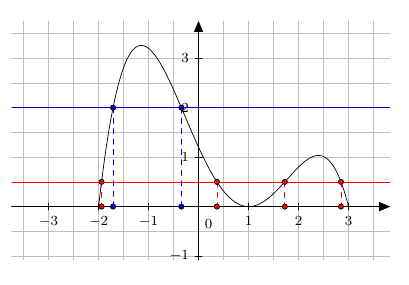
**Université de Kinshasa**



**Faculté Polytechnique**

**Département de Pré-polytechnique**

****

a

b

**I(f)**

**Calcul Numérique**

**(Notes de cours)**

***Assistant Ir. Civil Célestin PENGE ABY***

***Edition 2023***

**Table des matières**

[**AVANT-PROPOS** 4](#_Toc140775330)

[**0.** **INTRODUCTION GENERALE** 5](#_Toc140775331)

[**CHAPITRE 1. ANALYSE, CALCUL D’ERREURS ET NUMERATION** 7](#_Toc140775332)

[**1.1. Analyse sur les erreurs** 7](#_Toc140775333)

[**1.2. Sources d’erreurs** 7](#_Toc140775334)

[**1.3. Types d’erreurs** 8](#_Toc140775335)

[**1.3.1. ERREURS SYSTEMATIQUES** 8](#_Toc140775336)

[**1.3.2. ERREURS ACCIDENTELLES** 8](#_Toc140775337)

[**1.3.3. ERREURS DE MODELISATION** 8](#_Toc140775338)

[**1.3.4. ERREURS DE TRONCATURE** 9](#_Toc140775339)

[**1.4. CALCUL D’ERREURS ET INCERTITUDES** 11](#_Toc140775340)

[**1.4.1. Calcul d’erreurs** 11](#_Toc140775341)

[**1.4.2. CALCUL D’INCERTITUDE** 11](#_Toc140775342)

[**1.4.2.1. Incertitude Absolue** 12](#_Toc140775343)

[**1.4.2. 2. Incertitude Relative (Ou Incertitude Percentile)** 12](#_Toc140775344)

[**1.4.2.3. Calcul d’incertitude des grandeurs dérivées par l’utilisation des différentielles** 14](#_Toc140775345)

[1.5.1. Introduction 16](#_Toc140775346)

[1.5.2. La Base 16](#_Toc140775347)

[**1.5.3.** **Représentation des nombres sur ordinateur** 17](#_Toc140775348)

[**1.5.4.** **Représentation des entiers positifs en binaire** 17](#_Toc140775349)

[**1.5.5.** **Représentation de binaire vers décimal** 17](#_Toc140775350)

[**1.5.6.** **Conversion d’une fraction décimale en valeur binaire** 18](#_Toc140775351)

[**1.5.7.** **Conversion décimal Octal** 19](#_Toc140775352)

[**1.5.8.** **Conversion décimal Hexadécimal** 19](#_Toc140775353)

[Récapitulatif 20](#_Toc140775354)

[**1.7. Exercices** 21](#_Toc140775355)

[**CHAPITRE 2. RESOLUTION NUMERIQUE D’EQUATIONS LINEAIRES ET NON LINEAIRES** 29](#_Toc140775356)

[**2.1.** **Introduction** 29](#_Toc140775357)

[**2.2.** **Méthode de Lagrange (de la sécante ou des cordes ou des parties proportionnelles)** 29](#_Toc140775358)

[**2.2.1.** **Principe** 29](#_Toc140775359)

[**2.2.2.** **Marche à suivre** 30](#_Toc140775360)

[**2.3.** **Méthode de newton (ou des tangentes)** 32](#_Toc140775361)

[**2.3.1.** **Principe** 32](#_Toc140775362)

[**2.3.2.** **Marche à suivre** 33](#_Toc140775363)

[**2.4.** **Méthode de dichotomie** 35](#_Toc140775364)

[**2.4.1.** **Principe** 35](#_Toc140775365)

[**2.4.2.** **Marche à suivre** 37](#_Toc140775366)

[**CHAPITRE 3. COMPLETEMENT SUR LES EQUATIONS ALGEBRIQUES** 43](#_Toc140775367)

[**3.1.** **Introduction** 43](#_Toc140775368)

[**3.2.** **Equation de la forme :**  43](#_Toc140775369)

[**3.2.1.** **Principe de la méthode de cardan** 43](#_Toc140775370)

[**3.2.2.** **Marche à suivre** 46](#_Toc140775371)

[**3.3.** **Equation de la forme :**  53](#_Toc140775372)

[**3.4.** **Equation de la forme :**  54](#_Toc140775373)

[**3.5.** **Equation de la forme :**  56](#_Toc140775374)

[**3.5.1.** **Méthode de Ferrari** 57](#_Toc140775375)

[**3.5.2.** **Méthode de Descartes** 58](#_Toc140775376)

[**3.6.** **Exercices** 61](#_Toc140775377)

[**CHAPITRE 4. INTEGRATION NUMERIQUES** 63](#_Toc140775378)

[**4.1.** **Expression approximative d’une fonction** 63](#_Toc140775379)

[**3.6.1.** **Approximation selon Taylor** 63](#_Toc140775380)

[**3.6.2.** **Approximation par interpolation polynomiale** 64](#_Toc140775381)

[**4.2.** **Formules de Newton-Cotes** 67](#_Toc140775382)

[**4.2.1.** **Méthode des rectangles** 68](#_Toc140775383)

[**4.2.2.** **Méthode des Trapèzes** 69](#_Toc140775384)

[**4.2.3.** **Méthode de Simpson ou formule des paraboles** 72](#_Toc140775385)

[**4.3.** **Intégrales impropres** 75](#_Toc140775386)

[**4.3.1.** **Si la fonction est discontinue en un point c d’un intervalle**  75](#_Toc140775387)

[**4.3.2.** **En cas d’un intervalle donné** 75](#_Toc140775388)

[**CHAPITRE 5. LOGARITHMES ET PROGRESSIONS** 79](#_Toc140775389)

[**5.1.** **Logarithme** 79](#_Toc140775390)

[**5.1.1.** **Introduction** 79](#_Toc140775391)

[**5.1.2.** **Logarithme décimal** 79](#_Toc140775392)

[**5.1.2.1.** **Définition** 79](#_Toc140775393)

[**5.1.2.2.** **Propriétés** 80](#_Toc140775394)

[**5.1.3.** **Logarithme népérien** 80](#_Toc140775395)

[**5.1.3.1.** **Définition** 80](#_Toc140775396)

[**5.1.3.2.** **Propriétés** 81](#_Toc140775397)

[**5.1.3.3.** **Relation entre**  81](#_Toc140775398)

[**5.1.3.4.** **Formules du changement de base** 81](#_Toc140775399)

[**5.1.4.** **Equation logarithmique et exponentielle** 82](#_Toc140775400)

[**5.1.4.1.** **Définition** 82](#_Toc140775401)

[**5.1.4.2.** **Résolution des équations exponentielles et des équations logarithmiques** 82](#_Toc140775402)

[**5.2.** **Progression** 83](#_Toc140775403)

[**5.2.1.** **Progression arithmétique** 83](#_Toc140775404)

[**5.2.1.1.** **Définition** 83](#_Toc140775405)

[**5.2.1.2.** **Le calcul d’un terme connaissant son rang (** 83](#_Toc140775406)

[**5.2.1.3.** **Le calcul de la somme de n termes (** 83](#_Toc140775407)

[**5.2.2.** **Progression géométrique** 84](#_Toc140775408)

[**5.2.2.1.** **Définition** 84](#_Toc140775409)

[**5.2.2.2.** **Calcul d’un terme connaissant son rang (** 84](#_Toc140775410)

[**5.2.2.3.** **Le calcul de la somme de n termes**  85](#_Toc140775411)

[**5.3.** **Exercices** 86](#_Toc140775412)

[**5.3.1.** **Progressions** 86](#_Toc140775413)

[**5.3.2.** **Logarithme** 88](#_Toc140775414)

[**5.3.3.** **Exercices à domicile** 89](#_Toc140775415)

[**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES** 91](#_Toc140775416)

**AVANT-PROPOS**

Ces notes de cours de Calcul Numérique sont destinées aux étudiants de la classe de Pré-polytechnique de la faculté Polytechnique de l’Université de Kinshasa.

Pour suivre le cursus de la formation d’ingénieurs civils, il est nécessaire aux candidats de passer par cette classe qui en quelque sorte sert de pépinière à toutes les notions élémentaires de mathématiques et sciences afin que ceux-ci n’aient plus de difficultés dans les classes montantes.

Les candidats concernés sont issus des différentes sections des humanités, il est alors impérieux de les mettre à même hauteur de compréhension et d’expression du langage des sciences appliquées.

Nous osons que les étudiants mettront à profit ces notes de cours pour mieux maitriser cette branche, bien s’appliquer aux séances pratiques et faire des bons résultats.

1. **INTRODUCTION GENERALE** 
   1. **DEFINITION DE CALCUL NUMERIQUE**

Les traditionnels cours de mathématique (l’algèbre, l’analyse mathématique, la trigonométrie, etc.) nous habituent avec des théories et des méthodes qui permettent de résoudre de façon analytique un certain nombre de problèmes. C’est le cas par exemple des méthodes d’intégrations et des méthodes de résolution d’équations algébriques.

Bien que ces cours puissent nous proposer multiples méthodes pour résoudre un problème donné ; *celles-ci aboutissent à un même résultat qui sera précis et unique.* Par exemple : résoudre un système d’équations linéaire par l’algorithme de Gauss donne la même solution que quand on utilise la méthode des matrices inverses ou autre.

Le cours de calcul numérique qui est une partie du cours d’analyse numérique, se distingue alors d’autres branches de la mathématique. *En effet, pour un problème donné, il est possible d’utiliser différentes méthodes qui sont obtenues à partir de processus divers et à la fin de la résolution trouver des résultats plus ou moins différents selon la méthode employée.* Ces processus dépendent d’un certain nombre de paramètres qui influencent la précision. De plus au cours de calcul numérique, on utilise des approximations plus ou moins précises.

Par exemple : lors de la modélisation d’un problème mécanique, on se trouve en présence d’une telle équation : ; on peut admettre que pour de sorte à rendre l’équation donnée, en une équation du second de degré afin de mieux résoudre le problème.

Mais aussi une autre personne peut chercher à approximer d’une autre façon, la précision du résultat va être influencée dans ce cas. On remarque donc que le résultat final et son degré de précision dépend des choix que l’on a fait. Et lorsque la résolution d’un problème conduit à une telle équation : , il n’existe pas de méthodes algébriques pouvant résoudre ladite équation, dans ce cas nous devrions faire recours à des méthodes d’approximations.

De ce fait, on peut définir le cours calcul numérique comme étant une science qui définit les techniques de résolution, à employer pour résoudre des problèmes divers posés en mathématiques surtout ceux dont les méthodes classiques seront insuffisantes à résoudre, au moyen des approximations mais aussi qui permet d’évaluer le taux d’erreurs ainsi introduites de sorte à donner le degré de précision

* 1. **OBJECTIFS DU COURS**

Ce cours de Calcul Numérique vient respecter l’objectif précédemment évoqué et permet aux étudiants du pré polytechnique de s’habituer avec le calcul.

A l’issue du cours de Calcul Numérique, l’étudiant doit être capable de :

* De faire usage des méthodes et techniques apprises ;
* Distinguer les différents cas de processus ;
* Résoudre seul par calcul (équations, intégrales et différents problèmes de mathématiques) posé avec des notions d’ordre d’opérations et d’arrondissement ;
* Interpréter le résultat obtenu et en dire le degré de précision.
  1. **PREREQUIS AU COURS DE CALCUL NUMERIQUE**

Pour pouvoir atteindre les objectifs de ce cours, certains prérequis sont nécessaires, parmi lesquels nous citons :

* L’Algèbre ;
* L’Analyse mathématique ;
* La Trigonométrie ;
* La Géométrie ;
* L’Informatique.
  1. **CONTENU DU COURS DE CALCUL NUMERIQUE**

Ces notes se composent d’une introduction et cinq chapitres dont :

Chapitre 0 : Introduction Générale

Chapitre 1 : Analyses ; Calculs d’Erreurs et Numération

Chapitre 2 : Complément sur les équations algébriques

Chapitre 3 : Résolutions des Equations linéaires et non linéaires

Chapitre 4 : Intégration numérique

Chapitre 5 : Logarithmes et Progressions

A la fin de chaque chapitre, des séances de résolutions des exercices types seront organisées faisant office des travaux pratiques pour pallier toutes les lacunes et concilier la théorie à la pratique.

Chaque étudiant doit se munir et faire bon usage de ces notes pour son apprentissage.

**CHAPITRE 1. ANALYSE, CALCUL D’ERREURS ET NUMERATION**

**1.1. Analyse sur les erreurs**

L’ingénieur Civil que vous serez plus tard est appelé à réaliser des mesures. Pour effectuer ces mesures, il utilise les outils, des appareils et des techniques appropriés.

Les mesures et les différentes opérations effectuées peuvent être entachées d’irrégularités et d’inexactitudes, c’est – à – dire qu’ils peuvent s’écarter ou s’éloigner de l’exactitude ou encore de la vérité.

Les irrégularités et les inexactitudes peuvent provenir des opérateurs, c’est – à – dire des personnes (erreur de lecture, erreur de manipulation, mauvais réglage, absence d’étalonnage) ou du matériel utilisé, c’est – à – dire des instruments et appareils (imprécision, inadéquation, dysfonctionnement, déréglage). Ces erreurs ont des valeurs inconnues et l’on peut seulement les estimer.

Les résultats de mesures peuvent être utilisés pour calculer une nouvelle grandeur : le résultat devra être présenté avec un nombre de chiffres significatifs cohérent avec la précision des données.

Pour prendre conscience du degré d’approximation avec lequel on travaille, on fait l’estimation des erreurs qui peuvent avoir été commises dans les diverses mesures et on calcule leurs conséquences dans les résultats obtenus. Ceci constitue le calcul d’erreur, ou calcul d’incertitude.

**1.2. Sources d’erreurs**

Dans la résolution mathématique de problèmes physiques, nous avons deux types d’erreurs provenant de :

* Passage de la réalité au modèle mathématique (ou équation mathématique). C’est la modélisation. Et l’erreur commise est l’erreur de modèle.

