Интегрирование дробно-рациональной функции

$$\int \frac{Q_k(x)}{P_n(x)}\,dx$$

1) $k>n \Rightarrow$ делим в столбик

2) $k<n$ $\quad \int \frac{Q_k(x)}{P_n(x)}\,dx = F(x)+C$

$$P_n(x) = (x-d_1)\dots(x-d_p)\underbrace{(a_1x^2+b_1x+c_1)}_{D<0}\dots\underbrace{(a_tx^2+b_tx+c_t)}_{D<0}\,;\quad p+2t=n$$

$$\frac{A}{x-d}\,;\quad \frac{A}{(x-d)^p}\,;\quad \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,;\quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^p}$$

4 вида дробей

(1) $$\int \frac{A}{x-d}\,dx = A\ln|x-d|+C\,;\qquad \# \int \frac{dx}{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+C$$

(2) $$\int \frac{A}{(x-d)^p}\,dx = A\int \frac{d(x-d)}{(x-d)^p} = A\cdot\frac{(x-d)^{-p+1}}{-p+1}+C$$

(3) $$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{a}\cdot\int \frac{d\left(\frac{ax^2}{2}+\frac{Ba}{A}x\right)}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a}\int \frac{d\left(ax^2+bx+c-bx+\frac{2Ba}{A}x\right)}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c|+C+\frac{A}{2a}\left(\frac{2Ba}{A}-b\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} =$$

$$= \frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c|+C+\left(\frac{2Ba}{A}-b\right)\frac{A}{2a}\int\frac{d(x\pm q)}{(x\pm q)^2\pm k^2} \rightarrow \text{табличная хуйня}$$

выделили полный квадрат $;\ k\in\mathbb{R}$

(4) $$\int \frac{Ax+B}{\underbrace{(ax^2+bx+c)^p}_{D<0}}\,dx = \frac{A}{2a}\left[\underbrace{\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{(ax^2+bx+c)^p}}_{\text{см. п. 3};\ =\frac{t^{-p+1}}{-p+1}} + \left(\frac{2Ba}{A}-b\right)\underbrace{\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^p}}_{=\int\frac{dt}{(t^2\pm k^2)^p}}\right]$$

Свелось к:

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int\frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^p} = \frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^p}\,dx$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int\frac{(x^2+a^2)-x^2}{(x^2+a^2)^k}\,dx = \frac{1}{a^2}\left[\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{k-1}} - \int\frac{x\cdot x\,dx}{(x^2+a^2)^k}\right] = \frac{1}{a^2}\left[\left(1+\frac{1}{2(-k+1)}\right)\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{k-1}} - \frac{x(x^2+a^2)^{-k+1}}{2(-k+1)}\right]$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^k} = \left|\begin{array}{l} x=u \\ \frac{x}{(x^2+a^2)^k}\,dx = dv \end{array}\right| = \frac{x}{2}\,\frac{(x^2+a^2)^{-k+1}}{(-k+1)} - \frac{1}{2(-k+1)}\int\frac{\overset{du}{dx}}{(x^2+a^2)^{k-1}}$$

$$v = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+a^2)^{-k+1}}{(-k+1)}$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{4}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}\right] = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{4}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{4a^2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+a^2}\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{4}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{8a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)}+\frac{3}{8a^3}\cdot arctg\frac{x}{a}\right]$$

Интегрирование тригонометрических функций

$\int R(\cos x, \sin x)\,dx$; $\int \frac{\sin^2 x + 3\cos x + 1}{2\sin x + 3}\,dx$; $\int \sin^n x\,dx$; $\int \cos^n x\,dx$; $\int \cos ax \cdot \cos bx\,dx$; $\int \sin ax \sin bx\,dx$

3 случая:

1. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

   $R(\sin x, \cos x) = R(\sin, \cos^2 x)\cos x = R(\sin, 1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

   $\sin x = t$

2. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

   $R(\sin x, \cos x) = R(\sin^2 x, \cos x)\sin x\,dx$ / $\cos x = t$

3. $R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

   $tg\,x = t \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Универсальная тригонометрическая подстановка

$tg\frac{x}{2} = t \qquad -\pi < x < \pi$ $\qquad \cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$

$$\int \cos^n x\,dx = \begin{cases} n = 2k \\ n = 2k+1 \end{cases} = \begin{cases} \int \cos^{2k} x\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^k dx \quad \text{and repeat...} \\ \int \cos^{2k+1} x\,dx = \int \cos^{2k} x \cdot \cos x\,dx = \int \cos^{2k} x \cdot d(-\sin x) = \int (1-\sin^2)^k d\sin x = \int (1-t^2)^k dt \end{cases}$$

