1　3次元 DLT 法

DLT 法（Direct Linear Transformation method）は，カメラを設置・固定したうえで，距離（座標）が分かるポイント（較正点）を入れて撮影した後，それと同一条件で競技場面を撮影することで，較正点と測定点の位置関係から 3 次元空間の位置を推定することができる．複数カメラのピクセル座標 u, v を測定し，そこから 3 次元実座標 x, y, z が求められる．実空間座標 x, y, z と撮影された映像上のピクセル座標 u, v の関係式は次のように表される．

$$\begin{aligned} u &= \frac{\ell_1 x + \ell_2 y + \ell_3 z + \ell_4}{\ell_9 x + \ell_{10} y + \ell_{11} z + 1} \\ v &= \frac{\ell_5 x + \ell_6 y + \ell_7 z + \ell_8}{\ell_9 x + \ell_{10} y + \ell_{11} z + 1} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \ell_1 x + \ell_2 y + \ell_3 z + \ell_4 - \ell_9 xu - \ell_{10} yu - \ell_{11} zu &= u \\ \ell_5 x + \ell_6 y + \ell_7 z + \ell_8 - \ell_9 xv - \ell_{10} yv - \ell_{11} zv &= v \end{aligned} \tag{2}$$

ここで ℓ_1, ∼, ℓ_{11} は DLT 係数（Direct Liner Transformation Parameters) と呼ばれるものである．この式は 11 個の未知数に対する連立 1 次方程式とみなすことができる．較正点 1 個に対して方程式は u, v の 2 組得られるので，較正点 6 個以上の実空間および撮影された映像上のピクセル座標が分かれば，12 組以上の連立方程式が得られ，これを解くことで DLT 係数が求められる．i 個目のピクセル座標を u_i, v_i，実空間座標を x_i, y_i とするとし，較正点が n 個だとすると，下記の方程式が得られる．

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_1x_1 & -u_1y_1 & -u_1z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 & -v_1x_1 & -v_1y_1 & -v_1z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i & y_i & z_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_ix_i & -u_iy_i & -u_iz_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_i & y_i & z_i & 1 & -v_ix_i & -v_iy_i & -v_iz_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_nz_n & -u_ny_n & -u_nz_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & z_n & 1 & -v_nx_n & -v_ny_n & -v_nz_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 \\ \ell_5 \\ \ell_6 \\ \ell_7 \\ \ell_8 \\ \ell_9 \\ \ell_{10} \\ \ell_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_i \\ v_i \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

式 (3) を行列表記にすると，

$$[\mathbf{Q}][\boldsymbol{L}] = [\mathbf{U}] \tag{4}$$

$[\mathbf{Q}]$ は，$n \times 11$ 行列なので，このままでは解けない．したがって，これに左から転置行列をかけて正規方程式を作る．

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{Q}]^T[\mathbf{Q}][\boldsymbol{L}] &= [\mathbf{Q}]^T[\mathbf{U}] \\
[\mathbf{Q}]^T[\mathbf{Q}] = [\boldsymbol{A}],\ [\mathbf{Q}]^T[\mathbf{U}] &= [\boldsymbol{B}] \\
[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{L}] &= [\boldsymbol{B}]
\end{aligned} \tag{5}
$$

$[\boldsymbol{A}]$ は 11×11 行列，$[\boldsymbol{B}]$ は，11×1 となり，未知数が 11 個の方程式となる．これを解くことで，$\ell_1, \sim, \ell_{11}$ が得られる．

また，式 (3) を x, y, z に関して整理すれば次のようになる．

$$
\begin{aligned}
(\ell_1 - \ell_9 u)x + (\ell_2 - \ell_{10} u)y + (\ell_3 - \ell_{11} u)z &= u - \ell_4 \\
(\ell_5 - \ell_9 v)x + (\ell_6 - \ell_{10} v)y + (\ell_7 - \ell_{11} v)z &= v - \ell_8
\end{aligned} \tag{6}
$$

上式は未知数が x, y, z の 3 個になり，2 組の式では解けない．それゆえ，カメラ 2 台以上を用いる必要がある．n 台のカメラで撮影するとして，i 番目のカメラのピクセル座標を $u^{(i)}, v^{(i)}$，DLT 係数を $\ell_1^{(i)} \sim \ell_{11}^{(i)}$ とすると，下記の $2n$ 組の方程式が得られる．

$$
\begin{bmatrix}
\ell_1^{(1)} - \ell_9^{(1)} u^{(1)} & \ell_2^{(1)} - \ell_{10}^{(1)} u^{(1)} & \ell_3^{(1)} - \ell_{11}^{(1)} u^{(1)} \\
\ell_5^{(1)} - \ell_9^{(1)} v^{(1)} & \ell_6^{(1)} - \ell_{10}^{(1)} v^{(1)} & \ell_7^{(1)} - \ell_{11}^{(1)} v^{(1)} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\ell_1^{(i)} - \ell_9^{(i)} u^{(i)} & \ell_2^{(i)} - \ell_{10}^{(i)} u^{(i)} & \ell_3^{(i)} - \ell_{11}^{(i)} u^{(i)} \\
\ell_5^{(i)} - \ell_9^{(i)} v^{(i)} & \ell_6^{(i)} - \ell_{10}^{(i)} v^{(i)} & \ell_7^{(i)} - \ell_{11}^{(i)} v^{(i)} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\ell_1^{(n)} - \ell_9^{(n)} u^{(n)} & \ell_2^{(n)} - \ell_{10}^{(n)} u^{(n)} & \ell_3^{(n)} - \ell_{11}^{(n)} u^{(n)} \\
\ell_5^{(n)} - \ell_9^{(n)} v^{(n)} & \ell_6^{(n)} - \ell_{10}^{(n)} v^{(n)} & \ell_7^{(n)} - \ell_{11}^{(n)} v^{(n)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
u^{(1)} - \ell_4^{(1)} \\
v^{(1)} - \ell_8^{(1)} \\
\vdots \\
u^{(i)} - \ell_4^{(i)} \\
v^{(i)} - \ell_8^{(i)} \\
\vdots \\
u^{(n)} - \ell_4^{(n)} \\
v^{(n)} - \ell_8^{(n)}
\end{bmatrix} \tag{7}
$$