Modélisation

Erreurs de modèles

Equations

Mathématiques

Solutions :

* Analytique
* Numérique

* Résolution de modelés mathématiques pour obtenir l’information pertinente à la compréhension ou à la transformation de la réalité concernée. C’est l’analyse numérique. Cette information doit être quantitative ou numérique. Les erreurs commises à cette seconde étape sont des erreurs dues aux méthodes numériques.

**1.3. Types d’erreurs**

**1.3.1. Erreurs systématiques**

Les erreurs systématiques sont des erreurs dues à l’instrument, elles sont constantes et présentes à chaque mesure.

**Exemple** :

Une latte en plastique de 50 cm qui était cassé dont on a raccordé par collage, elle a perdu une de ses parties donc elle n’a plus sa vraie longueur. A chaque mesure de 50 cm, manquera une petite partie peut – être de 2 cm, d’où une erreur se glissera à chaque mesure.

**Note**

On pourra éliminer ces erreurs par étalonnage c’est – à – dire comparer cette latte en plastique à une latte de référence.

**1.3.2. ERREURS ACCIDENTELLES**

Comme le mot, les erreurs accidentelles sont celles dues à l’utilisateur, elles sont rares et ont une occurrence aléatoire. Elles ne peuvent pas être éliminées par leur nature, mais elles doivent être appréciées de manière à définir le degré de précision ou la tolérance et la qualité des résultats.

**Exemple** :

Dans le tableau ci - dessous, on reprend 11 valeurs mesurées de l’intensité du courant

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| Ik | 2.6A | 2,1A | 2,1A | 2,2A | 2.3 A | 2,2A | 2,2A | 2.3A | 2.1A | 2.0A | 1,5 A |

Nous allons remarquer les valeurs sont plus proches de 2.3 A et ce sont ces valeurs qui se répètent plusieurs, dans ce cas on pourra dire les valeurs approximatives sont comprises entre 2.1 A et 2.3 A. Et on comprend que les autres valeurs sont des erreurs car ils sont moins nombreux.

**Note :**

On pourra utiliser les notions de moyenne arithmétique et d’erreur moyenne quadratique pour approximer la vérité.

**1.3.3. ERREURS DE MODELISATION**

Lors de la modélisation d’un problème physique, on utilise des relations mathématiques pour résoudre le problème donné. Alors parfois on cherche à simplifier ces différentes relations pour faciliter la résolution et cette simplification induise des erreurs dites de modélisation.

**Exemple :**

Lors de la modélisation d’un problème mécanique, on se trouve en présence d’une telle équation : ; on peut admettre que pour de sorte à rendre l’équation donnée, en une équation du second de degré afin de mieux résoudre le problème. Cette approximation de la valeur exacte de la tangente x par x c’est – à – dire induite une erreur de modélisation.

**1.3.4. Erreurs de troncature**

* + - 1. **Définition**

Le polynôme de Taylor de degré n de la fonction autour de est défini par :

Où désigne la dérivée d’ordre n de en .

Ce polynôme donne une approximation de la fonction *f*(*x*) au voisinage de . Il n’y a cependant pas égalité en ce sens que, si l’on utilise l’équation ci-haut pour estimer on commettra une erreur.

* + - 1. **Théorème**

Soit une fonction dont les dérivées jusqu’à l’ordre existent au voisinage du point . On a l’égalité suivante :

Où est le polynôme de Taylor ( 1.1) et est l’erreur commise, qui est donnée par :

Pour un certain compris entre et .

**Remarques :**

* L’équation est une *égalité* et ne devient une approximation que lorsque le terme d’erreur est négligé ;
* Le terme d’erreur de l’équation devient de plus en plus grand lorsques’éloigne de en vertu du terme
* On commet une erreur de troncature chaque fois que l’on utilise le développement de Taylor et que l’on néglige le terme d’erreur de l’équation 1.2.

On crée une forme plus pratique du développement de Taylor en remplaçant par ou encore l’expression par . On obtient ainsi :

Et :

Pour un certain compris entre et .

**Exemple :**

On considere la fonction au voisinage Puisque toutes les derivées de sont égales à et valent 1 en , le developpement de Taylor de degré devient :

Et l’expression du terme d’erreur de l’equation 1.6 est :

Où . On peut meme determiner une borne superieure pour le terme d’erreur. La fonction exponentielle étant croissante, on a :

Dans l’intervalle et l’on conclu que :

On peut utiliser ce developpement pour estimer la valeur de en prenant

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Eveluation de | | | | |
| n |  | Erreur absolue | Nombre de chiffres signicatifs | Borne pour le terme d’erreur |
| 0  1  2  3 | 1  1,1  1,105  1,1051667 |  | 1  2  4  6 |  |

On obtient l’erreur absolue simplement en comparant le résultat avec la valeur exacte , tandis que la borne supérieure de l’erreur provient de l’équation 1.26 avec . Enfin, si l’on prend et pour estimer , on obtient :

Et une erreur absolue d’environ .

**1.4. Calcul d’erreurs et incertitudes**

**1.4.1. Calcul d’erreurs**

**1.4.1.1. Erreurs absolues**

Par définition *l’****erreur absolue*** d’une grandeur mesurée **G** est notée, la différence entre la valeur approchée et la mesure exacte de la grandeur .

Prenons par exemple la vitesse de la lumière dans le vide. La valeur considérée actuellement comme vraie est :

Si un expérimentateur trouve, lors d’une mesure

On dit que l’erreur absolue de son résultat est :

**Remarque :**

Dans la plupart de cas, est inconnue du fait que la valeur exacte n’est pas connue. De ce fait il faut fixer les limites inférieures et supérieures qui la contiennent. Soient m et M :

m = Valeur limite minimale (borne inférieure)

M = Valeur limite maximale (borne supérieure)

**1.4.1.2. Erreur relative (ou percentile)**

Par définition *l’****erreur relative*** est le quotient de l’erreur absolue à la valeur vraie.

On a : ici on utilise Ga car Ge est souvent inconnue.

En prenant toujours l’exemple de la valeur de la lumière ci – dessus dans **:**

L’erreur relative n’a pas d’unité ; elle nous indique la qualité (l’exactitude) du résultat obtenu. Elle s’exprime généralement en % (pour cent).

On voit clairement qu’il n’est possible de parler d’erreur que si l’on a à disposition une valeur de référence que l’on peut considérer comme vraie.

**1.4.2. Calcul d’incertitude**

Lors de la plupart des mesures physiques, on ne possède pas de valeur de référence, comme celle dont nous venons de parler. Lorsqu’on mesure la distance de deux points, ou l’intervalle de temps qui sépare deux évènements, ou la masse d’un objet, on ne sait pas quelle est la valeur exacte de la grandeur mesurée. On ne dispose que de la valeur expérimentale. Néanmoins, par une critique objective des moyens utilisés pour faire la mesure, on peut se faire une idée de « l’erreur » maximale qu’on peut avoir commise, « erreur » que l’on appelle de façon plus appropriée **incertitude**.

**1.4.2.1. Incertitude Absolue**

L’indication complète du résultat d’une mesure physique comporte la valeur qu’on estime la plus probable et l’intervalle à l’intérieur duquel on est à peu près certain que se situe la vraie valeur. La valeur la plus probable est en général le centre de cet intervalle. La demi-longueur de celui-ci est appelée **incertitude absolue** de la mesure.

Ainsi, si l’on désigne par x la valeur la plus probable de la grandeur mesurée G, par x0 la vraie valeur (qui nous est inconnue) et par ∆x l’incertitude absolue, on a :

Sous une forme condensée, le résultat de la mesure s’écrit :

**Exemple :**

1. La longueur d’un objet est de 153 ± 1 [mm].

Cela signifie qu’avec une incertitude absolue ∆L = 1 [mm], la valeur exacte est comprise entre 152 [mm] et 154 [mm].

1. La température d’un local est de 22 ± 1 [°C].

Ici l’incertitude absolue ∆θ = 1 [°C], c’est-à-dire que l’on garantit que la température n’est pas inférieure à 21 [°C] ni supérieure à 23 [°C].

**Remarque :**

Lorsqu’on mesure une grandeur (longueur, temps, masse, température, …), on peut considérer pour simplifier que l’incertitude absolue correspond à la plus petite graduation de l’instrument de mesure utilisé.

**1.4.2. 2. Incertitude Relative (Ou Incertitude Percentile)**

L’incertitude absolue, lorsqu’elle est considérée seule, n’indique rien sur la qualité de la mesure. Pour juger de cette qualité, il faut comparer l’incertitude absolue à la grandeur mesurée. Le rapport de ces grandeurs est appelé **incertitude relative.**

**Incertitude relative :**

Comme pour l’erreur relative, l’incertitude relative est un nombre pur (sans unité), pratiquement toujours beaucoup plus petit que 1, que l’on exprime généralement en %.

**1.4.2.3. Calcul d’incertitudes des grandeurs dérivées par la méthode directe**

Les grandeurs que l’on mesure sont généralement utilisées pour déduire des résultats par des calculs. Il est alors intéressant de savoir de quelle manière les incertitudes des mesures se répercutent sur les incertitudes des résultats.

1. **Addition et soustraction**

Supposons que la grandeur cherchée R soit la somme de n mesures A, B, …, Z :

Dans ce cas l’incertitude absolue sur le résultat est :

Et l’incertitude relatif sur le résultat est :

***L’incertitude absolue sur une somme ou une différence est la somme des incertitudes absolues de chaque terme.***

***Exemples :***

1. Trouver l’incertitude absolue d’une longueur A dont la valeur approchée set 12,32 cm. On suppose que sa mesure exacte est comprise entre 12,11 cm et 12,45 cm.

On a : cm et cm

cm

Dans ce cas, l’écriture est : et cela veut dire :

1. Un récipient a une masse m = 50 ± 1 [g]. Rempli d’eau, sa masse vaut : M = 200 ± 1 [g]. La masse d’eau qu’il contient est donc :

meau = M - m

En appliquant la règle ci-dessus : ∆meau = ∆M + ∆m = 1 + 1 = 2 [g],

Il s’ensuit que : meau = 150 ± 2 [g]

1. **Multiplication et division**

Supposons maintenant que la grandeur cherchée R soit le résultat du calcul suivant :

Où A, B et C sont des grandeurs que l’on mesure.

Dans ce cas l’incertitude relative sur le résultat est :

Et l’incertitude absolue sur le résultat est :

***L’incertitude relative sur un produit ou un quotient est la somme des incertitudes relatives de chaque terme.***

N.B. : l’incertitude a pour importance de nous renseigner sur **la précision de la mesure effectuée**. Plus l’incertitude est faible plus la mesure est meilleure et tend vers l’exactitude.

***Exemples***:

1. On donne deux mesures : et . Laquelle de ces mesures est la plus précise que l’autre ?

et X est plus précise que Y

1. On donne avec , , et . Trouver l’incertitude absolue et relative sur A ?

L’incertitude relatif sur A est :

La valeur approchée de A est :

L’incertitude absolue sur A est donc :

**1.4.2.3. Calcul d’incertitude des grandeurs dérivées par l’utilisation des différentielles**

Cette méthode nous permet de calculer les incertitudes sur une grandeur dérivée quel que soit la formule par laquelle on a établi la grandeur dérivée.

Cette méthode comprend trois grandes étapes :

* Etape 1 : Introduction du logarithme népérien dans la formule.
* Etape 2 : Calculer l’erreur relative de la grandeur en appliquant la différentielle de chaque membre de la formule.
* Etape 3 : Passage aux incertitudes absolues

**Exemple :**

Calculer l’incertitude relative commise sur la masse volumique d’un cylindre de masse , de diamètre et dont la hauteur est

?

On sait que :

**Etape 1 :**

**Etape 2 :**

(car )

(car )

**Etape 3 :**

(Car )

* 1. **La Numération**

## 1.5.1. Introduction

La nécessité de quantifier, notamment les échanges commerciaux, s’est faite dès la structuration de la vie sociale. Les tentatives de représentation symbolique de quantités furent nombreuses (bâtons, chiffres romains, etc…) avant que ne s’impose la numération arabe, universellement adoptée étant donné sa bonne capacité à traiter les calculs courants.

L’emploi quotidien de ce système, nous fait oublier la structure et les règles qui régissent l’écriture des nombres, notamment la notion de base.

De nombreux systèmes de numérations sont utilisés en technologie numérique. Les 2 plus courants sont les systèmes binaire et hexadécimal. Il existe aussi les systèmes décimal, octal et BCD. Dans tous les cas, quel que soit le système de numération utilisé, il faudra que les valeurs soient converties en valeurs binaires pour être introduites dans le circuit numérique.

Pour exemple : lorsque vous composez un nombre (décimal) sur votre calculatrice ou clavier d'ordinateur, les circuits convertissent ce nombre en valeurs binaires pour être exploité.

### La Base

La base d’un système de numération est le nombre de caractères différents qu’utilise ce système pour représenter les nombres.

Ainsi le système décimal est dit système à base 10 car les chiffres qui le composent sont les chiffres : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Le système binaire utilise donc ...2... Caractères qui sont : 0 et 1

Le système octal utilise ...8... caractères qui sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7

Le système hexadécimal utilise ...16... caractères qui sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Lorsque l’on est amené à manipuler des nombres dans des bases différentes, il convient de préciser cette base afin d’éviter les confusions.

Exemple :

* Le nombre décimal 7264 doit être représenté de la manière suivante : (7264)10. L’indice 10 représentant la base dans laquelle est exprimé le nombre.
* Le nombre binaire 1011 doit être représenté de la manière suivante : (1011)2.

Il est important de remarquer qu’un chiffre se construit de la manière suivante :

* (7264)10 = 7\*103 + 2\*102 + 6\*101 + 4\*100
* (1011)2 = 1\*23 + 0\*22 + 1\*21 + 1\*20
  + 1. **Représentation des nombres sur ordinateur**

Un ordinateur ne peut traiter les nombres de la même manière que l’être humain. Il doit d’abord les représenter dans un système qui permet l’exécution efficace des diverses opérations. Cela peut entrainer des erreurs de ***représentation sur ordinateur***, qui sont inévitables et dont il est souhaitable de comprendre l’origine afin de mieux en maitriser les effets. Cette section présente les principaux éléments d’un modèle de représentation des nombres sur ordinateur. Ce modèle est utile pour comprendre le fonctionnement type des ordinateurs ; il ne peut bien entendu tenir compte des caractéristiques sans cesse changeantes des ordinateurs modernes. La structure interne de la plupart des ordinateurs s’appuie sur le système binaire. L’unité d’information ou *bit* prend la valeur 0 ou 1. Evidemment, très peu d’information peut être accumulée au moyen d’un seul bit. On regroupe alors les bits en *mots* de longueur variable (les longueurs de 8, de 16, de 32 ou de 64 bits sont les plus courantes).

