UNIVERSITE DE KINSHASA

FACULTE POLYTECHNIQUE
PREPOLYTECHNIQUE
B.P.255 Kinshasa

COURS DE GEOMETRIE ANALYTIQUE

(Avec Exercices Résolus)

A l'usage des Etudiants de Préparatoire

Par

C.T Laurent Constantin KATAYI TSHIBANGU

(Chargé de cours)

5ème Edition du C.E.P.S.T.I/Mont-Amba

Kinshasa XI

Année Académique 2014-2015

INTRODUCTION

La géométrie Analytique qui fait l'objet de ce cas, est plutôt une discipline ou un cours à contenu variable centré essentiellement sur les notions des coordonnées et propriétés ou liens qui les unissent .

Ce cours contient la théorie des courbes du premier degré et du second degré essentiellement droites et coniques ainsi que quelques transformations dans le plan.

Les bases axiomatiques de cette géométrie analytique se trouvent dans la géométrie élémentaire dans laquelle on suit les postulats d'Euclide on prend pour les notions de départ : les points, les droites et les plans.

On y utilisera aussi les fonctions à plusieurs variables continues et dérivables pour la caractérisation de la nature de certaines coniques particulières en fin de dégager les éléments focaux y appropriés.

Ce cours est conçu comme support didactique conforme au programme de la Pré Polytechnique.

Un effort considérable est à fournir pour consilier les affirmations élémentaires à enrichir avec les propriétés des coordonnées des points et des vecteurs qui en font l'objet.

On traitera dans ce cours spécialement les droites sur le plan, les plans dans l'espace,les lieux géométriques ,étude des coniques et la réduction de ces dernières .

Une attention particulière est nécessaire pour les propriétés de calcul numérique qu'elle exige pour concrétisation des calculs.

L.C . KATAYI TSHIBANGU

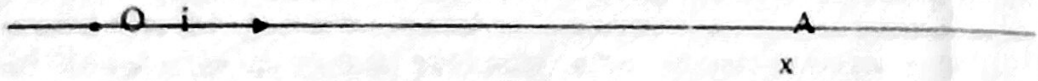
Chargé de cours

CHAP1. GENERALITE SUR LES COORDONNEES ET REPERAGE D'UN POINT.

Repérer un point c'est dire avec précision son emplacement sur une droite, dans le plan , ou dans l'espace par rapport à un point de référence appelé : **origine**.

a) Sur une droite :

Soit O un point pris comme origine et i un vecteur unitaire le long de la droite.



On note : $A(x) = OA = x.i$

On lit : le point A d'abscisse x et x est l'abscisse de A
Ainsi en cas de deux points A(x) et B (y) , l'abscisse de AB est y-x : AB(y-x)

Relation de Chasles Mobius

Soient A,B,C,D,....., M les point sur la droite et quelque soit leur position ,on a :

A B D M C .....

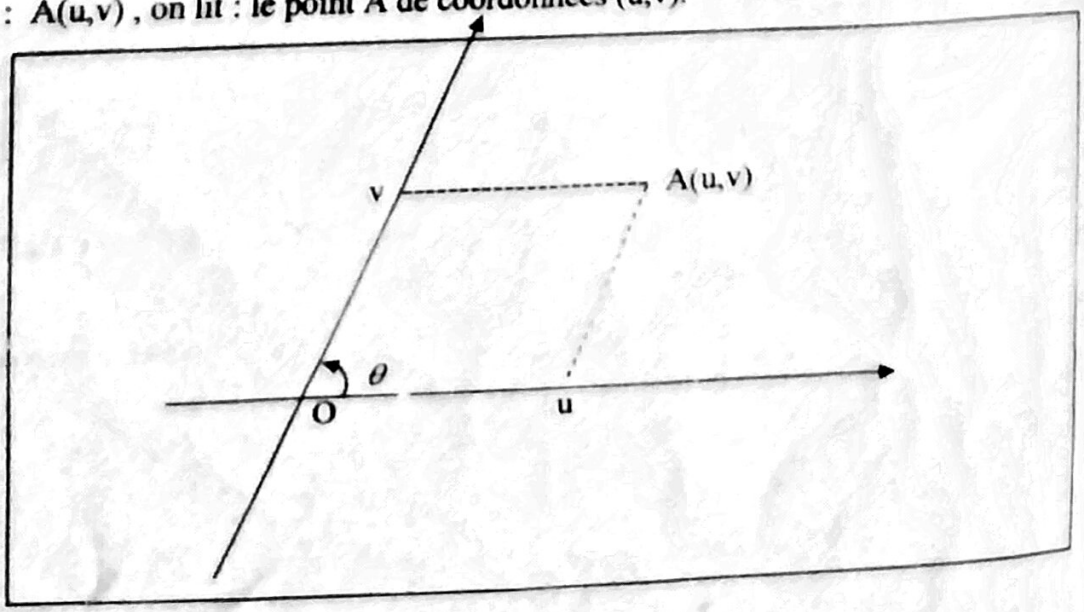
$AB + BC + CD + \ldots\ldots + LM = AM$

Et $AB + BC + CD + \ldots + LM + MA = O \longrightarrow MA = -AM$

b) Dans le plan

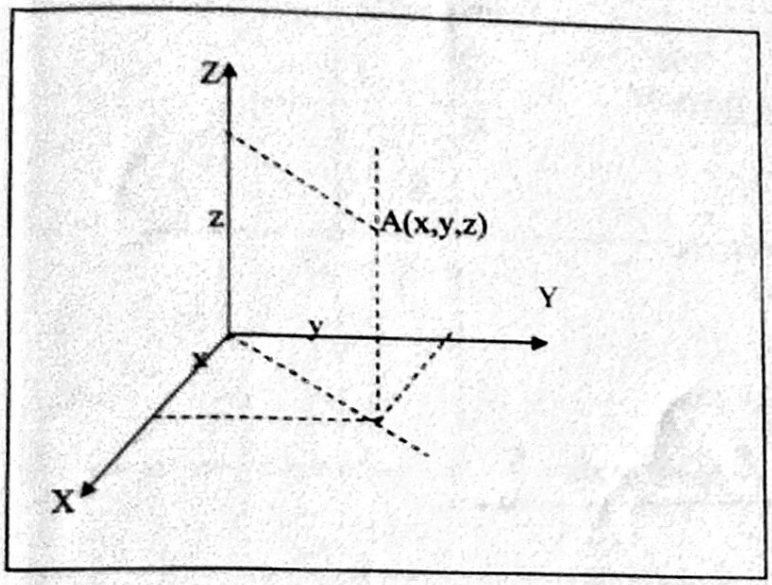
Soit un plan déterminé par un système (X,O,Y), un point A est repéré dans ce plan si on connaît son abscisse **u** et son ordonnée **v** .

On note : A(u,v) , on lit : le point A de coordonnées (u,v).



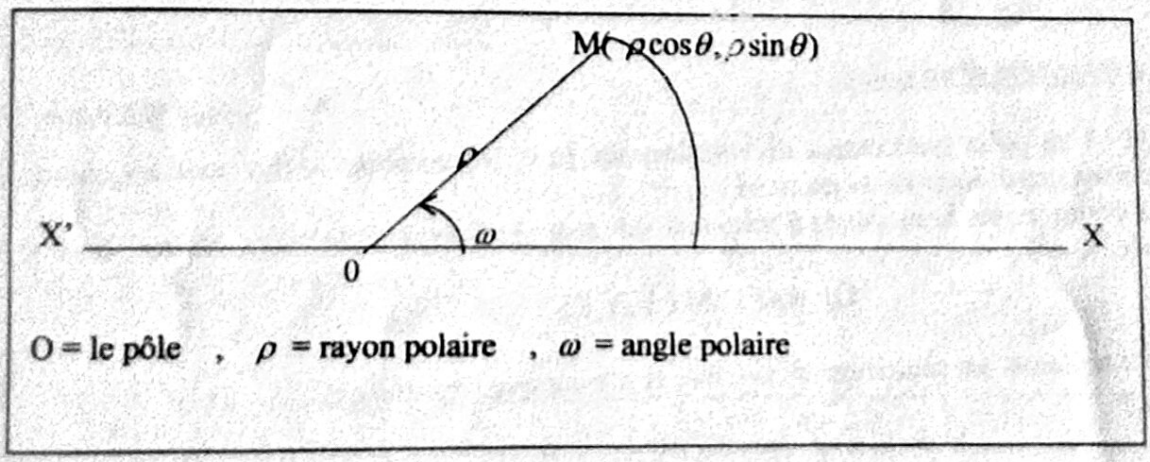
Si θ est $\frac{\pi}{2}$,le système est cartésien rectangulaire . Dans le cas contraire il est dit : quelconque. N.B. $0 \langle \theta \langle \pi$

c) Dans l'espace



X = l'abscisse du point
Y = l'ordonnée du point
Z = la cote

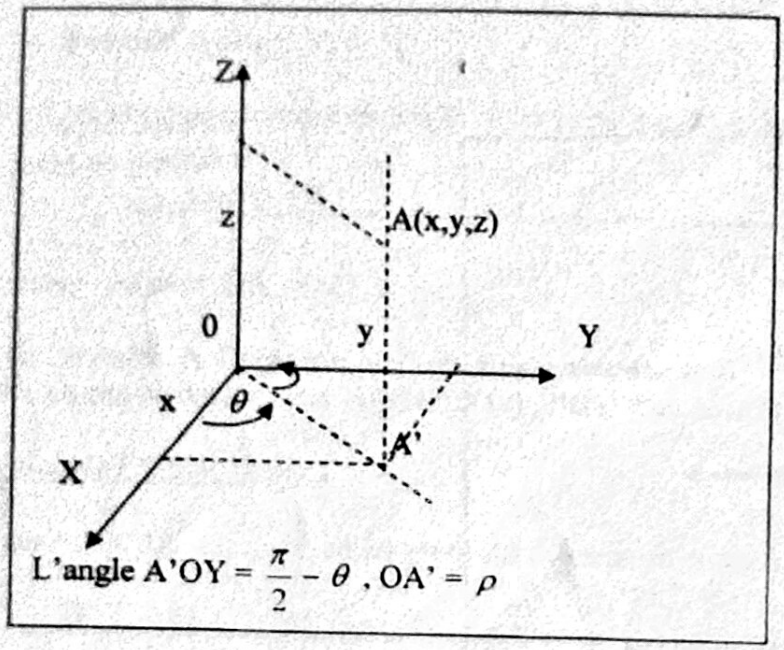
Coordonnées polaires



O = le pôle , ρ = rayon polaire , ω = angle polaire

En coordonnées cylindriques

X = l'abscisse du poin
Y = l'ordonnée du poin
Z = la cote



$$\frac{x}{\rho} = \cos\theta \Rightarrow x = \rho\cos\theta$$

$$\frac{y}{\rho} = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta \Rightarrow y = \rho\sin\theta$$

$$z = z$$

<u>Coordonnées d'un point</u>

Soit M un point quelconque de coordonnées (u,v) les nombres u et v sont les coordonnées cartésiennes ordinaires du point M .
Les coordonnées homogènes d'un point M sont obtenues à un facteurs multiplicatif K près Avec $K \neq 0$,

On note : M (U,V,K)

Cette notation est seulement distinctive et n'a aucune importance.

U = K u
V = K v
K = 1 K = K

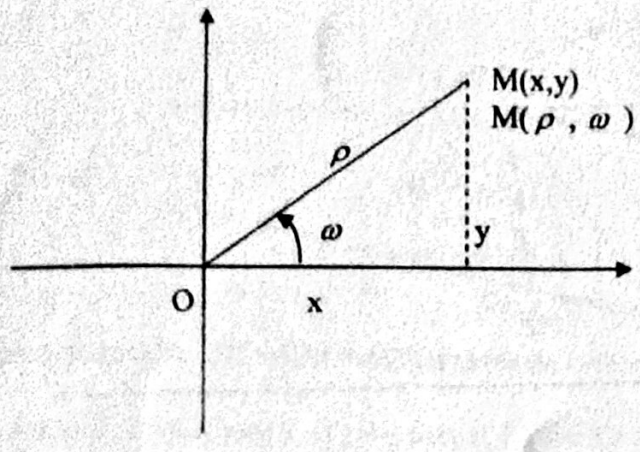
Ainsi M (u,v) = M (U , V , K)

Pour passer des coordonnées cartésiennes homogènes en coordonnées ordinaires .
on fait : K = 1

Ainsi par exemple : M (2 ,4) = M (2K , 4K , K)

$$M(3,6,5) = M\left(\frac{3}{5},\frac{6}{5},1\right) \Rightarrow\Rightarrow M\left(\frac{3}{5},\frac{6}{5}\right)$$

Relation entre les coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires



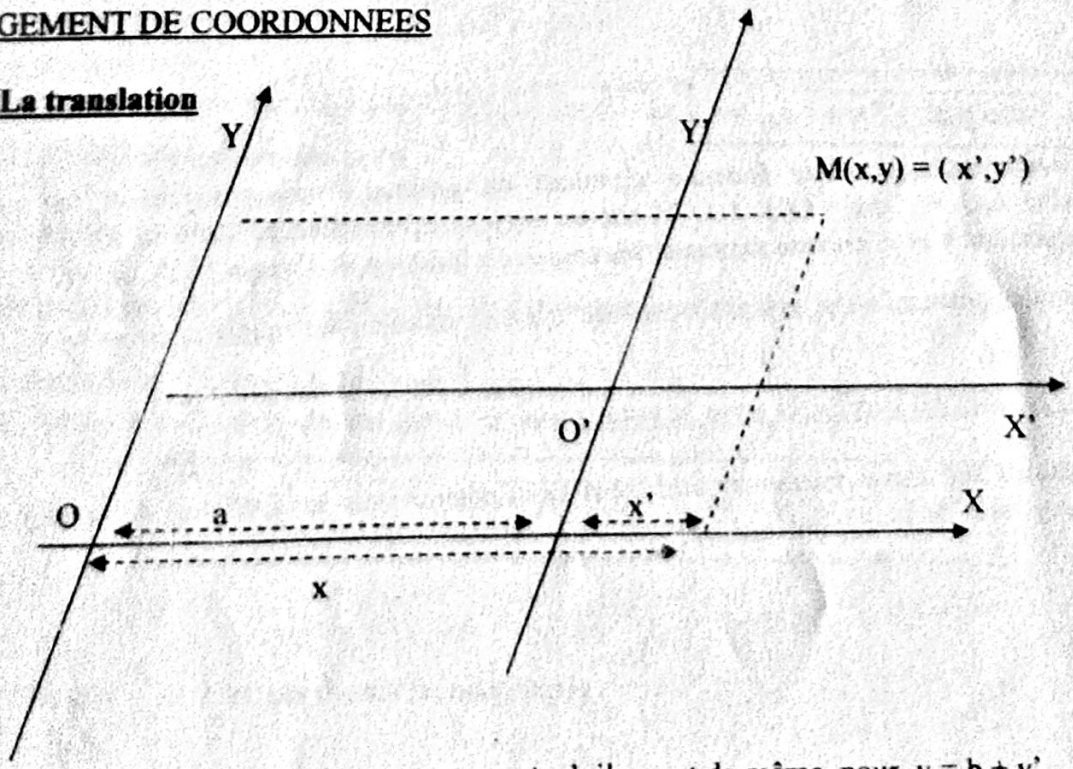
$$\frac{x}{\rho} = \cos\omega \Rightarrow x = \rho\cos\omega \quad et \quad \frac{y}{\rho} = \sin\omega \Rightarrow y = \rho\sin\omega$$

Et $tg\omega = \frac{y}{x} \Rightarrow \omega = \arg tg\frac{y}{x}$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

N.B On tire la valeur de l'argument ω après la précision du quadrant de point en question .

CHANGEMENT DE COORDONNEES

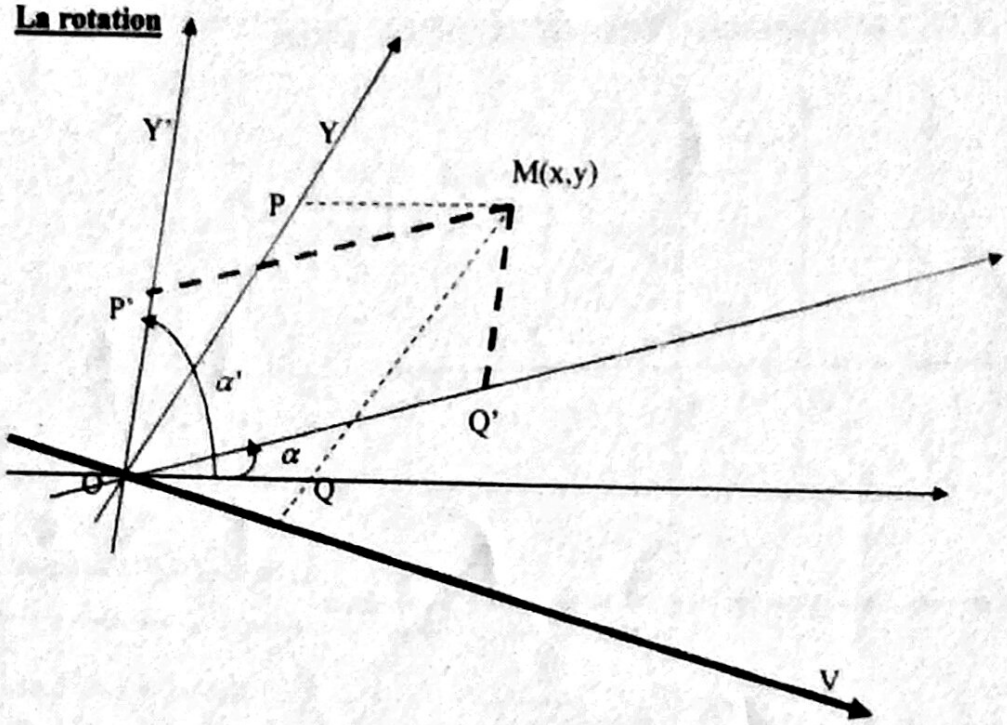
a) La translation



Quelque soit θ , x' = x – a $\Rightarrow$ x = a + x' il en est de même pour y = b + y'

Avec (a,b) les coordonnées de la nouvelle origine O' après translation d'axes parallèlement à eux-mêmes .
(x',y') les coordonnées du point M dans le nouveau système X'OY'
(x,y) les coordonnées du point M dans l'ancien système XOY

b) La rotation



$$x = \frac{x'\sin(\theta-\alpha) + y'\sin(\theta-\alpha')}{\sin\theta} \quad et \quad y = \frac{x'\sin\alpha + y'\sin\alpha'}{\sin\theta}$$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\sin\theta = 1$ et $\sin(\theta-\alpha) = \cos\alpha$

La démonstration de cette formule s'obtient en projetant orthogonalement la somme vectorielle OQ + QM = OQ' + Q'M sur un vecteur orientable OV dans le but d'éliminer réciproquement y et x ensuite exprimer les angles en fonction de l'angle VOX ou VOY .

Ces formules peuvent aussi se transformer de la même manière si l'on passe de $\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.

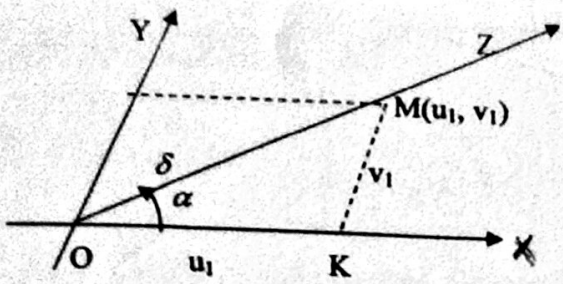
c) Translation combinée avec la rotation

Les formules des transformations combinées s'obtiennent avec les formules de la translation avec x et y tirés de la rotation .

DISTANCE

Généralement la notion de distance traduit le plus cours chemin entre deux éléments (points, droites , point et droite, plans etc .....

