UNIVERSITE DE KINSHAS
FACULTE POLYTECHNIQUE
Direction de la Prépolytechnique

Noms :..............................
Postnom:..............................
Salle : ....

Interrogation d'Algèbre N°3 du 05/09/2024

Question I

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ une matrice carrée réelle

1. A est-elle inversible ? justifier
2. Calculer A^3 ?
3. En d'enduire que la matrice $(I_3 - A)$ est inversible et donner l'expression de $(I_3 - A)^{-1}$
4. Retrouver la matrice de $(I_3 - A)^{-1}$ par la méthode classique.

Question II

Résoudre et discuter en utilisant la méthode de Gauss et celle de Cramer le système d'équations linéaires ci-après

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ mx - m^2 y + z = 1 \\ mx + y - m^3 z = -1 \end{cases}$$

Question III

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ une matrice carrée réelle

1. A est-elle diagonalisable ? Si oui, donner la matrice qui la diagonalise. Sinon justifier
2. Calculer A^k pour $k \epsilon \mathbb{N}^*$

Question IV

Soit f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x, y) \sim\to f(x, y) = (x + y, 3x - 2y)$ application linéaire

1. Ecrire la matrice de f par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$
2. f est-elle bijective ? justifier
3. Ecrire la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}' = \{\mu_1 = (3,4); \mu_2 = (1,1)\}$

Question V

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

A-t-on $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? Justifier

Bonne chance !!

Durée 2h15

UNIVERSITE DE KINSHAS
FACULTE POLYTECHNIQUE
Direction de la Prépolytechnique

Noms : CORRIGE
Postnom: ....
Salle : ....

Interrogation d'Algèbre N°3 du 06/09/2024

4pts **Question I** 4pts

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ une matrice carrée réelle

1pt 1. A est-elle inversible ? justifier
1 2. Calculer A^3 ?
1 3. En déduire que la matrice $(I_3 - A)$ est inversible et donner l'expression de $(I_3 - A)^{-1}$
1 4. Retrouver la matrice de $(I_3 - A)^{-1}$ par la méthode classique.

3pts **Question II** 3pts

Résoudre et discuter en utilisant la méthode de Gauss et celle de Cramer le système d'équations linéaires ci-après

$m \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - my + m^2z = m \\ mx - m^2y + z = 1 \\ mx + y - m^3z = -1 \end{cases}$$

4pts **Question III** 4pts

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ une matrice carrée réelle

3 1. A est-elle diagonalisable ? Si oui, donner la matrice qui la diagonalise. Sinon justifier
1 2. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$

6pts **Question IV** 6pts

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x, y) \to f(x, y) = (x + y, 3x - 2y)$ application linéaire

2 1. Ecrire la matrice de f par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$
2 2. f est-elle bijective ? justifier
2 3. Ecrire la matrice de f par rapport à la base $B' = \{u_1 = (3,4); u_2 = (1,1)\}$

3pts **Question V** 3pts

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

A-t-on $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? Justifier

Bonne chance !!

Durée 2h15

Corrigé interro N°3

Question I

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Non A n'est pas inversible car $\det(A) = 0$
2. $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^3 = 0.$

3. $I_3^3 - A^3 = (I_3 - A)(I + A + A^2 \Leftrightarrow (I_3 - A)(I_3 + A + A^2) = I_3$ car $A^3 = 0$

$\Rightarrow (I_3 - A)$ est inversible et $(I_3 - A)^{-1} = I_3 + A + A^2$

$\Rightarrow (I_3 - A)^{-1} = I_3 + A + A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Par méthode classique, puisque $I_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible

et $\det(I_3 - A) = 1 \Rightarrow I_3 - A$ est inversible

$\mathrm{com}(I_3 - A) = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (I_3 - A)^{*} = (I_3 - A)^{2} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Question II

* Par Gauss

$\begin{cases} x - my + m^2 z = m & L_1 \\ mx - my + z = 1 & L_2 \leftrightarrow -mL_1 + L_2 \\ mx + y - m^3 z = -1 & L_3 \leftrightarrow -mL_1 + L_3 \end{cases} \sim \begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ (1 - m^3) z = 1 - m^2 \\ (m^2 + 1) y - 2m^3 z = -m^2 - 1 \end{cases}$

$L_2 \leftrightarrow L_3 \sim \begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ (m^2 + 1) y - 2m^3 z = -m^2 - 1 \\ (1 - m^3) z = 1 - m^2 \end{cases} \sim \begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ (m^2 + 1) y - 2m^3 z = -m^2 - 1 \\ (1 - m)(1 + m + m^2) z = (1 - m)(1 + m) \end{cases}$

- Le système admet une solution unique si $m \neq 1$.

