1202

$\hat{A}: X \to X$ $\quad \exists \dim L$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$L \subset X$

$x \in L$ $\quad \hat{A}x = \lambda x$ $\quad (3-\lambda)\left((-1-\lambda)(-1-\lambda)-4\right)=0$

$Ax = y \in L$ $\quad A \cdot x = \lambda x$ $\quad \lambda_3 = 3$ $\quad 1+\lambda+\lambda+\lambda^2-4=0$

$\lambda^2+2\lambda-3=0$

$X_3: \ (A-3I)x=0 \quad x_3=(0,0,1)^T \quad \lambda_1=-3 \quad \lambda_2=1$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

X_3 – своб

$X_2 = 0$

$X_1 = 0$

$X_2: \ (A-I)x=0 \quad (1,-1,0)^T$

$X_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$X_2 = -X_1$

$X_1 =$ своб. $\quad (1,1,0)^T$

$X_1:$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$e' = Te$ $\quad Ax = \lambda x$

$x' = Sx$ $\quad A(Tx') = ATx' = \lambda Tx'$

$x = Tx'$ $\quad T^{-1}ATx' = \lambda x'$

$A'x' = \lambda x'$

$\Delta = -1-1=-2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T^* = \begin{pmatrix} 0 & +1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(T^*)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ +1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$(-1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) - 9(2-\lambda) = 0$

$\lambda_{1,2} = 2$

$\lambda_3 = -4$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{3} \end{pmatrix}$$

x_2, x_3

$x_1 = x_3$

$x_3 = -x_1$

$x_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

25.04 Жорданова клетка

$$B = J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & & \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(J - \lambda I) = (\lambda_0 - \lambda)^n \Rightarrow \lambda$

$J - \lambda_0 I \Rightarrow 1$ вектор собств

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Присоединённый вектор порядка m

$(A - \lambda I)^m x = 0$

$(A - \lambda I)^{m-1} x \neq 0$

$\ker B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\ker B^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

присоед. пор-ка 2

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & & \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$Ae_1 = \lambda e_1$ | $(A - \lambda E)e_1 = 0$ | $(A - \lambda E)e_1 = 0$

$Ae_2 = \lambda e_2 + e_1$ | $(A - \lambda E)e_2 = e_1$ | $(A - \lambda E)^2 e_2 = 0$

$\dots$ | $(A - \lambda E)e_3 = e_2$ | $(A - \lambda E)^3 e_3 = 0$

$\dots$ | $\dots$

$Ae_m = \lambda e_m + e_{m-1}$ | $(A - \lambda E)e_m = e_{m-1}$ | $(A - \lambda E)^m e_m = 0$

def $B = A - \lambda E$

$N_i = \ker B^i$

$n_i = \dim(\ker B^i)$

те самые присоед. вектора порядка q

I) q : $n_q = n_{q+1} = \dots$

II) $\measuredangle$ N_q и N_{q-1} Найдем $f_1, f_2 \in N_q / N_{q-1}$

III) $Bf_1, Bf_2 \in N_{q-1} / N_{q-2}$

$\{Bf_1, Bf_2 \dots S_1\ S_2 \dots\}$ базис N_{q-1} / N_{q-2}

IV) repeat st. III until N_1 / N_0

N_q	f_1	f_2			
N_{q-1}	Bf_1	Bf_2	S_1	S_2	
N_{q-2}	B^2f_1	B^2f_2	BS_1	BS_2	$R_1 \dots$
	$\vdots$	$\vdots$			

$$A = \begin{pmatrix} 1^{-\lambda} & -3 & 3 \\ -2 & -6^{-\lambda} & 13 \\ -1 & -4 & 8^{-\lambda} \end{pmatrix}.$$

$(1-\lambda)(-6-\lambda)(8-\lambda) + 24 + 3 \cdot 13 = -(-6-\lambda)3 - 4(1-\lambda) \cdot 13 + 6(8-\lambda)$

$(1-\lambda)(-48 + 6\lambda - 8\lambda + \lambda^2) + 24 + 3 \cdot 13 = 18 + 3\lambda + 4 \cdot 13 \cdot \lambda - 4 \cdot 13 + 48 - 6\lambda$

$-48 + 6\lambda - 8\lambda + \lambda^2 + 48\lambda - 6\lambda^2$

$\xi_1 = 7\xi_3 - 4\xi_3$

$|A - \lambda I| = (1-\lambda)^3 \qquad \lambda = 1$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 7 & -13 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} {-2r_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3\xi_3 \\ \xi_3 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \\ \end{pmatrix}$$

