UNIVERSITE DE KINSHASA

FACULTE POLYTECHNIQUE

PREPOLYTECHNIQUE

COURS DE GEOMETRIE ELEMENTAIRE
(Avec Exercices Résolus)
A l'usage des Etudiants de Préparatoire

Par

C.T. Laurent Constantin KATAYI TSHIBANGU

(Chargé de cours)

5ème Edition du C.E.P.S.T.I./Mont-Amba

Kinshasa XI

Janvier 2012

INTRODUCTION

Ce cours de géométrie élémentaire destiné aux étudiants des années préparatoires des Universités et Instituts Supérieurs Technique poursuit un but : Celui d'aider les jeunes étudiants à bien raisonner dans les cours où le dessin joue un rôle de base et y dégager une formule pouvant leur permettre de résoudre certains exercices présentant des difficultés particulières.

Cette découverte peut susciter l'amour et la persévérance dans le travail qui plu tard peut déboucher à une recréation sure si on arrive à résoudre plusieurs exercices sans beaucoup d'efforts.
Créer des cas nouveaux à ceux déjà résolus dans ce cours et dans cette optique,la géométrie élémentaire vous apparaîtra utile et contribuera à coup sur à votre amélioration.
Un effort est souhaité pour les étudiants de retenir les définitions ainsi que les propriétés de certains mots dans le but de les utiliser dans le raisonnement à preuve logique qu'elle exige .
Ce cours est conforme au programme des années préparatoires de la faculté Polytechnique et aménagé pour guider le raisonnement des jeunes ingénieurs .
On utilisera dans ce cours une seule démonstration : **démonstration à preuve logique** dans laquelle chaque passage est justifié valablement au moyen des preuves logiques .
Cette démonstration est souvent considérée comme une dissertation mathématique fait l'objet des difficultés qu'éprouvent nos étudiants pour l'assimilation facile de ce cours .
Il contient des vocabulaires y appropriés et parmi lesquels les uns contiennent les autres et qu'il ne faut pas différentier totalement mais plutôt les spécifier au moyen des propriétés caractéristiques ;
Remarquons en plus que le mot **élémentaire** n'est pas synonyme de facile mais parce qu'il regroupe les notions très indispensables pour la vie d'un étudiant et facilite la compréhension des autres cours utilisant un dessin dans le raisonnement de base.
Le début du raisonnement de la démonstration à preuve logique est aidé par l'**observation** d'un dessin exécuté à partir des données de l'énoncé et solidifié par l'**expérimentation** considérées comme supports de base puis enrichi par les définitions et les résultats des certains théorèmes déjà démontrés.

C.T. LAURENT CONSTANTIN KATAYI TSHIBANGU .M.M

A . <u>GEOMETRIE PLANE</u>

CHAPITRE 1 : GENERALITES ET NOTIONS DE BASE

1.1. GENERALITES

1.1.1. But de la géométrie Elémentaire

La géométrie élémentaire étudie les figures et les objets selon leurs formes et propriétés sur un plan et dans l'espace et donne ainsi le moyen de mesurer leur *étendues et volumes.*
Elle permet aussi de visualiser les figures planes en objets dans l'espace et inversement.

1.1.2. VOCABULAIRES

Chaque cours nécessite un certain nombre des vocabulaires ayant un sens propre ou figuré approprié. Ainsi on a entre autre :

1. La proposition

Une proposition est l'énoncé d'une vérité mathématique ayant un seul font vrai ou faux et non les deux à la fois .

2. Un théorème

Un théorème est une proposition qui demande une démonstration .
Il a 3 grandes parties :

- L'hypothèse : Ce qui est supposé vrai par rapport à l' énoncé du théorème et constitue l'ensemble des données et voir même le début du raisonnement et le dessin.
- La thèse : C'est la conclusion même à atteindre.
- La démonstration :

C'est un raisonnement souvent déductif partant de l'hypothèse et conduisant à la thèse.
Il y'a plusieurs sortes de démonstrations,entre autres : la démonstration empirique, la démonstration par récurrence, la démonstration par absurdité,la démonstration à preuve logique etc.,. .

3. La réciproque d'un théorème :

C'est un nouveau théorème où l'hypothèse et la thèse sont respectivement thèse et hypothèse du premier .

<u>Théorème</u> → <u>Réciproque</u>

hypothèse → thèse

thèse → hypothèse

4. Le contraire d'un théorème :

C'est aussi un théorème où l'hypothèse et la thèse sont respectivement le contraire de l'hypothèse et la thèse du premier .

<u>Théorème</u> → <u>Contraire</u>

Hypothèse → non hypothèse

Thèse ⟶ non thèse

5. Le postulat :

C'est une propriété à admettre sans démonstration .

N.B. On est libre d'accepter ou de rejeter . Si on accepte , on fait la géométrie Euclidienne et dans le cas contraire : la géométrie non-Euclidienne.

6. Axiome

C'est une vérité déjà évidente par elle même .

7. La corollaire :

C'est une conséquence découlant immédiatement de ce qui vient d'être démontré .

8. Le lemme :

C'est un résultat connu d'avance pouvant permettre de justifier le théorème actuel.

9. Un problème :

C'est une question qui demande une résolution.

Tout comme un théorème , un problème a aussi 3 grandes parties : les données ,les demandées et la résolution . Il a même portée que le théorème .

1.2. LES NOTIONS DE BASE

Les notions de base sur lesquelles se fondent plusieurs sciences sont difficilement définissables .Il en est de même de la géométrie élémentaire. Mais nous nous forcerons de les expliciter au moyen des exemples diversifiés .

Il s'agit de : **POINT ,DROITE , PLAN** .

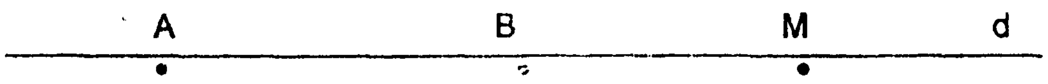
1.2.1. EXEMPLES ET NOTATIONS

- L'idée d'un **point** est donnée par une trace quelconque ,mais le point géométrique considéré ici est sans dimension et il est imaginaire.

On représente un point dans ce syllabus par une lettre majuscule.

Exemple : • A

- L'idée d'une ligne est donnée par un fil très fin de forme quelconque ,mais l'idée de la droite ou ligne droite est donnée par un fil très fin et tendu .
- La droite géométrique considérée ici est sans épaisseur ,imaginaire et illimitée dans les sens . On la représente par 2 de ses points ou par une lettre miniscule.



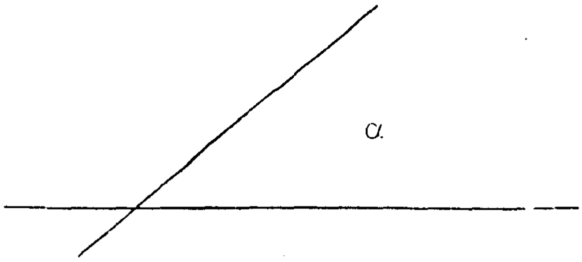
On note : d = AB =AM=BM (droite qui s'appuie sur les points A et B) etc....

N.B. Deux points sur une droite y fixe un segment de droite noté : [AB.

Tout point considéré sur une droite y détermine : une demi-droite notée : [AB = [AM ,

A est l'origine

- *L'idée d'un plan est donnée par la surface d'une eau calme. Mais le plan* géométrique considéré ici est imaginaire sans épaisseur et illimité dans tous les sens.



plan α

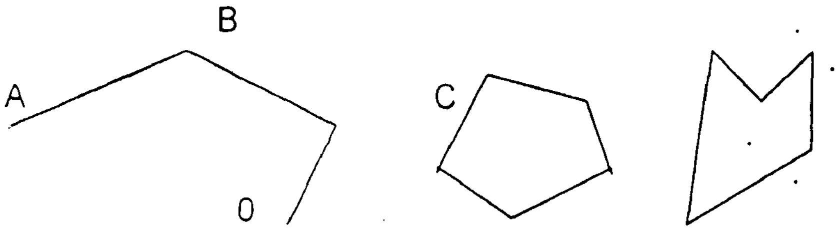
QUELQUES POSTULATS

P_1 Deux points distincts déterminent une droite et une seule c .à. d par deux points on peut mener une seule droite.
P_2 Trois points non alignés déterminent un seul plan ;
P_3 Une droite ayant en commun 2 points distincts en commun avec le plan, est contenue entièrement dans le plan . On dit qu'elle est la droite du plan .
P_4 Deux plans ayant en commun trois points non alignés sont confondus.

1.2.2. FIGURES GEOMETRIQUES SIMPLES

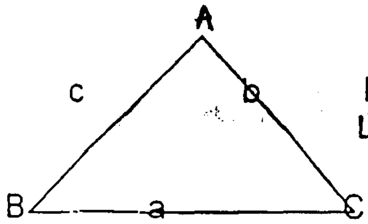
Les figures géométriques simples sont formées par les éléments de base ou leurs dérivées.
Les plus simples sont :

a) Ligne polygonale (contour polygonal) ou ligne brisée :
Elle peut être ouverte (a) , fermée (b) et (c)



(a) (b) (c)

La figure (b) est dite : convexe tandis que (c) est concave .
Remarquons que le contour polygonal fermé de 3 côtés ou angles : est dit : **triangle**.
A



Les points A,B,C sont les sommets
Les droites AB,AC,BC sont ses côtés

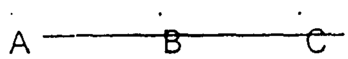
SOMME DES SEGMENTS :

.A B. C. D. E.

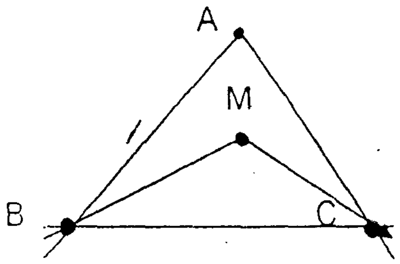
AB + BC + CD +DE = AE.

Si AB=BC=CD=DE $\Rightarrow$ AE = n.AB , **n** est la mesure de AE avec AB comme unité.
. En cas de 2 segments :

AC = 2 AB $\Rightarrow$ AB = ½ AC ou B est milieu de AC



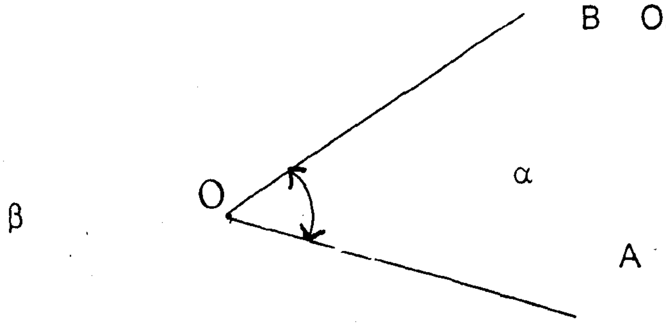
POSTULAT :
Toute ligne brisée passant par un point intérieur au triangle et joignant les extrémités d'un côté est supérieure à ce côté et inférieure à la somme de 2 Autres côtés .



$BC \leq BM + MC \leq BA + AC$

$\Rightarrow \quad | BC - BA | \leq AC \leq BA + BC$

b) ANGLE
Une portion de plan entre deux demi-droites d'origine commune et illimité est appelée :angle.



On note : $\alpha = \widehat{AOB}$, OA=origine et OB=l'extrémité de

$\hat{\beta} = \widehat{AOB}$

Les angles α et β ont les mêmes côtés mais l'un est convexe (α) et l'autre est concave (β).
La convexité d'un angle ou polygone consiste à ce qu'aucun prolongement de l'un de ses côtés ne traverse la figure considérée .
Si l'angle convexe est égal à l'angle concave ,alors chacun est dit : **angle plat .**
Et les côtés d'un plat sont opposés.

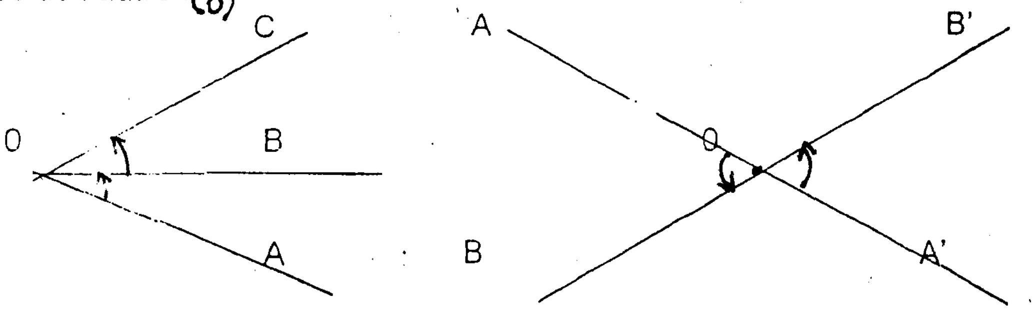
Un angle convexe à côtés confondus est dit : **nul ,** tandis que le concave est **plein .**

1 plein = 2 plats

Si la somme de 2 angles vaut un plat , ils sont **supplémentaires.**
Postulat : Les suppléments d'un même angle sont égaux.

ANGLES ADJACENTS
Deux angles sont coplanaires et ont un sommet commun ,un côté commun et sont de part et d'autre du côté commun . (a)

Deux angles sont opposés par le sommet si les côtés de l'un sont en prolongation des côtés de l'autre . (b)



(a) (b)

$\widehat{A0B}$ et $\widehat{B0C}$ sont adjacents cfr (a) ,

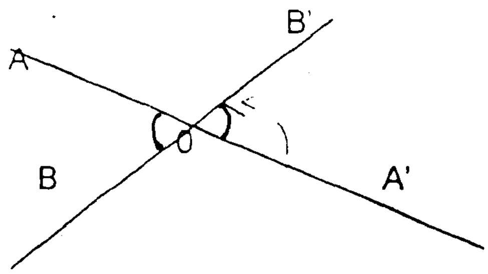
$\widehat{A0B}$ et $\widehat{A'0B'}$ sont opposés cfr(b)
A0A' =B0B'= un plat

Théorème :
Deux angles opposés par le sommet sont égaux .

Hypothèse : $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'OB'}$, $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'}$ = 1 plat

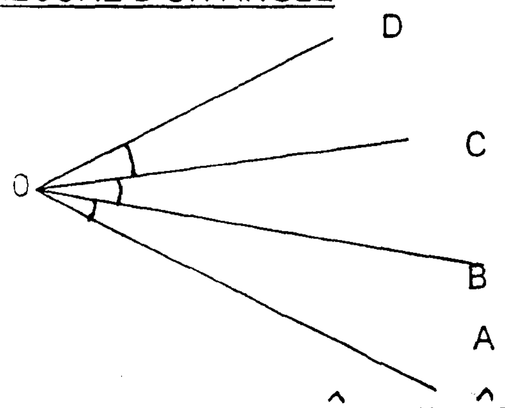
Thèse : $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$

Demonstration :



Par hypothèse A0A' =B0B'=un plat ,avec
A0A'=A0B' + A'0B' et B0B' = A0B+A0B'
$\Rightarrow$ A0B' +A'0B' = A0B +A0B'
$\Rightarrow \angle$ A0B $= \angle$ A'0B' car les suppléments d'un même angle ($\angle$) sont égaux .

MESURE D'UN ANGLE



< A0B + < B0C + < C0D = < A0D

En cas d'angles égaux ,on a :
< $\widehat{A0D}$ = **n** . $\widehat{A0B}$

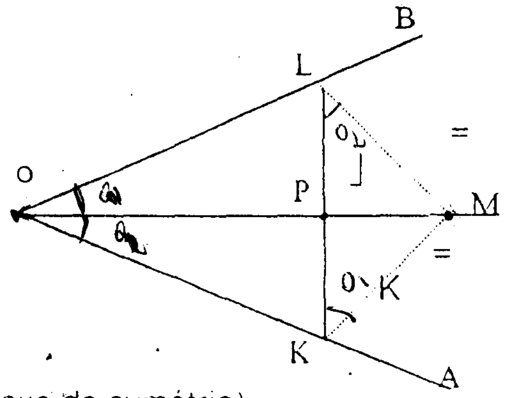
ou < $\widehat{A0B} = \frac{1}{n}$. <A0D

En cas de 2 angles $\widehat{A0B}$ =1/2 $\widehat{A0C}$
0B est dite **bissectrice** de l'angle A0C .

Propriétés de la bissectrice

Tous les points de la bissectrice d'un angle sont **équidistants** des côtés de cet angle.

Et les pieds des perpendiculaires menées par ce point aux côtés sont équidistants de la bissectrice qui en constitue l'axe de symétrie .



$O_1 = O_2 \Rightarrow OM$ bissectrice

ML = MK et en plus KL est $\perp$ à OM

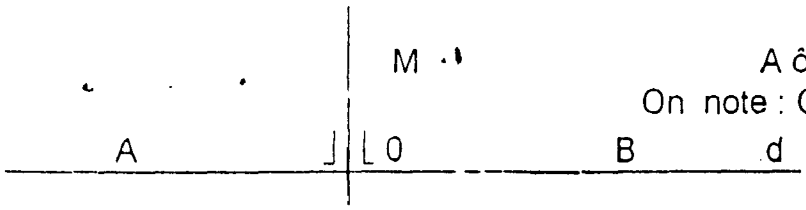
Et LP = PK

L et K sont symétriques par rapport à OM (axe de symétrie) .

DROITES PERPENDICULAIRES

Segment perpendiculaire à une droite.

Un segment qui forme avec une droite 2 angles adjacents égaux est dit perpendiculaire à la droite ou le segment et la droite sont perpendiculaires .



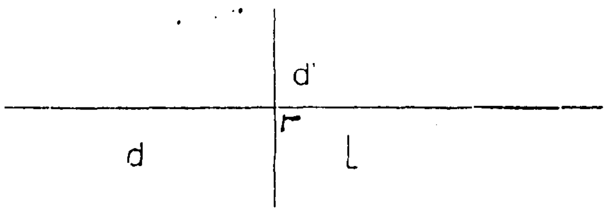
A ô M = M ô B

On note : OM $\perp$ d .

Dans ce cas :chacun d'angle est dit : **angle droit** et que les côtés d'un droit sont perpendiculaires.

Si la somme de 2 angles vaut $\pi/2$, ils sont dits complémentaires et si elle vaut π les angles sont supplémentaires .Notons en plus **que les compléments ou suppléments** d'un même angles sont **égaux.**

En se referant à la définition de segment perpendiculaire à une droite,on peut aussi en déduire la perpendicularité de 2 droites . Donc deux droites sont perpendiculaires si elles forment entre elles 4 angles droits .

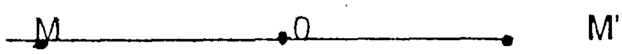


On note :

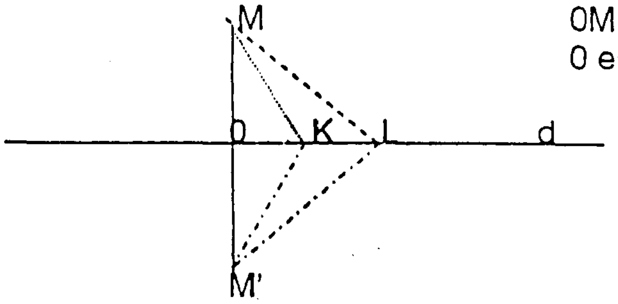
d $\perp$ d'

SYMETRIE

-Deux points M et M' sont symétriques par rapport à un point 0 si 0 est leur milieu et leur lieu géométrique est un cercle de centre 0 et de rayon 0M=0M' .



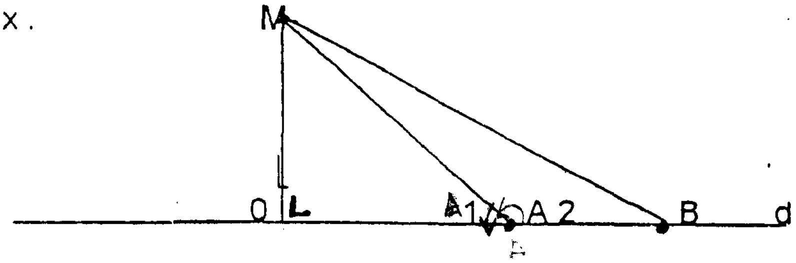
-Deux points sont symétriques par rapport à une droite ssi la droite est perpendiculaire à ce segment par son milieu .



0M = 0M' et MM' $\perp$ d
0 est son pied sur MM'
d est **médiatrice** du segment

PROPRIETES DE LA MEDIATRICE D' UN SEGMENT

Tout point de la médiatrice est **équidistant** des extrémités du segment.
KM = KM' , LM = LM'
SEGMENT OBLIQUE
Un segment est dit oblique par rapport à une droite si il forme avec cette dernière deux angles inégaux .



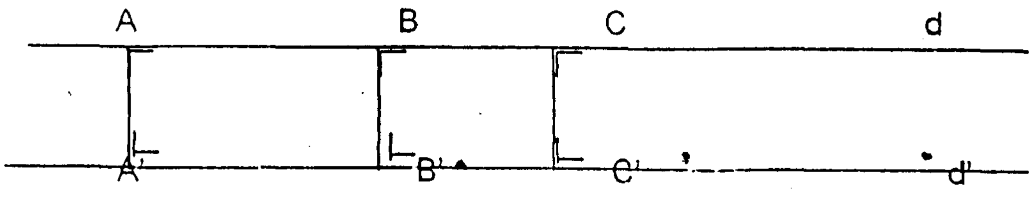
$\hat{A}_1 \neq \hat{A}_2 \Rightarrow$ AM oblique par rapport à la droite d et A est le pied de l'oblique AM sur d , 0 est le pied de la perpendiculaire OM à d .

Théorème :D'un point pris hors d'une droite, on mène un segment perpendiculaire et plusieurs obliques . a)Le segment perpendiculaire est inférieur à tout oblique
b) Deux obliques dont les pieds s 'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égaux .
c) L'oblique dont le pied s 'écarte le plus du pied de la perpendiculaire est plus *grand*
(pour la démonstration , utiliser la symétrie et propriétés des lignes brisées T.P)

CHAPITRE 2 : DROITES PARALLELES –CIRCONFERENCE-CONSTRUCTION

2.1. Définition :

Deux droites d et d' sont parallèles si la longueur de leur perpendiculaire commune est la même partout . Cette longueur est aussi dite : **distance** entre deux droites.

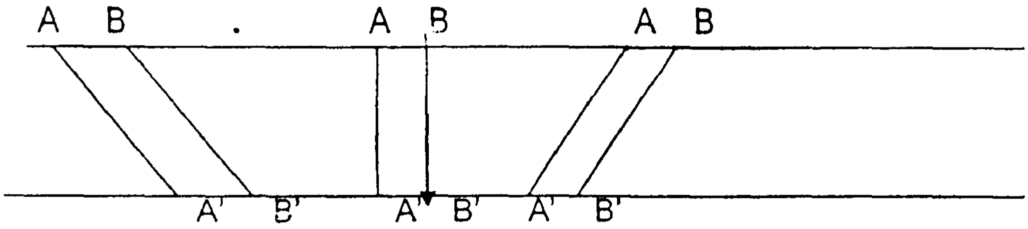


AA' ⊥ d , AA' ⊥ d' , ⇒ AA' est une perpendiculaire commune et AA' =BB' =CC'=m

d' parallèle à d et notée : d // d' (d parallèle à d')
si m ≠ 0 : d et d' sont parallèles et distinctes
si m = 0 : elles sont parallèles confondues

2.1.1. **Propriétés des droites parallèles .**

Les segments parallèles entre 2 droites parallèles sont égaux . Les positions des segments n'ont aucune importance.



2.1.2. Postulats

P_1 . Par un point hors la droite ,on peut mener une seule parallèle à cette droite .
P_2 . Deux droites parallèles ou perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles.

2.1.3. Quelques théorèmes :

1. Deux droites parallèles coupées par une sécante déterminent avec cette dernière 8 angles dont 4 extérieurs et 4 intérieurs parmi lesquels :
- a) Les angles alternes internes (externes) égaux .
- b) Les angles correspondants égaux.
- C) Les angles intérieurs (extérieurs) du même côté de la sécante sont supplémentaires.
2. La somme des angles intérieurs d'un triangle vaut un plat ou 180° ;
3. Les angles aigus (obtus) à côtés respectivement perpendiculaires(parallèles sont supplémentaires si l'un est aigu et l'autre obtus .

2.2. CIRCONFERENCE ;

2.2.1. Définition .

Une circonférence est un lieu géométrique des points équidistants d'un point fixe (centre du cercle). Il est aussi dit**:** CERCLE

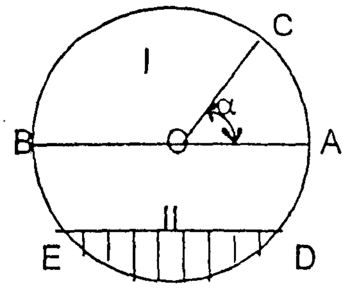
L'ensemble des points intérieurs au cercle constitue un **disque .**

Un disque est fermé ou ouvert selon que l'on considère la frontière ou non. La frontière est aussi dite adhérence .

0 = le centre
OB=OA=OC= rayon
AB = diamètre = 2 rayon
α = A0C= angle au centre

Et la portion de l'angle α limitée par l'arc AC s'appelle : **secteur**

Les parties I et II du cercle sont **: segments du cercle.**

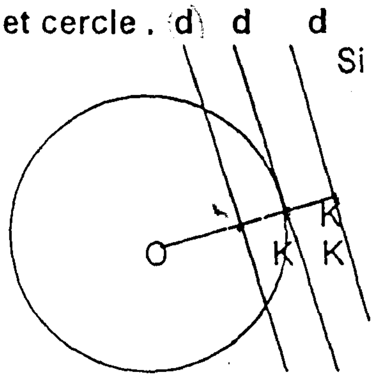


N.B. On dit que : 1) L'angle au centre intercepte l'arc et inversement l'arc est intercepté par l'angle au centre .

2) La corde AC sous-tend l'arc et inversement .

3) deux cercles égaux ont les rayons égaux .

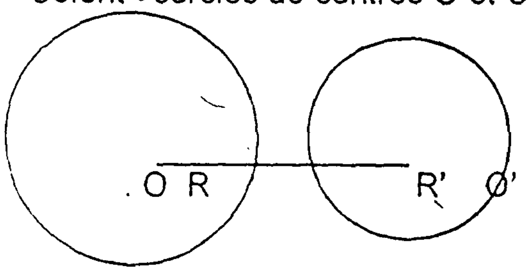
2.2.2 . Droite et cercle .



Si Ok est la distance entre le centre et la droite
R est le rayon du cercle :
OK < R : la droite d est sécante
OK = R : d est tangente au cercle
N.B. La tangente est perpendiculaire au rayon aboutissant en ce point.
OK > R : la droite d est extérieure au cercle.

2.2.2. Positions de 2 cercles

Soient 2 cercles de centres O et O' et de rayons respectifs R et R' avec R > R' .



OO'= d distance entre 2 centres
d>R+R' : cercles extérieurs l'un de l'autre
d= R+R' :cercles tangents intérieurement
d=R-R' :cercles tangents intérieurement
d<R-R' :l'un est intérieur à l'autre
R-R'<d<R+R' : cercles sécants .

2.2.4 .Postulats.

1. Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, on a :

P_1. Les cordes égales sous-tendent des arcs égaux et inversement
P_2. Les cordes égales sont également distantes du centre ;
P_3. Les angles au centre égaux interceptent des arcs égaux et inversement ;
P_4. un diamètre perpendiculaire à une corde ,la divise en 2 parties égales ainsi que l'arc sous-tendu .

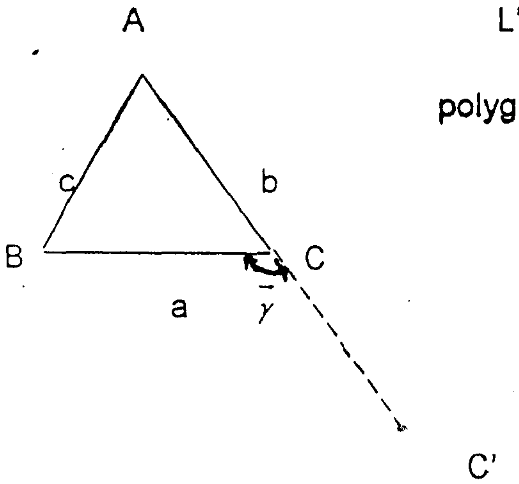
2.3. Problèmes de Construction

Dans la plupart des constructions , on utilise les définitions ,les propriétés des médiatrices, des bissectrices et autres droites ainsi que les symétries .
Problème 1 : La division d'un segment en 2 parties égales se fait à partir des propriétés des médiatrices des segments .
Problème 2 : Par un point donné , mener une droite parallèle à une droites donnée.(prendre les propriétés des segments parallèles entre les droites parallèles)
Problème 3 : Diviser un segment donné en n parties égales (cfr Problème 2)
Problème 4 : Par un point mener une droite perpendiculaire à une droite donnée .
Problème 5 : Construire par un point donné une droite qui fasse avec une droite donnée un angle égal à un angle donné .

CHAPITRE 3 . TRIANGLE ET QUADRANGLE

3 .1 TRIANGLE .

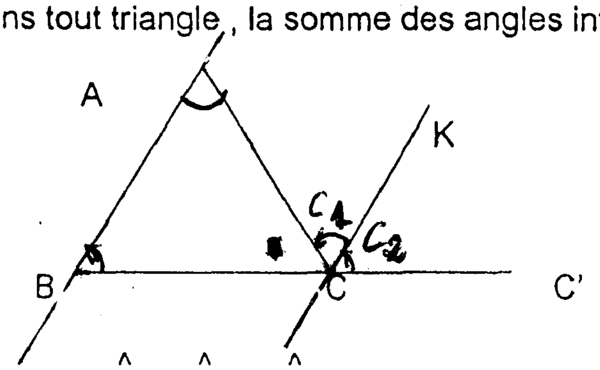
3.1.1. Définition :
Un triangle est un polygone convexe à 3 côtés ou 3 angles.
Les droites $\hat{AB}$=c , BC = a et AC =b sont ses côtés et les angles A ,B , C sont intérieurs au triangle. Les points A ,B,C sont les sommets du triangle.



