CORRIGE 2

UNIVERSITE DE KINSHASA
FACULTE POLYTECHNIQUE
Direction de la Prépolytechnique

Noms :.......................................................

Salle : ..............................

Interrogation d'Algèbre N°1 du 11/07/2024

5pts **Question 1**

On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes. De combien de façons peut-on constituer avec :

3 a) Des personnes de même sexe ?
2 b) Au moins une femme et au moins un homme ?

5pts **Question 2**

3 a) Soit $(u_n)$ une suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = 2^{n+1} + 1$
2 b) La proposition ?
$(P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)) \Longrightarrow (P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow R)$ est-elle une tautologie ? justifier

5pts **Question 3**

On munit l'ensemble $E = \mathbb{R}^2$ de la relation (R) définie par

$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2 : (x, y)\, R\, (x', y') \Leftrightarrow \exists a > 0, \exists b > 0$ telque $x' = ax \;\; et \; y' = by.$

3 a) (R) est-elle une relation d'équivalence ? justifier
2 b) Si oui, déterminer la classe d'équivalence de $A = (0,1) \in \mathbb{R}^2$

5pts **Question 4**

Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ , on définit la loi de composition interne $(*)$ par

$\forall a, b \in \mathbb{R} : a * b = ab + (a^2 - 1)\,(b^2 - 1)$

2 a) $(*)$ est-elle associative ? justifier
2 b) Chercher l'élément neutre de $\mathbb{R}$ pour la loi $(*)$ s'il existe
1 c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2 * x = 5$

**Durée : 1h30**
**Bonne chance à tous !!**

Question 1 Série 1

(1)

Déterminons le nombre de codes comportant au moins une fois 1

- Nombre total de codes : $3\cdot 6^6 = 3\times 36\times 36\times 36 = 139.968$
- Nbre de codes ne contenant pas le chiffre 1 : $3\cdot 5^6 = 3\times 15.625 = 46.875$

$\Rightarrow$ Nombre de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 est

$$3\cdot 6^6 - 3\cdot 5^6 = 3(6^6 - 5^6) = 3\times 31031 = 93.093.$$

b) Nombre de codes comportant au moins 2 chiffres identiques

- Nombre de codes comportant des chiffres distincts : $3\cdot P_6 = 3\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 2.160$.

$\Rightarrow$ Nombre de codes comportant au moins deux chiffres identiques est $3\cdot 6^6 - 3\cdot P_6 = 3\cdot 6^6 - 2.160 = 139.968 - 2.160 = 137.808$.

Question 2

a) Soit $(u_n)$ une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$u_n = \frac{2}{2n+1}$$

1ère étape : $u_0 = \frac{2}{0+1} = 2$.

2e étape : Supposons que $(u_n)$ est vraie jusqu'à l'ordre $k$ ie. $u_k = \frac{2}{2k+1}$ et montrons que $u_n$ reste aussi vraie jusqu'à l'ordre $k+1$ ; ie $u_{k+1} = \frac{2}{2(k+1)+1}$

En effet $u_{k+1} = \frac{u_k}{1+u_k}$

$$= \frac{\frac{2}{2k+1}}{1+\frac{2}{2k+1}} = \frac{\frac{2}{\cancel{2k+1}}}{\frac{2k+3}{\cancel{2k+1}}} = \frac{2}{2k+3} = \frac{2}{(2k+2)+1}$$

$$= \frac{2}{2(k+1)+1} \quad \text{cqfd.}$$

3e étape D'où $\forall n \in \mathbb{N}$ : $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

b) Où les couples ci-après sont logiquement équivalents

ie $P \Rightarrow (\bar{P} \vee (\bar{Q} \Rightarrow R)) \equiv (P \Rightarrow \bar{P}) \vee (P \Rightarrow (\bar{Q} \Rightarrow R))$.

Preuve par T.V

Question 3 Série 1 2

(R) une relation définie dans $\mathbb{R}^3$ par $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ :
$(x,y) R (x',y') \iff \exists a>0, \exists b>0$ tq $x' = ax$ et $y' = by$.

a) Oui, R est une relation d'équivalence.

- R est reflexive ie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}$ : $(x,y) R (x,y)$ car $\exists a = b = 1$ tq $x = x$ et $y = y$
- R est symetrique ie
  $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}$ : $(x,y) R (x',y') \Rightarrow (x',y') R (x,y)$.