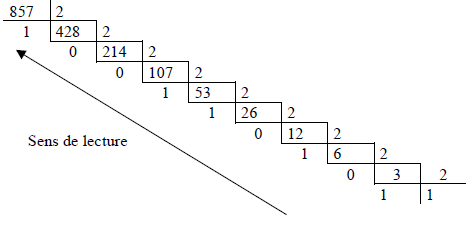
Les nombres, entiers et réels, sont représentés de cette manière, bien que leur mode précis de représentation soit variable. Puisque le système binaire est à la base de la représentation des nombres dans la vaste majorité des ordinateurs, nous rappelons brièvement comment convertir des entiers positifs et des fractions décimales en notation binaire. Pour transformer un entier positif dans sa représentation.

* + 1. **Représentation des entiers positifs en binaire**

La méthode consiste en une série de divisions successives par 2 jusqu’à ce que l’on obtienne un résultat de 1 ou 0.

**Exemple**

Convertir en binaire le nombre décimal 857.



Ce qui donne 857(10) =11 0101 1001(2)

* + 1. **Représentation de binaire vers décimal**

La conversion d'un nombre dans un système de numération vers le système décimal est toujours la même. Pour retrouver le nombre décimal, il suffit d'additionner les monômes représentés chacun par le chiffre appartenant au système de numération multiplié par la puissance de la base correspondant au rang de ce chiffre.

Voici l’illustration :

* + 1. **Conversion d’une fraction décimale en valeur binaire**

La méthode de conversion d’une fraction en valeur binaire est similaire à celle que l’on utilise dans le cas des entiers. Soit f, une fraction décimale comprise entre 0 et 1. Il faut donc trouver les tels que :

On doit donc évaluer la suite aussi appelée la mantisse.

**Exemple**

Si , on a :

x c-à-d

x c-à-d

x c-à-d

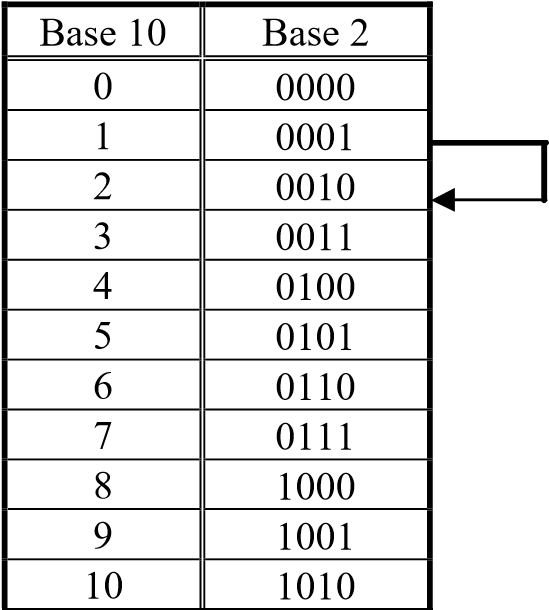
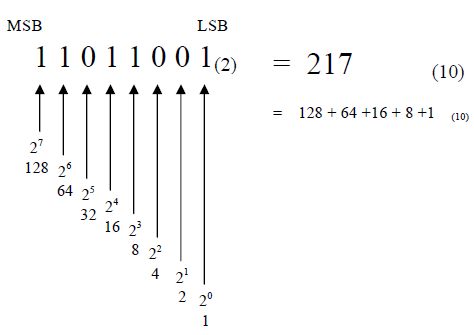
x c-à-d

Ce qui signifie que

**1.4.4. La base binaire**

C’est la base de numération couramment utilisé ***en électronique***. C’est un système à base ...2.... qui est donc composé des caractères ....0 et 1..... . Chacun de ces chiffres est appelé ‘Bit’, contraction des mots **Binary Unit ou Binary Digit**.

En binaire on compte donc de la manière suivante :



**Retenue**

**Remarque :**

Les nombres binaires les plus souvent manipulés en électronique et informatique sont composés soit :

* D’un bit (représentatif de l’état actif ou inactif d’une variable)
* De 4 bits appelé Quartet
* De 8 bits appelé Octet (Byte en anglais)
* De 16 bits appelé Word (Intel), Double Byte (Motorola)
* De 32 bits
* De 64 bits

**Opération sur le binaire**

**Addition Soustraction Multiplication**

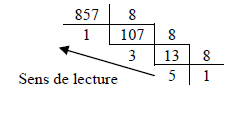
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| + | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 10 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| - | 0 | 1 |
| 0 | 0 | - |
| 1 | 1 | 0 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

* + 1. **Conversion décimal Octal**

Le principe est le même que celui vu précédemment, c’est à dire que l’on divise le nombre décimal par la base 8, jusqu’à ce que l’on obtienne un résultat inférieur à la base. :



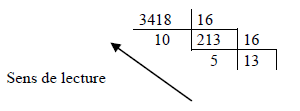
Ce qui donne 857(10)= 1531(8)

* + 1. **Conversion décimal Hexadécimal**

#### 1ere méthode

Le principe est le même que celui vu précédemment, c’est à dire que l’on divise le nombre décimal par la base 16, jusqu’à ce que l’on obtienne un résultat inférieur à la base. :

Conversion du nombre 3418.

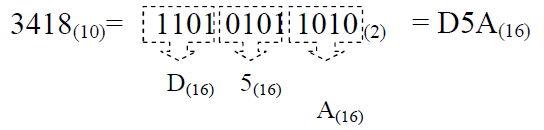


Remarque : 13(10)= D(16)

Le résultat est donc 3418(10)= D5A(16)

#### 2eme méthode

Plus couramment utilisée du fait que les nombres sont déjà écrit en binaire dans les systèmes numériques, consiste à effectuer une conversion en base 2 (binaire) du nombre, puis de convertir chaque quartet obtenu en hexadécimal :



* + 1. **Conversion hexadécimal Binaire**

Il suffit de regrouper les bits par quartet et trouver l’équivalent hexadécimal de chaque quartet.

## Récapitulatif

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Base 10 (Décimal) | Base 2 (Binaire) | Base 8  (Octal) | Base 16 (Hexadécimal) | BCD ou DCB  Décimal Codé Binaire |
| 0 | 0 0000 | 00 | 00 | 0000 0000 |
| 1 | 0 0001 | 01 | 01 | 0000 0001 |
| 2 | 0 0010 | 02 | 02 | 0000 0010 |
| 3 | 0 0011 | 03 | 03 | 0000 0011 |
| 4 | 0 0100 | 04 | 04 | 0000 0100 |
| 5 | 0 0101 | 05 | 05 | 0000 0101 |
| 6 | 0 0110 | 06 | 06 | 0000 0110 |
| 7 | 0 0111 | 07 | 07 | 0000 0111 |
| 8 | 0 1000 | 10 | 08 | 0000 1000 |
| 9 | 0 1001 | 11 | 09 | 0000 1001 |
| 10 | 0 1010 | 12 | 0A | 0001 0000 |
| 11 | 0 1011 | 13 | 0B | 0001 0001 |
| 12 | 0 1100 | 14 | 0C | 0001 0010 |
| 13 | 0 1101 | 15 | 0D | 0001 0011 |
| 14 | 0 1110 | 16 | 0E | 0001 0100 |
| 15 | 0 1111 | 17 | 0F | 0001 0101 |
| 16 | 1 0000 | 20 | 10 | 0001 0110 |
| 17 | 1 0001 | 21 | 11 | 0001 0111 |
| 18 | 1 0010 | 22 | 12 | 0001 1000 |
| 19 | 1 0011 | 23 | 13 | 0001 1001 |
| 20 | 1 0100 | 24 | 14 | 0010 0000 |

**1.7. Exercices**

***Question 1***

On mesure le diamètre et la masse d’une bille en or

1. Calculer le volume de la bille avec son incertitude relative ainsi que son incertitude absolue.
2. Calculer la masse volumique (densité) de la bille avec son incertitude relative ainsi qu’incertitude absolue. Donnez la réponse finale en

***Question 2***

Pour calculer l’accélération terrestre g *avec* un pendule, on mesure la longueur du pendule *l* ainsi que la période d’oscillation *T*, et on utilise la loi.

Avec

Calculer g avec son incertitude relative ainsi que son incertitude absolue.

***Question 3***

L’impédance d’une portion de circuit est :

,

Chaque grandeur étant entachée d’incertitude, donner l’expression théorique de l’incertitude absolue sur Z

***Question 4***

Une lentille mince, convergente, de distance focale donne une image réelle à une distance de son centre optique. Trouver la distance de l’objt au centre optique , et determiner la precision de cette mesure.

***Question 5***

La fonction d’erreur est definie par

Déterminer l’erreur de troncature commise sur f(x) et donner l’approximation de f (1) en utilisant les 4 premiers termes de son développement.

***Question 6***

Passage d’une base quelconque vers la base dix : donner la valeur en base dix des nombres suivants.

***Question 7***

Montrer que 9325 s’écrit bien en base 2 puis reconvertir en base 10.

***Question 8***

Ecrire et en binaire puis effectuer l’opération en binaire et verifier que le resultat obtenu est le bon.

***Question 9***

Ecrire et en binaire puis effectuer l’opération en binaire et verifier que le resultat obtenu est le bon.

***Question 10***

Vérifier l’égalité entre et

***Question 11***

1. Passage d’une base quelconque vers la base dix : donner la valeur en base dix des nombres suivants.
2. (
3. (
4. Convertir en base 10 :
5. (
6. Effectuer chacune des additions suivantes de deux façons différentes : l’une passant par la base dix et l’autre en posant l’addition et en calculant directement dans la base précisée.
7. (
8. Convertir en décimal et en hexadécimal.
9. Convertir en base 16
10. Convertir en décimal et
11. Effectuer l’addition :
12. +
13. +
14. +
15. +
16. +
17. +
18. Convertir en décimal
19. A quelle(s) base(s) (parmi celles vues au cours) peuvent appartenir les chiffres suivant :
20. 321CD
21. 1010
22. 781
23. 432
24. 3CA
25. Passage de la base dix vers une base quelconque : écrire les nombres suivants (donnés en base dix) dans la base cible indiquée.
26. 56 en base sept.
27. 2009 en base onze (utiliser éventuellement la lettre « A » pour représenter le dixième chiffre de la base onze)
28. 2000 en base deux mille.
29. 2570 en base cinquante-cinq (les chiffres de la base cinq plus grands que 9 seront notés en base dix : par exemple, représente le chiffre de valeur 35, donc le trente-sixième chiffre de la base cinquante-cinq).
30. 2570 en base cinquante-cinq (les chiffres de la base cinq sont maintenant notés comme des nombres écrits en base cinq ; par exemple, représente le chiffre 8= 1x +3 de la base cinquante-cinq).
31. Expliquer pourquoi le nombre s’écrit toujours sous la forme dans une base b quelconque.
32. Supposons que , et que les chiffres de la base b sont notés en base 10. Montrer que =
33. Passage d’une base quelconque vers une autre base quelconque
34. vers les bases 4, 8,12 et 16
35. vers les bases 2
36. vers les bases 9
37. vers les bases 3

**QUELQUES RESOLUTIONS DU CHAPITRE 1ER**

1. Trouver l’incertitude relative de la grandeur G sur la relation : G=

**SOLUTION**

G=, En appliquant les méthodes de calcul des incertitudes, on obtient :

**2**. Convertir à la base ci-après :

a) (1001001)2 vers la base 3

b) (20811)60 vers la base 10

**SOLUTION**

1. (100101)2 =**(221)3**
2. (20811)60 =(20)x602 + 8x601 + 11x600 =**(72491)10**

**3.** On note y le nombre réel qui s’écrit y=0, ababababab….. en base β. Montrer que x est un rationnel et déterminer une fraction qui le représente. Que peut-on dire de plus si a=1,b=-1 et β=2 ?

**SOLUTION**

On a y=0,ababab… dans la base β.

Trouvons la fraction qui le représente

β2y=y+(a β + b) →

β2y-y =aβ + b

y(β2-1)= aβ + b

→ y=

**D’où y= aβ + b/ β2-1**

Pour a=1,b=-1, β=2

Y=[1(2)+(-1)]/(2²-1)=

**Y=**

**4.** Effectuer les opérations suivantes directement en hexadécimal, puis convertir le résultat en binaire :

a) (95546)60 - 170310

b) (1000 1011 1010 0010)16 +32478

**SOLUTION**

1. (95546)60 + 6A716

(95546)60=9x602 + 55x60 +46

= (35746)10

Convertissons (35746)10 dans la base 16, on obtient

(35746)10=8BA216

On a : **8BA216**

**- BA716**Pour effectuer l’opération, il faut trouver le complément à deux (sur 10bits) de 06A716 qui est F95916. En effet soustraire c’est additionner à un nombre opposé.

On a :

**8BA216**

**+F95916**

**=84FB**16= **(1000 0100 1111 1011)2**

b)(1000 1011 1010 0010)16 +32478

(1000 1011 1010 0010)16=(8BA2)16

32478=3x83 + 2x8² + 4x8 +7x8°

= (1703)10

Convertissons (1703)10 en hexadécimal

On obtient (1703)10=6A716

D’où 8BA210

+6A716

=**924916= (1001 0010 0100 1001)2**

**5.**Trouver l’incertitude relative puis absolue de la grandeur G sur la relation suivante G=

**SOLUTION**

**Incertitude relative**

**Incertitude absolue**

**∆G=4K4(L-1) (*La marche à compléter par les étudiants).***

**6**. On considère l’expression

X = (((((((0,1×10°+0,1×10−3) +4×10−4) +20×10−5) +0,1×10−3) + 2×10−4) +10−4)

a) Calculer la valeur de x en arithmétique exacte, puis en arithmétique flottante à 3 chiffres avec arrondi et déterminer l'erreur relative commise.

b) Proposer une modification de l'ordre de sommation qui permette d'obtenir une réponse plus précise en arithmétique flottante à 3 chiffres. Valider votre réponse en calculant de nouveau l'erreur relative.

