22 Двойной интеграл. Свойства. Необходимое условие существования.

$$\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(P_i^*)\cdot \Delta\omega_i = \iint_S f(x,y)\,dx\,dy$$

Свойства: $\boxed{\text{Если } \lim\sum\dots \text{ существует, конечен и не зависит от разбиения, то } f\in R(D)}$

1. Линейность

$$\iint_S (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dx\,dy = \alpha\iint_S f(x,y)\,dx\,dy + \beta\iint_S g(x,y)\,dx\,dy$$

2. Аддитивность Если $D = D_1 \cup D_2$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

3. Интеграл дифференциала

$$\iint_D dx\,dy = S_D$$

Критерий Лебега (достаточное)
$f\in R(D) \iff f$ - огр. на D, мн. т. разрыва - конечно

Необходимое условие существования
Если $f\in R(D) \Rightarrow f$ - ограничена на D
// Можно провести аналогию с асимптотами, только f уже будет стремиться к плоскостям

4. Интегрирование неравенств Если $f(x,y)\le g(x,y)\ \forall (x,y)\in D$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

5. Интегрируемость модуля

$$\left|\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy$$

6. Интегрируемость произведения

Если $f,g\in R(D) \Rightarrow f\cdot g\in R(D)$

7. Теорема о среднем

$$\inf f\cdot\iint_D g\,dx\,dy \le \iint_D f\cdot g\,dx\,dy \le \sup f\iint_D g\,dx\,dy$$

$$m\cdot S_D \le \iint_D f\,dx\,dy \le M\cdot S_D$$

31 Поверхностный интеграл II рода

$\vec F(P,Q,R)$

$$\iint_\Sigma P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iint_\Sigma (\vec F,\vec n)\,d\Sigma$$

$\vec n = (-z'_x, -z'_y, 1)$, $\vec n_e = \frac{\vec n}{|\vec n|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

Считает поток векторного поля через пов-ть

26 Цилиндрическая и сферическая СК. Замена переменной в тройном интеграле. Теорема о замене переменной.

Цилиндрическая СК

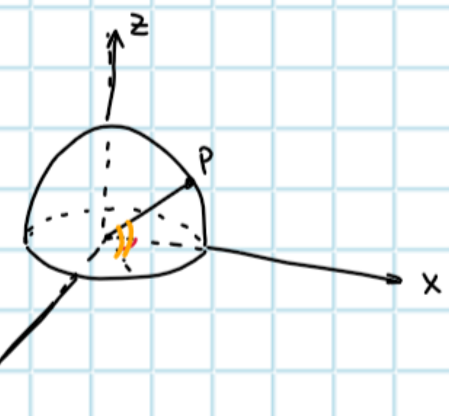
$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z\end{cases} \quad J = \rho$$

$0\le\varphi\le 2\pi$
$0<\rho\le R$
$0\le z\le H$

Сферическая СК

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ z = \rho\sin\theta\end{cases}$$

$J = \rho^2\cos\theta$



* Замена как в двойном интеграле

27 Приложения тройных интегралов

Объем, масса - понятно

Координаты центра масс:

V - тело, $\rho(x,y,z)$ - плотность тела

$$x_0 = \frac{1}{m}\cdot\iiint_V x\,\rho(x,y,z)\,dV$$

Моменты инерции (отн ?)

