Seminar 2

Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = 2t - 3t^2 + 4t^3$. Найти расстояние, пройденное телом, скорость и ускорение тела через 2 с после начала движения.

$t_1 = 2c.$

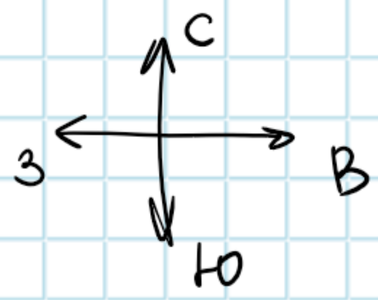
1. $s(t_1) = 2\cdot 2 - 3\cdot 4 + 4\cdot 8 = 24$
2. $v(t) = \frac{ds}{dt} = 2 - 6t + 12t^2$

   $v(t_1) = 2 - 12 + 48 = 38$
3. $a(t) = \frac{dv}{dt} = -6 + 24t$

   $a(t_1) = 48 - 6 = 42$

Сверхзвуковой самолет летит горизонтально. Два микрофона, находящихся на одной вертикали на расстоянии d друг от друга, зарегистрировали приход звука от самолета с запаздыванием по времени, равным τ Найдите величину v скорости самолета. Скорость звука в воздухе c.

Предполагается, что самолет, имеющий скорость v= 550 км/ч, должен лететь по прямой под углом θ= 33,0^o к северу от направления на восток. Однако с севера дует постоянный ветер со скоростью v_1= 120 км/ч. В каком направлении должен лететь самолет?



$v = 550$ км/ч

$\theta = 33{,}0^\circ$

$v_1 = 120$ км/ч

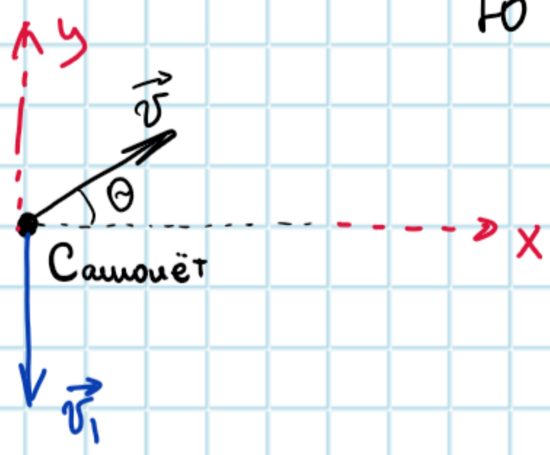
$\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_1$

$\vec{v} = (v\cos\theta, v\sin\theta)$

$\vec{v}_1 = (0, -v_1)$

$\vec{v}_p = \vec{v} - \vec{v}_1 =$

$= (v\cos\theta, v\sin\theta + v_1)$



$(\vec{v}_p, \vec{i}) = 1\cdot|\vec{v}_p|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{v\cos\theta}{\sqrt{(v\cos\theta)^2 + (v\sin\theta + v_1)^2}}$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{v\cos\theta}{\sqrt{(v\cos\theta)^2 + (v\sin\theta + v_1)^2}}\right) \approx 42{,}28^\circ$$

Ответ: под углом 42,28° к северу от направления на В

Автомобиль, движущийся со скоростью v_0= 50 км/ч, врезается в дерево; передняя часть автомобиля деформируется, а тело водителя перемещается на l= 0.7 м и останавливается. Определить среднее ускорение водителя во время этого столкновения.

Задача про двух дворников

M - масса дворника; v - начальная скорость

Работающий дворник:

ЗСИ: $Mv = (M+\Delta m)V_1$ (т.к. он сбрасывает снег перпендикулярно движению, на горизонтальную скорость это не влияет

(за какой-то промежуток dt)

$$V_1 = \frac{M}{(M+\Delta m)} v$$

$$\ldots \quad MV_1 = (M+\Delta m)V_2$$

$$V_2 = \frac{M}{M+\Delta m} V_1 = \left(\frac{M}{M+\Delta m}\right)^2 v \Rightarrow V_n = \left(\frac{M}{M+\Delta m}\right)^n v = \left(\frac{1}{1+\frac{\Delta m}{M}}\right)^n v$$

Ленивый дворник:

ЗСИ (за момент времени dt)

$$Mv = (M+\Delta m)U_1 \Rightarrow U_1 = \frac{M}{M+\Delta m} v$$

$$(M+\Delta m)U_1 = (M+2\Delta m)U_2 \Rightarrow U_2 = \frac{(M+\Delta m)}{M+2\Delta m} U_1 = \frac{Mv}{M+2\Delta m}$$

$$U_n = \frac{Mv}{M+n\cdot\Delta m} = \frac{v}{1+n\cdot\frac{\Delta m}{M}}$$

Т.к. $\left(1+\frac{\Delta m}{M}\right)^n$ растёт быстрее $1+n\cdot\frac{\Delta m}{M}$, работающий дворник будет терять в скорости быстрее

Ответ: Ленивый дворник быстрее

- Упруго сталкиваются 2 одинаковых шара, причем один из них покоится, а другой налетает на него со скоростью 0,5 м/с. После соударения этот шар отлетает под углом 60 градусов к первоначальному направлению движения. В каком направлении полетит второй шар?

Дано: $m_1 = m_2 = m$

$v_1 = 0$ м/с

$v_2 = 0,5$ м/с

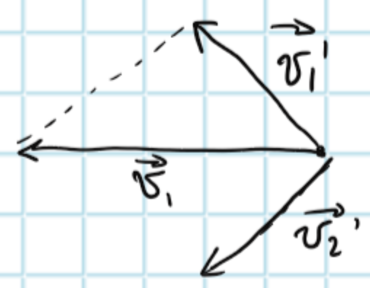
$\alpha = \frac{\pi}{3}$

$\beta - ?$

$$mv_1 = mv_1' \cos\alpha + mv_2' \cos\beta \Rightarrow v_1 = v_1' \cos\alpha + v_2' \cos\beta$$

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{mv_2'^2}{2} \Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$$

$$\beta = -\frac{\pi}{6}$$



В результате полностью неупругого столкновения между двумя телами с одинаковыми массами и одинаковыми скоростями v до столкновения оба тела начинают двигаться со скоростью v/3 . Чему был равен угол между направлениями их скоростей до столкновения?

$2\varphi - ?$

$$2mv\cos\varphi = \frac{mv}{3}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{6}$$

$$2\varphi = 2\arccos\frac{1}{6}$$

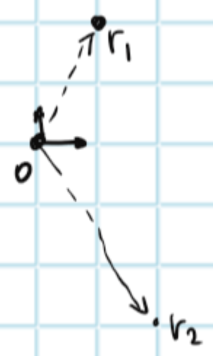
- Определить КПД неупругого удара бойка массой 0,5 т, падающего на сваю массой 120 кг. Полезной считать энергию, пошедшую на углубление сваи.

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2 \qquad \frac{(m_1+m_2) v_2^2}{2} \text{ После}$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{(m_1+m_2)^2 v_2^2}{2 m_1} \text{ До}$$

$$\eta = \frac{m_1}{m_1+m_2} = \frac{500}{620} \approx 80\%$$

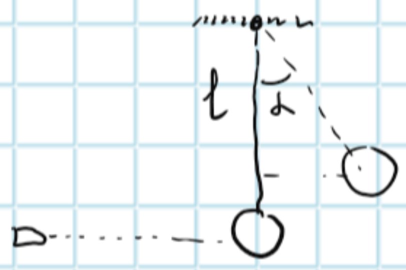
Частица совершила перемещение по некоторой траектории в плоскости xy из точки 1 с радиус-вектором r1 = i + 2j в точку 2 с радиус-вектором r2 = 2i—3j. При этом на нее действовали некоторые силы, одна из которых F = 3i + 4j. Найти работу, которую совершила сила F.



$$\vec{S} = \vec{i} - 5\vec{j}$$

$$A = (F, S) = 3 - 20 = -17 \text{ Дж}$$

Пуля массой 20 г, летящая с горизонтальной скоростью 500 м/сек, попадает в предмет, подвешенный на нити, и застревает в нем. Определить угол α, на который отклонится предмет, если его масса 5 кг и длина нити 5 м.



$m_1 = 0,02$ кг

$m_2 = 5$ кг

$v_1 = 500$ м/с

$v_2 = 0$

$l = 5$ м

$\alpha - ?$

0,959 – X

3,14 – 180

$$X = \frac{180 \cdot 0,959}{3,14}$$

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v' \Rightarrow v' = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{mv'^2}{2} = mgl(1 - \cos\alpha)$$

$$v'^2 = 2gl(1 - \cos\alpha)$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{v'^2}{2gl} = 1 - \frac{m_1^2 v_1^2}{2gl(m_1+m_2)^2} = 1 - \frac{0,0004 \cdot 500 \cdot 500}{(5,02)^2 \cdot 2 \cdot 9,82 \cdot 5} =$$

Конькобежец массой $m1$=60 кг, стоя на льду, бросил ядро массой $m2$=5 кг и вследствие отдачи покатился назад со скоростью $v1$=1 м/с. Определить работу А, совершаемую при бросании ядра.

$$m_2 v' = m_1 v_1 \Rightarrow v' = \frac{m_1 v_1}{m_2}$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + m_2 \cdot \frac{m_1^2 v_1^2}{2 m_2^2} = \frac{m_1 v_1^2}{2}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = 30(1+12) = 390$$

Сила, необходимая для сжатия горизонтальной пружины на величину x, записывается в виде $F(x) = 230x + 2.7x$^3, где x выражается в метрах, а F - в ньютонах. Если пружина была сжата на 2.0 м, то какую скорость она сообщит (после того, как её отпустить) помещенному перед ней шарику массой m=3.0 кг?

$$\int_0^2 F(x) = A = E_k \qquad \frac{m v^2}{2} = E_k$$

$$v = \frac{2}{m}\left[\frac{230 x^2}{2} + \frac{2{,}7 \cdot x^4}{4}\right]$$

Мяч массой $m = 0{,}2$ кг под действием удара приобретает скорость $v = 15$ м/с. Длительность удара $\Delta t = 0{,}02$ с. Определить среднее значение $\langle F \rangle$ силы удара.

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = \langle F \rangle \qquad m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \qquad \frac{\Delta p}{\Delta t} = \langle F \rangle$$

$$F_{сопр} = m\alpha g$$

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{2v^2}{3+s}$$

$$\frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = -\frac{2v^2}{3+s}$$

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{2v}{3+s}$$

$$\int_5^v \frac{dv}{v} = \int_0^s -\frac{2ds}{3+s}$$

$$\ln|v| - \ln 5 = -2\ln|3+s| + 2\ln|3|$$

$$\ln\frac{v}{5} = \ln\frac{9}{(3+s)^2}$$

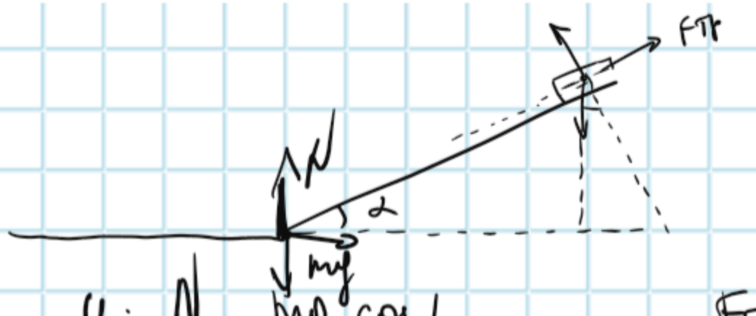
$$\frac{ds}{dt} = 45 \cdot \frac{1}{(3+s)^2}$$

$$45\,dt = (3+s)^2\,ds$$

$$45t = \frac{(3+s)^3}{3} \qquad \sqrt[3]{135t} = 3+s$$

$$s = \sqrt[3]{135t + 27} - 3$$

Лыжник скатывается с холма с нулевой начальной скоростью и проезжает 30 м вниз по склону, составляющему 18 град с горизонтом. Чему равна скорость лыжника у подножья холма, если коэффициент трения равен 0.08? Если у подножья холма имеется горизонтальная площадка, покрытая снегом с тем же коэффициентом трения, то на какое расстояние от неё укатится лыжник? Используйте энергетические соображения.



$$mgl\sin\alpha = \frac{mv^2}{2} + A$$

$$v = \sqrt{2gl\sin\alpha - 2lg\mu\cos\alpha}$$

y: $N = mg\cos\alpha$

x: $mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma$

$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

$$F_{тр} = l \cdot \mu mg\cos\alpha$$

$$\mu mg = ma$$

$$a = \mu g$$

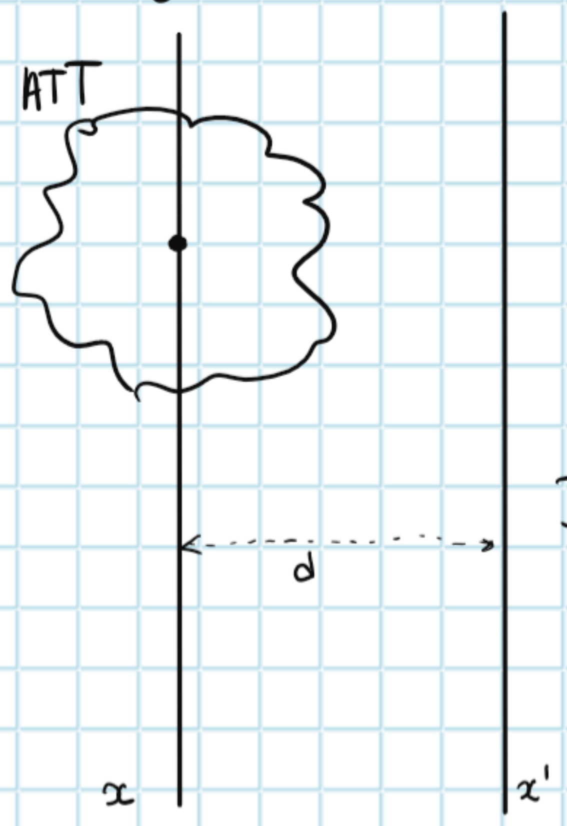
Задание после лекции 17.03.2022

1 Вывести теорему Гюйгенса-Штейнера

Th Момент инерции I тела относительно произвольной неподвижной оси равен сумме момента инерции этого тела I_c относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями

$$I = I_c + md^2$$

□



∢ АТТ, ось x, проходящую через центр масс тела и ось x', относительно которой нужно найти момент инерции

Распишем I, I_c: $I_c = \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{r}_i)^2$, $\vec{r}_i$ – радиус-вектор точки тела в СК x с началом в центре масс

$I = \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{r}_i\,')^2$, $\vec{r}_i\,'$ – радиус-вектор точки тела в СК x'

Вектор $\vec{r}_i\,'$ можно расписать как $\vec{r}_i + \vec{d}$, $\vec{d}$ – радиус-вектор расстояния от новой оси до старой

Тогда $I = \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{r}_i\,')^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{r}_i)^2 + 2\vec{d}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i + (\vec{d})^2\sum_{i=1}^{n} m_i \overset{*}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{r}_i)^2 + \vec{0} + (\vec{d})^2\sum_{i=1}^{n} m_i = I_c + md^2$

Радиус-вектор центра масс в СК x: $\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i = \vec{0}$ *

(мы выбрали центр масс началом отсчёта)

Т.е. $I = I_c + md^2$, ч.т.д. ■

2 Пояснить демонстрацию „Человек на скамье Жуковского с велосипедным колесом". Записать формулы, по которым можно опр. скорость вращения человека.