A. **Distance entre deux points en coordonnées cartésiennes**



La somme vectorielle OK + KM = OM est projetée orthogonalement sur OX

On a : $\delta\cos(X,Z) = u_1\cos(X,X) + v_1\cos(X,Y)$ car KM est parallèle à Oy

$\Rightarrow \delta\cos(X,Z) = u_1 + v_1\cos\theta$ (1)

Sur Oy ,on a : $\delta\cos(Z,Y) = u_1\cos\theta + v_1\cos(Y,Y) \Rightarrow \delta\cos(Z,Y) = u_1\cos\theta + v_1$ (2)
En multipliant (1) par u_1 et (2) par v_1 ,en additionnant membre à membre ,on a :

$$\delta(u_1\cos(X,Z) + v_1\cos(Z,Y)) = u_1^2 + v_1^2 + 2\,u_1\,v_1\cos\theta \quad (3)$$

Sur OZ ,on a : $\delta = u_1\cos(X,Z) + v_1\cos(Z,Y)$ (4)

(4) dans (3) on obtient : $\delta^2 = u_1^2 + v_1^2 + 2\,u_1\,v_1\cos\theta \Rightarrow \boxed{\delta = \sqrt{u_1^2 + v_1^2 + 2u_1v_1\cos\theta}}$
Avec u_1 et v_1 les coordonnées de M

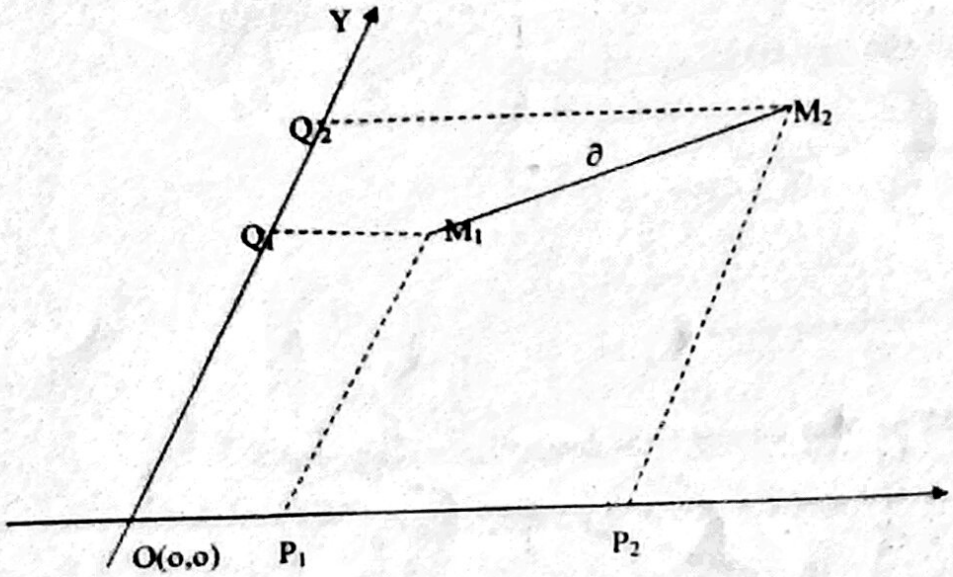
Il en est de même pour deux points quelconques

Soient deux points $M1(u_1, v_1)$, $M_2(u_2, v_2)$ quelconques du plan ,

Les coordonnées du vecteur M_1M_2 sont ($(u_2 - u_1)$, $(v_2 - v_1)$) qui remplacent (u_1 , v_1) dans la formule ci-dessus ,ainsi on aura :

$$\boxed{\delta = \sqrt{(u_2-u_1)^2 + (v_2-v_1)^2 + 2(u_2-u_1)(v_2-v_1)\cos\theta}}$$

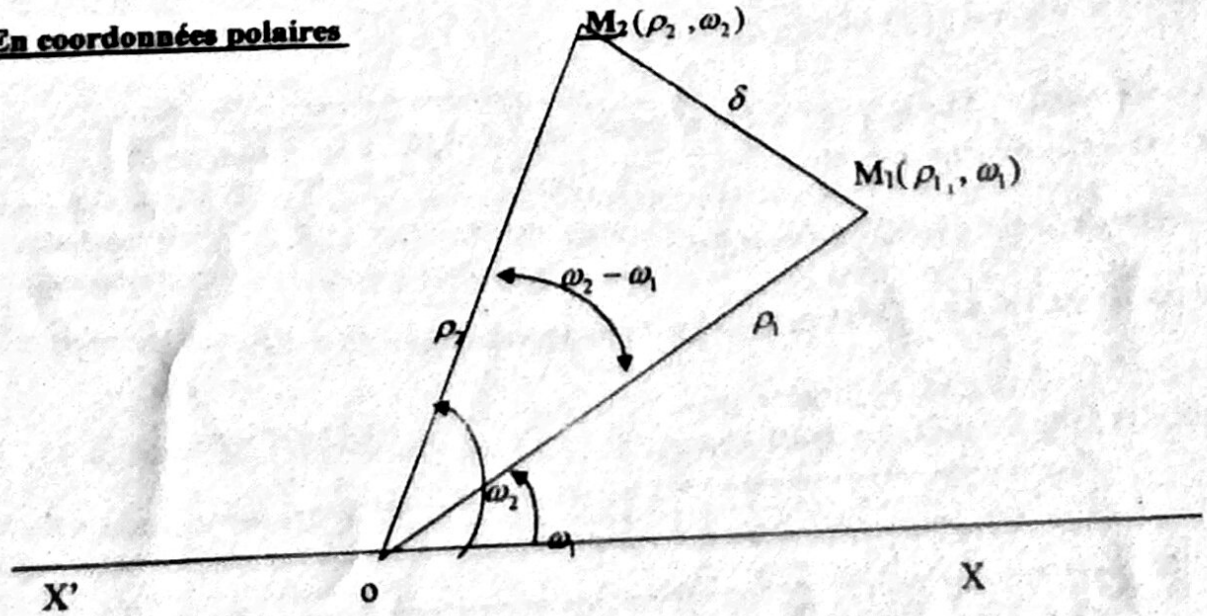
Sachant que $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ en cas d'axes rectangulaires .



De même pour $M_1(u_1, v_1, z_1)$ et $M_2(u_2, v_2, z_2)$ avec $\theta = \frac{\pi}{2}$

$M_1M_2 = \delta = \sqrt{(u_2-u_1)^2+(v_2-v_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ etc.....

<u>En coordonnées polaires</u>



Pour la simplification des transformations trigonométriques, on prendra pour axes rectangulaires.

En vertu des relations entre les coordonnées cartésiennes et polaires $M_2(u_2, v_2)$ et $M_1(u_1, v_1)$ avec $u_2 = \rho_2 \cos\omega_2$, $u_1 = \rho_1 \cos\omega_1$, $v_2 = \rho_2 \sin\omega_2$, $v_1 = \rho_1 \sin\omega_1$

Selon la distance entre deux points, on a :

$$\delta^2 = \rho_2{}^2\cos^2\omega_2 - 2\rho_1\rho_2\cos\omega_2\cos\beta\omega_1 + \rho_1{}^2\cos^2\omega_1 + \rho_2{}^2\sin^2\omega_2 - 2\rho_1\rho_2\sin\omega_2\sin\omega_1 + \rho_1{}^2\sin^2\omega_1$$

$$= \rho_2{}^2(\cos^2\omega_2 + \sin^2\omega_2) + \rho_1{}^2(\cos^2\omega_1 + \sin^2\omega_1) - 2\rho_1\rho_2(\cos\omega_2\cos\omega_1 + \sin\omega_2\sin\omega_1)$$

$$= \rho_1{}^2 + \rho_2{}^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\omega_2 - \omega_1)$$

$$\Rightarrow \delta = \sqrt{\rho_1{}^2 + \rho_2{}^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\omega_2 - \omega_1)}$$

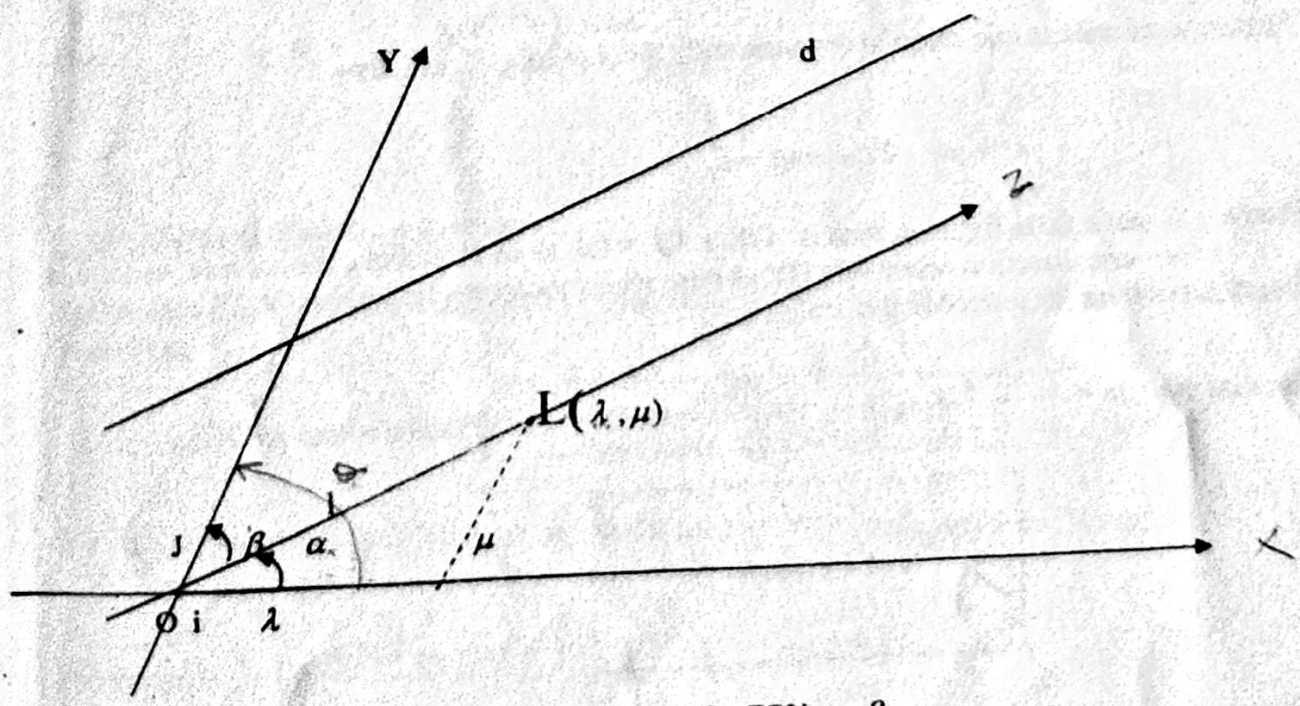
CHAP : 1 LA DROITE

Soit un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et P un point du plan , On appelle une droite (direction) ,l'ensemble des points tel qu'il existe un réel k et $\overrightarrow{PB}$ soit multiple de $\overrightarrow{AB}$

On note : $\overrightarrow{PB} = k\ \overrightarrow{AB}$

Dans le système cartésien, une droite est représentée par un vecteur issu de l'origine dirigée vers les Y positifs qui lui est parallèle appelée : **représentant**

Ainsi l'ensemble des droites parallèles au représentant constitue une : **direction**



- L'angle XOY = θ , l'angle XOZ = α ,l'angle ZOY = β

- $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ sont dits :angles directeurs et $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \theta$

Si OL = 1 (unité) alors les coordonnées (λ, μ) du point L à une distance unitaire sur le représentant d'une direction constituent : les paramètres directeurs de la direction avec l'ordonnée μ toujours positives $(\mu > 0)$.

Le rapport $\frac{\mu}{\lambda}$ est appelé : l'inclinaison ou pente ou cœfficient angulaire de la droite.

On note : $m = \frac{\mu}{\lambda}$ et si $m = 0$, la direction est parallèle ou confondue avec OX

$m = 1$,la direction parallèle ou confondue avec la première bissectrice

$m = oo$,la direction parallèle ou confondue avec OY

$m = -1$,la direction est parallèle ou confondue avec la deuxième bissectrice

Sachant que $\theta = \alpha + \beta \Rightarrow \beta = \theta - \alpha$

$$\lambda = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta} = \frac{\sin\beta}{\sin\theta} \quad et \quad \mu = \frac{\sin\alpha}{\sin\theta} \Rightarrow m = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\theta - \alpha)}$$

En plus si $\theta = \frac{\pi}{2}$, $tg\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)} = m$

Remarquons ensuite que selon la distance entre deux points : O et L on a :

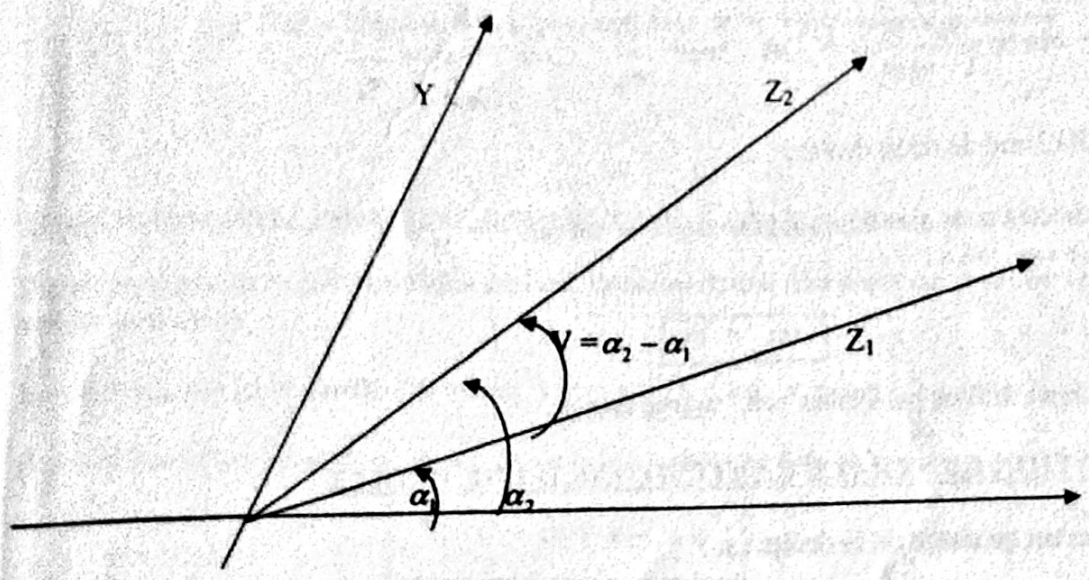
$$\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu\cos\theta = 1$$

Preuve : A partir de la figure si dessus OK + KL = OL et en projetant cette somme vectorielle Sur une direction orientable OV et faire réciproquement les angles (VOX) et (VOY) droits ,on obtient les formules si dessus .

Sachant que $m = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\theta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\theta}$, en divisant le tout par $\cos\alpha$, on a :

$$\boxed{tg\ \alpha = \frac{m\sin\theta}{1 + m\cos\theta}}$$

ANGLE DE DEUX DIRCTIONS



Sachant que $tg\alpha_2 = \dfrac{m_2 \sin\theta}{1 + m_2 \cos\theta}$, $tg\alpha_1 = \dfrac{m_1 \sin\theta}{1 + m_1 \cos\theta}$ et $tg\ V = tg\ (\alpha_2 - \alpha_1)$

On a : $$tg\ V = \frac{(m_2 - m_1).\sin\theta}{1 + m_1 m_2 + (m_1 + m_2)\cos\theta}$$

$\frac{0}{1} = 0$

$\frac{1}{0} = \infty$

Perpendicularité de deux droites

Tous comme en géométrie élémentaire plane, deux droites sont perpendiculaires si leur angle V est droit.

Alors $tg\ V = \infty$ ssi $\boxed{1 + m_1 m_2 + (m_1 + m_2)\cos\theta = 0}$

Dans ce cas, connaissant la pente d'une droite,on peut calculer la pente de l'autre .

Par exemple $m_2 = \dfrac{-(1 + m_1 \cos\theta)}{m_1 + \cos\theta}$ ou $m_1 = \dfrac{-(1 + m_2 \cos\theta)}{m_2 + \cos\theta}$

Encas d'axes orthogonaux, on a :

$$V = \text{arc tg}\,\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{-1}{m_1} \quad ou \quad m_1 = \frac{-1}{m_2}$$

Parallélisme de deux droites

Deux droites sont parallèles si leur angle V est nul .
Dans ce cas ,on a :

$$\boxed{m_1 = m_2}$$

Donc deux droites parallèles ont **même pente** .

EQUATION GENERALE CARTESIENNE D'UNE DROITE

L'équation générale de la droite est :

$$\lambda\, y + \mu\, x + k = 0 \quad , \quad \lambda , \mu , k \in \mathbf{R}$$

Cette équation peut prendre la forme : $y = -\frac{\mu}{\lambda}x - \frac{k}{\lambda}$

Si on pose : $-\frac{\mu}{\lambda} = m$ *et* $-\frac{k}{\lambda} = b$ avec m = la pente de la droite et b l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe OY . on a :

$$\boxed{y = m\,x + b}$$

Si $\lambda = 0$, la droite est parallèle à Oy et son pied est $(-\frac{k}{\mu}, 0)$ sur OX

Si $\mu = 0$, la droite est parallèle à Ox et son pied sur Oy est : $(0, -\frac{k}{\lambda})$

Si $k = 0$, la droite est de l'origine caractérisée par son terme indépendant nul

Si $\lambda = 0$ *et* $k = 0$, *la droite est l'axe des Y d'équation* : $x = 0$

Si $\mu = 0$, $k = 0$, la droite est l'axe des X et son équation est : $y = 0$

N.B. Si p et q sont les paramètres directeurs d'une direction donnée d'équation

$\lambda\, y + \mu\, x + k = 0$ dont le représentant est $\lambda\, y + \mu\, x = 0$,les coordonnées (p,q) vérifient l'équation du représentant c à d $\lambda q + \mu p = 0 \Rightarrow p = -\frac{\lambda\, q}{\mu}$

Et en vertu de la distance entre le point L et l'origine sur le représentant :

$$p^2 + q^2 + 2pq\cos\theta = 1 \text{ ,on peut tirer } q = \frac{|\mu|}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu\cos\theta}}$$

$$p = -\frac{\lambda q}{\mu}$$

Equation de la droite passant par un point donné P (u , v)

Par un point passent une infinité des droites, donc on donne une pente de la droite cherchée , soit **m** cette pente .

Les coordonnées (u,v) vérifie l'équation $y = m x$ (1) c à d $v = m u$ (2)

(1) – (2) membre à membre , on a : $y - v = mx - mu = m (x - u)$

$$\boxed{Y - v = m (x - u)}$$

Exemple : Trouver l'équation de la droite de pente -5 passant par le point (2 ,3)

Rép : $y - 3 = -5 (x - 2) \Rightarrow\Rightarrow y + 5x - 13 = 0$

Equation de la droite passant par deux points

On sait que par deux points passe une seule droite.

Soient $M_1(u_1 , v_1)$ et $M_2 (u_2 , v_2)$ 2 points qui appartiennent à même droite de pente m ,

on a :

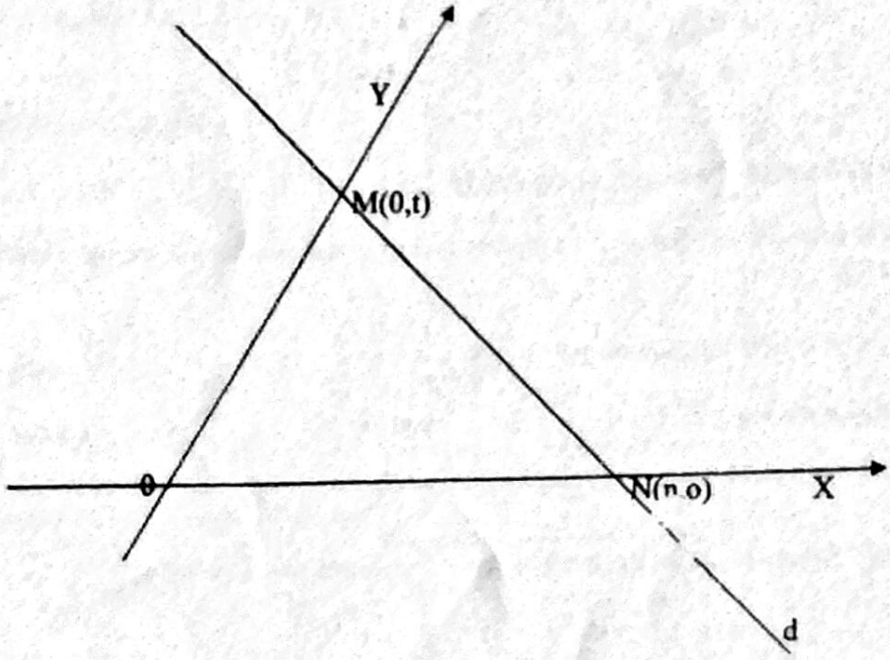
$V_2 = m u_2$ (1) et $v_1 = m u_1$ (2)

(1) – (2) donne : $v_2 - v_1 = m (u_2 - u_1)$ c à d $\boxed{m = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1}}$

Puis appliquer l'équation de la droite passant par un point soit M_1 soit M_2 (selon l'utilisateur)

On a : soit $\boxed{y - v_1 = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1}(x - u_1)}$ soit $\boxed{y - v_2 = \frac{v_1 - v_2}{u_1 - u_2}(x - u_2)}$

Les coordonnées d'une droite quelconque avec les axes sont appelées : **coordonnées à l'origine de la droite**.