Отн. начала координат: $J_0 = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

Страница 74. Виноградова, Садовничий

30 Поверхностный интеграл I рода

Делим пов-ть на маленькие части и составляем интегральную сумму Римана

$$d\Sigma = \sqrt{1+\dot z_x^2 + \dot z_y^2}\,dx\,dy$$

$\Sigma: z - z(x,y) = 0$

Не зависит от ориентации нормали, считает массу оболочки

28 Криволинейный интеграл I-рода

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t)\end{cases}$$

Разбиваем кривую на маленькие кусочки и записываем интегральную сумму

L - кусочно-гладкая $\quad \int f(x,y,z)\,ds$

$ds = \sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}\,dt$

$ds = \sqrt{\rho^2+\dot\rho^2}\,d\varphi$

NB Интеграл не зависит от разбиения и направления интегрирования. Вычисляет массу кривой

29 Криволинейный интеграл II рода.
Критерий консервативности поля

Дано векторное поле $F(P,Q,R): \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

Вычисляет работу этого поля при движении по кривой

Смотрим по проекциям кривой на оси координат и составляем интегральную сумму

$$\sigma^x = \sum_{i=1}^{k} F(P_i^*)\cdot\Delta x_i$$

$$\lim_{\max\Delta\to 0}(\sigma^x+\sigma^y+\sigma^z) = \int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Можно свести к интегралу Римана: подставить параметризацию кривой и посчитать.

190 Виноградова

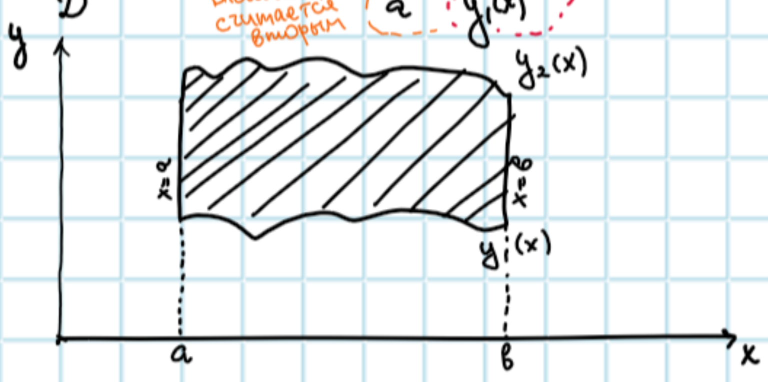
Векторное поле $\vec F$ называют потенциальным в D, если $\exists u: D\to\mathbb{R}: \operatorname{grad} u = \vec F$

23 Повторный интеграл. Теорема о переходе от двойного к повторному интегралу.

Если $y_1(x), y_2(x)$ - непрерывны на $[a,b]$, то

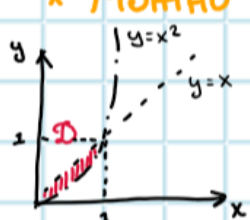
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Внешний, считается вторым. Внутренний, считается первым



24 Замена переменной в двойном интеграле.
Теорема о замене переменной

* Можно менять порядок переменных



$$S_D = \iint_D dx\,dy = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy = \int_0^1 dy\int_y^{\sqrt y} dx$$

* Можно переходить в другие СК

$$J = [\text{якобиан перехода}] = \left(\frac{x,y}{\rho,\varphi}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v)\end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

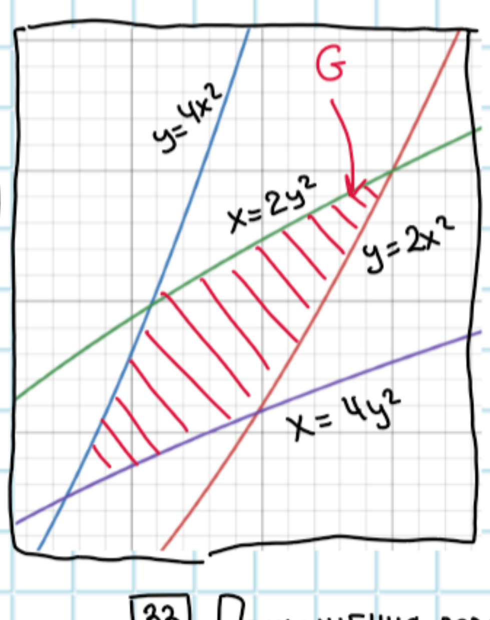
при этом $D_{xOy} \xleftrightarrow{\text{биекция}} G_{uOv}$