Человек сидит на стуле, в руках у него велосипедное колесо. Сам стул стоит на платформе, которая может достаточно свободно вращаться вокруг вертикальной оси. В начале демонстрации оба тела (человек и колесо) неподвижны, момент импульса системы равен нулю.

Человек начинает раскручивать колесо вокруг вертикальной оси. Проекция момента импульса на вертикальную ось остается равной нулю.

Человек поднимает раскрученное колесо над головой, стул начинает вращаться. В момент подъема растет проекция момента импульса на вертикальную ось. Поэтому, в силу сохранения закона момента импульса, начинает поворачиваться стул.

После этого колесо опускается, стул вращается в обратную сторону, так как проекция момента импульса принимает отрицательное значение.

Чтобы определить скорость вращения, нужно записать закон сохранения момента импульса в проекции на вертикальную ось

① $I_к\omega_к$ – человек неподвижен, колесо крутится вокруг горизонтальной оси

② $I_c\omega_c$ – стул крутится, колесо в вертикальном положении

① = ② $\Rightarrow$ $\omega_c = \frac{I_к\omega_к}{I_c}$

3

(II) A uniform stick 1.00 m long with a total mass of 330 g is pivoted at its center. A 3.0-g bullet is shot through the stick a distance x from the pivot. The bullet approaches at 250 m/s and leaves at 140 m/s (Fig. 11–36). (a) Determine a formula for the angular speed of the spinning stick after the collision as a function of x. (b) Graph the angular speed as a function of x, from $x = 0$ to $x = 0.50$ m.

$l = 1{,}00$ м $\quad r = x$

$m_s = 0{,}33$ кг

$m_в = 0{,}003$ кг

$v_0 = 250\ \frac{м}{с}$ $\quad v = 140\ \frac{м}{с}$

ω – ?

Начальный момент импульса: $L_1 = m_в \cdot v_0 \cdot r$

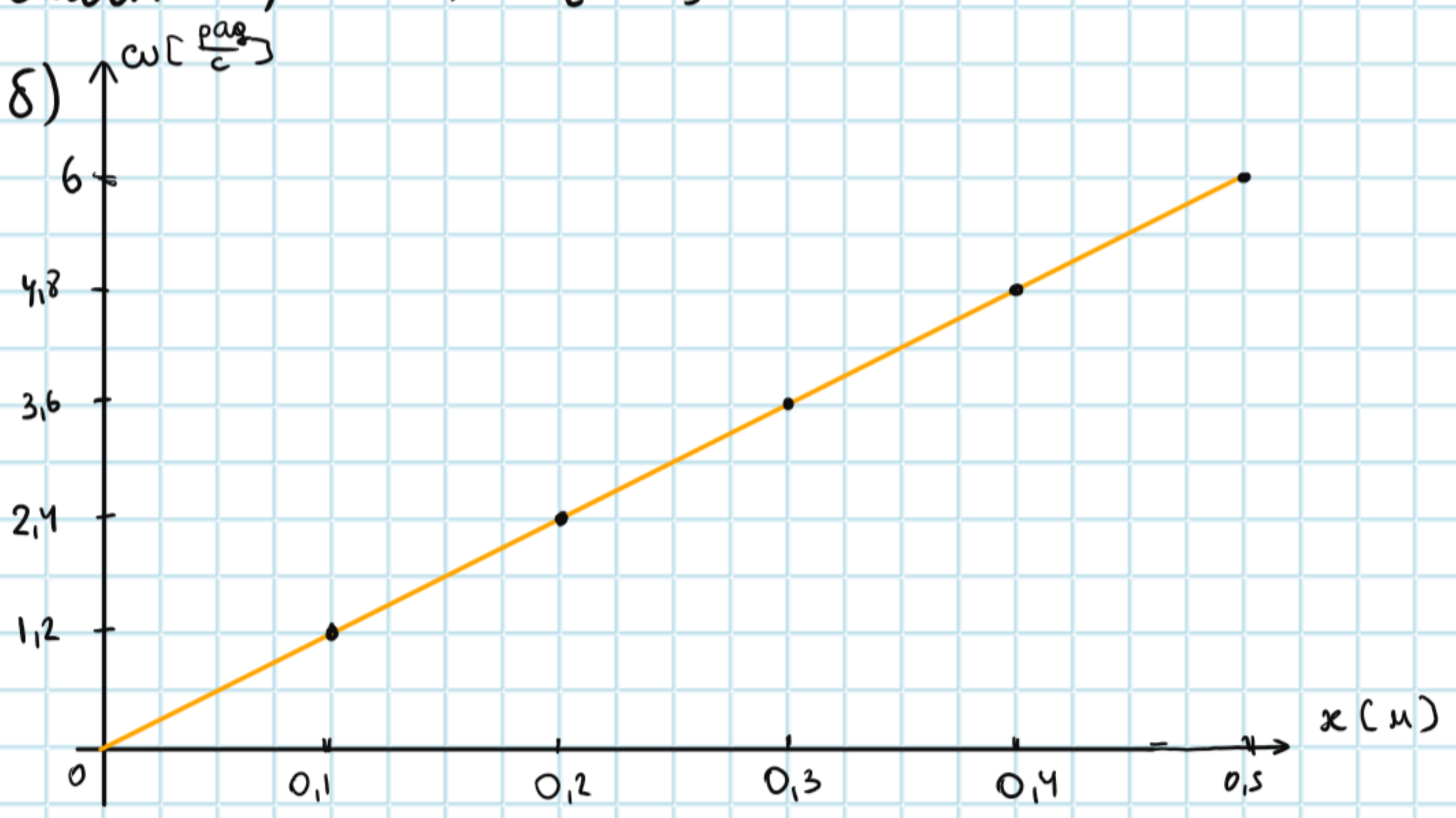
Момент импульса после столкновения: $L_2 \overset{**}{=} I\omega + m_в \cdot v \cdot r$

* $I\omega = \frac{1}{12}m_s \cdot l^2\omega$ – момент импульса стержня

*, ** $\xrightarrow{\text{по закону сохранения момента импульса}}$ $m_в v_0 x = \frac{m_s l^2}{12}\omega + m_в v x \Rightarrow \omega = \frac{12}{l^2}\cdot\frac{m_в}{m_s}(v_0 - v)x$; $\omega = \omega(x)$

Ответ: а) $\omega(x) = \frac{12}{l^2}\cdot\frac{m_в}{m_s}\cdot(v_0 - v)\cdot x = 12x$

б)



Задача про двух дворников

M – масса дворника; v – начальная скорость

Работающий дворник:

ЗСИ: $Mv = (M+\Delta m)V_1$ (т.к. он сбрасывает снег перпендикулярно движению, на горизонтальную скорость это не влияет)

(за какой-то промежуток dt)

$V_1 = \frac{M}{(M+\Delta m)} v$

.... $M V_1 = (M+\Delta m) V_2$

$V_2 = \frac{M}{M+\Delta m} V_1 = \left(\frac{M}{M+\Delta m}\right)^2 v$ $\Rightarrow V_n = \left(\frac{M}{M+\Delta m}\right)^n v = \left(\frac{1}{1+\frac{\Delta m}{M}}\right)^n v$

Ленивый дворник:

ЗСИ (за момент времени dt)

$Mv = (M+\Delta m) U_1 \Rightarrow U_1 = \frac{M}{M+\Delta m} v$

$(M+\Delta m) U_1 = (M+2\Delta m) U_2 \Rightarrow U_2 = \frac{(M+\Delta m)}{M+2\Delta m} U_1 = \frac{Mv}{M+2\Delta m}$

$U_n = \frac{Mv}{M+n\cdot\Delta m} = \frac{v}{1+n\cdot\frac{\Delta m}{M}}$

Т.к. $\left(1+\frac{\Delta m}{M}\right)^n$ растёт быстрее $1+n\cdot\frac{\Delta m}{M}$, работающий дворник будет терять в скорости быстрее

Ответ: Ленивый дворник быстрее

Задания после лекции 24.03

Гироскоп

Массивное осесимметричное тело, быстро вращающееся вокруг оси симметрии, причем ось вращения может изменять положение в пространстве. Ось симметрии называется осью фигуры гироскопа.

Ось симметрии является одной из главных осей гироскопа. Поэтому его момент импульса совпадает по направлению с осью вращения. Для того, чтобы изменить положение в пространстве положение оси фигуры гироскопа, необходимо подействовать на него моментом внешних сил.

2 (III) The two atoms in a diatomic molecule exert an attractive force on each other at large distances and a repulsive force at short distances. The magnitude of the force between two atoms in a diatomic molecule can be approximated by the Lennard-Jones force, or $F(r) = F_0\left[2(\sigma/r)^{13} - (\sigma/r)^7\right]$, where r is the separation between the two atoms, and σ and F_0 are constant. For an oxygen molecule (which is diatomic) $F_0 = 9.60 \times 10^{-11}$ N and $\sigma = 3.50 \times 10^{-11}$ m. (*a*) Integrate the equation for $F(r)$ to determine the potential energy $U(r)$ of the oxygen molecule. (*b*) Find the equilibrium distance r_0 between the two atoms. (*c*) Graph $F(r)$ and $U(r)$ between $0.9\,r_0$ and $2.5\,r_0$.

а) $U(r) = \int F\,dr = F_0 \int \left[2\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{13} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{7} \right] dr =$

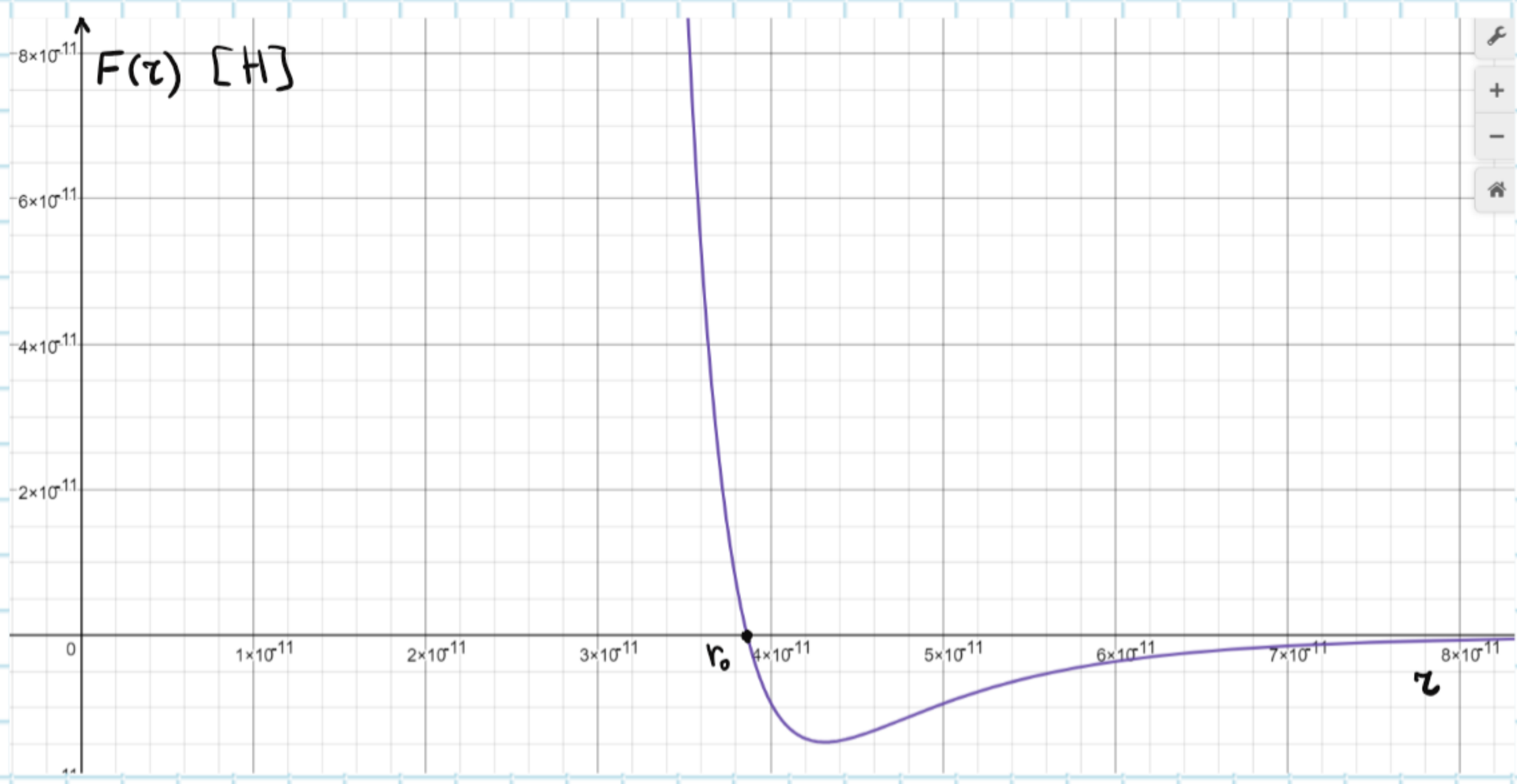
$= F_0 \left[\frac{\sigma^7}{6r^6} - \frac{\sigma^{13}}{6r^{12}} \right] + const$