☑ $\int \cos^4 x\,dx = \int \frac{(1+\cos 2x)^2}{2^2}dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx = \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right) dx = \frac{1}{4}\left[x + \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{\sin 4x}{8}\right] + C$

$\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,d(2x)$

☑ $\int \cos 2x \cdot \sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\left[\int \sin 5x\,dx + \int \sin x\,dx\right] = -\frac{\cos 5x}{10} - \frac{\cos x}{2} + C$

$\cos ax \sin bx = \frac{1}{2}\left(\sin(b-a) + \sin(a+b)\right)$

☑ $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$ $\left|\begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = t \\ x = 2arctg\,t \\ 2\cdot\frac{1}{1+t^2}dt = dx \end{array}\right.$ $\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 4\frac{2t}{1+t^2} + 5} = \int \frac{2dt}{3-3t^2+8t+5+5t^2} =$

$$= \int \frac{2\,dt}{2t^2+8t+8} = \int \frac{dt}{t^2+2\cdot 2\cdot t+4} = \int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2} + C$$

только $\sin x = \frac{\sum tg\frac{x}{2}}{\sum tg\frac{x}{2}}$
$\cos x$

Интегрирование иррациональных функций

① $$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\cdot\frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + Q'_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$P_n(x) = Q_{n-1}(x)\left(ax+\frac{b}{2}\right) + Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + \lambda$$

② $$\int R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx = \quad \text{замена } x = t^k$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} \overset{x=t^6}{=} \int\frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2} = 6\int\frac{t^3}{t+1}\,dt$$

Как же похуй

③ $$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots\right)dx \qquad \frac{ax+b}{cx+d} = t^k$$

$$a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = a^2$$

④ $$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx \qquad x = a\sin t$$

$$a^2\cos^2 t = a^2 - \underbrace{a^2\sin^2 t}_{x^2} \Rightarrow x = a\sin t$$

$$\sqrt{a^2+x^2} \qquad x = a\,\mathrm{tg}\,t$$

$$a^2 + \underbrace{a^2\mathrm{tg}^2 t}_{x^2} = \frac{a^2}{\cos^2 t}$$

$$\sqrt{x^2-a^2} \qquad x = \frac{a}{\cos t}$$

$$a^2\mathrm{tg}^2 t = \underbrace{\frac{a^2}{\cos^2 t}}_{x^2} - a^2$$

$$\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}\,dx = \int\frac{3x-1}{\sqrt{(x-2)^2+4}}\,dx \;\Bigg|\; \begin{matrix} t = x-2 \\ x = t+2 \\ dx = dt \end{matrix} \;\Bigg| = \int\frac{3t+5}{\sqrt{t^2+4}}\,dt = \frac{3}{2}\int\frac{d(t^2+4)}{\sqrt{t^2+4}} + 5\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}$$

$$= 3\sqrt{t^2+4} + 5\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right| + C$$

$$\int\frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx \;\Bigg|\; \frac{x+1}{x-1} = t^3 \qquad \begin{matrix} x+1 = t^3(x-1) \\ x = \frac{t^3+1}{t^3-1} \end{matrix} \qquad dx = \frac{3t^2(t^3-1) - 3t^2(t^3+1)}{(t^3-1)^2}\,dt = -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}\,dt$$

$$x - 1 = \frac{t^3+1-t^3+1}{t^3-1} = \frac{2}{t^3-1}$$

$$= \int\frac{(t^3-1)^2}{4}\cdot t\cdot\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2} = -\frac{3}{2}\int t^3\,dt = -\frac{3}{8}t^4 + C$$

⑤ Дифференциальный бином

$$\int x^m(ax^n+b)^p\,dx \qquad\qquad \int\sqrt[3]{x}\,(2\sqrt{x}+1)^3$$

1) p – целое число, $x = t^k$ $\quad k = \text{нок}(n^{-1}, m^{-1})$

2) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ $\quad ax^n + b = t^k$ $\quad k = p^{-1}$

