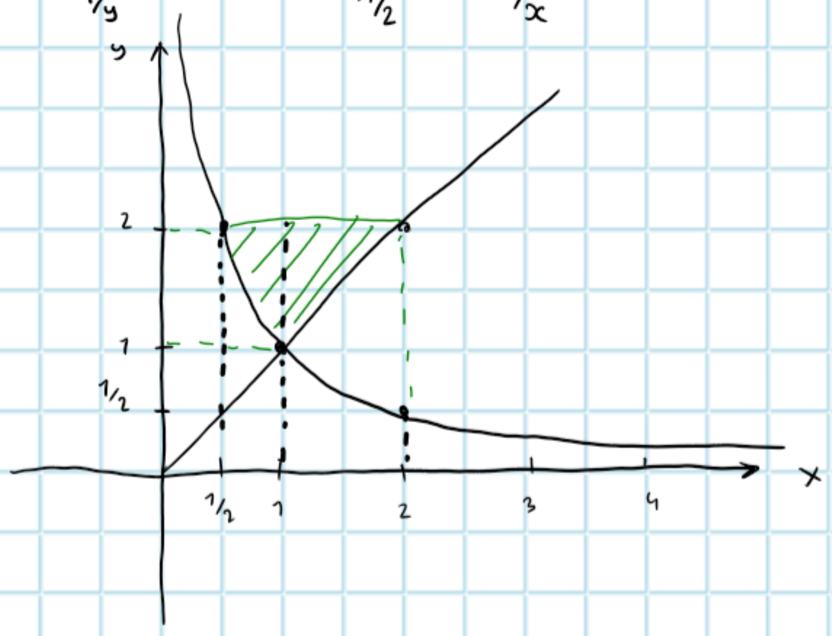
① Изменить порядок интегрирования

$$\int_1^2 dy \int_{1/y}^{y} f(x,y)dx = \int_{1/2}^{1} dx \int_{1/x}^{2} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_x^2 f(x,y)dy$$



③ Вычислить

$$I = \int_L \sqrt{x^2+y^2}\, dl \qquad L := \{ (x,y) : x^2+y^2 = 2y \}$$

Дифференциал кривой: $dl = \sqrt{1+\left(\frac{2-2y}{2x}\right)^2}\, dy =$

$$= \frac{2}{2x} dy = \frac{dy}{\sqrt{2y-y^2}}$$

$$I = 2\int_0^2 \sqrt{2y} \cdot \frac{dy}{\sqrt{2y-y^2}} = 2\sqrt{2}\int_0^2 \frac{dy}{\sqrt{2-y}} =$$

$$= -4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2-y}\,\Big|_0^2 = 8$$

④ $I = \int_L \cos^2 x\, dx + \frac{dy}{y^3}, \quad y = tg x, \quad x \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}]$

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2 x\, dx + \frac{dx \quad \cos^3 x}{\cos^2 x \cdot \sin^3 x} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2 x\, dx + \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = \frac{\pi}{24} + \frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3} - \frac{4}{2}\right]$$

Ответ

$$= \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{12}$$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \cos^2\alpha$

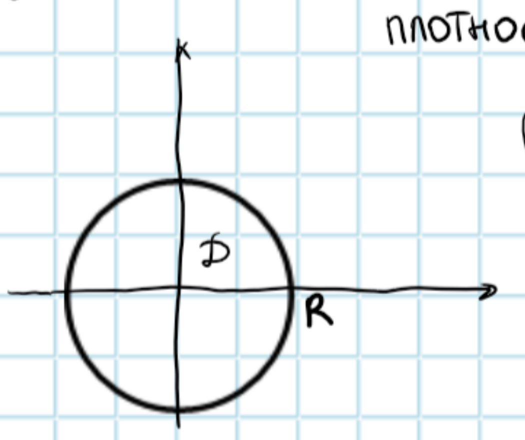
$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3} 1 + \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12}\right] + \frac{1}{4}\sin 2x \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} =$$

$$= \frac{\pi}{24} + \frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right]$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = -\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3} - \frac{4}{2}\right]$$

⑤ Найти массу круглой пластинки радиуса R, плотность которой в каждой точке пропорциональна квадрату ее расстояния от центра пластинки

плотность $= K \cdot (x^2+y^2)$

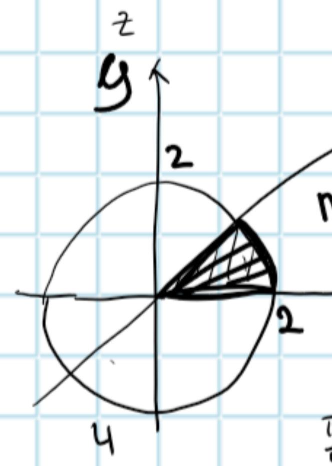


$$\iint_D k(x^2+y^2)\,dxdy = k\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = 2\pi K \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi K R^4}{2}$$

② $$\iiint_V \frac{x^y dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$V: \; z = x^2+y^2, \; y \geq 0, \; y \leq x, \; z = 4$

Перешли в цилиндрическую СК



проекция тела на xOy

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad D = \rho$$

$$\int_0^{\pi/4} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi \int_0^2 \frac{\rho^3\, d\rho}{\rho^3} \int_{\rho^2}^{4} dz = \int_0^{\pi/4} \sin\varphi\, d\sin\varphi \int_0^2 (4-\rho^2)d\rho = \frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/4} \cdot \left(4\rho - \frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{2}{4 \cdot 2} \cdot \left(8 - \frac{8}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{3} = \frac{16}{12}$$