**SOLUTION**

1. X= (((((((0,1×10°+0,1×10−3) +4×10−4) +20×10−5) +0,1×10−3) + 2×10−4) +10−4)

→**En arithmétique exacte : X=0,1011**

→**En arithmétique flottante** :

X= (((((((0,1×100+0,1×10−3) +0,4×10−3) +0,2×10−3) +0,1×10−3) + 0,2×10−3) + 0,1×10−3)

Pour n=3

**Fl(x)**=fl(0 ,1x10° +0,4x10-3 +0,2x10-3 + 0,1x10-3 +0,2x10-3 + 0,1x10-3)

=**0,100**

Donc **Xapp=0,100**

L’erreur relative est donnée par :

**Er(X)===0,01=1%**

1. X=(((((((0,1×100+0,1×10−3)+0,4×10−3)+0,2×10−3)+0,1×10−3) + 0,2×10−3) + 0,1×10−3)

Décalons la mantisse du nombre ayant le plus petit exposant=0,0100x10-2 + 0,100x10-2=0,1100x10-2

Fl(0,1100x10-2)=0,101x10° pour n= 3

On obtient **Xapp=0,101x10**°4

**Er(X)===0,01 soit 1%**

**7.** A quelle(s) base(s) (parmi celles vues au cours) peuvent appartenir les chiffres suivants :

a. 321CD b.1010 c.781 d.432

**SOLUTION**

1. 321CD : **(16) et d.** 432 : (8) ;(10) ;(16) ***(les autres à faire par les étudiants)***

**8**. Determiner les bases X et T dans le système suivant :

14(X) + 13(T) =17(10)

12(X) – 12 (T)=10(2)

**SOLUTION**

**D’où X=6 et T=4 (*La marche à compléter par les étudiants).***

**9.** Trouver l’incertitude relative de la grandeur R sur la relation suivante :

C=

**SOLUTION**

On a C= →R=

**+**

**10.** Supposons que b > 10, et que les chiffres de la base b sont notés en base 10. Montrer que (bx10)10= ((10)100)b

**SOLUTION**

**P**our b>10 ; (bx10)10=((10)100)b

Il suffit d’effectuer la division entière

bx10=((10)100)b puis 10=0xb + 10

D’où **(bx10)10=((10)100)b**

**11**. Montrer que (21)x est un multiple de (101)x et exprimer le résultat dans la base 2,8, et 16

**SOLUTION**

**(*La marche à compléter par les étudiants).***

**CHAPITRE 2. RESOLUTION NUMERIQUE D’EQUATIONS LINEAIRES ET NON LINEAIRES**

* 1. **Introduction**

Le numéricien est souvent confronté à la résolution d’équations algébriques de la forme :

2.1.

et ce, dans toutes sortes de contextes. Une valeur de *x* solutions de est appelée une *racine* ou un *zéro* de la fonction *f*(*x*) et est notée par *r*.

Nous avons tous appris au secondaire comment résoudre l’équation du second degré. Au chapitre 3, nous verrons comment calculer les racines d’une équation du troisième ordre et on pourra remarquer que la formule est beaucoup plus complexe. On peut aussi obtenir une formule générale pour le quatrième degré. Par contre, on ignore souvent qu’il n’existe pas de formule permettant de trouver les racines des polynômes de degré plus grand ou égal à 5. Non pas parce que les mathématiciens ne l’aient pas encore trouvée, mais Abel 1 et par la suite Galois 2 ont démontré que cette formule n’existe pas. Puisqu’il n’existe pas de formule générale pour des fonctions aussi simples que des polynômes, il est peu probable que l’on puisse résoudre analytiquement une équation algébrique du 5ème degré ou même pour certaines équations qui nous intéressent. Il faudra donc recourir aux méthodes numériques.

Dans ce chapitre, nous allons exposer quelques méthodes numériques pour permettre aux étudiants en pré polytechnique à déterminer numériquement et facilement les zéros des équations linéaire et non linéaires.

Pour toutes ces méthodes numériques que nous allons exposer, on mettra l’accent sur le calcul numérique de la solution en cherchant l’intervalle qui se rapproche ou qui encadre plus étroitement la solution sans passer par des formules analytiques et algébriques bien établies. Pour y parvenir, on fera donc des itérations numériques jusqu’à trouver le plus petit intervalle possible qui encadre la solution recherchée.

* 1. **Méthode de Lagrange (de la sécante ou des cordes ou des parties proportionnelles)**
     1. **Principe**

Soit f(x) une équation a variable x, continue et dérivable d’ordre 2 dans l’intervalle donnée et s’il existe un intervalle inclus dans tel que f(x) soit monotone croissante (décroissante) et prenant des valeurs de signes contraires aux extrémités de l’intervalle c’est à dire ou f( ou , il existe une valeur de x annulant f(x) dans l’intervalle qui est la valeur approchée de la racine cherchée.

Soit la racine a calculé avec l’équation de la corde ou la droite passant par deux points qui sont

Pour y = f(x)= 0

Pour améliorer ou tendre vers la précision de la valeur exacte de la racine, on cherche à réduire l’intervalle en vérifiant de nouveau le signe de *f ()* à comparer avec celui de ou de et prendre l’intervalle qui vérifie l’existence de la racine dans l’intervalle considéré. Soit la nouvelle racine et procéder ainsi plusieurs fois.

* + 1. **Marche à suivre**

**Etape 1 :** Déterminer les intervalles et

L’intervalle s’il n’est pas donné, on peut le déterminer en cherchant les intervalles de monotonies : ces sont les intervalles donnés par les zéros de la dérivée première de la fonction

**Etape 2 :** Première approximation de la racine dans l’intervalle

**Etape 3 :** Deuxième approximation de la racine dans l’intervalle

* Calculer ,
* Déterminer l’intervalle :

Si et sont des signes contraires, alors et

Si et sont des signes contraires, alors et

* Calculer la deuxième approximation de la racine

**Etape 4 :** Troisième approximation de la racine dans l’intervalle

* Calculer ,
* Déterminer l’intervalle :

Si et sont des signes contraires, alors et

Si et sont des signes contraires, alors et

* Calculer la deuxième approximation de la racine

Faire des itérations jusqu’à ce que la racine trouvée soit très proche de l’intervalle.

**Exemple**

Trouvez les valeurs approchées des racines de l’équation suivante :

**Résolution**

Nous voyons que l’intervalle n’est pas donné, calculons les intervalles de monotonité avec

f’(X) = = 0 ssi .

On aura ainsi 3 intervalles de monotonité qui sont :

Prenons par exemple l’intervalle et soit

*f* (0) est positif et *f*(1) est négatif donc de signe contraires, ainsi la valeur approchée de la racine cherchée est entre 0 et 1.

La formule

.

On peut continuer les itérations et on trouve :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Itérations** | **a** | **b** | **c** | **f(a)** | **f(b)** | **f(c)** |
| **1** | **0** | **1** | **0,4** | **2** | **-3** | **-0,336** |
| **2** | **0** | **0,4** | **0,34246575** | **2** | **-0,336** | **-0,01462918** |
| **3** | **0** | **0,34246575** | **0,33997895** | **2** | **-0,014629181** | **-0,00057698** |
| **4** | **0** | **0,33997895** | **0,33988089** | **2** | **-0,000576981** | **-2,2657E-05** |
| **5** | **0** | **0,33988089** | **0,33987704** | **2** | **-2,26571E-05** | **-8,8955E-07** |
| **6** | **0** | **0,33987704** | **0,33987689** | **2** | **-8,89554E-07** | **-3,4925E-08** |
| **7** | **0** | **0,33987689** | **0,33987689** | **2** | **-3,49251E-08** | **-1,3712E-09** |
| **8** | **0** | **0,33987689** | **0,33987689** | **2** | **-1,3712E-09** | **-5,3835E-11** |
| **9** | **0** | **0,33987689** | **0,33987689** | **2** | **-5,38352E-11** | **-2,1134E-12** |
| **10** | **0** | **0,33987689** | **0,33987689** | **2** | **-2,11342E-12** | **-8,3045E-14** |
| **11** | **0** | **0,33987689** | **0,33987689** | **2** | **-8,30447E-14** | **-3,5527E-15** |
| **12** | **0** | **0,33987689** | **0,33987689** | **2** | **-3,55271E-15** | **0** |

Les cases en rouge montrent comment, on a respecté les 2 conditions du choix d’intervalle :

Si et sont des signes contraires, alors et

Si et sont des signes contraires, alors et

On remarque que à la 12 itérations la valeur de donc c’est la valeur de qui approxime au mieux la racine dans l’intervalle jusqu’à 8 chiffres après la virgule.

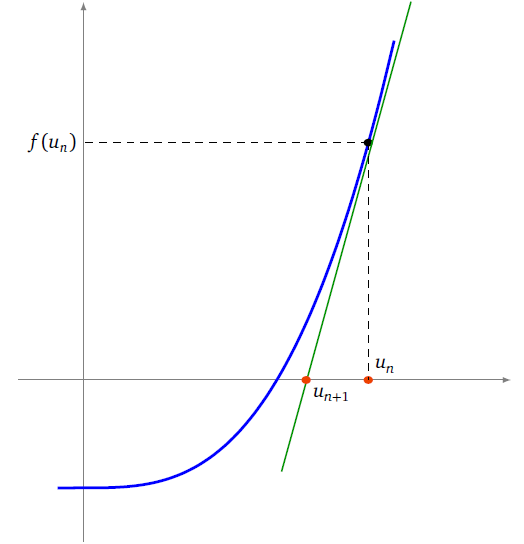
On peut faire la même procédure pour les 2 autres intervalles.

* 1. **Méthode de newton (ou des tangentes)** 
     1. **Principe**

La méthode de Newton consiste à remplacer la sécante de la méthode précédente par la tangente. Elle est d’une redoutable efficacité.

Partons d’une fonction dérivable  et d’un point. On appelle (*u*1, 0) l’intersection de la tangente au graphe de *f* en (*u*0, *f* (*u*0)) avec l’axe des abscisses.

Sialors on recommence l’opération avec la tangente au point d’abscisse *u*1. Ce processus conduit à la définition d’une suite récurrente :



En effet la tangente au point d’abscisse a pour équation :

*y* = *f ‘*() (*x −*) + *f* (). Donc le point (*x*, 0) appartenant à la tangente (et à l’axe des abscisses) vérifie 0 = *y* = *f ‘*() (*x −*) + *f* ().

D’où

* + 1. **Marche à suivre**

**Etape 1 :** Déterminer les intervalles et

L’intervalle s’il n’est pas donné, on peut le déterminer en cherchant les intervalles de monotonies : ces sont les intervalles donnés par les zéros de la dérivée première de la fonction

**Etape 2 :** Première approximation de la racine dans l’intervalle

**Etape 3 :** Deuxième approximation de la racine dans l’intervalle

* Calculer ,
* Déterminer l’intervalle :

Si et sont des signes contraires, alors et

Si et sont des signes contraires, alors et

* Calculer la deuxième approximation de la racine

**Etape 4 :** Troisième approximation de la racine dans l’intervalle

* Calculer ,
* Déterminer l’intervalle :

Si et sont des signes contraires, alors et

Si et sont des signes contraires, alors et

* Calculer la deuxième approximation de la racine

Faire des itérations jusqu’à ce que la racine trouvée soit très proche de l’intervalle.

**Exemple**

Résoudre l’équation suivante par la méthode de newton

**Résolution**

Nous voyons que les bornes ne sont pas définies et que la fonction est dérivable

et ssi . Ainsi la fonction est monotone dans les intervalles suivants :

Estimons la racine entre par exemple prendre

;

En appliquant la formule de newton, on :

On peut continuer les itérations et on trouve :

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Itérations** | **a** | **b** | **c** | **f(a)** | **f(b)** | **f(c)** | **f '(c)** |
| **0** | **-1** | **1** | **-1** | **13** | **-9** | **13** | **-9** |
| **1** | **-1** | **1** | **0,44444444** | **13** | **-9** | **-3,24554184** | **-11,4074074** |
| **2** | **-1** | **0,44444444** | **0,15993266** | **13** | **-3,245541838** | **0,08489891** | **-11,9232646** |
| **3** | **0,15993266** | **0,44444444** | **0,1670531** | **0,08489891** | **-3,245541838** | **2,4687E-05** | **-11,9162798** |
| **4** | **0,1670531** | **0,44444444** | **0,16705517** | **2,4687E-05** | **-3,245541838** | **2,1516E-12** | **-11,9162777** |
| **5** | **0,16705517** | **0,44444444** | **0,16705517** | **2,1516E-12** | **-3,245541838** | **0** | **-11,9162777** |

Les cases en rouge montrent comment, on a respecté les 2 conditions du choix d’intervalle :

Si et sont des signes contraires, alors et

Si et sont des signes contraires, alors et

On remarque que à la 5 itérations la valeur de donc c’est la valeur de qui approxime au mieux la racine dans l’intervalle jusqu’à 8 chiffres après la virgule.

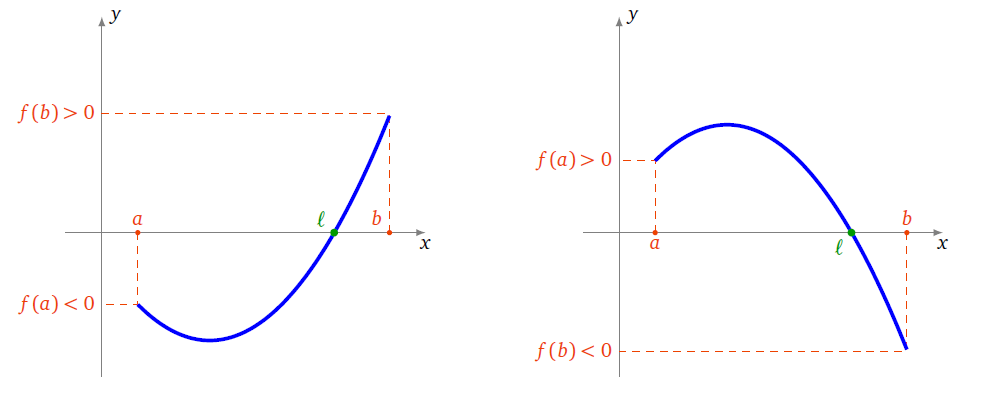
On peut faire la même procédure pour les 2 autres intervalles.

* 1. **Méthode de dichotomie**
     1. **Principe**

Le principe de dichotomie repose sur la version suivante du ***théorème des valeurs intermédiaires* :**

Soit , une fonction continue sur un segment.

