Corrigé de l'interro N° 2

6pts ① $\frac{5}{A}$

Question 1

$u_1=(1,-1,2)$; $u_2=(1,1,-1)$; $u_3=(-1,-5,-7)$ 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1,5 e) Déterminons $E=Eng(u_1,u_2,u_3)$.

Comme déterminant de $(u_1 u_2 u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = -28 \neq 0$

$\Rightarrow \{u_1,u_2,u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow E=Eng(u_1,u_2,u_3)=\mathbb{R}^3$ et $\dim(E)=3$.

Base de E est $\{u_1,u_2,u_3\}$

1,5 f) Montrons que $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$ est un sous-esp. v de $\mathbb{R}^3$

- $F\neq\emptyset$ car $(0,0,0)\in F$ p.q $0+0+0=0$
- $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=-y-z\}$

$=\{(-y-z,y,z) : y,z\in\mathbb{R}\}$

$=\{y(-1,1,0)+z(-1,0,1) : y,z\in\mathbb{R}\}$ avec $v_1=(-1,1,0)$; $v_2=(-1,0,1)$

$=\{yv_1+zv_2 : y,z\in\mathbb{R}\}$

$=Eng(v_1,v_2)$.

Base de F est $\{v_1=(-1,1,0), v_2=(-1,0,1)\}$ et $\dim F=2$.

1,5 g) Déterminons $E\cap F$

comme $E=\mathbb{R}^3$ et $F\subset\mathbb{R}^3 \Rightarrow E\cap F=F\neq\{(0,0,0)\}$

1,5 h) E et F ne forment pas la somme directe de $\mathbb{R}^3$ car voir g).

4pts **Question 2**

2 c) Cherchons d.d.c(f,g).

$$g=x^5-2x^4+x^2-x-2 \;\Big|\; \frac{x^3-x^2-x-2=f}{x^2-x}$$

$r=2x^2-3x-2$.

$$f=x^3-x^2-x-2 \;\Big|\; \frac{2x^2-3x-2=r}{\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}$$

$r_1=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$.

$$r=2x^2-3x-2 \;\Big|\; \frac{\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}=r_1}{\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}}$$

$r_2=0$

$\Rightarrow$ d.d.c(g,f) = ddc$(f,g)=|r_1|=\left|\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right|=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)=x-2$

D'où ddc$(f,g)=x-2$

2 d) Factorisons $P=x^3+(4+i)x^2+(5-2i)x+2-3i$

on constate que $P(-1)=0$.

$\Rightarrow P=(x-1)[x^2+(3+i)x+2-3i]=(x+1)(x-\cancel{i})(x+3+2i)$

Question 3 4 R5 (S1) (2)

$(G = \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \top)$ où $(x,y)\top(x',y') = (xx', xy'+y)$

a) Non, $(G,\top)$ n'est pas un groupe car $(0,1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ n'a pas de symétrique.

2,5 Cherchons les conditions pour que $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\top)$ soit un groupe

1 i) $(1,0)$ est l'élément neutre de G pour $(\top)$

1 ii) $(\top)$ est associative car

$[(x,y)\top(x',y')]\top(x'',y'') = (xx'x'', xx'y''+xy'+y)$

$= (x,y)\top[(x',y')\top(x'',y'')]$.

0,5 iii) Le symétrique du couple $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ existe si $x\neq 0$.

i.e. $(x,y)^{-1} = \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right)$ si $x\neq 0$.

D'où $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\top)$ est groupe non commutatif

1,5 b) Oui $(]0,+\infty[\times\mathbb{R},\top) = (\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R},\top)$ est sous-groupe de $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

0,5 i) $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\neq\emptyset$ car $(1,0)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ pcq $1>0$

0,5 ii) $\forall (x,y),(x',y')\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$: $(x,y)\top(x',y') = (xx', xy'+y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$

car $x\cdot x'>0$ pcq $x>0$ et $x'>0$.

0,5 iii) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$; $(x,y)^{-1} = \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ car

$\frac{1}{x}>0$ pcq $1>0$ et $x>0$.

6 p5 Question 4

$P(Z) = Z^4 - 6Z^3 + 24Z^2 - 18Z + 63$

1,5 a) $P(i\sqrt{3}) = 9 + 18i\sqrt{3} - 72 - 18i\sqrt{3} + 63 = 0$. $\Rightarrow i\sqrt{3}$ est racine de P

1,5 b) Résolvons l'équation $P(Z)=0$

comme $i\sqrt{3}$ est racine de $P\in\mathbb{R}[Z]$ $\Rightarrow -i\sqrt{3}$ est aussi racine de Z

$\Rightarrow P = (Z-i\sqrt{3})(Z+i\sqrt{3})(Z^2+bZ+c) = (Z^2+3)(Z^2-6Z+21)$.

$\Rightarrow P=0$ ssi $Z^2+3=0$ ou $Z^2-6Z+21=0$

ssi $Z_0 = i\sqrt{3}$; $Z_1 = -i\sqrt{3}$; $Z_2 = 3+2i\sqrt{3}$, $Z_3 = 3-2i\sqrt{3}$

1,5 c) Si A, B, C et D sont points images respectifs de Z_0, Z_1, Z_2 et Z_3

on a : $A(0;\sqrt{3})$, $B(0,-\sqrt{3})$; $C(3, 2\sqrt{3})$ et $D(3,-2\sqrt{3})$.