3) $\frac{m+1}{n} + p$ $\quad a + bx^{-n} = t^k$ $\quad k$ – знаменатель дроби p

$\boxed{09.03}$

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \left| \begin{matrix} x^n = t & x = t^{\frac{1}{n}} \\ dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1}\,dt & \end{matrix} \right| = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m}{n}} (a+bt)^p\, t^{\frac{1}{n}-1}\cdot dt$$

1. p - целое $= \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1} (a+bt)^p\,dt \; \ominus$

   $t = z^k$ $\quad k$ - знаменатель $\frac{m+1}{n}$

2. p - не целое $\quad \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a+bt = y^k$; k - знаменатель p

   $\ominus \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}+p-1} \cdot \left(\frac{a}{t}+b\right)^p dt$

3. p - не целое $\quad \frac{m+1}{n}$ - не целое $\quad at^{-1}+b = ax^{-n}+b = f^k$

Подстановки Эйлера

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \qquad \frac{1}{z}$$

1) $a>0 \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\,x$

$ax^2+bx+c = t^2 + ax^2 - 2\sqrt{a}\,xt$

$bx+c = t^2 - 2t\sqrt{a}\,x$

$x = \frac{t^2-c}{bx+2t\sqrt{a}}$

$$dx = \frac{2t(bx+2t\sqrt{a}) - 2\sqrt{a}(t^2-c)}{(bx+2t\sqrt{a})^2}\,dt = \frac{2\sqrt{a}t^2+2bt+2\sqrt{a}c}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\,dt$$

2) $c>0 \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$

$ax^2+bx+\cancel{c} = x^2t^2 + \cancel{c} \pm 2xt\sqrt{c}$

$ax+b = xt^2 \pm 2t\sqrt{c}$

3) $ax^2+bx+c = 0 \quad D>0$

$\exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1) \Rightarrow t = \sqrt{a\frac{x-x_2}{x-x_1}}$$

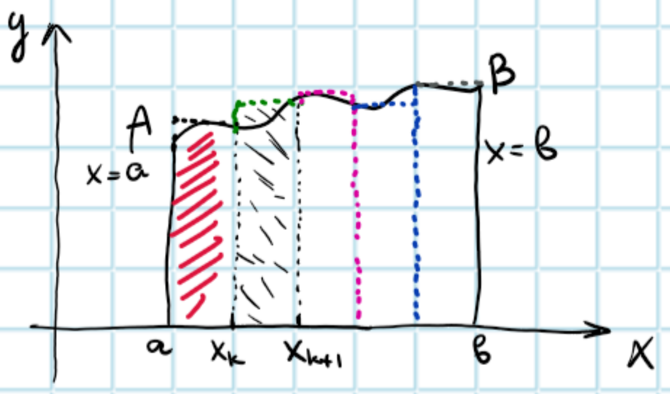
$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = (x-1)\sqrt{a\frac{x-x_2}{x-x_1}}$

$$ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}\left[4a^2x^2 + 4abx + 4ac\right] = \frac{1}{4a}\left[(2a+b)^2 - \underset{D<0}{(b^2-4ac)}\right] = \frac{1}{4a}\underset{\vee\, 0}{[\;]}$$

$a>0 \Rightarrow$ п.1

$a<0 \Rightarrow ax^2+bx+c<0$ не имеет смысла

$\boxed{16.03}$ **Определенный интеграл** *whatcha now 'bout rolling down*



$$d(T) = \max \Delta x_k$$

$$T = [\underset{a}{x_0}, x_1 \dots \underset{b}{x_n}] \qquad \Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

$$\forall \varepsilon_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

$$\lim_{n \to \infty} \overbrace{\sum_{k=1}^{n} \underbrace{f(\varepsilon_k)(x_{k+1} - x_k)}_{S_k}}^{\sigma_T} = S$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon : \forall n > N : |x_n - A| < \varepsilon$$

14:34 Караул!