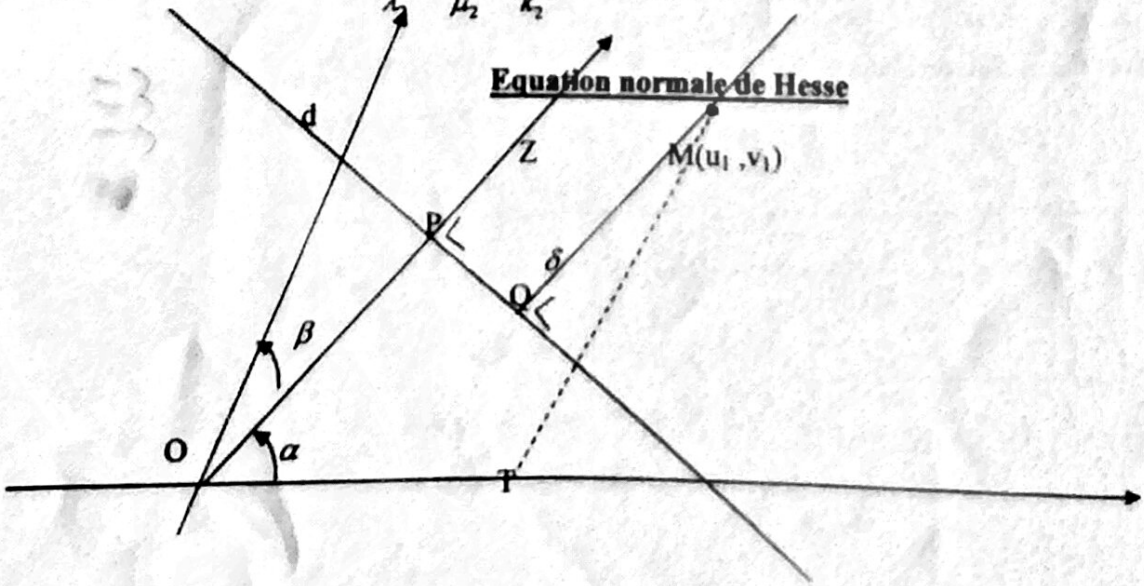


Les coordonnées (0 , t) et (n , 0) sont les coordonnées à l'origine de d .

L'équation de cette droite est : $\boxed{n\,y + t\,x - n\,t = 0}$ ou bien $\boxed{\frac{y}{t} + \frac{x}{n} = 1}$

N.B. Deux droites $\lambda_1 y + \mu_1 x + k = 0$ *et* $\lambda_2 y + \mu_2 x + k_2 = 0$ représente une même droite si est seulement si :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{k_1}{k_2} \quad \text{ou inversement}$$



OP = p (distance entre la droite et l'origine)
MQ = δ (distance entre le point et la droite)
OZ = direction orthogonale à la droite issue de l'origine

La somme vectorielle OP+PQ+QM = OT+TM

En projetant orthogonalement cette somme vectorielle sur OZ ,on a :

$$p + 0 + \delta = u_1 \cos\alpha + v_1 \cos\beta$$

ou $\boxed{\delta = u_1 \cos\alpha + v_1 \cos\beta - p}$ distance entre le point M et et la droite d .

si $\delta = 0$ alors M est un point de la droite ,ainsi l'équation de la droite devient avec $u_1 = x$ et $v_1 = y$, on a :

$$\boxed{x \cos\alpha + y \cos\beta - p = 0}$$

(équation normal de la droite sous forme de Hesse .)

NORMALISATION DE LA DROITE

Pour normaliser la droite $\lambda y + \mu x + k = 0$,il suffit de la multiplier par le facteur de normalisation F .

$$F = \pm \frac{\sin\theta}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu\cos\theta}} \quad \text{ou} \quad F = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \quad \textit{en axe rectangulaires}$$

N.B. Prendre toujours le signe + ou - pour que le terme indépendant soit toujours négatif

Dans ce cas la distance entre un point M (u_1 , v_1) et la droite en coordonnées cartésiennes devient :

$$\delta = \left| \frac{(\lambda v_1 + \mu u_1 + k).\sin\theta}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu\cos\theta}} \right|$$

ou bien en axes rectangulaires $\delta = \left| \frac{(\lambda v_1 + \mu u_1 + k).}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \right|$

Equations paramétriques d'une droite

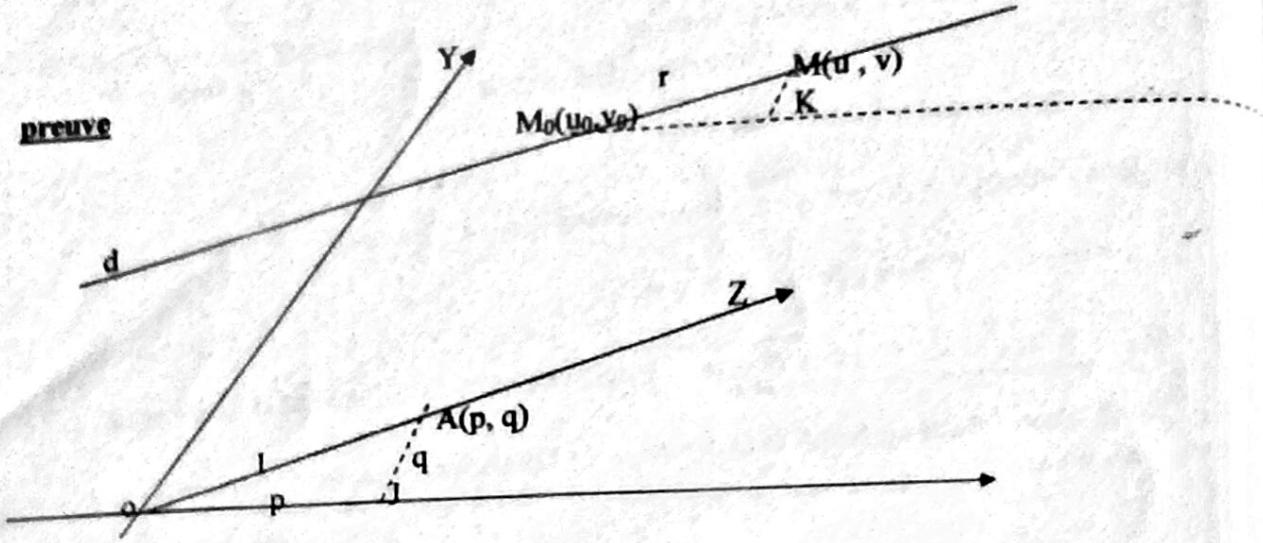
On appelle équations paramétriques d'une droite ou une courbe ,les expressions séparées des coordonnées d'un point de la droite ou d'une courbe en fonction d'un paramètre .

$$\boxed{\begin{aligned} u &= u_0 + p\,r \\ v &= v_0 + q\,r \end{aligned}}$$

Avec (p , q) les paramètres directeurs de la droite

r un paramètre et (u_0 , v_0) coordonnées d'un point fixe de la droite

preuve



En vertu de la géométrie élémentaire, les triangles M_0MK et OJA sont semblables et de ce fait ,les rapports suivants sont égaux .

$$\frac{v-v_0}{q}=\frac{u-u_0}{p}=\frac{r}{1}$$ avec r = M_OM distance entre deux points M_0, M sur d

De cette égalité , on a :

$$\boxed{\begin{aligned} v &= v_0 + q\,r \\ u &= u_0 + p\,r \end{aligned}}$$

Exemple : Trouver l'équation cartésienne de la droite d'équations paramétriques :

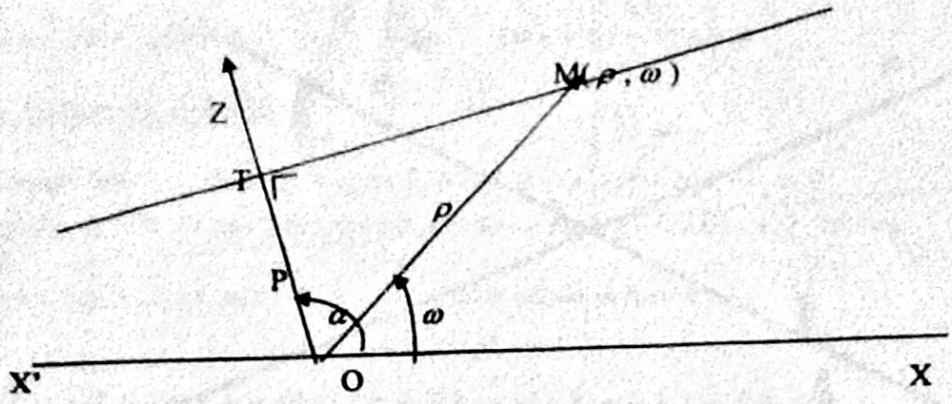
$X = 3 + 5\,r \quad (1)$

$Y = -2 + 2\,r \quad (2)$

En explicitant r de 2 équations, on a : $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{2} \Rightarrow 5y+10=2x-6 \quad \Rightarrow 5y-2x+16=0$

Equation de la droite en coordonnées polaires

Soit la droite d située à la distance p du pôle O et M (ρ , ω) un de ses points , α angle directeur d'une direction OZ perpendiculaire d en T menée par O .



En projetant la somme vectorielle OM + MT = OT sur l'axe orthogonalement on a :

$$|OM|\cos(\alpha-\omega)+|MT|\cos 90° = |OT|\cos 0°$$

$$\rho\cos(\omega-\alpha)+0=p \quad \Rightarrow \rho\cos(\omega-\alpha)-p=0$$

ou bien $\rho = \dfrac{p}{\cos(\omega-\alpha)}$ *avec* $\cos(\omega-\alpha)=\cos\omega\cos\alpha+\sin\omega\sin\alpha$

On a : $\boxed{\rho\cos\omega\cos\alpha+\rho\sin\omega\sin\alpha-p=0}$

En cas où la droite passe au pôle son équation devient : $\boxed{\omega = cste}$

Condition pour que 3 points $P_1(u_1,v_1)$, $P_2(u_2,v_2)$, $P_3(u_3,v_3)$ soient alignés est :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

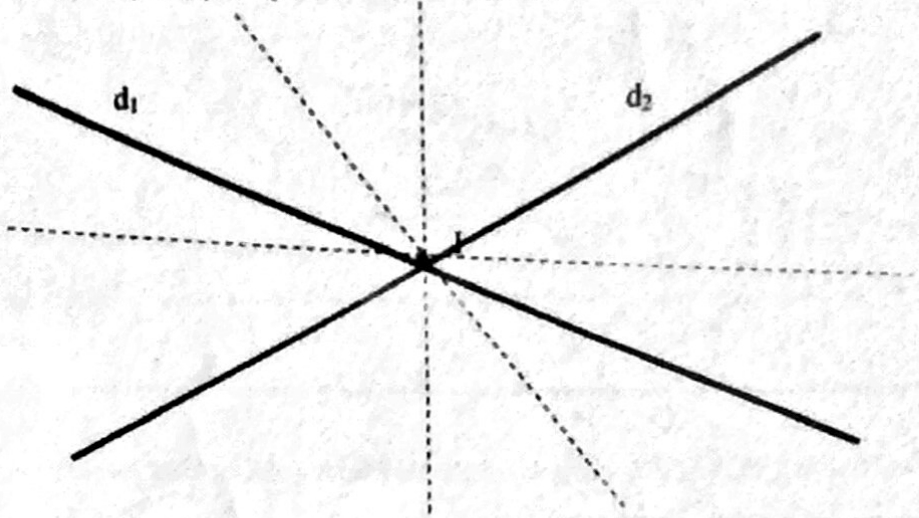
Il en est de même pour que 3 droites
$\lambda_1 y+\mu_1 x+k_1=0$, $\lambda_2 y+\mu_2 x+k_2=0$, $\lambda_3 y+\mu_3 x+k_3=0$ soient concourantes ,il faut :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & k_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & k_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & k_3 \end{vmatrix} = 0$$

Faisceaux de droites

C'est un ensemble des droites qui passent par l'intersection de 2 autres données.

Soient $d_1 \approx \lambda_1 y + \mu_1 x + k_1 = 0$, $d_2 \approx \lambda_2 y + \mu_2 x + k_2 = 0$ d'intersection I.



Toute droite du faisceaux a pour équation :

$$\boxed{(\lambda_1 y + \mu_1 x + k_1) + \lambda\ (\lambda_2 y + \mu_2 x + k_2) = 0 \qquad ou \quad d_1 + \lambda\ d_2 = 0}$$

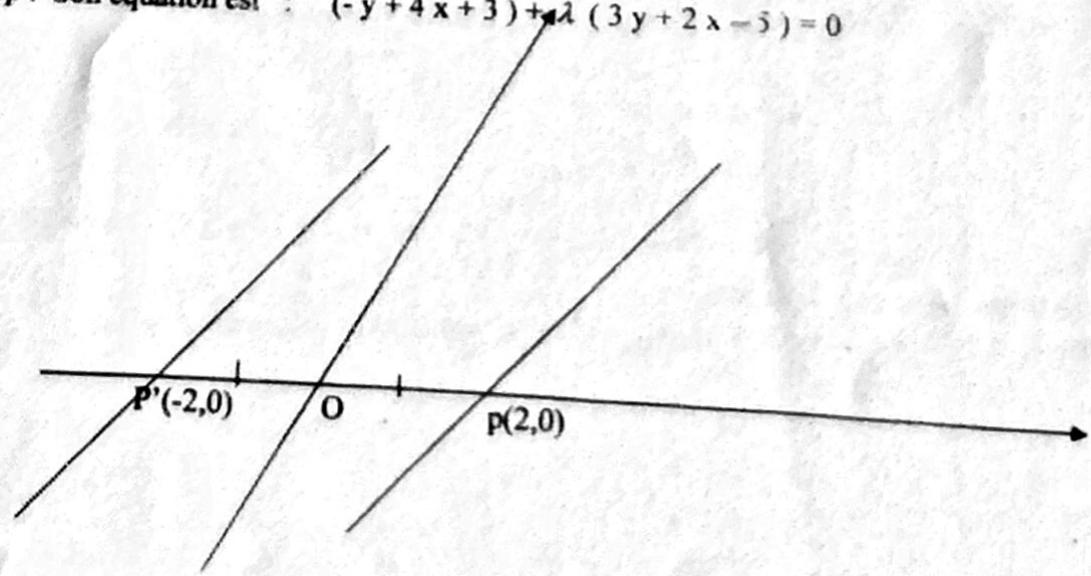
C'est la valeur de λ qui déterminera la droite cherchée si on donne une des conditions ou un de ses points.

Si $\lambda = 0$ c'est la droite d_1

Si $\lambda = \infty$, diviser le tout par λ et le tendre vers ∞ pour avoir d_2

Exemple : Trouver l'équation de la droite passant à l'intersection de $3y + 2x - 5 = 0$ et $-y + 4x + 3 = 0$ et coupant OX selon un segment de longueur 2 et de cœfficient angulaire positif.

Rep : Son équation est : $(-y + 4x + 3) + \lambda\ (3y + 2x - 5) = 0$



On a 2 possibilités , P'O = 2 et OP = 2 ,nous avons les points (-2 , O) et (2 , O)

a) Pour (- 2 , O) , $\lambda = \frac{-5}{9}$, b) pour le point (2 , 0) , $\lambda = 11$

soit a) 12 y – 13 x - 26 = 0 , b) 16 y + 13 x – 26 = 0

Equation globale de 2 droites

Soient deux droites $d_1 \approx \lambda_1 y + \mu_1 x + k_1 = 0$, $d_2 \approx \lambda_2 y + \mu_2 x + k_2 = 0$

Le produit $d_1 . d_2 = 0$ de ces 2 droites est appelé : équation globale de 2 droites

$(\lambda_1 y + \mu_1 x + k_1)(\lambda_2 y + \mu_2 x + k_2) = 0$,elle est de la forme :

$$\lambda_1\lambda_2 y^2 + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)xy + \mu_1\mu_2 x^2 + (\lambda_1 k_2 + \lambda_2 k_1)y + (\mu_1 k_2 + \mu_2 k_1)x + k_1 k_2 = 0$$

Ou $\boxed{Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0}$

En cas de deux droites de l'origine ,leur équation globale devient :

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 = 0$$

Sachant que $\frac{y}{x} = m$,et en divisant par x^2 le tout , on a :

$A m^2 + 2 B m + C = 0$ (relation aux directions asymptotiques)

$\Delta' = B^2 - AC = \partial$

Si $B^2 - AC$ est positif , (classe de l'hyperbole dégénérée en 2 droites réelles secantes)
Si $B^2 - AC$ est négatif , (classe de l'ellipse dégénérée en 2 droites imaginaires conjuguées)
Si $B^2 - AC$ est nul , classe de parabole dégénérée en 2 droites réelles parallèles

N.B . Toute équation du second degré de cette forme ne représente pas toujours deux droites,

Condition nécessaire pour qu'elle représente deux droites est que son Hessien soit nul .

C à d :

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0$$

ANGLE DE DEUX DROITES

Connaissant l'équation globale de 2 droites ,on trouver leur angle V à partir des coefficients A,B,C dans les représentants .

Partant de la formule : tg V = $\dfrac{(m_2 - m_1).\sin\theta}{1 + m_1.m_2 + (m_1 + m_2)\cos\theta}$ remplaçons la différence (m_2-m_1), la somme (m_1+m_2) et le produit (m_1 m_2) par leurs expressions symétriques sachant que

$m_1 = \dfrac{-B + \sqrt{\Delta}}{A}$, $m_2 = \dfrac{-B - \sqrt{\Delta}}{A}$ ensuite après substitition dans la formule ci-dessus on a :

$$\boxed{tg\ V = \left|\frac{2\sqrt{\Delta}\sin\theta}{A + C - 2B\cos\theta}\right|}$$

Intersection de deux droites

L'intersection de deux droite est un point dont les coordonnés sont obtenues en résolvant le système de 2 équations (droites)

Soient : u x + v y = w (1)
u' x + v' y = w' (2)

Selon la méthode de cramer ou substitution ,on a :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} w & v \\ w' & v' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}} \quad et \quad y = \frac{\begin{vmatrix} u & w \\ u' & w' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v \\ u' & w' \end{vmatrix}}$$

Notons que les droites parallèles ont une même pente $\dfrac{-u}{v} = -\dfrac{u'}{v''}$

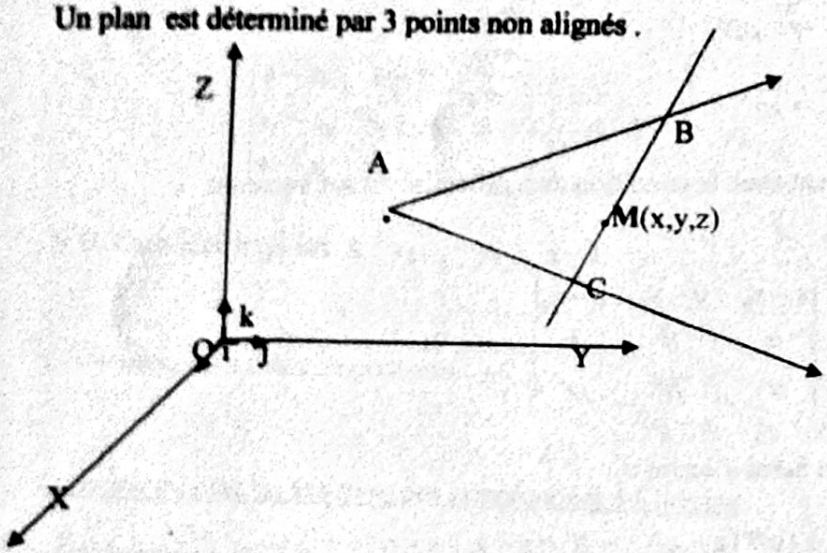
Exemple : Trouvez la droite passant à l'intersection des droites 2 y + 3 x = 5 , - y + x = 2 ayant pour pente 3 .

Réponse : La droite cherchée passe par le point de coordonnées : I ($\frac{9}{5}, \frac{-1}{5}$)

Sa pente étant 3 ,la droite est : $y+\frac{1}{5} = 3.(x-\frac{9}{5})$

CHAP . 2 LE PLAN DANS L'ESPACE

Un plan est déterminé par 3 points non alignés .