Plaçons les points dans le plan complexe

(suite au verso)

Question 3 4 R5 (S1) (2)

$(G = \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \top)$ où $(x,y)\top(x',y') = (xx'; xy'+y)$

2,5 a) Non, $(G,\top)$ n'est pas un groupe car $(0,1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ n'a pas de symétrique.

cherchons les conditions pour que $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\top)$ soit un groupe

1 i) $(1,0)$ est l'élément neutre de G pour $(\top)$

1 ii) $(\top)$ est associative car

$$[(x,y)\top(x',y')]\top(x'',y'') = (xx'x''; xx'y''+xy'+y)$$
$$= (x,y)\top[(x',y')\top(x'',y'')].$$

0,5 iii) Le symétrique du couple $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ existe si $x\neq 0$.

i.e. $(x,y)^{-1} = \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right)$ si $x\neq 0$.

D'où $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\top)$ est groupe non commutatif

1,5 b) Oui $(]0,+\infty[\times\mathbb{R},\top) = (\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R},\top)$ est sous-groupe de $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

0,5 i) $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\neq\emptyset$ car $(1,0)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ pcq $1>0$

0,5 ii) $\forall (x,y),(x',y')\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$: $(x,y)\top(x',y') = (xx', xy'+y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$

car $x.x'>0$ pcq $x>0$ et $x'>0$.

0,5 iii) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$; $(x,y)^{-1} = \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ car

$\frac{1}{x}>0$ pcq $1>0$ et $x>0$.

6p5 Question 4

$P(Z) = Z^4 - 6Z^3 + 24Z^2 - 18Z + 63$

1,5 a) $P(i\sqrt{3}) = 9 + 18i\sqrt{3} - 72 - 18i\sqrt{3} + 63 = 0.$ $\Rightarrow i\sqrt{3}$ est racine de P

1,5 b) Résolvons l'équation $P(Z)=0$

comme $i\sqrt{3}$ est racine de $P\in\mathbb{R}[Z]$ $\Rightarrow -i\sqrt{3}$ est aussi racine de P

$\Rightarrow P = (Z-i\sqrt{3})(Z+i\sqrt{3})(Z^2+bZ+c) = (Z^2+3)(Z^2-6Z+21).$

$\Rightarrow P = 0$ ssi $Z^2+3=0$ ou $Z^2-6Z+21=0$

ssi $Z_0 = i\sqrt{3}$; $Z_1 = -i\sqrt{3}$; $Z_2 = 3+2i\sqrt{3}$, $Z_3 = 3-2i\sqrt{3}$

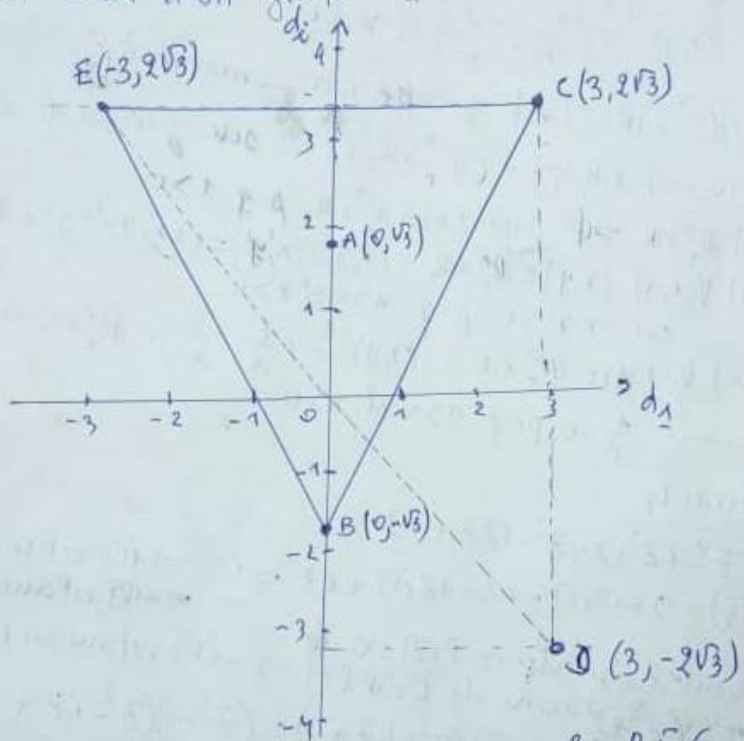
1,5 c) si A, B, C et D sont points images respectifs de Z_0, Z_1, Z_2 et Z_3

on a : $A(0;\sqrt{3})$, $B(0,-\sqrt{3})$; $C(3, 2\sqrt{3})$ et $D(3,-2\sqrt{3})$.

Plaçons les points dans le plan complexe

(suite au verso)

On appel ordre d'un groupe



1,5 d) Déterminons la nature du triangle BEC.

Le triangle BEC est équilatéral car

$\|\overline{BE}\| = \|\overline{EC}\| = \|\overline{BC}\| = 6.$

En effet $\|\overline{BE}\| = \sqrt{(0+3)^2+(-\sqrt{3}-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$

$\|\overline{EC}\| = \sqrt{(3+3)^2+(2\sqrt{3}-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{6^2+0^2} = \sqrt{6^2} = 6$

$\|\overline{BC}\| = \sqrt{(3-0)^2+(2\sqrt{3}+\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$