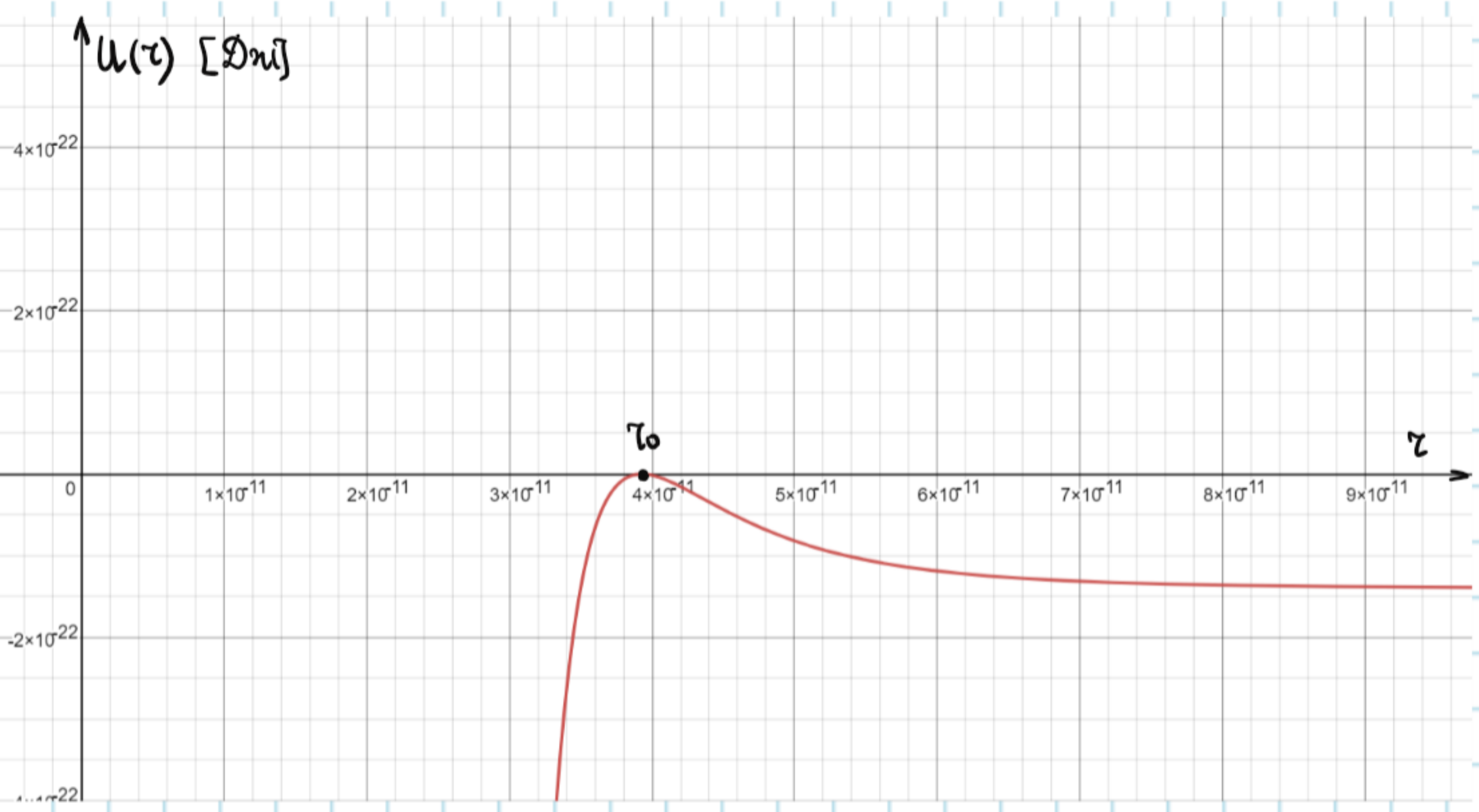
б) $F(r_0) = 0$; $F_0 \cdot \left[2\frac{\sigma^{13}}{r_0^{13}} - \frac{\sigma^7}{r_0^7} \right] = 0 \;\Big/ \cdot \frac{r_0^{13}}{F_0}$; $r_0^6 = 2\sigma^6$; $r_0 = \sigma\sqrt[6]{2}$

$U(r_0) = 0 \Rightarrow F_0 \left[\frac{\sigma^7}{6r_0^6} - \frac{\sigma^{13}}{6r_0^{12}} \right] + const = 0$; $\frac{F_0}{6}\left[\frac{2\sigma}{4} - \frac{\sigma}{4} \right] = -const$

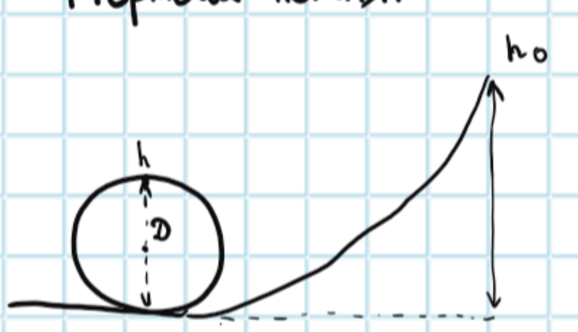
$const = -\frac{F\sigma}{24}$

с)





I Мёртвая петля.



В верхней точке петли на тело действуют сила тяжести и реакция опоры:

$m\frac{v^2}{R} = N + mg$; точка невесомости $p = m(g-a)$

$m\frac{v^2}{R} = |mg - N|$ точка перегрузки $p = m(g+a)$

$v \geq \sqrt{Rg} \Rightarrow$ тело не оторвётся

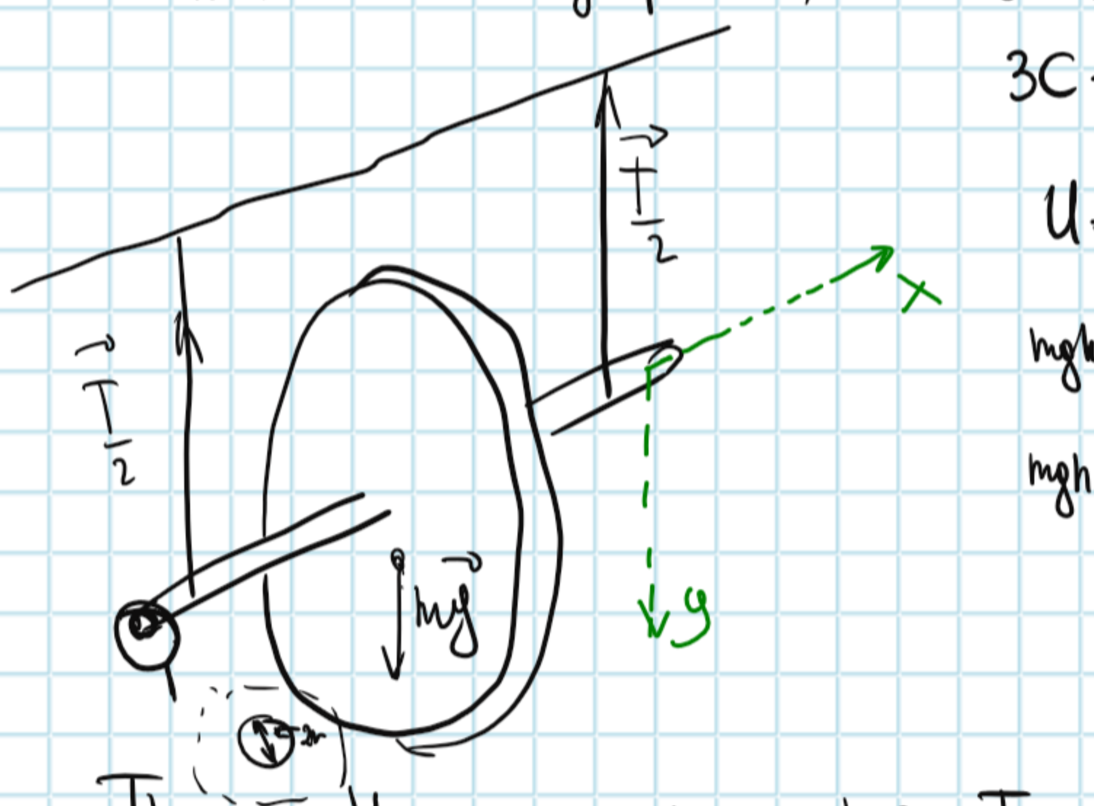
Закон сохранения энергии:

$mgh_0 = mgh + \frac{mv^2}{2}$; $// \; v = \sqrt{Rg}$

$mgh_0 = mgh + \frac{mRg}{2}$

$h_0 = h + \frac{R}{2} = \frac{5R}{2}$ минимальная высота

II Маятник Максвелла – устройство, состоящее из массивного диска, симметрично и жестко закрепленного на горизонтальной оси, подвешенной на двух нерастяжимых нитях



ЗСЭ для него:

$U = E_к + E_{вр}$ $\quad \omega = \frac{v}{r}$, $h = \frac{at^2}{2}$, $v = \frac{2h}{t}$

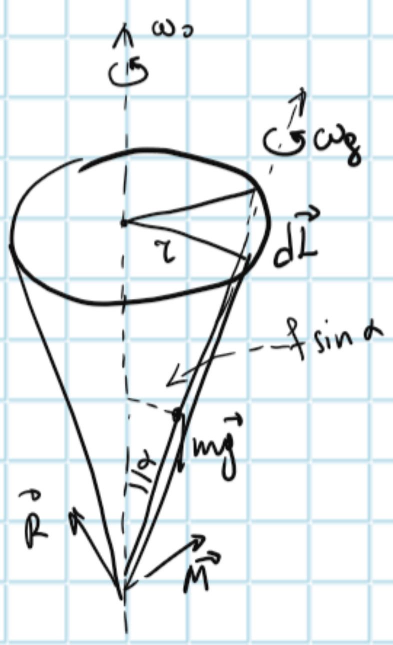
$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$

$mgh = \frac{m4h^2}{2t^2} + \frac{I\,4h^2}{2r^2t^2} \Rightarrow mg = \frac{2h}{t^2r^2}(mr^2 + I) \Rightarrow I = \frac{mgt^2r^2}{2h} - mr^2 = mr^2\left(\frac{g}{a} - 1\right)$

II зак. Ньютона: $ma = mg - T \quad : O_y$

$I\varepsilon = Tr \quad : O_x$

III Гироскоп: для тяжелого гироскопа справедливо правило Жуковского: когда мы сообщаем оси гироскопа принудительной прецессии эта ось стремится кратчайшим путём встать параллельно прецессионной оси, чтобы вектора $\omega_g \uparrow\uparrow \omega_0$



$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$; $M = mgf \sin\alpha$

$dL = mgf\sin\alpha\, dt = r\,d\varphi = (L\sin\alpha)\,d\varphi = I\omega_g \sin\alpha$

f – расстояние от центра масс до крепления

$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon_{прец} = \frac{mgf}{I\omega_g}$ $\Rightarrow$ прецессия обратно пропорциональна угловой скорости (!)

$[\omega_0, I\omega_g] = M$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$$

Задание после лекции [14.04.2022]

① Вывести $\vec a = \vec a' + \vec a_0 + 2[\vec\omega, \vec v'] - \omega^2 \vec\rho$

Если новая СО вращается с постоянной угл. ск. $\vec\omega$ и движется поступательно со ск. $\vec v_0$, то закон преобразования скоростей будет выглядеть так: (*) $\vec V = \vec V' + \vec V_0 + [\vec\omega, \vec r]$, $\vec r$ – радиус-вектор тела относительно произвольной точки на оси вращения; $\vec V, \vec V'$ – скорости в новой и старой СО

За момент времени dt тело изменит свою координату по следующему закону (**)

$$d\vec r = \vec v' dt + [d\vec\varphi, \vec r]$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} d\vec V = d\vec V' + d\vec v_0 + [\vec\omega, d\vec r] \overset{(**)}{=} d\vec v' + d\vec v_0 + [\vec\omega, \vec V' dt] + [\vec\omega,[d\vec\varphi,\vec r]] \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{/dt} \vec a = \vec a' + \vec a_0 + 2[\vec\omega,\vec V'] + \underbrace{[\vec\omega,[\vec\omega,\vec r]]}_{= -\omega^2\vec\rho}$$

$\vec\rho$ – радиус-вектор, перпендикулярный оси вращения и характеризующий положение тела относительно этой оси

② Постройте графики зависимостей напряженности и потенциала от расстояния гравитационного поля, создаваемого однородным шаром массой m и радиусом R. Расстояние считать от центра шара, рассмотреть точки внутри и снаружи шара. Найти напряженность и потенциал гравитационного поля Земли на расстоянии равном половине радиуса. Землю принять за однородный шар.