Soit A un point fixé et les vecteurs $\vec{AB}$ *et* $\vec{AC}$ dans l'espace O (X ,Y ,Z)

Si M(x , y , z) est un point du plan ABC les vecteurs $\vec{AM}$, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ sont coplanaires c à d appartiennent à un même plan ,il existe des scalaires λ *et* μ tel que

$$\vec{AM} = \lambda\,\vec{AB} + \mu\,\vec{AC}$$

Si $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}x_o\\y_o\\z_o\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$ les coordonnées respectives de AB et AC

$$(x-x_0\ ,\ y-y_0\ ,\ z-z_0\ ) = \lambda(\alpha,\beta,\gamma) + \mu(\alpha',\beta',\gamma')$$

$$= (\lambda\alpha,\lambda\beta,\lambda\gamma)+(\mu\alpha',\mu\beta',\mu\gamma')$$

$$= (\lambda\alpha+\mu\alpha',\lambda\beta+\mu\beta',\lambda\gamma+\mu\gamma')$$

$$\Rightarrow\ x - x_0 = \lambda\alpha + \mu\alpha'$$

$$y - y_0 = \lambda\beta + \mu\beta'$$ {*Equations paramétriques du plan passant pa A.*

$$z - z_0 = \lambda\gamma + \mu\gamma'$$

En explicitant x , y , z de ces expressions on a :

$$X = x_0 + \lambda\alpha + \mu\alpha'$$

$$Y = y_0 + \lambda\beta + \mu\beta'$$

$$Z = z_0 + \lambda\gamma + \mu\gamma'$$

Son équation cartésienne s'obtient avec la condition de coplanéarité de ses vecteurs.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0$$

Cette équation cartésienne peut aussi s'écrire :

$$\beta\gamma'(x-x_0) + \alpha'\gamma(y-y_0) + (\alpha\beta'(z-z_0) - \beta'\gamma(x-x_0) - \gamma'\alpha(y-y_0) - \alpha'\beta(z-z_0) = 0$$

$$(\beta\gamma'-\beta'\gamma)(x-x_o) + (\alpha'\gamma-\gamma'\alpha)(y-y_o) + (\alpha\beta'-\alpha'\beta)(z-z_o) = 0$$

$$(\beta\gamma'-\beta'\gamma)(x-x_o) - (\alpha\gamma'-\gamma'\alpha)(y-y_o) + (\alpha\beta'-\alpha'\beta)(z-z_o) = 0$$

Si on pose : $(\beta\gamma'-\beta'\gamma) = u$, $-(\alpha\gamma'-\gamma'\alpha) = v$, $(\alpha\beta'-\alpha'\beta) = w$

L'équation cartésienne devient :

$$\boxed{u(x-x_0) + v(y-y_0) + w(z-z_0) = 0}$$

En plus si $-u x_0 - v y_0 - w z_0 = h$

L'équation du plan est : $\boxed{ux + vy + wz + h = 0}$

<u>Condition pour que deux plans soient confondus</u>

Soient 2 plans : $P = ux + vy + wz + h = 0$

$P' = u'x + v'y + w'z + h' = 0$

Ces plans ont en commun 3 points non alignés ou sont confondus ssi :

$\frac{u}{u'} = \frac{v}{v'} = \frac{w}{w'} = \frac{h}{h'}$ (plans confondus) , si $\frac{u}{u'} = \frac{v}{v'} = \frac{w}{w'} \neq \frac{h}{h'}$ (plans parallèles)

Si on donne 3 points non alignés en coordonnées cartésiennes $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ $C(x_3, y_3, z_3)$

L'équation du plan passant par ces points est :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

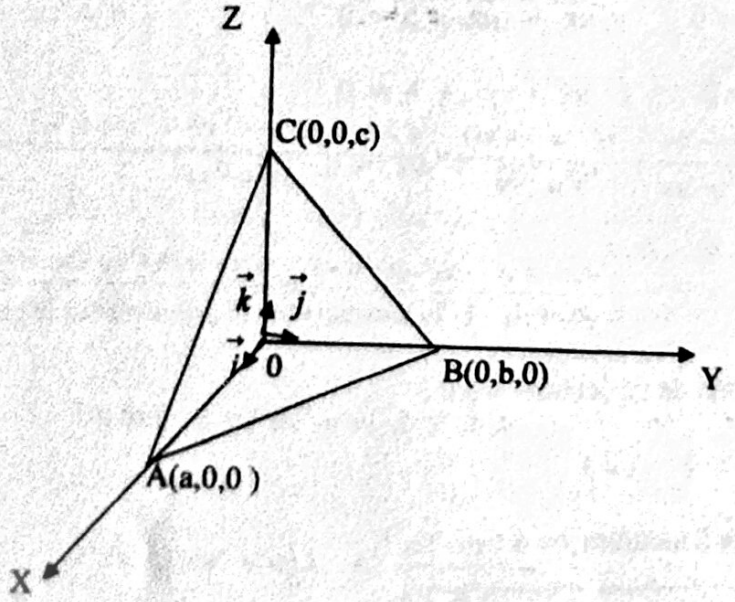
N.B. On a fixé le point $A(x_1, y_1, z_1)$

Les vecteurs sont de composantes :

$$\begin{matrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{matrix}$$

<u>Equation du plan en fonction des coordonnées à l'origine</u>

c à d le plan coupe les axes OX ,OY , OZ en $A(a, 0, 0)$; $B(0, b, 0)$; $C(0, 0, c)$



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

L'équation de ce plan est : $\vec{OA} = a\vec{i} = a$, $\vec{i} = \vec{j} = \vec{k} = 1$ (axes orthonormés)

$\vec{OB} = b\vec{j} = b$

$\vec{OC} = c\vec{k} = c$

Plans particuliers

Notons que sur le plan : XOY ; $z = 0$

XOZ ; $y = 0$

YOZ ; $x = 0$

Et l'équation du plan étant : $ux + vy + wz + h = 0$

a) Pour le plan parallèle à XOY , $u = v = 0$: $wz + h = 0$

b) Pour le plan parallèle à YOZ , $v = w = 0$: $ux + h = 0$

c) Pour le plan parallèles à XOZ , $u = w = 0$: $vy + h = 0$

Plans parallèles aux axes

1) Plan parallèle à l'axe OX , $u = 0$: $vy + wz + h = 0$

2) Plan parallèle à l'axe OY , $v = 0$: $ux + wz + h = 0$

3) Plan parallèle à l'axe OZ , $w = 0$: $ux + vy + h = 0$

Si le plan est de l'origine , $h = 0$: $ux + vy + wz = 0$

Plan passant par un point M (x_0 , y_0 , z_0)

L'équation du plan étant $ux + vy + wz + h = 0$ (1) et puisque le point est sur le plan , ses coordonnées vérifient l'équation de ce dernier c à d :

$$ux_0 + vy_0 + w z_0 + h = 0 \quad (2)$$

En soustrayant (1) et (2) membre à membre ,on a :

$$\boxed{u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = 0}$$

sachant que (u , v, z) sont les coordonnées de la normale au plan considéré .

Intersection de deus plans

Sachant que l'intersection de deux plans est une droite et soient P_1 et P_2 ces plans ,

$P_1 = ux + vy + wz + h = 0$ (1)

$P_2 = u'x + v'y + w'z + h' = 0$ (2)

De (1)à et (2) on a : $\begin{cases} ux + vy = -(wz + h) \\ u'x + v'y = -(w'z + h') \end{cases}$

Système de 2 équations à 2 inconnues x et y dont les solutions sont.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -(wz+h) & v \\ -(w'z+h' & v' \end{vmatrix}}{uv'-u'v} \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} u & -(wz+h) \\ u' & -(w'z+h') \end{vmatrix}}{uv'-u'v}$$

$$x = \frac{-\omega z v' - hv' + w' z v + h'v}{uv'-u'v} = \frac{(w'v - wv')z}{uv'-u'v} + \frac{vh'-hv'}{uv'-u'v}$$

$$y = \frac{-uzw'-uh'+zwu'+u'h}{uv'-u'v} = \frac{(wu'-uw')z}{uv'-u'v} + \frac{u'h-uh'}{uv'-u'v}$$

On fait $z = (uv'-u'v)\ \lambda = \Delta\ \lambda$

$$\Rightarrow \quad x = (vw'-v'w)\lambda + \frac{vh'-hv'}{uv'-u'v}$$

$$y = (u'w-uw')\lambda + \frac{u'h-uh'}{uv'-u'v}$$

On pose $vw'-v'w = \alpha$ $\quad \frac{vh'-hv'}{uv'-u'v} = x_0$, $uv'-u'v = \gamma$

$u'w-uw' = \beta$ $\quad$ et $\quad \frac{u'h-uh'}{uv'-u'v} = y_0$

Ainsi M_0 (x_0 , y_0 , 0) un point du plan et la droite d'intersection de 2 plans est :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha\lambda \\ y = y_0 + \beta\lambda \\ z = \Delta\lambda \end{cases}$$

Equations paramétriques de la droite d'intersection

Exemples :

Trouver l'intersection de 2 plans d'équations suivantes :

$$3x - 2y + 4z - 5 = 0 \quad (1)$$

$$2x - y - 3z + 4 = 0 \quad (2)$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 - 4z \\ 2x - y = -4 + 3z \end{cases} \Rightarrow \Delta = -3 + 4 = 1$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 5-4z & -2 \\ -4+3z & -1 \end{vmatrix} = -5 + 4z - 8 + 6z = -13 + 10z$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 5-4z \\ 2 & -4+3z \end{vmatrix} = -12 + 9z - 10 + 8z = -22 + 17z$$

On pose $\boxed{z = \Delta\lambda = \lambda}$

$$x = \frac{-13 + 10z}{1} = -13 + 10\lambda$$

$$y = \frac{-22 + 17\lambda}{1} = -22 + 17\lambda$$

$$z = \lambda$$

Avec $z = 0 \Rightarrow \lambda = 0$, on a : la droite d'intersection passe par (- 13 , - 22 , 0) et de coefficients directeurs (10 , 17 , 1)

Intersection d'un plan et une droite

Sachant qu'en géométrie élémentaire que l'intersection d'une droite et un plan est un point .

On donne les équations paramétriques d'une droite :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases}$$ et le plan :

$$P \cong \; u\,x + v\,y + w\,z + h = f(x,y,z) = 0$$

Les coordonnées de leur point d'intersection vérifient à la fois l'équation de la droite et du plan

$$u(x_0 + \lambda\alpha) + v(y_0 + \lambda\beta) + w(z_0 + \lambda\gamma) + h = 0$$

$$(ux_0 + vy_0 + wz_0 + h) \quad + \lambda(u\alpha + v\beta + w\gamma) = 0$$

$$f(x_0, y_0, z_0) + \quad \lambda(u\alpha + v\beta + w\gamma) = 0$$

$$\lambda = \frac{-f(x_0, y_0, z_0}{u\alpha + v\beta + w\gamma}$$: avec $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$

Les coordonnées du point d'intersection sont :

$$\boxed{\begin{aligned} X_1 &= x_0 + \lambda\alpha \\ Y_1 &= y_0 + \lambda\beta \\ Z_1 &= z_0 + \lambda\gamma \end{aligned}}$$

Exemple :

Trouver les coordonnées d'un point d'intersection de plan : $4x + 2y - 3z - 2 = 0$ et la droite définie par les points A (-2 , 3 , 5) et B (2 , -5 , 0)

En effet les coordonnées du vecteur Ab sont : (2+2 , -5-3 , 0-5)

$$\vec{AB} \cong (4,-8,-5)$$

On fixe A comme origine $\Rightarrow$ $x_0 = -2$, $y_0 = 3$, $z_0 = 5$

$$\alpha = 4 , \quad \beta = -8 \quad , \quad \gamma = -5$$

Puisque le point P(X_1 , Y_1 , Z_1) appartient au plan ,on a :

$$4(-2+4\lambda) + 2(3-8\lambda) - 3(5-5\lambda) - 2 = 0 \quad \Rightarrow -8 + 16\lambda + 6 - 16\lambda - 15 + 15\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{19}{15}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} \begin{cases} X_1 = -2 + \dfrac{4.19}{15} = \dfrac{46}{15} \\ \\ Y_1 = 3 - \dfrac{8.19}{15} = -\dfrac{107}{15} \\ \\ Z_1 = 5 - \dfrac{5.19}{15} = \dfrac{-4}{3} \end{cases} \end{cases}$$

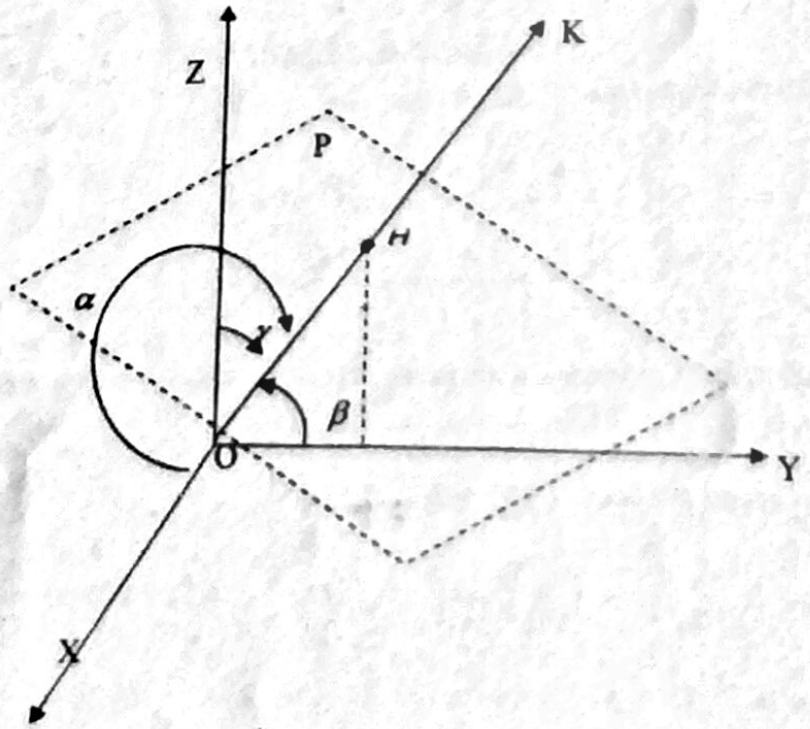
Equation normale du plan

Soit un plan P qui coupe les axes OX , OY , OZ respectivement en : (a,0, 0) ; (0,b,0) et (0,0,c) .

Si OK est la normale au plan P qui le perce en H et α , β , γ les angles directeurs de OZ par rapport à OX ,OY ,OZ .

$X\hat{O}K = \alpha$, $Y\hat{O}K = \beta$, $Z\hat{O}K = \lambda$

OA = a , OB = b , OC = c , OH = p = distance entre O et le plan



cfr : coordonnées cylindriques

On a : $\dfrac{p}{a} = \cos\alpha$, $\dfrac{p}{b} = \cos\beta$, $\dfrac{p}{c} = \cos\gamma \Rightarrow a = \dfrac{p}{\cos\alpha}, b = \dfrac{p}{\cos\beta}, c = \dfrac{p}{\cos\gamma}$

Or l'équation du plan en fonction des ses coordonnées à l'origine est :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}}+\frac{y}{\frac{p}{\cos\beta}}+\frac{z}{\frac{p}{\cos\gamma}}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x\cos\alpha}{p}+\frac{y\cos\beta}{p}+\frac{z\cos\gamma}{p}=1$$

On a : $\boxed{X\cos\alpha + Y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0}$

Ainsi si M (x_1 , y_1 , z_1) est point quelconque du plan ,la distance entre ce point et la plan est :

$$\delta = |x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p|$$

Si le plan est donné de la forme : u x + v y + w z + h = 0

On peut le normaliser en système orthonormé en le multipliant par le facteur de normalisation :

$$F = \pm \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$$ (cfr la normalisation de la droite)

Dans ce cas , la distance entre un point quelconque M (x_1 , y_1 , z_1) de l'espace et le plan est :

$$\boxed{\delta = \frac{|x_1u + y_1v + z_1w + h|}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}}$$

Exemple :

Trouver la distance entre le plan 5 x – 3y + 7 z + 43 = 0 et le point (11 , 6 , -1)

$$\delta = \frac{|11.5+6.(-3)+7.(-1)+43|}{\sqrt{5^2+(-3)^2+7^2}} = \frac{|55-18-7+43|}{\sqrt{25+9+49}} = \frac{73}{\sqrt{83}} = \frac{73\sqrt{83}}{83}$$

CHAP 3 LES LIEUX GEOMETRIQUES

Définition

On appelle lieu géométrique ,l'ensembles de points jouissant d'une propriété commune et propre à eux seuls .

Recherche des lieux

On utilise en plus de la méthode générale vue en géométrie élémentaire ,la méthode de traduction et la méthode des génératrices .
Pour éviter les complications possibles dans les transformations avec les formules trigonométriques ,on choisit souvent les axes rectangulaires dans le cas d'intersection,distance, point et droite, de la perpendicularité, de cercle ,d'angles etc….

Eviter d'utiliser les axes mobiles ou variables .

Coïncider certaines lignes du lieu avec les axes de coordonnées,parfois un de ses points avec l'origine d'axes .

A. Méthode de traduction

Cette méthode consiste à traduire au moyen d'une formule mathématique la propriété des points du lieu en posant $M(\alpha, \beta)$ les coordonnées spécifiques d'un point du lieu.
Après transformation des calculs numériques, remplacer α par x et β par y .
Enfin on obtient $F(x, y) = 0$ le lieu cherché .

Exemples :

1 . La bissectrice d'un angle est un lieu géométrique des point équidistants des côtés.

Soient $u_1 x + v_1 y + k_1 = 0$ et $u_2 x + v_2 y + k_2 = 0$ les côtés de l'angle .

On pose soit $M(\alpha, \beta)$ le point du lieu , et si d_1 et d_2 sont respectivement les distances de ce point à ces deux côtés de l'angle , on a : $d_1 = d_2$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$d_1 = \frac{|u_1\alpha + v_1\beta + k_1|}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}} = d_2 = \frac{|u_2\alpha + v_2\beta + k_2|}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2}} \quad \text{en posant } \sqrt{u_1^2 + v_1^2} = m > 0,\ \sqrt{u_2^2 + v_2^2} = m' > 0$$

$$(m' u_1 - m u_2)\alpha + (m' v_1 - m v_2)\beta + (m' k_1 - m k_2) = 0 \quad \text{avec } \alpha = x,\ \beta = y$$, on a enfin :

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$ (équation de la bissectrice cherchée)

Exemple 2

Un cercle est un lieu géométrique des points équidistants d'un point fixe C(a , b) appelé centre.

Soit M (α , β) un point quelconque du lieu , et C (a , b) son centre , on a :

M C = R (distance constante appelé rayon du cercle)

Avec M C = R = $\sqrt{(\alpha-a)^2+(\beta-b)^2+2(\alpha-a)(\beta-b)\cos\theta}$

$$\alpha^2-2\alpha a+a^2+\beta^2-2b\beta+b^2+2\alpha\beta\cos\theta-2ab\cos\theta-2a\beta\cos\theta+2ab\cos\theta-R^2=0$$

$$\beta^2+\alpha^2+2\alpha\beta\cos\theta-2(b+a\cos\theta)\beta-2(a+b\cos\theta)\alpha+(b^2+a^2+2ab\cos\theta-R^2)=0$$

En faisant $\beta = y$ *et* $\alpha = x$ l'équation du cercle devient :

$$\boxed{y^2+2xy\cos\theta+x^2-2(b+a\cos\theta)-2(a+b\cos\theta)x+(a^2+b^2+2ab\cos\theta-R^2)=0^2}$$

on obtient l'équation du cercle normalisée de la forme :

$$f(x,y) \approx y^2+2xy\cos\theta+x^2+\beta y+\alpha x+\gamma=0$$

en faisant
$$\begin{cases} -\dfrac{\beta}{2}=a+b\cos\theta & (1) \\ -\dfrac{\alpha}{2}=b+a\cos\theta & (2) \\ b^2+a^2+2ab\cos\theta-R^2=\gamma & (3) \end{cases}$$

Le système de deux équations à 2 inconnues a et b (1) et (2) nous permet de calculer les coordonées du centre C (a , b)

Les valeurs de a et de b dans (3) nous donne le rayon R du cercle ..

Toutefois l'équation du second degré en x et y ne représente pas toujours un cercle .