L' angle BCC' = $\vec{\gamma}$ est dit : angle extérieur au polygone (formé par un côté et le prolongement du côté consécutif)

Théorème

Dans tout triangle , la somme des angles intérieurs vaut 180° .



hypothèse : triangle ABC

Thèse : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 1$ plat

Démonstration :Prolongeons BC jusqu'en C'.
et par C menons CK parallèle à AB.

On a : $\hat{C} + \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 1$ plat ou 180°

Or $\hat{C}_1 = \hat{A}$ (angles alternes internes) et $\hat{C}_2 = \hat{B}$ (angles correspondants)

$\Longrightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 1$ plat $= 180°$.

Conséquence : Tout angle extérieur au triangle vaut la somme de 2 autres qui ne lui sont pas adjacents.

$$\Longrightarrow \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{B}$$

Remarques :

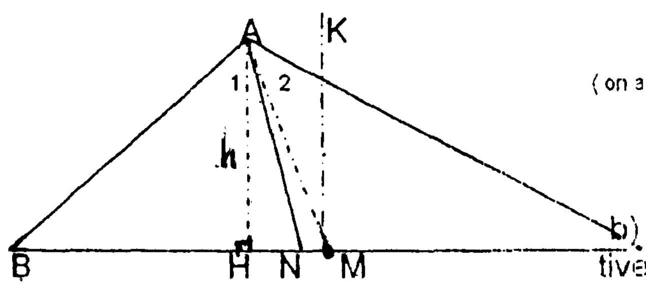
_ Un triangle qui a 3 côtés égaux(angles) est dit :**équilatéral** et dans le cas contraire ,il est **scalène**.

_ Celui qui a 2 côtés ou angles égaux est isocèle. Dans ce cas : un côté adjacent à 2 angles égaux ou un angle entre 2 côtés égaux est dit **principal .**

_ Un triangle est dit **rectangle** si il a un angle droit.

N.B. On ne peut avoir plus d'un angle droit (obtus) dans un triangle .

3.1.2 . Droites et Points remarquables dans un triangle .



a) AH $\perp$ BC : AH = hauteur

(on a 3 hauteurs dans le triangle et leur point d'intersection est appelé : ORTHOCENTRE .

b) BM =MC : AM est la médiane relative à A . (on a 3 médianes dans chaque triangle et leur point d'intersection est : barycentre ou centre de gravité du triangle).

c) KM $\perp$ BC par son milieu :KM est la médiatrice du segment BC.(on a 3 médiatrices dans chaque triangle et leur point d'intersection est :centre de la circonférence circonscrite au triangle)

d) AN tel que $A_1 = A_2$ est la bissectrice du triangle . (on a 3 bissectrices dans le triangle et leur point d'intersection est : centre de la circonférence inscrite au triangle)

Postulat :Dans tout triangle, au plus grand côté est opposé le plus grand angle et inversement .

3.1.2. Les cas d'égalité des triangles

Cas généraux :

Deux triangles sont égaux :

1) s'ils ont un côté égal adjacent à 2 angles égaux 2 à2 .
2) S'ils ont un angle égal compris entre deux cotés égaux 2à2 .
3) S'ils ont respectivement les 3 côtés égaux 2à2 .

Cas des triangles rectangles :

Deux triangles rectangles sont égaux s'ils ont une hypoténuse égale et :

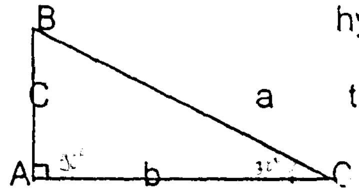
1) un angle aigu égal
2) une cathète égale

(Cathète ou côté de l'angle droit)

N.B. Dans un triangle isocèle , la médiane ,médiatrice , hauteur , bissectrice d'un angle principal sont confondues et inversement .

Théorème

Dans un triangle rectangle , le côté opposé à un angle de 30° vaut la moitié de l'hypoténuse .



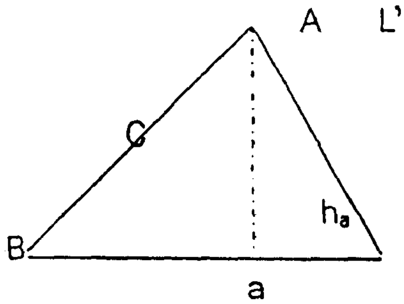
hypothèse : triangle ABC , $\hat{A} = 90°$, $\hat{C} = 30°$

thèse : $AB = ½ BC$

Démonstration :Se référant à la résolution des triangles rectangles , on a :

$\frac{AB}{BC} = \sin C = \sin 30° = ½ \Longrightarrow AB = 1/2BC$.

3.1.3. Aire d'un triangle



L'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de la Base par sa hauteur .

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

Avec $h_a = c \cdot \sin B = b \cdot \sin C$ etc....... Ainsi on a aussi :

$$S = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2} = \frac{c \cdot b \cdot \sin A}{2}$$

3.2 Quadrangle

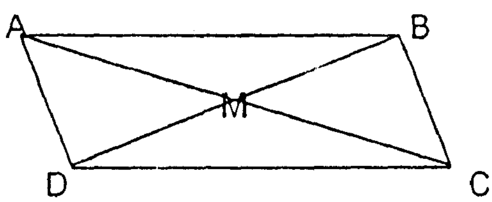
3.2.1. Définition

Un quadrangle est un polygone qui a 4 angles ou 4 côtés .

N.B. Ici on utilisera les quadrangles convexes les plus simples . Il s'agit de :

a) **Parallélogramme**

Est un quadrangle convexe ayant les côtés opposés parallèles



$AB \parallel DC$ et $AD \parallel BC$

Propriétés des parallélogrammes :

P_1 . Les angles (côtés) opposés sont égaux. $\hat{A} = \hat{C}$, $\hat{B} = \hat{D}$,AB=CD ,AD = BC

P_2 . Les angles consécutifs sont supplémentaires ($\hat{A} + \hat{B} = 180°$)

P_3 . Les diagonales se coupent en leurs milieux (AM = MC et BM = MD)

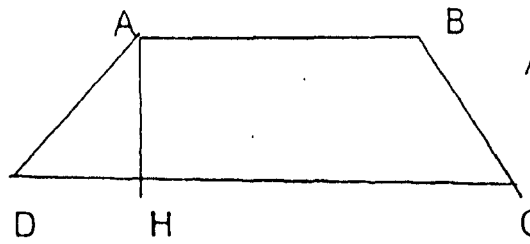
On distingue :- Les parallélogrammes simples

- Les parallélogrammes rectangles(ayant un **angle droit**)
- Les losanges (qui ont **tous les côtés égaux**) .

N.B. Un carré est un losange rectangle(à cause de son double égalité de côtés et d'angles)
Les rectangles ont mêmes propriétés que les parallélogrammes et en plus les diagonales sont **égales.**
Les losanges ont en plus les diagonales perpendiculaires et bissectrices des angles .
Les carrés ont toutes les propriétés des rectangles et des losanges .

b) **Le trapèze**

C'est un quadrangle convexe ayant deux côtés parallèles (bases) et deux autres non -parallèles .



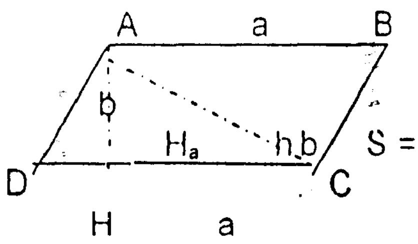
AB // DC
AB : petite base et DC :grande base.

Un trapèze est isocèle s'il a les côtés non -parallèles égaux et dans ce cas **tous les angles adjacents à une même base sont égaux et les angles opposés sont** supplémentaires .
La distance AH entre les 2 bases est : la hauteur du trapèze ;
Un trapèze est rectangle si il a un seul angle droit .

3 2 2. Aire d'un quadrangle convexe

a) **Parallélogramme.**

$\boxed{S = a \cdot h_a = b \cdot h_b}$, $h_a = b. \sin D = b \cdot \sin B$.



Cette formule devient

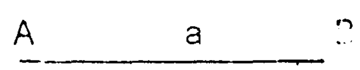
$S = a. b \cdot \sin \hat{B} = a\, b \cdot \sin \hat{D} = a\, b \cdot \sin \hat{A} = a\, b \cdot \sin \hat{C}$

Ces formules sont aussi valables pour le carré et losange dans lesquels a = b .
L'aire d'un losange s'obtient aussi avec la formule :

$$\boxed{S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}}$$

(avec d_1 et d_2 : les diagonales)

b) Trapèze .

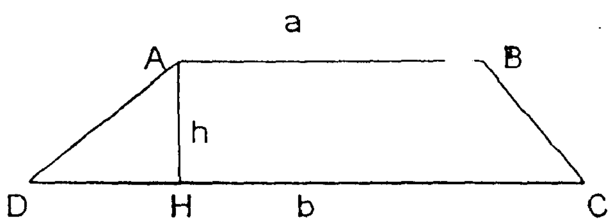


$$\boxed{S = \frac{(a + b) \cdot h}{2}}$$

$\frac{2+3}{3} = \frac{4+6}{6}$

$\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$

$\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$



T . P . 1) Dans un triangle , le segment qui joint les milieux de deux côtés consécutifs est parallèle à l'autre côté est en vaut sa moitié .

2)Dans tout triangle , le barycentre est sur chacune des médianes et située à 2/3 à partir du sommet .

3) Les angles opposés dans un trapèze isocèle sont supplémentaires .

Chapitre 4 . SIMILITUDE DES FIGURES GEOMETRIQUES

.1.Définition

Soient : a, b, c, d , e , f , ... , m, n .....

Les mesures algébriques de quelques segments donnés. Si il existe un réel k non nul tel que : a /b = c/d= e/f = ... = m/n = ... k , alors a , b , c, d, e ,f , ... , m , n sont en proportion ou sont proportionnels dans cet ordre.

Dans ce cas k est le rapport de proportionnalité ou rapport de similitude.

4.1.1. Propriétés des proportions

Si a ,b, c , d , e ,f ,.......... M , n .... Sont en proportion , on a les propriétés suivantes :

1. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{e} = \frac{n}{m} = \ldots\ldots\ldots\ldots = 1/k = K$ (avec $K \neq 0$)

2. $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} = \frac{e+f}{e} = \ldots = \frac{m+n}{n}$

8. $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = k$.

3 . $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} = \frac{e+f}{f} = \ldots = \frac{m+n}{n}$,

9. $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} = \frac{e-f}{f} = \ldots = \frac{m-n}{n}$

4. $\frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d}$

5. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} = \frac{e+f}{e-f} = \frac{m+n}{m-n} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

6. $\dfrac{a+c+e+....+m}{b+d+f+......+n} = \dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a}{b} = \text{k}$

7. $\dfrac{a-b}{a} = \dfrac{c-d}{c} = \dfrac{e-f}{e} = ... = \dfrac{m-n}{m}$

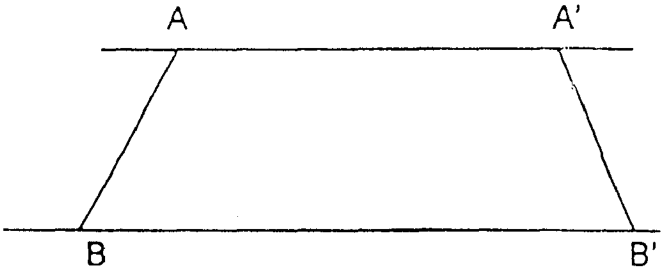
4.1.2. Transformation de plan

Soit t une transformation du plan π dans lui-même qui à un point A associe le point A' de π .

$T : \pi \longrightarrow \pi$

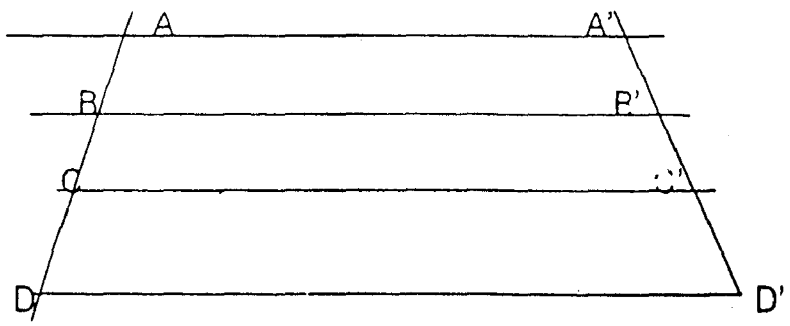
$A \longmapsto t(A) = A'$ ou $A \xrightarrow[t]{\hspace{3em}} A'$

A' est le transformé de A par t ou l'homologue de A . Dans ce cas A est aussi l'homologue de A' par la transformation réciproque .
Si en plus B' est l'homologue de B pour la même transformation t , alors le segment A'B' est un segment homologue du segment AB .



Avec AA' //BB'

Donc deux segments sont homologues si ils sont entre les mêmes parallèles .



AB et A'B' sont homologues ,il en est de même pour les autres : BCet B'C',BD et B'D' AD et A'D' .

Si en plus : $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = ... k$, on dit que les segments homologues sont aussi proportionnels d'où le théorème de Thalès.
Théorème de thalès :

Un système des droites parallèles détermine sur deux sécantes quelconques des segments homologues et proportionnels .

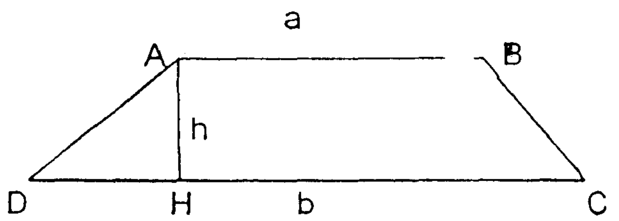
$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{BD}{B'D'} = ...$ Ou $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{C'D'}{CD} = \dfrac{B'D'}{BD}$.

Et en vertu des propriétés des proportions , on peut écrire :

$\frac{2+3}{3} = \frac{4+6}{6}$

$\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$

$\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$



T . P . 1) Dans un triangle , le segment qui joint les milieux de deux côtés consécutifs est parallèle à l'autre côté est en vaut sa moitié .

2)Dans tout triangle , le barycentre est sur chacune des médianes et située à 2/3 à partir du sommet .

3) Les angles opposés dans un trapèze isocèle sont supplémentaires .

Chapitre 4 . SIMILITUDE DES FIGURES GEOMETRIQUES

.1.Définition

Soient : a , b , c , d , e , f , ... , m , n .....

Les mesures algébriques de quelques segments donnés. Si il existe un réel k non nul tel que : a /b = c/d= e/f = ... = m/n = ... k , alors a , b , c, d, e ,f , ... , m , n sont en proportion ou sont proportionnels dans cet ordre.

Dans ce cas k est le rapport de proportionnalité ou rapport de similitude.

4.1.1. Propriétés des proportions

Si a ,b, c , d , e ,f ,.......... M , n .... Sont en proportion , on a les propriétés suivantes :

1. $$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{e} = \frac{n}{m} = \ldots\ldots\ldots\ldots = 1/k = K \;(\text{ avec } K \neq 0)$$

2. $$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} = \frac{e+f}{e} = \ldots = \frac{m+n}{n}$$

3. $$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} = \frac{e+f}{f} = \ldots = \frac{m+n}{n},$$

$$\frac{e-f}{f} = \ldots = \frac{m-n}{n}$$

4. $$\frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d}$$

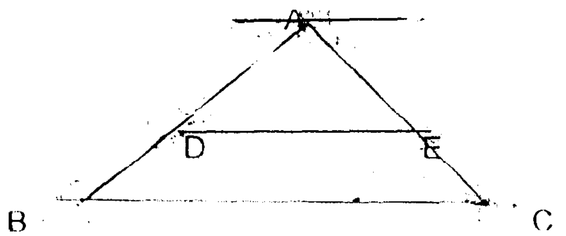
5. $$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} = \frac{e+f}{e-f} = \frac{m+n}{m-n} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

8. $$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = k$$

9. $$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} =$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'} \Rightarrow \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$$

Corollaire : Toute parallèle à un côté d'un triangle divise les 2 autres côtés en segments homologues et proportionnels .



DE // BC ,on a : $\frac{AE}{AD} = \frac{EC}{DB} = \frac{AC}{AB}$.

Remarque : Pour les construction d'une proportionnelle , on ramène toujours l'inconnue à la 4ème proportionnelle en appliquant les propriétés des proportions .

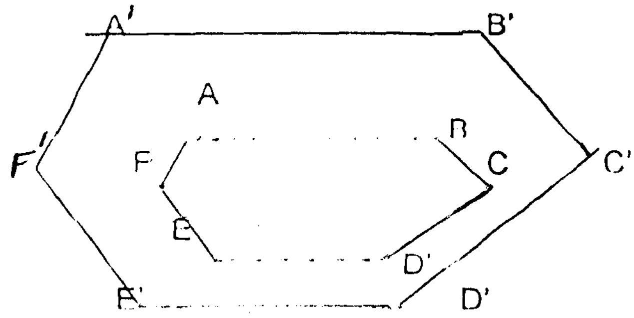
4.2. Figures semblables

Définition

Deux polygones sont semblables s'ils ont le même nombre d'angles (de côtés) et leurs côtés sont en proportion.

On note :

ABCDEF ∼ A'B'C'D'E'F'



On lit : la figure ABCDEF est semblable à la figure A'B'C'D'F'

4.2.1. Cas de similitude des triangles

Deux triangles sont semblables si et seulement si :

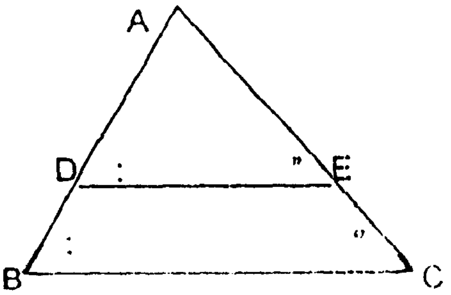
1. Ils ont les 2 angles égaux 2 à 2 ;
2. ils ont un angle égal compris entre les côtés proportionnels
3. Ils ont les côtés proportionnels
4. ils ont leurs côtés respectivement parallèles ou perpendiculaires

Notons que : la ressemblance n'est pas synonyme de l'égalité mais toute fois les figures égales sont semblables ;

4.2.2. Conséquences :

1.Si deux triangles sont semblables ,alors **les rapports des côtés opposés aux angles égaux sont égaux .**

DE // BC , AE // AC , AD // AB $\Rightarrow \nabla$ ABC ∇ ADE



$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

2 . f et f' étant des polygones semblables , P et P' , S et S' , V et V' respectivement leur périmètre , surface et volume , on a :

1) $\frac{P}{P'} = \frac{a}{a'} = k$, k est le rapport de similitude des côtés a =BC et a' = DE

2) $\frac{S}{S'} = k^2$ et 3) $\frac{V}{V'} = k^3$

4.3. Homothétie.

4.3.1. Définition

Soit O un point fixé du plan π (centre de l'homothétie) , k un réel non nul .
Si A est un point quelconque de π ;
On appelle homothétie de centre O et de rapport k notée : H (O,k) , une transformation semblable du plan π en lui-même qui à un point A associe le point A' du plan tel que :

$$\frac{OA'}{OA} = k \Rightarrow \boxed{OA' = k \cdot OA}$$

. A ______ . O ______ . A'

. A'

A' s'appelle : l'homothétique de A dans H(O k) avec O ,A ,A' alignés(collinaires)

Ainsi on a : $\frac{OA'}{OA} = k \Rightarrow \frac{OA}{OA'} = \frac{1}{k} = K \Rightarrow$ A est aussi l'homothétique de A' par une transformation inverse et on dit que : A' et A sont homothétiques l'un de l'autre .

Si k > o : l'homothétie est directe , si k < o : l'homothétie est inverse ;
Si k = o : Tout point du plan a pour image le centre .

4.3.2 . Construction des figures homothétiques

Pour construire une figure homothétique , on utilise la formule : **OA' = k . OA**

a) Point : On applique seulement la formule ci-dessus et placer l'image A' sur le support par rapport au centre de l'homothétie O .
b) Un segment : Son homothétique est un segment parallèle au premier et dont le rapport est k.
c) Une droite : L'homothétique d'une droite est une droite parallèle à la première.

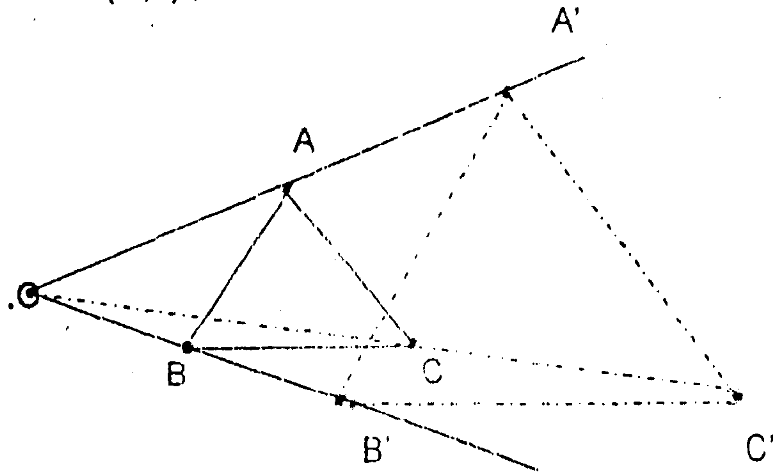
d) Angle : L'homothétique d'un angle est aussi un angle égal au premier dont les côtés sont respectivement parallèles .

e) Cercle : L'homothétique d'un cercle est un cercle dont les rayons sont dans le rapport de l'homothétie . c. à . d : $R' = k \cdot R$

f) Polygone : L'homothétique d'un polygone est aussi un polygone semblable au premier et semblablement disposé .

EXEMPLE : Dans H(O,2) , construire l'homothétique d'un triangle .

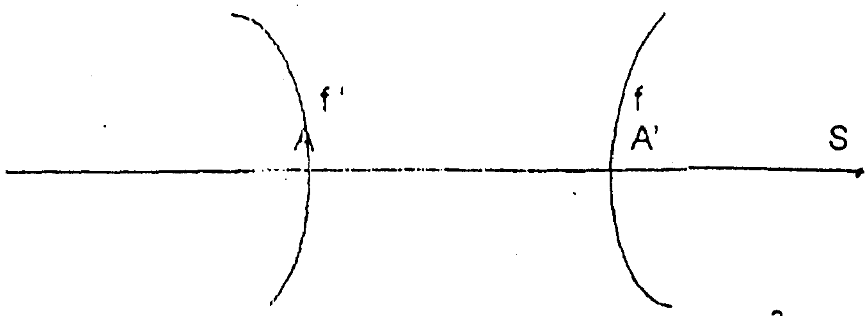
k = 2
OA' = 2 OA
,OB' = 2 OB
et OC' = 2 OC



Théorème : Montrer que les tangentes en deux points homologues de deux circonférences homothétiques sont parallèles .

4.4 . Inversion

4.4.1 Définition



On fixe un point S du plan appelé : pôle de l'inversion . Soit k^2 un réel positif appelé :**puissance d'inversion.** Si A est un point quelconque du plan ,on appelle inversion de pôle S et de puissance k^2 notée : $I(S,k^2)$, une transformation du plan dans lui-même telle que à un point A associe le point A' du plan vérifiant la relation :

$$SA' \cdot SA = k^2 \Rightarrow SA' = \frac{k^2}{SA}$$

Si A parcourt la figure f , alors A' parcourt la figure f' . On dit que : f ' est une figure inverse de la figure f .

N.B: S , A , A' sont alignés (collinaires) , SA et SA' sont les rayons vecteurs ,l'inverse du pôle est rejetée à l'infini .

Point double :

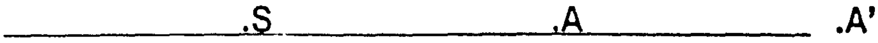
Un point est dit double si il coïncide avec son inverse $\Rightarrow SA' \cdot SA = SA'^2 \Rightarrow SA' = \sqrt{k^2} = |k|$.

4.4.2 Construction des figures inverses

O utilise la formule : $SA' = \dfrac{K^2}{SA}$ avec $SA \neq O \Rightarrow A \neq S$.

a) Le point

L'inverse d'un point est un point sur la droite SA obtenu avec la formule ci-dessus ,ensuite on place l'inverse A' de A sur cette droite.



b) Une droite

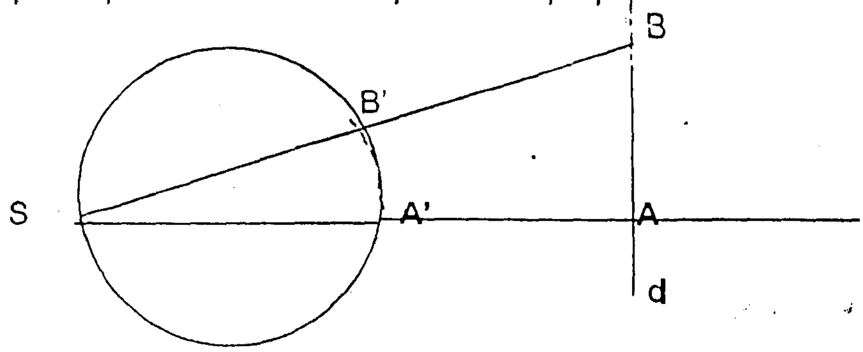
Notons que l'inverse n'est pas une transformation qui conserve les formes . Ainsi on a : deux cas .

1) Si la droite passe au pôle

Elle est elle-même son propre inverse

2) Si la droite est quelconque

Son inverse est une circonférence passant au pôle dont le centre est sur la perpendiculaire à la droite menée par le pôle. C'est un point milieu du diamètre limité par le pôle et l'inverse du pied de la perpendiculaire sur la droite .



✤✤ Commentaire à faire sur l'inverse d'un segment et un angle .

c) Circonférence (3 cas se présentent)

1°) Si la circonférence passe au pôle

Son inverse est une droite perpendiculaire au diamètre passant par le pôle et mené par l'inverse du point diamétralement opposé au pôle .

2°) Si la circonférence est centré au pôle

L'inverse est une circonférence concentrique à la première dont son réel centre est dispersé dans le plan .

3°) Si la circonférence est quelconque

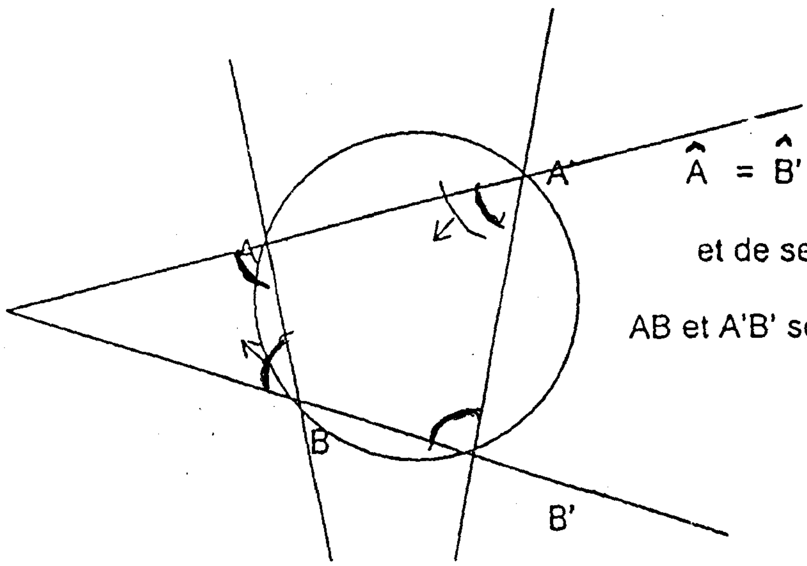
- si $p^2 = k^2$, la circonférence est son propre inverse
- si $p^2 \neq k^2$, l'inverse est une circonférence homothétique à la première dans $H(S , k^2/p^2)$

4.4.3 Axiomes

1) Si A et A' sont respectivement inverses de A et B , le quaterne (A,A',B,B') est cocycliques .

2) Les segments AB et A'B' sont anti-parallèles par rapport aux rayons vecteurs SA , SA' ,SB ,SB'.
3) Les tangentes en deux points inverses de 2 circonférences inverses sont anti-parallèles par rapport aux rayons vecteurs .

N.B. – Les droites anti-parallèles forment deux angles égaux et de sens contraire avec les côtés de l'angle .
- L'inversion ne conserve pas les formes mais conserve les contacts et n'est pas une transformation semblable .



$\hat{A} = \hat{B}'$ et $\hat{B} = \hat{A}'$

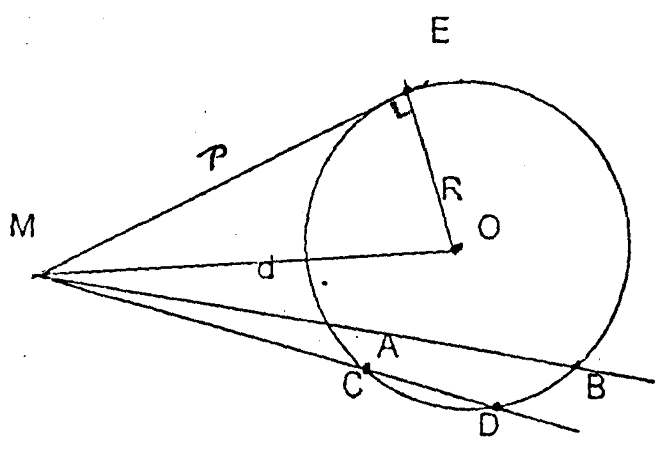
et de sens contraire

AB et A'B' sont anti-parallèles

4.4.4 Puissance d'un point par rapport à un cercle

On appelle puissance d'un point **M** par rapport à une circonférence notée p^2 , le produit :

MA.MB=MC.MD = ……… = ME^2 = p^2 · Elle est indépendante de la sécante .