Фрагмент из моделирования, которое сделали мы с командой

Напряженность гравитационного поля - это векторная величина, характеризующая это поле в фиксированной точке и численно равная отношению гравитационной силы F, действующей на неподвижную пробную частицу эталонной массы m_0 в этой точке. Тогда выражение для напряженности гравитационного поля выглядит:

$$\Gamma = \frac{F}{m_0}$$

В классической теории тяготения значение гравитационной силы может быть записано в упрощенной форме, если полагать, что источником гравитационного поля является однородное тело сферической формы массой $M_з$ и радиусом $R_з$, то есть:

$$\Gamma = \frac{-\frac{Gm_0M_з}{(R_з+r)^2}}{m_0} = -\frac{GM_з}{(R_з+r)^2}, \quad r \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

Заметим, что зависимость $\Gamma(R)$ валидна для точек за границей моделируемой сферы Земли.

Например, потенциал точки за сферой равен $\psi = -\frac{GM_з}{R_з+r}$, тогда:

$$\vec\Gamma \xrightarrow[-\nabla\psi]{} -\frac{GM_з}{(R_з+r)^3} \cdot \overrightarrow{(R_з+r)}$$

Или, что эквивалентно через принцип эквивалентности инерциальной и гравитационной масс:

$$\vec F = m_0\vec g = -\frac{Gm_0M_з}{(R_з+r)^3} \cdot \overrightarrow{(R_з+r)} \Rightarrow \vec g \equiv \vec\Gamma = -\frac{GM_з}{(R_з+r)^3} \cdot \overrightarrow{(R_з+r)}$$

Заметим, что внутри сферы (геоида Земли) потенциал постоянен, то есть напряженность линейно растет до значения $\left[-\frac{GM_з}{R_з^2}\right]$.

То есть описание функции зависимости напряженности гравитационного поля от радиус-вектора до фиксированной точки можно дать следующим образом:

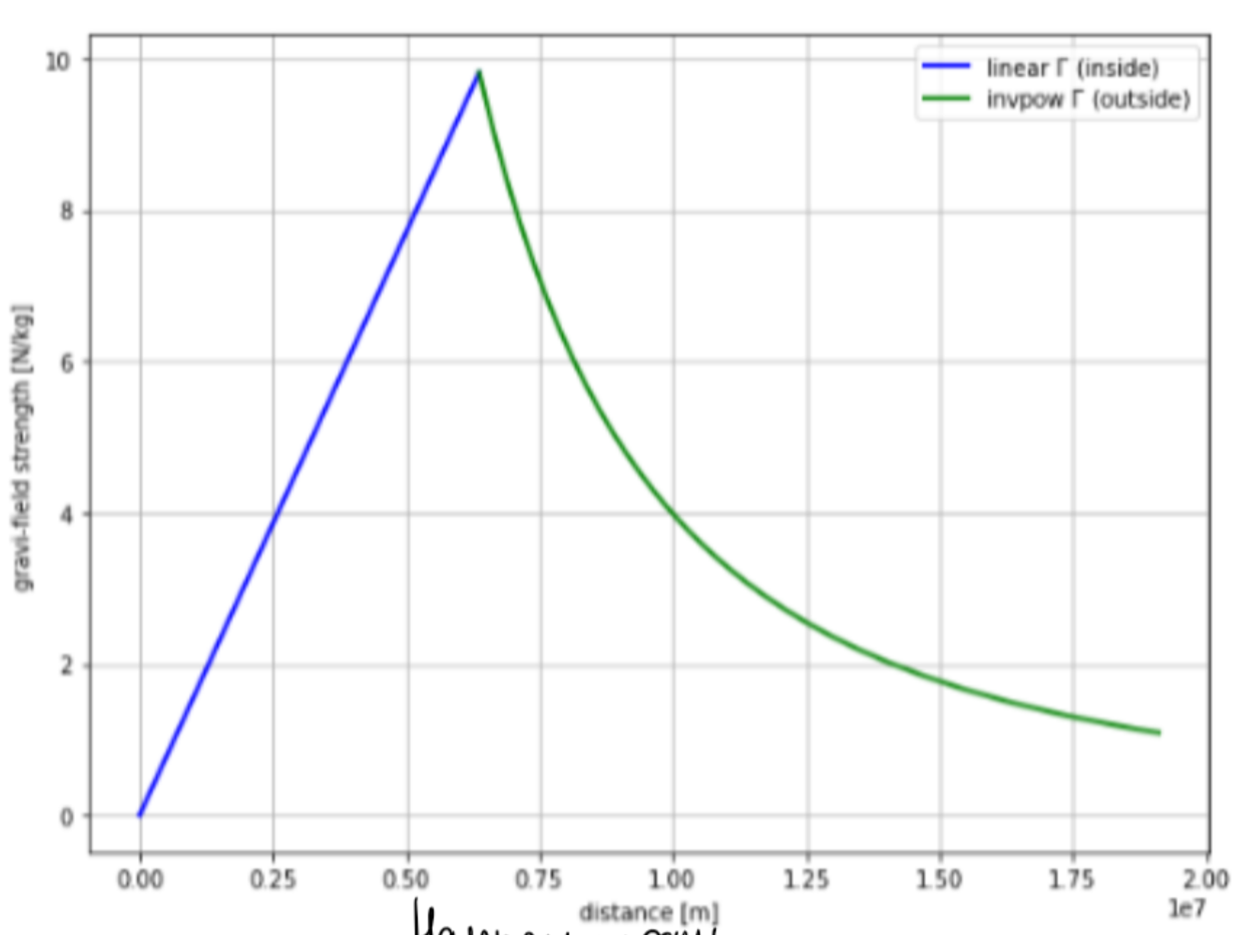
$$\Gamma = \begin{cases} -\frac{GM_з}{R_з^3} \cdot r, & r \in [0; R_з] \\ -\frac{GM_з}{r^2}, & r > R_з \end{cases}$$

Теперь относительно потенциала гравитационного поля, которое создается нашим однородным шаром - **Землей**:

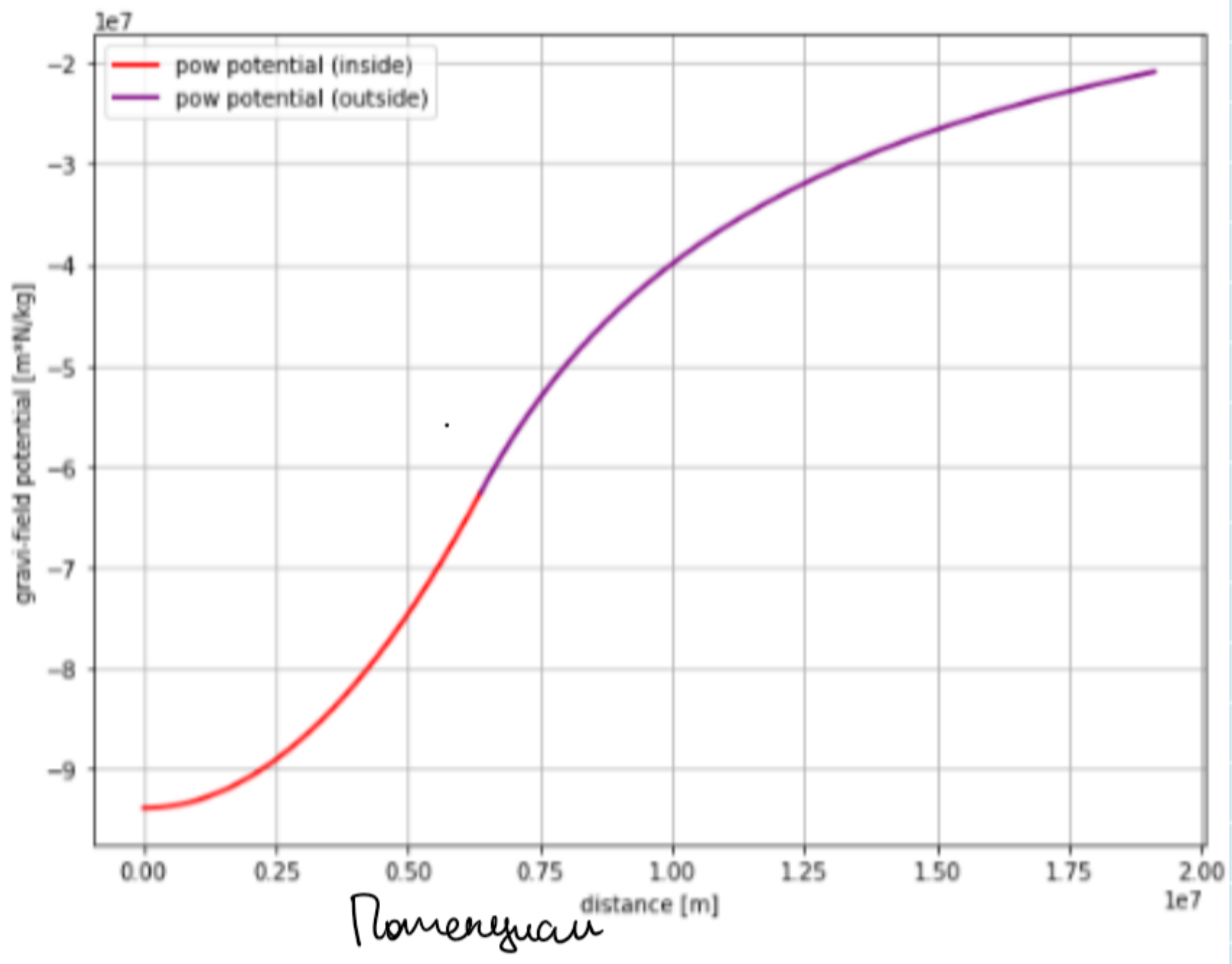
- Снаружи потенциал равен $\psi = -\frac{GM_з}{r}, \; r \in (R_з, +\infty)$
- Внутри шара необходимо рассматривать шаровой слой переменной массы, тогда для этого случая выражение силы тяготения записывается $|F| = \frac{Gm_0M_{layer}}{r^2} = Gm_0 \cdot \left(\frac{4\rho\pi}{3}\right) \cdot r$, а выражение для потенциала: $\psi = G \cdot \frac{2\pi\rho}{3} \cdot r^2 - 2\pi\rho R_з^2, \; r \in [0, R_з]$

$$\psi = \begin{cases} \frac{GM_з r^2}{2R_з^3} - \frac{3GM_з}{2R_з}, & r \in [0; R_з] \\ -\frac{GM_з}{r}, & r > R_з \end{cases}$$

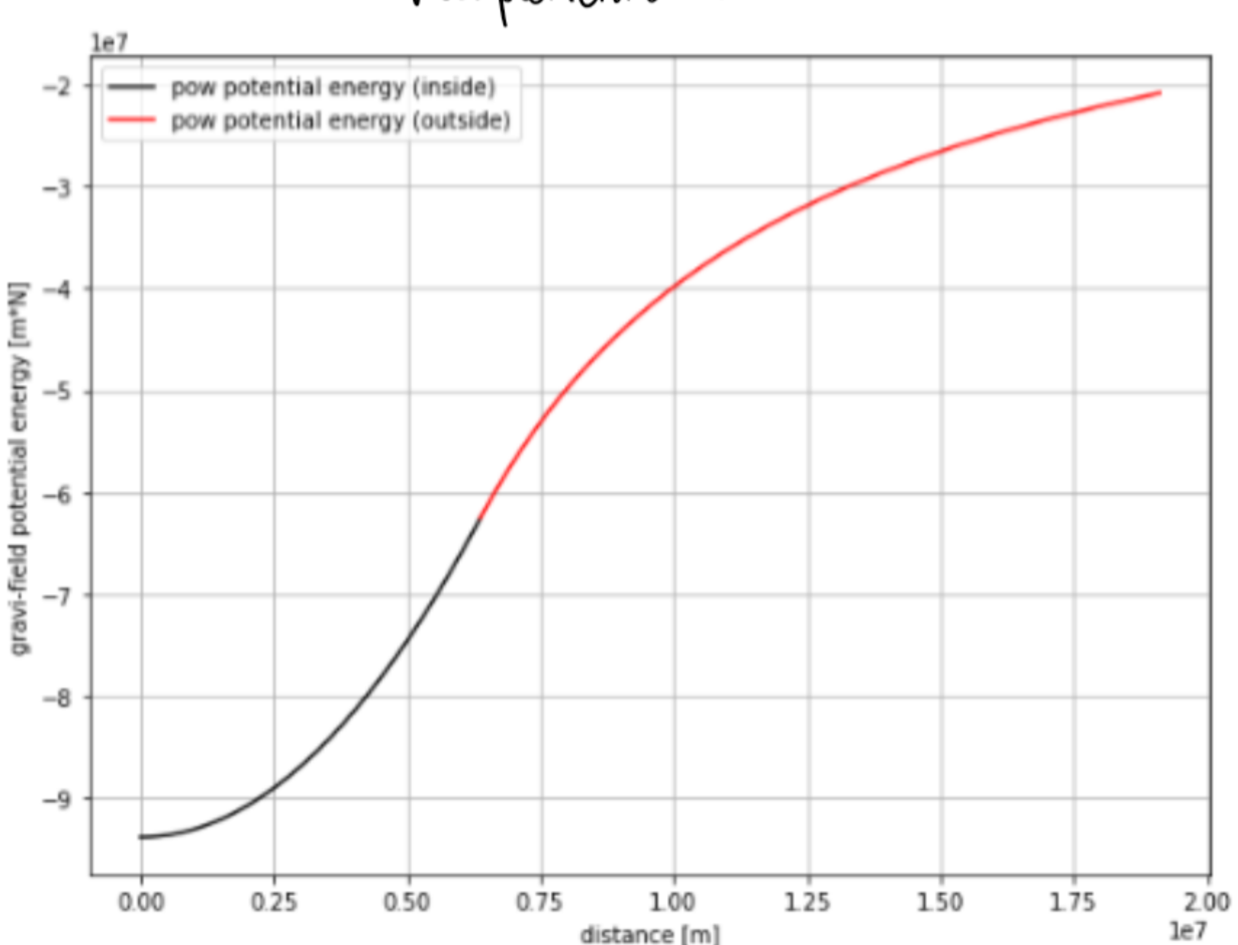
Заметим еще, что потенциальная энергия для единичной массы будет по графику сопадать с потенциалом с точностью до размерностей, из разностей потенциальных энергий понятно, что на поверхности Земли потенциальная энергия равна работе силы тяжести mgh.