La condition signifie que sont des signes opposés (ou que l’un des deux est nul). L’hypothèse de continuité est essentielle !



Ce théorème affirme qu’il existe au moins une solution de l’équation

(*f* (*x*) = 0) dans l’intervalle [*a*, *b*]. Pour le rendre effectif, et trouver une solution (approchée) de l’équation (*f* (*x*)= 0), il s’agit maintenant de l’appliquer sur un intervalle suffisamment petit. On va voir que cela permet d’obtenir un *`* solution de l’équation (*f* (*x*)= 0) comme la limite d’une suite.

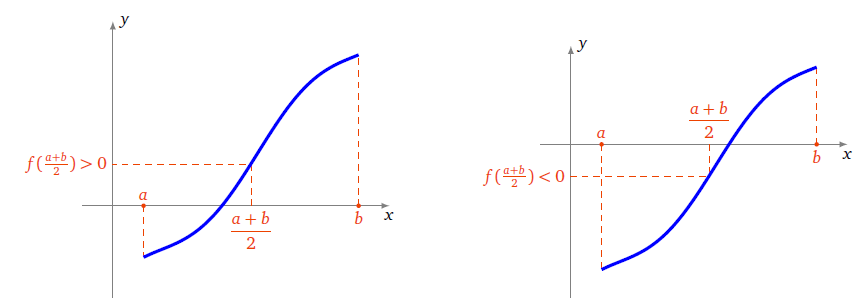
Voici comment construire une suite d’intervalles emboités, dont la longueur tend vers 0, et contenant chacun une solution de l’équation (*f* (*x*)= 0).

On part d’une fonction continue, avec et.

Voici la première étape de la construction : on regarde le signe de la valeur de la fonction *f* appliquée au point milieu.

* Si
* Si

Alors il existe



Nous avons obtenu un intervalle de longueur moitié dans lequel l’équation (*f* (*x*)= 0) admet une solution. On itère alors le procédé pour diviser de nouveau l’intervalle en deux.

Voici le processus complet :

* Au rang 0 :

On pose. Il existe une solution de l’équation (*f* (*x*)= 0) dans l’intervalle.

* Au rang 1 :
* Si, alors on pose
* Si non on pose  ;
* Dans les deux cas, il existe une solution dans l’intervalle .
* …….
* Au rang n : supposons construit un intervalle, de longueur et contenant une solution de l’équation (f(x)=0). Alors :
* Si , alors on pose

, 2.3

* Sinon on pose .
* Dans les deux cas, il existe une solution de l’équation dans l’intervalle .

A chaque étape on a :

On arrête le processus dès que est inférieur à la précision souhaitée. Comme) est par construction une suite croissante,) une suite décroissante, et () tend vers zéro lorsque, les suites) et) sont adjacentes et donc elles admettent une même limite. D’après le théorème des gendarmes, c’est aussi la limite disons de la suite (. La continuité de f montre que.

Donc les suites) et) tendent toutes les deux vers, qui est une solution de l’équation

.

* + 1. **Marche à suivre**

**Etape 1 :** Déterminer les intervalles et

L’intervalle s’il n’est pas donné, on peut le déterminer en cherchant les intervalles de monotonies : ces sont les intervalles donnés par les zéros de la dérivée première de la fonction

**Etape 2 :** Première approximation de la racine dans l’intervalle

**Etape 3 :** Deuxième approximation de la racine dans l’intervalle

* Calculer ,
* Déterminer l’intervalle :

Si et sont des signes contraires, alors et

Si et sont des signes contraires, alors et

* Calculer la deuxième approximation de la racine

**Etape 4 :** Troisième approximation de la racine dans l’intervalle

* Calculer ,
* Déterminer l’intervalle :

Si et sont des signes contraires, alors et

Si et sont des signes contraires, alors et

* Calculer la deuxième approximation de la racine

Faire des itérations jusqu’à ce que la racine trouvée soit très proche de l’intervalle.

**Exemple**

Calculer les racines de l’équation par la méthode de Dichotomie

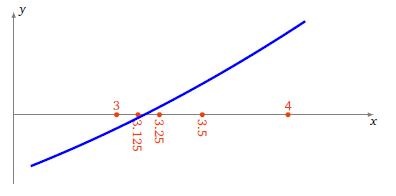
**Résolution**

C’est une fonction continue sur qui s’annules-en et de plus la solution positive de l’équation. Nous pouvons restreindre la fonction f à l’intervalle : en effet

et.

En d’autre terme

admet une solution dans l’intervalle d’après le théorème des valeurs intermédiaires.



Voicis les toutes premieres étapes :

1. On pose et, on a bien)

On calcul puis. Donc est dans l’intervalle et on pose et .

1. On sait donc que et. On calcule

on pose.

1. On calcule Comme alors cette fois s’annule sur le second intervalle et on pose

A ce stade, on a prouvé :

Voici la suite des étapes :

Donc en 8 étapes on obtient l’encadrement :

En particulier, on vient d’obtenir les deux premières décimales :

On peut continuer les itérations et on trouve :

| **Itérations** | **a** | **b** | **c** | **f(a)** | **f(b)** | **f(c)** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1** | **3** | **4** | **3,5** | **-1** | **6** | **2,25** |
| **2** | **3** | **3,5** | **3,25** | **-1** | **2,25** | **0,5625** |
| **3** | **3** | **3,25** | **3,125** | **-1** | **0,5625** | **-0,234375** |
| **4** | **3,125** | **3,25** | **3,1875** | **-0,234375** | **0,5625** | **0,16015625** |
| **5** | **3,125** | **3,1875** | **3,15625** | **-0,234375** | **0,16015625** | **-0,03808594** |
| **6** | **3,15625** | **3,1875** | **3,171875** | **-0,03808594** | **0,16015625** | **0,06079102** |
| **7** | **3,15625** | **3,171875** | **3,1640625** | **-0,03808594** | **0,060791016** | **0,0112915** |
| **8** | **3,15625** | **3,1640625** | **3,16015625** | **-0,03808594** | **0,011291504** | **-0,01341248** |
| **9** | **3,16015625** | **3,1640625** | **3,16210938** | **-0,01341248** | **0,011291504** | **-0,0010643** |
| **10** | **3,16210938** | **3,1640625** | **3,16308594** | **-0,0010643** | **0,011291504** | **0,00511265** |
| **11** | **3,16210938** | **3,16308594** | **3,16259766** | **-0,0010643** | **0,005112648** | **0,00202394** |
| **12** | **3,16210938** | **3,16259766** | **3,16235352** | **-0,0010643** | **0,002023935** | **0,00047976** |
| **13** | **3,16210938** | **3,16235352** | **3,16223145** | **-0,0010643** | **0,000479758** | **-0,00029229** |
| **14** | **3,16223145** | **3,16235352** | **3,16229248** | **-0,00029229** | **0,000479758** | **9,3732E-05** |
| **15** | **3,16223145** | **3,16229248** | **3,16226196** | **-0,00029229** | **9,3732E-05** | **-9,9278E-05** |
| **16** | **3,16226196** | **3,16229248** | **3,16227722** | **-9,9278E-05** | **9,3732E-05** | **-2,7732E-06** |
| **17** | **3,16227722** | **3,16229248** | **3,16228485** | **-2,7732E-06** | **9,3732E-05** | **4,5479E-05** |
| **18** | **3,16227722** | **3,16228485** | **3,16228104** | **-2,7732E-06** | **4,54793E-05** | **2,1353E-05** |
| **19** | **3,16227722** | **3,16228104** | **3,16227913** | **-2,7732E-06** | **2,1353E-05** | **9,2899E-06** |
| **20** | **3,16227722** | **3,16227913** | **3,16227818** | **-2,7732E-06** | **9,28989E-06** | **3,2583E-06** |
| **21** | **3,16227722** | **3,16227818** | **3,1622777** | **-2,7732E-06** | **3,25832E-06** | **2,4254E-07** |
| **22** | **3,16227722** | **3,1622777** | **3,16227746** | **-2,7732E-06** | **2,42537E-07** | **-1,2654E-06** |
| **23** | **3,16227746** | **3,1622777** | **3,16227758** | **-1,2654E-06** | **2,42537E-07** | **-5,1141E-07** |
| **24** | **3,16227758** | **3,1622777** | **3,16227764** | **-5,1141E-07** | **2,42537E-07** | **-1,3444E-07** |
| **25** | **3,16227764** | **3,1622777** | **3,16227767** | **-1,3444E-07** | **2,42537E-07** | **5,4051E-08** |
| **26** | **3,16227764** | **3,16227767** | **3,16227765** | **-1,3444E-07** | **5,40506E-08** | **-4,0193E-08** |
| **27** | **3,16227765** | **3,16227767** | **3,16227766** | **-4,0193E-08** | **5,40506E-08** | **6,929E-09** |
| **28** | **3,16227765** | **3,16227766** | **3,16227766** | **-4,0193E-08** | **6,92895E-09** | **-1,6632E-08** |
| **29** | **3,16227766** | **3,16227766** | **3,16227766** | **-1,6632E-08** | **6,92895E-09** | **-4,8515E-09** |
| **30** | **3,16227766** | **3,16227766** | **3,16227766** | **-4,8515E-09** | **6,92895E-09** | **1,0387E-09** |
| **31** | **3,16227766** | **3,16227766** | **3,16227766** | **-4,8515E-09** | **1,03875E-09** | **-1,9064E-09** |
| **32** | **3,16227766** | **3,16227766** | **3,16227766** | **-1,9064E-09** | **1,03875E-09** | **-4,338E-10** |
| **33** | **3,16227766** | **3,16227766** | **3,16227766** | **-4,338E-10** | **1,03875E-09** | **3,0247E-10** |
| **34** | **3,16227766** | **3,16227766** | **3,16227766** | **-4,338E-10** | **3,02474E-10** | **-6,5663E-11** |
| **35** | **3,16227766** | **3,16227766** | **3,16227766** | **-6,5663E-11** | **3,02474E-10** | **1,1841E-10** |
| **36** | **3,16227766** | **3,16227766** | **3,16227766** | **-6,5663E-11** | **1,18407E-10** | **2,6372E-11** |
| **37** | **3,16227766** | **3,16227766** | **3,16227766** | **-6,5663E-11** | **2,63718E-11** | **-1,9645E-11** |
| **38** | **3,16227766** | **3,16227766** | **3,16227766** | **-1,9645E-11** | **2,63718E-11** | **3,3626E-12** |
| **39** | **3,16227766** | **3,16227766** | **3,16227766** | **-1,9645E-11** | **3,36264E-12** | **-8,141E-12** |
| **40** | **3,16227766** | **3,16227766** | **3,16227766** | **-8,141E-12** | **3,36264E-12** | **-2,3892E-12** |
| **41** | **3,16227766** | **3,16227766** | **3,16227766** | **-2,3892E-12** | **3,36264E-12** | **4,8672E-13** |
| **42** | **3,16227766** | **3,16227766** | **3,16227766** | **-2,3892E-12** | **4,86722E-13** | **-9,5035E-13** |
| **43** | **3,16227766** | **3,16227766** | **3,16227766** | **-9,5035E-13** | **4,86722E-13** | **-2,327E-13** |
| **44** | **3,16227766** | **3,16227766** | **3,16227766** | **-2,327E-13** | **4,86722E-13** | **1,279E-13** |
| **45** | **3,16227766** | **3,16227766** | **3,16227766** | **-2,327E-13** | **1,27898E-13** | **-5,1514E-14** |
| **46** | **3,16227766** | **3,16227766** | **3,16227766** | **-5,1514E-14** | **1,27898E-13** | **3,7303E-14** |
| **47** | **3,16227766** | **3,16227766** | **3,16227766** | **-5,1514E-14** | **3,73035E-14** | **0** |

On remarque que à la 47 itérations la valeur de donc c’est la valeur de qui approxime au mieux la racine dans l’intervalle jusqu’à 8 chiffres après la virgule.

On peut faire la même procédure pour les 2 autres intervalles.

* 1. **Exercice**

***Question 1***

On se propose de calculer les zéros de la fonction. On pose

On considère l’intervalle Utiliser la méthode de dichotomie pour calculer la racine de f avec une précision de l’ordre de .

***Question 2***

On se propose de calculer les zéros de la fonction sur.

1. Utiliser la méthode de dichotomie pour trouver une racine de *f* avec une réception de l’ordre de.
2. En choisissant , utiliser la méthode de newton pour trouver une racine de avec une précision de .
3. Utiliser la méthode de sécante pour trouver une racine de *f* avec une réception de l’ordre de.
4. Pour chaque cas, combien de fois a été calculée pour atteindre la solution ?

***Question 3***

On se propose de calculer les zéros de la fonction sur.

1. En choisissant , utiliser la méthode de newton pour trouver une racine de avec une précision de .
2. On pose , utiliser la méthode de sécante pour trouver une racine de *f* avec une précision de l’ordre de.
3. On suppose que chaque phase de construction de la méthode coute 25 USD, Pour chaque méthode évaluer le cout pour le calcul de la racine ?
4. Laquelle de deux méthodes est rentable selon le cout estimé.

***Question 5***

On investit un capital . Le déplacement à un taux de 5% par année et des frais de gestion fixes de 50 USD américain qui sont prélevés chaque année.

1. Décrire la suite récurrente qui décrit l’évolution du déplacement.
2. Donner les point fixes du système et indiquer s’ils sont attractifs ou répulsifs.
3. Etudier l’évolution du capital au fils des années selon la valeur de

***Question 6***

Soit l’équation non linéaire ci – contre :

On demande :

1. De localiser ses zéros à  ?
2. D’estimer ses zéros en utilisant la méthode de NEWTON ?
3. D’estimer l’un des zéros en utilisant la méthode LAGRANGE ?

***Question 8***

On définit la méthode du point fixe suivante

On suppose que cette suite admet une limite sur notée. Cette méthode est d’ordre si

admet une limite réelle strictement positive lorsque tend vers l’infini.

On suppose que à la fois dérivable sur . En utilisant ***l’erreur de troncature***, montrer que la méthode est d’ordre si est seulement si

et

**CHAPITRE 3. COMPLETEMENT SUR LES EQUATIONS ALGEBRIQUES**

* 1. **Introduction**

En secondaire, nous avons appris comment il était possible de résoudre une équation du second avec des formules et procédures algébriques bien établies.