Dans le cas suivant : $A y^2+2B x y + C x^2+2D y+2E x + F = 0$ représente un cercle ssi :

$$A = C \quad \text{et} \quad B = A\cos\theta \quad \theta \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Si } \theta=\frac{\pi}{2} \ , \ A=C \ et \ B=0$$

L'équation normalisée du cercle devient : $y^2 x^2 + \beta y + \alpha x + \gamma = 0 = 0$

Dans le cas où C(a,b) = C (0,0) (cercle centré en origine) , on a :

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

Equation du cercle passant par 3 points

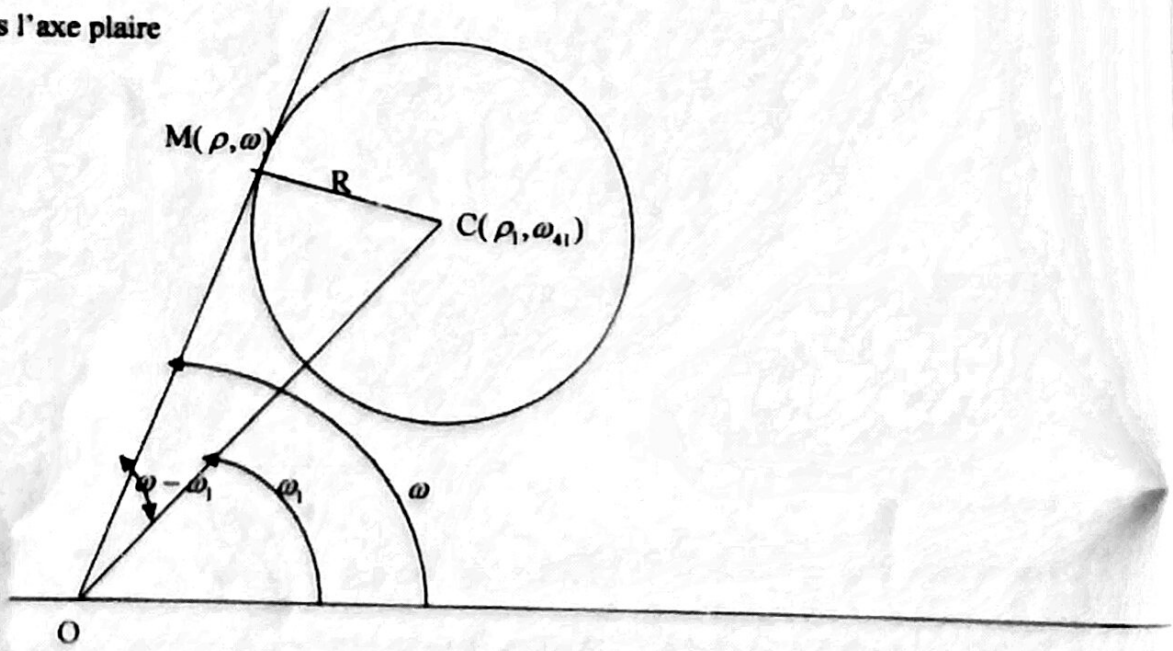
Soient (u_1 , v_1) ; (u_2 , v_2) ; (u_3 , v_3) trois points donnés non alignés soit M (x , y) un point quelconque de coordonnées générales x et y .

L'équation du cercle passant par ces 3 points est :

$$\begin{vmatrix} (x^2+y^2) & x & y & 1 \\ (x_1{}^2+y_1^2) & u_1 & v_1 & 1 \\ (x_2{}^2+y_2{}^2) & u_2 & v_2 & 1 \\ (u_3{}^2+v_3{}^2) & u_3 & v_3 & 14 \end{vmatrix} = 0$$

Equation du cercle en coordonnées polaires

X'X es l'axe plaire



En vertu de la géométrie élémentaire et le théorème de cosinus appliqué à un triangle MCO ,

On a : $MC^2 = R^2 = \rho_1{}^2 + \rho^2 - 2\rho\rho_1 \cos(\omega - \omega_1)$

$$\rho_1{}^2 + \rho^2 - 2\rho\rho_1 \cos(\omega - \omega_1) - R^2 = 0$$

Notons que $\cos(\omega - \omega_1) = \cos\omega\cos\omega_1 + \sin\omega\sin\omega_1$, l'équation devient :

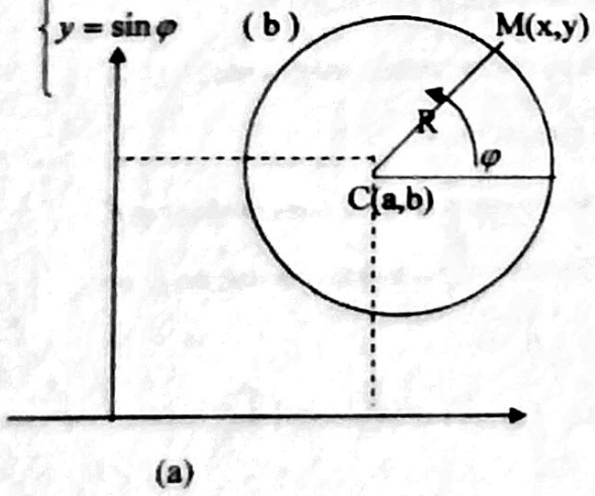
$$\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos\omega\cos\omega_1 + \sin\omega\sin\omega_1 - R^2 = 0$$

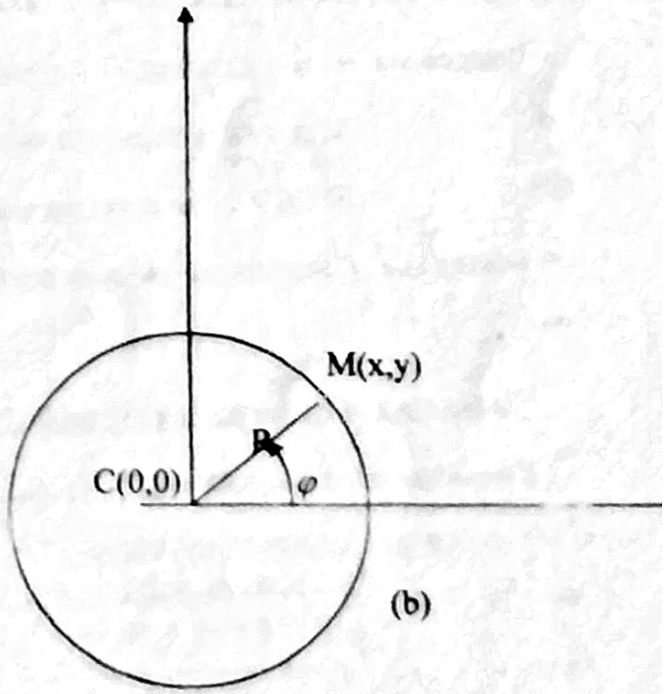
Equation paramétriques d'un cercle

$$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad \begin{cases} x = a + R\cos\varphi \\ y = b + \sin\varphi \end{cases} \qquad (a)$$

Pour le cercle centré en origine :

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{cases} \qquad (b)$$





Equation du cercle passant à l'intersection de 2 cercles donnés

Toutes droite passant par l'intersection de 2 cercles donnés c_1 et c_2 a pour équation :

$C_1 + \lambda\ C_2 = 0$ avec λ à déterminer selon les conditions imposées par le faisceau ou le cercle . (cfr faisceau de droites)

Intrersection d'un cercle et une droite

Soit une droite d' équation $y = m\,x + b$

Cette droite coupe toujours le cercle d'équation $f(x, y) = 0$ en deux points soient réels (distincts ,confondus) ou imaginaires .

Pour obtenir les cordonnées de ces points ,il suffit de résoudre le système :

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 & (1) \\ y = mx + b & (2) \end{cases}$$

L'équation $f(x, mx + b) = 0$ obtenue en remplaçant (2) dans (1) est du second degré en x à résoudre et trouver les racines x si possible et en dégager les ordonnées y .

Dans ce cas si $\Delta < 0$, la droite est extérieure au cercle (points imaginaires)

Si $\Delta > 0$, la droite est sécante (points réels)

Si $\Delta = 0$, la droite est tangente au cercle (points réels confondus)

Notons que la tangente est **toujours perpendiculaire** au rayon aboutissant en ce point

Tangente à un cercle issue d'un point (u , v)

L'équation de la tangente est :

$$\boxed{Y - v = m(x - u)}$$

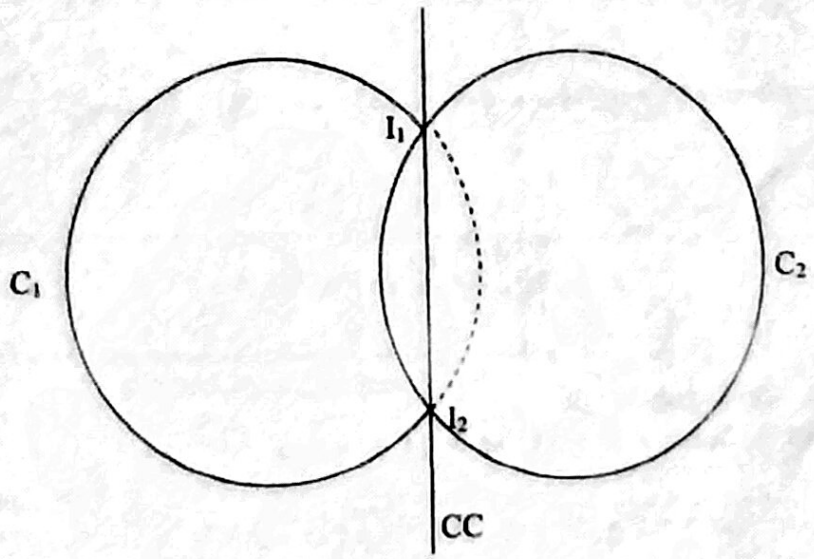
L'inclinaison m est calculée avec $\Delta = \varphi(m) = 0$ tiré de $f(x, mx + b) = 0$, condition de la tangence d'une droite par rapport à un cercle .

Si (u , v) vérifie l'équation du cercle c .à.d $f(u, v) = 0$ avec (a, b) coordonnées du centre , on peut aussi utiliser la formule ci-dessous :

$$y - v = \frac{-\left(1 + \frac{v-b}{u-a}\right.\cos\theta}{\frac{v-b}{u-a} + \cos\theta}(x-u)$$

Intersection de deux cercles

Soient deux cercles $C_1 = f(x, y)$ et $C_2 = g(x, y)$



La droite passant les points d'intersection I_1 et I_2 est appelée : axe radical (ensembles des points ayant même puissance par rapport aux deux cercles ou corde de commune)

L'équation de la corde commune étant : $C_1 - C_2 = 0$

Les points d'intersection étant à la fois sur les cercles et CC réelle et existe même si les cercles ne se touchent pas sont obtenus en résolvant l'un des systèmes suivant :

$$\begin{cases} C_1 = 0 & (1) \\ C_1 - C_2 = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} C_2 = 0 & (1) \\ C_1 - C_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

L'angle φ de deux cercle est formé par les tangente ou rayons aboutissant au point commun est calculé par la formule :

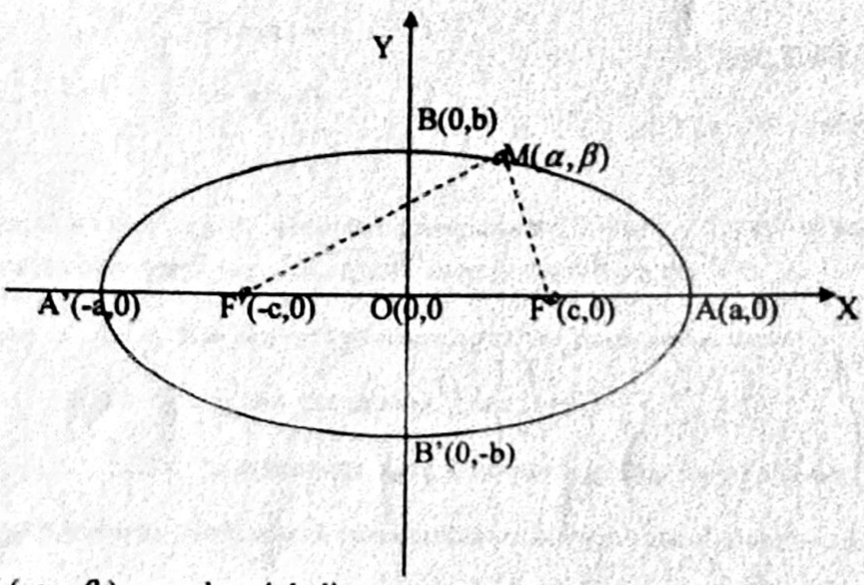
$$\varphi = \left| arc\cos\frac{(R_1^2 + R_2^2) - d^2}{2R_1R_2} \right|$$

EXEMPLE 3

ELLIPSE

L'ellipse est le lieu géométriques des points tels que la somme des distances entre ses points et 2 points fixes appelés foyers est un constante.

Recherche du lieu :



Soit M (α , β) un donné du lieu

Propriété des point du lieu : F' M + M F = cste

Avec F' M = $\sqrt{(\alpha + c)^2 + \beta^2}$ et M F = $\sqrt{(\alpha - c)^2}$

$\forall$ *M* $\in$ *au lieu* et en plus si M = A' ou A la constante est :

cste = 2 A' F' + F' F (1) et cste = F' F + 2 FA (2)

Puisque (1) = (2) on a : A'F' = F A

Cette constante devient : A' F' + F' F + F A = A'A

Avec A(a , 0) et A ' (- a , 0) , on a : $\overline{A'A} = \sqrt{(a+a)^2} + \sqrt{(0-0)^2} = \sqrt{2a^2} = 2a$

Ainsi la propriété devient :

$\sqrt{(\alpha + c)^2 + \beta^2} = 2a - \sqrt{(\alpha - c)^2 + \beta^2}$ en élevant au carré les deux membres on a :

$$\alpha^2 + 2\alpha c + c^2 + \beta^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha c + c^2 + \beta^2} + \alpha^2 - 2\alpha c + c^2 + \beta^2$$

$$4\alpha c - 4a^2 = -4a\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha c + c^2 + \beta^2}$$

$$(\alpha c - a^2)^2 = a^2\alpha^2 - 2\alpha c a^2 + c^2a^2 + a^2\beta^2$$

$$\alpha^2c^2 - 2\alpha c a^2 + a^4 = a^2\alpha^2 - 2\alpha c a^2 + c^2a^2 + a^2\beta^2$$

$$\alpha^2c^2 + a^4 = a^2\alpha^2 + c^2a^2 + a^2\beta^2 \quad \Rightarrow a^2\beta^2 + \alpha^2(a^2 - c^2) - a^2(a^2 - c^2) = 0$$

Posons $a^2 - c^2 = b^2$ avec $a > b$

$a^2\beta^2 + \alpha^2b^2 - a^2b^2 = 0$ et en divisant cette expression par a^2b^2, on a :

$\dfrac{\beta^2}{b^2} + \dfrac{\alpha^2}{a^2} = 1$ *et faire* $\beta = y$, $\alpha = x$, l'équation devient :

$$\boxed{\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad ou \quad a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0}$$

(équation de l'ellipse)

Remarques

A) Si a > b , l'ellipse est le long OX

2a = grand axe , a = demi grand axe

2b = petit axe , b = demi petit axe

Dans ce cas $a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Les foyers étant sur le grand axe sont de la forme : F (c , 0) et F' (- c , 0)

Le rapport $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$, avec $c < a \Rightarrow 0 < e < 1$

O (0 , 0) est le centre de l'ellipse , les points $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ sont <u>les sommets</u>

Les droites d'équations $x = \pm \dfrac{a}{e}$ sont les directrices, extérieurs et perpendiculaires au grand axe

e = EXCENTRICITE

La mesure du segment de droite mené par le foyer perpendiculairement au grand axe et limité par la courbe est appelée : **LATUS RECTUM** (L.R)

B) Si a < b

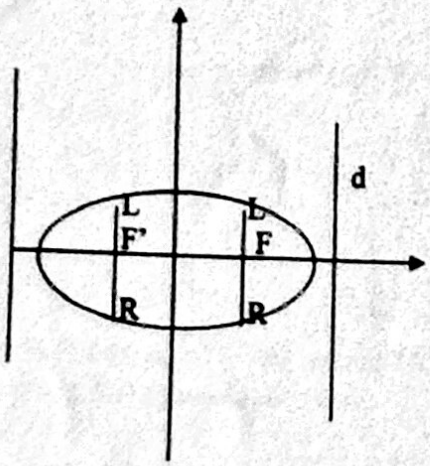
L'ellipse est le long de OY

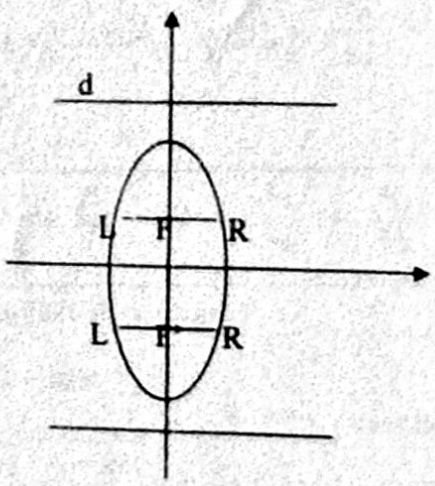
2b = grand axe , b = demi grand axe

2a = petit axe , a = demi petit axe

$b^2 = a^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{b^2 - a^2}$

foyers : $F(0\ ,\ \pm c)$; $e = \frac{c}{b}$; directrices : $y = \pm \frac{b}{e}$





Exemple 4

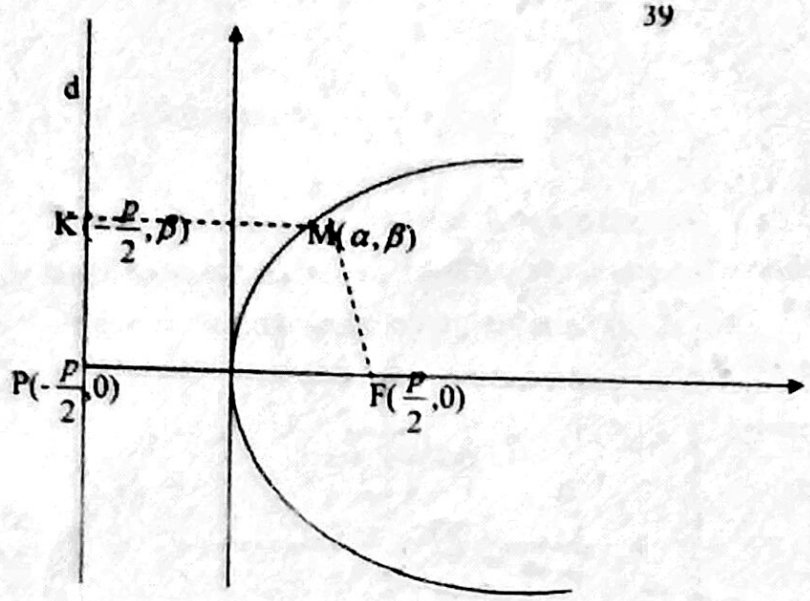
La parabole

La parabole est. le lieu géométrique des points tels que les distances de ses points au foyer et à la directrice sont égales .

Soit $M(\alpha\ ,\ \beta)$ le point du lieu et $x = \frac{-p}{2}$ la directrice

On a $KM = FM$, $KM = \sqrt{(\alpha + \frac{p}{2})^2 + (\beta - \beta)^2}$

$$FM = \sqrt{(\alpha - \frac{p}{2})^2 + \beta^2}$$



Puisque KM = FM , on a : $(\alpha + \frac{p}{2})^2 = (\alpha - \frac{p}{2})^2 + \beta^2$

$$\alpha^2 + p\alpha + \frac{p^2}{4} = \alpha^2 - p\alpha + \frac{p^2}{2} + \beta^2$$

$2p\alpha = \beta^2 \Rightarrow \beta^2 - 2p\alpha = 0$; $\beta = y$, $\alpha = x$

L'équation de la parabole est :

$$Y^2 = 2\,p\,x \quad \text{avec} \quad p > 0$$

L'axe des abscisses est l'axe focal

(0 , 0) est le sommet

p/2 distance focale

$(\frac{p}{2},0)$ est le foyer

$x = -\frac{p}{2}$ est la directrice

e = 1

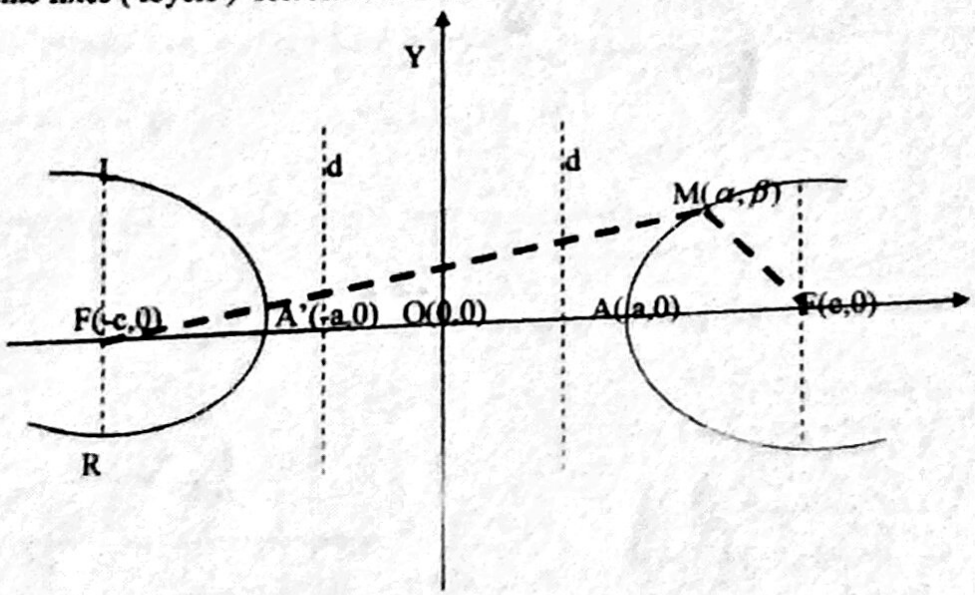
Dans le cas où la directrice est $y = -\frac{p}{2}$, F(0 , p/2) , sommet (0 , 0) , e = 1

La parabole est le long de OY .