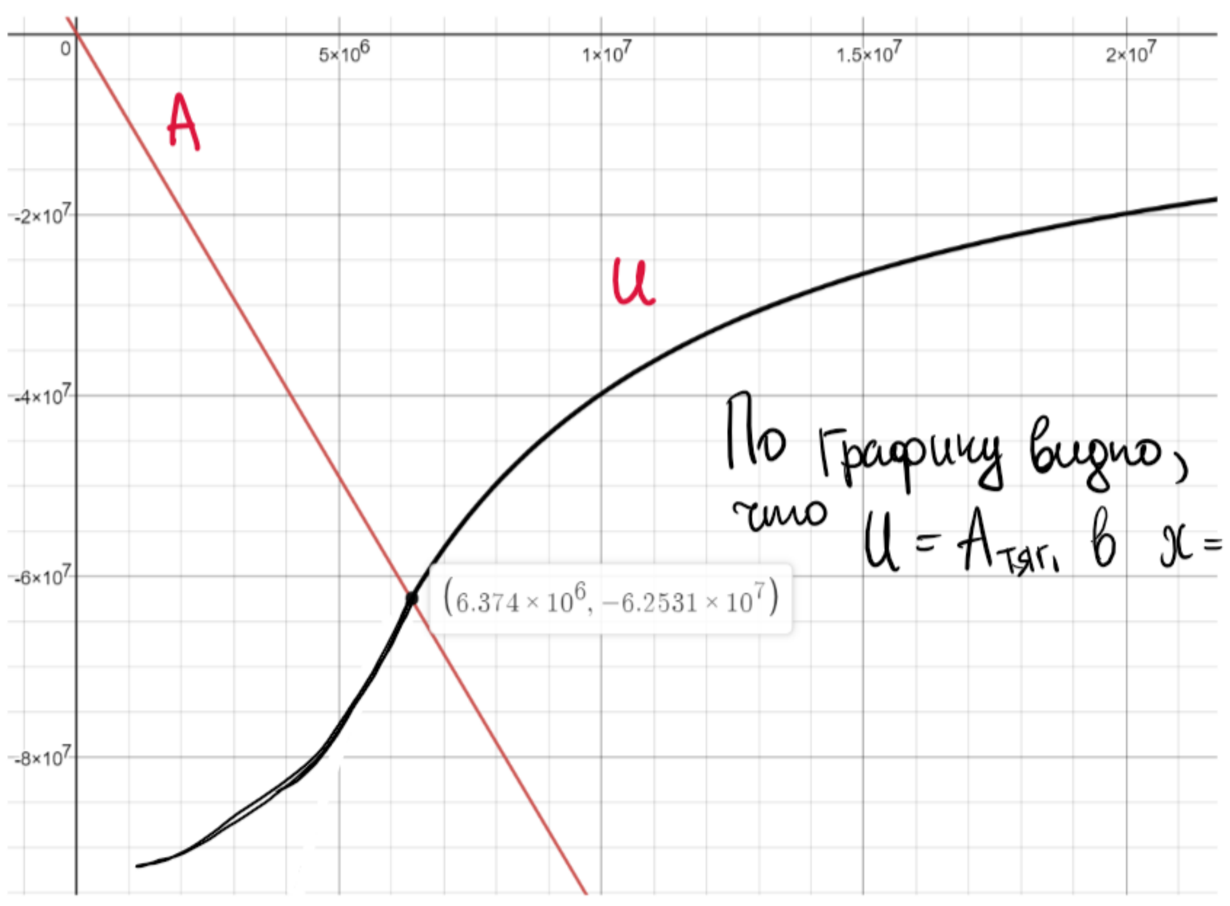
Напряженность



Потенциал



Потенциальная энергия



По графику видно, что $U = A_{тяг.}$ в $x = R_з$

Задание после лекции 21.04.2022

1 Поясните механизм электризации тел трением.

Тела, состоящие из нейтральных частиц, в обычных условиях не обладают зарядом. Однако в процессе трения часть электронов, покинувших свои атомы, может перейти с одного тела на другое (потому что тела очень плотно соприкасаются). Перемещения электронов при этом не превышают размеров межатомных расстояний. Но если тела после трения разъединить, то они окажутся заряженными: то тело, которое отдало часть своих электронов, будет заряжено положительно, а то тело, которое их получило,— отрицательно. Новые электрические заряды при этом не возникают. Происходит лишь разделение уже имеющихся зарядов между электризующимися телами: часть отрицательных зарядов переходит с одного тела на другое.

Появившийся в результате электризации избыточный заряд находится на телах ограниченное время. Почему?

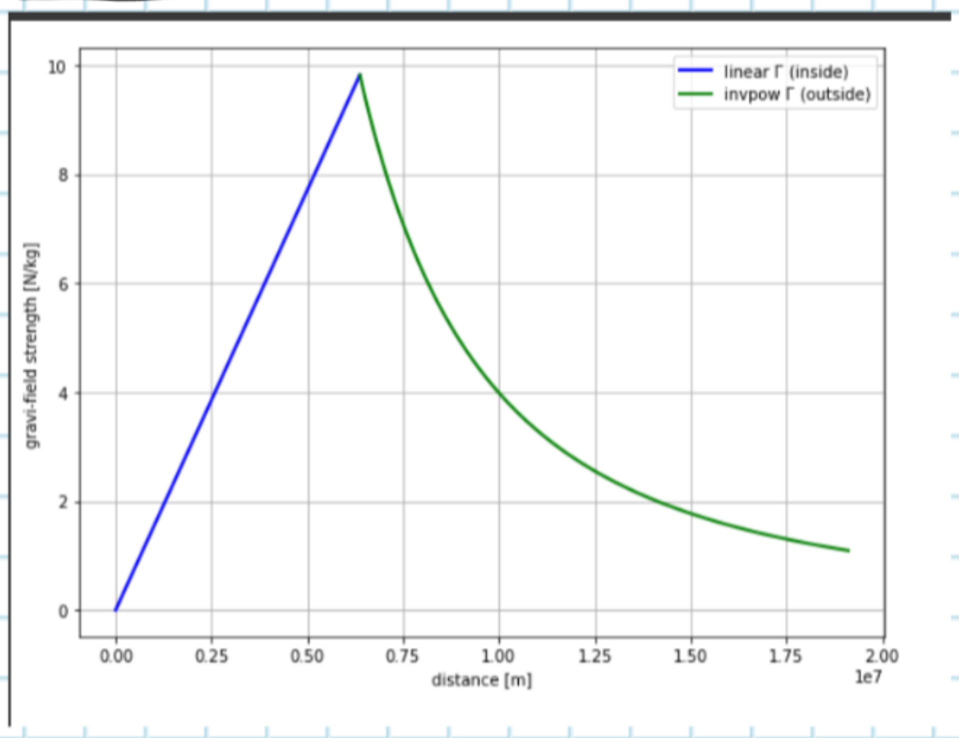
Потому что заряд будет оставаться на том же месте, где он возник, только в том случае, когда мы наэлектризуем диэлектрик: ведь через них заряды перемещаться не могут. Если же наэлектризовать трением о мех или бумагу металлический предмет, то появившийся на нем заряд тут же уйдет через предмет, а затем через руку в тело человека, проводящего опыт. (Перемещение зарядов обусловлено взаимным отталкиванием свободных электронов.) Этого, правда, можно избежать, если держать металлический предмет за изолирующую ручку. Тогда появившийся заряд так и останется на металле.

2 Сравните закон всемирного тяготения и закон Кулона. В чем сходство и различия между этими двумя законами?

Сходства:
- оба определяют силу взаимодействие между телами
- в обоих законах $F \propto \frac{1}{R^2}$ (сила обратно пропорциональна квадрату расстояние между телами)

Различие:
- Закон всемирного тяготения применим в рамках классической механики, где основными параметрами являются массы тел
- Закон Кулона применим для определения взаимодействия тел, которые характеризуются наличием электрического заряда и используются в электродинамике (также в этом случае говорят, что силами гравитационного вз-я можно пренебречь в силу их малости)

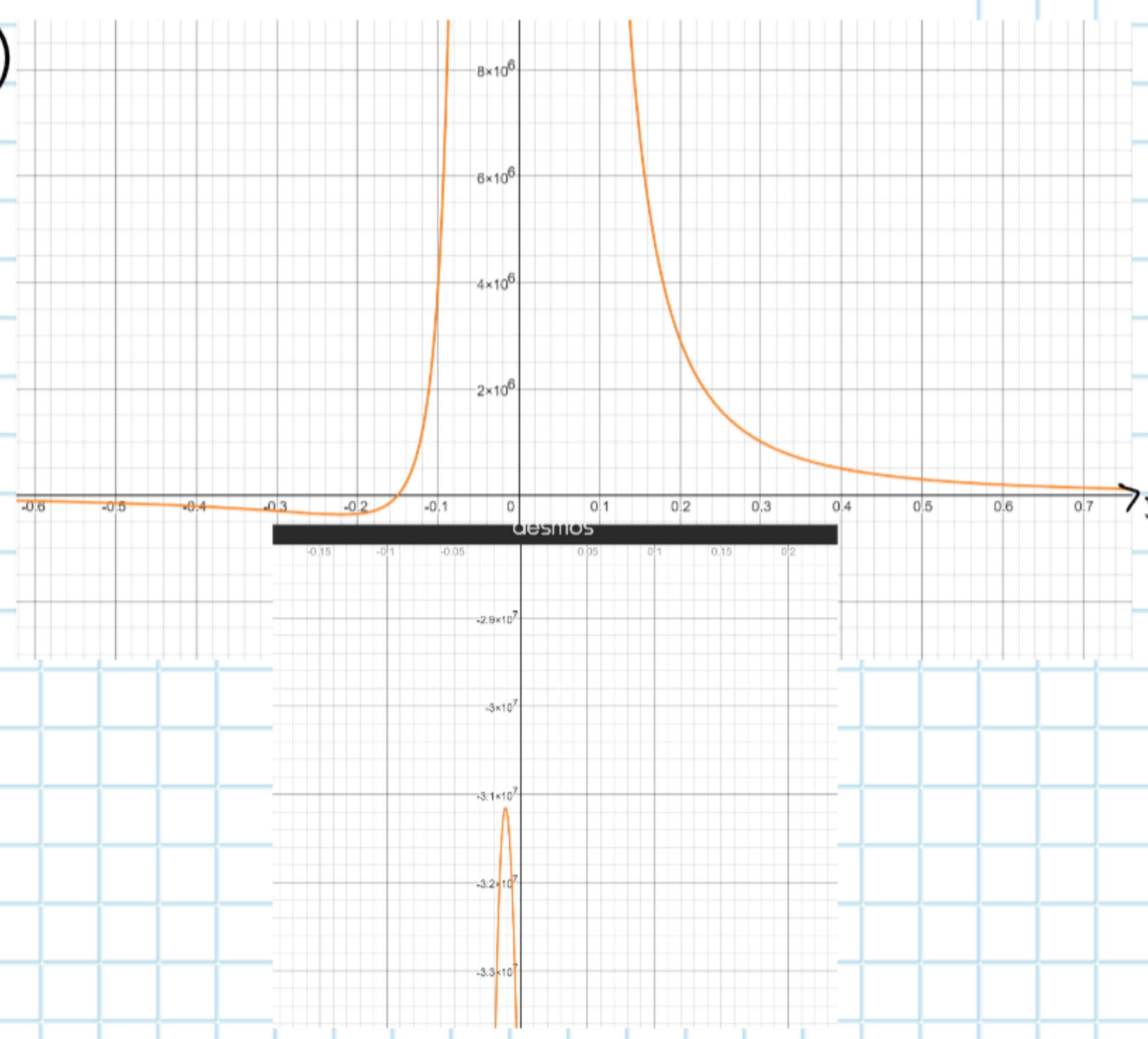
Изобразите линии напряженности гравитационного поля Земли.