Pour les équations du 3ème et 4ème degré généralisées, aucune méthode de résolution vous avez été exposé jusqu’à ces jours. Certains chercheurs comme Cardan, Ferrari et Descartes ont mis en place des méthodes algébriques et analytiques pouvant résoudre ces dites équations.

Cependant, il n’existe pas de formule permettant de trouver les racines des polynômes de degré plus grand ou égal à 5. Non pas parce que les mathématiciens ne l’aient pas encore trouvée, mais Abel 1 et par la suite Galois 2 ont démontré que cette formule n’existe pas.

Dans ce chapitre, nous allons exposer quelques méthodes algébriques pour permettre aux étudiants en pré polytechnique à déterminer algébriquement et facilement les zéros des équations du 3ème et 4ème degré, généralisées.

* 1. **Equation de la forme :**

Pour résoudre une équation de ce type, Cardan a mis en place une méthode de résolution exacte analogue de la résolution de l'équation du second degré ax2+bx+c = 0 mais qui fait intervenir des racines carrées et cubiques.

* + 1. **Principe de la méthode de cardan**

On cherche donc les racines de :

L’astuce de Cardan consiste à poser en introduisant deux inconnues au lieu d’une. L’intérêt – non évident *a priori* – est d’avoir un degré de liberté supplémentaire. L’équation devient alors :

C’est ici que se révèle l’intérêt de l’astuce. Comme on a deux inconnues *u et v*, on peut leur imposer une relation supplémentaire, et ici, on va imposer

ce qui tue un des termes et il reste

On constate alors qu’on connait la somme

et le produit

Quand on a la somme *S* et le produit *P* de deux nombres, on sait qu’ils sont racines de l’équation du second degré . Ici, *u*3 et *v*3 sont donc racines de :

On peut donc résoudre l’équation ci-haut et trouver ses racines qui sont à leur tour racine cubique de u et v.

Et la racine carrée du discriminant donne :

Si alors les racines de l’équation sont donc réelles ;

Si alors les racines de l’équation sont donc des complexes conjugués.

On connait donc *u*3 et *v*3, on extrait leurs racines cubiques *u* et *v* et on obtient *x* comme la somme *u* + *v*.

**1er cas : Si**

Dans ces conditions, l’équation admet qu’une racine réelle et les deux autres racines sont des complexes imaginaires.

En effet, soit

Elle peut se décomposer comme étant un produit d’une fonction du premier degré et d’une fonction du second degré étant donné que admet pour racine et sachant que et :

Avec

(à demontrer par les étudiants pendant les exercices)

Les racines de s’obtiennent comme pour une fonction du second degré et valent :

En explicitant,

Et

Au final pour le 1er cas les racines de l’équation sont :

**; et**

Avec les racines cubiques de l’unité c.à.d

et

**Note :** En calcul numérique, c’est plus la racine réelle qui va nous intéresser dans la plupart du temps.

**2ème cas : Si**

On peut remarquer que et sont des complexes conjuguées et au moment où il faudra extraire les racines cubiques et , deux difficultés se présentent. Il s’agit :

* La première est de trouver vraiment ces racines ;
* La seconde tient au fait que donnera trois racines cubiques et de même pour car et sont des complexes. Si on calcule toutes les sommes possibles de ces racines, on va trouver 9 valeurs pour x, ce qui est trop pour une équation de degré 3. En fait, il faut se souvenir ici qu’on a imposé la relation

, de sorte que si on effectue l’un des trois choix possibles pour u, l’autre valeur v est bien déterminée, donc aussi .

Puisque que et sont des complexes conjuguées, on peut résoudre le problème de la manière suivante :

Si est la première racine cubique de , les autres s’obtiennent comme suit :

et où est la racine cubique de 1 :

Et puis que , on peut démontrer que et sont conjuguées (à demontrer par les étudiants pendant les exercices) dans ce cas : , et .

Où est la partie réelle de

Dans ce condition, l’équation admet trois racines réelles.

* + 1. **Marche à suivre**

**Etape 1 : Poser**

* On pose avec et
* L’équation dont les racines sont

**Etape 2 : calcul du discriminant**

**Etape 3 : calcul de et**

**Si**

**Si**

Si est la première racine cubique de , et où est la racine cubique de 1 :

, et .

**Etape 4 : calcul de**

**Si**

; et

Avec les racines cubiques de l’unité c.à.d

et

**Si**

Où est la partie réelle de

**Exemple 1**

Résoudre l’équation par la méthode de Cardan

**Résolution**

On pose avec et sachant que , et L’équation dont les racines sont est alors . Le discriminant vaut

L’équation admet donc une racine réelle et deux racines imaginaires.

La solution réelle est :

Les racines imaginaires sont :

D’où

**Exemple 2**

Résoudre l’équation par la méthode de Cardan. Vérifier que « 1 » est belle et bien la racine réelle de ladite équation ?

**Résolution**

On pose avec et sachant que , et L’équation dont les racines sont est alors . Le discriminant vaut

L’équation admet donc une racine réelle et deux racines imaginaires.

La solution réelle est :

Belle formule, derrière laquelle se cache la solution évidente de l’équation, à savoir «  »

( et à démontrer pendant les séances des travaux pratiques par les étudiants)

Les racines imaginaires sont :

D’où

**Exemple 3**

Résoudre l’équation par la méthode de Cardan

**Résolution**

On pose avec et sachant que , et L’équation dont les racines sont est alors . Le discriminant vaut

L’équation admet donc une racine réelle et deux racines imaginaires.

La solution réelle est :

On vérifie que l’on a comme le donne aussi la méthode de Newton

Les racines imaginaires sont :

D’où

**Exemple 4**

Résoudre l’équation par la méthode de Cardan

**Résolution**

Considérons donc l’équation , qui admet les racines évidentes -1,2,-3 et appliquons lui la méthode de Cardan.

On pose avec et sachant que , et L’équation dont les racines sont est alors . Le discriminant vaut

L’équation admet donc trois racines réelles

Il faut en extraire les racines cubiques. Comme on l’a dit, ce n’est pas si facile. On trouve que les trois racines cubiques sont :

Pour trouver les valeurs correspondantes de v, on utilise la relation , en notant que est exactement la carré du module des , ce qui montre que les sont leurs conjugués. On a donc :

D’où

* 1. **Equation de la forme :**

Pour une équation ce type de forme, la méthode de Cardan est applicable si et seulement si après avoir fait quelques opérations sur ladite équation de sorte à éliminer le terme en .

En effet,

* Commencer par diviser l’équation par et elle devient
* Poser , nous retrouvons la forme :

Après développement, l’équation devient :

Si on pose :

On trouve une équation du type :

Et on peut résoudre cette équation trouvée comme fait précédemment avec :

,

**Exemple**

Résoudre l’équation :

**Résolution**

Cette équation se ramène à la forme :

On pose

L’équation devient :

et

D’où

**Note :** Pour le cas particulier, les étudiants chercheront la forme qui factorise équation du quatrième degré et ensuite appliquer la méthode de cardan au polynôme du 3ème degré obtenu après décomposition.

* 1. **Equation de la forme :**

Soit l’équation réciproque du 4ème degré de la forme générale :

avec

Pour que l’équation devienneune équation du second degré, on la divise d’abord par ,on a:

Et puis l’on pose

Dans ce cas l’équation devient :

Ressoude l’équation, comme une équation du second degré en et à partir des valeurs de , on trouve les valeurs de .

**Exemple** :

Résoudre l’équation

**Résolution**

Et puis l’on pose

**L’équation devient :**

Avec

Et puis remplacer y par sa valeur posée :

On aura les équations suivantes :

Et

* 1. **Equation de la forme :**

Les deux méthodes disponibles qui seront exposées ici, consistent à résoudre , avec q 0, en factorisant, dans C[X], en un produit de deux facteurs du 2ème degré, ce qui est toujours possible d'un point de vue théorique, car dans C[X], tout polynôme est forcément un produit de 4 polynômes du 1er degré, C étant algébriquement clos.

Un petit mot d'histoire : on aurait proposé à Cardan de résoudre une équation du 4ème degré et n'y arrivant pas il a demandé à Ferrari (son secrétaire) de s'en occuper, et c'est à cette occasion que Ferrari a mis au point la méthode ci-dessous, laquelle serait la méthode de résolution du 4ème degré la plus ancienne.

* + 1. **Méthode de Ferrari**

**Etape 1**

Nous commençons par poser

On considère

**Etape 2**

La deuxième étape consiste à calculer le discriminant (delta) de en fonction de , noté par .

Le discriminant (delta) de en fonction de est donnée par la relation suivante :

On choisit alors y de façon à annuler ce discriminant et on obtient une équation du 3ième degré, qu’on appellera ***équation de Ferrari*** :

**Etape 3**

Consiste à résoudre l’équation de Ferrari avec la méthode Cardan ou une méthode au choix pour trouver la solution.

**Etape 4**

La solution l’équation de Ferrari étant trouvé, on peut récrire de la première étape (en remplaçant la valeur de trouvée dans l’équation

Dans ce cas l’équation peut s’écrire comme suit :

Résoudre revient tout simplement à résoudre deux équations du second degré

**Exemple**

Résoudre l’équation suivant par la méthode de Ferrari

**Résolution**

**Etape 1**

**Etape 2**

**Etape 3**

La résolution de l’équation de Ferrari , nous donne comme solution

**Etape 4**

Pour

Et,

D'où les quatre solutions sont :

* + 1. **Méthode de Descartes**

On considère l’équation , avec complexes , l'équationà résoudre.

La méthode de Descartes utilise la propriété suivante : Le produit de deux polynômes unitaires du second degré donne un polynôme unitaire du quatrième degré sans monôme de degré 3 si et seulement si les coefficients de degré 1 des deux polynômes du second degré sont opposés.

En effet soit et deux polynômes unitaires du second degré tels que :

Et

Le produit est sans monôme de degré 3 si et seulement si c’est – à – dire

**Etape 1 : Décomposer**

Poser

Ecrire sous forme des produits des polynômes du second degré tel que ;

**Etape 2 : Recherche l’équation de Descartes**

L’équation de Descartes a été établi de sorte que les deux expressions de soientt égales.

Il faut donc que :

Si seulement si :

On résout donc le système suivant :

En posant

On obtient

C’est l’équation de Descartes

où solution de l’équation de Descartes

**Etape 3 : Résoudre**

ssi

**Exemple**

Résoudre dans par la méthode de Descartes, l’équation suivante :

**Résolution**

**Etape 1**

L’équation de Descartes est :

La solution de (D) est

**Etape 2**

ssi

Donc

**Etape 3**

ou

Les solutions sont :

* 1. **Exercices**

***Question 1***

Résoudre les équations suivantes en appliquant la méthode de Ferrari :



***Question 2***

Résoudre les équations suivantes en appliquant la méthode de Descartes :



***Question3***

Résoudre les équations suivantes en appliquant la méthode de Cardan :

***Question 4***

Montrer l’équation admet une unique racine réelle si et seulement si on a .

***Question 5***

Montrer que si admet une unique racine tels que , et , alors les deux autres racines sont des complexes et valent : et avec et .

***Question 6***

A quelle condition admet trois racines réelles dont une est distincte de deux autres égales. Et donner les expressions de ces racines en fonction de p et q.

***Question 7***

Expliquez comment il est possible de résoudre l’équation par:

1. La méthode de Ferrari
2. La méthode de Descartes

**CHAPITRE 4. INTEGRATION NUMERIQUES**

Dans la plupart des problèmes, nous nous sommes confrontés à calculer une intégrale définie dont on ne peut pas évaluer par des méthodes algébriques pour les solutionner. Dans ces conditions, il sera donc que d’estimer la valeur de l’intégrale par une approximation proche de la valeur exacte. Pour ce faire, il faudra donc faire recours à des méthodes numériques du calcul d’intégrale.

Le but de ce chapitre est de calculer numériquement des intégrales définies ou indéfinies par des méthodes numériques.

Soit , une fonction continue donnée. On désire approcher numériquement la quantité .

Ces méthodes se basent sur l’approximation de la fonction dans l’intervalle par polynôme.

* 1. **Expression approximative d’une fonction**

Plusieurs auteurs montrent comment il est possible de trouver une expression polynomiale qui approxime en induisant une erreur .

* + 1. **Approximation selon Taylor**

Selon Taylor,

* + 1. **Approximation par interpolation polynomiale**

Selon la notion d’interpolation polynomiale c’est – à – dire approximer par un polynôme de degré inférieur ou égale à n qui passe n points de .

Si , c’est – à – dire qu’on approxime par un polynôme constant, dans ce cas

C’est le principe utiliser dans la méthode des rectangles. C’est-à-dire qu’on assimile la fonction à une droite parallèle à l’axe des x.

Si , c’est – à – dire qu’on approxime par un polynôme du premier degré (une droite oblique), dans ce cas

C’est le principe utiliser dans la méthode des trapèzes. C’est-à-dire qu’on assimile la fonction à une droite oblique.

Si , c’est – à – dire qu’on approxime par un polynôme du deuxième degré (une parabole), dans ce cas

C’est le principe utiliser dans la méthode de Simpson. C’est-à-dire qu’on assimile la fonction à une parabole.

**Exemple 1** : Déterminer le polynôme d’interpolation de degré 1 qui approxime une fonction qui passe par les points suivants :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 0 | 2 |
|  | 1 | 5 |

On a :

**Exemple 2** : Déterminer le polynôme d’interpolation de degré 2 qui approxime une fonction qui passe par les points suivants :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  | 1 | 2 | 5 |

On a :

**Exemple 3**: soit la fonction , on peut remarquer que la fonction passe par les points suivants :

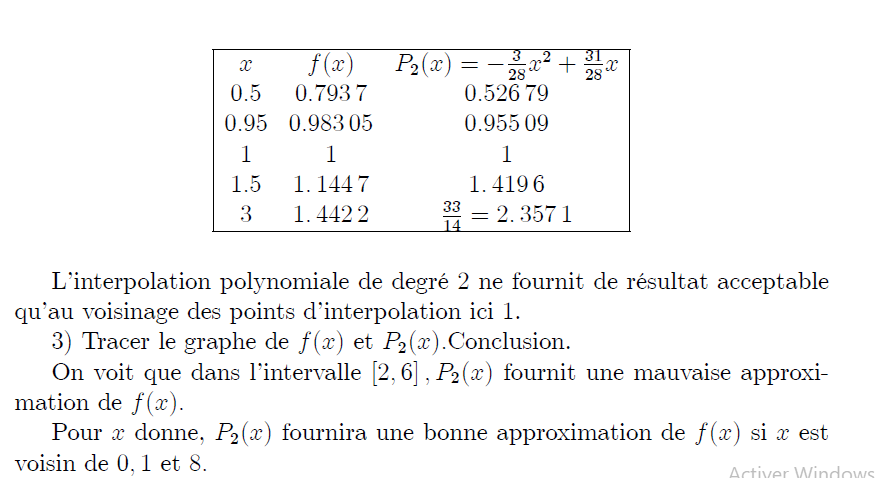
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 8 |
|  | 0 | 1 | 2 |

On vous demande de :

1. Déterminer le polynôme d’interpolation de degré 2 qui approxime la fonction qui passe par les points ci-hauts mentionnés dans le tableau ;
2. Calculer trouvée et pour , quelle conclusion tirez-vous ?
3. Tracer trouvée et , quelle conclusion tirez-vous ?