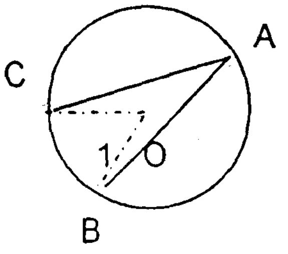
$\overline{ME} = p$

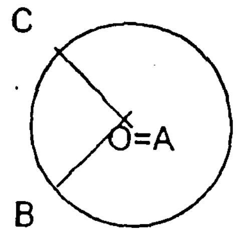
$\overline{OM} = d$
$\widehat{MEO} = 90°$
$d^2 = R^2 + p^2$
$\Rightarrow \quad p^2 = d^2 - R^2$

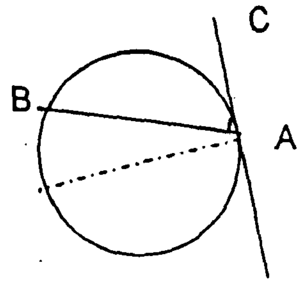
N.B. Si $p^2 > O$, le point M est extérieur au cercle
Si $p^2 = O$, le point M est sur le cercle
Si $p^2 < O$, le point M est intérieur au cercle

Chapitre 5 : RELATIONS METRIQUES DANS LE CERCLE ET DANS LE TRIANGLE

5.1 Relation métrique dans un cercle







(a) (b) (c)

a) Angle inscrit : Il a son sommet un point de la circonférence et ses côtés CA ,BA sont les cordes et il vaut la moitié de l'arc entre ses côtés ou la moitié de l'angle au centre ayant le même arc que lui .

$$\hat{A} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}\hat{O}_1 \quad (\text{cfr fig a})$$

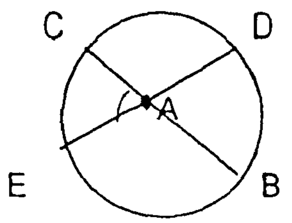
b) Angle au centre : son sommet est au centre de la circonférence et ses côtés sont les rayons il vaut ce que son arc .

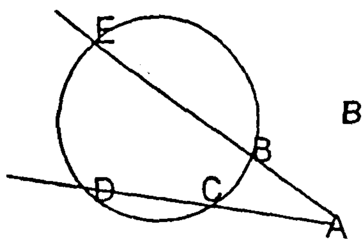
$$\hat{A} = \overset{\frown}{BC} \quad (\text{cfr fig b})$$

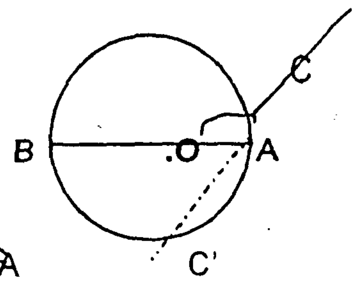
c) Angle inscrit limite ou angle tangentiel
Son sommet est un point de la circonférence et un ou ses côté(s) est (sont) tangente(s) au cercle .

$$\hat{A} = \widehat{BAC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} \quad (\text{cfr fig c})$$

N.B. Tout angle inscrit dans une demi circonférence est **droit .**







(d) (e) (f)

d) Angle intérieur : Son sommet est à l'intérieur du cercle et ses côtés sont des cordes .

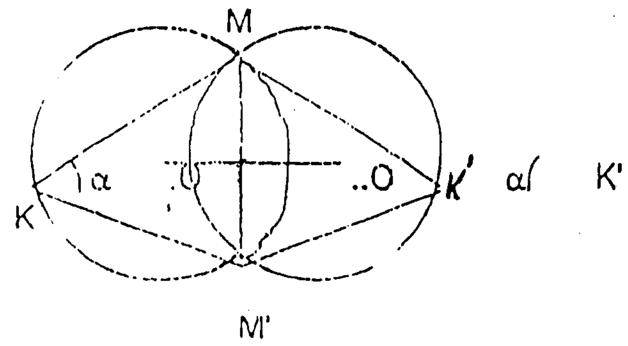
$$\hat{A} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CE} + \overset{\frown}{BD}) \quad ; \ (\text{cfr fig d})$$

e) $\alpha = \frac{(ED - BC)}{2}$

f) Angle extérieur : Son sommet est extérieur à la circonférence et ses côtés sont les sécantes

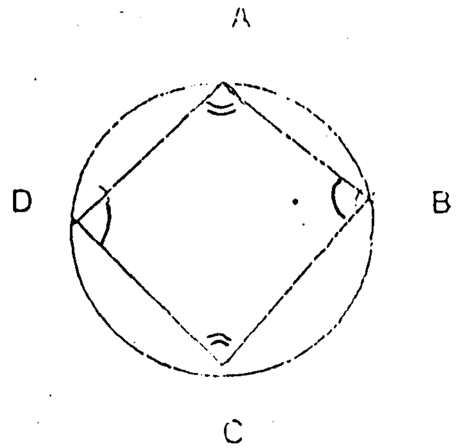
$$\hat{A} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC'}\right)$$

Segment capable d'un angle donné :
Dans une circonférence, un segment est capable d'un angle donné α , si on on le voit sous un angle α et d'un côté sur la circonférence . Le lieu est formé par deux arcs des 2 circonférences symétriques dont les centres sont aussi symétriques par rapport au segment .



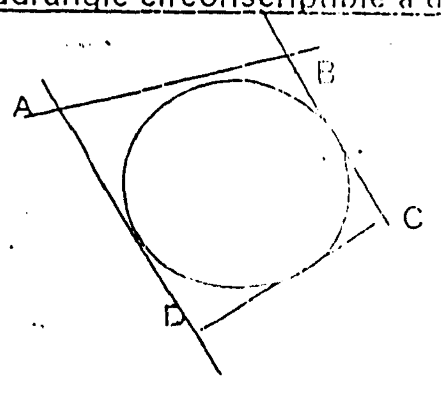
Quadrangle inscriptible dans une circonférence

Un quadrilatère est inscriptible dans une circonférence si les angles opposés sont supplémentaires



$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180°$$

Quadrangle circonscriptible à une circonférence

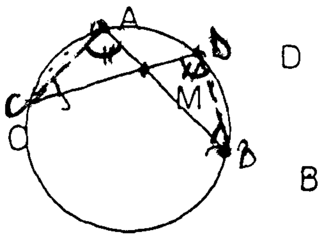


Les sommes des côtés opposés sont égales.

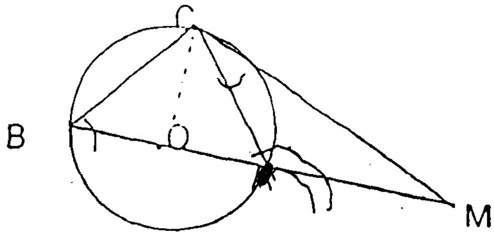
$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$$

Segments proportionnels dans une circonférence

a) Point intérieur



b) Point extérieur.



$\hat{C} = \hat{B} = \frac{1}{2}\widehat{AD}$ et $\hat{A} = \hat{D} = 1/2\widehat{BC}$

Δ CBM $= \Delta$ ACM , B = C = ½ AC

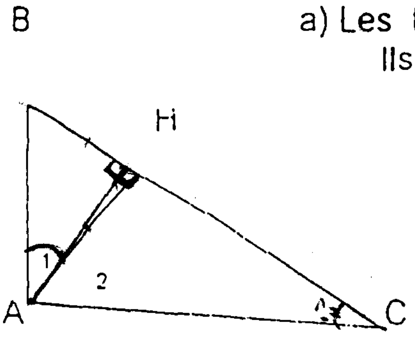
$\frac{AM}{MB} = \frac{CM}{MD} \Rightarrow AM . MD = CM . MB = p^2$

$\frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MC} = MC^2 = p^2 = MA .MB$

P^2 est la puissance du point M par rapport à la circonférence.

5.2 Relation métrique dans un triangle

5.2.1 Segments proportionnels dans un triangle rectangle



a) Les triangles ABH et AHC sont semblables car Ils ont 2 angles égaux 2 à 2 (A_1=C et H =A=90°

on a : $\frac{AH}{HC} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH . HC$

$\Rightarrow AH = \sqrt{BH.HC}$

Donc la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse .

b) Les triangles ABH et ABC sont semblables ainsi que les triangles AHC et ABC .

On a $\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH . BC \Rightarrow AB = \sqrt{BH.BC}$ et de même AC = $\sqrt{HC.BC}$

Donc chaque cathète est moyenne proportionnelle entre l'hypoténuse et sa projection orthogonale sur elle .

De ces relations ,on peut tirer :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$ (théorème de PYTHAGORE)

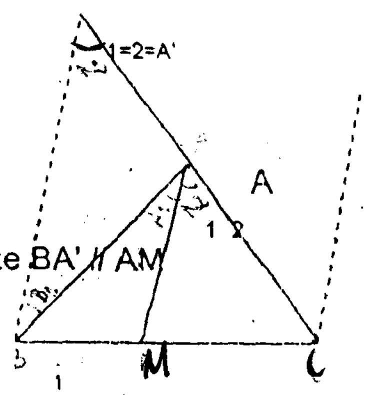
APPLICATIONS.

1) Construire la longueur X telle que $X^2 = a^2 - b^2$ si on donne a et b .
2) De même pour $X^2 = a \cdot b$ si on donne aussi a et b .

5.2.2 Quelques théorèmes .

1) Théorème des bissectrices

Dans un triangle , la bissectrice d'un angle divise le côté opposé en 2 segments proportionnels aux côtés adjacents . (bissectrices intérieures ou extérieures)



Hypothèse : Δ ABC , $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

Thèse : $\dfrac{BM}{AB} = \dfrac{MC}{AC}$

Démonstration :

De B, mener la droite BA' // AM (AM = bissectrice)

$\hat{B}1 = \hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (alternes internes et bissectrice) or $\hat{A}' = \hat{A}_2$ (correspondants) $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{A}' \Rightarrow$ le triangle

B C M

BAA' isocèle et les côtés opposés aux angles égaux sont égaux $\Rightarrow$ A'A = AB (o)
En plus BM et A'A , AC et MC sont homologues (thalès)

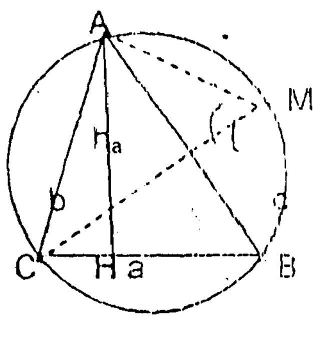
$$\Rightarrow \frac{BM}{AA'} = \frac{MC}{AC} \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{MC}{AC} \text{ (cfr (o))}$$

3. Théorème de sinus

Dans tout triangle , les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés .

AB=AC

AC = b
CB = a



Hypothèse : Δ ABC quelconque

Thèse : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{abc}{2S} = 2R$

Démonstration :De B menons le diamètre BM et relions A et M , AH = h est la hauteur relative à A dans le triangle ABC .
Selon la résolution des triangles rectangles AHC et AHB , on a :

$\frac{h}{c}$ = sin B et $\frac{h}{b}$=sin C ⇒ h = c sin B ⇒ c sin B = b sin C (1). De même pour la hauteur relative à

B , on a : c sin A = a sin C (2)

De (1) et (2) on peut tirer : $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$ et $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$ (deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles).
En plus S = ½ a b sin C = ½ a c sin B = ½ b c sin A ⇒ 2S = ab sin C et en multipliant les deux membres par c ,
on a :

$$2S.c = a\,b\,c \sin C \Rightarrow \boxed{\frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S}}$$

En fin montrons que le rapport donne 2R .
BM étant le diamètre , on a : $\hat{M} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ et $\hat{C} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} \Rightarrow \hat{M} = \hat{C}$

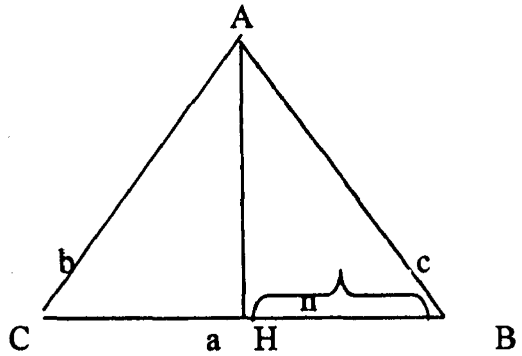
On sait en plus que a / sin A = b / sin B = c / sin C et dans le triangle AMB on a :
$\frac{c}{\sin M} = \frac{BM}{\sin A}$

L'angle M étant égal à C et $A = 90° = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BM}$ et BM = 2R = diamètre , on a :

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{2R}{\sin 90°} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S} = 2R$$

3. THEOREME DE COSINUS

Dans tout triangle , le cosinus d'un angle est égal au rapport de la somme des carrés de 2 autres côtés moins le carré du côté opposé par le double du produit de ces côtés



Hypothèse : Δ ABC

Thèse : $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ Il en est de même pour cos B , et cos C .

Démonstration :

Soit n la projection orthogonale de c sur le côté a avec l'angle B aigu , AH hauteur relative à A . En appliquant le théorème de PYTHAGORE aux triangles rectangles ACH et AHB , on a :

$$b^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow AH^2 = b^2 - CH^2 \ (0)$$

$$c^2 = AH^2 + HB^2 \Rightarrow AH^2 = c^2 - HB^2 \ (1) \quad (0) = (1) \Rightarrow b^2 - CH^2 = c^2 - HB^2$$

$$\Rightarrow b^2 = c^2 - HB^2 + CH^2$$

Avec ($CH = a - HB$) , on a : $b^2 = c^2 + a^2 - 2\,a.HB + HB^2 - HB^2$

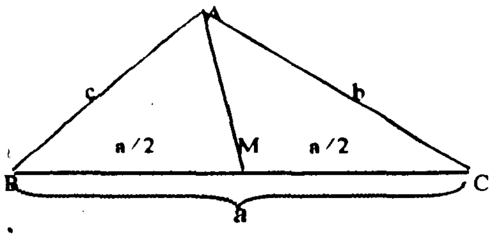
$\Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a.n$ et si B est obtus , on aura : $b^2 = a^2 + c^2 + 2\,a.n$

Or : $\dfrac{n}{c} = \cos B \Rightarrow n = c \cdot \cos B \Rightarrow \cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a.c}$, on procèdera de même pour

Cos C et cos A .

4 . THEOREME DE LA MEDIANE .

Dans un triangle la somme des carrés de 2 côtés est égale à deux fois le carré de la moitié du troisième côté plus deux fois le carré de la médiane relative à ce côté.



Hyp :- le triangle ABC, BM=MC

Thèse : $c^2 + b^2 = 2(\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}m_a)^2$

Démonstration :

Notons que M_1 et M_2 sont supplémentaires ; leurs cosinus sont donc opposés.

Appliquons le théorème de cosinus aux triangles AMC et AMB on a :

$$C^2 = (\tfrac{1}{2}a)^2 + m_a^2 - 2(\tfrac{1}{2}a)m_a \times \cos M \quad (0) \quad \text{et} \quad b^2 = (\tfrac{1}{2}a)^2 + (m_a)^2 + 2(\tfrac{1}{2}a \times m_a \times \cos M) \quad (1)$$

En additionnant membre à membre (0) et (1) , on a :

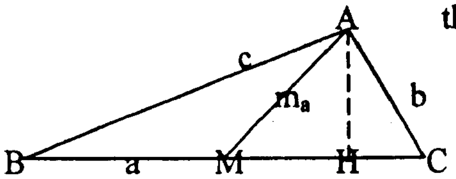
$b^2 + c^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2m_a^2$

De cette formule on peut tirer :

$$\boxed{m_a = \frac{\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}}{2}}$$

Il en est de même pour m_b et m_c

5. La somme des carrés diagonales d'un parallélogramme est égale à deux fois la somme des carrés des côtés. Pour démontrer utiliser le théorème de cosinus sachant que les angles B et C, A et D sont consécutifs et supplémentaires.
6. La différence des carrés de 2 côtés d'un triangle égale le double produit du troisième côté par la projection orthogonale de la médiane sur ce côté.

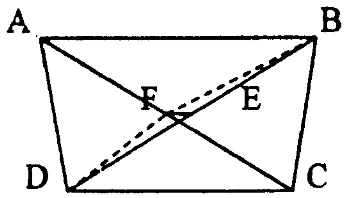


hypothèse : le Δ ABC ,BM=MC

thèse : $c^2 - b^2 = 2.a.m$ (m = BH= projection de m_a sur le côté a = BC .

Pour la démonstration utiliser aussi le théorème de cosinus appliqué aux triangles ABM et AMC et faire la différence .

7. La somme des carrés des côtés d'un quadrilatère quelconque est égale à la somme des carrés des diagonales plus 4 fois le carré du segment qui joint les milieux des diagonales.



hypothèse : quadrangle ABCD ,DE=EB,AF=FC ,les diagonales AC et BD .

thèse : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$

Démonstration :En appliquant le théorème de la médiane aux triangles ABC et ADC et BDF, on a :

(1) $AB^2 + BC^2 = ½\,AC^2 + 2BF^2$, (2) $AD^2 + DC^2 = ½\,AC^2 + 2DF^2$

et (3) $BF^2 + FD^2 = ½\,BD^2 + 2\,EF^2$

En additionnant (1) et (2) membre à membre on a :

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2.\,½\,AC^2 + 2(BF^2 + FD^2)$ (4)

et (3) dans (4) donne : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + 2.(1/2\,BD^2 + 2\,(EF^2\,)$

$= AC^2 + BD^2 + 4\,EF^2$

5.2.3. <u>Calcul des hauteurs , surfaces des triangles en fonction des côtés</u>

Se référant aux théorèmes de cosinus et sinus ,on a :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \cos^2 A = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} \quad et \sin A = \frac{2S}{cb} \Rightarrow \sin^2 A = \frac{4S^2}{c^2b^2}$$

…le fondamentale en trigonométrie ,on a :

$$\ldots^2-(b^2+c^2-a^2)^2 = (2bc-(b^2+c^2-a^2)).(2bc+(b^2+c^2-a^2))$$

$$\ldots-(b^2-2bc+c^2)).((b^2+2bc+c^2))$$

$$\ldots^2-(b-c)^2).((b+c)^2).((b+c)^2-a^2)$$

…b-c) .(a+c-b) . (b+ c – a) . (b + c + a)

…b+c = 2P et (a+b-c) = 2(a-c), a+c-b = 2(P-b), b+c-a = 2(P –a)

… . 2(P-a) . 2(P-b) . 2(P-c) = 16 P . (p-a) . (P-b) . (P-c)

…^{2} = P . (P-a) . (P-b) . (P-c)

… l'aire S du triangle en fonction des côtés a, b, c, est :

$S = \sqrt{P.(P-a).(P-b).(P-c)}$ est $S = \frac{a.h_a}{2}$, on a

$$h_a = \frac{2.\sqrt{P.(P-a).(P-b).(P-c)}}{a}$$

…logie on a : aussi h_b et h_c

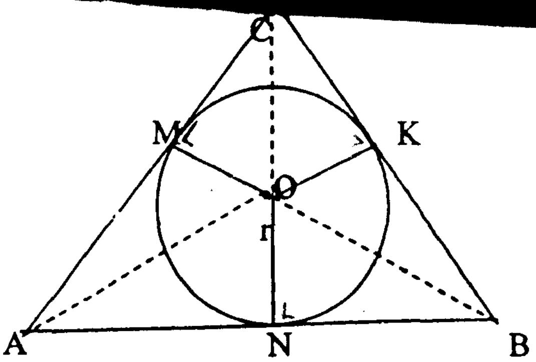
…la circonférence inscrite et …

…circonférence inscrite …

… étant … K, ON sont donc

… $S_1 = \frac{\ldots}{2}$, …

$$S = \frac{r}{2}.2P = r.P \Rightarrow r = \frac{S}{P}$$



b) Rayon de la circonférence circonscrite au triangle (R)

On sait selon le théorème de sinus que : $2R = \frac{a.b.c}{2S}$

$$\Rightarrow R = \frac{a.b.c}{4S}$$

Conséquences

et selon la formule fondamentale en trigonométrie ,on a :

$$16S^2 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (2bc - (b^2 + c^2 - a^2)).(2bc + (b^2 + c^2 - a^2))$$

$$= (a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)).((b^2 + 2bc + c^2))$$

$$= ((a^2 - (b-c)^2).((b+c)^2).((b+c)^2 - a^2)$$

$$= (a+b-c) .(a+c-b) . (b+ c - a) . (b + c + a)$$

On pose : $a+b+c = 2P$ et $(a+b-c) = 2(a-c)$, $a+c-b = 2(P-b)$, $b+c-a = 2(P-a)$

on a : $16 S^2 = 2P . 2(P-a) . 2(P-b) . 2(P-c) = 16 P. (p-a) . (P-b) . (P-c)$

$\Rightarrow S^2 = P . (P-a) . (P-b) . (P-c)$

Donc l'aire S du triangle en fonction des côtés a, b, c, est :

$S = \sqrt{P.(P-a).(P-b).(P-c)}$ est $S = \frac{a . h_a}{2}$, on a

$$h_a = \frac{2.\sqrt{P.(P-a).(P-b).(P-c)}}{a}$$

De même par analogie on a : aussi h_b et h_c

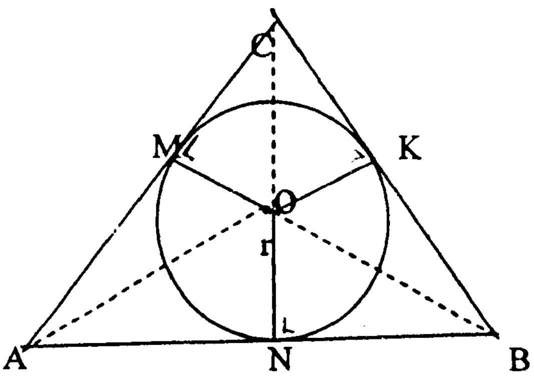
5.2.4. Rayon de la circonférence inscrite et circonscrite au triangle

a) Rayon de la circonférence inscrite au triangle (r)

Le côtés du triangles étant tangentes au cercle, les rayons OM, OK, ON sont donc perpendiculaires aux côtés, donc hauteurs des triangles AOB, BOC et COA d'aires respectives S_1, S_2 , S_3

Avec $S_1 = \frac{c..r}{2}$, $S_2 = \frac{a.r}{2}$, $S_3 = \frac{b.r}{2}$ $\Rightarrow S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{r}{2}.(a+b+c)$

$$S = \frac{r}{2}.2P = r.P \Rightarrow r = \frac{S}{P}$$



b) Rayon de la circonférence circonscrite au triangle (R)

On sait selon le théorème de sinus que : $2 R = \frac{a.b.c}{2S}$

$$\Rightarrow R = \frac{a.b.c}{4S}$$

Conséquences

Dans tous triangle, on a : $tg\frac{A}{2}=\frac{r}{P-a}, tg\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b}, tg\frac{C}{2}=\frac{r}{P-c}$

a,b,c les côtés du triangle, r = rayon de la circonférence inscrite P = demi-périmètre du triangle. 0 étant le centre de la circ. inscrite il est aussi l'intersection des bissectrices

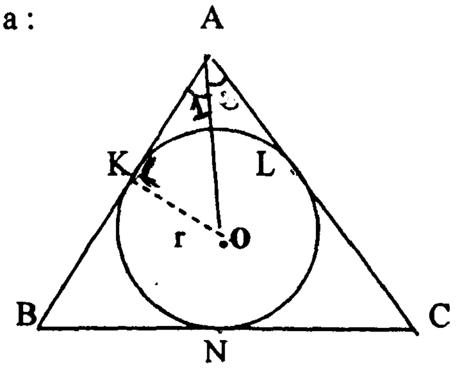
$\Rightarrow$ A_1, = A_2 AK = AL, BK = BN, NC = CL (Puissance d'un point par rapport à une circonférence.

2P = 2 . (AK + BN + NC) = 2 . (+ KN) $\Rightarrow$ P = a + AK

$\Rightarrow$ AK = P – a et le triangle AOK étant rectangle en K on a :

$\frac{OK}{AK}=tgA_1 \Rightarrow tgA_1=\frac{r}{P-a}$, $OK = r$ =OM=ON

et procéder de même pour $tg\frac{B}{2}, tg\frac{C}{2}$



2) Dans tout triangle, montrer que : $\frac{a-b}{a+b}=\frac{tg\frac{A-B}{2}}{tg\frac{A+B}{2}}$

On utilise le théorème de sinus et les proportions (propriétés)

En effet : $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=k \Rightarrow \frac{a-b}{\sin A-\sin B}=\frac{a+b}{\sin A+\sin B}$

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{2\sin\frac{a-b}{2}.\cos\frac{a+b}{2}}{2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{a+b}=tg\frac{(a-b)}{2}=tg\frac{(a+b)}{2}=\frac{tg(a-b)}{tg\frac{(a+b)}{2}}$$

Chap 6 : POLYGONE REGULIER – LONGUEUR DE LA CIRCONFERENCE ET L'AIRE DU CERCLE.

6.1. POYGONE REGULIER.

Un polygone est dit régulier s'il a tous ses angles ou côtés égaux.

La somme des angles intérieurs d'un polygone régulier est :

$$\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i = 2.droits \quad .(n-2) \quad , avec\, n = le\, nombre de côtés$$

N.B. A une circonférence donnée, on peut inscrire et circonscrire un polygone régulier convexe d'un nombre quelconque n de côtés (n ≥ 3)

R = rayon de la circ, circonscrite

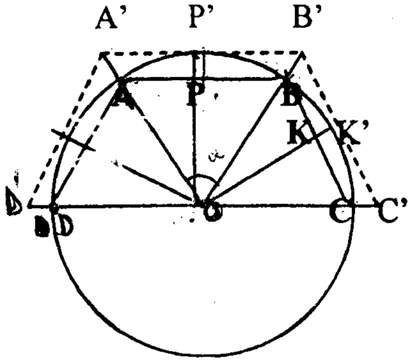
r = rayon de la circ. inscrite ou apothème du polygone régulier

AB=BC=……. = a_n = côté d'un polygone à n côtés.

Apothème : perpendiculaire menée du centre sur le côté d'un polygone régulier.

$\alpha = \frac{360°}{n} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{180°}{n}$

Le triangle AOB étant isocèle ,AP = ½ a_n ; OP = r et OA = R



$\frac{AP}{OA} = \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \Rightarrow \frac{a_n}{2R} \sin\frac{180°}{n} \Rightarrow a_n = 2R.\sin\frac{180°}{n}$

Le triangle AOB étant isocèle, AP = ½ . a_n , OP = r, AO = R

$\frac{AP}{OA} = \sin(1/2\alpha) \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{2}a_n}{R} = \sin\frac{180°}{n} \Rightarrow an = 2R.\sin\frac{180°}{n}$

et $\frac{r}{R} = \cos\frac{180°}{n} \quad \Rightarrow \quad r = R\,.\cos\frac{180}{n}$ et selon la formule fondamentale (F.F) on a :

$$R^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 \;(a = a_n)$$

Si n = 3 : $a_3 = 2R \sin 60 = \sqrt{3}\,.\,R$ et $r_3 = R \cos 60 = ½\,.\,R$

Si n = 4 : $a_4 = 2.\,R \sin 45 = \sqrt{2}\,.R$ et $r_4 = \frac{\sqrt{2}.R}{2}$

si n = 6 : $a_6 = 2R \sin 30 = 2R\,.\,½ = R$ et $r_6 = ½\sqrt{3}\,.\,R$

Un polygone à 10 côtés : dégagone régulier
à 11 côtés : ondegagone régulier
à 12 côtés : dodégagone régulier

à 20 côté : icosagone régulier

<u>Périmètre d'un polygone régulier à n côtés</u> (P_n)

$P_n = a_n\,.\,n = 2\,R\,.\,n\,.\,\sin\frac{180°}{n}$

La surface d'un polygone régulier est : $S = \frac{P_n\,.\,r}{2}$

car $S = n\,.\,S_1 = n\,.\,½\,.\,a_n\,.\,r$ par leur expression, on les formules ci-dessus.