Внутри линейно растет до значения $g = 9{,}81\ \frac{Н}{кг}$,
снаружи уменьшается по закону $\Gamma = \frac{F_{гр}}{m_0} = \frac{GM_З}{r^2}$, r-distance

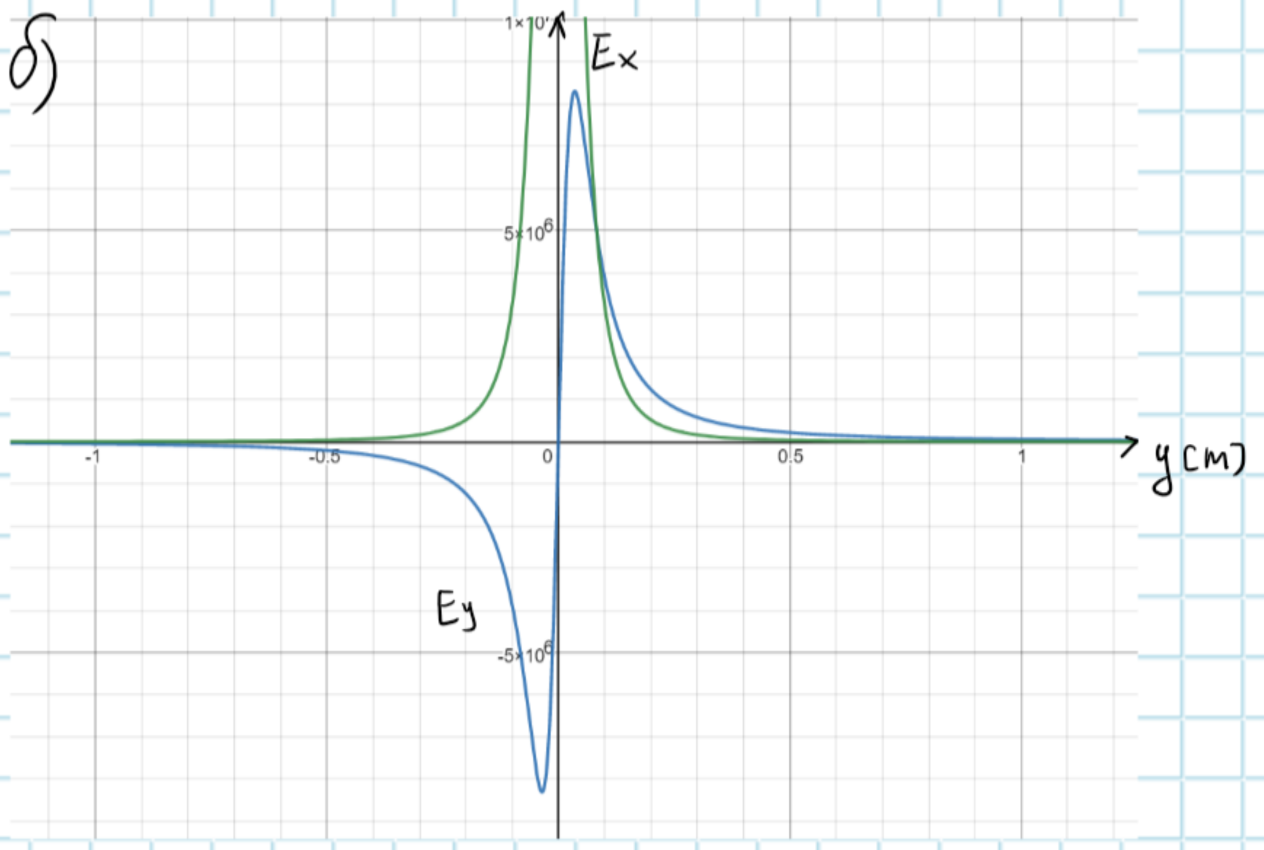
3 (III) An 8.00 μC charge is on the x axis of a coordinate system at $x = +5.00$ cm. A $-2.00\,\mu$C charge is at $x = -5.00$ cm. (a) Plot the x component of the electric field for points on the x axis from $x = -30.0$ cm to $x = +30.0$ cm. The sign of E_x is positive when $\vec{E}$ points to the right and negative when it points to the left. (b) Make a plot of E_x and E_y for points on the y axis from $y = -30.0$ to $+30.0$ cm.

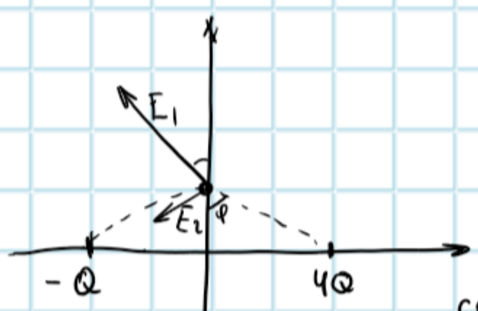
а)



б)

там сверху у Ex есть значение





$$E_y = \frac{k4Q}{0{,}0025+y^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{0{,}0025+y^2}} - \frac{kQ}{0{,}0025+y^2} \frac{y}{\sqrt{0{,}0025+y^2}}$$

cos φ

$$E_x = \frac{kQ}{0{,}0025+y^2} \frac{0{,}05\,(1+4)}{\sqrt{0{,}0025+y^2}}$$

sin φ

Задание после лекции № 2

1. Почему в задачах часто указывают данные в таком виде: m = 2.00 кг (не 2кг). Что это означает?

Это может указывать на требуемую в задаче точность вычислений для округления или для численных методов.

1.2 Для малых углов численные значения синуса и тангенса практически совпадают. Определите максимальный угол, при котором синус и тангенс совпадают в пределах двух значащих цифр.

Для решения этой задачи можно воспользоваться веществ. бинарным поиском:

```
from numpy import tan, sin
import numpy as np

l = np.longdouble(0)
r = np.longdouble(1)
eps = np.longdouble(1e-11)
d = np.longdouble(0.01)

while r - l > eps:
    m = (l + r) / 2
    if tan(m) - sin(m) < d:
        # print(m)
        l = m
    else:
        r = m

print(m)        0.2697631413830095
print(tan(m))   0.27650315176678275
print(sin(m))   0.2665031517672726
```

Полученное значение m послужит отправной точкой для дальнейших вычислений. На данный момент значения тангенса и синуса совпадают пока только в 1 знаке после запятой из-за потери точности при хранении вещественных чисел.

Произведем линейный поиск: будем вычитать очень малую величину (1e-6) из нашего значения m, пока значения тангенса и синуса будут не совпадать в 2 знаках после запятой. Для сравнения использую строки, потому что Python очень любит округлять вещественные числа при вычитании, что нам совершенно не нужно.

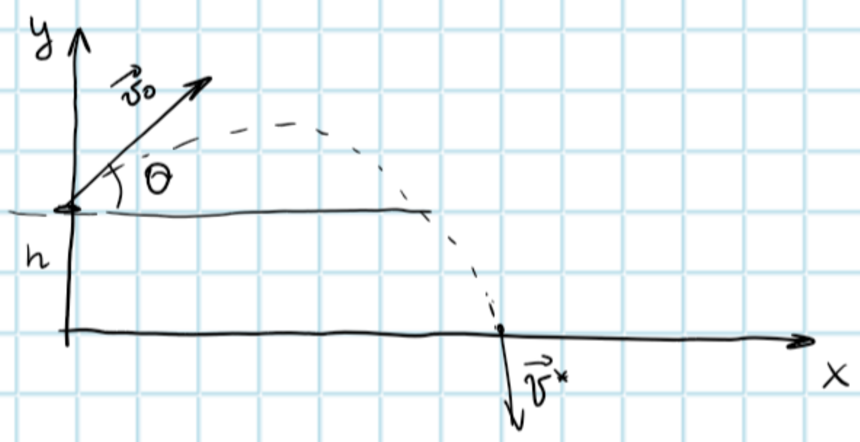
```
while str(tan(m))[:4] != str(sin(m))[:4]:
    # print("qq")
    m -= np.longdouble(1e-6)

print(m)        0.2637111413831714
print(tan(m))   0.2699992563955784
print(sin(m))   0.2606651831719874
```

Вот это уже лучше. Можно было бы посчитать еще точнее, используя более емкие типы данных, но на данном этапе, мне кажется, такой точности более чем достаточно.

Ответ: ≈0,2637111413831714 радиан

Задача 2 Баскетболист бросает мяч с начальной скоростью $v_0 = 13{,}5$ м/с с высоты $h = 2.1$ м



$$x(t) = v_0 \cdot \cos\Theta \cdot t \quad (*) \qquad v_x(t) = v_0\cos\Theta$$
$$y(t) = h + v_0\sin\Theta \cdot t - \frac{gt^2}{2} \qquad v_y(t) = v_0\sin\Theta - gt$$

Найдем t_n, т.ч. $y(t_n) = 0$:

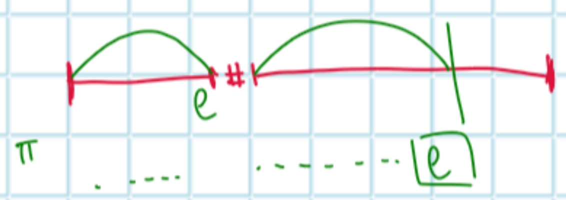
$$h + v_0\sin\Theta t = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{v_0\sin\Theta + \sqrt{v_0^2\sin^2\Theta + 2gh}}{g}$$
$$t_2 = \frac{v_0\sin\Theta - \sqrt{v_0^2\sin^2\Theta + 2gh}}{g}$$ не подходит, т.к. $t > 0$

Подставим t_n в (*)

$$L = x(t_n) = v_0\cos\Theta\left[\frac{v_0\sin\Theta + \sqrt{v_0^2\sin^2\Theta + 2gh}}{g}\right]$$

Ответ на пункт $\boxed{1}$

Ответ на пункт $\boxed{2}$: $\Theta_{max} \approx 0{,}7345$ рад



Доп. вопрос: Как работает тележка?

При помощи встроенных датчиков тележка замеряет силу (динамометр), положение в пространстве (акселерометр), скорость и ускорение (3х осевой ротационный датчик скорости). Собранные данные передаются посредством Bluetooth

Задание после лекции № 3

1. Доказать, что время спуска по брахистохроне будет наименьшим

Из ЗСЭ $\underset{\text{начальная точка}}{mgh} = \underset{\text{какая-то точка на пути}}{\frac{mv^2}{2}} \Rightarrow v(y) = \sqrt{2gh}$ (*)

Длина кривой в ДПСК вычисляется по формуле $\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}dx$

$$t_{пути} = \sum_{i=0}^{i=n}\frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}}\sqrt{1+(y')^2}dx}{v_{\Delta x_i}} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^L \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}dx \rightarrow \text{в минимум}$$

$\exists\ y(1+(y')^2) = const$ (из ур-й Эйлера-Лагранжа) $\Rightarrow y' = \sqrt{\frac{C-y}{y}}$ (**)

$\exists\ y = C\cdot\sin^2\frac{t}{2} \Rightarrow y' = 2C\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}\cdot\frac{t'}{2}$ (*) ①

$$(*), (**) \Rightarrow \sqrt{\frac{C(1-\sin^2\frac{t}{2})}{C\sin^2\frac{t}{2}}} = C\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\cdot t'$$

$1-\sin^2\frac{t}{2} \to \cos^2\frac{t}{2}$

$$\frac{\cancel{\cos\frac{t}{2}}}{\sin\frac{t}{2}} = C\cdot\sin\frac{t}{2}\cancel{\cos\frac{t}{2}}\frac{dt}{dx} \Rightarrow dx = C\cdot\sin^2\frac{t}{2}dt \Rightarrow x = \frac{C}{2}(t - \sin t) + \tilde{C}$$ ②

Т.е. при $y = ①$ и $x = ②$ время в пути будет минимально $\xrightarrow[\text{общий вид циклоиды}]{\text{т.к. ①②}}$ время пути по брахистохроне будет минимально ∎

2. Дано: $a = \frac{dv}{dt} = g - kv$ # ускорение с учетом сопр. воздуха

① $v(t)$ - ?

② v_{max} - ?

$\exists\ u = g - kv \qquad \frac{du}{dv} = -k$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dt} = -\frac{1}{k}\cdot\frac{du}{dt} = u \Rightarrow dt = \frac{du}{-uk} \Rightarrow t = -\frac{1}{k}\cdot\ln|u| + C,\ C\in\mathbb{R}$$

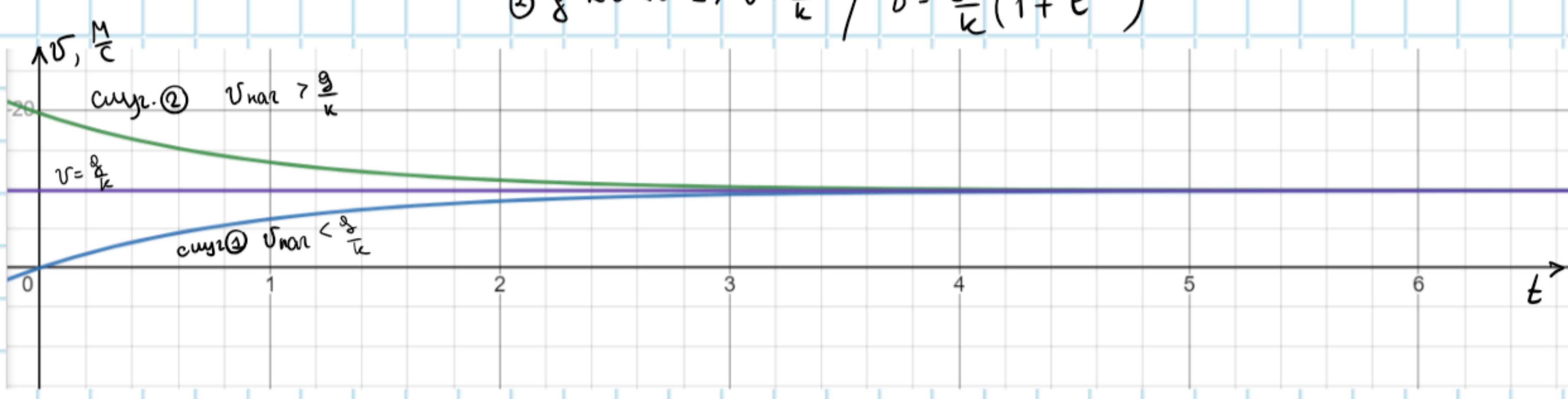
С учётом начального условия $\begin{matrix} v=0 \\ t=0 \end{matrix}$: $0 = -\frac{1}{k}\ln|g| + C \Rightarrow C = \frac{\ln g}{k}$

$$t = -\frac{1}{k}\ln|g-kv| + \frac{\ln|g|}{k} = \frac{1}{k}\cdot\ln\left|\frac{g}{g-kv}\right| \quad e^{\wedge}$$

$e^{kt} = \left|\frac{g}{g-kv}\right| \Rightarrow$ ① $g - kv > 0 \Rightarrow v < \frac{g}{k}$ / $v = \frac{g}{k}(1-e^{-kt})$

② $g - kv < 0 \Rightarrow v > \frac{g}{k}$ / $v = \frac{g}{k}(1+e^{-kt})$

Ответ:



Как видно по графику, при $t \to \infty$ $v \to \frac{g}{k}$, что и будет являться ответом на пункт б.