Exemple 5

L'hyperbole

L'hyperbole est le lieu géométrique des points tels que la différence des distances de ses points à 2 points fixes (foyers) soit une constante .



Propriété : F'M - FM = 2 a (cfr ellipse)

Avec $F'M = \sqrt{(\alpha + c)^2 + \beta^2}$, $FM = \sqrt{(\alpha - c)^2 + \beta^2}$

Après développement comme pour les ellipses ,on a :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textit{oubien} \quad b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0}$$

(équation de l'hyperbole allongée le long de de OX) avec c > a

On aura : $c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$

On a les foyers de la forme : F(± c , 0)

2a = axe réel , a = demi axe réel

2b = axe imaginaire , b demi axe imaginaire

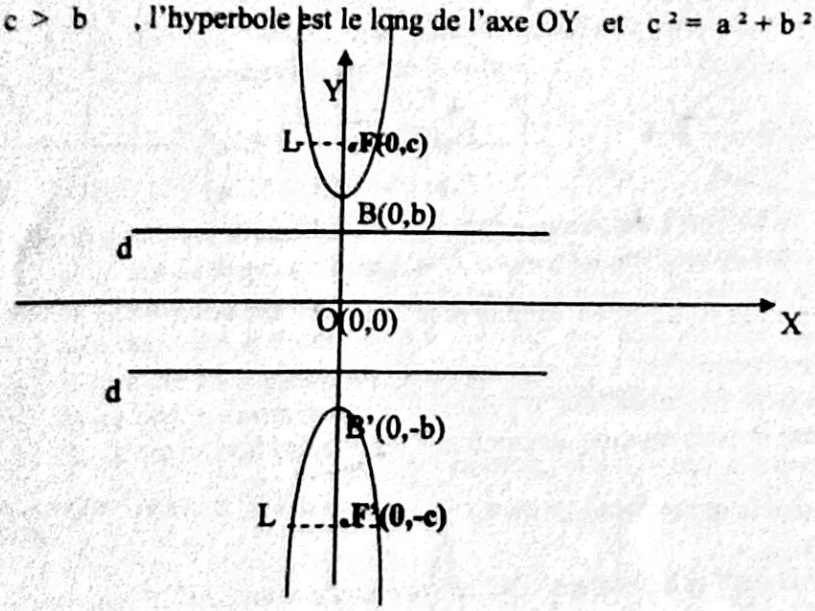
2 c = distance focale (entre deux foyers)

$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ excentricité , avec c > a $\Longrightarrow 1 < e < \infty$

(± a , 0) les sommets , O (0,0) centre

Les droites $x = \pm \frac{a}{e}$ = *directrices* perpendiculaire à l'axe focal et extérieures.

Si c > b , l'hyperbole est le long de l'axe OY et $c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow c = \sqrt{a^2+b^2}$



2 c = distance focale
2b = axe réel ou axe des ordonnées ou axe focal , b = demi axe réel
2a = axe imaginaire , a demi axe imaginaire

$e = \frac{c}{b} = \sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$ est l'excentricité avec b < c $\Longrightarrow 1 < e < \infty$

Les sommets sont de la forme : S (0 , ± b)

Ses foyers sont F (0 , ± c)

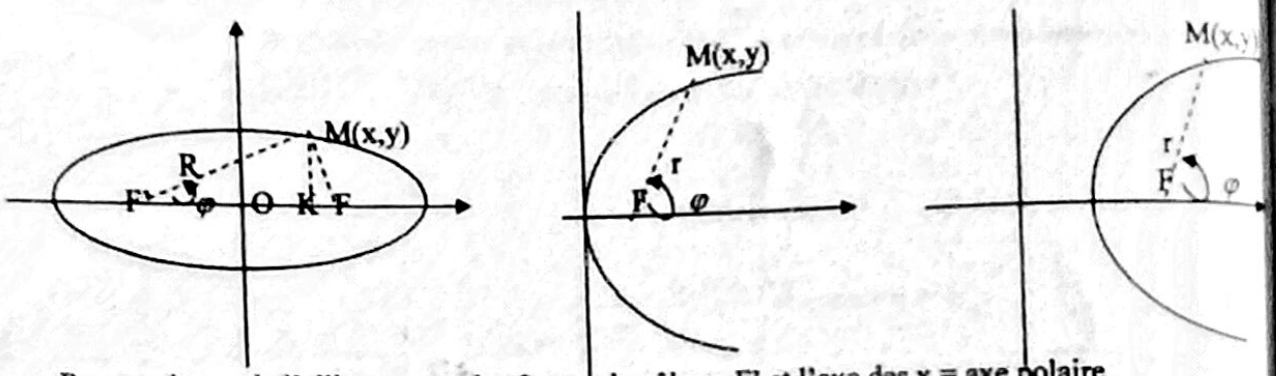
LR = Lactus Rectum = portion de la perpendiculaire menée par le foyer et limitée par la courbe.

En coordonnées polaires ,l'ellipse , l'hyperbole et la parabole sont définies par une même formule car l'axe polaire est dans tous les cas l' axe focal.

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}}$$

Ainsi à chaque vecteur $\rho \neq 0$,on associe un seul angle φ

Preuve :



Prenons le cas de l'ellipse : $a \geq b > 0$ avec le pôle en F' et l'axe des x = axe polaire

F'O = c et OK = x et les coordonnées de M sont M(c+x ,y)

On a : $c + x = \rho \cos\varphi \Rightarrow x = (\rho\cos\varphi) - c$

Le rayon vecteur étant le rayon focal $\Rightarrow \rho_1 = \rho = a + ex = a + e((\rho\cos\varphi) - c) = a + e\rho\cos\varphi - ec$

Soit $a - ec = p$, on a :

$$\rho = p + e\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho(1 - e\cos\varphi) = p$$

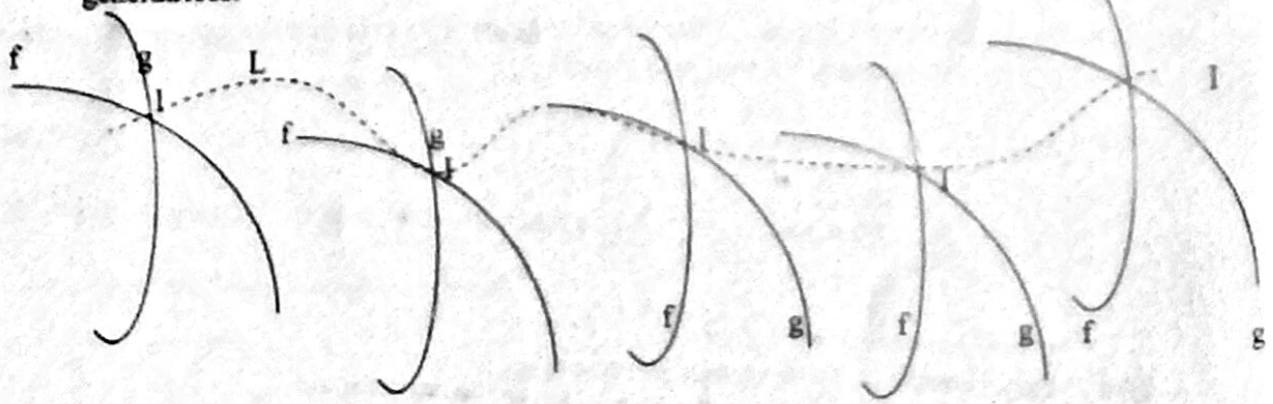
Ainsi on a : $\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\varphi}$

B. METHODE DES GENERATRICES

Soient deux courbes $f(x,y, \lambda) = 0$ et $g(x, y, \lambda) = 0$ ayant un paramètre λ

A chaque valeur donnée à λ , les courbes f et g se coupent en un point correspondant I .

L'ensemble des points I constitue le lieu géométrique engendré par f et g qui en sont les génératrices.



Recherche de lieu

On cherche ce lieu géométrique L en éliminant λ de 2 génératrices et on obtient :

$$L = F(x, y) = 0$$

Ainsi - Si λ est du 1er degré , appliquer la méthode de comparaison ou substitution .
- Si λ est du second degré de la forme :

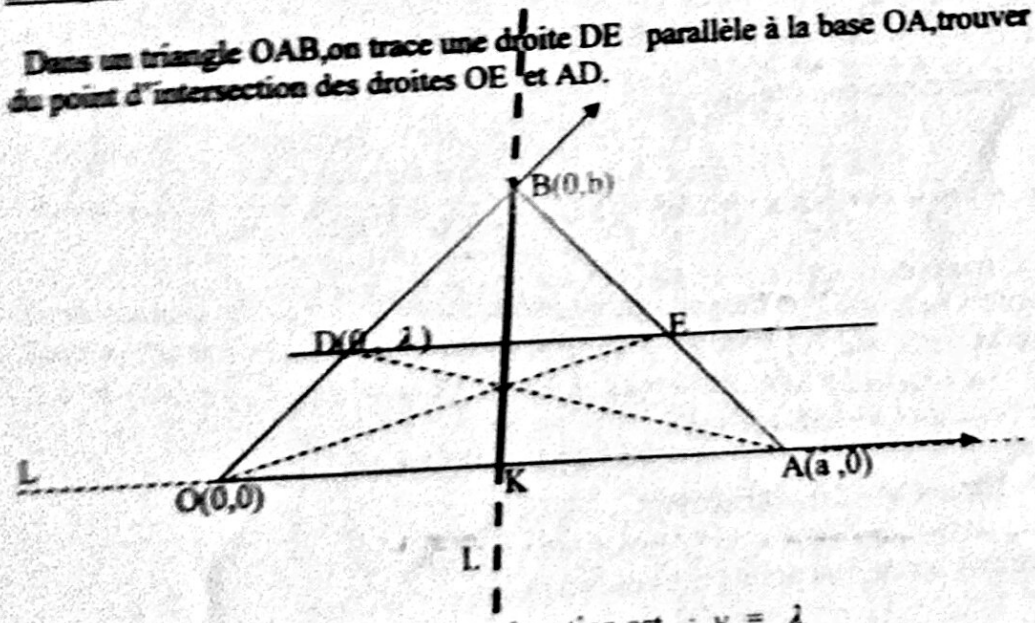
$$\begin{cases} u\lambda^2 + v\lambda + w = 0(1) \\ u'\lambda^2 + v'\lambda + w' = 0(2) \end{cases}$$

On utilise la condition d'existence d'une racine commune : $(uw'-u'w)^2-(uv'-u'v)(vw'-v'w)=0$

- **si λ est de degré supérieur à 2, utiliser les artifices de calcul**
- **Si λ est un nombre trigonométrique , utiliser les formules et identités trigonométriques telle que $\sin^2\lambda + \cos^2\lambda = 1$, $1+ tg^2\lambda = séc^2\lambda$ etc.....**
- **Si une des génératrices est indépendante de λ ,elle constitue le lieu**
- **Si un lieu se décompose en facteurs , il faut interpréter chaque facteur**
- **Si λ est un réel pur,étudier son domaine pour préciser la partie singulière et parasite**

Exemple

Dans un triangle OAB,on trace une droite DE parallèle à la base OA,trouver le lieu géométrique du point d'intersection des droites OE et AD.



DE parallèle à OA et variable , son équation est : $y = \lambda$

E étant sur AB d'équation : $\frac{y}{b}+\frac{x}{a}=1 \Rightarrow ay+bx=ab$ $d'où$ $y = \frac{b}{a}(a-x)$

Dans ce cas les coordonnées de E vérifient cette frontière c à d : $y = \lambda$ et $x = \frac{a}{b}(b-\lambda)$

Les coordonnées de $E((\frac{a}{b}(b-\lambda), \lambda)$

Les génératrices sont des droites OE et AD dont les équations sont respectivement :

$$OE \ : \ y = \frac{\lambda b x}{a(b-\lambda)} \qquad (1)$$

$$AD \ : \ \frac{y}{\lambda} + \frac{x}{a} = 1 \ \Rightarrow \ ay + \lambda x = a\lambda \qquad (2) \ , \ \lambda = \frac{ay}{a-x} \ \text{dans (1)}$$

On a : $a^2 b y - a b x y - a^2 y^2 - abxy = 0$, $a^2 b y - 2 a b x y - a^2 y^2 = - ay (a y + 2 b x - a b = 0$

$a y = 0$ ==> $y = 0$ L'équation de l'axe OX

$a y + 2 b x - ab = 0$ l'équation de la médiane issue B et passant par le point K milieu se OA de coordonnées ($\frac{a}{2}$, 0)

Les parties des lieux en pointillet sont dites parasites et en trait continu sont singulières .

CHAPITRE 4 LES CONIQUES

Déf : Une conique est une courbe dont l'équation est du second degré en x et y et ayant une courbure.
Le cercle , ellipse , hyperbole , parabole sont des coniques .

L'équation générale d'une conique est :

$$F(x, y) = A y^2 + 2 B x y + C x^2 + 2 D y + 2 E x + F = 0$$

Son équation homogénéisée est : $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2DyZ + 2ExZ + FZ^2 = 0$

Si on fixe un point soit P (a , b) , P (a , b , c)

On $f(a,b) = Ab^2 + 2Bab + Ca^2 + 2Db + 2Ea + F$

$F(a,b,c) = Ab^2 + 2Bab + Ca^2 + 2Dbc + 2Eac + Fc^2$

(les valeurs numériques de f au point (a, b) ou (a , b , c)

On note :

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 2By + 2Cx + 2EZ$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 2Ay + 2Bx + 2DZ$$

$$\frac{\delta f}{\delta z} \ 2Dy + 2Ex + 2Fz$$

Respectivement derivée partielle de f(x,y,z) par rapport à x , y , z obtenues en considérant un lettre comme inconnue et les autres comme paramètres .

$$\frac{\delta f}{\delta a} = 2Bb + 2Ca + 2Ec$$

$$\frac{\delta f}{\delta b} = 2Ab + 2Ba + 2Dc$$

$$\frac{\delta f}{\delta c} = 2Db + 2Ea + 2Fc$$

Ce sont des nombres appelés :valeurs numériques des dérivées partielles par rapport à x , à y et à z au point (a , b ,c)

Ainsi : $f(x+a,y+b,z+c) = f(x,y,z) + a\frac{\delta f}{\delta x} + b\frac{\delta f}{\delta y} + c\frac{\delta f}{\delta z} + f(a,b,c)$

Si on fait : $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$

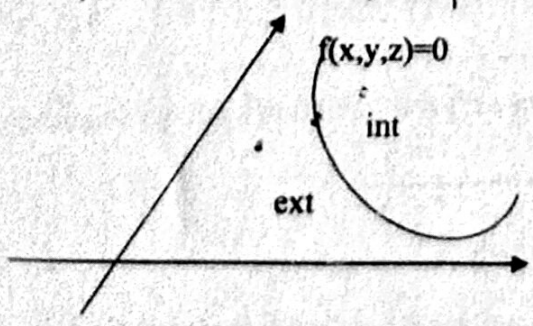
$a = -\lambda x$, $b = -\lambda y$, $z = -\lambda z$ l'expression ci-dessus devient :

$$f(x_1 - \lambda x , y_1 - \lambda y , z_1 - \lambda z) = \lambda^2 f(x,y,z) - \lambda\left(x\frac{\delta f}{\delta x_1} + y\frac{\delta f}{\delta y_1} + z\frac{\delta f}{\delta z_1}\right) + f(x_1, y_1, z_1)$$

Notons que $x\frac{\delta f}{\delta x_1} + y\frac{\delta f}{\delta y_1} + z\frac{\delta f}{\delta z_1}) = x_1\frac{\delta f}{\delta x} + y_1\frac{\delta f}{\delta y} + z_1\frac{\delta f}{\delta z})$

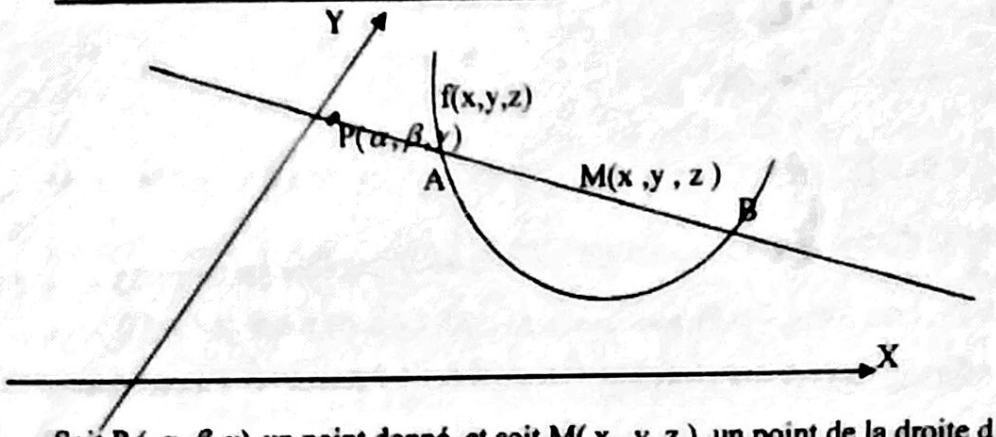
Toute conique $f(x , y , z)$ ou frontière partage un plan en 2 régions (intérieure et extérieure) ; Dans ce cas si (x_1 , y_1 , z_1) est un point du plan ,on a : $f(x_1 , y_1 , z_1) \neq 0$.

Si $f(x_1, y_1, z_1) = 0$, le point est sur la conique.



Droite et conique

Tangente à une conique f(x , y , z) = 0



Soit P (α,β,γ) un point donné et soit M(x , y ,z) un point de la droite d donnée .

Les coordonnées de PM sont ($\alpha - kx, \beta - ky , \gamma - kz$)

Ce point est sur la conique si

$$f(\alpha - kx, \beta - ky, \gamma - kz) = k^2 f(x,y,z) - k\left(x\frac{\delta f}{\delta\alpha} + y\frac{\delta f}{\delta\beta} + z\frac{\delta f}{\delta\gamma}\right) + f(\alpha,\beta,\gamma) = 0$$

Si la racine k de cette équation est un complexe, la droite est extérieure à la conique
Si $k_1 \neq k_2$ réels distincts, la droite est sécante à la conique
Si $k_1 = k_2$ alors la droite est dite : **tangente à la conique** et dans ce cas on a :

$$\Delta = \left(\left(x\frac{\delta f}{\delta\alpha} + y\frac{\delta f}{\delta\beta} + z\frac{\delta f}{\delta\gamma}\right)^2 - 4\, f(x,y,z).\, f(\alpha,\beta,\gamma) = 0\right.$$

Or la tangente est une droite illimitée et passant à l'infini (1 , m , 0) c à d x=1 ,y = m , z = 0 ,

on a : $\boxed{\left(\frac{\delta f}{\delta\alpha} + m\frac{\delta f}{\delta\beta}\right)^2 - 4f(\alpha,\beta,\gamma)(Am^2 + 2Bm + C) = 0}$ relation aux coefficients angulaires

Si le point . P est sur la conique , la relation devient :

$$\left(\frac{\delta f}{\delta\alpha} + m\frac{\delta f}{\delta\beta}\right)^2 = 0 \implies m = -\frac{\frac{\delta f}{\delta\alpha}}{\frac{\delta f}{\delta\beta}}$$

On peut aussi utiliser ces formules pour les équations non homogènes.

En plus de ce raisonnement ,on peut aussi faire comme dans les cercles .