6.2. Longueur de la circonférence

C'est la limite d'un polygone régulier convexe quand le nombre de côté augmente indéfiniment suivant une loi quelconque. Cette limite existe si la limite à gauche et à droite sont confondues. c.à.d P = P' avec $P = \lim\limits_{n \Rightarrow \infty} P'_n = \lim\limits_{n \Rightarrow \infty} P'_n$

Montrons que P = P' avec $a_n = \frac{P_n}{n}$, $n \to \infty$, $a \to o$, $r \to R$

Les polygones ABCD… (inscrit) et A'B'C'… (circonscrit) sont semblables et on a :

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OP'}{OP'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{R}{r} = \frac{A'P'}{AP} = \frac{P'B'}{PB} \ldots\ldots$$

selon les propriétés des proportions, on a :

$$\frac{A'P' + P'B' + B'K' + K'C' + \ldots\ldots}{AP + PB + BK + KC + \ldots\ldots} = \frac{P'}{p} = \frac{R}{R} \doteq 1 \Rightarrow P' = P$$

à la limite quant $n \to \infty$

Donc : circ. $\lim\limits_{n \to \infty} P_n = \lim\limits_{n \to \infty} 2R.n.\sin\frac{180^\circ}{n}$

En divisant par 2R, on a : $\frac{circ}{2R} = \lim\limits_{n \to \infty} n.\sin\frac{180^\circ}{n}, on\ a$:(F.I)

Multiplions et divisons par $\frac{180^\circ}{n}$, on a ;

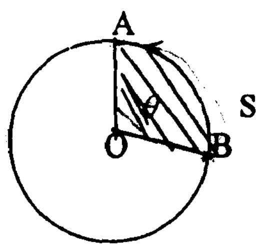
$$\frac{circ.}{2R} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{180^\circ}{n}.n.\sin\frac{180^\circ}{n}}{\frac{180^\circ}{n}} = 180 \text{ et en radian} = \pi\ (\pi).\ \text{Car} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Posons : $x = \frac{180^\circ}{n}$; si $n \to \infty$, $x \to 0$

$\Rightarrow$ circ. = 2 . π . R

6.3. Aire du cercle

6.3.1. Longueur S d'un arc de cercle



Soit AB = S et l'angle au centre θ = n°

Si le point B parcourut l'espace s, le rayon parcourt l'espace angulaire θ

Si B parcourt la circ. , le rayon parcourt 2π .
On obtient le rapport :

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{S}{circ.} \Rightarrow [- \quad [= S = \frac{\theta.2.\pi.R}{2\pi}$$

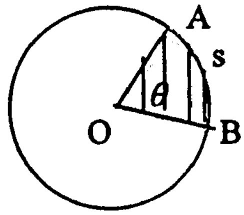
$$\Rightarrow S = R\,.\,\theta \text{ (en radian)} = \frac{n°.\pi.R}{180°} \text{ (en degré)}$$

L'aire d'un cercle est limite de l'aire d'un polygone régulier quand n $\to \infty$

L'airc d'un cercle $S = \lim_{n\to\infty} S_{polyg.} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/2.r.n.P}{n} = \lim_{n\to\infty} 1/2.r.P$

$$\boxed{S = ½\,.\,2\pi\,.\,R\,.\,R = \pi\,.\,R^2}$$

L'aire d'un secteur AOB



Si OB parcourt $\pi.R^2$, B *parcourt* $2.\pi.R$

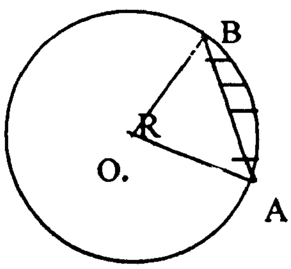
Si OB parcourt le secteur AOB , B parcourt s

Puis on le rapport suivant :

q

$$\frac{S_{secteur}}{\pi.R^2} = \frac{s}{2.\pi.R} \Rightarrow S_{secteur} = \frac{R.s}{2} = \frac{R.R.\theta}{2} = \frac{\theta.R^2}{2}$$

L'aire d'un segment de cercle



$S_{segment} = S_{secteur} - S_{triangle}AOB$

$= ½ \quad \theta.R^2 - ½\, R^2 \sin \quad \theta$

$= ½R^2(\theta - \sin \theta)$, avec θ en radians

B. GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Chapitre 7. DROITES ET PLANS DANS L'ESPACE

La géométrie dans l'espace exploite totalement les notions de droite et plan vues en géométrie plane . Les propriétés et postulats restent aussi valables.

7.1. POSITION DE DEUX DROITES DANS L'ESPACE

Soient d et d' deux droites de l'espace données.

a) si elles ont en commun 2 au moins points confondus , elles sont dites : confondues .

b)Elles sont sécantes ou concourantes si elles ont un seul point commun .

c) Elles son coplanaires et parallèles si contenues dans un même plan n'ont aucun point commun .

d) Elles sont non coplanaires et gauches si elles sont dans les plans différents et n'ont aucun point commun .

7.2. POSITION D'UN PLAN ET UNE DROITE DANS L'ESPACE .

a) On dit qu'une droite D de l'espace est contenue dans un plan P ou est une droite du plan si tous ses points sont du plan ou bien si elle a tout au moins 2 points commun avec le plan

b) La droite perce le plan si elle a un seul point commun avec le plan appelé : point de percée.

c) Une droite est parallèle à un plan si elle n'a aucun point commun avec le plan.

7.3. POSITION DE DEUX PLANS DANS L'ESPACE

a) Deux plans sont dits confondus dans l'espace s'ils ont au moins 3 points non alignés en commun .

b)Ils sont sécants, s'ils ont une droite commune appelée :intersection de 2 plans .

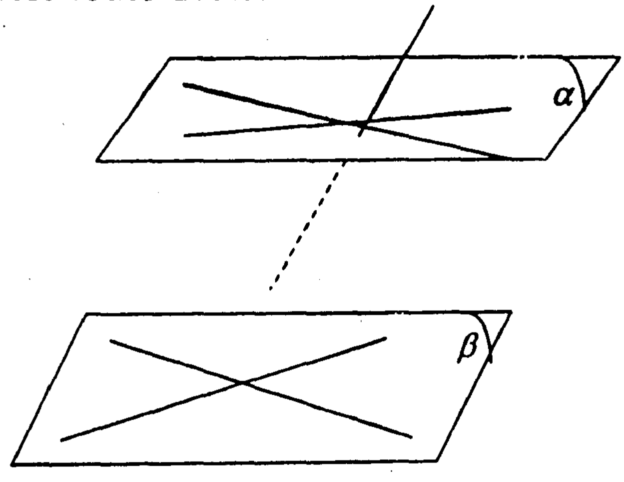
c) Deux plans sont dits parallèles dans l'espace s'ils n'ont aucun point en commun.

7.4.PARALLELISME ET PERPENDICULARITE D'UNE DROITE ET UN PLAN DANS L'ESPACE .

7 .4.1. Parallélisme

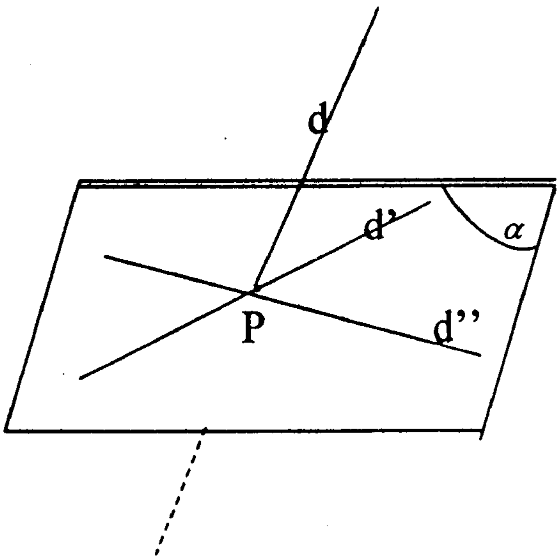
Une droite est dite parallèle à un plan si elle est contenue entièrement dans un plan parallèle et distinct de l'autre plan .

Et un plan est dit parallèle à un autre si toute droite de l'un est parallèle toute droite de l'autre .



7.4.2 Perpendicularité

Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est perpendiculaire à au moins 2 droites du passant par son pied .

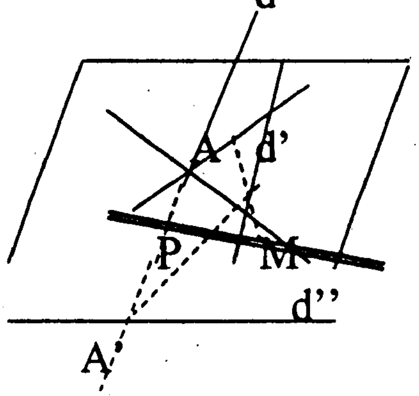


d ⊥ α ssi

d ⊥ d' et d ⊥d''

Théorème

Si une droite est perpendiculaire à deux droites particulières passant par son pied dans le plan , elle est perpendiculaire à ce plan .



hypothèse:-un plan α

-d' et d'' de α

d⊥d' et d⊥d''par P

thèse : d ⊥ α

Démonstration:

traçons une droite qui s'appuie sur d' et d'' , cette droite est aussi de plan α . soit M un point quelconque de cette droite formant ainsi avec d' et d'' un nouveau plan β perpendiculaire à d.(cfr critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan).

PM est aussi une droite de β.Si A et A' sont deux points symétriques par rapport à β $\Rightarrow$ MA =MA' et AP = PA'$\Rightarrow$P milieu de AA'.

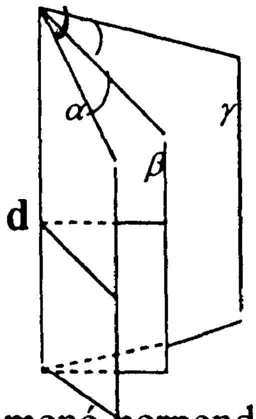
Ainsi le triangle AMA' est isocèle $\Rightarrow$MP $\perp$ d $\Rightarrow$ d $\perp$ β confondu avec le plan α (ils ont ensemble 3 points non alignés en commun) et que la perpendiculaire à l'un est aussi perpendiculaire à l'autre. Donc d $\perp$ α.

Conséquences :

Si une droite est perpendiculaire à un plan par son point de percée (pied), deux points symétriques A et A' de cette droite sont équidistants à tout point du plan .

7.5. ANGLES DIEDRES ET ANGLES POLYEDRES

Un angle polyèdre ou tout simplement dièdre est une portion de l'espace entre 2 demi plans issus d'une droite commune appelée :**arête .**



-Les plans α , β , γ sont ses faces

-si les faces sont sur un même plan , le dièdre est nul ou plat.

- Les dièdres I et II sont adjacents

- deux dièdres sont égaux si ils coïncident parfaitement par superposition

Un plan mené perpendiculairement à l'arête détermine avec les faces un angle d'un dièdre appelé :**le rectiligne ou angle d'un dièdre.**

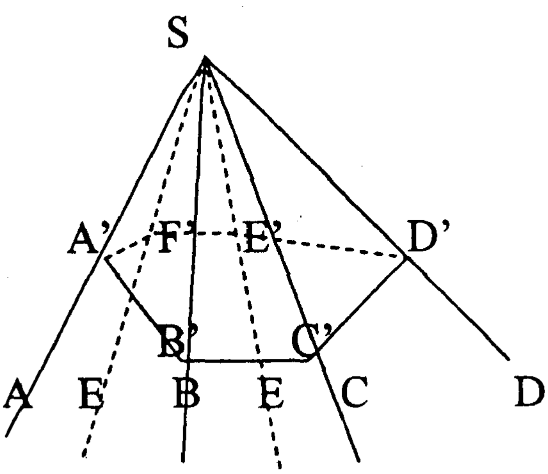
Il est le même partout dans le dièdre et que les dièdres égaux ont même rectiligne et réciproquement .

L'unité de mesure des dièdres le plus usuelle est : **le dièdre droit.**

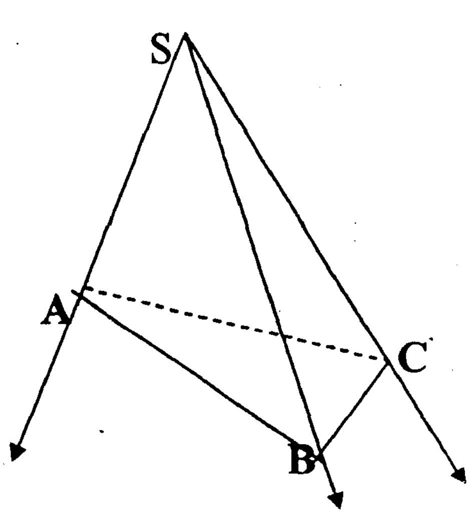
Il a aussi ses multiples et sous multiples comme les angles et que le rapport de 2 dièdres est égal au rapport de leurs rectilignes.

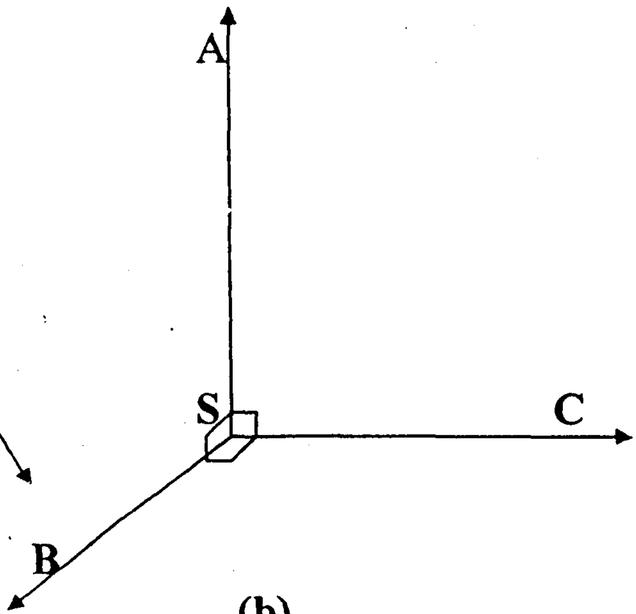
7.5 . 2 ANGLE POLYEDRE OU ANGLE SOLIDE

C'est une portion de l'espace limitée par des faces angulaires formées par des demi droites non 3 à3 dans un même plan et issues d'un même point appelé : sommet de l'angle solide .



-Sa SB SC … sont les arêtes
-Les plans ASB ,BSC,CSD, …. sont les faces
-Les angles ASB ,BSC,CSD …… sont les angles plans ou faces angulaires.
Le plus petit des angles solides est formé par 3 demi droites issues d'un même sommet appelé : **trièdre** (fig(a)) .
Un trièdre qui a 3 angles plans droits est dit : **trièdre trirectangulaire** (fig(b)) .





(a) **(b)**

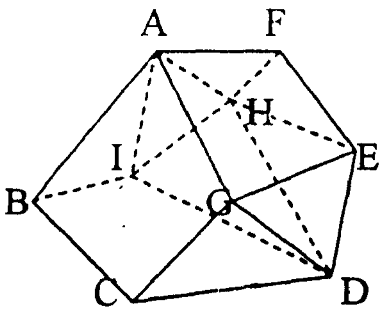
Caractéristique d'un trièdre trirectangulaire
Un trièdre trirectangulaire a :3 arêtes, 3 angles plans ,3 dièdres droits et un sommet.
L'angle plan est tjrs à la somme de 2 autres et la somme des angles plans est inférieure à 4droits.
Tout angle polyèdre convexe intersection d'ensembles convexes de points est aussi un convexe de points .

DROITES REMARQUABLES D'UN TRIEDRE

-Plan médian :
c'est un plan mené par l'arête d'un trièdre et par la bissectrice de l 'angle plan opposé .
L'intersection de ce plan est une droite passant par le barycentre du triangle d'un plan coupant toutes les arêtes.
-Plan hauteur :
C'est un plan mené par l'arête perpendiculairement à l'angle plan opposé.
L'intersection de ces plans passe par l'orthocentre du triangle obtenu à l'intersection d'un plan quelconque avec les arêtes du trièdre .
-Plan médiateur :
C'est un plan mené par la bissectrice de l'angle plan perpendiculairement à celui-ci. L'intersection des plans médiateurs est une droite qui est le lieu des points équidistants des arêtes, c'est aussi l'axe du cône circonscrit (inscrit) au trièdre .

CHAP.8 POLYEDRE ET SOLIDE RONDS(Aires et Volumes)

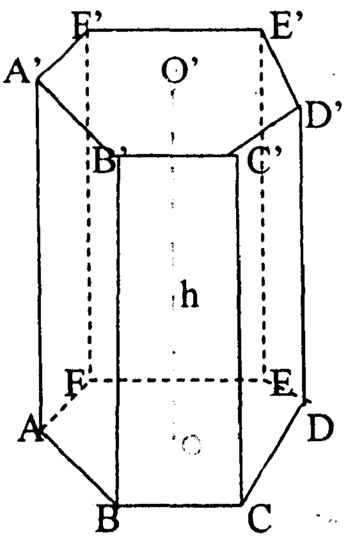
Définition : Un polyèdre est un solide limité par des polygones plans ayant 2 à 2 un côté commun non situés dans le même plan .
Ils sont en nombre illimité dans la nature et se caractérise par :les faces,les dièdres,et les angles solides .
Les diagonales d'un polyèdre sont des droites qui joignent deux sommets n'appartenant pas à une même face .



Le polyèdre le plus simple a 4 faces et s'appelle : **le tétraèdre.**
Pour les polyèdres ayant la forme irrégulière ,on les découpe en solide ayant une forme régulière afin de calculer leurs aires ou volumes.
Parmi ceux ayant la forme régulière, les plus connus sont :

1. Le prisme.
est un solide limité par une surface prismatique et 2 sections planes appelées : **bases**
(Voir dessin ci-dessous)
-ABCDEF et A'B'C'D'E'F' sont les bases
-Les faces latérales AA'B'B ,BB'C'C,.... **constituent la surface prismatique** latérale .

-La distance entre deux bases OO' = h s'appelle : hauteur du prisme .
-**Les arêtes** entre les bases sont égales et parallèles .



Un prisme peut être : oblique ou droit ;
Il est **droit** si les arêtes latérales sont perpendiculaires aux plans de bases et chacune est égale à la hauteur du prisme .
Il est dit **régulier** si il est droit et que les bases sont des polygones réguliers et les faces sont des rectangles .

Surface totale du prisme

$$\boxed{S_t = P.a + 2S_B}$$

P= périmètre , a = l'arête , S_B= surface de la base

Le volume du Prisme

$$\boxed{V = S_B \,.\, h}$$

N.B. Un prisme dont la base est un parallélogramme est dit : **parallélépipède**
Ses faces opposées sont égales et parallèles .En plus si toutes les arêtes sont égales et régulières , il est dit : **le cube.**

Volume d'un parallélépipède

$$\boxed{V = a \,.\, b \,.\, c}$$

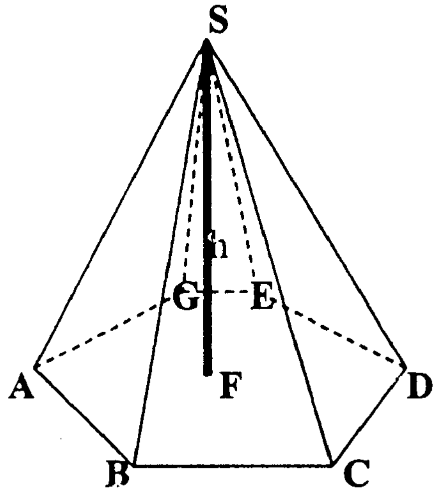
a , c , b sont les 3 arêtes aboutissant au même sommet .

2. La pyramide

Une pyramide est un solide compris entre les faces d'un angle polyèdre et un plan qui rencontre toutes les arêtes .
SF = hauteur de la pyramide , le polygone ABCDE est sa base,SA ,SB ,SC .. sont les arêtes latérales , SAB,BSC,CSD ,...... sont les faces latérales formant ainsi l'aire latérale de la pyramide .

N.B. Une pyramide à base triangulaire est appelée : **tétraèdre est chaque** face peut être prise comme base .

Une pyramide est régulière si sa base est un polygone régulier et sa hauteur est perpendiculaire à la base , le pied de la hauteur sur elle est le centre de la circonférence inscrite (circonscrite) à la base .Dans ce cas la médiane ou hauteur d'une face latérale(triangle) s'appelle : **l'apothème de la pyramide .**



L'aire latérale d'une pyramide régulière

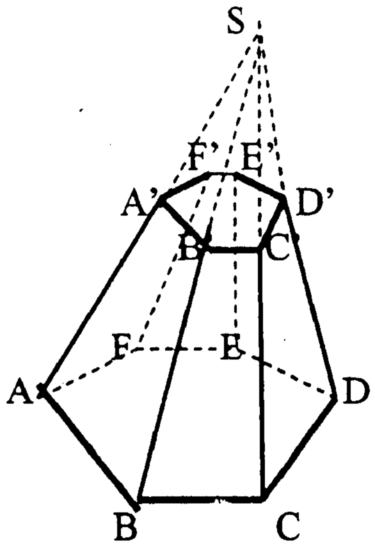
$\boxed{S_{latérale} = \frac{1}{2}\ a\ .\ p}$ avec p = périmètre de la base

$\boxed{S_{totale} = S_B + S_{lat} = \frac{1}{2}\ a_n.a\ .\ n\ + \frac{1}{2}\ a_n\ .r\ .n}$

$\boxed{\text{Son volume est : } V = 1/3\ .\ S_B\ .\ h}$

avec r = apothème de la base ,n = nombre des côtés à la base régulière .

Volume du tronc de la pyramide (pyramide tronquée)



$V = 1/3\ S_B\ .h - 1/3\ S_{B'}\ .h'$

$= 1/3\ \ .\ H\ .\ ((\sqrt{S_B.\ S_{B'}}) + S_B + S_{B'})$

H = hauteur du tronc,h = hauteur de la pyr.
h' = hauteur de la pyramide au dessus=SO'=x

S_B=surface de la base ABCDEF $S_{B'}$ celle de la base A'B'C'D'E'F' .

N.B. Il faut chercher à démontrer cette formule ci-dessus .

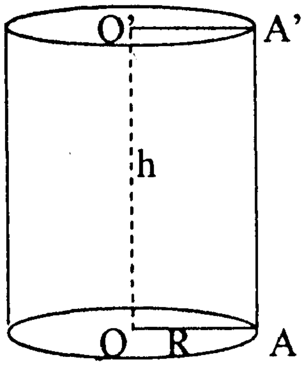
CYLINDRE

On appelle surface cylindrique,une surface engendrée par une droite tournant à une distance fixe d'un axe » qui lui est parallèle. .En coupant cette surface par deux plans parallèles , on obtient la surface cylindrique.

Un cylindre est dit droit si la hauteur est parallèle à l'axe et perpendiculaire aux plans de bases.

L'aire d'un cylindre droit et volume

$S_{lat} = 2.\ \pi.R.h$ et $S_{tot}=2\ .\pi.R(R+h)$ *et son Volume est* : $V = \pi.R^2.h$



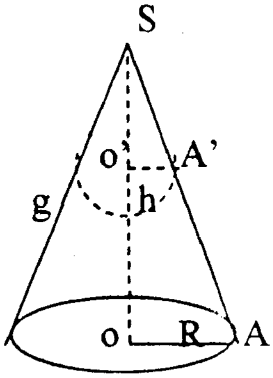
4. Cône de révolution

On appelle cône de révolution ,la surface engendrée par une droite qui tourne en passant par un point fixe et s'appuyant sur une circonférence.

Un cône est solide limité par une surface conique et un plan coupant cette surface .

Il est dit droit si la hauteur est perpendiculaire au plan de base.

Le pied de la hauteur est le centre de la circonférence de la base.



$S_{lat} = \pi .R.\ g$ et son volume est : $V = 1/3\ .\ S_B.h\ = 1/3.\ \pi.\ R^2\ .\ h$

Avec : $g^2 = h^2 + R^2$

Le volume du tronc du cône est : $V_{tronc}= \frac{1}{3}.\pi.(R^2 + r^2 + R\ r).H$ Avec :

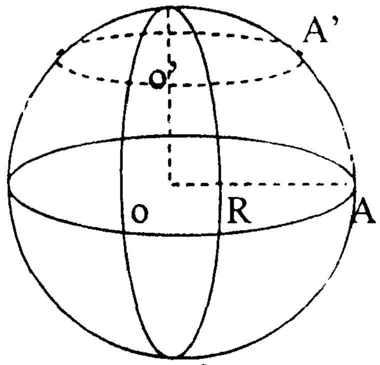
H =oo' (hauteur du tronc), V=volume du cône, Vt= volume du tronc

V' =volume du cône au dessus ,S le sommet ,So' = x hauteur du cône au dessus

La sphère

La sphère est un solide engendré par la révolution d'un demi disque autour de son diamètre. La demi circonférence décrit la surface sphérique.

L'aire de la sphère est : $S = 4\ .\ \pi.R^2 \ = d^2.\pi$



Son volume est : $V = 4/3\ .\ \pi.R^2$, avec d = 2R = diamètre de la sphère

L'intersection d'une sphère et un plan est un cercle de rayon $R' = \sqrt{R^2 - d^2}$

d= distance entre le plan sécant et le centre de la sphère

R est le rayon de la sphère

R' est le rayon du cercle d'intersection du plan sécant avec la sphère.

CHAP : 9 COMPLEMENT DE GEOMETRIE

QUELQUES THEOREMES IMPORTANTS

1 .Théorème de MENELAÜS

DEFINITIONS :

Transversale : une transversale est une droite qui coupe tous les côtés d'un triangle sans passer par un seul sommet. Elle coupe chaque côté du triangle en **point appelé : point segmentaire ou point de scission.**

Le point segmentaire détermine sur un côté 2 segments dont le rapport de section est positif si les segments sont parcourus dans le même sens et négatif si ils sont parcourus dans les sens contraires.

Si on établit le rapport en commençant par le sommet : on a : la première version ou interprétation de MENELAÜS. Si on commence par le point segmentaire, on a : la 2ème version de MENELAÜS.

Ainsi : $\frac{AC'}{C'B} \geq O$ (*1èrevesion*) *et* $\frac{C'A}{C'B} \leq O$ (*2èmeversion*)

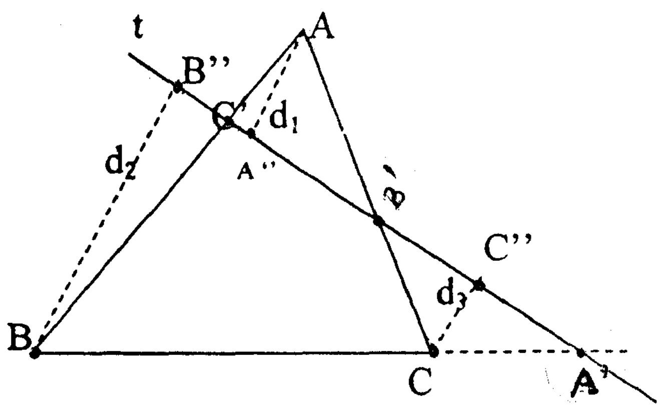
Théorème de MENELAÜS

Dans un triangle, une transversale détermine sur les côtés consécutifs d'un triangle trois points dont le produit des rapports de section est égal à – 1 (1ère version) et + 1 (2ème version)

Hypothèse : le triangle ABC , la transversale t

$$\text{Thèse : } \frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1$$

Démonstration :



De A ,B ,C menons les perpendiculaires à la transversale et soient d_1 , d_2 , d_3 leurs distances respectives à la transversale . Les triangles BB''A' et CC''A' , CC''A' et CC''B' et AA''C' et C'BB'' sont 2à2 semblables . On a :

$$\frac{AC'}{C'B} = +\frac{d_1}{d_2}, \quad \frac{BA'}{A'C} = -\frac{d_2}{d_3}, \quad \frac{CB'}{B'A} = +\frac{d_3}{d_1}$$

En multipliant ces trois rapports membre à membre , on a :

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -\frac{d_1}{d_3} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{d_3}{d_2} = -1$$

On procédera de même pour la 2ème version (démonstration réservée au lecteur).

La cévienne

Une cévienne par rapport à un triangle est une droite qui coupe tous les côtés d'un triangle en passant par un seul sommet.

Le théorème de MENELAÜS nous aidera de démontrer que les trois points sont alignés.

Théorème de CEVA

Trois céviennes concourantes déterminent sur les côtés consécutifs d'un triangle , 3 points dont le produit des rapports de section vaut +1 (1ère version) et - 1(2ème version) .

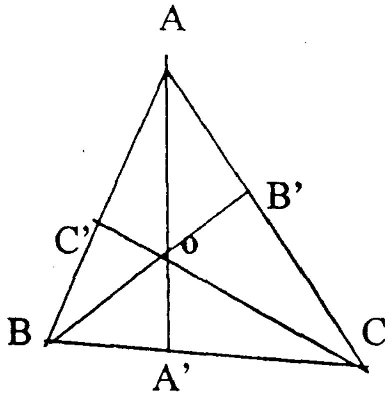
Hypothèse : -le triangle ABC , AA' ,BB' ,CC' concourantes en O

$$\text{Thèse : } \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{CB'}{A'C} \cdot \frac{BA'}{B'A} = +1$$

Démonstration :

En considérant les triangles ABA' et AA'C avec C'C et BB' respectivement leurs transversales et en appliquant le théorème de MENELAÜS à chacun d'eux , on a :

$\frac{AC}{C'B}$ ou $\frac{C''A}{BC}$



$\frac{AC'}{C'B}.\frac{BC}{CA'}.\frac{A'O}{OA} = -1$ (1) *et* $\frac{A'B}{BC}.\frac{CB'}{B'A}.\frac{OA}{OA'} = -1$ (2)

En multipliant (1) et (2) membre à membre , on a :

$\frac{AC'}{C'B}.\frac{CB'}{B'A}.\frac{(-BA')}{BC}.\frac{(-BC)}{A'C}.\frac{(-OA')}{OA}.\frac{(-OA)}{OA'} = (-1).(-1) = +1 \Rightarrow$

$$\frac{AC'}{C'B}.\frac{CB'}{B'A}.\frac{BA'}{A'C} = +1$$

On procédera de même pour la $2^{\text{ème}}$ version .

Le théorème de CEVA nous aide à montrer que 3 droites sont concourantes .