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) : \forall d(T) < \delta \Rightarrow |\sigma_T - S| < \varepsilon$$

$I = \lim\limits_{d(T)\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, если $\lim \exists$, равен конечному числу, не зависит от разбиения T и выбора ξ_k

$|| \ \int_a^b f(x)\,dx$ Интегральная сумма Римана

Th Необходимое условие интегрируемости

$$\exists \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow f(x) \text{ - ограничена на } [a;b]$$

□ Предположим противное: $\exists \int_a^b f(x)\,dx$ и $f(x)$ - неогр на $[a,b]$

$f(x)$ - не ограничена на $[a,b] \Leftrightarrow \forall M>0 \ \exists x^* \in [a,b] : |f(x^*)| > M$

$$\exists I = \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) \ \forall d(T) < \delta \Rightarrow |\sigma_T - I| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \sigma_T - I < \varepsilon$$

$$I - \varepsilon < \sigma_T < I + \varepsilon$$

$$\exists \varepsilon = 1 \ \exists \delta(1) \ \forall d(T) < \delta(1) \quad I - 1 < \sigma_T < I + 1$$

$\Downarrow$ ограничена

$$T = [x_0, \dots, x_n]$$

$f(x)$ не огр. на $[x_k, x_{k+1}]$

$$\sigma_T = \underbrace{f(\xi_k)\Delta x_k}_{\text{не огр.}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i}_{\text{огр}} \Rightarrow \sigma_T \text{ - не огр} \quad \rightarrow\leftarrow \ ■$$

Прикол: функция ограничена, но не интегрируется

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in I \end{cases} \qquad |f(x)| < 2$$

$f(x)$ ограничена; $T = [x_0, \dots, x_n]$, $[0, 1]$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_T^1 &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = 1 \quad \xi_k \in \mathbb{Q} \\ \sigma_T^2 &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^*)\Delta x_k = 0 \quad \xi_k^* \in I \end{aligned}\right\} \text{интеграла не существует}$$

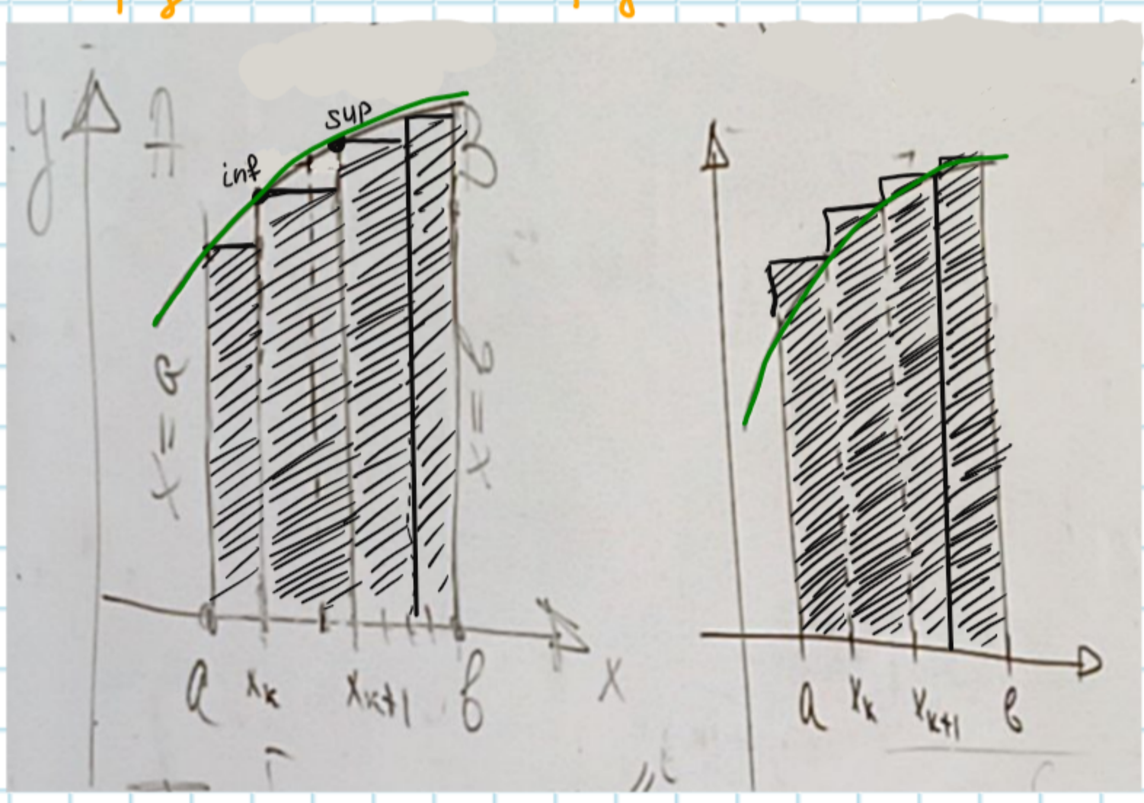
Суммы Дарбу

$$m_k < \sigma_T < M_k \ ; \quad \inf \sigma_T < \sigma_T < \sup \sigma_T$$

$$\lim m_k \leq \lim \sigma_T \leq \lim M_k \qquad \inf f(x) \leq f(\xi_k) \leq \sup f(x)$$

$$\underline{I} \leq I \leq \overline{I}$$

Нижний интеграл Дарбу — Верхний интеграл Дарбу



Th Критерий интегрируемости

$$\exists \underline{I}, \overline{I} \ \wedge \ \underline{I} = \overline{I} \Leftrightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx$$