Exemple :

Trouver les tangentes issues de (1 , - $\frac{1}{4}$) à la conique : $4y^2 - x^2 + 4y - x + 2 = 0$

$f(x,y,z) = 4y^2 - x^2 + 4yz - xz + 2z^2$ et $(0, \frac{-1}{4}, 1)$

L'équation de la tangente est : $y + \frac{1}{4} = m\,x$

Calculons la pente m avec la formule : $(\frac{\delta f}{\delta \alpha} + m\frac{\delta f}{\delta \beta})^2 - 4f(\alpha,\beta,\gamma)(Am^2 + 2Bm + C) = 0$ (0)

$\frac{\delta f}{\delta x} = -2x - z \Rightarrow \frac{\delta f}{\delta \alpha} = 0 - 1 = -1$

$\frac{\delta f}{\delta y} = 8y + 4z \Rightarrow \frac{\delta f}{\delta \beta} = -2 + 4 = 2$

$f(\alpha,\beta,\gamma) = f(0,\frac{-1}{4},1) = \frac{5}{4}$

$Am^2+2Bm+c = 4m^2 + 0 - 1 = 0 \quad = 4m^2-1$

(0) devient : $(-1 + 2m)^2 - 5(4m^2-1) = 0$

$1 - 4m + 4m^2 - 20m^2 + 5 = 16m^2 + 4m + 6 = 0$ ou $8m^2 + 2m - 3 = 0$

$\Delta = 4 + 96 = 100 \qquad \begin{cases} m_1 = \frac{1}{2} \\ m_2 = \frac{-3}{4} \end{cases}$

Ainsi les tangentes cherchées sont :

$t_1 \approx y + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}x \quad ou \quad 4y - 2x - 1 = 0$

$t_2 \approx y + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}x \quad ou \quad 4y + 3x + 1 = 0$

N . B Si le point est intérieur à la conique Δ est négatif et les tangentes sont imaginaires

Si le point est sur le conique Δ est nul

Si le point est extérieur à la conique , on a deux tangentes comme le cas ci-dessus et la droite qui passe par les points de contact des tangentes avec la conique est appelée : **corde de contacte** dont l'équation est :

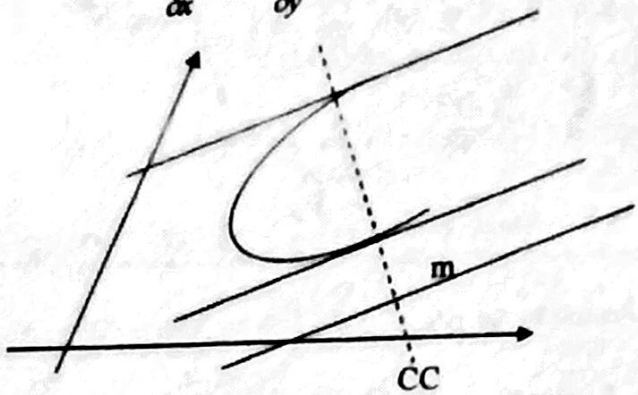
$$\alpha\frac{\delta f}{\delta x} + \beta\frac{\delta f}{\delta y} + \gamma\frac{\delta f}{\delta z} = 0 \qquad \textit{avec } (\alpha,\beta,\gamma) \textit{ les coordonées du point.}$$

Si les tangentes sont parallèles à une direction de pente m

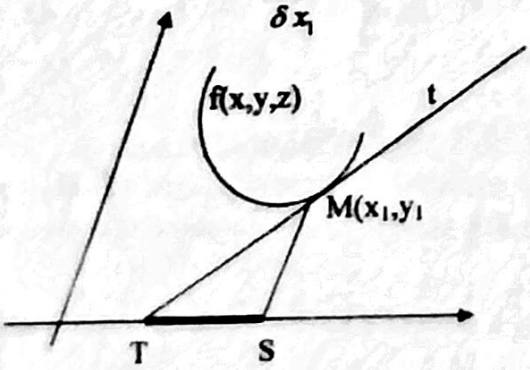
Les tangentes parallèles se croisent à l'infini $(1, m, 0)$ c à d $\alpha = 1, \beta = m, \gamma = 0$

La corde de contacte est :

$$\frac{\delta f}{\delta x} + m\frac{\delta f}{\delta y} = 0$$



Le nombre $ST = X - X_1 = y_1 \dfrac{\dfrac{\delta f}{\delta y_1}}{\dfrac{\delta f}{\delta x_1}}$ est la sous tangente



Cette formule est tirée de l'équation de la tangente en un point $y - y_1 = -\dfrac{\dfrac{\delta f}{\delta x_1}}{\dfrac{\delta f}{\delta y_1}}(x - x_1)$

ASYMPTOTE A UNE CONIQUE f(x,y,z) = 0

On appelle asymptote à une conique $f(x,y,z) = 0$ la positi n limite de la tangente en un point quan le point tend vers l'infini.

Son équation est : $\dfrac{\delta f}{\delta x} + m\dfrac{\delta f}{\delta y} = 0$

Avec m tiré de la direction asymptotique $A m^2 + 2 B m + c = 0$

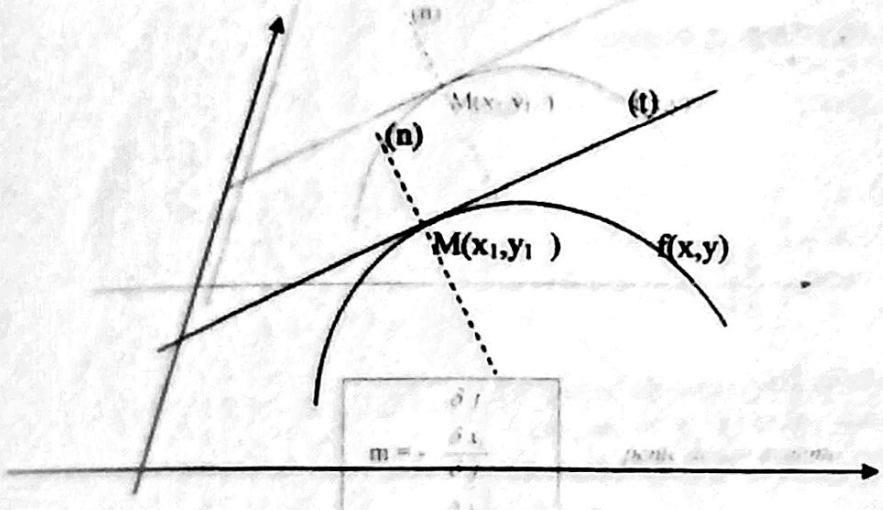
Si on donne $f(x,y) = 0$, l'équation de la conique admettant les mêmes asymptotes que la conique donnée est :

$$f(x,y)+k=0 \text{ avec } k=\frac{\Delta}{B^2-AC}$$

NORMALE A UNE CONIQUE

Définition :

On appelle normale , la droite perpendiculaire à la tangente à la normal en son pied .



$$\boxed{m=-\frac{\frac{\delta f}{\delta x_1}}{\frac{\delta f}{\delta y_1}}}$$ *pente de la tan gente*

Ainsi la pente de la normale est tirée de la condition de perpendicularité de deux droites.

$$m'=-\left(\frac{1-\frac{\delta f_{x_1}}{\delta f_{y_1}}\cos\theta}{\frac{\delta f_{x_1}}{\delta f_{y_1}}+\cos\theta}\right)$$ **ainsi l'équation de la normale** $y-y_1=m'(x-x_1)$ **devient**

$$\frac{y-y_1}{\frac{\delta f}{\delta y_1}-\frac{\delta f}{\delta x_1}\cos\theta}=\frac{x-x_1}{\frac{\delta f}{\delta x_1}-\frac{\delta f}{\delta y_1}\cos\theta}$$

En axes rectangulaires, cette équation est :

$$\frac{y-y_1}{\frac{\delta f}{\delta y_1}}=\frac{x-x_1}{\frac{\delta f}{\delta x_1}}$$

Si la normale provient d'un point P (α , β) ,on explicite les coordonnées de son pied (x_1 , y_1) de relations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\beta - y_1}{\dfrac{\delta f}{\delta y_1} - \dfrac{\delta f}{\delta x_1}\cos\theta} = \dfrac{\alpha - x_1}{\dfrac{\delta f}{\delta x_1} - \dfrac{\delta f}{\delta y_1}\cos\theta} & (1) \\ f(x_1, y_1) = 0 & (2) \end{cases}$$

On résous ce système pour trouver x_1 et y_1 à replacer dans l'équation de la normale donnée.

Normale parallèle à une direction m donnée

L'équation de la normale étant :

$$\frac{y - y_1}{\dfrac{\delta f}{\delta y_1} - \dfrac{\delta f}{\delta x_1}\cos\theta} = \frac{x - x_1}{\dfrac{\delta f}{\delta x_1} - \dfrac{\delta f}{\delta y_1}\cos\theta} \Rightarrow m = \frac{\dfrac{\delta f}{\delta y_1} - \dfrac{\delta f}{\delta x_1}\cos\theta}{\dfrac{\delta f}{\delta x_1} - \dfrac{\delta f}{\delta y_1}\cos\theta}$$

Car son pied (x_1 , y_1) vérifie l'équation de la normale et faire $x_1 = x$, $y_1 = y$
Ainsi l'équation de la normale parallèle à m devient :

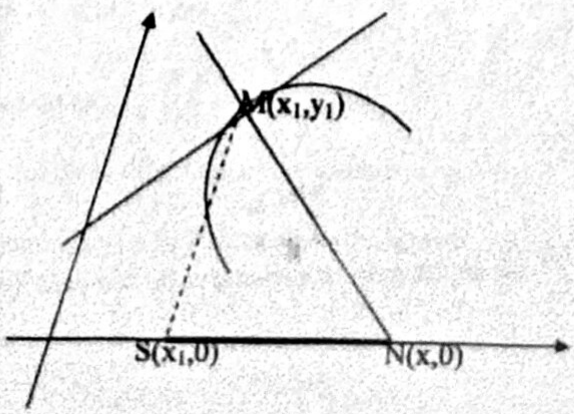
$$\boxed{m.\left(\frac{\delta f}{\delta x} - \frac{\delta f}{\delta y}\cos\theta\right) - \left(\frac{\delta f}{\delta y} - \frac{\delta f}{\delta x}\cos\theta\right) = 0}$$

Si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\cos\theta = 0$ on a : $m.\dfrac{\delta f}{\delta x} - \dfrac{\delta f}{\delta y} = 0$

SOUS-NORMALE

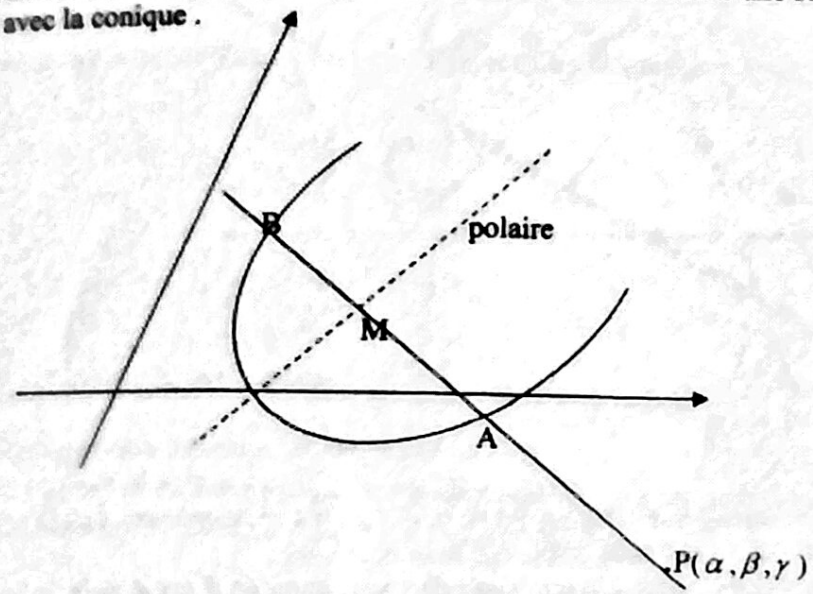
C'est la mesure du segment limité par la projection orthogonale du pied sur OX et l'intersection de la normale avec OX .
Puisque y = 0 , de l'équation de la normale , on tire :

$$\boxed{SN = x - x_1 = -y_1\left(\frac{\dfrac{\delta f}{\delta x_1} - \dfrac{\delta f}{\delta y_1}\cos\theta}{\dfrac{\delta f}{\delta y_1} - \dfrac{\delta f}{\delta x_1}\cos\theta}\right)} \quad \text{ou} \quad \boxed{SN = -y_1.\frac{\dfrac{\delta f}{\delta x_1}}{\dfrac{\delta f}{\delta y_1}} \text{ si } \theta = 9}$$



Polaire d'un point P(α,β,γ) par rapport à une conique f(x , y , z)

On appelle polaire d'un point par rapport à une conique ,le lieu géométrique du conjugué harmonique du point par rapport aux points d'intersection d'une sécante quelconque issue du point avec la conique .



λ_1 *et* λ_2 sont les rapports $\frac{PA}{PB}=\lambda_1$ *et* $\frac{MA}{MB}=\lambda_2$ *tel que* $\frac{\frac{PA}{PB}}{\frac{MA}{MB}}=-1$

$$\Rightarrow \frac{PA}{PB}=-\frac{MA}{MB} \quad \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 \quad \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

Ces rapports sont tirés de l'expression :

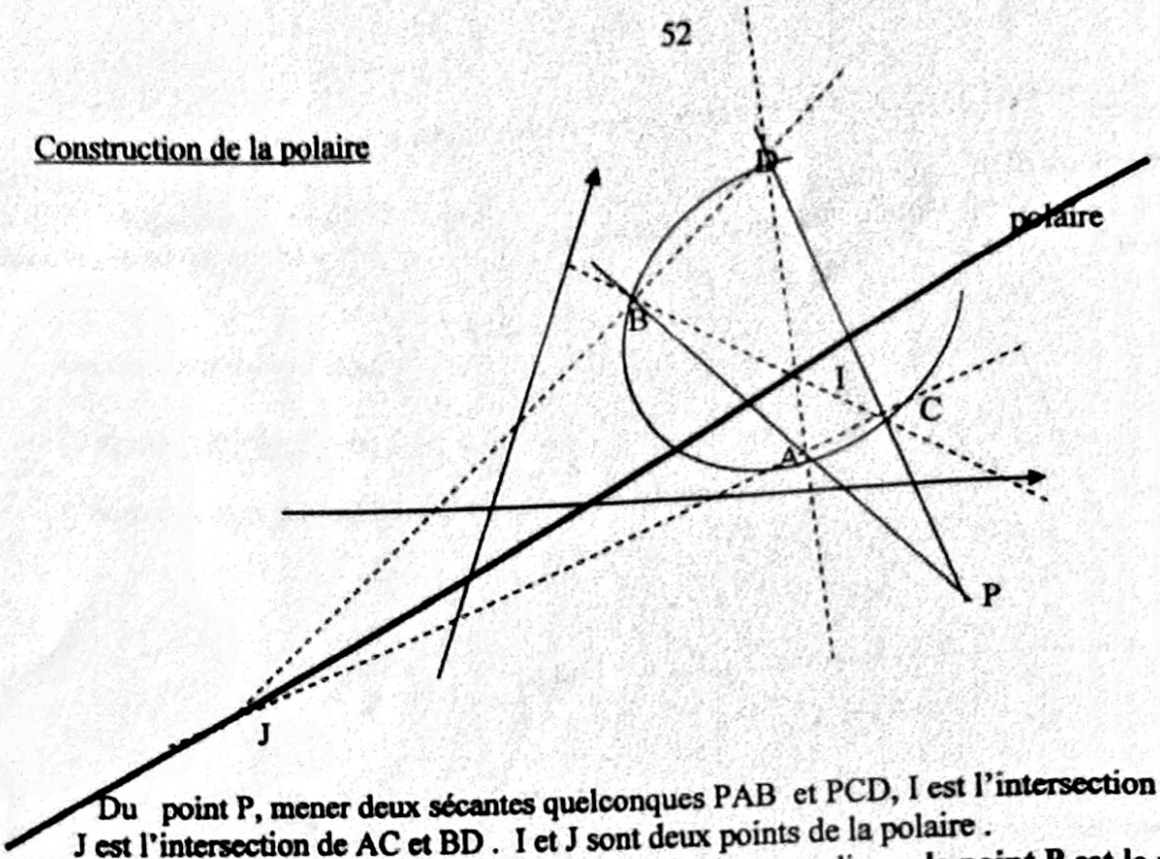
$$\lambda^2 f(\alpha,\beta,\gamma) - \lambda\left(\alpha\frac{\delta f}{\delta x}+\beta\frac{\delta f}{\delta y}+\gamma\frac{\delta f}{\delta z}\right)+f(x,y,z)=0$$

Puisque la somme des racines est $-\frac{b}{a}=S$

$$\lambda_1+\lambda_2=-\frac{b}{a}=\frac{\alpha\frac{\delta f}{\delta x}+\beta\frac{\delta f}{\delta y}+\gamma\frac{\delta f}{\delta z}}{f(\alpha,\beta,\gamma)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha\frac{\delta f}{\delta x}+\beta\frac{\delta f}{\delta y}+\gamma\frac{\delta f}{\delta z} = 0}$$

(équation de la polaire du point P)

Construction de la polaire



Du point P, mener deux sécantes quelconques PAB et PCD, I est l'intersection de AD et BC
J est l'intersection de AC et BD . I et J sont deux points de la polaire .
La droite I J est **la polaire de P** par rapport à la conique tan disque **le point P est le pole** de la polaire I J .

Calcul des coordonnées du pole

-Le pole d'une droite est l'intersection des polaires de 2 de ses points . (prendre en particulier 2 points intersection de cette droite avec les axes.

- Si on donne une droite A y + B x + C = 0 (1) , l'équation de la polaire étant :

$$x\frac{\delta f}{\delta \alpha}+y\frac{\delta f}{\delta \beta}+z\frac{\delta f}{\delta \lambda}=0 \quad (2)$$

$$\frac{\frac{\delta f}{\delta \beta}}{A}=\frac{\frac{\delta f}{\delta \alpha}}{B} \qquad (1)$$

(1) et (2) représente une même droite ssi :

$$\frac{\frac{\delta f}{\delta \alpha}}{B}=\frac{\frac{\delta f}{\delta \gamma}}{C} \qquad (2)$$

En résolvant ce système à 2 inconnues α et β avec $\gamma = 1$,on obtient les coordonnées cartésiennes du pole P.

Les droites remarquables par rapport à une conique

A . Droites du centre

On appelle centre d'une conique , un point qui divise en 2 parties égales toute corde passant par lui et limitée par la conique.

Si C(a , b) est le centre, les droites passant le centre sont dites : **droites du centre.**

Les équation des droites du centres sont :

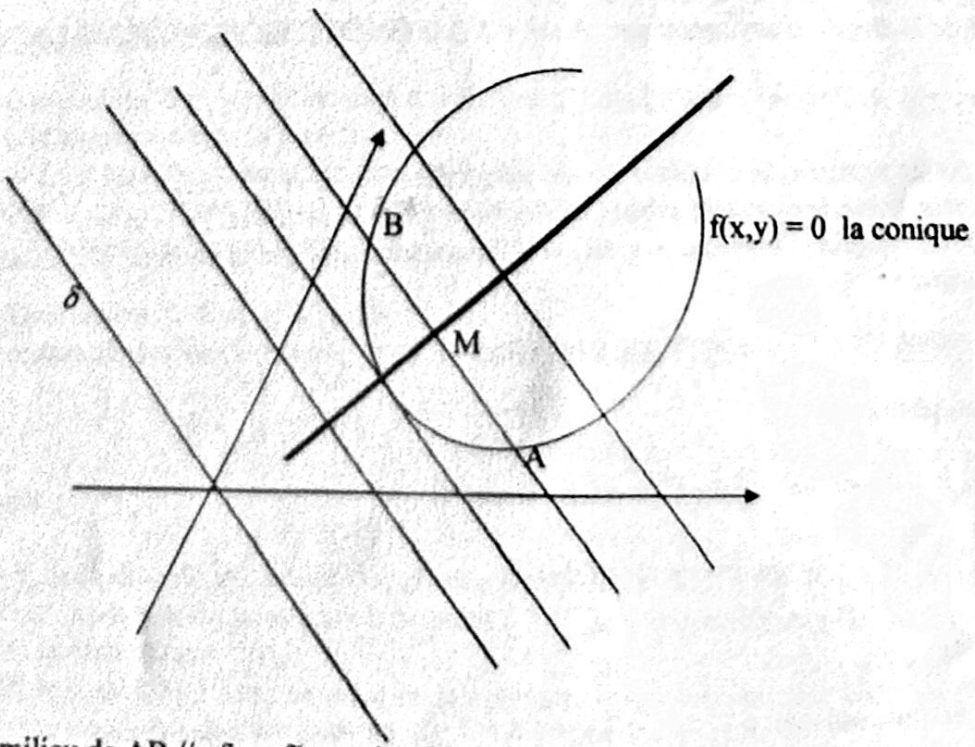
$$\frac{\delta f}{\delta x} = 0 \qquad et \qquad \frac{\delta f}{\delta y} = 0$$

Ainsi les coordonnées (a , b) du centre sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\delta f}{\delta x} = 0 & (1) \\ \dfrac{\delta f}{\delta y} = 0 & (2) \end{cases}$$

B . **Diamètre à une conique**

On donne une direction δ de pente m .
On appelle diamètre conjugué à une direction δ par rapport à une conique,le lieu géométrique du point milieu de la corde parallèle à la direction δ .



M est milieu de AB // δ et f(x , y) = 0 la conique
Après translation d'axes parallèlement à eux même jusqu'en M comme centre (a , b)
On a :

$$f(x+a\,,\,y+b) = Ay^2+2Bxy+Cx^2+y\frac{\delta f}{\delta b}+x\frac{\delta f}{\delta a}+f(a,b) = 0 \quad (1)$$

Le représentant de la direction δ est une droite de l'origine d'équation : y = m x (2)
(2) dans (1) , on a :

$$Am^2x^2+2Bmx^2+Cx^2+m\,x\,\frac{\delta f}{\delta b}+x\frac{\delta f}{\delta a}+f(a,b)=0$$

$$(Am^2+2Bm+C)\,x^2+(m\frac{\delta f}{\delta b}+\frac{\delta f}{\delta a})x+f(a,b)=0$$

Puisque A et B sont symétriques c à d la somme des racines est : $-\dfrac{(m\frac{\delta f}{\delta b}+\frac{\delta f}{\delta a})}{Am^2+2Bm+C}=0$

$m\dfrac{\delta f}{\delta b}+\dfrac{\delta f}{\delta a}=0$, les coordonnées de M(a,b) vérifient la relation .