$B = (\dots)$

$B^2 = (\dots) \qquad N_2 =$

$B^3 = \Theta \qquad N_3 = X$

03.04

Жорданова форма матрицы оператора

$\mathcal{A}: R_n \to R_n$

алг. кратность λ_2

$f(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)^{m_1}(\lambda_2-\lambda)^{m_2}\dots(\lambda_p-\lambda)^{m_p}$; $\lambda_i \neq \lambda_j \quad i \neq j$

$m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$

$\beta_i \leq m_i$

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda_1 & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}}_{m_1 \times m_1} & & & \bigcirc \\ & \lambda_2 \ddots \lambda_2 & & \\ \bigcirc & & \lambda_p \ddots & \\ & & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

Матрица $\mathcal{A}$ в собственном базисе

$$J_k(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}_{k \times k}$$

$\chi(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k$

$\sigma = \{\lambda_0\} \quad m_0 = k$

Жорданова клетка порядка k, соотв λ_0

$$B = J_k(\lambda_0) - \lambda_0 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg\, B = k-1 \Rightarrow \dim L_{\lambda_0} = 1$

$k \geq 2 \Rightarrow$ не сущ. базиса из собств. векторов $\Rightarrow$ ни в одном базисе матрица не будет иметь diag вид.

df Присоединенные векторы

$m \geq 1$: $\begin{cases} (A-\lambda I)^{m-1} \cdot x \neq \theta \\ (A-\lambda I)^m \cdot x = \theta \end{cases} \Rightarrow$ x - присоединённый вектор порядка m

m - высота присоед. вектора

NB собственный вектор - присоединенный вектор порядка 1

$\{e_1, \dots e_m\}$, $e_1 \neq 0$ $\qquad B = A - \lambda I$

$\mathcal{A}e_1 = \lambda e_1$	$(\mathcal{A} - \lambda I)e_1 = 0$	$(\mathcal{A}-\lambda I)^1 e_1 = \theta$	$Be_1 = \theta$
$\mathcal{A}e_2 = \lambda e_2 + e_1$	$(\mathcal{A} - \lambda I)e_2 = e_1$	$(\mathcal{A}-\lambda I)^2 e_2 = \theta$	$B^2 e_2 = \theta$
$\mathcal{A}e_3 = \lambda e_3 + e_2$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$			
$\mathcal{A}e_m = \lambda e_m + e_{m-1}$	$(A-\lambda I)e_m = e_{m-1}$	$(A-\lambda I)^m e_m = \theta$	$B^m e_m = \theta$

e_1 - собств. вектор

e_i - присоед. в-ра порядка i

$\{e_1, \dots e_m\}$ - ЛНЗ

df $$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} J_{i_1}(\lambda_0) & & & \\ & J_{i_2}(\lambda_0) & & \theta \\ & & \ddots & \\ \theta & & & J_{i_s}(\lambda_0) \end{pmatrix}$$

Жорданов блок

s - геом кратность λ_0

$$\boxed{\sum_{j=1}^{s} i_j = m}$$

Ex $\chi(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^m \quad \alpha = m; \ \beta = s$

$m = 2 \quad s = 1 \qquad A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ Ж. кл. порядка 2

$m=4 \quad s=1 \qquad A = \lambda_0 I + I^2$

$m=4 \quad s\ 2$

$m = 3 \quad s = 1 \qquad A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$

$m = 3 \quad s = 2 \qquad A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0\end{matrix}} & \begin{matrix}0 \\ 0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0 & 0\end{matrix} & \boxed{\lambda_0} \end{pmatrix}$

Th О Жорд. форме матрицы оператора

$\mathcal{A}: X_n \to X_n \qquad \chi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}, \quad \sum_{i=1}^{p} m_i = n$

$\Rightarrow$ $\exists$ базис, состоящий из собств. и присоед. векторов, в котором матрица оператора имеет блочно-диагональную форму (жорданову)

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{A(\lambda_1)} & & \Theta \\ & \boxed{A(\lambda_2)} & \\ \Theta & & \boxed{A(\lambda_p)} \end{pmatrix}$$

Этот базис называется Жордановым

Построение

λ - с.з. оператора $\quad \alpha = m$; $\beta = s \qquad n_k + r_k = n$; $B^0 = I$; $\quad r_0 = n$, $n_0 = 1$