Th Критерий Лебега

① $f(x)$ ограничена на $[a,b]$ (т.е. нет т.р. II рода)
② Не более чем счётное множество т.р. I-го рода

Свойства определенного интеграла

1. Линейность
2. $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$
3. Теорема о среднем $m \leq f(x) \leq M$
   $\exists \mu \in (m, M) \quad f(\xi) = \mu$
   $\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$
4. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
5. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
6. $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, & f(x) \text{ - четная} \\ 0, & f(x) \text{ - нечёт} \end{cases}$

23.03 Свойства определенного интеграла

1. Линейность

2. $f \in R[a,b]$, $f \in R[b,c]$: $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

3. $f, g \in R[a,b]$; $f \geq g(x)$ на $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ 1 теорема о среднем

4. Теорема о среднем: $\begin{matrix} f \in C[a;b] \\ g \in R[a,b] \end{matrix} \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x)\,dx$ $c \in [a,b]$

5. $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

6. $f(x)$ и $g(x) \in R[a,b] \Rightarrow f \cdot g \in R[a,b]$

7. f, g на $[a,b]$ отличаются конечным набором значений $\xRightarrow{\text{если } \in R[a,b]}$ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$

8. $\int_a^a f(x)dx$; $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$; четные и нечетные функции

14:03 some food .... покамест

$$\int_0^1 \arcsin x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \arcsin x \\ dx = dv \Rightarrow v = x \\ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \end{matrix} \right| = x\arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x\arcsin x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\arcsin x\Big|_0^1 + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \left| \begin{matrix} \ln x = u & du = \frac{dx}{x} \\ dx = dv \Rightarrow v = x \end{matrix} \right| = x\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 dx = x\ln x\Big|_0^1 - x\Big|_0^1 =$$

$$= 1 \cdot 0 - \lim_{a \to 0^+} a\ln a - 1 = -\underbrace{\lim_{x \to 0^+} a\ln a}_{0} - 1 = -1$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(\overset{\lim_{x\to b^-} F(x)}{b-0}) - F(a)$$

$f(b)$ имеет разрыв

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} \Bigg|_0^{2\pi} \qquad 2\pi \cdot \frac{1}{4} \leq \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x} \leq 2\pi \cdot \frac{1}{2}$$

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ на $(0;2\pi)$ - разрыв 2-го рода в $x = \pi$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+\cos x} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x} = \left| \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \right| = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2+t^2} + \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{2+t^2} = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt{2}}}_{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{0}{\sqrt{2}} - \lim_{b \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt{2}}}_{-\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

30.03 **Несобственный интеграл** Коллок скоро - пиздец.

① $[a,b]$, a,b - конечные числа ; ② $f(x)$ - ограничена на $[a,b]$ $\Rightarrow \sum f(\xi)\Delta x_k$

1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

сходится?

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = const$

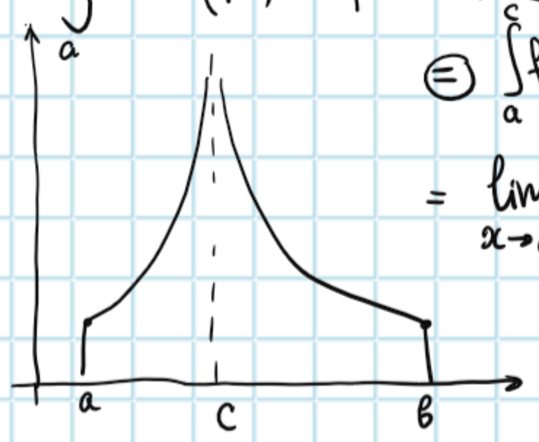
Геометрический смысл

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \overset{II}{=} \lim\limits_{b\to\infty} F(b) - F(a)$