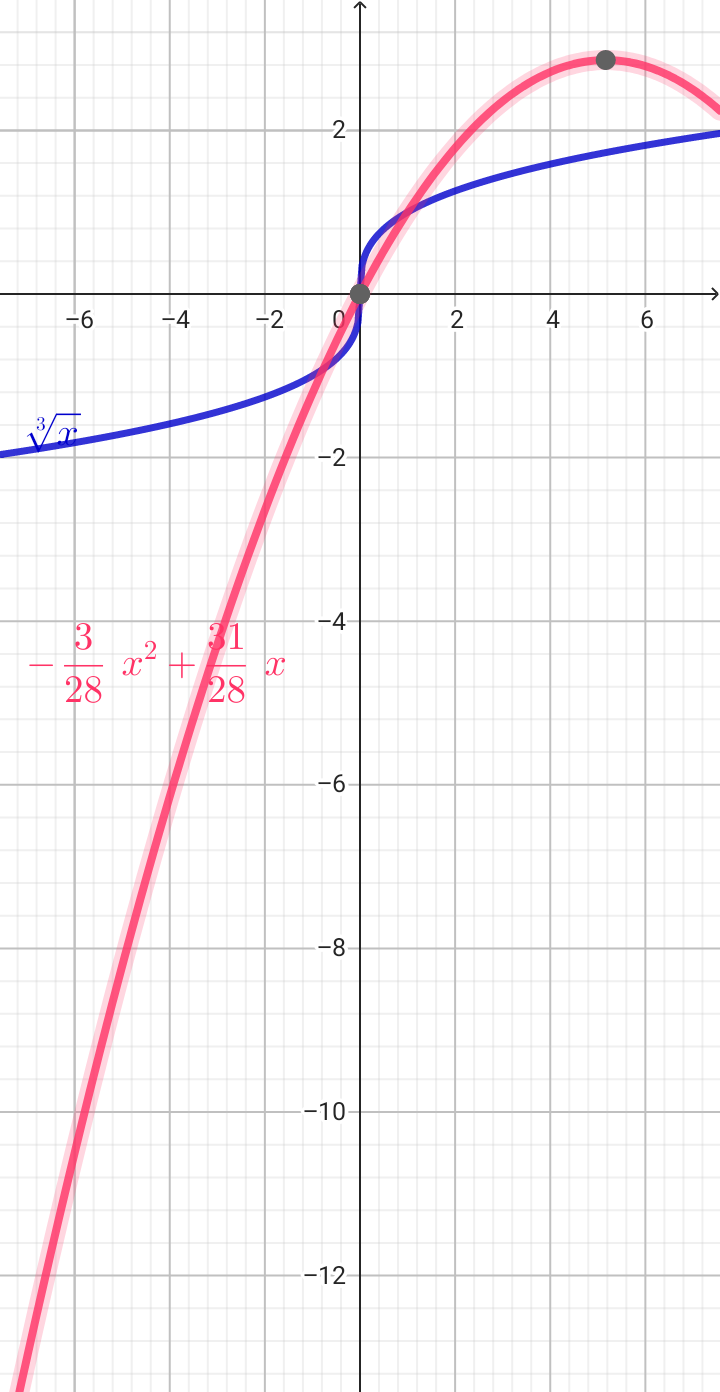
**Résolution :**

1. **Calcul de**
2. **Calcul de et pour**



L’interpolation polynomiale de degré 2 ne fournit de résultat acceptable qu’au voisinage des points d’interpolation (ici 1).

1. **Tracer de et**



On voit que dans l’intervalle , fournit une mauvaise approximation de . Pour un x donné, fournira une bonne approximation de que si est voisin de 0, 1 et 8

**Notes**

* En réalité pour avoir une bonne approximation, il faut choisir d’approximer la fonction avec un polynôme qui a un plus grand degré (par 4, 5 ou 6).
* En générale,
  1. **Formules de Newton-Cotes**

Soit f(x) une fonction en x donnée, on peut estimer la valeur de cette intégrale dans l’intervalle

. On note celle-ci comme suit

Et cette intégrale représente géométriquement la surface compris entre l’axe des x, la courbe f et les deux abscisses et comme le montre la figure ci-dessous :

a

b

**I(f)**

La difficulté rencontrée c’est qu’en pratique, on ne connait pas forcement l'expression symbolique de f et de plus pour des fonctions connues, la plupart d’elles n'admettent pas des primitives pouvant s’exprimer à l'aide de fonctions élémentaires.

Pour résoudre le problème, on peut essayer de trouver une expression qui approxime la fonction. On pourra procéder comme ci – dessus pour approximer une fonction.

* + 1. **Méthode des rectangles**

La méthode des rectangles consiste à approximer la fonction au polynôme qui passe par c’est-à-dire à un polynôme constant qui vaut dans l’intervalle comme l’indique la figure ci-après. Dans ce cas l’approximation de l’intégrale sera donc :

a

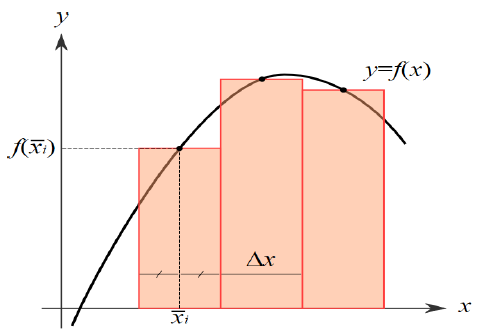
b

**I(f)**

L’interprétation graphique consiste donc à remplacer par l’aire du rectangle de base et de hauteur . On peut remarquer que ce remplace induit une erreur de la valeur de la surface réelle (intégrale ). Cette erreur vaut :

Ici a et b représente les extrémités de l’intervalle choisi et , pris généralement comme milieu de .

Pour réduire cette erreur et pour une bonne approximation de la fonction, nous allons diviser l’intervalle en plusieurs petits intervalles et puis appliquer la même procédure. Si l’on divise l’intervalle par n petits intervalles , , , , …, , on a :



Si

Alors

En résumé, la méthode des rectangles consiste à diviser l’intervalle [a, b] donné en ***n*** parties identiques dont la longueur est et les arcs sont remplacés par des cordes où et avec , et . Ensuite utiliser la formule suivante :

L’erreur commise sur la valeur exacte vaut :

Si

* + 1. **Méthode des Trapèzes**

La méthode des trapèzes consiste à approximer la fonction au polynôme qui passe par et c’est-à-dire à un polynôme de degré 1 qui vaut dans l’intervalle comme l’indique la figure ci-après. Dans ce cas l’approximation de l’intégrale sera donc :

L’interprétation graphique consiste donc à remplacer par l’aire du trapèze de base inférieur et des hauteurs et . On peut remarquer que ce remplace induit une erreur de la valeur de la surface réelle (intégrale ). Cette erreur vaut :

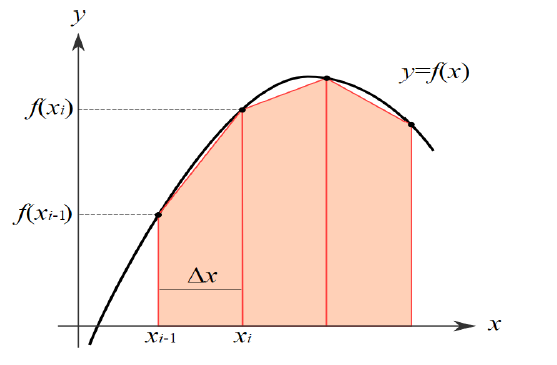
a

b

**I(f)**

Ici a et b représente les extrémités de l’intervalle choisi et , pris généralement comme milieu de .

Pour réduire cette erreur et pour une bonne approximation de la fonction, nous allons diviser l’intervalle en plusieurs petits intervalles et puis appliquer la même procédure. Si l’on divise l’intervalle par n petits intervalles , , , , …, , on a :



Si

Alors

En résumé, la méthode des trapèzes consiste à diviser l’intervalle [a, b] donné en ***n*** parties identiques dont la longueur est et les arcs sont remplacés par des cordes où et avec , et . Ensuite utiliser la formule suivante :

L’erreur commise sur la valeur exacte vaut :

Si

**Exemple**

Evaluer l’intégrale suivante par la méthode des trapèzes pour  :

En déduire l’erreur commise

**Résolution**

et

= , = et =

On a le tableau suivant :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 0,5 | 1 |
| f(x) | 1 | 0,666 | 0,5 |

En remplaçant ces valeurs dans la formule, on a :

* + 1. **Méthode de Simpson ou formule des paraboles**

La méthode des paraboles consiste à approximer la fonction au polynôme qui passe par , et c’est-à-dire à un polynôme de degré 2 qui vaut dans l’intervalle comme l’indique la figure ci-après.

Avec

Dans ce cas l’approximation de l’intégrale sera donc :

L’erreur vaut :

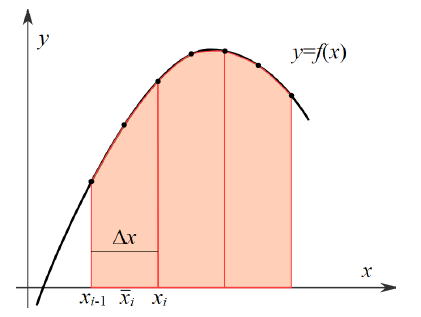
a

b

**I(f)**

Ici a et b représente les extrémités de l’intervalle choisi et , pris généralement comme milieu de .

Pour réduire cette erreur et pour une bonne approximation de la fonction, nous allons diviser l’intervalle en plusieurs petits intervalles et puis appliquer la même procédure. Si l’on divise l’intervalle par n petits intervalles , , , , …, , on a :



Si

Alors

En résumé, dans cette formule, Simpson divise l’intervalle donné en n parties égales dont la longueur est et les arcs sont remplacés par des cordes où et avec , et . Ensuite utiliser la formule suivante :

L’erreur commise sur la valeur exacte vaut :

Si

**Exemple**

Evaluer l’intégrale suivante par la méthode des paraboles pour  :

En déduire l’erreur commise

**Résolution**

et

On a le tableau suivant :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | 1 | 3 | 5 |
| f(x) |  |  |  |

* 1. **Intégrales impropres**

Soit une fonction discontinue en point d’un intervalle ou dans une partie de l’intervalle donné, le calcul de l’aire déterminée par la courbe dans le domaine de discontinuité est dite : calcul d’intégrale impropre.

* + 1. **Si la fonction est discontinue en un point c d’un intervalle**

* + 1. **En cas d’un intervalle donné**
  1. **Exercices**

***Question 1***

A partir des données expérimentales

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 1,01 | 1,02 |
|  | 1,27 | 1,32 | 1,38 |

1. Calculer les approximations de . Donner par les formules centrées

Et

1. Si les données du tableau sont précises à quelle sera l’erreur commise sur les trois quantitées calculées ?

***Question 2***

Soit l’intégrale

1. Calculer la valeur exacte de I.
2. En utilisant la méthode des trapèzes généralisée et la méthode de Simpson généralisée pour :
3. Calculer I.
4. Majorer l’erreur
5. Evaluer l’erreur
6. Donner la valeur du pas L et le nombre de subdivision de l’intervalle pour que l’erreur obtenue par la méthode généralisée des trapèzes (faire aussi avec Simpson) soit plus petite que

***Question 3***

On lance une fusée verticalement du sol et l’on mesure pendant les premiers 80 secondes l’accélération

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |
|  | 30 | 31,63 | 33,44 | 35,47 | 37,75 | 40,33 | 43,29 | 46,70 | 50,67 |

Calculer V de la fusée à l’instant , par la méthode des Trapèzes et Simpson.

***Question 4***

1. Pour par la méthode de Trapèze
2. Par la méthode Simpson

***Question 5***

Soit la fonction , on peut remarquer que la fonction passe par les points suivants :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  | 0 | 1 | 8 |

On vous demande de :

1. Déterminer le polynôme d’interpolation de degré 2 qui approxime la fonction qui passe par les points ci-hauts mentionnés dans le tableau ;
2. Calculer trouvée et pour , quelle conclusion tirez-vous ?
3. Tracer trouvée et dans , quelle conclusion tirez-vous ?
4. Déterminer l’erreur commise si on remplace dans l’intervalle , par

***Question 6***

Le tableau suivant donne les valeurs d’une fonction en trois points.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

1. Déterminer une valeur approchée de en , par interpolation en , puis par interpolation , .
2. Donner dans les deux cas un majorant de l’erreur en fonction des dérivées de .
3. On constate que les eux fonctions et vérifient toutes deux le tableau de valeurs ci-dessus. Calculer et . Expliquer et vérifier la cohérence avec les résultats numériques de a) et b).

***Question 7***

Le tableau suivant donne la viscosité (mesurée) de l’éthylène en fonction de la température (en degrés Fahrenheit) :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 50 | 100 | 150 | 200 |
|  | 242 | 82,1 | 30,5 | 12,6 | 5,57 |

Proposer une loi décrivant en fonction de

**CHAPITRE 5. LOGARITHMES ET PROGRESSIONS**

* 1. **Logarithme**
     1. **Introduction**

Pour représenter graphiquement des nombres qui varient sur plusieurs ordres de grandeur (par exemple de 1 à 1000), on ne peut pas utiliser l’échelle habituelle où les graduations sont proportionnelles à des nombres. En effet, avec 1 mm sur papier pour représenter la valeur 1, 1 cm représente la valeur 10, 10 cm la valeur 100, et il faudrait une feuille de 1 m pour arriver jusqu’à la valeur 1000.