$x'_u, x'_v, y'_u, y'_v \in C(\bar D)$

* Даже в параболическую

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = bx\end{cases} \Rightarrow J\left(\frac{a,b}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 2\frac{x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & 2\frac{y}{x}\end{vmatrix} = 4-1 = 3 \Rightarrow J\left(\frac{x,y}{a,b}\right) = \frac{1}{3}$$

* Вычислить площадь фигуры



$$S = \iint_G dx\,dy = \frac{1}{3}\iint_G da\,db = \frac{1}{3}\int_{1/4}^{1/2} da\int_{1/4}^{1/2} db = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{48}$$

25 Тройной интеграл. Необходимое и достаточное условие существования.
Теорема о среднем. Теорема о переходе к повторному.

Интегральная сумма Римана: $\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i^*)\,\omega_i$

ω_i - искривлённый кубик в 3D

Задача - искать массу тела

Необходимое условие: если $f(x,y,z)\in R(D) \Rightarrow f(x,y,z)$ ограничена в обл. D

Достаточные условия:

1. D - кубируемая
2. $f(x,y,z)$ - огр. в D
3. f - непрерывна везде на D, за исключением конечного числа точек

Теорема о среднем:

$$\iiint_D f(P)\,dx\,dy\,dz = f(P_0)\cdot V(D),\ P_0\in D$$

□ очев. что $m\cdot V \le \iiint f\,dv \le M\cdot V$

f принимает любое значение, т.к. непрерывна $[m, M]$

$$\exists f(P_0) = \frac{\iiint f\,dv}{V} \le M \ ■$$

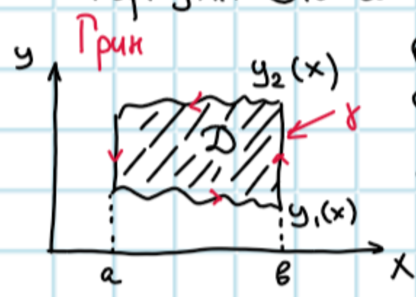
Теорема о переходе к повторному

Так же как и у двойного

□ разбить на мелкие области и записать интегральную сумму Римана ■

32 Формула Грина. Формула Гаусса - Остроградского. Формула Стокса.

Грин



Односвязная область, квадрируемая
Ф-ла связывает двойной интеграл по области с криволинейным интегралом по границе

$P(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}\in C(\bar D) \Rightarrow \int_\gamma P(x,y)\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$

□

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int_a^b (P(x,y_2(x)) - P(x,y_1))\,dx$$

$$\int_\gamma P\,dx = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = \int_a^b P(x,y_1)\,d - \int_a^b P(x,y_2)\,d \ ■$$

уходят в ноль, т.к. $x = const \Rightarrow dx = 0$

Теперь скажем, что это будет работать всегда: можно разбить на много маленьких областей, которые удовл. усл. и воспользоваться пределом

Гаусс-Остроградский

Σ - кусочно-гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$, ограничивающ. тело V, $R(x,y,z)\in C(V)$; $\frac{\partial R}{\partial z}\in C(V) \Rightarrow$

$$\iint_\Sigma R\,dx\,dy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$$

Стокс

Выбираем обход по контуру γ

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_\Sigma \nabla\times F\,d\Sigma$$

На контур натягиваем пов-ть и считаем двойной интеграл по ней

□ Разбиваем S на кучу кусков, $\oint_{L_i} A\,dl = \operatorname{rot}_n A_i S_i$, дальше через предел ■

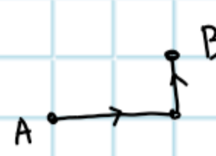
33 Приложения поверхностных интегралов

• Поток • Стокс

что-то еще?

34 Восстановление потенциала по заданному векторному полю

$$u(B) = u(A) + \int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$



так проще счит