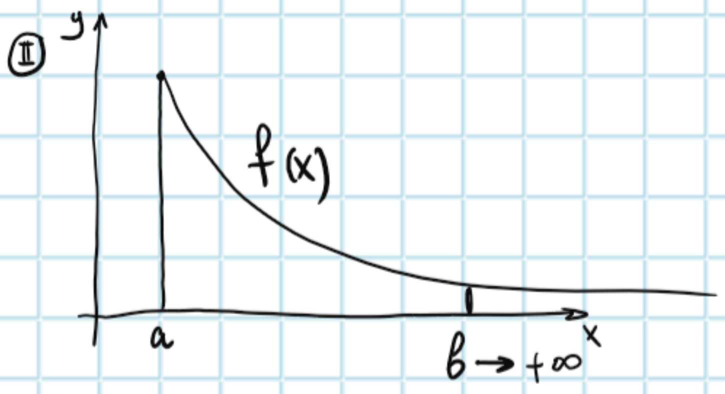
2) $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ② ($f(x)$ не ограничена на $[a,b]$)

$= \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx =$

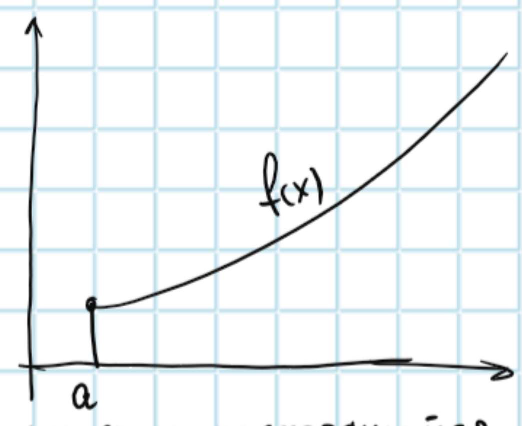
$= \lim\limits_{x\to c^-} F(x) - F(a) + F(b) - \lim\limits_{x\to c^+} F(x)$



II



I



интеграл расходящийся

Расходящийся интеграл

$\int\limits_a^{+\infty} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_a^{+\infty} = -\left(\cancel{\lim\limits_{b\to\infty}\cos b} - \cos a\right)$

$\Rightarrow$ Интеграл расходится

Признаки сравнения

$f(x), g(x)$ знакоположительные на $[a,b]$

1) Сходимость $\int f(x)$. Находим $g(x)$ сходится $\int$: $f(x) \le g(x)$ на $[a,b]$

$\int\limits_a^b g(x)\,dx = const \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx$ - сходящийся

2) Расходимость $\int f(x)$. Находим $g(x)$ расходится $\int$: $g(x) \le f(x)$ на $[a,b]$

$\int\limits_a^b g(x)\,dx = \infty \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx$ - расходится

Признак Абеля к $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$

1) $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$ - сходится (условно или абсолютно)

2) $g(x)$ - монотонная ограниченная ф-я

Признак Дирихле

1) $\left|\int\limits_a^A f(x)\,dx\right| \le const$ $\quad A \in (a,b]$

2) $g(x)$ монотонно стремится к нулю

$\int\limits_a^b f(x)\,dx$; $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$

сх-ся ; сх-ся $\Rightarrow$ сходится абсолютно

сх-ся ; расх-ся $\Rightarrow$ сходится условно

☑ $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ $\quad$ пр. сравн. $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{1}{x}$ расходится расходится

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^{+\infty} = \lim\limits_{b\to+\infty} \ln|b| - \ln 1 = \infty$

интеграл для сравнения

$\boxed{\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}}$

По признаку абеля

$f(x) = \sin x$ $\quad \int\limits_1^{\infty} \sin x\,dx \;\nexists \Rightarrow$ пр. Абеля неприменим

$g(x) = \frac{1}{x}$

По признаку дирихле

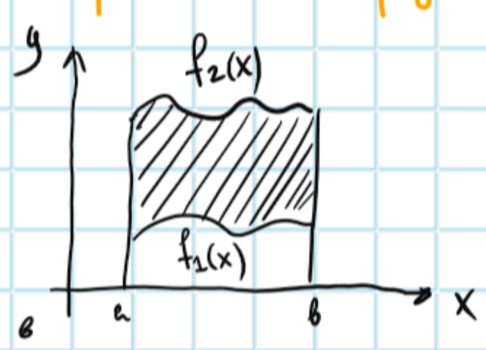
$\left|\int\limits_1^A \sin x\,dx\right| \le const$