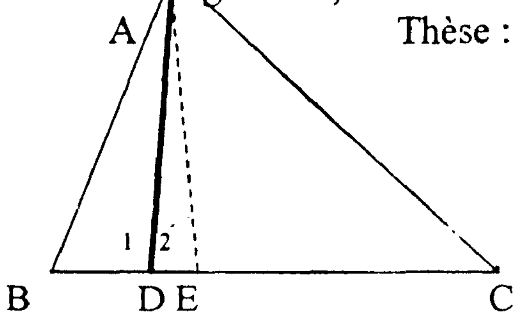
Théorème de STEWART

Théorème 1

Si on joint le sommet A d'un triangle à un point quelconque D de la base BC on a : $AB^2 . DC + AC^2 . BD = AD^2 . BC + BD.DC.BC$

Hypothèse : triangle Abc , D $\in$ BC

Thèse : $AB^2.DC + AC^2.BD = AD^2.BC + BD.DC.BC$



Demonstration

Selon le sens choisi ,on mène la perpendiculaire AE à BC , et les angles D_1 ,D_2 sont supplémentaires **l'un** obtus et l'autre aigu et selon le théorème de cosinus ,on a :

a) Dans le triangle ABD :$AB^2=AD^2+BD^2+2BD.DE$ et multiplier par DC

On a : $AB^2.DC=AD^2.DC+BD^2.DC +2BA.DE.DC$ (1)

b) Dans le triangle ADC : $AC^2=AD^2+DC^2-2 .DC.DE$ et en multipliant par BD,on a : $AC^2.BD=AD^2.BD+DC^2.BD- 2 DC.DE.BD$ (2)

En additionnant (1) et (2) membre à membre , on a :

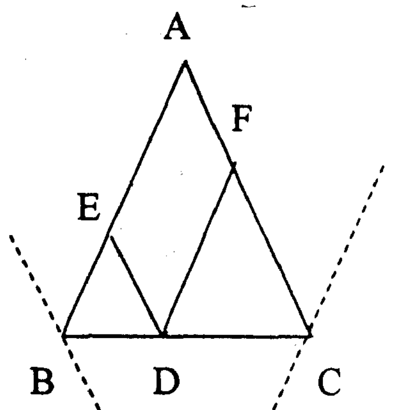
$AB^2.DC+AC^2.BD=AD^2.BC + BD.DC.BC.$

Théorème 2

Si on joint le sommet A d'un triangle ABC à un point D quelconque de la base BC et qu'on mène les droites DE et DF respectivement parallèles à AC et AB , on : $AD^2.+BD.DC=AB.AE+AC.AF$

hypothèse : le triangle ABC , D $\in$ BC , DE//AC et DF//AB

Thèse : $AD^2.+BD.DC=AB.AE+AC.AF$



Demonstration:

Se referant au théorème au théorème de STEWART 1 et en divisant le tout par BC , on a :

$$AB^2\,\frac{DC}{BC}+AC^2.\frac{DC}{BC}=AD^2+BD.DC \quad (O)$$

et cfr le théorème de Thalès appliqué en considérant les parallèles respectives au côtés AB et AC ,on a :

$$\frac{AE}{AB}=\frac{DC}{BC} \quad et \quad \frac{AF}{AC}=\frac{BD}{BC} \quad (\textit{segments homologues et proportionnels})$$

En remplaçant ces rapports dans (O) on a :

$$AB^2.\frac{DC}{BC}+AC^2.\frac{BD}{BC}=AD^2+BD.DC \Rightarrow AB^2.\frac{AE}{AB}+AC^2.\frac{AF}{AC}=AD^2+BD.DC$$

$\Rightarrow AB.AE+AC.AF = AD^2+BD.DC$

Téorème de SIMSON

D étant un point quelconque de la base BC du triangle ABC, on a :

$AB^2.DC + AC^2.BD = AD^2.BC+BD^2.DC+Dc^2.BD$

Pour la démonstration ,utiliser le théorème 1 de STEWART en dédoublant BC=BD+DC dans le terme BC.BD.DC et on a le résultat cherché .

Théorème d'Euler

Définitions :-Cercle d'Euler ou cercle à 9 points :c'est un cercle qui passa par les 9 points suivants : 3 pieds des médianes,3 pieds des hauteurs et 3 points milieux des segments reliant l'orthocentre aux sommets du triangle ;

-Centre d'Euler ou centre du cercle d'Euler :est un point milieu du segment limité par l'orthocentre et le centre de la circonférence circonscrite au triangle .

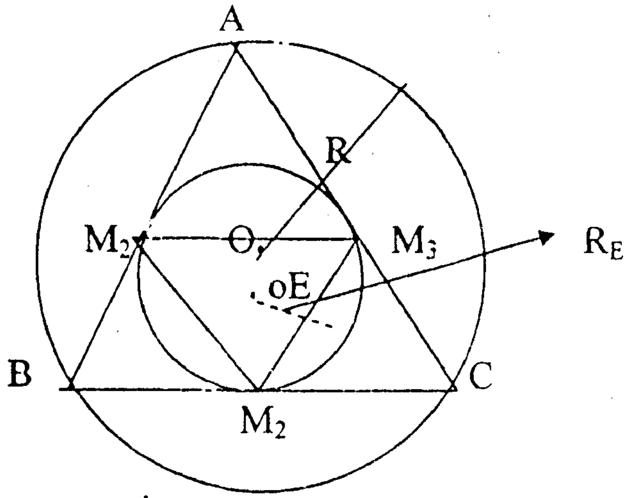
- Rayon d'Euler : c'est le rayon du cercle d'Euler.

-Droite d'Euler : c'est une droite qui passa par l'orthocentre,centre d'Euler , barycentre ,et le centre de la circonférence circonscrite au triangle.

Théorème 1

Le rayon d'Euler vaut la moitié du rayon de la circonférence circonscrite au triangle .

hypothèse : le triangle Abc inscrit dans la circ. de rayon
thèse : $R_E = \frac{1}{2} . R$



Demonstration

M_1 ,M_2 , M_3 sont les pieds der 3 médianes. Le triangle $M_1 M_2 M_3$ est inscrit dans le cercle de rayon R_E et selon le théorème de sinus appliqué aux Abc et $M_1M_2M_3$ on a : $\frac{M_1M_3}{\sin M_2} = 2 . R_E$ *et* $\frac{BC}{\sin A} = 2 . R$ *avec l'angle* $M_2 = A$

et $M_1M_3 = \frac{1}{2}$ BC (segment reliant les milieux de 2 côtés consécutifs d'un triangle)$\Rightarrow$ $\frac{BC}{2\sin M_2} = 2$ R $\Rightarrow \frac{BC}{\sin A} = 4.R_E \Rightarrow$ $4.R_E$=2R

$\Rightarrow \quad R_E = \frac{1}{2}R$

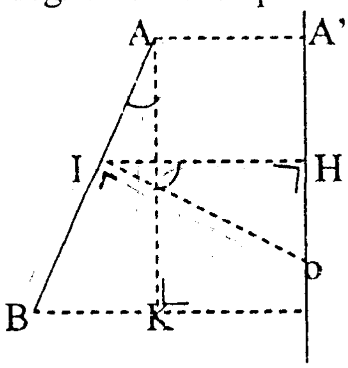
Théorème 2

Le barycentre ,l'orthocentre ,le centre d'Euler,et centre de la circonférence circonscrite au triangle sont colinéaires.
pour la démonstration utiliser le théorème de MENELAÜS .

Théorèmes de GULDIN (conduisant à l'aire et volume de la sphère)

Théorème 1 .(théorème de segment tournant)

L'aire de la surface engendrée par un segment rectiligne tournant autour d'un axe qui le traverse ou non est égale à la circonférence ayant pour rayon la médiatrice du segment limité par l'axe et le segment,multipliée par la projection orthogonale du segment sur l'axe .Elle est aussi égale à la circonférence de rayon un segment limité par le milieu du segment et sa projection orthogonale sur l'axe.



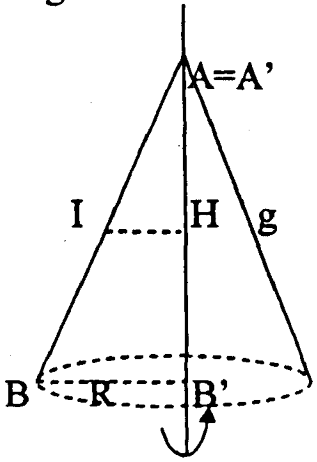
Hypothèse : Segment AB ,A'B'= l'axe, AI=IB
IH $\perp$ A'B',Io $\perp$ AB

Thèse: $S_{AB} = 2\pi . IO.A'B' = 2\pi . IH.AB$

Démonstration: De A mener AK $\perp$BB'
Les triangles ABK et IOH sont semblables.

On a : $\frac{AB}{IO} = \frac{AK}{IH} \Rightarrow AB.IH = IO.AK$ avec AH A'B' et en multipliant par 2 π on a :2 .π . IH.AB = 2.π.IO.A'B' = S_{AB}

Si le segment touche l'axe :

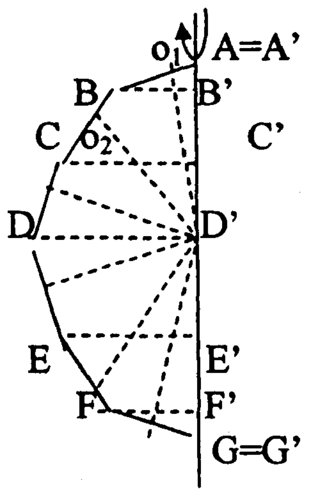


S_{AB}=2.π.IH.AB avec g=AB et IH=1/2BB'

avec BB'= R , on a :

S_{AB}= 2.1/2.R .π.g = π .R. g(surface conique)

<u>En cas de plusieurs segments</u>



$S_{ABCDEFG}$=2.π (A'B'.$O_1 I_1$+ B'C'.$O_2 I_2$+.....)

Si le contour polygonale est régulier

$O_1 I_1$,.... = r(rayon de la circonférence inscrite) on a:

$S_{ABCDEFG}$=2. .π .r . (A'B'+B'C'+C'D'+.... + F'G')

A la limite , r $\longrightarrow$ R si n $\longrightarrow \infty$

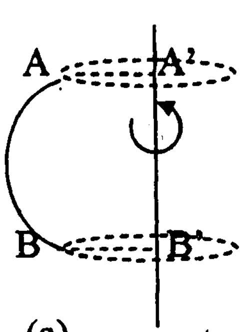
et la limite donne la surface sphérique.

$$S_{Sphérique} = \lim_{n\to\infty} 2\pi.r.A'G' = 2.\ .\pi\ R\ .(2R) = 4.\ .\pi\ .R^2 = (2R).\ .\pi\ = d^2.\pi$$

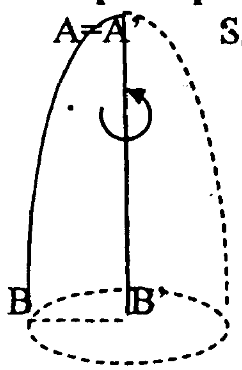
d = diameter et A'G' =2R = diamètre .

N.B. Si n→∞ le contour polygonale devient un arc de cercle , dans ce cas l'aire engendrée par un arc autour d'un axe s'appelle : LA ZONE

La zone à une base est appelée : **calotte sphérique**



(a)



(b)

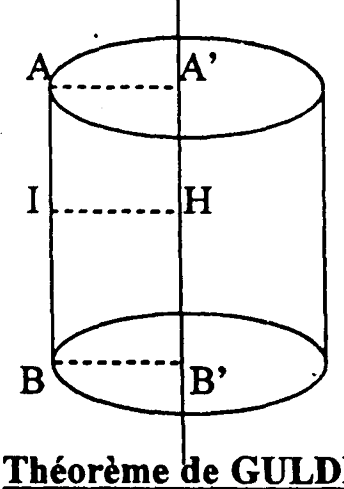
S_{cal}=2.π R.A'B'(A'B'=h)
fig(a)

S_{zone}=2. .π R.h(A'B'=h)
fig(b)

La surface sphérique est une zone de hauteur H = 2 R . Il y a aussi des zones deux bases .

Si le segment est parallèle à l'axe

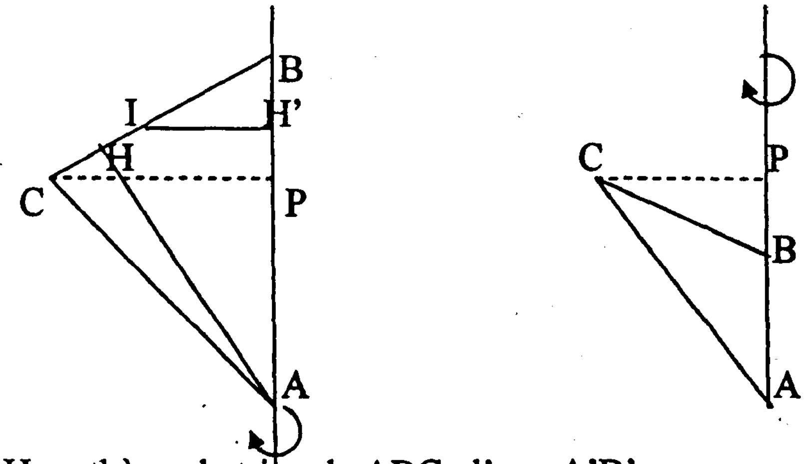
On obtient l'aire d'un cylindre.



$S_{cylindrique} = 2 . \pi .R . h$ ($h = A'B'$, $R = AA'=IH=BB'$

Théorème de GULDIN 2 (théorème de triangle tournant conduisant au volume de la sphère)

Le volume d'un solide engendré par un triangle tournant autour d'un axe est égal au tiers de l'aire de la surface engendrée par le côté opposé à un sommet considéré , multiplie par la hauteur correspondant à ce sommet .



Hypothèse : le triangle ABC , l'axe A'B'

Thèse : $V_{\Delta ABC}=V_{\Delta APC} \pm V_{\Delta CPD}$

Démonstration :

Se référant au théorème de GULDIN 1 , on a :

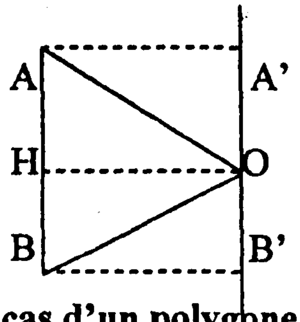
$V = \frac{1}{3}\pi .CP^2.AP\pm \frac{1}{3}\pi\, CP^2.PB = \frac{1}{3}.CP^2. (AP\pm PB). \pi =\frac{1}{3} CP^2.AB. \pi$

or $S_{BC}= 2\pi HH'.BC =2 \pi.\frac{1}{2} CP.BC= \pi.CP.BC$

Avec $S\Delta_{ABC}=1/2\ AB.CP \Rightarrow 2.\ S_{\Delta ABC}=AB.CP = BC.AH$, on a :

$V_{\Delta AB C}= \frac{1}{3}.\pi.CP.(CP.AB) = \frac{1}{3}.\pi.CP.BC.AH = \frac{1}{3}(S_{BC}.AH$

En cas d'un triangle isocèle :

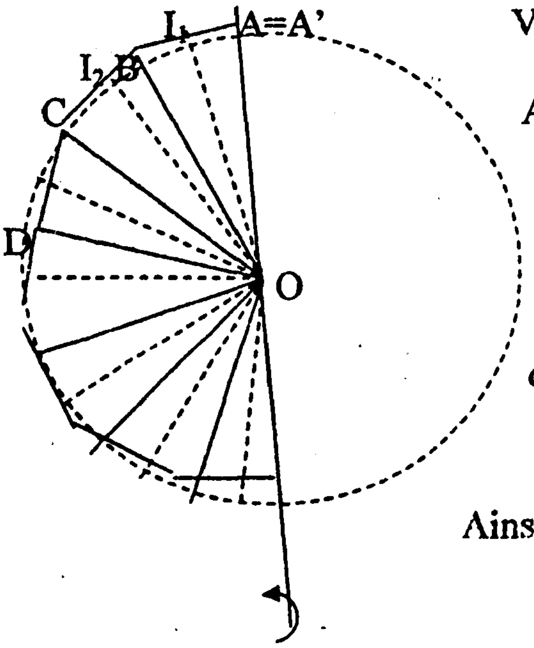


$$V_{AOB}=\frac{1}{3}.S_{AB}.HO=\frac{1}{3}(2\pi.HO.AB).HO$$

$$=\frac{1}{3}(2\pi.OH^2.A'B')\quad ,A'B'=AB$$

$$=\frac{2}{3}.\pi.HO^2.A'B'$$

En cas d'un polygone régulier



$V=V_{\Delta ABO}+V_{\Delta BCO}+\ldots\ldots$

Avec $OI_1=OI_2=OI_3=\ldots..=r$

On a : $V=\frac{2}{3}r^2.(A'B'=B'C'+\ldots.)$

si $n\to\infty$,$r\to R$ et $A'F'=2R$

Dans ce c as le contour polygonale devient un arc de cercle va engendrer le volume de la sphère.

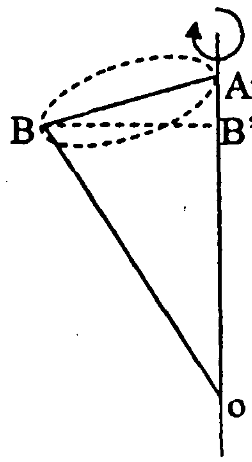
Ainsi : $V_{SPHERE}=\frac{2}{3}\pi.r^2.2R$

$$=\frac{4}{3}.\pi.R^3=\frac{1}{6}.\pi.d^3$$

car $\frac{4.2R^3}{2.3}=\frac{(2R)^3}{6}=\frac{d^3}{6}$ avec $d=2R=$ diamètre

Volume d'un secteur sphérique

Un secteur sphérique étant un solide engendré par un secteur circulaire tournant autour d'un axe .

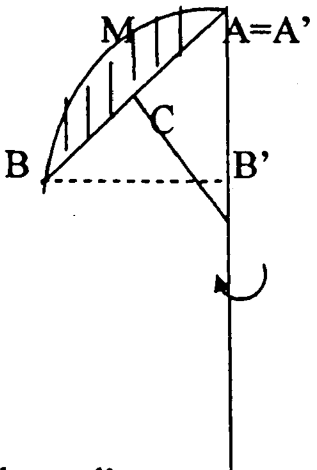


$V_{Secteursphérique}=1/3.S_{AB}.R=2/3.\pi.R^2.h$

car $S_{\overset{\frown}{AB}}=2.\pi.R.h$,$h=A'B'$ hauteur de la zone

Volume d'un anneau sphérique

Un anneau sphérique est un solide engendré par un segment de cercle tournant autour d'un axe.



$OA = R$, $AA' = h$ $OC = r$, $OC \perp AB$

Le triangle OCA étant rectangle en C

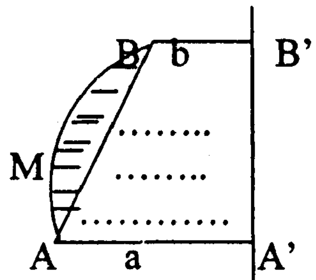
$OA^2 - OC^2 = R^2 - r^2$ avec $CA^2 = (1/2AB^2) = 1/4\ AB^2$

$$V_{AMBCA} = \frac{2}{3}.\pi.(R^2.\ r\ A'B' - {}^2.A'B')$$

$$= 2/3.\ \pi.(R^2 - r^2).A'B' = 2/3\ \pi\ .1/4\ AB^2\ A'B'$$

$$= 1/6\ \pi.AB^2.A'B' = 1/6\ \pi.AB^2\ .\ h$$

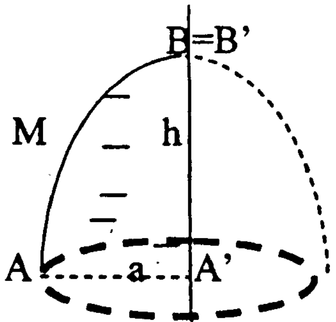
Volume d'un segment sphérique à 2 bases



$$V = \left(\frac{\pi.a^2}{2} + \frac{\pi.b^2}{2}\right).h + \frac{1}{6}.\pi.h^2$$

$A'B' = h$

Volume d'un segment sphérique à une base



$A'B = h$

$$V = ½\ \pi\ a^2.h + 1/6\ .\ \pi\ .h^3$$

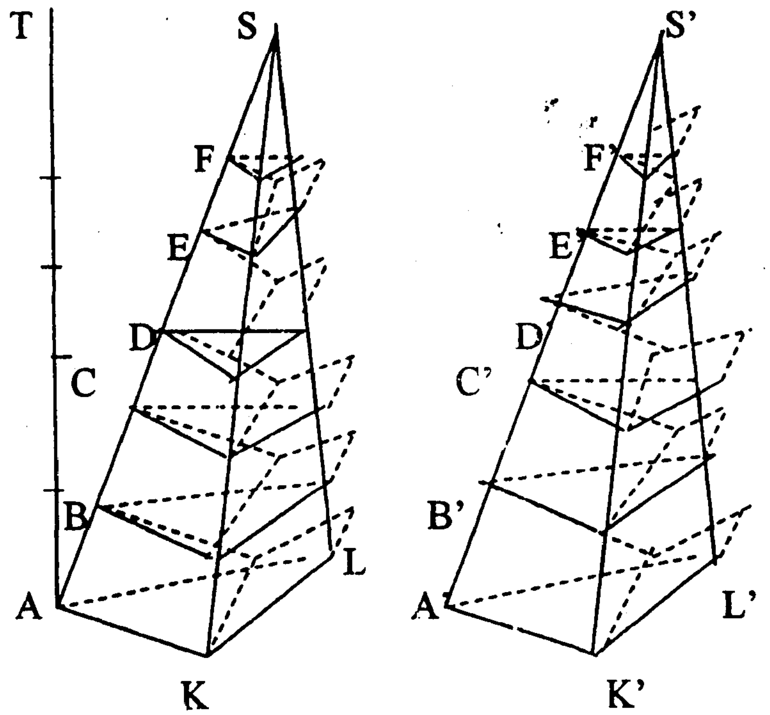
Théorème des escaliers

Théorème fondamental

Si une pyramide est coupée par un plan parallèle à la base,les arêtes latérales et la hauteur sont divisées dans le même rapport .La section est un polygone semblable à la base et le rapport des aires de 2 polygones est égal au rapport des carrés des distances du sommet à leurs bases (plans) .

Théorème des escaliers (conduisant au volume de la pyramide)

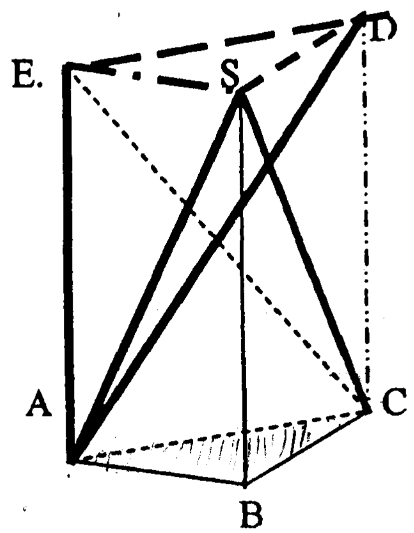
Deux pyramides triangulaires qui ont les bases équivalentes et de hauteurs égales sont équivalentes .



Placer les bases dans un même plan et diviser AT en n parties égales puis mener par chaque point de scission un plan parallèle au plan des bases .
Ces plans déterminent dans ces 2 solides des sections 2 à 2 équivalentes ;
Puis construire dans les pyramides , (n-1) prismes intérieurs et extérieurs de hauteurs $\frac{AT}{n}$. Les (n-1) prismes intérieurs sont 2 à 2 équivalentes à (n-1) prismes extérieurs . La somme de (n-1) volumes des prismes précités donne le volume du prisme total .

En cas de la pyramide triangulaire

Soit la pyramide triangulaire ABCS. Considérons le prisme triangulaire ABCDES construit et de même base ABC et même hauteur



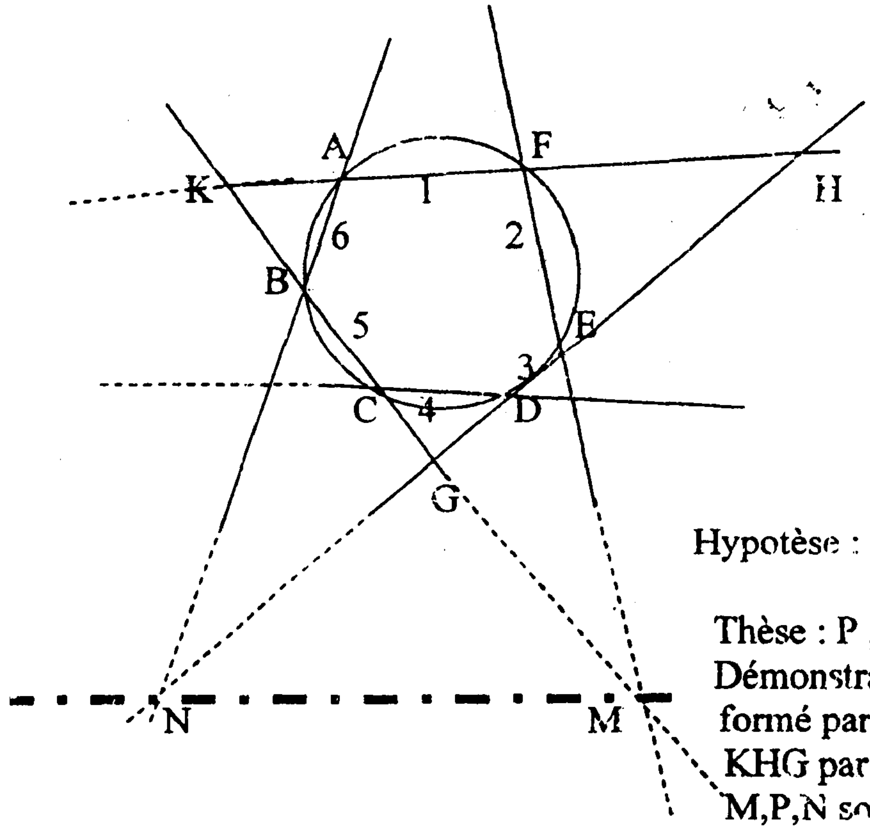
Traçons le plan SCE diagonal, le prisme est est divisé en 3 pyramides triangulaires ABCS ,SAEC , SCED équivalents.

Le volume du prisme est égal 3 fois le volume de la pyramide de même base et hauteur .

$$V_{pyramide} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangleleft ABC} \cdot h$$

Théorème de Pascal

Dans un hexagone inscrit à une circonférence ,les points d'intersection des côtés opposés (1 et 4 ,2 et 5 ,3 et 6) sont colinéaires .



Hypotèse : Hexog. ABCDEF

$1 \cap 4 = P, 2 \cap 5 = M, 3 \cap 6 = N$

Thèse : P ,M ,N colinéaires

Démonstration :Considérons le triangle formé par les côtés non consécutifs 1,3,5 KHG par exemple et démontrons que M,P,N sont les points d'une transversale de ce triangle .

Donc il faut montrer que : $\frac{MG}{MH}.\frac{NH}{NK}.\frac{PK}{PG} = +1$ (2ème version de Ménélaûs)

et en considérant les côtés 2 ,4 ,6 comme transversales du même triangle KHG

on a : $\frac{MG}{MH}.\frac{EH}{EK}.\frac{FK}{FG} = +1$ (Δ MEF) , $\frac{NH}{NK}.\frac{AK}{AG}.\frac{BG}{BH} = +1$ (Δ NBA)

$\frac{PK}{PG}.\frac{CG}{CH}.\frac{DH}{DK} = +1$ ($\triangleright PCD$) ; En multipliant ces rapports membre à membre

on a : $\frac{MG}{MH}.\frac{NH}{NK}.\frac{PK}{PG}.\frac{EH.FK.AK.BG.CG.DH}{EK.FG.AG.BH.CH.DK} = +1$ (1)

Or ce dernier facteur du premier membre peut s'écrire :

$\frac{EH.DH}{BH.CH}.\frac{FK.AK}{EK.DK}.\frac{BG.CG}{FG.AG}$ (2) et en vertu des puissances d'un point par rapport à un cercle circonscrit à un hexagone , on a :

EH.DH=BH.CH , FK.AK= EK.DK , BG.CG=FG.AG et leur rapport donne 1

d'où la thèse :

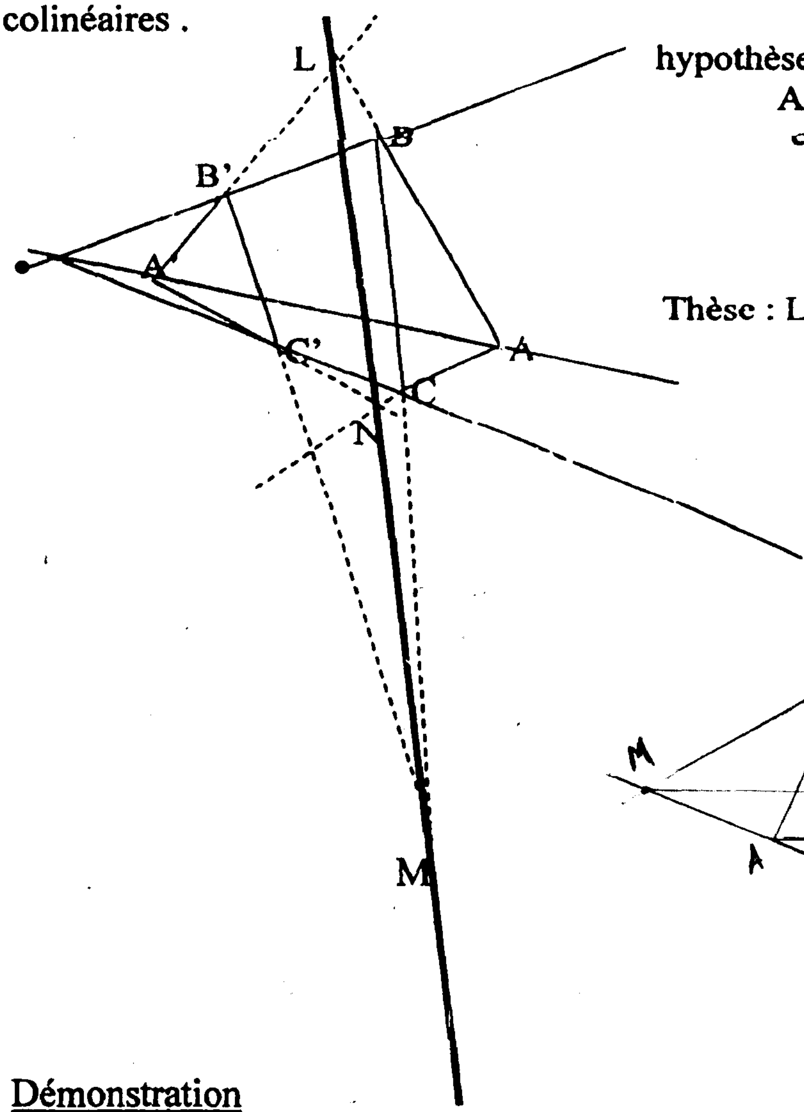
$\frac{MG}{MH}.\frac{NH}{NK}.\frac{PK}{PG} = +1$ donc les points M,N,P sont colinéaires .