$B = A - \lambda I$; $\quad B^k = (A - \lambda I)^k$; $\quad N_k = \ker B^k$; $n_k = \dim N_k$; $r_k = \operatorname{rg} B^k$

$\operatorname{rg} B^{k+1} \le \operatorname{rg} B^k \Rightarrow n_{k+1} \geqslant n_k$

$N_1 \subset N_2 \subset N_3 \dots$

Th $\exists q \quad \forall i \geqslant q \quad N_i = N_{i+1} = \dots$

$n_q = m$

1. Возводим B^k пока не найдем q : $N_q = N_{q+1} = \dots$
2. N_q и N_{q-1}

$\underbrace{f_1, \ f_2 \dots}_{n_q - n_{q-1}} \in N_q$ - достраиваем базис N_{q-1} до N_q

$$\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(2\cos x)^2 - (\cos x)^2\right] dx = 3\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = 3\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \, dx =$$

$$= \frac{3\pi}{2} \cdot x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3\pi}{4} \sin 2\alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{3\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{3\pi}{4}(0 - 0) =$$

$$= \frac{3\pi^2}{2}$$

0304

$X = L_1 \dot{+} L_2 \qquad x! = x_1 + x_2$

$P_{L_1}^{\parallel L_2} x = x_1$

$\{x_1, x_2 \dots x_n\}$ базис

$X = \dot{+}_{i=1}^{n} L\{x_i\} \qquad P_{x_i} x = \xi^i x_i$

$(f^j, x_i) = \delta_i^j \qquad (f^j, x) = \xi^j$

$P_{x_i} x = (f^i, x) \cdot x_i = \underset{x_i}{(\ )} \; f^i(\ ) \; \underset{x}{(\ )} = (x_i, f_i) X$

$(f^j, x_i) = \delta_j^i$

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} (x_1\ x_2 \dots x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$F \cdot X = E$

$\boxed{F = X^{-1}}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$\chi(\lambda) = (-3-\lambda)((-1-\lambda)(-1-\lambda) - 4)$

$(3+\lambda)(1 + 2\lambda + \lambda^2 - 4) = 0 \qquad \lambda_{1,2} = -3$

$(3+\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 3) = 0 \qquad \lambda_3 = 1$

$(3+\lambda)(\lambda+3)(\lambda-1) = 0$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad \text{ФСР} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{ФСР} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$P_\lambda = P_{x_\lambda^1} + P_{x_\lambda^2}$

$$P_{x_i} = \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \vdots \end{pmatrix} (f_i^1 \dots f_i^n)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3.5-\lambda & 1 & 1 \\ 0.25 & 3.5-\lambda & 1.5 \\ 0.5 & -1 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$\chi(\lambda) =$

$(3.5-\lambda)(3.5-\lambda)(5-\lambda) - 0.25 + 0.75 - 0.5(3.5-\lambda) + 1.5(3.5-\lambda) - 0.25(5-\lambda) = 0$

$\lambda = 4$

$$B = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 & 1 \\ 0.25 & -0.5 & 1.5 \\ 0.5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad N_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$f(x) = \cos x$

$f(A) = \cos A$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & -7 \\ -1 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \lambda \end{pmatrix}$$

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \ddots & \frac{f''(\lambda)}{2!} \\ & & f(\lambda) & \ddots & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & & & \ddots & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

$(J_1 \quad \dots) \qquad (f(J_1) \quad \dots)$

13.05 СЛДУ

$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$

$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n$

$\begin{cases} \dot{x} = y + 1 \\ \dot{y} = 2e^t - x \end{cases}$

$\ddot{x} = \dot{y} = 2e^t - x$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$$

$x' = 2x + y$

$y' = 3x + 4y$

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z, \\ \dot{z} = 2x - 4y \end{cases}$$
$(\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -5).$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ \cancel{3} & \cancel{-6} & \cancel{-3} \\ \cancel{2} & \cancel{-4} & \cancel{-2} \end{pmatrix} \quad v_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & +5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \cancel{2} & \cancel{-2} & \cancel{-2} \\ \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

George Lopatenk

Решение: $C_1X_1 + C_2X_2 \dots + \dots$

$x_1 = e^{\lambda t} h_1$

$x_2 = e^{\lambda t}\left(\frac{h_1 \cdot t}{1!} + h_2\right)$

$x_3 = e^{\lambda t}\left(\frac{h_1 t^2}{2!} + \frac{h_2}{1!}t + h_3\right)$ генерал гавс

$\vdots$

$x_m = \left(\frac{h_1 \cdot t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{h_2 t^{m-2}}{(m-2)!} + \right.$