$\Rightarrow z = \dfrac{1 + m}{1 + m + m^2}$; $y = \dfrac{2m^5 + m^4 + m^3 - m - 1}{(m^2 + m + 1)(m^2 + 1)}$; $x = \dfrac{m^2 (m + 1)(m^2 - 1)}{(m^2 + 1)(m^2 + m + 1)}$

$\Rightarrow S' = \left\{ \left(\dfrac{m^2 (m + 1)(m^2 - 1)}{(m^2 + 1)(m^2 + m + 1)}, \dfrac{2m^5 + m^4 + m^3 - m - 1}{(m^2 + m + 1)(m^2 + 1)}, \dfrac{1 + m}{1 + m + m^2} \right); m \in \mathbb{R} \right\}$

- Le système admet plusieurs solutions si $m = 1$

$S = \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - 2z = -2 \\ 0z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} & y = -1 + z ; z \in \mathbb{R} \\ & x = 1 - 1 + z - z \\ & x = 0 \end{aligned}$

$\Rightarrow S' = \{(0, -1+z, z) ; z \in \mathbb{R}\}$

* Par Cramer

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ mx - m^2 y + z = 1 \\ mx + y - m^3 z = -1 \end{cases} \Rightarrow D_S = \begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & 1 \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix} = -(m^2+1)(1-m^3)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m & -m & m^2 \\ 1 & -m^2 & 1 \\ -1 & 1 & -m^3 \end{vmatrix} = m^2(m^2-1)^2 ; \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & 1 & 1 \\ m & -1 & -m \end{vmatrix} = 2m^6 - m^5 - m^3 - m^2 + 1$$

et $D_z = -(m^2+1)(1-m^2)$

- Le système admet une solution unique si $D_S \neq 0$, ie $m \neq 1$

$$\Rightarrow x = \frac{D_x}{D_S} = \frac{m^2(m^2-1)^2}{(m^2+1)(m^3-1)} = \frac{m^2(m+1)(m^2-1)}{(m^2+m+1)(m^2+1)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{D_y}{D_S} = \frac{2m^6 - m^5 - m^3 - m^2 + 1}{(m^2+1)(m^3-1)} = \frac{(m-1)(2m^5+m^4+m^3-m-1)}{(m-1)(m^2+1)(m^2+m+1)}$$

$$= \frac{2m^5+m^4+m^3-m-1}{(m^2+1)(m^2+m+1)}$$

$$\Rightarrow z = \frac{D_z}{D_S} = \frac{(m^2+1)(m^2-1)}{(m^2+1)(m^3-1)} = \frac{\cancel{(m^2+1)}\cancel{(m-1)}(m+1)}{\cancel{(m^2+1)}\cancel{(m-1)}(m^2+m+1)} = \frac{m+1}{m^2+m+1}$$

$$\Rightarrow S' = \left\{\left(\frac{m^2(m+1)(m^2-1)}{(m^2+m+1)(m^2+1)}, \frac{2m^5+m^4+m^3-m-1}{(m^2+1)(m^2+m+1)}, \frac{m+1}{m^2+m+1}\right) ; m \in \mathbb{R}\right\}$$

- Le système admet une infinité des solutions si $m = 1$

Voir Meth. de Gauss.

Question iii

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. oui A est diagonalisable.

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$\lambda_1 = 1 \rightarrow V_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 2 < \begin{matrix} V_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ V_3\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$

$\Rightarrow$ la matrice qui diagonalise A est $P = (V_1 V_2 V_3)$ ie

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculons A^k

on a $A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}$ avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k & -1+2^k & -1+2^k \\ 0 & 2-2^k & 2-2^{k+1} \\ 0 & -1+2^k & -1+2^{k+1} \end{pmatrix}$$

Question IV

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (x+y, 3x-2y)$ application linéaire

1) matrice de f par rapport à la base c $B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ est

$M(f,B,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

2) oui f est bijective car $\det(M(f,B,B)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

3). Matrice de f par rapport à $B' = \{u_1 = (3,4), u_2 = (1,1)\}$.

- $f(u_1) = f(3,4) = (7,1) = -6u_1 + 25u_2$ $\Rightarrow M(f,B',B') = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 25 & 5 \end{pmatrix}$
- $f(u_2) = f(1,1) = (2,1) = -u_1 + 5u_2$

Question V

Non, on n'a pas $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ car

$A \cdot B \neq B \cdot A$.