Cette droite est dite : **droite de Pascal**

C'est une droite qui passe par

Théorème de DESARGUES

Si deux triangles ABC et A'B'C' sont situés de manière que les droites AA' ,BB' ,CC' qui joignent leurs sommets chacun à chacun sont concourantes, alors les points d'intersection de AB et A'B' , BC et B'C' ,CA et C'A' sont colinéaires .



hypothèse :triangles ABC et A'B'C'

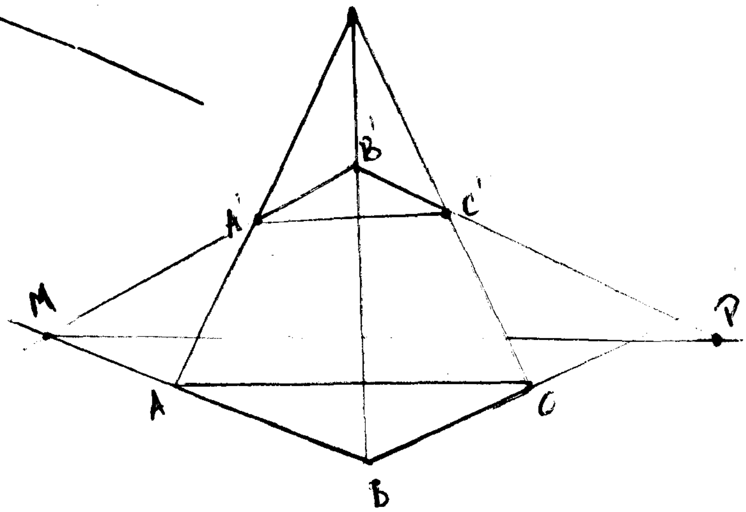
AA',BB',CC' concourantes

en O .$BC \cap B'C' = M$

$AC \cap A'C' = N$

$BA \cap B'A' = L$

Thèse : L ,M ,N colinéaires



Démonstration

On applique le théorème de MENELAÛS pour démontrer que les points L,M,N sont sur la transversale du triangle ABC.

Donc prouver que : $\frac{LA}{LB}.\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA} + = 1$

En effet LA'B' transversale du triangle OAB , on a : $\frac{LA}{LB}.\frac{B'B}{B'O}.\frac{A'O}{A'A} = +1$

MB'C' transversale du triangle OBC , on a : $\frac{MB}{MC}.\frac{C'C}{C'O}.\frac{B'O}{B'B} = +1$

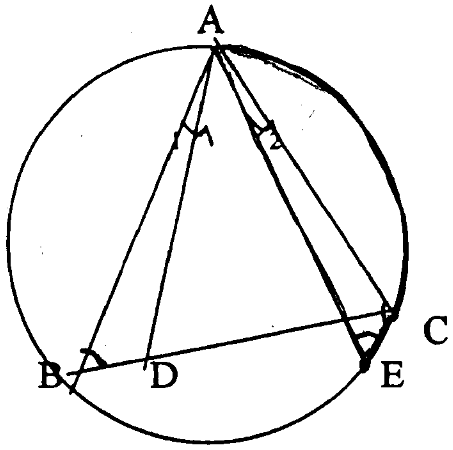
NC'A' transversale du triangle OCA , on a : $\frac{NC}{NA}.\frac{A'A}{A'O}.\frac{C'O}{C'C} = +1$

Après multiplication membre à membre et simplification ,on a : $\frac{LA}{LB}.\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA} = +1$

des droites isogonales ceux sont des droites qui forment des angles égaux.

Théorème de PTELOMEE

Dans un triangle ,le produit de 2 côtés est égal au produit de 2 droites isogonales par rapport à ces côtés,l'une limitée par le 3ème côté et l'autre limitée par la circonférence circonscrite au triangle.



Hyp : $A_1=A_2$,

these: AB .AC =AE .AD

Démonstration:

L'angle B = angle E = ½ $\overset{\frown}{AC}$(angles inscrit et de même arc , en plus $A_1 = A_2$ (hypothèse)

$\Rightarrow$ les triangles ABD et AEC sont semblables

$$\Rightarrow \frac{Ab}{AE} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AB.AC = AD \;.\; AE$$

Chap. 10 Rapport harmonique et anharmonique et Recherche des lieux

10.1. Recherche des lieux géométriques

Dans ce syllabus on va traiter le lieu géométrique sous forme des théorèmes en donnant seulement quelques propriétés communes des points du lieu (méthode synthétique) et dans cette partie on a la droite et on demande de démontrer que ses points jouissent d'une propriété propre à eux seuls .Par exemple la médiatrice d'un segment et la bissectrice d'un angle sont des lieux mais dans ce cas ,la question sera posée sous forme de problème et chercher la ligne qui répond aux conditions imposées (méthode analytique c .à .d. qui part de l'inconnue au connue) . C'est la véritable méthode de travail pour la recherche des lieux .

a) ANALYSE

1°) Chercher d'abord les points particuliers du lieu facile à construire ; Puis supposer un autre point du lieu quelconque connu .

2°) Relier le point quelconque aux particuliers.

3°) Etudier la figure obtenue et en déduire qu'un point quelconque est sur le lieu

b) Construction

On construit la ligne trouvée.

c) synthèse

En prouvant que tout point trouvé est un point du lieu et conclure que le lieu se confond avec cette ligne .

On distingue 2 cas :

-Si le lieu est défini par propriété commune de ses points.

-Si le lieu est décrit ou défini par le mouvement d'un point .

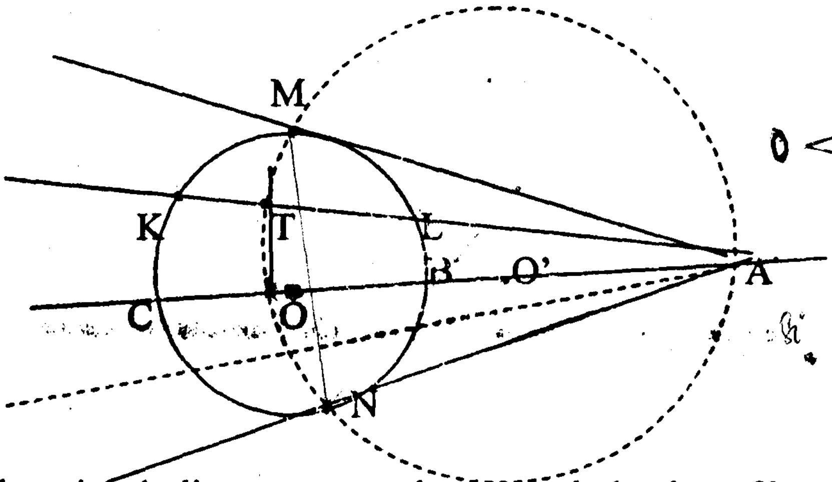
EXEMPLES

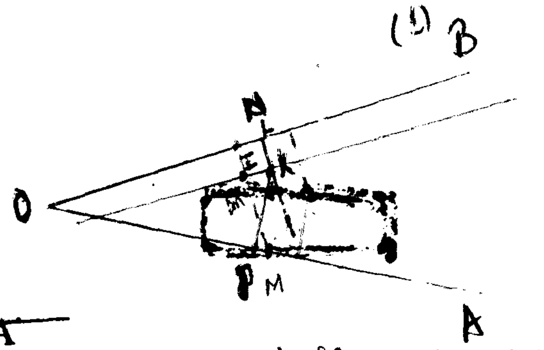
On donne un angle AOB ; trouver le lieu des points intérieurs à l'angle dont la somme des distances de ses points aux côtés de l'angle est égale à m (m $\neq$ O)

<u>Réponse :</u> On donne l'angle AOB ; le point O est exclu du lieu car la somme des distances aux côtés est nulle . Si M est un point du lieu et sur le côté OA ,la distance de O à OA est nulle et avec OB est une perpendiculaire de longueur MN = m . Si K est un autre point du lieu alors KP+PI = m $\Rightarrow$ KP =KR$\Rightarrow$MK est la bissectrice de l'angle PKR , donc le lieu cherché est la bissectrice de l'angle NMT = OM'T' . On peut aussi montrer que M' est le point du lieu .

<u>Exemple 2.</u>

Trouver le lieu géométrique des milieux des cordes découpés par la circonférence sur les sécantes qui pivotent autour du point A extérieur à la circonférence .





Si M est un pt du lieu : O + m = m+MN
K ∈ lieu → KL+KP=m
→ KI = ME

En effet le point du lieu connu est le centre de la circonférence ,O étant milieu du diamètre CB passant par A qui le divise en 2 parties égales .Si M et N sont les points du lieu (pieds des tangentes issues de A,leurs segments étant nuls, M et N sont aussi points milieux et appartiennent au lieu .

Soit ALK une autre sécante ,menons OT diamètre perpendiculaire à AK, elle la divise en 2 parties égales et T est milieu d'où un autre point du lieu. Le triangle AMN est inscriptible à une circonférence de centre O' milieu de OA . Le lieu cherché est un arc MTON de cette circonférence appelée partie <u>singulière</u> et l'autre partie MAN du lieu constitue sa partie <u>parasite.</u>

Si le lieu n'est pas une partie entière ,il faut interpréter pour spécifier sa partie entière et parasite .

10.2 . **<u>Rapport harmonique et anharmonique</u>**

Définitions :

-La ponctuelle : On appelle ponctuelle , un ensemble des points appartenant à une même droite appelée : <u>lieu ou support de la ponctuelle.</u>

.A .B .C .D (a)

La ponctuelle de support (a) est notée : a : ABCD

<u>RAPPORT ANHARMONIQUE DE 4 POINTS D'UN PONCTUELLE</u>

On appelle rapport anharmonique de 4 points ABCD d'une ponctuelle a :ABCD dans cet ordre , le quotient des rapports de section de 2 derniers points par rapport au segment déterminé par les 2 premiers points fixés .

On note : λ = (ABCD) Ainsi λ =(ABCD) = $\dfrac{CA}{CB} : \dfrac{DA}{DB}$

A et B sont les points fondamentaux et λ est positif si C et D sont **extérieurs au** segment et négatif si ils sont intérieurs .

Le cardinal des rapports anharmoniques est : # λ = 4 !

Si n = - 1 alors le rapport est dit : **harmonique** c .à .d (ABCD) = -1

Quelques théorèmes

Th 1. Dans (ABCD) si on change le 3ème et 4ème points , le rapport est l'inverse du premier . (ABDC) = $\dfrac{1}{(ABCD)}$

Th:2. (ABCD) + (ACBD) = 1 , On change le 2ème et le 3ème , la somme des rapports vaut 1 .

Th:3.Si on change les 2 premiers points avec les 2 derniers le rapport ne change pas (ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)

Exercices

1. Si (ABCD) = d ,montrer que (ABDC = $\dfrac{1}{d}$
2. Si (ACBD) = 1-d alors (ABCD) = d
3. Si (ABCD) = d alors (ADBC) = 1 - $\dfrac{1}{d}$
4. Si (ABCD) = d on a : (ADCB) = $\dfrac{d}{d-1}$

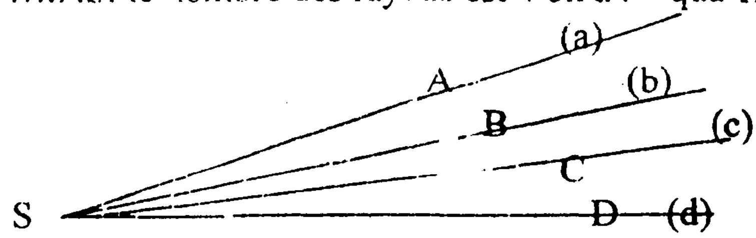
Calculer : a) (ACBD) + (ABDC) en fonction de d si (ABCD) = d

b) (DBCA) . (CDAB) , si (ABCD = d

10.3. Rapport anharmonique de 4 rayons d'un faisceau

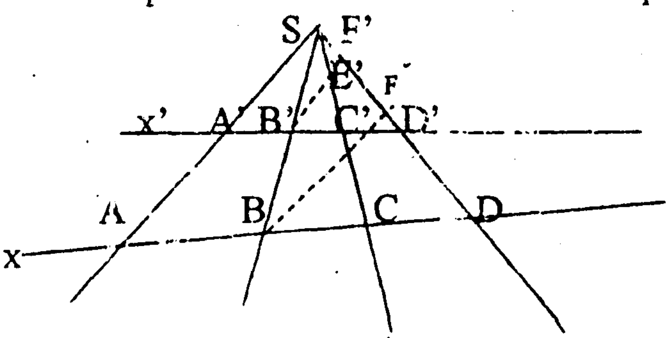
Un faisceau de rayons est un ensemble infini des droites a,b,c,d..... passant par un même point situé dans le même plan appelé : lieu ou support du faisceau

On note : S : ABCD avec A,B,C,D les points sur respectivement sur les droites a , b , c, d, ...Si le nombre des rayons est 4 on a : quaterne de rayons.



Théorème

Une sécante quelconque coupe un quaterne de rayons en 4points dont le rapport anharmonique est constant c .à .d le même pour toutes les sécantes .



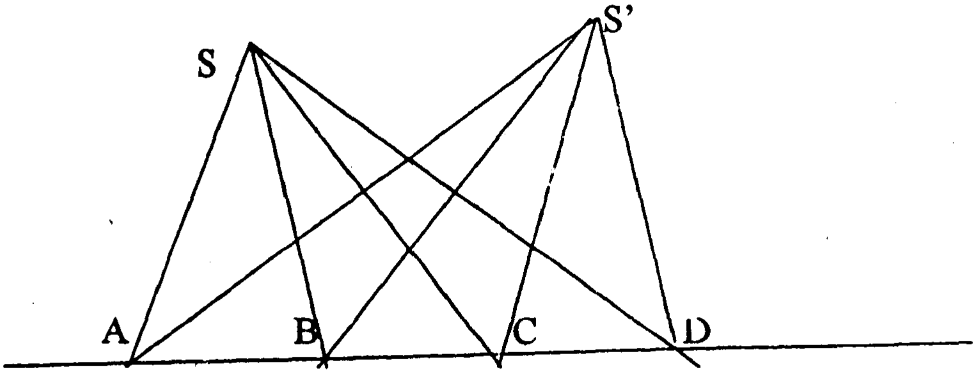
Hypotèse : SABCD un quaterne de rayon ,A,B,C,D les points d'intersection des rayons avec le support x et A',B',C' ,D' les points d'intersections avec le support x' d'une autre ponctuelle.

Thèse : (ABCD) = (A'B'C'D')
ou $\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}=\frac{C'A'}{C'B'}:\frac{D'A'}{D'B'}$

Démonstration :Menons les parallèles BEF et B'E'F' à SA =(a) les triangles ASC et BEC ainsi que DAS et DFB sont semblables ,on a :
$\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}(1)$ *et* $\frac{DA}{DB}=\frac{AS}{BF}(2)$ en divisant (1) et (2) on a :
$\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}=\frac{BF}{BE}(3)$ de même les triangles A'SC' et B'E'C' ainsi que les triangles D'A'S et D'B'F' sont aussi semblables on a :
$\frac{C'A'}{C'B'}=\frac{SA'}{E'B'}(1)'$ *et* $\frac{D'A'}{D'B'}=\frac{A'S}{B'F'}(2)'$ et (1)' :(2)' donne
$\frac{C'A'}{C'B'}:\frac{D'A'}{D'B'}=\frac{B'F'}{E'B'}:(4)$ *et* $\frac{BF}{BE}=\frac{B'F'}{B'E'}(5)=(3)=(4)$, en égalisant ensuite (3) et (4)
on a : $\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}=\frac{C'A'}{C'B'}:\frac{D'A'}{D'B'}$

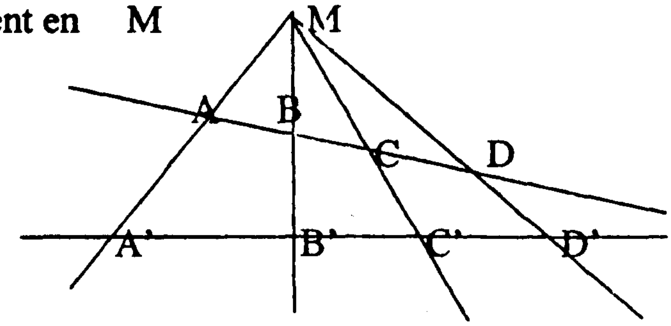
Ponctuelles perspectives

Deux quaternes de rayons sont perspectifs si les points d'intersection de 4 couples de rayons correspondants sont colinéaires .



Quaterne des points perspectifs

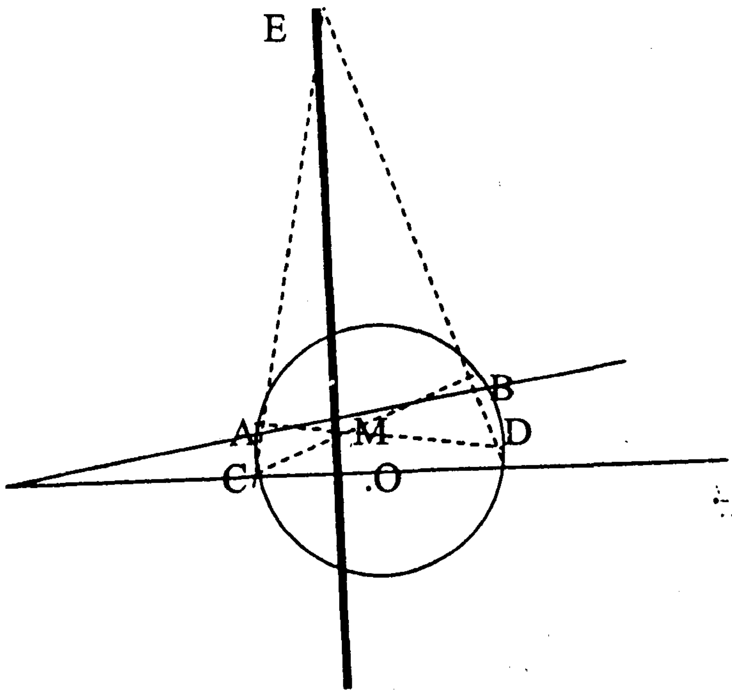
Soient x : ABCD et x' : A'B'C'D' 2 quaternes des points respectivement A,B,C,D et A',B',C',D' . Ils sont dits quaternes des points perspectifs si les droites qui joignent les points correspondants sont concourantes .AA' ,BB' ,CC' et DD' concourent en M



CHAPITRE 11 : PÔLE ET POLAIRE

Définition :

On appelle polaire d'un point P par rapport à une circonférence , la perpendiculaire p au diamètre OP menée par le conjugué harmonique de P par rapport aux point d'intersection de la circonférence avec ce diamètre . Le point P est appelé : **le pôle de droite p** . En d'autres termes , si P est un point du plan et (c) une circonférence donnée , la polaire d'un point est le lieu géométrique du conjugué harmonique de P par rapport aux points d'intersection de la circonférence avec une sécante quelconque menée par P.



Propriétés

1. Le pôle et la polaire sont situés d'un m^me côté du centre de la circonférence.
2. Si le pôle est intérieur à la circonférence , la polaire n'a aucun point commun avec la circonférence .
3. Si le pôle est extérieur, la polaire est une sécante passant par les points de contact des tangentes issues du pôle avec la circonférence .
4. La polaire d'un point de la circonférence est une tangente.
5. La polaire du centre est une droite de l'infini.
6. La polaire de tous les points d'une droite passent au pôle de la droite et réciproquement .

Théorème de BRIANCHON

inscrit

Dans un hexagone circonscrit à une circonférence , les droites qui joignent les sommet opposés sont concourantes .

Hypothèse : ABCDEF hexagone circonscrit

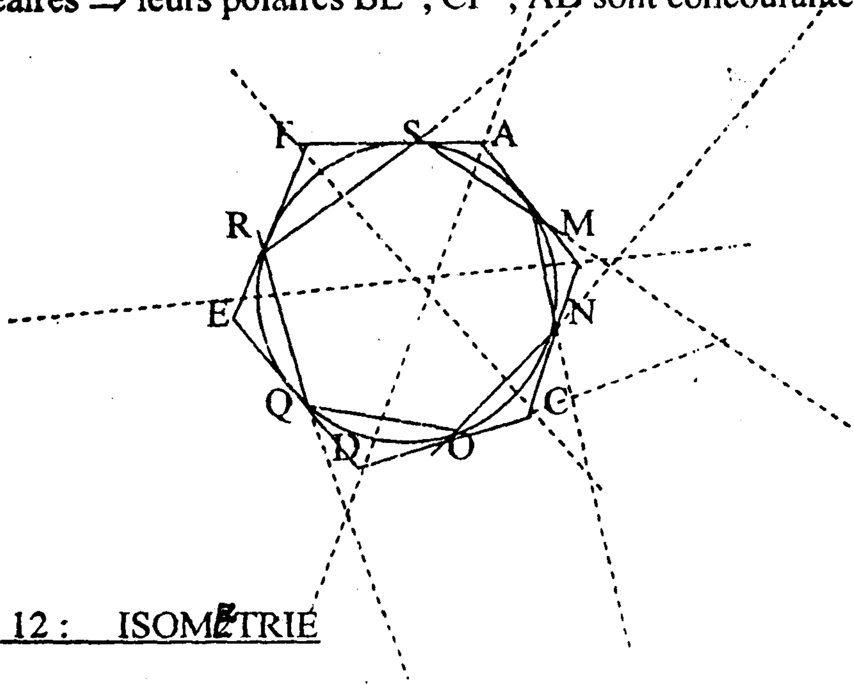
Thèse : AD ,BE ,CF sont concourantes.

Démonstration :Relions M ,N ,O ,Q ,R , S les points de contact des côtés consécutifs avec la circonférence,On a un hexagone inscrit et ABCDEF et

MNOPQRS sont des figures polaires réciproques par rapport au cercle et cfr le **théorème de PASCAL**

IKL les points d'intersection des côtés opposés MN ET QN, NO et RS ,OQ et SM ou leur prolongement appartiennent à une même droite .

Or B est le pôle de MN , E pôle de QR , i l'intersection de MN et OR est le pôle de BE . De même K l'intersection de NO et RS est le pôle de CF . Donc I ,K,L colinéaires ⇒ leurs polaires BE , CF , AD sont concourantes.

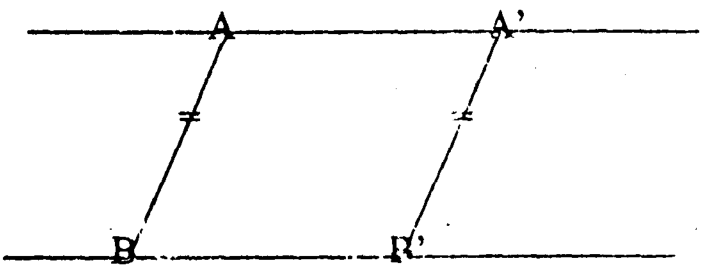


CHAPITRE 12 : ISOMÉTRIE

Définition :

On appelle isométrie , une transformation ponctuelle biunivoque qui conserve les longueurs (distances de 2 points)

/AB/ = /A'B'/



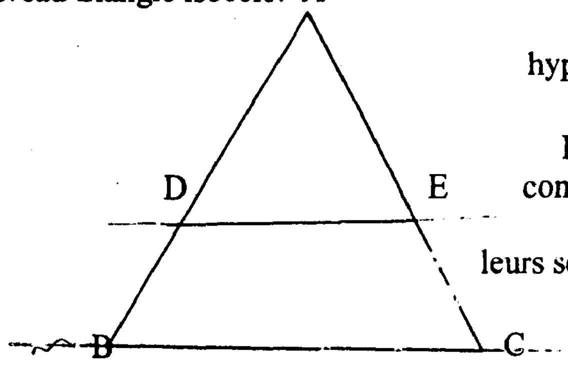
Exemples: Les translations , rotations sont des isométries pour un point , droite,plan .

Remarques :

- A toute isométrie correspond une isométrie inverse
- Le produit de 2 isométrie est une isométrie
- Les longueurs étant conservées et par suite les rapports anharmoniques des quaternes de points
- Les angles sont conservés ainsi que les rapports anharmoniques des quaternes des rayons .

Exercices de Géométrie Elémentaire

1. Dans un triangle isocèle, si on mène un segment parallèle à une base , on obtient un nouveau triangle isocèle.

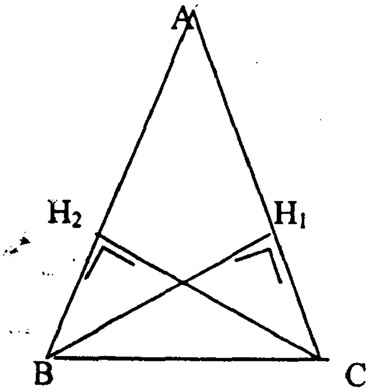


hypothèse : Δ ABC , $\hat{B} = \hat{C}$, $DE // BC$

thèse : Δ ADE isocèle .

Démonstration : Puisque DE // BC et en considérant respectivement AB et AC comme leurs sécantes , on a : $\hat{B} = \hat{D}$ *et* $\hat{C} = \hat{E}$ comme angles correspondants . Or $\hat{B} = \hat{C}$ par hypothèse , donc $\hat{D} = \hat{E}$ comme 2 quantités égales à une même troisième $\Rightarrow$ Δ ADE est isocèle .

2. Dans un triangle isocèle , on a : 2 médianes (bissectrices , hauteurs , médiatrices) égales .
En effet montrons d'abord qu'on a 2 hauteurs égales.



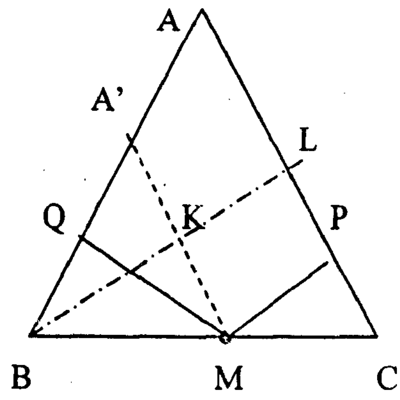
hypothèse : Δ ABC , $\hat{B} = \hat{C}$, $BH_1 \perp AC, CH_2 \perp AB$

thèse : $BH_1 = CH_2$

Démonstration : Les triangles BCH_1 et CBH_2 sont égaux (ils ont une hypoténuse égale BC et un angle aigu égal (angle B = angle C par hypothèse) .
Ainsi les côtés opposés aux angles égaux sont égaux
$\Rightarrow BH_1 = CH_2$

N.B. On procèdera de même par égalité des triangles pour les médianes , médiatrices , et bissectrices .

3 . La somme algébrique des distances d'un point sur la base principale d'un triangle (ou sur son prolongement) aux 2 autres côtés d'un triangle isocèle est une constante .



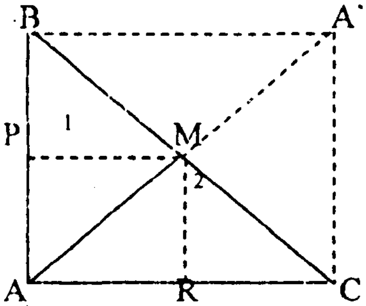
Hypothèse : Δ ABC , angle B = angle C

M sur BC , $MQ \perp AB$, $MP \perp AC$

Thèse : MP + MQ = cste

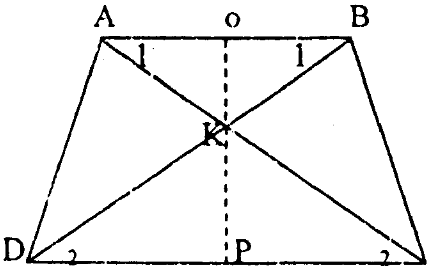
Démonstration : par M menons MA' //AC le nouveau triangle BA'M est aussi isocèle et a 2 hauteurs égales (BK = MQ) or KL = MP (segments // entre 2 droites //)
$\Rightarrow$ BL = hauteur = BK+KL = MQ + MP = constante (hauteur)
Ce théorème reste valable pour le triangle équilatéral pour le point intérieur ou extérieur au triangle où la somme algébrique est toujours une constante .

4 . Dans un triangle rectangle , la médiane relative à l'hypoténuse vaut sa moitié.



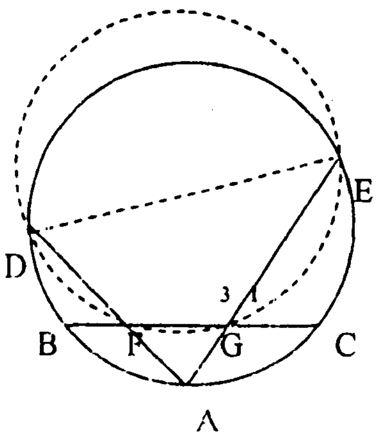
Hypothèse : Δ ABC rectangle en A ,BM=MC
thèse : AM = ½ BC = BM = MC
Démonstration : a) Par B et C menons respectivement BA' et CA' parallèle à AC et AB .
La figure trouvée est un parallélogramme rectangle dont les diagonales sont égales et se coupent en leur milieu
$\Rightarrow$ AA' = BC = 2 AM = 2 MC $\Rightarrow$ AM = ½ AA'=1/2 BC .
N.B. On peut aussi démontrer à partir de l'égalité des triangles 1 et 2 tout en prouvant que le triangle AMB est isocèle l'angle M principal (PM est à la fois hauteur et médiane)
$\Rightarrow$BM=AM=MC = ½ BC.

5. Dans trapèze isocèle , les diagonales sont perpendiculaires entre elles . Si sa hauteur vaut 8 , trouver l'aire du trapèze .



Solution : On sait que dans un trapèze isocèle les angles adjacents à une même base sont égaux et les côtés non parallèles sont aussi égaux.
$\Rightarrow$ les triangles DAC et DBC sont égaux (ont un angle égal D=C entre deux côtés égaux 2 à 2 AD=BC et DC=DC côté commun)
l'angleD_1= angle C_1 $\Rightarrow$ le triangle DKC est isocèle,
il en est de même pour le triangle AKB avec $\hat{K}$ principal pour les 2 triangles rectangles .
OP = OK + KP avec OK et KP respectivement médiane relative à l'hypoténuse au triangle AKB et DKC $\Rightarrow$ OK = ½ AB et KP = ½ DC il en est de même pour le triangle AKB avec $\hat{K}$ principal pour les 2 triangles .
On a : OK = ½ AB et KP = ½ DC $\Rightarrow$ OP = ½(AB+DC) = hauteur du trapèze et
AB+ DC = 2 . OP = 2 . h.
Ainsi , l'aire du trapèze étant $S = (\frac{AB + DC}{2}).h = h \, . \, h = h^2 = 8.8 = 64_{us}$

6. D'un point milieu d'un arc BC , on mène les cordes AD et AE qui coupent respectivement la corde BC en F et G . Montrer que les points D ,E,G ,F son concycliques.