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = 3x + y - z, \\ \dot{z} = x + z \end{cases} \qquad (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2)$$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} (-3)\ (-2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{20.05}$

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y \\ \dot{y} = 5x + 2y \end{cases} \qquad \lambda = 3 \pm 2i$$

$$\lambda = 3+2i \quad \left(\begin{array}{cc|c} \cancel{1-2i} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ 5 & -1-2i & 0 \end{array}\right)$$

$$5\alpha - (1+2i)\beta = 0$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1-2i \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}$$

$$v e^{\lambda t} \to Re \cdot v e^{\lambda t}, \quad Im \; v \cdot e^{\lambda t}$$

$$v e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{(3+2i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} \cdot e^{3t} \cdot (\cos 2t + i \sin 2t)$$

Ответ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \cdot e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = x - y - z, \quad \dot{y} = x + y, \quad \dot{z} = 3x + z$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$$

$$\lambda_1: \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 - 2i \quad \begin{pmatrix} 2i & -1 & -1 \\ 1 & 2i & 0 \\ \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{2i} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2i & 2i \\ 1 & 2i & 0 \\ 3 & 0 & 2i \end{pmatrix}$$

$$v \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{(1-2i)t} = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{t} (\cos 2t - i \sin 2t)$$

Идём дальше:

$$\dot{x}_i = a_i x_1 + \ldots + a_{in} x_n + f_i(t)$$

$$f_i(t) = P_m^i(t) e^{\gamma t}$$

$$x_i^r = Q_{m+s}(t) e^{\gamma t}$$

$$\dot{x} = 4x - y + e^{3t}(t + \sin t)$$

$$\dot{y} = x + 2y + t e^{3t} \cos t$$

$$\lambda_{1,2} = 3$$

$$x_0 = (C_1 t + C_2) e^{3t}$$

$$y_0 = (C_1 t + C_2 - C_1) e^{3t}$$

$$C_1' t + C_2' = t + \sin t$$

$$C_1' t + C_2' - C_1' = t \cos t$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + e^{3t} \cdot t \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$$

$$\gamma = 3, \quad s = 2, \quad m = 1$$

$$x = e^{3t}(a + bt + ct^2 + dt^3)$$

$$y = e^{3t}(\ldots \ldots)$$

$$\dot{x} = 4x - y + e^{3t} \sin t$$

$$\dot{y} = x + 2y + t \cos t \, e^{3t}$$

$$\gamma = 3 \pm i \qquad m = 1 \qquad s = 0$$

$$x_2 = [(kt + e)\sin t + (mt + k)\cos t] e^{3t}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^{t} \end{cases} \qquad \begin{matrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2-\lambda)(-3-\lambda) + 4 = 0$$

$$-6 - 2\lambda + 3\lambda + \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2$$

$$3e^{t} \qquad \gamma = 1, \quad s = 1, \quad m = 0$$

$$x = (a + bt)e^{t}$$

$$y = (c + dt)e^{t}$$

$$b + a + bt = 2a + 2bt - 4c - 4dt$$

$$d + c + dt = a + bt - 3c - 3dt + 3$$

$\underline{1}$

$$b + a = 2a - 4c$$

$$d + c = a - 3c + 3$$

$$a - 4c = 4C_1$$

$$a - 4c = C_1 - 3$$

$$a = 0, \quad c = 1$$

t

$$b = 2b - 4d$$

$$d = b - 3d$$

$$-3 = -3C_1$$

$$C_1 = -1$$

$$b = 4C_1, \quad d = C_1$$

0

С помощью вариаций

$$\dot{x} = 2y - x$$

$$\dot{y} = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1}$$

$$\begin{matrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{matrix}$$

$$(-1-\lambda)(4-\lambda) + 6 = 0$$

$$-4 - 4\lambda + \lambda + \lambda^2 + 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x = C_1 e^{t} + 2C_2 e^{2t}$$

$$y = C_1 e^{t} + 3C_2 e^{2t}$$

$$C_1' e^{t} + 2C_2' e^{2t} = 0$$

$$C_1' e^{t} + 3C_2' e^{2t} = \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1}$$

$$C_2' = \frac{e^{t}}{e^{2t}+1} \qquad C_2 = \operatorname{arctg}(e^{t})$$

$$C_1' = -2C_2' \cdot e^{t}$$

$$C_1' = \frac{-2e^{2t}}{e^{2t}+1} \Rightarrow C_1 = -\ln(e^{2t}+1)$$