式 (7) を行列表記にすると，

$$
[\mathbf{K}][\boldsymbol{X}] = [\mathbf{R}] \tag{8}
$$

$[\mathbf{K}]$ は，$n \times 3$ 行列なので，このままでは解けない．したがって，これに左から転置行列をかけて正規方程式を作る．

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{K}]^T[\mathbf{K}][\boldsymbol{X}] &= [\mathbf{K}]^T[\mathbf{R}] \\
[\mathbf{K}]^T[\mathbf{K}] = [\boldsymbol{A}],\ [\mathbf{K}]^T[\mathbf{R}] &= [\boldsymbol{B}] \\
[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{X}] &= [\boldsymbol{B}]
\end{aligned} \tag{9}
$$

$[\boldsymbol{A}]$ は 3×3 行列，$[\boldsymbol{B}]$ は，3×1 となり，未知数が 3 個の方程式となる．これを説くことで，実空間座標 x, y, z を求めることが出来る．

2　2次元 DLT 法

DLT 法（Direct Linear Transformation method）は，カメラを設置・固定したうえで，距離（座標）が分かるポイント（較正点）を入れて撮影した後，それと同一条件で競技場面を撮影することで，3 次元と同様に，較正点と選手の位置関係から 2 次元平面上の選手の位置を推定することができる．1 台のカメラのピクセル座標 u, v を測定し，そこから三次元実座標 x, y が求められる．2 次元 DLT 法における実空間座標 x, y と撮影された映像上のピクセル座標 u, v の関係式は次のように表される．

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{\ell_1 x + \ell_2 y + \ell_3}{\ell_7 x + \ell_8 y + 1} \\
v &= \frac{\ell_4 x + \ell_5 y + \ell_6}{\ell_7 x + \ell_8 y + 1}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
\ell_1 x + \ell_2 y + \ell_3 - \ell_7 x u - \ell_8 y u &= u \\
\ell_4 x + \ell_5 y + \ell_6 - \ell_7 x v - \ell_8 y v &= v
\end{aligned}
\tag{11}
$$

ここで ℓ_1, ∼, ℓ_8 は DLT 係数（Direct Liner Transformation Parameters) と呼ばれるものである．この式は 8 個の未知数に対する連立 1 次方程式とみなすことができる．較正点 1 個に対して方程式は u, v の 2 組得られるので，較正点 4 個の実空間および撮影された映像上のピクセル座標が分かれば，8 組の連立方程式が得られ，これを解くことで DLT 係数が求められる．i 個目のピクセル座標を u_i, v_i，実空間座標を x_i, y_i とするとし，較正点が n 個だとすると，下記の方程式が得られる．

$$
\begin{bmatrix}
x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1 x_1 & -u_1 y_1 \\
0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -v_1 x_1 & -v_1 y_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_n x_n & -u_n y_n \\
0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 & -v_n x_n & -v_n y_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 \\ \ell_5 \\ \ell_6 \\ \ell_7 \\ \ell_8
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n
\end{bmatrix}
\tag{12}
$$

式 (12) を行列表記にすると，

$$
[\mathbf{Q}][\boldsymbol{L}] = [\mathbf{U}] \tag{13}
$$

$[\mathbf{Q}]$ は，$n \times 8$ 行列なので，このままでは解けない．したがって，これに左から転置行列をかけて正規方程式を作る．

$$
[\mathbf{Q}]^T[\mathbf{Q}][\boldsymbol{L}] = [\mathbf{Q}]^T[\mathbf{U}] \tag{14}
$$

$[\mathbf{Q}]^T[\mathbf{Q}]$ は 8×8 行列，$[\mathbf{Q}]^T[\mathbf{U}]$ は，8×1 となり，未知数が 8 個の方程式となる．これを解くことで，ℓ_1, $\sim$, ℓ_8 が得られる．

また，式 (12) を x, y に関して整理すれば次のようになる．

$$\begin{aligned}(\ell_1-\ell_7 u)x+(\ell_2-\ell_8 u)y &= u-\ell_3 \\ (\ell_4-\ell_7 v)x+(\ell_5-\ell_8 v)y &= v-\ell_6\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix}\ell_1-\ell_7 u & \ell_2-\ell_8 u \\ \ell_4-\ell_7 v & \ell_5-\ell_8 v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u-\ell_3 \\ v-\ell_6\end{bmatrix} \tag{16}$$

既に決定されているパラメータと測定された u, v を上式に代入し，実空間座標 x, y を求めることが出来る．