Нуйков Артём M3102 Вариант 8

1.8 Решить задачу Коши

$$x'' - x = \cos t, \quad \begin{matrix} x(0)=0 \\ x'(0)=1 \end{matrix}$$

Это линейное неоднородное ДУ с постоянными коэффициентами

$\lambda^2 - 1 = 0$; $(\lambda-1)(\lambda+1)=0$

$x_{общ} = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{t}$

Правая часть: $\lambda = \pm i$; $\begin{matrix} s=0 \\ m=0 \end{matrix}$

$x_2 = A\cos t + B\sin t$

$x_2' = -A\sin t + B\cos t$

$x_2'' = -A\cos t - B\sin t$

Подставим в исходное

$-A\cos t - B\sin t - A\cos t - B\sin t = \cos t$

$-2A\cos t - 2B\sin t = \cos t$

$A = -\frac{1}{2}$; $B = 0$

Общее решение:

$x_0 = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{t} - \frac{1}{2}\cos t$

$x_0' = -C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{t} + \frac{1}{2}\sin t$

Ответ: $x = \frac{1}{4} \cdot e^{-t} + \frac{1}{4} \cdot e^{t} - \frac{1}{2}\cos t$

Решим задачу Коши:

$x(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{2} = 0$

$x'(0) = -C_1 + C_2 = 0$

Что эквивалентно системе:

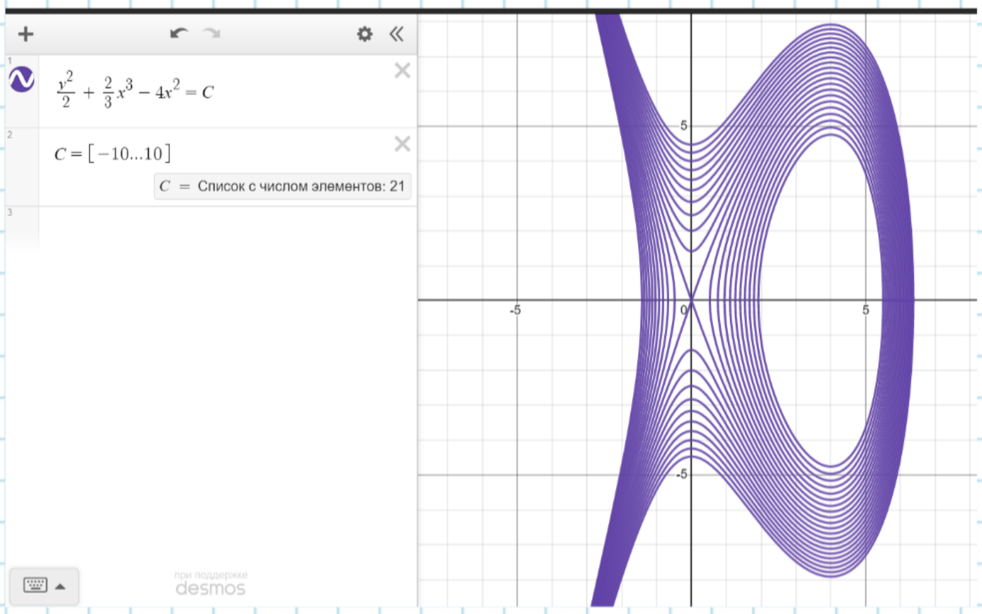
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1/2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} C_2 = \frac{1}{4} \\ C_1 = \frac{1}{4} \end{matrix}$$

4.8 $x'' + 2x^2 - 8x = 0$ Начертить фазовые траектории

Решим: $y = x' \Rightarrow$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -2x^2 + 8x \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2(x^2-4x)}{y} \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 + c$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 = \tilde{C}$$



3.8 Исследовать особые точки систем и сделать чертёж

а. $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = 5x + 2y \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ $\det A = -4 - 5 = -9$, $\operatorname{tr} A = 0$

Т.к. $\det A < 0$, тип особой точки - седло

$\chi = (-2-\lambda)(2-\lambda) - 5 = -4 + 2\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 5 = \lambda^2 - 9 \Rightarrow \lambda = \pm 3$

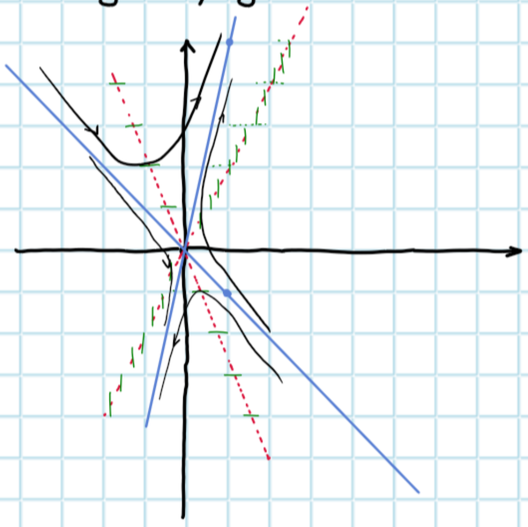
Прямые $y = kx$

$k = \frac{5+2k}{-2+k} \Rightarrow -2k + k^2 = 5 + 2k \Rightarrow k^2 - 4k - 5 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} k = 5 \\ k = -1 \end{matrix}$

Изоклины: $y = 2x$; $y = -\frac{5}{2}x$

$\measuredangle\, v(0,-1.5) = (-1.5,-3)$

Система стремится к $y = 2x$



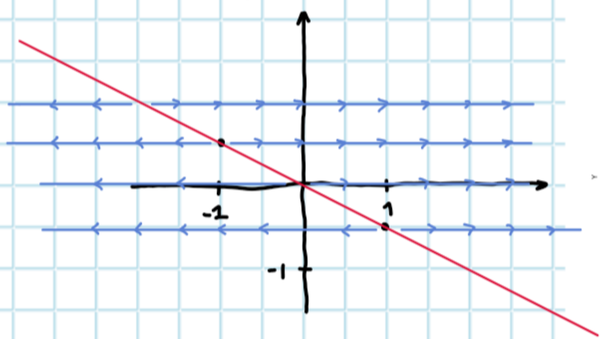
б. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 0 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\det A = 0$

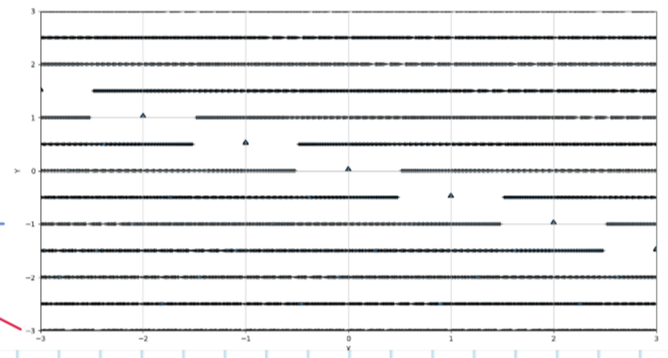
$\chi = (1-\lambda)(-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}$

Место т. покоя - прямая $y = -\frac{1}{2}x$

ФТ: линии $y = \text{const}$, т.к. $\frac{dy}{dt} = 0$

Система неустойчива, т.к. $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 = 0$





в. $\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = 5x + y \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\det A = -1 + 5 = 4$, $\operatorname{tr} A = 0$

Т.к. $\operatorname{tr} A = 0 \Rightarrow$ т. покоя - Центр

Главные изоклины: $y = -x$

$y = -5x$

$v(1,0) = \overrightarrow{(-1,5)}$

направление против часовой