Виды диффуров

0.1 Метод изоклин

a. $y' = const = \mathbb{C}$

в. строим графики

c. проводим прямые под углом $arctg(\mathbb{C})$

0.2 Составление ДУ

$$\varphi(x, y, C_1 \dots C_n) = 0$$

a. берем производные вплоть до (n)

б. решаем систему от-но констант

в. подставляем в исходное выр-е

1.1 Однородные диффуры

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ или $N(x,y)\,dx + M(x,y) = dy$, $N(kx, ky) = k^n \cdot N(x,y)$

n - порядок уравнения

a. Замена $t = \frac{y}{x}$

б. Решить от-но t

в. Обратная замена $y = t \cdot x$

1.2 Линейные диффуры

$$y' + a(x) \cdot y = b(x)$$

a. Решить $y' + a(x) \cdot y = 0$ Результат: $y = \mathbb{C}(x) \cdot f(x)$

в. Подставить в исходное и найти $\mathbb{C} = \varphi(x)$

c. Собрать ответ

1.3 Уравнение Бернулли

$$y' + a(x) \cdot y = b(x) \cdot y^n$$

a.1 Замена $z = y^{1-n}$, $dy = \frac{y^n \cdot dz}{1-n}$

в.1 Решаем как Бернулли

a.2 Замена $y = u(x) \cdot v(x)$

в.2 Обнуляем v' и находим u

1.4 Уравнение Риккати

$$y' = p(x) \cdot y^2 + q(x) y + f(x)$$

a.1 $y = y_r + \varphi(x)$ - подставить в исходное

$$y' = y^2 + x^\alpha$$

a.2 Решается, если $\frac{\alpha}{2\alpha + 4} \in \mathbb{Z}$

2.1 Диффуры высоких порядков I

$$F(x, y^{(k)}, \dots y^{(k+n)}) = 0$$

a. Замена $z = y^{(k)}(x)$

2.2 Диффуры высоких порядков II

$$F(y, y', \dots y^{(n)}) = 0$$

a. Замена $z = y'$

$$y'' = (z(y))'_x = z' \cdot y' = z'z$$

$$y''' = z''z^2 + (z')^2 z$$

2.3 Линейные ДУ с постоянными коэф. (однородные)

$$a_0 \cdot y^{(n)} + \dots + a_n \cdot y = 0$$

$$a_0 \lambda^n + \dots + a_n = 0 \quad : \chi$$

λ_i - корень χ

a. $\lambda_i \in \mathbb{R}$, кратность k

$$y_i = (\mathbb{C}_1 + \mathbb{C}_2 x + \dots + \mathbb{C}_k \cdot x^{k-1}) e^{\lambda_i x}$$

в. $\lambda_i = a \pm bi \in \mathbb{C}$, кратность k

$$y_i = (\mathbb{C}_1 \cos bx + \mathbb{C}_2 \sin bx + \dots + \mathbb{C}_{2k-1} \cdot x^{k-1} \cos bx + \mathbb{C}_{2k} \cdot x^{k-1} \sin bx) \cdot e^{ax}$$

2.4 Линейные ДУ с постоянными коэф. (неоднородные)

$$a_0 y^{(n)} + \dots + a_n y = f(x)$$

$$y_{реш} = y_{общ}^{\boxed{2.3}} + y_r$$

a. $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\gamma x}$

$y_r = x^s \cdot Q_n(x) \cdot e^{\gamma x}$, s - кратность γ как корня χ

в. $f(x) = (P_m \cos bx + Q_m \sin bx) e^{ax}$

$$y_r = x^s (N_m \cdot \cos bx + M_m \sin bx) e^{ax}$$

3.1 Параметризация

$e^{y'} + y' = x$, $\exists\, y'_x = t$

$$x = t + e^t$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 + e^t \\ \frac{dy}{dx} = t \end{cases} \Rightarrow y'_t = t(1 + e^t)$$

3.2 Интегрирующий множитель

$$\psi(\omega) = \frac{M'_x - N'_y}{N \cdot \omega'_y - M \omega'_x}$$

$$N(x,y)\,dx + M(x,y)\,dy = 0$$

$$\mu = \mathbb{C} \cdot e^{\int \psi \, d\omega}$$