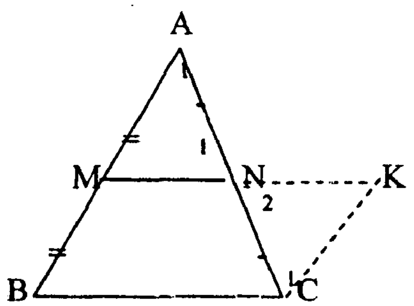


Hypothèse : $\overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{AC}, AE, AF, G$
Thèse : D,E,G,F concycliques .
Démonstration : Relions D et E ,il faut montrer que le quadrangle DEGF est inscriptible à une circonférence c .à . d les angles opposés sont supplémentaires (D et G_3 par exemple)

En effet les arcs BA et AC étant égaux et l'angle G_1 intérieur à la circonférence on a :

$\hat{G}_1 = ½ (\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{EC}) = 1/2(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CE}) = 1/2\,\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{D}$,or $G_3+G_1=180° \Rightarrow \hat{D} + \hat{G}_3=180°$ et opposés dans le quadrangle , ils sont supplémentaires donc le quadrangle est inscriptible .
En conclusion , les quaterne D ,E ,G ,F sont concycliques .

7. Tout segment qui joint les milieux de 2 côtés consécutifs d'un triangle est parallèle au 3ème et en vaut sa moitié .

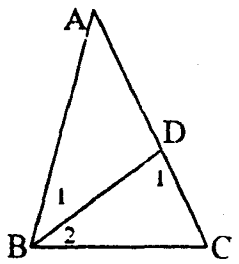


Hypothèse : Δ ABC ,AM=MB ,AN=NC

Thèse : a) MN //BC , b) MN = ½ BC

Démonstration : Par C mener CK // AB et prolongeons MN qui coupe la parallèle en K.
Les triangles AMN et NCK sont égaux (ont un côté égal AN=NC adjacent à 2 angles égaux 2 à 2 , $A_1= C_{1\,\text{alternes internes}}$ et $N_2 = N_{1\,\text{opposés par le sommet}}$) $\Rightarrow$ CK =AM et AM =MB $\Rightarrow$ CK = MB et parallèles par construction donc sont situé entre deux parallèles $\Rightarrow$ MK //BC (deux droites parallèles qui comprennent les segments parallèles et égaux) ; En plus MN = NK (égalité des triangles) et on a : MK=MN+NK = 2 MN=BC car la figure a ses côtés 2 à 2 parallèles donc parallélogramme $\Rightarrow$ MN = ½ BC .

8. Le segment qui joint les milieux de 2 côtés non parallèles d'un trapèze est parallèle aux bases et en vaut leur demi somme . Celui qui joint les milieux de 2 diagonales vaut la demi différence des bases.
Pour la démonstration , utiliser le théorème de Thalès et la démonstration du théorème 7 ci-dessus .
9. Si BD est la bissectrice de, l'angle B d'un triangle isocèle ABC d'angle principal A. Avec $\hat{A} = \frac{2}{3}dr$,alors AD=DB=BC .



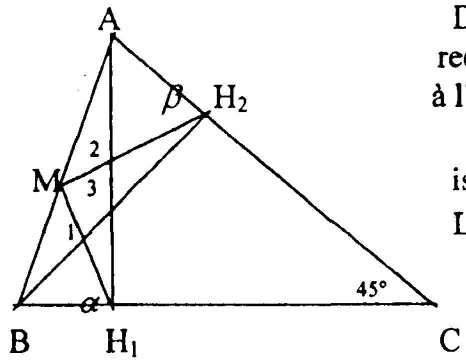
Hypothèse : Δ ABC , AB = AC , angle B_1= angle B_2 et l'angle A= 2/5 dr.
Thèse : AD=DB=BC

Demonstration :

Puisque $\hat{B} = \hat{C}$, et $\hat{B} + \hat{C} = 2dr - \hat{A} = 2dr - \frac{2}{5}dr = \frac{8}{5}dr = 2\hat{B} \Rightarrow \hat{B} = \frac{4}{5}dr \Rightarrow \hat{B}_1 = \frac{2}{5}dr = \hat{A}$
$\Rightarrow$ le triangle ABD isocèle $\Rightarrow$ AD=DB(côtés opposés aux angles égaux) (1)
En plus $\hat{C} = \hat{B} = \frac{4}{5}dr$ *et* $\hat{D}_1$ extérieur au triangle ADB , on a : $\hat{D}_1 = \hat{A} + \hat{B}_1 = \frac{4}{5}dr = \hat{C} \Rightarrow$ le triangle ΔBDC isocèle $\Rightarrow$ DB=BC(côtés opposés aux angles égaux) (2) .
En comparant (1) et (2) ,on a : AD=DB=BC .

10. Si un angle d'un triangle vaut 45° , alors les droites qui joignent les pieds des hauteurs abaissées sur ses côtés au milieu du côté opposé sont perpendiculaires.

Hypothèse : le triangle ABC ,l'angle C= 45° , AM = MB,$AH_1 \perp BC$,$BH_2 \perp AC$
Thèse : l'angle H_1MH_2=90°



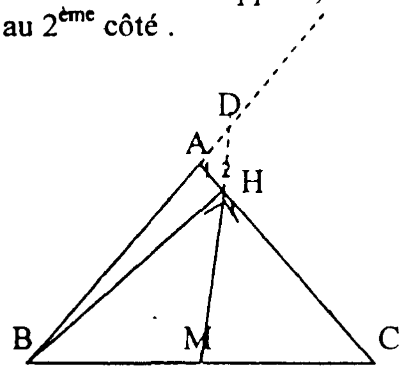
Démonstration :Les triangles ABH_1et ABH $_2$ sont rectangles et MH_1 et MH_2 sont les médianes relatives à l'hypoténuse dans ces triangles rectangles ⇒

$MH_1 = MH_2 = \frac{1}{2}$ AB ⇒ les triangles sont isocèles ⇒ l'angle B = α et l'angle A = β

L' angle M_1= 180°- 2 B et M_2= 180°- 2A ,
l'angle M_3 = un plat – (M_1 + M_2) = 360°-270°=90°
car A + B = 180°-45° = 135°
Ainsi l'angle M_3 = 90° ⇒l'angle H_1 M H_2 = un angle droit ⇒

$MH_1 \perp MH_2$.

11.La droite qui joint le milieu d'un côté d'un triangle au pied de la hauteur menée à un 2ème côté du sommet opposé,fait avec le 3ème côté un angle égal à la différence des angles adjacents au 2ème côté .



hypothèse : Δ ABC ,MB=MC ,BH ⊥ AC
Thèse : Angle D = angle A – angle C

Démonstration :L'angle A_1 est extérieur au triangle ABC

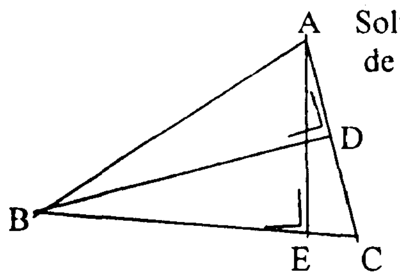
⇒ > A_1= >B + >C.

Dans le triangle ADH , on a : $\hat{D} = 2dr - (\hat{A}_1 + \hat{H}_2)$ (0)

et BH ⊥ AC ⇒MH médiane relative à l'hypoténuse ⇒ MH = MC ⇒ $\hat{C} = \hat{H}_1 = \hat{H}_2$

$\Rightarrow \hat{D} = (A+B+C)-(B+2C) = A-C$

12. La base principale d'un triangle isocèle AC = 40 cm ,la hauteur BD = 15 cm ,calculer la hauteur AE du triangle .



Solution : on sait que la surface d'un triangle est indépendante de la base et sa hauteur choisies .

S = ½ AC.DB = ½ BC.AE (AB = BC)

BD ⊥ AC ⇒$AB^2 = AD^2 + BD^2$ avec AD = ½ AC=20cm
⇒ $AB^2=BC^2$ = (400+225)cm ⇒BC= 25 cm
⇒ S = ½ BC.AE⇒ 40.15=25.AE ⇒AE= 24 cm.

13. On donne les 3 côtés d'un triangle ABC , AC= 15 , BC= 10 , AB = 20. On trace les bissectrices BD et CE ,leur point d'intersection est M , calculer les rapports $\frac{CM}{ME}$ et $\frac{BM}{MD}$.

Solution : Dans le triangle EBC , BM est une bissectrice et cfr théorème des bissectrice on a :

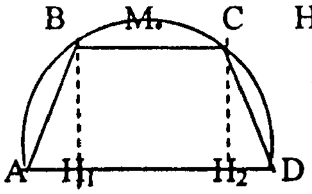
$$\Rightarrow \frac{15-DC}{DC}=2 \quad \Rightarrow 3DC=15 \quad \Rightarrow DC=5 \text{ (1) devient : } \frac{BM}{MD}=\frac{10}{5}=2$$

14. Les 4 points A,B,C,D sont placés sur un arc de cercle tels que ces points soient sur un demi cercle et dans tel ordre :

$\overset{\frown}{AC}=2\overset{\frown}{AB}$ *et* $\overset{\frown}{AD}=3\overset{\frown}{AB}$. Montrer que :

a) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$ b) si M est milieu de $\overset{\frown}{AD}$,montrer que M est aussi milieu de $\overset{\frown}{BC}$.

c) Montrer aussi que BC // AD .



Hypothèse : AD = ½ circ. ,AC =2AB.,AD= 3AB,AM=MD

Thèse : a) AB=BC=CD , b) BM=MC , c) BC//AD

<u>Démonstration</u> : a) On sait que l'arc AC=2 arc AB avec l'arc AC = arc AB + arc BC

$\Rightarrow$ arc AB + arc BC = 2 . arc AB $\Rightarrow$ arc BC = 2 arc AB -arc AB = arc AB$\Rightarrow$ arc BC= arc AB
De même arc AD = 3 arc AB or arc AD = arc AB + arc BC+ arc CD = 3 arc AB(AB=BC) on a: 2 arc AB + arc CD = 3 arc AB $\Rightarrow$ arc CD = 3 arc AB – 2 arc AB =arc AB $\Rightarrow$ les arcs AB ,BC,CD sont égaux .

b) M étant milieu de l'arc AD montrons qu'il est aussi milieux de l'arc BC .En effet l'arc AM = arc MD avec AM=AB+BM et MD= MC+CD $\Rightarrow$ MC=BM (AB=CD cfr (a) $\Rightarrow$ M milieu de l'arc BC .

c) AB=CD et $BH_1\perp AD$ et $CH_2\perp AD \Rightarrow \angle B=\angle C$ dans les triangles ABH_1 et CDH_2 qui sont rectangles et égaux $\Rightarrow$ les côtés opposés aux angles égaux sont égaux $\Rightarrow BH_1 = CH_2$ et perpendiculaires à AD , sont aussi parallèles , donc sont entre 2 droites parallèles $\Rightarrow$ BC//AD.

14. Calculer les côtés d'un triangle isocèle si R = 8 et r = 3 (R = rayon de la circonférence circonscrite et r = rayon de la circonférence inscrite au triangle .

Solution : Si B est l'angle principal du triangle isocèle ABC , a = c et r = S/P

Avec $P=\frac{b+2a}{2}$ *et* $S=\frac{1}{2}b.h_b$ $,h_b=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$ $\Rightarrow$ $S=\frac{1}{4}b.\sqrt{4a^2-b^2}$

$r=\frac{b.\sqrt{4a^2-b^2}}{2.(2a+b)}$ (0) et $R=\frac{abc}{4S}=\frac{a^2b}{4S}=\frac{a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$ (1) le rapport entre (1) et (0) donne :

$\frac{r}{R}=\frac{3}{8}=\frac{b.(2a-b)}{2a^2}$ $\Rightarrow 3a^2-8ab+4b^2=0$ (équation du second degré en a et b.

En résolvant par rapport à a , on a : $a_1 = 2b$ et $a_2 = \frac{2}{3}b$ et en remplaçant ces valeurs dans R on aura : $b_1=2\sqrt{15}$ *et* $a_1=4\sqrt{15}$, $b_2=6\sqrt{7}$ *et* $a_2=4\sqrt{7}$

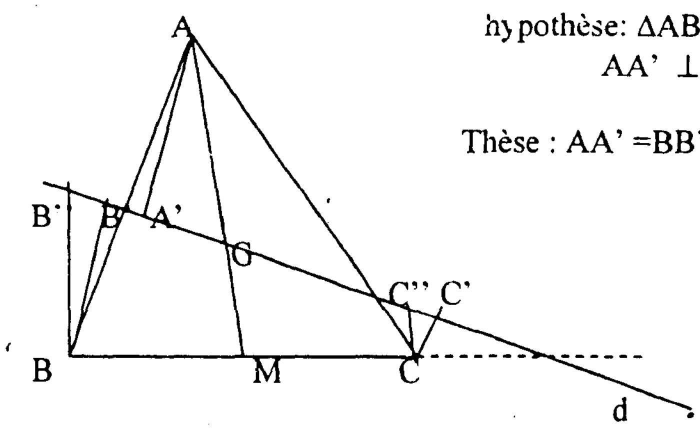
15. Par le centre de gravité d'un triangle quelconque ABC , on mène une droite extérieur au côté BC . Démontrer que la distance de A à cette droite est égale à la somme des distances de B et C à cette même droite .

Hypothèse : d , G , Δ ABC

16. Par le centre de gravité d'un triangle quelconque ABC, on mène une droite extérieur au côté BC. Démontrer que la distance de A à cette droite est egale à la somme des distances de B et C à cette même droite.

Hypothèse : d , G , Δ ABC

Thèse : AA' = BB' +CC



hypothèse: ΔABC , G= barycentre , d

AA' $\perp$ d , BB'$\perp$ d , CC'$\perp$ d

Thèse : AA' =BB' + CC'

Démonstration : Par B et C menons les parallèles BB'' et CC '' à AG (G = centre de gravité) or G est à 2/3 de AM à partir de A $\Rightarrow$ GM = ½ AG (1)

En plus les triangles B'BB'' , C'CC'' , A'AG sont semblables

$$\Rightarrow \frac{BB'}{BB''} = \frac{CC'}{CC''} = \frac{AA'}{AG} = k = \cos\alpha \quad \Rightarrow \frac{BB'+CC'}{BB''+CC''} = \frac{AA'}{AG} \quad (2)$$

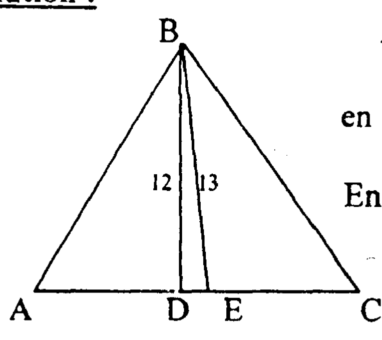
puisque BB''/ / CC'', le quadrilatère BB''C''C étant un trapèze et GM un segment reliant les milieux de 2 côtés non parallèles vaut la demi somme des bases$\Rightarrow$ MG=1/2 BB''+CC''(3)

En comparant (1) et (3) on a :

$$MG = \frac{AG}{2} = \frac{BB''+CC''}{2} \Rightarrow \frac{AA'}{AG} = \frac{BB'+CC'}{AG} \Rightarrow AA' = BB'+CC'$$

17. Dans un triangle ABC , AC = 60 ,la hauteur BD = 12 , et la médiane BE = 13 . Calculer les côtés Ab et BC du triangle donné .

Solution :



AC = 60 $\Rightarrow$ AE = 30 et BE = 13 , le triangle BDE rectangle

en D , on a : DE $=\sqrt{169-144} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow AD = 30-5 = 25$

En considérant les triangles rectangles ADB et BDC on peut tirer selon le théorème de Pythagore les côtés Ab et BC.

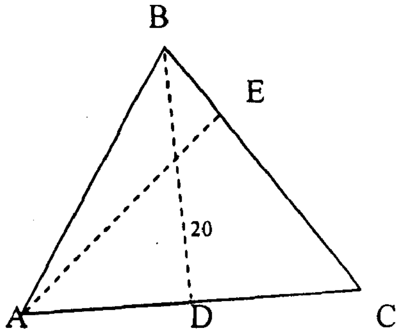
Donc : AB =27,7 et BC = 37

$\Rightarrow$AL=1/2 ML et AM $= \frac{\sqrt{3}}{2} ML$ le côté AB = ½ $(1+\sqrt{3})$ML et l'aire du carré ABCD est :

$S_{ABCD} = AB^2 = \frac{1}{4}(1+\sqrt{3})^2.ML^2$ et $S_{MKNL} = ML^2$

Ainsi $\frac{S_{ABCD}}{S_{MNKL}} = \frac{1}{4}(1+\sqrt{3})^2$

18. Dans un triangle isocèle , la base AC =30 , la hauteur relative à cette base est BD=20. Calculer le segment BE si E est le pied de la hauteur issue de A.



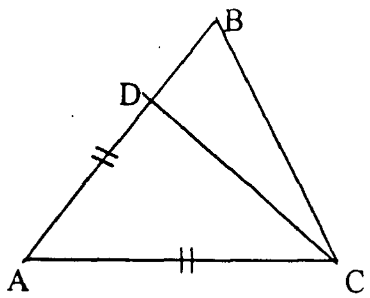
Solution : AB =BC et AC = 30

AB =BC et AC =30 $\Rightarrow$ AD = 15 , BD = 20 le triangle ABD étant rectangle en D et selon le théorème de Pytagore ,on a : $BC^2 = AB^2 = 20^2 + 15^2 \Rightarrow AB = BC = 25$

La surface du triangle ABC = ½ BC.AE = ½ AC.BD = 1/1 .30.20 ===> AE = 24

Le triangle AEC rectangle $BE^2 = AB^2 - AE^2 = 25^2 - 24^2 = 625-576=49 \Rightarrow BE = 7$

19. On joint le sommet c de la base BC d'un triangle isocèle ABC à un point D pris sur le côté opposé . Montrer que : $CD^2 = BD^2 + \frac{AD}{AB}.BC^2$



Hypothèse : AB = AC ,triangle ABC

Thèse : $CD^2 = BD^2 + \frac{AD}{AB}.BC^2$

Démonstration : En utilisant le théorème STEWART : $AC^2.DB + BC^2.AD = CD^2.AB + DB.AD.AB$ (avec AB = AC) on a : $AC^2.DB + BC^2.AD = CD^2.AB + DB.AD.AB$

avec AB=BC , on a : $BA.AD.DB = AC.DB.BA + CB^2.AD - CD^2.BA$

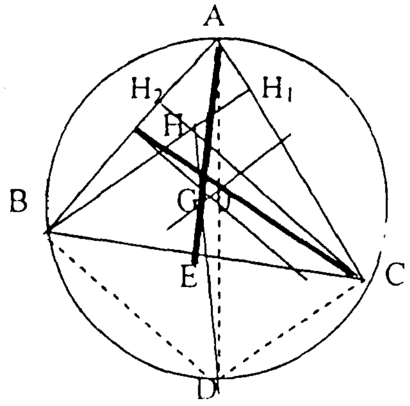
$\Rightarrow BA.AD.DB - CA.DB.BA = CB^2.DA - CD^2.BA$

$\Rightarrow BA.BD(AD-AC) = CB^2.AD - CD^2.BA \Rightarrow -BA.BD^2 - CB^2.AD = -CD^2.AD$

$\Rightarrow$ **Erreur ! Des objets ne peuvent pas être créés à partir des codes de champs de mise en forme.** $\Rightarrow$

$$CD^2 = \frac{AB.BD^2}{AB} + \frac{-CB^2.AD}{-AB} = BD^2 + \frac{AD}{AB}.BC^2$$

20. On donne un triangle ABC . Soit o le point de concours de ses 3 médiatrices, on trace une circonférence de centre o et rayon OA. si H est l'orthocentre du triangle ABC ,D le point diamétralement opposé à A .a) Montrez que BHCD est un parallélogramme et en déduire que si e est milieu de BC ,E est aussi milieu de HD. b) Si G est le centre de gravité du triangle, montrez que G est aussi centre de gravité du triangle AHD , en déduire que O,G,H sont collinaires . c) calculer la valeur de GO/GH .



Hypothèse : triangle ABC , o= centre de la circ. circonscrite au triangle ,G barycentre ,H

Orthocentre du triangle

Thèse : a) BHCD est un parallélogramme

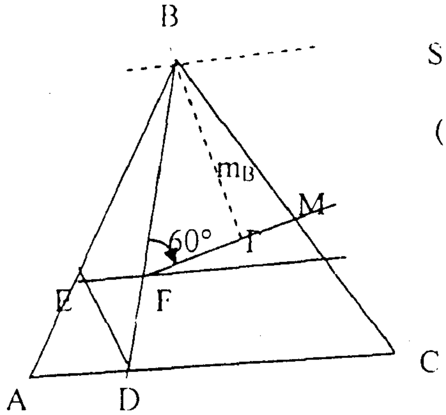
b) E milieu de HD

c) G centre de gravité du triangle ABC l'est aussi pour le triangle AHD et O,G H,alignés

d) le rapport $\frac{GO}{GH}$

Démonstration : D diamétralement opposé à A : l'angle ADB = 90°(inscrit à une demi circ.) $\Rightarrow$ BD $\perp$ AB et C H_2 $\perp$ AB de même pour DC et BH_1 sont aussi perpendiculaire à AC et parallèles $\Rightarrow$ BHCD est un parallélogramme et les côtés opposés sont parallèles et les diamètres se coupent en leur milieu $\Rightarrow$ E milieu de BC est aussi milieu de DH.
G, centre de gravité du triangle ABC $\Rightarrow$ G est l'intersection des médianes issues de A(AE) et de C $\Rightarrow$ AG = 2/3 AE or E milieu de HD $\Rightarrow$ AE médiane du triangle AHD $\Rightarrow$ G barycentre du triangle AHD donc l'intersection des 3 médianes du triangle ADH.
En plus O milieu de AD (AD= diamètre et o centre de la circonférence circonscrite au triangle ABC $\Rightarrow$ OH médiane est passe par le barycentre $\Rightarrow$ H,G,O alignés
GO = 1/3 HO et GH = 2/3 HG $\Rightarrow$ GO/GH = 1/3 : 3/2 = ½

21. Par un point D quelconque de AC ,on mène DE parallèle à BC dans le triangle ABC(E sur AB).Par E , on mène une parallèle EF à AC (F sur BD) Par F on trace une droite FM qui fait un angle de 60° avec BD . Si FM = 7 cm ,AC = 12 cm AD = 4 cm ,BD = 20 cm , calculer la longueur de la médiane relative à D dans le triangle BFM .



Solution : Les triangles ADE et ABC sont semblables

(à côtés 2 à2 parallèles)

on a : $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (1)

Par B mener une parallèle à AC les triangles ADE et ADB sont semblables ,on a :

$$\frac{AE}{FD} = \frac{AB}{DB} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{FD}{DB} (2) \qquad \text{(1) et (2) donne :}$$

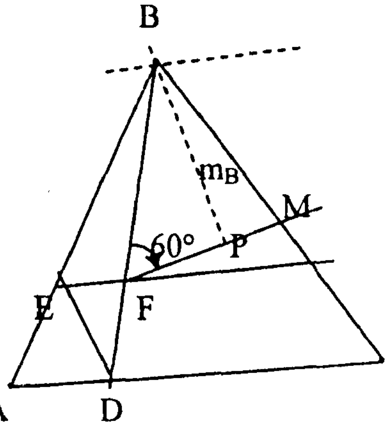
$$\frac{AE}{AB} = \frac{FD}{DB} = \frac{EA}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow FD = \frac{DB}{3} = \frac{20}{3} cm$$

. BF=BD-FD= 20cm-20/3cm =40/3cm

Dans le triangle BFM ,on a : $m_B = BF^2 + FP^2 - 2BF.FP.\cos 60°$ (FP = ½ FM =7/2 cm)

22. Un triangle est inscrit à un cercle de rayon R ,de centre K et circonscrit à un autre cercle de rayon r et de centre o .
Si d est la distance entre les centres . Montrer que : $d^2 = R^2 - 2Rr$

22. Par un point D quelconque de AC ,on mène DE parallèle à BC dans le triangle ABC(E sur AB).Par E , on mène une parallèle EF à AC (F sur BD) Par F on trace une droite FM qui fait un angle de 60° avec BD . Si FM = 7 cm ,AC = 12 cm AD = 4 cm ,BD = 20 cm , calculer la longueur de la médiane relative à B dans le triangle BFM .



Solution : Les triangles ADE et ABC sont semblables

(à côtés 2 à2 parallèles)

on a : $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (1)

Par B mener une parallèle à AC les triangles ADE et ADB sont semblables ,on a :

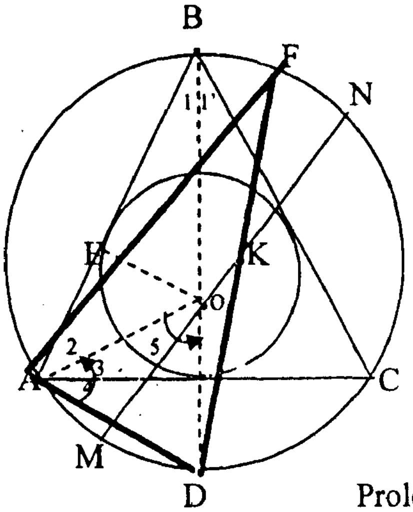
$\frac{AE}{FD} = \frac{AB}{DB} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{FD}{DB}$(2) (1) et (2) donne :

$\frac{AE}{AB} = \frac{FD}{DB} = \frac{EA}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow FD = \frac{DB}{3} = \frac{20}{3}cm$, BF=BD-FD= 20cm-20/3cm =40/3cm

Dans le triangle BFM ,on a : $m_B = BF^2 + FP^2 - 2BF.FP.\cos 60°$ (FP = ½ FM =7/2 cm)

23. Un triangle est inscrit à un cercle de rayon R ,de centre K et circonscrit à un autre cercle de rayon r et de centre o .

Si d est la distance entre les centres . Montrer que : $d^2 = R^2 - 2Rr$



Hypothèse:C(K,R) et C'(o,r) cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC , OK = d

Thèse : $d^2 = R^2 - 2Rr$

Démonstration :

O étant le centre de la circonférence inscrite au triangle , donc O est l'intersection des bissectrices intérieures ⇒ les angles 1 et 1' sont égaux de même aussi pour les angles B_1 et B_2

Prolongeons BO jusqu'en D , l'angle 5= la somme des angles 3 et 4 , avec 2 égal à 3 (BO bissectrice) , l'angle 4 = l'angle 1' = ½ arc DC ⇒ le triangle AOD isocèle ⇒ AD=OB et selon la puissance du point O par rapport cercle circonscrit on a : OM.ON = OD.OB

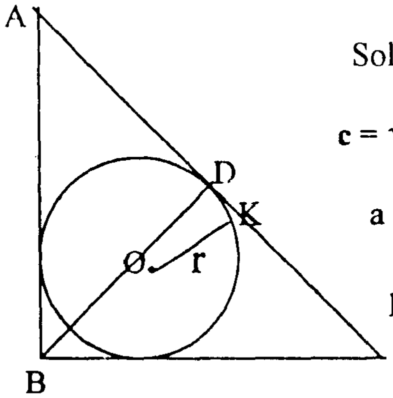
En plus l'angle F = l'angle 1 = ½ arc AD et l'angle FAD est droit (inscrit à un demi-cercle), les triangles BEO et FAD sont semblables(ont 2 angles égaux) $\Rightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{AD}{DF} \Rightarrow$

OE.DF=OB.AD (AD=OD) ⇒ OE.FD=OB.OD⇒ MO.ON=OE.DF

Avec MO=R+d ,ON = R-d ,OB=r ,DF= 2R ,on a : (R+r).(R-r)=2Rr

⇒ $d^2=R^2 - 2Rr$

24. Calculer la surface d'un cercle inscrit dans un triangle rectangle si la hauteur relative à l'hypoténuse détermine sur elle les segments de longueurs 25,5 cm et 14,4 cm.



Solution : AD = 14,4 cm et DC = 25,6 cm, AC=40 cm

$c = \sqrt{AD.b} = \sqrt{14,4\ .40} = 24$ cm

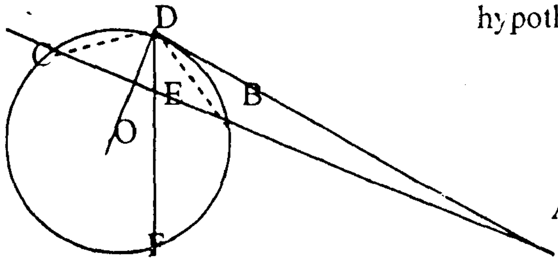
$a = \sqrt{25,6\ .40} = 32$ cm

La surface du cercle étant $S = \pi\, r^2$ et celle du triangle est : S' = P.r avec p = ½ (a+b+c)

= ½ (40+24+32)= 48 , donc $S' = ½\ .AC.h_b = ½\ .\ 40\ .\sqrt{14,4.25,6} = 384\ cm^2$

$r = \frac{S'}{p} = \frac{384}{48} = 8cm$ et en fin $S = \pi\ .r^2 = 3,14\ .\ 64 = 200,96\ cm^2$

25. D'un point A ,on conduit à une circonférence une sécante ABC et une tangente AD .On porte sur Abc , AE = AD . Montrer que DE est bissectrice de l'angle CDB .



hypothèse : sec ABC ,tang. AD , cercle de centre o

AD = AE

Thèse : l' angle CDE = l'angle EDB

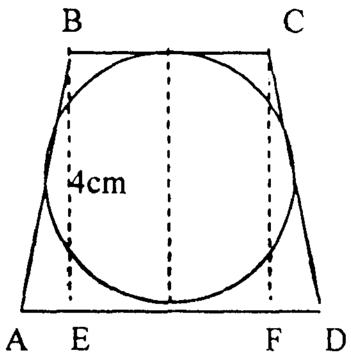
Démonstration :

Prolongeons DE jusqu'en F et AE=AD ⇒ le triangle ADE isocèle ⇒ $\hat{D} = \hat{E}$, avec l'angle FDA inscrit limite = ½ ($\overset{\frown}{DB} + \overset{\frown}{BF}$) et $\widehat{DEA} = 1/2.(\overset{\frown}{DB} + \overset{\frown}{CF})$ *angle* int*erieur*

puisqu'ils sont égaux dans le triangle isocèle donné ,on a : $\overset{\frown}{DB} + \overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{DB} + \overset{\frown}{CF} \Rightarrow \overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{CF}$

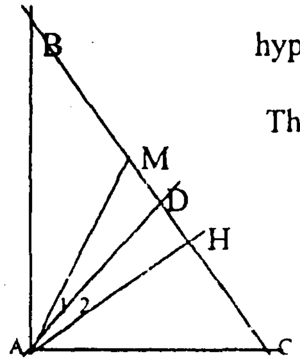
⇒ ½ BF = ½ CF ⇒ $\widehat{FDB} = \widehat{FDC}$ donc De bissectrice de l'angle CDB.