En effet, $(x,y) R (x',y') \iff \exists a>0, \exists b>0$ tq : $x' = ax$ et $y' = by$
$\iff \exists \frac{1}{a} > 0 ; \exists \frac{1}{b} > 0$ : $x = \frac{1}{a} x'$ et $y = \frac{1}{b} y'$ impliquant que $(x',y') R (x,y)$.

- R est transitive car $(x,y) R (x',y')$ et $(x',y') R (x'',y'') \Rightarrow (x,y) R (x'',y'')$
Par hypothèse, $\exists a>0 ; \exists b>0$ tq $x' = ax$ et $y' = by$ (*) et
$\exists c>0 ; \exists d>0$ tq $x'' = cx'$ et $y'' = dy'$ (**)
Donc (*) dans (**) $\Rightarrow x'' = (ca)x$ et $y'' = (db)y$ avec $ac>0$ et $bd>0$
$\Longrightarrow (x,y) R (x'',y'')$.

b) Cherchons la classe d'équivalence de $A = (0,1) \in \mathbb{R}^2$
$\dot{A} = Cl(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (0,1) R (x,y)\}$.
$(0,1) R (x,y) \iff \exists a>0 ; \exists b>0$ : $x = 0$ et $y = b$.
$b>0 \Rightarrow y>0$. D'où
$\dot{A} = Cl(0,1) = \{0\} \times ]0;+\infty[$

Question 4

(*) definie dans $\mathbb{R}$ par $\forall a,b \in \mathbb{R}$ : $a*b = ab + (a^2-1)(b^2-1)$

a) Non (*) n'est pas associative car $\exists -1, 2, 4 \in \mathbb{R}$ tq
$(-1*2)*4 \neq (-1)*(2*4)$.
En effet $(-1*2)*4 = -2*4 = -8+45 = 37$ et
$(-1)*(2*4) = (-1)*(8+45) = (-1)*53 = -53$,

b) soit e élément neutre de $\mathbb{R}$ pour (*), alors $\forall a \in \mathbb{R}$, on a : $a*e = a$. $a*e = a$ ssi $ae + (x^2-1)(e^2-1) = a$ ssi $(e^2-1)a^2 + (e-1)a - e^2 + 1$
$\iff \boxed{e = 1}$

c) $2*x = 5$ ssi $3x^2 + 2x - 8 = 0$. $\Delta' = 25$ ; $x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$ $4/3$ ; $-1/2$
D'où $S = \{-2, \frac{4}{3}\}$

série (2)

| $h(P)$ | $h(Q)$ | $h(R)$ | $h(\bar{P})$ | $h(\bar{Q})$ | $h(\bar{Q}\Rightarrow R)$ | $h[\bar{P}\vee(\bar{Q}\Rightarrow R)]$ | $h[P\Rightarrow(\bar{P}\vee(\bar{Q}\Rightarrow R))]$ | $h(P\Rightarrow\bar{P})$ | $h[P\Rightarrow(\bar{Q}\Rightarrow R)]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0. |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| $h[(P\Rightarrow\bar{P})\vee(P\Rightarrow(\bar{Q}\Rightarrow R))]$ |
|---|
| 1 |
| 1 |
| 1 |
| 0 |
| 1 |
| 1 |
| 1 |
| 1 |

## Question 3

a) Voir (série 1)

b) classe de $A=(0,-1)\in\mathbb{R}$ est

$\mathring{A}=\{0\}\times]-\infty,1[$ car $x=0$ et $y=b$ avec $b<0$.

## Question 4

$(T)$ définie dans $\mathbb{R}$ par $\forall x,y\in\mathbb{R}:\ xTy=xy+(x^2-1)(y^2-1)$

a) Non $(T)$ n'est pas distributive par rapport à $(+)$ dans $\mathbb{R}$

Car $\exists\, 2,1,3\in\mathbb{R}:\ 2T(1+3)\neq(2T1)+(2T3)$

En effet $2T(1+3)=2T4=8+3\cdot15=8+45=53$

$2T1=2+3\cdot0=2$

$2T3=6+3\cdot8=6+24=30$

$\Rightarrow(2T1)+(2T3)=2+30=32\neq53$.

b) voir question 4b.

c) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $xTx=1$.

$xTx=1$ ssi $x^2+(x^2-1)(x^2-1)=1$ ssi $x^2+x^4-2x^2+1=1$

ssi $x^4-x^2=0$

ssi $x^2(x^2-1)=0$

ssi $x=0$ ou $x=\pm1$

d'où $S=\{-1,0,1\}$.

1) a) 93 093

b) 137. 808