Ответ: $v = \frac{g}{k}$

Задание после лекции № 4

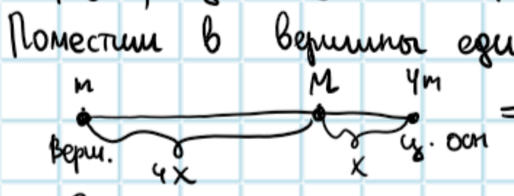
1. Почему акселерометр не работает в невесомости?

Потому что он определяет положение в пространстве, измеряя разность между полным ускорением и g, а в невесомости они совпадают, т.е. в разности будет 0.

2. Найти центр масс пирамиды с квадратным основанием стороной a и $h=a$.

Воспользуемся фактом, что центр масс пирамиды находится где-то на отрезке, соединяющем центр основания и 5 вершину пирамиды.

Поместим в вершины единичные массы $\Rightarrow$ в центре основания масса = 4 е.м.



$\Rightarrow$ Центр масс пирамиды лежит на 4/5 отрезка, соединяющего вершину (оставшуюся) и центр основания.

3. Задача

II зак. Ньютона для падающего тела с учетом силы сопротивления

$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$; $t_0=0$ $t_1 = 15$, $m = 75kg$, $k = 0{,}22\ \frac{kg}{m}$

$v(t_1)$ - ?

$a(t_1)$ - ?

решим ДУ: $v' = g - \frac{k}{m}v^2 \Rightarrow \frac{dv}{g-\frac{k}{m}v^2} = dt \Rightarrow t = -\frac{m}{k}\int\frac{dv}{v^2-\left(\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)^2} = -\frac{\sqrt{m}}{\frac{k}{\sqrt{k}}}\cdot\frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{mg}}\cdot\ln\left(\frac{v+\sqrt{\frac{mg}{k}}}{v-\sqrt{\frac{mg}{k}}}\right)+C = C - \frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{gk}}\cdot\ln\left(\frac{v+\sqrt{\frac{mg}{k}}}{v-\sqrt{\frac{mg}{k}}}\right)$ $C=0$ ($t=0 \Rightarrow v=0$)

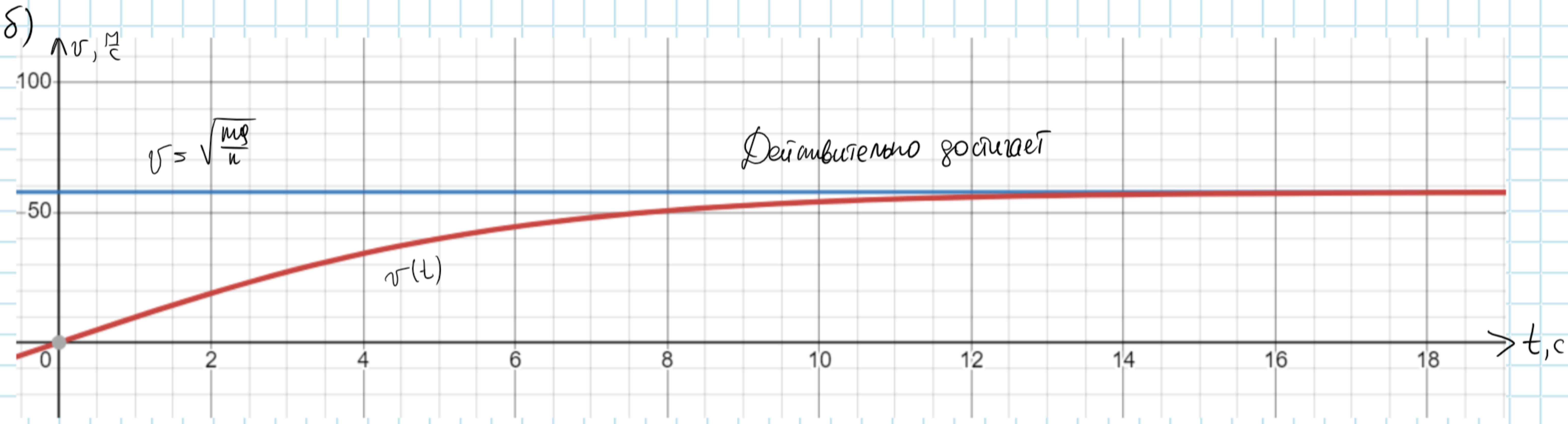
$t_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}}\cdot\ln\left(\frac{v+\sqrt{\frac{mg}{k}}}{v-\sqrt{\frac{mg}{k}}}\right) \xrightarrow{e^\wedge} e^{-2t\sqrt{\frac{gk}{m}}} = \frac{v+\sqrt{\frac{gm}{k}}}{v-\sqrt{\frac{gm}{k}}} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{\frac{mg}{k}}\left(e^{2t\sqrt{\frac{kg}{m}}}-1\right)}{e^{2t\sqrt{\frac{kg}{m}}}+1} \Rightarrow v(15) \approx 57{,}12\ \frac{м}{с}$

$a(t) = g - \frac{k}{m}v^2 \Rightarrow a(15) \simeq 0{,}245\ \frac{м}{с^2}$

$$x(t) = \int_0^{t_1} v\,dt = \sqrt{\frac{gm}{k}}\left(\frac{\ln\left(e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}+1\right)}{\sqrt{\frac{gk}{m}}}-t\right)$$

$x(15) \approx 633{,}25$ м

б)

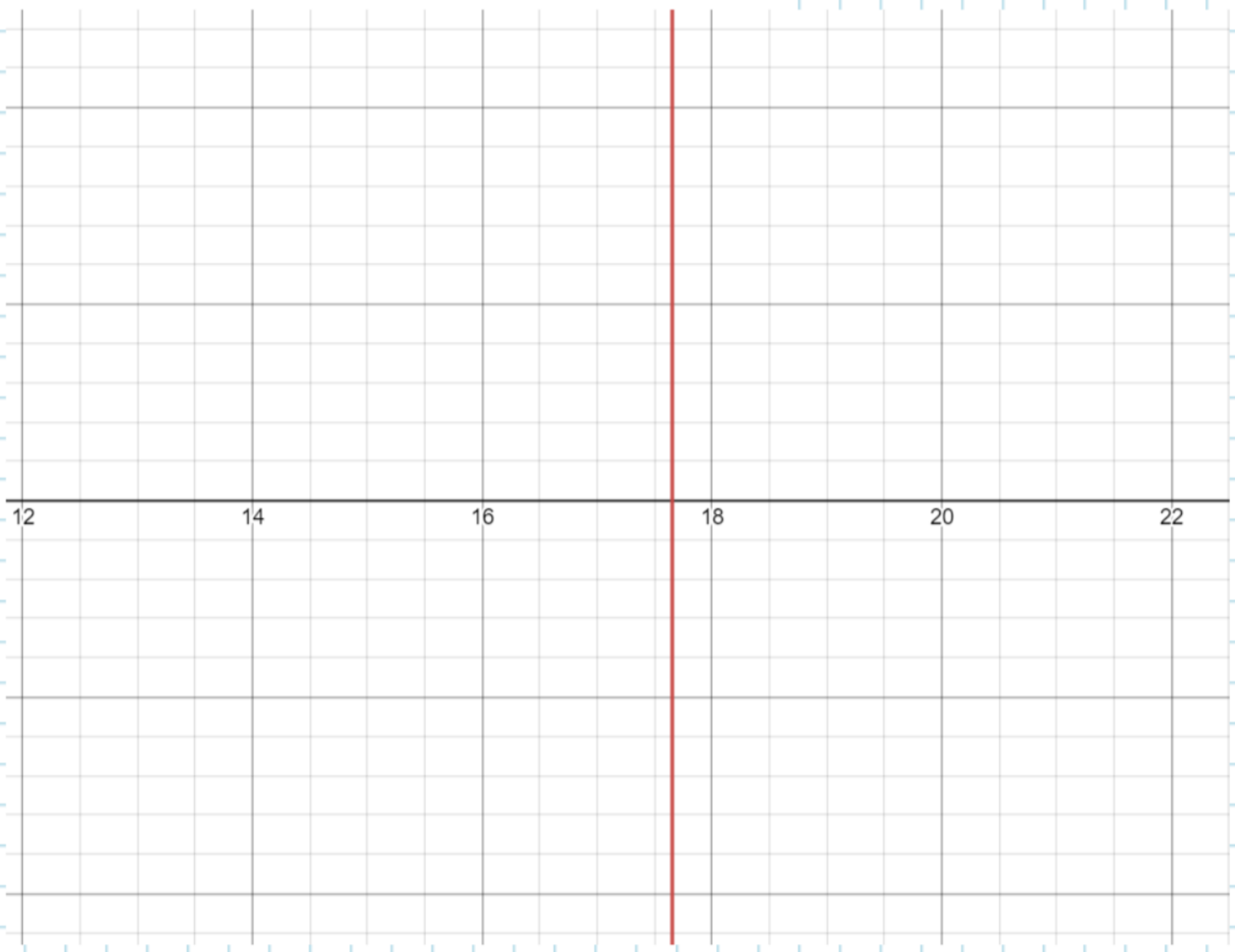


Why? : Достигается равновесие сил сопротивления среды и гравитационного притяжения

в) t - ? : $v(t) = 0{,}995\sqrt{\frac{mg}{k}} \Rightarrow t = 17{,}6525$ с.

$$0.995\sqrt{\frac{mg}{k}} = \sqrt{\frac{mg}{k}}\cdot\frac{\exp\left(2x\sqrt{\frac{kg}{m}}\right)-1}{\exp\left(2x\sqrt{\frac{kg}{m}}\right)+1}$$

Решил в Десмосе



Ответ: а) $a = 0{,}245\ \frac{м}{с^2}$

$v = 57{,}12\ \frac{м}{с}$

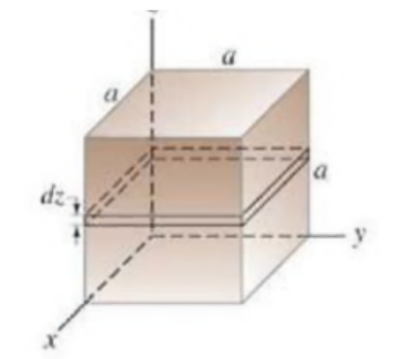
$x = 633{,}25$

в) 17,6525 с

Задание после лекции 28.04.2022

[2]

2.



*67. (III) An electric field is given by

$$\mathbf{E} = E_{x0}e^{-\left(\frac{x+y}{a}\right)^2}\hat{\mathbf{i}} + E_{y0}e^{-\left(\frac{x+y}{a}\right)^2}\hat{\mathbf{j}},$$

where $E_{x0} = 50\,\mathrm{N/C}$, $E_{y0} = 25\,\mathrm{N/C}$, and $a = 1.0\,\mathrm{m}$. Given a cube with sides parallel to the coordinate axes, with one corner at the origin (as in Fig. 22–48), and with sides of length 1.0 m, estimate the flux out of the cube using a spreadsheet or other numerical method. How much total charge is enclosed by the cube?

