = 35$ $n = 11$
   d) $t_3 = 11$ $t_{11} = 43$ $n = 13$

3. Si on donne 3 des 5 éléments

t_1, t_n, n, r, s_n d'une P.A. Calculer les 2 autres.

   a) $n = 11,$ $r = 3$ $s_n = 220$

   $t_1 = ?$ $t_n = ?$

   b) $t_n = 3,$ $r = -2,$ $s_n = 99$
   c) $t_n = 36,$ $n = 13,$ $s_n = 156$

   $t_1 = ?$ $r = ?$

   d) $t_n = -56,$ $n = 20,$ $r = -3$

   $t_1 = ?$ $s_n = ?$

   e) $t_1 = 1$ $n = 7$ $s_n = 28$

   $t_n = ?$ $r = ?$

f) $t_n = ?$ $n = ?$ $s_n = 2$ $t_1 = -5,$ $r = 5$

4. Ecrire les 10 termes d'une progression arithmétique dont on donne :

01) $t_1 = 13,$ $t_7 = 29$
02) $t_2 = 4{,}3$ $t_8 = 6{,}1$

5. Calculer la somme des :

01) 1OO premiers nombres pairs
02) 50 premiers multiples de 3

6. Calculer la somme des n premiers nombres entiers

7. Insérer 8 moyennes arithmétiques entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{13}{12}$

8. Insérer 3 moyennes arithmétiques entre les termes consécutifs de la progression : 6, 14, 22, 30, 38.

9. On donne les progressions arithmétiques suivantes :

01)$t_1 = \frac{1}{2},$ $r = \frac{1}{3},$ $S = 48,$ $n = ?$
02) $t_n = 58$ $r = 3$ $S = 585$ $t_1?$ $n\,?$

10. Démontrer que les 3 membres suivants sont en progression arithmétique :

01) $a, b, 2b - a$
02) $2a, a + b, 2b$
03)$\frac{a}{1+a}, \frac{2a+1}{1+a}, \frac{3a+2}{1+a}$
04) $\frac{a^2+b^2}{2}, \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, ab$
05) $\frac{a}{a-1}, \frac{a+1}{2a}, \frac{1}{a-a^2}$

11. Démontrer que les 3 nombres suivants sont en progression de raison 15°, déterminer ces angles.

12. La somme de 3 nombres en P.A est 33 et leur produit 1287. Trouver ces nombres.

13. On donne les progressions géométriques suivantes :

    01) $2, 4, 8 \quad t_{12}? \quad P_{12}? \quad s_{12}?$

    02) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \quad t_5? \quad P_5? \quad s_5$?

14. Former les PG dont on donne :

    01. $t_1 = 3 \quad q = 2 \quad n = 7$
    02. $t_2 = 2 \quad t_6 = 8 \quad n = 10$

15. Si on donne 3 des 5 éléments $\mathrm{t_1, t_n, n, q, s_n}$ d'une PG. Calculer les 2 autres.

    01. $n = 5 \quad t_1, \quad t_n?$

        $q = 2$

        $S_n = 62$

    02. $t_n = \frac{1}{2} \quad t_1?$

        $q = \frac{1}{4} \quad n =?$

        $S_n = \frac{35}{2}$

    03. $t_n = \frac{1}{2} \quad t_1 =?$

        $q = \frac{1}{4} \quad n =?$

        $S_n = \frac{85}{2}$

    04. $t_1 = ? \quad q =?$

        $t_n = 1 \quad s_n = \frac{15}{8}$

        $n = 4$

16. Partager 195 en 3 parties qui forment une progression géométrique dont le troisième terme surpasse le premier de 120.

17. Calculer :

    01. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=$
    02. $2+2^2+2^3+\cdots+2^n$
    03. $\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2^2}+2^2+\cdots+\frac{1}{2^n}+2^n$

18. Déterminer la génératrice des fractions décimales périodiques suivantes :

    01. $0{,}777$ ...
    02. $0{,}343434\ldots$

BIBLIOGRAPHIE

(1) A. GUION, Trigonométrie rectiligne et sphérique, Afrique édition, 1984 ;

(2) R. DE MACHIN G. BOSTEEL ;

(3) Cours des Mathématiques supérieurs Géométrie analytique et Calcul numérique. P. Thuillier Ed. Masson ;

(4) Algèbre 2B S. Lorent/R. Lorent Ed. A DEBOECK.

N° D'ENREGISTREMENT……………../15