Pour représenter le « domaine des petites dimensions » qui va de 10−10 à 10−3, il faudrait, avec 1 mm sur le papier correspondant à une taille de 10−10*m*, une feuille de 10 *km* !

Pour pallier à cela, on adopte alors une échelle telle qu’en passant d’une graduation à la suivante, la valeur représentée est multipliée par un même facteur (ici =10). Cette échelle est dite logarithmique car les distances portées sur l’axe sont proportionnelles aux logarithmes des nombres représentés. ***On peut aussi comprendre la notion de logarithmes, se servant de principe et propriétés des puissances (à revoir par les étudiants).***

* + 1. **Logarithme décimal**
       1. **Définition**

Les mathématiciens savent définir même si l’exposant *x* n’est pas un rationnel.

Nous admettons ceci : tout nombre réel donné peut s’écrire sous la forme d’une puissance de *b* (et *b*≠1). En particulier : tout réel *a* > 0 peut s’écrire sous la forme 10*x*. Le réel *x* est appelé logarithme de base 10 de *a*, ou encore logarithme décimal de *a*, noté ou encore .

**Exemple :**

Le « log de a est l’exposant de la puissance de 10 qui donne a ».

Le log est utilisé en chimie pour définir le pH d’un milieu ( ).

**Remarque**

Le logarithme d’un nombre négatif ou nul n’existe par car est toujours

* + - 1. **Propriétés**

Elles découlent de la définition *a* =10*x*  *x* =

* **Logarithmes particuliers**
* **Logarithme d’un produit**

Connaissant en déduire

Donc le log d’un produit est égal à la somme des logarithmes.

* **Logarithme de l’inverse**

Connaissant, en déduire.

Le log de l’inverse est égal à l’opposé du log.

* **Logarithme d’un quotient**

Connaissant en déduire

* **Logarithme d’une puissance**

Connaissant, en déduire.

* + 1. **Logarithme népérien** 
       1. **Définition**

*a* étant un réel positif peut s’écrire sous la forme d’une puissance de *e*, le nombre d’Euler.Autrement dit, il existe un réel unique x tel que

Le nombre d’Euler est donné par :

*x* est appelé logarithme de base *e* de *a*, ou encore logarithme népérien de *a*, on note dans ce cas ou encore.

On dit couramment : « le **ln** de *a* est l’exposant de la puissance de *e* qui donne *a* ». Le logarithme népérien est utilisé car la dérivée de la fonction y= ln *x* est particulièrement simple (hors programme).

* + - 1. **Propriétés**

Elles découlent de

* + - 1. **Relation entre**

* + - 1. **Formules du changement de base**

Les calculatrices scientifiques permettent d’obtenir indirectement une approximation décimale du d’un nombre décimal, en utilisant la touche log ou la touche ln.

Dans la pratique, on retiendra le raisonnement suivant :

Pour extraire *x* de l’égalité = *a,* on prend le logarithme des deux membres (le log ou le ln).

* + 1. **Equation logarithmique et exponentielle**
       1. **Définition**

Ces équations sont caractérisées par la présence de l’inconnue soit à l’exposant soit sous l’expression logarithmique.

**Exemples :**

1. 2)
   * + 1. **Résolution des équations exponentielles et des équations logarithmiques**

La résolution de ces équations exige la connaissance des définitions des puissances et logarithmiques ainsi que leurs propriétés.

**Exemples :**

On sait que, cette équation s’écrit :

On a : ce qui implique que x =0 ou x = 4

1. , sachant que, l’équation devient :

Selon les propriétés des logarithmes, on aura : x +3 = 1 ; x = 2

**Note :**

Retenir que les racines vérifiant l’existence des logarithmes car les logarithmes car les logarithmes des nombres négatifs n’existent dans.

* 1. **Progression**
     1. **Progression arithmétique**
        1. **Définition**

On appelle progression arithmétique (P.A.) une suite de nombres tels que chacun est égal au précédent augmenté d'un nombre constant appelé **raison**.

Deux exemples : -5, -1, 3, 7, 11, 15,… (raison = 4)

35, 32, 29, 26, 23, …. (raison = -3)

* + - 1. **Le calcul d’un terme connaissant son rang (**

Soit le premier terme et r la raison. Par définition, on a :

On a donc

Il ne faut pas confondre et . En effet, est le rang (ou parfois le nombre d’éléments), est l’élément de rang *n*.

Pour prendre une image, n est le numéro d’un siège de cinéma et est la personne assise dans ce siège. « n » est un nombre entier, mais ne l’est pas forcement.

* + - 1. **Le calcul de la somme de n termes (**

Dans l'anecdote qui a sert d'introduction à ce chapitre, nous avons vu que Gauss a trouvé une formule pour calculer la somme des 100 premiers entiers. Essayons de généraliser. On peut écrire :

Ou

En additionnant ces deux expressions terme à terme, on obtient :

D’où

**Exemple**

Dans un virage d'un stade, le nombre de siège dépend de la rangée. En effet, il y a moins de sièges proches de la pelouse que de sièges au dernier rang.

Au premier rang du virage, on a placé 15 sièges. On ajoute 2 sièges chaque fois que l’on monte d’un rang (il y a donc 17 sièges au deuxième rang, 19 au troisième, etc…).

Combien y a-t-il de sièges à la rangée ?

Si le virage compte 34 rangées, combien y – a – il de sièges dans le virage ?

* + 1. **Progression géométrique** 
       1. **Définition**

On appelle progression géométrique **(PG en sigle)** une suite de nombres tels que chacun est égal au précèdent multiplié par un nombre constant appelé **raison**.

**Exemples**

**27, 9, 3, 1, (raison =)**

**3, -6, 12, -24,… (raison = -2)**

* + - 1. **Calcul d’un terme connaissant son rang (**

Soit le premier terme et la raison. Par définition, on a :

* + - 1. **Le calcul de la somme de n termes**

Le calcul de la somme se fait au moyen des deux relations suivantes :

Et

En retranchant terme par terme la première relation de la deuxième, on obtient :

**Remarques :**

* Trois nombres sont en pressions arithmétique si chacun est moyen arithmétique entre les nombres qui le comprennent. Ainsi A, B et C sont en P.A ssi
* Trois nombres sont en pressions géométrique si chacun est moyen géométrique entre les nombres qui le comprennent. A, B et C en P.G ssi
* Sid’une progression géométrique, alors est donné par la formule suivante :

**Exemple :**

Un curieux nénuphar situé au milieu d'un bel étang s'y trouve tellement bien qu'il ne cesse de grandir : sa taille double chaque jour. Il grandit tellement qu'après 30 jours, il recouvre entièrement la surface de l’étang !

Combien de jours a-t-il mis pour ne recouvrir que la moitié de l'étang ?

Il a fallu 29 jours.

(Si vous avez répondu 15 jours, vous avez confondu progression géométrique et arithmétique…)

Quel pourcentage de l’étang recouvrait-il après 26 jours ?

r =, on cherche

**Travail dirigé :**

On coupe en deux un morceau d’habit de 0.1 mm d’épaisseur. On suppose les morceaux que l’on coupe de nouveau en deux. Quelle épaisseur d’habit obtiendrait-on si on pouvait répéter l’opération au total trente fois.

* 1. **Exercices** 
     1. **Progressions**

***Question 1***

Les 24 élèves d'une classe de Bac Pro décident de participer à une collecte de pièces jaunes.

Ils se partagent en deux groupes de 12 élèves chacun. Pour la collecte, chaque groupe détermine une règle :

|  |  |
| --- | --- |
| **Groupe A** | **Groupe B** |
| Le 1er élève de la liste donne 5 centimes d'euro | Le 1er élève de la liste donne 5 centimes d'euro |
| Le 2ème élève donne 15 centimes d'euro | Le 2ème élève donne 10 centimes d'euro |
| Le 3ème élève donne 25 centimes d'euro | Le 3ème élève donne 20 centimes d'euro |
| etc.… | etc.… |

***Question 2***

**Calculer** la somme ***Sn*** des n premiers termes pour chacune des suites suivantes :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Suite arithmétique** | | | |  | **Suite géométrique** | | |
| ***u1*** | ***k*** | ***r*** |  |  | ***u1*** | ***n*** | ***q*** |  |
| 5 | 20 | 7 | ………… | ………… | 5 | 6 | 7 | ………… |
| 1 | 50 | 2 | ………… | ………… | 2 000 | 6 | 0,8 | ………… |
| 4,725 | 8 | − 102 | ………… | ………… | 500 | 10 | 1,05 | ………… |
| 9,7 | 7 | 7,9 | ………… | ………… | 7,1 | 5 |  | ………… |
| − 21 | 150 | 1,8 | ………… | ………… | − 1,8 | 4 | 3 | ………… |

***Question 3***

On donne les **11** premiers termes d'une suite **arithmétique** :

Calculer la somme des 11 premiers termes.

***Question 4***

On donne les 5 premiers termes d’une suite géométrique de raison q=20 :

u1=3 u2 = 60 u3= 1200

u4= 24000 u5=480 000

1. Calculer la somme des 5 premiers termes
2. Calculer la somme des 5 premiers termes en utilisant le formulaire.

***Question 5***

Calculer la somme des 6 premiers termes d’une suite **géométrique** de premier terme 500 et de raison 0.5.

***Question 6***

Calculer la somme des 28 premiers termes d’une suite **arithmétique** de premier terme 8.2 et de raison -2.8.

***Question 7***

Calculer la somme des 12 premiers termes d’une suite **géométrique** de premier terme 6 et de raison. Arrondir le résultat au centième.

***Question 8***

Monsieur Lejeune désire réaliser l’arbre généalogique de sa famille en indiquant les ascendants directs (le père et la mère de chaque individu). Calculer le nombre de personnes présentes sur l’arbre si l’on remonte à la huitième génération.

***Question 9***

Pour reboiser le massif de l’Esterel, on décide de planter 2000 arbres la 1ère  année, 2500 la 2ème année, 3000 la 3ème année…

Calculer le nombre d’arbres plantés sur le massif après 15 années de reboisement.

* + 1. **Logarithme**

***Question 1***

Démontrer les deux égalités suivantes :

***Question 2***

Résoudre les équations suivantes définies dans

***Question 3***

Resoudre les systemes suivants dans

***Question 4***

Resoudre les equations suivantes :

***Question 5***

Le son se manifeste par des variations de pression de l’air. L’unité de mesure de pression de l’air est Pascal. La pression de l’air s’exerce sur tympan de l’oreille humaine. Pour une pression supérieure ou égale à Pascals s’exerçant sur son tympan. L’oreille humaine perçoit un son dont le niveau se mesure en décibels. On note. Pour une pression de p Pascals s’exerçant sur le tympan, avec, le niveau sonore perçu est égale à

1. Quel est le niveau sonore perçu pour une pression de 2 pascals ?0,2Pascals ? calculer
2. A partir d’un niveau sonore de 120 décibels, on ressent une douleur. Déterminer la pression p correspondant à ce niveau sonore.
3. Montrer que pour tout réel : . On en déduit « le niveau sonore augmente de 20 décibels quand la pression s’exerçant sur le tympan est multipliée par 10 ».
4. Exprimer, pour tout réel, en fonction de et énoncer la propriété du niveau sonore correspondante.
   * 1. **Exercices à domicile**

***Question 1***

Un nommé **Sissa**, l'inventeur du jeu d'échecs, présenta son jeu au Sultan. Enthousiasmé, ce dernier lui proposa de choisir sa récompense. Sissa, d'après la légende, répondit : « Que tes serviteurs mettent un grain de blé sur la première case, deux sur la seconde, quatre sur la troisième, huit sur la quatrième et ainsi de suite en doublant chaque fois le nombre de grains de blé jusqu’aux soixante quatrièmes cases. »

1. Combien de grains de blé aurait-il fallu pour récompenser Sissa selon ses désirs ?
2. En supposant qu'un grain de blé occupe un volume de 1 mm3, quelle serait l'épaisseur de la couche de blé qui recouvrirait une surface équivalente à celle de la Suisse ?

***Question 2***

Une balle de caoutchouc est lâchée d'une hauteur de 2 mètres. Après chaque rebond, elle remonte aux sept dixièmes de la hauteur atteinte après le précédent rebond.

1. Après le 7ème rebond, quelle sera sa hauteur à l'apogée de sa trajectoire ?
2. Quelle longueur de chemin aura-t-elle parcourue quand elle se sera immobilisée sur le sol ?

***Question 3***

Soit une progression arithmétique (P.A.) avec *t*1 = 8 et *t*3 = 18. Calculez *t*10.

***Question 4***

Calculez la somme de tous les multiples de cinq compris entre 101 et 1001.

***Question 5***

La somme des 19 premiers termes d'une progression arithmétique est nulle et le dernier terme 27. Déterminez le premier terme et la raison.

***Question 6***

Démontrez que dans une progression arithmétique on a toujours la relation :

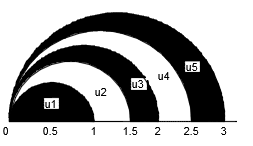
***Question 7***

Insérez huit termes entre 7 et 61 de manière à obtenir une progression arithmétique.

***Question 8***

Parmi ces suites, lesquelles sont arithmétiques ?

et



***Question 9***

Montrer que la suite des aires definies par la figures ci-contre est arithmetique.

***Question 10***

Une suite arithmétique de raison 5 telle que et **n** étant un nombre entier, . Calculer n.

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

[1]. C. Penge Aby, Cous de Calcul Numérique, Unikin-Poly-Prépo, notes inédites, 2021 ;

[2]. L.C Katayi, Cours de Calcul Numérique avec exercices résolus, Unikin-Poly-Prépo, 2012

[3]. R. Kapuku, Cours de Calcul Numérique, Unikin-Poly-Prépo, 2014

[4]. A. Boutayeb & M. Derouich, Analyse Numérique, Université Mohamed 1er, 2011

[5]. Olivier Ngenier, Année 2012, Incertitude et analyse dimensionnelle

[6]. Versailles, Année 2007, Cours sur la numération, Lycée Jules Ferry

[7]. Karim Bourouni, Janvier 2011, Exercices de mesures et instrumentation avec quelques corriges, Ecole National d‘ingénieur de Tunis.

[8]. Ahmed fiazi, Mécanique du point matériel.