26.A un cercle de rayon R = 2 cm , on circonscrit un trapèze isocèle dont la surface est 20cm² . Calculer les côtés du trapèze ainsi que les bases.



Solution : R = 2 cm ⇒ BE = 4 cm = h , le quadrilatère étant inscriptible ⇒ AB+CD=BC+AD = 2 AB (AB=CD)
S = ½ (BC+AD).h = ½ .2.AB .4 = 20 ⇒ AB=CD= 5 cm
.le triangle ABE rectangle en E est égal au triangle CFD
AB²-BE²=25-16=9 ⇒ AE = FD = 3
BC=EF ⇒ 2BC +6 = 10 (AD =EF+AE+FD)
⇒ BC = 2 cm = EF ⇒ AD =EF+6 = 8 cm

27. Dans triangle rectangle , la bissectrice de l'angle droit divise aussi en 2 parties égales l'angle formé par la hauteur et la médiane correspondant .

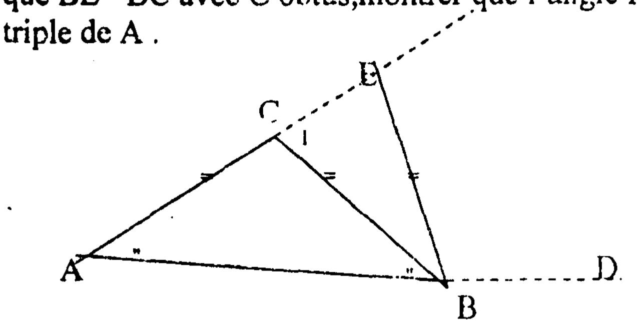


hypothèse : Δ rectangle en A ,BM=MC ,AH $\perp$ BC ,AD bissectrice c.à d : $A_1 = A_2$

Thèse : l'angle HAD = l'angle DAM

Démonstration :AM étant la médiane $\Rightarrow$ AM = ½ BC =BM=MC
$\Rightarrow$ le triangle MAC est isocèle $\Rightarrow$ l'angle MAC = l'angle C
Avec l'angle C = l'angle B (aigus à côtés 2 à2 perp.)
Ainsi l'angle BAD=DAC $\Rightarrow$ BAM+MAD = DAH+HAC
$\Rightarrow$ < C +< MAD =< DAH + < C
$\Rightarrow$ < MAD = < DAH $\Rightarrow$ AD bissectrice de l'angle MAH;

28. Sur le prolongement AC d'un triangle isocèle ACB (AC=CB),on détermine le point E tel que BE= BC avec C obtus,montrer que l'angle formé par BE et le prolongement de AB est le triple de A .



Hypothèse :Δ ABC ,AC=CB=BE

Thèse : l'angle EBD = 3. angle A

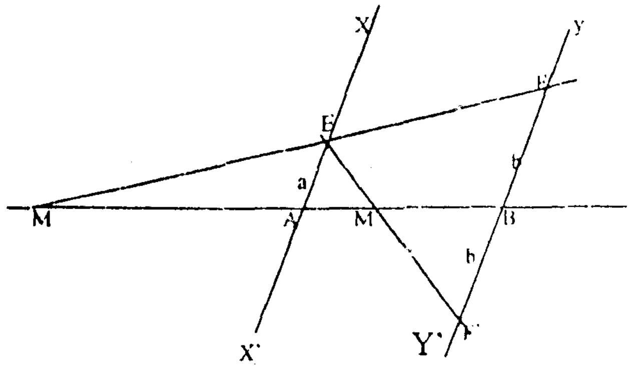
Démonstration :BC = BE $\Rightarrow$ les angles C_1 et E sont égaux. Or l'angle C_1 est extérieur au triangle ABC $\Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{E} = \hat{A} + \hat{B}$ avec $\hat{A} = \hat{B} \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{E} = 2\hat{A}$

Ainsi l'angle EBD= l'angle E + l'angle A = 3 angle A .

29. Soit une droite d, deux points A et B de cette droite, et deux longueurs a et b (a ≠ b). Par A et B, on mène deux axes parallèles X'AX et y'By de même sens. Sur les demi droites AX ,BY et BY', on porte respectivement les segments AE=a ,BF = b ,BF'= b ; si M = d ∩ EF et M' = d ∩ EF' .

a) Montrez que : $-\dfrac{M'A}{M'B} = \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{a}{b}$

b) En déduire une construction du conjugué harmonique du point C par rapport à 2 points donnés A et B alignés avec C.



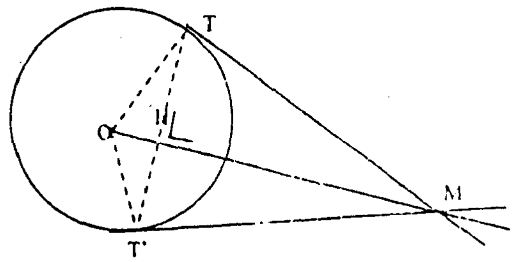
Hypothèse : A,B,2 points de la droite d

AE=a , BF=BF'=b

EF inter d = M et EF' inter d = M'

X'AX // Y'BY

30. Soit un cercle (C) de centre o et de rayon R et un point M extérieur au cercle. Soit H un point de la droite OM tel que OH.OM = R^2 .La perpendiculaire en H à OM coupe le cercle en T et T' . Montrer que MT et MT' sont tangentes au cercles.



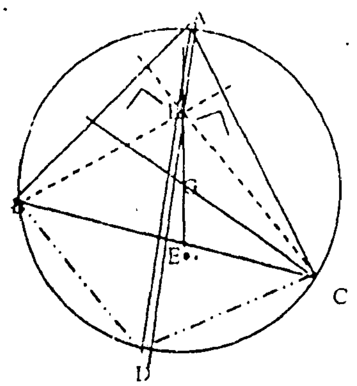
Hypothèse : (C) , M ext à (C) ,OT = OT' = R

TT' perp. à OM en H , OM.OH= R^2

Thèse : MT et Mt ' tangentes au cercle

Démonstration :Relions O à T et à T' et TT' perpendiculaire à OM et se referant au théorème de Pythagore pour les triangles rectangles OTH et THM , on a : $OT^2 = OH^2 + HT^2$ (1) et $MT^2 = HT^2 + HM^2$ (2)
De (1) on tire : $HT^2 = OT^2 - OH^2$ et (2) devient : $MT^2 = OT^2 - OH^2 + HM^2$ (HM=OM-OH)
on a : $MT^2 = OT^2 - OH^2 + (OM-OH)^2 = OT^2 + OM^2 - 2OM.OH = R^2 + OM^2 - 2R^2 = OM^2 - R^2$
$\Rightarrow OM^2 = MT^2 + R^2 \Rightarrow$ OM hypoténuse $\Rightarrow$ l'angle MTO droit $\Rightarrow MT \perp R \Rightarrow$ MT tangente
Il en est de même pour la droite MT'

31. On donne un triangle Abc et un cercle circonscrit au triangle. Si D est un point diamétralement à A et h l'orthocentre du triangle . a) montrer que le quadrangle BHCD est un parallélogramme et en déduire que le milieu E de BC est aussi milieu de HD
b) Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G est aussi le centre de gravité du triangle AHD. En déduire que les points O,G H sont alignés et quelle est le rapport $\frac{Go}{GH}$ (o le centre du cercle)



Hypothèse : Cercle (C) de centre O , AD = 2 R ,BE=EC ,G barycentre

H intersection des hauteurs

Thèse : BHCD parallélogramme, G centre de gravité du triangle AHD

le rapport GO/GH

Démonstration :

Le point D étant diamétralement opposé à A $\Rightarrow$ les angles ACD et ABD sont égaux et droits (inscrits dans une demi circonférence) $\Rightarrow DC \perp AC$ et $BH \perp AC \Rightarrow$ DC //BH de même pour DB et CH $\Rightarrow$ les côtés opposés de BHCD sont parallèles $\Rightarrow$ le quadrangle BHCD est un parallélogramme et les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur lieu $\Rightarrow$ E milieu de HD. En reliant H et O (milieu de AD) $\Rightarrow$ HO médiane du triangle et HGO alignés $\Rightarrow$ G centre de gravité du triangle AHD .

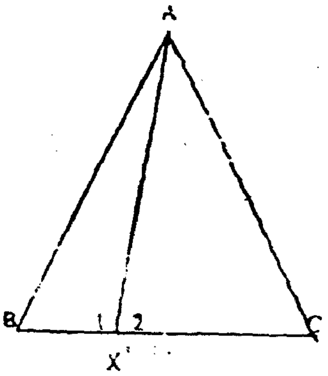
Ainsi $\frac{GO}{GH} = \frac{1}{2}$

D

les angles ACD et ABD sont égaux et droits (inscrits dans une demi circonférence) $\Rightarrow$ DC $\perp$ AC et BH $\perp$ AC $\Rightarrow$ DC //BH de même pour DB et CH $\Rightarrow$ les côtés opposés de BHCD sont parallèles $\Rightarrow$ le quadrangle BHCD est un parallélogramme et les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur lieu $\Rightarrow$ E milieu de HD. En reliant H et O (milieu de AD) $\Rightarrow$ HO médiane du triangle et HGO alignés $\Rightarrow$ G centre de gravité du triangle AHD.

Ainsi $\dfrac{GO}{GH} = \dfrac{1}{2}$

32. Soit un triangle Abc isocèle et X un point quelconque de la base principale BC. Montrer que $AX^2 = AB^2 + BX.\,CX$



Hypothèse : le triangle ABC , C un point de BC
AB= AC

Thèse : $AX^2 = AB^2 + BX\,.\,CX$

Démonstration : Se référant au théorème de Stewart on a
$AB^2.BX + AC^2\,.\,CX = AX^2\,.\,BC + BC\,.CX\,.XB$

or AB = AC, on a :

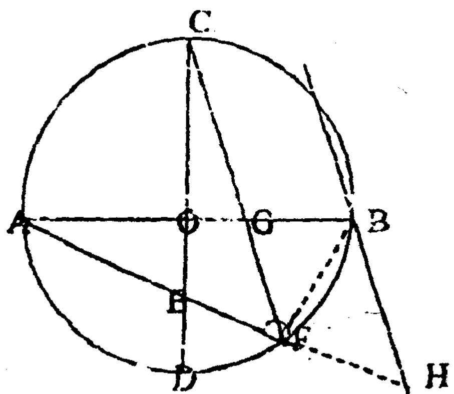
$AB^2\,(XC + BX) = BC\,(AX^2 + CX\,.BX)$ avec $XC + BX = BC$

On a : $AB^2\,.BC = BC\,.\,(AX^2 - CX\,.XB)$

$\Rightarrow AB^2 = AX^2 - CX\,.\,CB$

$\Rightarrow AX^2 = AB^2 + CX\,.\,XB$

33. Dans un cercle de centre o, on trace deux diamètres AB et CD perpendiculaires. Soit E le milieu de OD et F l'intersection de AE et la circonférence. Si AB et FC se coupent en G. Par B on trace la parallèle BH à CF. Montrer que : a) BF = FH ; b) AF = 2 BF
c) OB = 3 OG



Hypothèse : cercle (C) de centre O ,AB$\perp$ CD

OE=OD ,AE $\cap$ (C) =F , FC $\cap$ AB = G
BH // CF

Thèse : a) BF = FH b) AF =2 BF
c) OB = 3 OG

Démonstration : L'angle AFB = 90° (inscrit dans une demi circonférence) et l'angle CFB = 45 inscrit dans l'arc BC=90 et FB sécante à 2 parallèles FC et BH $\Rightarrow$ les angles CFB et FBH sont égaux et valent 45° ([illegible]). Or le triangle BFH est rectangle (BF $\perp$ AF) $\Rightarrow$ les angles B et H sont

...mplémentaires c.à.d $\hat{B}+\hat{H}=90^\circ \Rightarrow 45^\circ+\hat{H}=90^\circ \Rightarrow \hat{H}=\hat{B}=45^\circ \Rightarrow$ le triangle BFH ... isocèle donc BF = FH ;

...lus les triangles AOF et ABF sont semblables (ont 2 angles égaux 2 à 2)

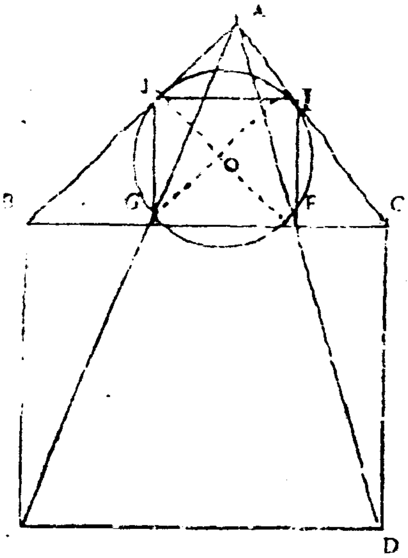
$$\frac{AF}{AO}=\frac{BF}{OE} \Rightarrow AF=\frac{BF.AO}{OE}=\frac{BF.AO}{1/2\,AO}=2BF\ donc\ AF=2BF$$

Les triangles AGF et ABH sont aussi semblables (ont les côtés 2 à 2 parallèles)

...: $\frac{AG}{AB}=\frac{AF}{AH} \Rightarrow \frac{AO+OG}{2OB}=\frac{2}{3}$,Or OA=OB=R

$$\Rightarrow \frac{OB+OG}{2OB}=\frac{2}{3} \Rightarrow 3OB+3OG=4OB \Rightarrow OB=3OG.$$

34. On donne un triangle ABC et un carré BCDE de part et d'autre de BC, les droites AE ... AD coupent respectivement BC en G et F. Par les points G et F, on trace GJ et FI, avec ... AB et I sur AC. Montrer que IJGF est un carré.



Hypothèse : Le triangle ABC, carré BCDE, GJ ... FI

Thèse : IJGF carré.

Démonstration :

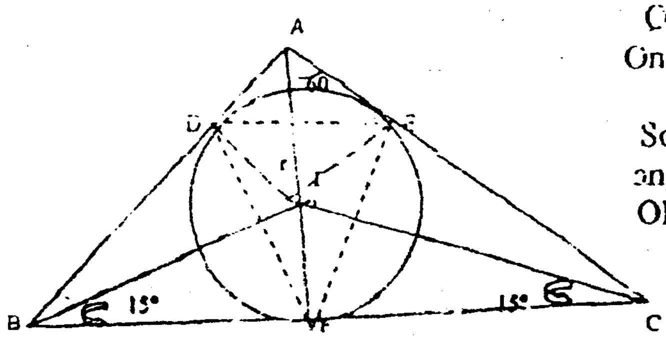
Puisque GJ et FI sont perpendiculaires à BC, les triangles JGF et GFI sont rectangles et inscriptibles dans un même cercle de centre o et GI comme diamètre ⇒les angles J et I sont droits (1/2 arc GFI = ½ arc JGF)

Donc la figure IJGF est un rectangle, montrons enfin que c'est un carré.

En effet les triangles GOF ,FOI sont égaux (ayant un angle égal O entre 2 côtés égaux 2 à2 =R) et isocèles.

L'angle GIF = l'angle GIJ tous inscrits dans un même cercle ⇒ leurs cordes sont aussi égales ⇒GF = JG=IF=IJ car dans rectangle ,les côtés opposés sont 2 à 2 égaux et parallèles. Donc la figure IJGF est un carré .

35. On considère un triangle ABC tel que AB=AC= x et l'angle BAC = 120°. Soient D ,E ,F les points de AB ,AC et BC respectivement où le cercle inscrit au triangle est tangent à ces côtés. Admettant que le triangle DEF est isocèle , calculer la longueur des côtés égaux de DEF en fonction de x au 10^{-5} près .



On donne : l'angle A = 120°,AB=AC= x

On demande : DF=EF = ?

Solution : Le triangle étant isocèle, les angles B et C sont égaux et valent 30° OB et OC bissectrices ,O centre de la Circonférence inscrite ⇒ les angles OBF et OCF sont égaux et valent 15°

L'angle DOF =150° et selon la résolution du triangle DOF ,on a : $DF^2 = r^2 + r^2 - 2\,r.r\cos 150^\circ = 2\,r^2(1-\cos150^\circ)$

$= 2\,r^2 .\ 1,866025 = 3,73205\,r^2$

$\Rightarrow DF = \sqrt{3,73205}\,r = 1,93185\,r$ (1)

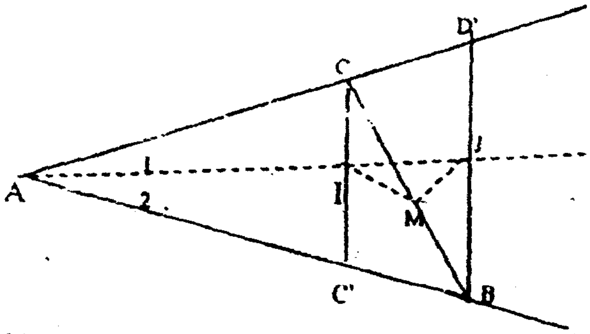
Dans le triangle AFC rectangle en F, on a : $\frac{FC}{x} = \sin 60° \Rightarrow FC = x.\sin 60° = 0,866025x$

Dans le triangle rectangle OFC , on a :

$$\frac{OF}{FC} = tg15° = \frac{r}{0,866025x} = 0,00467662 \Rightarrow r = 0,00405006x \text{ (2)}$$

(2) dans (1),on a : DF = 1,93185. 0,00405006 .x = 0,00782 x .

36. Soit un triangle ABC non isocèle. On désigne par I et J les projections orthogonales de C et B sur la bissectrice intérieure du triangle ABC issue de A et par M le milieu du côté BC. Soient C' le point d'intersection des droites CI et AB et D' le point d'intersection des droites BJ et AC . Démontrer que :a) I est le milieu de CC' b) les droites MI et MJ sont parallèles respectivement à AB et à AC, c) les point I et J sont équidistants de M

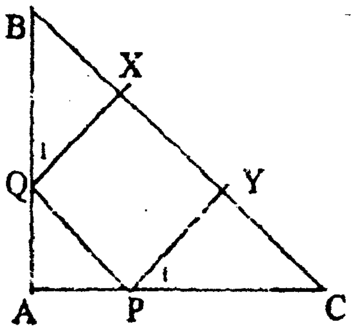


Hypothèse : Triangle ABC, $A_1 = A_2$
BM = MC, CI ⊥ AI
BJ ⊥ AJ

Thèse : a) I milieu de CC'
b) MI //AB, MJ // AC
c) MI = MJ

Démonstration : Les triangles ACI et AIC' sont rectangles et égaux (ont un côté égal :AI=AI adjacent à 2 angles égaux 2 à2 $A_1=A_2$ et $I = 90°$) ⇒ AC = AC' et CI=IC',(*côtés opposés aux angles égaux*), de même pour les triangles AD'J et AJB ⇒ AD' = AB ⇒CD' = C'B et D'J = JB ⇒I et J milieu respectivement de CC' et BD' et M milieu de BC par hypothèse.
Considérons les triangles C'CB et CBD' , les segments IM et MJ qui joignent leurs milieux respectifs sont **parallèles aux bases** et en vaut la moitié ⇒ IM = ½ C'B et MJ = ½ CD' or CD' =C'B ⇒ IM = MJ

37. Soit un triangle ABC rectangle en A . Les points X et Y sont sur BC , P sur AC , Q sur AB tels que XYPQ soit un carré .
Montrer que BX.YC = XY²



Hypothèse : xy = yp =pq =qx(carré)
le triangle ABC , A = 90°

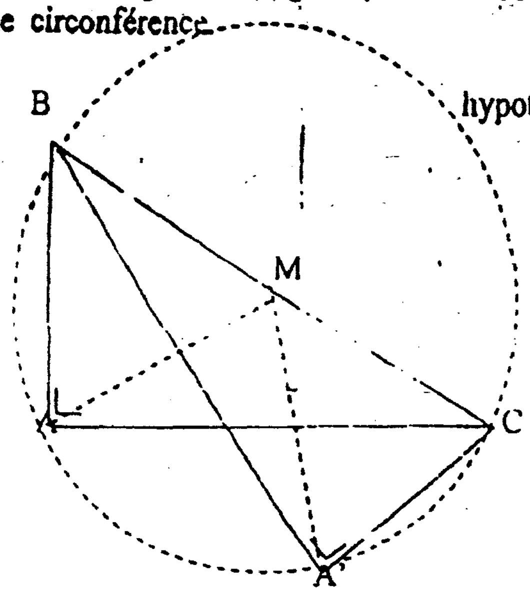
Thèse : BX . YC = XY²

Démonstration : Les angles Q_1 et C sont égaux (à côtés respectivement perpendiculaires) ⇒ les angles B et P_1 sont perpendiculaires ⇒ les triangles BXQ et PYC sont semblables

$\Rightarrow \frac{BX}{PY} = \frac{QX}{YC} \Rightarrow BX.YC = PY.QX$,or dans un carré ,les côtés sont égaux (hypothèse) ⇒ BX.YC = XY²

N.B. Pour le plaisir de recherche, calculer XY en fonction de BC et θ si $\theta = \frac{AB}{AC}$

38. Deux triangles rectangles ayant une hypoténuse commune sont inscriptibles dans une même circonférence.



hypothèse : triangles ABC, A =90°, triangle A'BC, A'= 90°, BC hypoténuse commune.

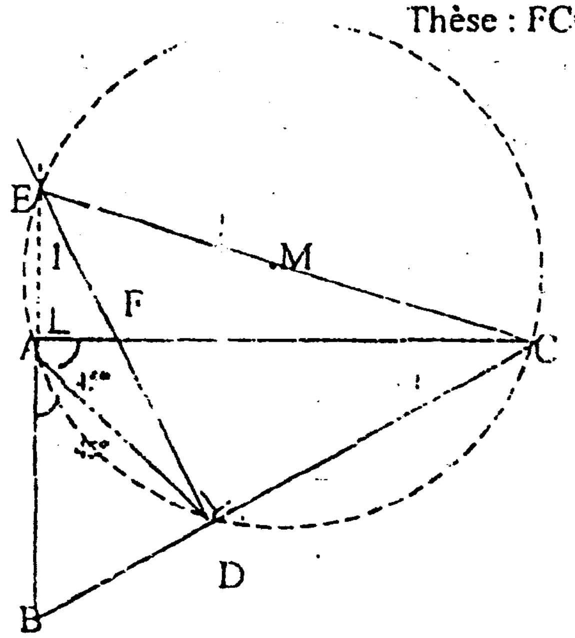
thèse : B,A,A',C concycliques.

Démonstration : Soit M un point milieu de l'hypoténuse BC $\Rightarrow$ BM=MC, $\Rightarrow$ AM et A'M sont les médianes relatives à l'hypoténuse dans les triangles rectangles ABC et A'BC $\Rightarrow$ AM = BM=MC et A'M= BM =MC $\Rightarrow$ MB=MA=MA'=MC, donc les points B, A, A', C sont équidistants de M, alors ils appartiennent à une même circonférence et en particulier ils sont concycliques.

39. Par le pied de la bissectrice issue de l'angle droit dans un triangle rectangle, on mène une perpendiculaire à l'hypoténuse. Montrer que les distances des sommets des angles aigus aux points d'intersection de la perpendiculaire avec les côtés de l'angle droit sont égales.

Hypothèse : le triangle ABC, A = 90°
AD bissectrice, ED $\perp$ BC

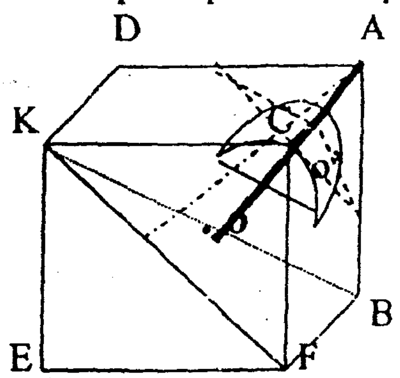
Thèse : FC= BE



Démonstration :

Relions les points E et C et traçons une circonférence de centre M milieu de EC
Les angles DAC et DEC sont égaux et chacun est égal à ½ arc DC car les triangles DEC et AEC sont inscriptibles dans une même circonférence (ils ont une hypoténuse égale) .
Par conséquent l'angle DEC vaut 45° dans le triangle rectangle DEC $\Rightarrow$ l'angle ECD complémentaire à ce dernier vaut aussi 45° $\Rightarrow$ le triangle rectangle est aussi isocèle $\Rightarrow$ DC=ED.
Les angles C_1 et E_1 sont égaux (à côtés respectivement perpendiculaires)
Les triangles DFC et BDE sont égaux (ont un côté égal DC=ED adjacent à 2 angles égaux 2 à 2 ,angle C_1 = angle E_1 et les angles droits .
Ainsi FC = BE (comme côtés opposés aux angles égaux dans les triangles égaux)

40. Une sphère de rayon R = 6 est placée dans un cube d'arête 12 à partir d'un sommet A du cube, on coupe les arêtes chacune à 2/3par un plan ;
a) Calculer la hauteur h de la zone de l'anneau sphérique entre le plan et le sommet A.
b) Quelle est ensuite sa surface ?
c) Trouvez son volume.



Solution

La diagonale d'une face est $KF = \sqrt{KE^2 + EF^2} = \sqrt{2.12^2} = 12\sqrt{2} = 16,97$

La figure KFBD est un rectangle dont la diagonale KB est :

$$KB = \sqrt{KF^2 + FB^2} = \sqrt{(16,97)^2 + 12^2} = 20,78$$

Puisque le rectangle passe par le centre de la sphère du cube qui est le milieu de KB .On a :

KO OB =OA = ½ KB = ½ 20,78 = 10,39.

La hauteur OA en proportion du 2/3 $\Rightarrow$ OO' = 1/3 OA

$\Rightarrow$ OO' = 10,39/3=3,46 (distance entre le centre O et le plan sécant) .

Ainsi la hauteur de la zone est : R – OO' = h

$\Rightarrow$ h = 6-3,46= 2,54

a) Le rayon R' de la circonférence d'intersection de la sphère et la plan est :

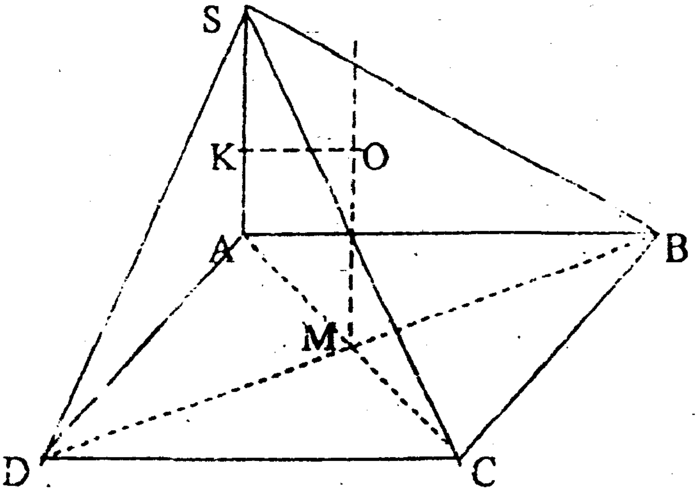
$$R' = \sqrt{R^2 - OO'} = \sqrt{36 - 11,97} = 4$$

b) La surface de la zone est : $S = 2\ \pi\ R'\ h = 2\ .3{,}14\ .4{,}9.2{,}54 = 78{,}16_{\text{us}}$

c) Son volume est : $V = 1/6\ .\ \pi\ .R'^2\ .\ h = 1/6\ .\ 3{,}14\ .\ (2{,}49)^2\ .\ 2{,}54$

$= 31{,}9_{\text{uv}}$

41. On donne un rectangle ABCD et un point S de l'espace tel que SA orthogonal au plan ABC .
a) Montrer que les triangles ayant comme côté SA sont rectangles.
b) Montrer que les points S,A,B,C,D appartiennent à une même sphère de centre O et déterminer ce centre



hypothèse :............
thèse :.................

Démonstration : a) Puisque SA est orthogonal au plan ABC $\Rightarrow$ SA $\perp$ AB , SA $\perp$ AD , SA $\perp$AC (condition de perpendicularité d'une droite et plan)

ce qui implique :les triangles SAB,SAC,SAD sont rectangles .

b) Par M milieu de AC et BD, menons la droite perpendiculaire au plan ABD . On a : MO médiatrice respectivement de AC et BD et tout point d'une médiatrice est équidistant des extrémités A,C,B,D .
En plus par K milieu de SA on mène la perpendiculaire qui est aussi une médiatrice qui coupe Mo en O . On a : OA=OS =OB=OC=OD . Donc S,A,B,C,D concycliques et appartiennent à une même sphère .

... cercle tangent aux 2 premiers et à la tangente commune