En faisant a = x , b = y , on a : $\boxed{m\dfrac{\delta f}{\delta y}+\dfrac{\delta f}{\delta x}=0}$ l'équation du diamètre conjugué à m.

Ainsi les droites du centre $\dfrac{\delta f}{\delta y}=0$ *et* $\dfrac{\delta f}{\delta x}=0$ sont respectivement les diamètres conjugués à Oy (m = oo) et à Ox (m = 0)

Si m est tiré de la direction asymptotique $A\,m^2+2\,B\,m+C=0$, le diamètre est : **singulier** .

Axe de symétrie

On appelle axe de symétrie ,le diamètre qui est perpendiculaire à sa direction conjuguée. L'intersection de l'axe de symétrie avec la conique s'appelle le **sommet**. Pour trouver les coordonnées des sommets on résout le système d'équations formé par la conique et l'équation de l'axe de symétrie :

L'axe de symétrie étant un diamètre son équation est : $m\dfrac{\delta f}{\delta y}+\dfrac{\delta f}{\delta x}=0$ avec m tiré cette fois de la direction principale :

$$(B-A\cos\theta)m^2-(A-C)m-(B-C\cos\theta)=0$$

Soit $B\,m^2-(A-C)m-B=0$ en axes rectangulaires

Exemple 1

Trouver le diamètre conjugué à la droite $2\,y-4\,x+1=0$ par rapport à une conique

$6\,y^2-4\,x\,y+5\,y+3\,x-1=0$

Rép : m = 2 la pente de la direction conjugué

L'équation du diamètre étant : $m\dfrac{\delta f}{\delta y}+\dfrac{\delta f}{\delta x}=0$ avec $\dfrac{\delta f}{\delta x}=-4y+3$, $\dfrac{\delta f}{\delta y}=12y-4x+5$

On a : $(-4y+3)+2(12y-4x+5)=-4y+3+24y-8x+10=0$ ou $20y-8x+13=0$

Exemple 2 Si $\theta=60°$

Trouver l'axe de symétrie et les sommet de la conique suivante $2y^2-4xy-6x^2+8y+3x-1=0$

L'équation de l'axe étant : $m\frac{\delta f}{\delta y}+\frac{\delta f}{\delta x}=0$ et la direction principale étant :

$(B-A\cos\theta)m^2-(A-C)m-(B-C\cos\theta)=0$, on a :

$(-2-2\cos60°)m^2-(2+6)m-(-2+6\cos60°)=0$
$-3m^2-8m-1=0$
$\Delta=64-12=52$
$m_1=-2,5$ et $m_2=-0,13$

$\frac{\delta f}{\delta x}=-4y-12x+3$, $\frac{\delta f}{\delta y}=4y-4x+8$

Axe $_1$: $-4y-12x+3-2,5(4y-4x+8)=0$

Axe$_2$: $-4y-12x+3-0,13(4y-4x+8)=0$
Les coordonnées des sommets sont obtenues en résolvant les systèmes formés par chaque axe et la conique donnée . (à faire)

Conique Osculatrice et Surosculatrice

Soit une conique $f(x,y)=0$ donnée d'équation réduite $F=0$ et un point T de $f(x,y)$.
Soit t la tangente à $f(x,y)$ en T.
Prenons une sécante quelconque d'équation réduite $s=0$.
On appelle conique oxculatrice , une conique passant par le point d'intersection de la sécante et la conique et tangente à cette dernière en T.

Son équation est : $F+\lambda\ t.s=0$
Si s se meut jusqu'en T tel que $s=t$ la conique est dite : surosculatrice et son équation devient :

$$F+\lambda\ t^2=0$$

Exemple :

Trouver l'équation de la conique osculatrice à la conique $f(x,y)=3y^2+4x^2+2xy-y+x-9=0$ admettant la sécante de pente $m=3$ au point $(1,1)$ qui coupe OY en $(0,2)$. Trouver ensuite la conique surosculatrice .
En effet le point $(1,1)$ est un point de la conique car ses coordonnées vérifient l'équation
La sécante s est : $y-1=3(x-1)$ ou $y-3x+2=0$

La tangente en T est : $y-1=\frac{\frac{\delta f}{\delta x_1}}{\frac{\delta f}{\delta y_1}}(x-1)$, $\frac{\delta f}{\delta x_1}=11$, $\frac{\delta f}{\delta y}=7$

$y-1=\frac{-11}{7}(x-1)$ *ou* $7y+11x-18=0$

La conique osculatrice est : $(3y^2+4x^2+2xy-y+x-9)+\lambda\ (y-3x+2)(y+11x-18)=0$
Avec $x=0$ et $y=2$,on a $\lambda=1/16$

$48y^2+64x^2+32xy-16y+16x-144+y^2+11xy-18y-3xy-33x^2-54x+2y+22x-36=0$
$49y^2+31x^2+29xy-32y-38x-180=0$

La conique surosculatrice étant : $F+\lambda t^2=0$

: $(3y^2+4x^2+2xy-y+x-9)+\lambda\,(y+11x+18)(y+11x-18)=0$, $\lambda=\dfrac{-1}{400}$ à remplacer dans l'équation ci-dessus.

Conique homothétique à une conique donnée

Soit un point C (a , b) fixé du plan et k un réel quelconque non nul ,f (x , y) une conique donnée. cfr la géométrie élémentaire, rappelons que l'homothétie H(C,k) est une transformation qui à un point A du plan associe le point A' tel que :

CA' = k . CA avec C,A,A' alignés (x', y') les coordonnées de A' et (x , y) celles de A

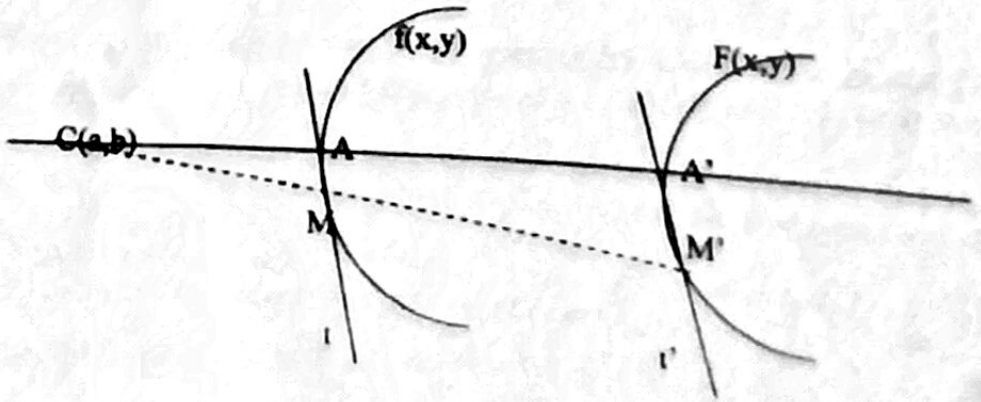
Avec $CA' = \begin{cases} x'-a \\ y'-b \end{cases}$ *et* $CA = \begin{cases} x-a \\ y-b \end{cases}$

On a : $x'-a=k(x-a)=kx-ka$ et $y'-b=ky-kb$
En explicitant x et y de ces expressions, on a :

$$x=\frac{x'-a+ak}{k} \qquad et \qquad y=\frac{y'-b+kb}{k}$$

En remplaçant ces expressions dans f(x,y) = 0 on obtient :

$f\left(\frac{x'-a+ak}{k},\frac{y'-b+kb}{k}\right)=F(x',y')=0$ puis faire $x'=x$ et $y'=y$ et obtenir $F(x,y)=0$ l'équation de la conique homothétique à la conique $f(x,y)=0$
La conique homothétique sera semblable et de la même nature que f(x,y)=0



Les tangentes en deux points homothétiques sont parallèles , t // t'

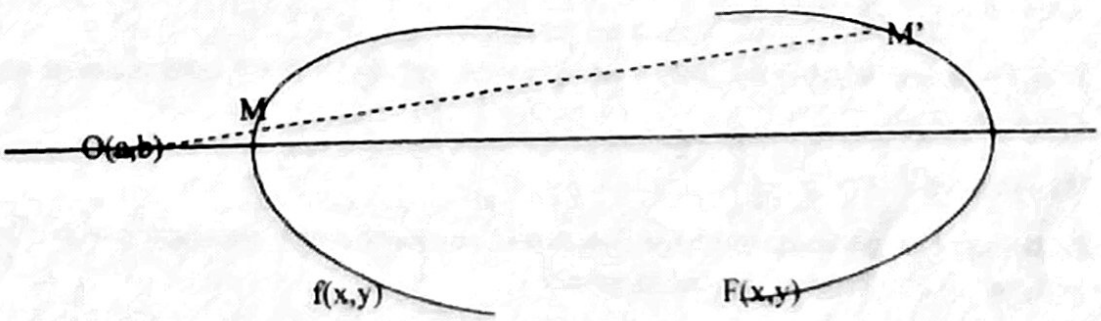
Conique inverse à une conique donnée

Nous referant à l'inversion vue dans la géométrie élémentaire $OA' = \frac{k^2}{OA}$, O(a,b) le pôle $k^2 = K$ (puissance d'inversion) un réel positif . on a :

$$x' = \frac{k^2}{x-a} + a \qquad et \qquad y' = \frac{k^2}{y-b} + b$$

Tout comme pour la conique homothétique , on tire x et y à remplacer dans f(x,y) = 0 et obtenir l'équation de la conique inverse

$$f\left(\frac{k^2}{x-a} + a , \frac{k^2}{y-b} + b\right) = 0 = F(x , y)$$



Chap . 5 Réduction des coniques

Soit $f(x,y) = Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F = 0$ l'équation d'une conique sous forme générale.
Réduire cette équation,c'est l'écrire sous la forme réduite en éliminant son terme en xy et les termes du 1er degré en x et y .

Ainsi :

1) On élimine les termes du 1er degré en effectuant la translation d'axes parallèlement à eux mêmes dont la nouvelle origine est ramenée au centre C(a,b) de la conique .(voir droites du centre)

   C à d faire : $x = x' + a$ et $y = y' + b$ dans $f(x, y)$

2) Puis appliquer la rotation d'axes de $\frac{\pi}{2}$ *en* $\frac{\pi}{2}$ en utilisant les formules de la rotation

$$x = \frac{x'\sin(\theta-\alpha) + y'\sin(\theta-\alpha')}{\sin\theta}$$

$$y = \frac{x'\sin\alpha + y'\sin\alpha'}{\sin\theta}$$

Avec $\theta = \frac{\pi}{2}$ on a : $\begin{array}{l} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{array}$

L'angle α est tiré de la formule : $B\,tg^2\alpha + (C-A)\,tg\alpha - B = 0$ cette équation nous donne la valeur de $\alpha \langle \pi$

Ou bien $tg\,2\alpha = \frac{2B}{C-B}$

D'une manière générale, on vérifie la nature de la courbe avec l'invariant $\delta = B^2 - AC$
(Ellipse E , Hyperbole H ,ou Parabole P)

<u>En cas de l'Ellipse ou Hyperbole</u>

L'équation réduite est de la forme : $M y^2 + N x^2 + F' = 0$

Avec $F' = f(a, b) = \frac{-\Delta}{\delta}$, $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$

M et N sont les racines de l'équation caractéristique $x^2 - (A+C)x - \delta = 0$ cette équation est tirée du système :

$$\begin{cases} -MN = B^2 - AC = \delta & (1) \\ M + N = A + C & (2) \end{cases}$$

Prendre les racines x_1 et x_2 de telle manière que $x_1 = M$ et $x_2 = N$ si <u>**$x_1 - x_2 = M - N$ est de signe contraire à B**</u>

Dans le cas contraire $M = x_2$ et $N = x_1$

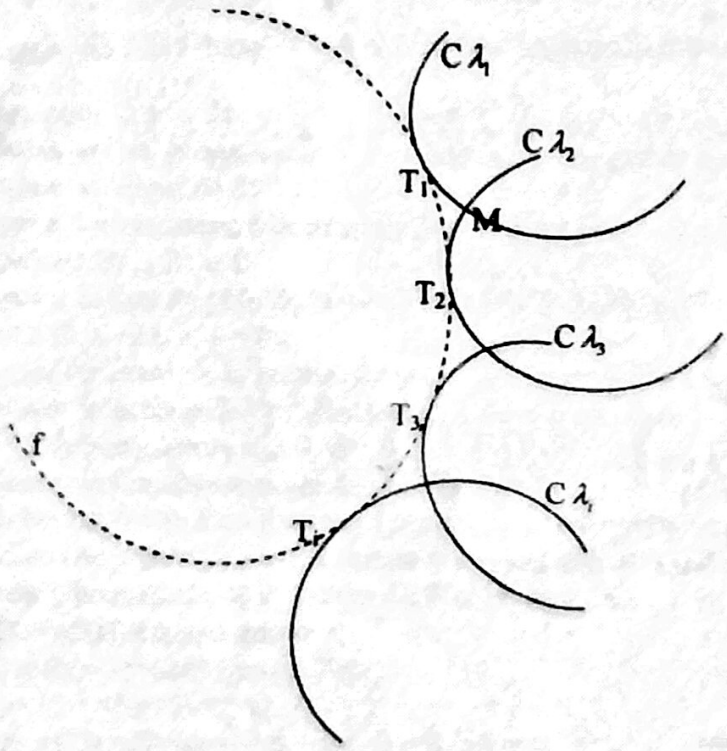
<u>Cas de la parabole</u>

L'équation réduite est de la forme : $M y^2 + 2Sx = 0$ avec $M = A + C$

$$S = \frac{BD - AE}{B}\sqrt{\frac{C}{A+C}}$$

Enveloppe des courbes planes

Soit une famille des courbes planes dépendant d'un paramètre λ définie par $F(x, y, \lambda) = 0$ (λ est un paramètre arbitraire).
A chaque valeur de λ_i ($i \in N$) correspond une seule courbe $C\lambda_i$.
On appelle enveloppe des courbes $C\lambda_i$, une courbe f à laquelle toute courbe $C\lambda_i$ est tangente en un point ou plusieurs de ses points.
Ces points de tangence sont appelés : points caractéristiques.



Soit C et C' deux courbes de cette famille $C\lambda_i$ obtenues pour les valeurs respectives λ et $\lambda + \Delta\lambda$.
Les coordonnées du point commun M vérifient ces courbes $F(x, y, \lambda) = 0$ et $F(x, y, \lambda + \Delta\lambda) = 0$

Si $F(x,y,\lambda)=0$ est la fonction initiale, on a : $\dfrac{F(x,y,\lambda+\Delta\lambda) - F(x,y,\lambda)}{\Delta\lambda}$, $(\Delta\lambda \neq 0)$

Si $\Delta\lambda \rightarrow 0$,le pont M est une approximation du pont de contact et dans ce cas les deux courbes se confondent .
A la limite , on a :

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{F(x,y,\lambda+\Delta\lambda) - F(x,y,\lambda)}{\Delta\lambda} = \frac{\delta F(x,y,\lambda)}{\delta \lambda}$$

Ainsi $F(x, y, \lambda) = 0$ et $\dfrac{\delta F(x,y,\lambda)}{\delta \lambda} = 0$, T est un pied de la tangente à $F(x, y, \lambda)$ et f

Ainsi obtient l'équation de l'enveloppe f d'une famille de courbe C λ, d'équation F(x,y, λ)=0 en éliminant le paramètre λ de deux équations suivantes :

$$\begin{cases} F(x, y, \lambda) = 0 & (1) \\ \dfrac{\delta F(x,y,\lambda)}{\delta \lambda} = 0 & (2) \end{cases}$$

Exemple 1:

Trouver l'enveloppe des droites d'équations $y = \lambda x + \dfrac{p}{2\lambda}$ *ou* λ est un paramètre variable.

En effet $f(x,y, \lambda) = y - \lambda x - \dfrac{p}{2\lambda} \Rightarrow \dfrac{\delta F(x,y,\lambda)}{\delta \lambda} = -x + \dfrac{p}{2\lambda^2}$

On a :

$$\begin{cases} y - \lambda x - \dfrac{p}{2\lambda} = 0 & (1) \\ -x + \dfrac{p}{2\lambda^2} = 0 & (2) \Rightarrow \lambda^2 = \dfrac{p}{2x} \Rightarrow \lambda = \sqrt{\dfrac{p}{2x}} \end{cases}$$

En remplaçant λ dans (1) on a :

$$y - \sqrt{\frac{p}{2x}}\, x - \frac{p}{2\sqrt{\frac{p}{2x}}} = 0$$

$$2\sqrt{\frac{p}{2x}}\, y - \frac{2px}{2x} - p = 0 \quad \text{ou} \quad 2\sqrt{\frac{p}{2x}}\, y - p - p = 0 \quad \text{ou} \quad 2\sqrt{\frac{p}{2x}}\, y - 2p = 0$$

$$\sqrt{\frac{p}{2x}}\, y = p \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{2x} y^2 = p^2 \quad \Rightarrow \quad py^2 = 2p^2x \quad ou \quad y^2 - 2px = 0$$

On a enfin $\boxed{y = \sqrt{2px}}$ **(équation de l'enveloppe cherchée qui représente une parabole)**

Exemple 2 :

Trouver l'enveloppe des courbes d'équations : $f(x,y, \lambda) = 3y^2 + 2\lambda xy - x\lambda^2 + 1 = 0$

En effet : $\dfrac{\delta f('x,y,\lambda)}{\delta \lambda} = 2xy - 2\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = y$

$$\begin{cases} 3y^2 + 2\lambda xy - \lambda^2 x + 1 = 0 & (1) \\ \lambda = y & (2) \end{cases}$$

(2) dans (1) on a : $3y^2 + 2xy^2 - xy^2 + 1 = 0 \Rightarrow 3y^2 + xy^2 + 1 = 0$

Quelques exercices

A. Trouver les équations des coniques rapportées à leurs axes de symétries pour les coniques qui suivent et calculer ensuite les éléments focaux (excentricité , foyer,directrice sommets).

a) $y^2+2xy-2y-x+3=0$
b) $3x^2-2xy+y^2+x-2y+1=0$
c) $y^2-4xy+4x^2+2y-7x-1=0$
d) $y^2+2xy+x^2-3x-7=0$

B. 1) Trouver l'équation de la tangente à la conique $3xy - y + x + 1 = 0$ issue du point (0,1)

2) Idem pour $2y^2 - 5xy + 3x^2 - 4y + x + 4 = 0$

3) Trouver le lieu géométrique des points où les tangentes à une conique $a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0$ forment un angle de 45°.

4) Trouver les normales à la conique $2y^2 + 4xy + x^2 - 3y + 5x + 6 = 0$ au point de coordonnées (2 , 0).

5) Trouver le lieu du pôle de la conique $3y^2 - 2\lambda xy + 2x^2 - y + 3x - 1 = 0$ par rapport à la droite $2y - 3x + 1 = 0$;

6) Ecrirel'équation de la polaire du point (-2,1) par rapport à la conique $3y^2-2xy+x^2-4y+2x-7=0$

7) Trouver la polaire de l'origine par rapport à la conique :
$5y^2-6xy-x^2+3y+2x-1=0$

8) Trouver le lieu du centre de la conique $7y^2 - 2\lambda xy + 3x^2 + 2y - 3\lambda x - 2 = 0$.

9) Sur quelle droite d'inclinaison 3,les courbes $4x^2+y^2=4$ et $y^2-4x^2-16=0$ découpent-elles les cordes conjuguées à la direction m = 2 ayant même point milieu.

10) Dans l'homothétie H de centre (2,5) et de rapport k=3 H((2,5) ; 3), trouver la conique homothétique à la conique :

a) $f(x,y) = 6xy-3y^2+2x^2-5y+4x-7=0$
b) $f(x,y) = 2y^2-x^2-y+3x+1=0$
c) $f(x,y)= xy-6x^2+3x+6y-1=0$

11) Trouver la conique inverse dans l'inversion I de pôle (2, 1) et de puissance $k^2 = 4$ pour :

a) $8y^2 -xy + y + x + 1 = 0$
b) $2xy + y^2 +2y +x -2 = 0$

12) Soit P un point variable sur la droite $x + y + 1 = 0$, p la polaire de P par rapport à ,l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$, d diamètre conjugué à la direction de p .

Trouver le lieu géométrique du point d'intersection de d et p et quel est ensuite son centre .

13) Trouver la conique osculatrice à la conique $f(x,y)=2y^2-3xy+x^2-5x+3y+1=0$ admettant une tangente au point (2, -1) et la sécante parallèle à la droite $-3y +2x -2 = 0$ sachant que cette conique coupe OY en un point d'ordonnée 3 .

14) Trouver l'enveloppe des courbes d'équations : $-2y^2 + 6\lambda^2xy +2y + 6\lambda x + x^2 - 1 = 0$