Поток через куб можно найти по Теореме Остроградского-Гаусса

Поток вектора **a** через замкнутую поверхность S равен интегралу от $\mathrm{div}\,\mathbf{a}$, взятому по объему V, ограниченному поверхностью S[1]

$$\iint_S \mathbf{a}\cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \mathrm{div}\,\mathbf{a}\cdot dv$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = E_{x0}\cdot\left(-2\left(\frac{x+y}{a}\right)\cdot\frac{1}{a}\right)\cdot\exp\left(-\left(\frac{x+y}{a}\right)^2\right) + E_{y0}\cdot\underbrace{\left(-2\left(\frac{x+y}{a}\right)\cdot\frac{1}{a}\right)\cdot\exp\left(-\left(\frac{x+y}{a}\right)^2\right)}_{f(x,y)} =$$

$$= (E_{x0}+E_{y0})\cdot f(x,y)$$

$$\Phi = (E_{x0}+E_{y0})\iiint_{V_{куба}} f(x,y)\,dV_{куба} = (E_{x0}+E_{y0})\int_0^1 dz\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)\,dx$$

Используя методы численного интегрирования и библиотеку scipy языка Python, получаем ответ:

```
from scipy import integrate
import numpy as np
```

```
def e(x, y, z):
    return -150 * (x + y) * np.exp(-(x + y)**2)
```

```
print(integrate.tplquad(e, 0, 1, 0, 1, 0, 1))
```

```
-45.867515614682425
```

$$\boxed{\Phi_{cube} \simeq -45{,}87\ \frac{В}{м^3}}$$

Ответ: $\Phi \simeq -45{,}87\ \frac{В}{м^3}$
$q \simeq -4.06E-9$

Также, используя формулу из лекции, мы с легкостью можем найти заряд куба.

$$\boxed{\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV}$$

$$\boxed{q = \Phi_{cube}\cdot\varepsilon_0 \simeq -4.06\cdot 10^{-9}\ Кл}$$

Также можно посчитать отдельно поток по каждой из граней куба и сложить:

$$\Phi_{грани} = \iint_{S_{грани}} (\vec{E}, \vec{n}_{грани})\cdot dS$$

```
@lru_cache
def integral(func, a, b, c, q, h = 1e-3):
    d = h
    res = 0
    for i in np.arange(a, b, d):
        for j in np.arange(c, q, d):
            s = d**2
            res += s * func(i, j)
    return res

def numerical(func, a, b, c, q, hstart = 1e-1):
    while True:
        yh = integral(func, a, b, c, q, hstart)
        yh2 = integral(func, a, b, c, q, hstart / 2)

        if (np.fabs(yh2 - yh) / np.fabs(yh2) < 5e-2):
            print(yh2, yh)
            return yh2

        print(hstart)
        hstart /= 2
```

```
def xplus(y, z):
    return 50 * np.exp(-(1 + y)**2)

def xminus(y, z):
    return -50 * np.exp(-y**2)

def yplus(x, z):
    return 25 * np.exp(-(1 + x)**2)

def yminus(x, z):
    return -25 * np.exp(-x**2)
```

в xplus вместо x в итоговой формуле стоит 1, т.к. x = 1 для передней грани

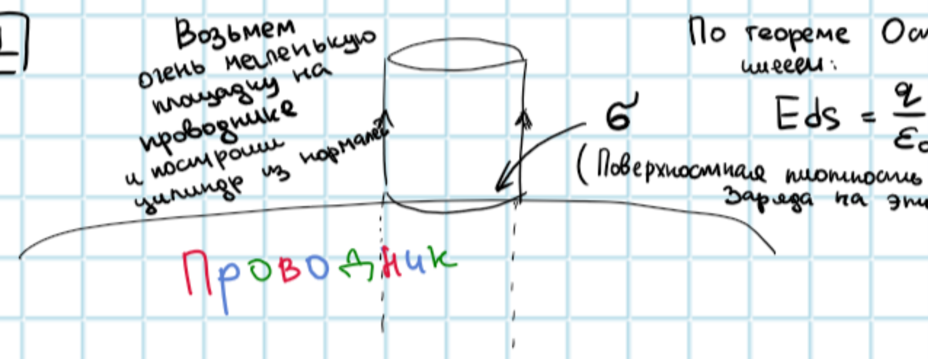
В остальных функциях аналогично

```
print(integral(xplus, 0, 1, 0, 1) + integral(xminus, 0, 1, 0, 1) + integral(yplus, 0, 1, 0, 1) + integral(yminus, 0, 1, 0, 1))
```

```
-45.87810275408231
```

— Получаем очень близкий к „библиотечной" функции ответ

[1]



σ (Поверхностная плотность заряда на этой маленькой площадке)

По теореме Остроградского - Гаусса имеем:

$$E ds = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma ds}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

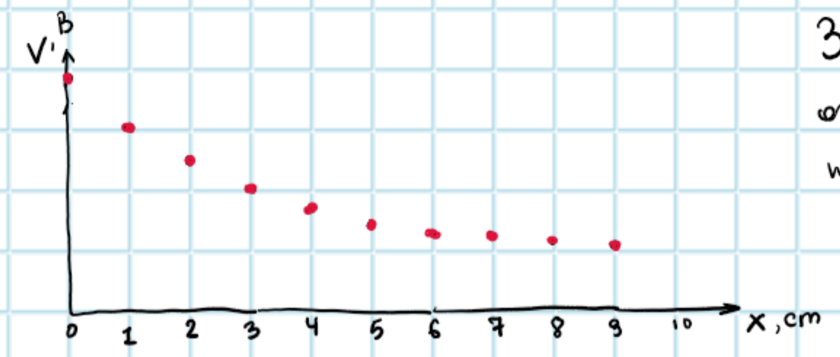
Задание после лекции 05.05.2022

2. (III) You are trying to determine an unknown amount of charge using only a voltmeter and a ruler, knowing that it is either a single sheet of charge or a point charge that is creating it. You determine the direction of greatest change of potential, and then measure potentials along a line in that direction. The potential versus position (note that the zero of position is arbitrary, and the potential is measured relative to ground) is measured as follows:

x (cm)	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
V (volts)	3.9	3.0	2.5	2.0	1.7	1.5	1.4	1.4	1.2	1.1

(a) Graph V versus position. Do you think the field is caused by a sheet or a point charge? (b) Graph the data in such a way that you can determine the magnitude of the charge and determine that value. (c) Is it possible to determine where the charge is from this data? If so, give the position of the charge.

Ответ: а) Точечный заряд
б) $1{,}55\cdot10^{-11}$ Кл
в) 3,73 см относительно исходной позиции

а) 

Зависимость V от x очень похожа на гиперболическую, так что $\boxed{\text{заряд – точечный}}$

Если бы причиной заряда была плоскость, то потенциал убывал бы линейно

б) Потенциал в точке определяется соотношением

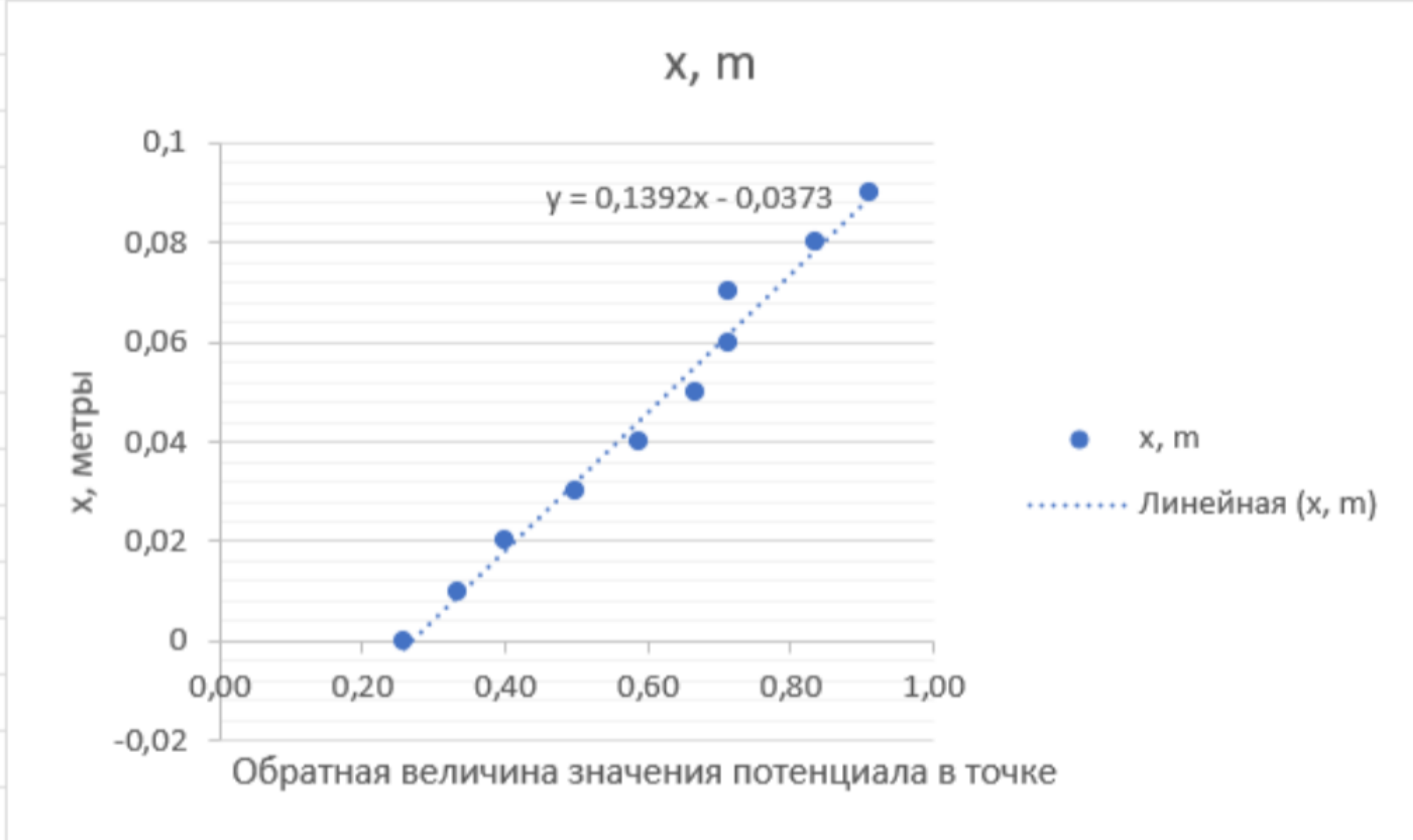
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x'} \text{, } x' \text{ – расстояние от заряда}$$

Т.к. нам неизвестна начальная позиция заряда и его величина, примем позицию за B, а $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}$ за A

тогда $x' = x - B$ и $\varphi = \frac{A}{x-B} \Rightarrow x = A\cdot\frac{1}{\varphi} + B$

Используем МНК (excel) и найдем коэф-ты A и B

\frac{1}{\varphi}, V	x, m
0,26	0
0,33	0,01
0,40	0,02
0,50	0,03
0,59	0,04
0,67	0,05
0,71	0,06
0,71	0,07
0,83	0,08
0,91	0,09



$A = 0{,}1392\ [\frac{Кл}{Ф}\cdot М] \Rightarrow \boxed{q = 4\pi\varepsilon_0\cdot A \simeq 1{,}55\cdot10^{-11}\ Кл}$

в) $B = -0{,}0373\ [М] \Rightarrow$ Заряд находится в 0,0373 м = $\boxed{3{,}73\ см}$ от исходной позиции

1 Работа электронно-лучевой трубки основывается на явлении Термоэлектронной эмиссии.
Есть 2 маленьких пластинки (электроды), которые поместили в лампочку или трубку, из которых предварительно выкачали весь воздух. К этим пластинкам приложена разность потенциалов. Электрод, заряженный отрицательно, называется катодом, а положительно — анодом. Катод при нагревании начинает нагреваться и излучать свет, и отрицательный заряд перетекает от катода к аноду.

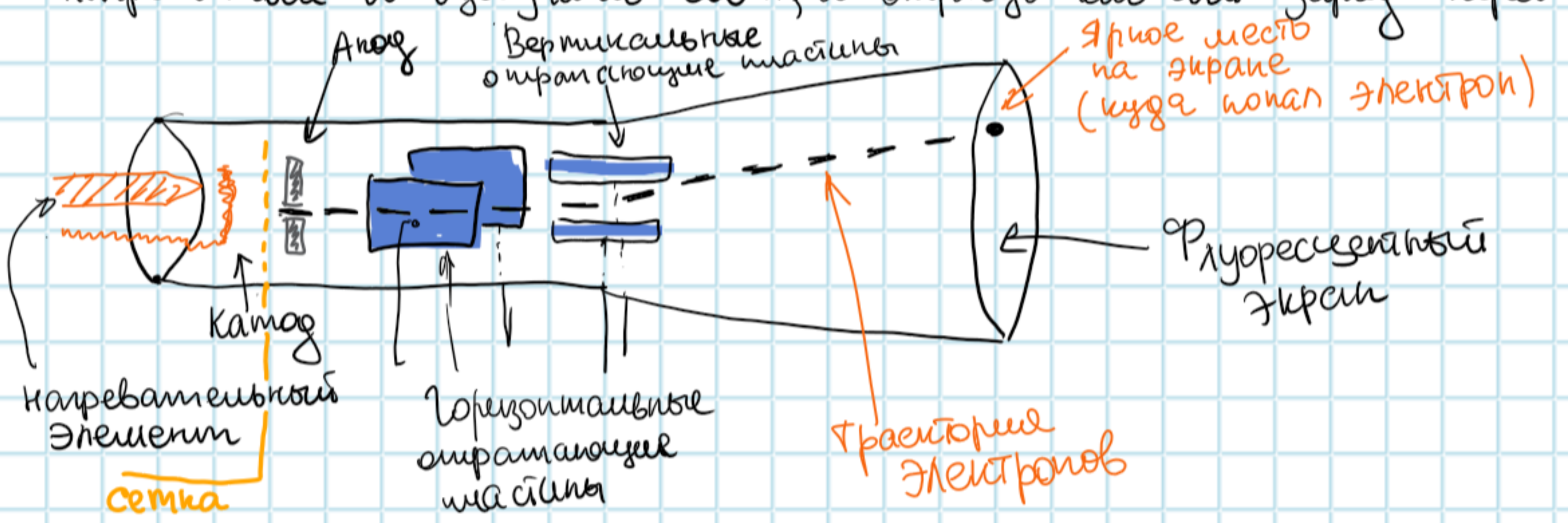


Схема простой Электронно-лучевой трубки.

Электроны, излучаемые катодом, ускоряются под высоким напряжением (от 5 до 50тыс. В), прикладываемым между катодом и анодом. Электроны выходят из этой „электронной пушки" через маленькое отверстие в аноде и попадают на материал, который начинает светиться при контакте с электроном. Для направления электрона используются отклоняющие пластины. (электрон смещается к положительно заряженной пластине).
Тем самым, можно строить изображение на экране из таких светящихся точек

Одно из устройств, использующих электронно-лучевые трубки, — осциллограф. Это прибор для усиления, измерения и визуального наблюдения (на экране с ЭЛТ) электрического сигнала как $f(t)$. Сигнал, зачастую, — изменяющееся от времени напряжение. Электрон отклоняется отклоняющими пластинами и выводится на экран. Примером сигнала могут служить показания ЭКГ.


Аналоговый осциллограф