$|\cos A - \cos 1| \le 2 \Rightarrow$ исх. интеграл сходится условно

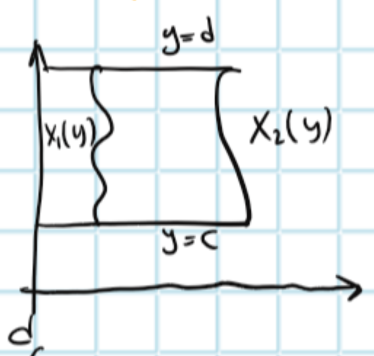
$\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ $\searrow 0$

☑ $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

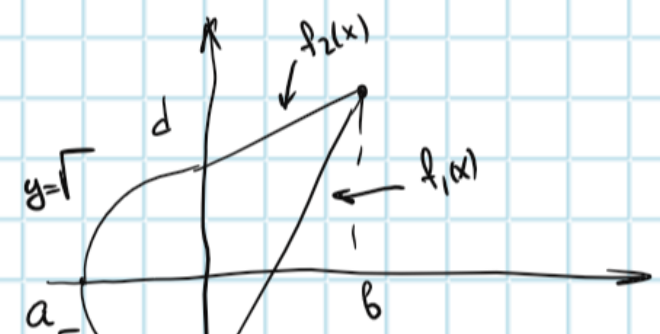
Применение определенного интеграла (геометрические)



$\int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx$



$\int\limits_c^d (X_2(y) - X_1(y))\,dy$

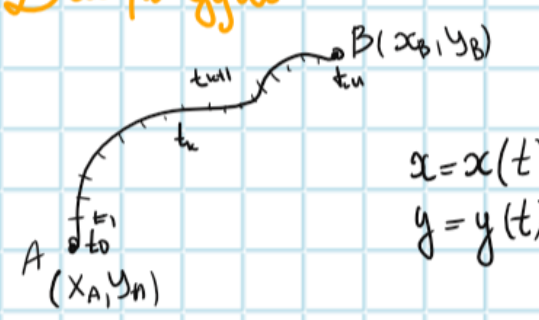


$x = y^2$

$y = \pm\sqrt{x}$

$\int\limits_a^0 \left(f_2^{(1)} - f_2^{(-1)}\right)dx + \int\limits_0^b \left(f_2^{(1)} - f_1\right)dx$

Длина дуги



$x = x(t)$
$y = y(t)$

$L_k = \sqrt{(x(t_{k+1}) - x(t_k))^2 + (y(t_{k+1}) - y(t_k))^2}$

$\sum\limits_{k=0}^{n-1} L_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sqrt{(\ldots)^2 + (\ldots)^2} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2}\,(t_{k+1} - t_k)$

длина есть только у спрямляемой кривой

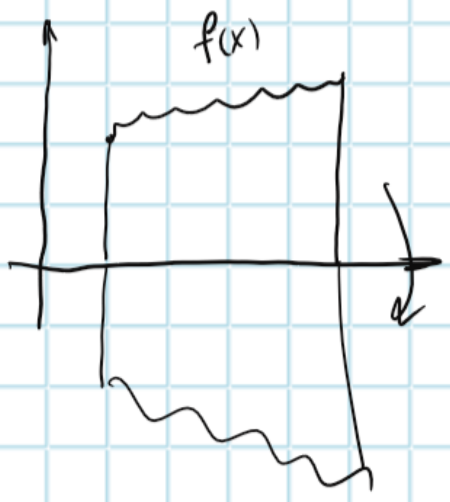
$L_{[a,b]} = \int\limits_{t_0}^{t_k} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$

в Дск: $L_{(a,b)} = \int\limits_A^B \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$

в полярной СК $\quad x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ $\quad dt = d\varphi$

Площадь в полярной СК

$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi$



$H_k = \Delta X_k = X_{k-1} - X_k$

$R_k = f(\xi_k)$

$V = \pi R^2 H = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \pi f^2(\xi_k)\,\Delta x_k = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$

Мне уже похуй, что она там говорит....

Если вращать по y

$2\pi\int\limits_a^b f(x)\,x\,dx$

6.04

$$\int_0^1 \sin x^2 dx$$ ← через элем. функции не выражается

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \qquad |x| \le 1$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b P(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

Интерполяционные методы

Полином Лагранжа

$L_k(x)$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b L_k(x)\,dx$$

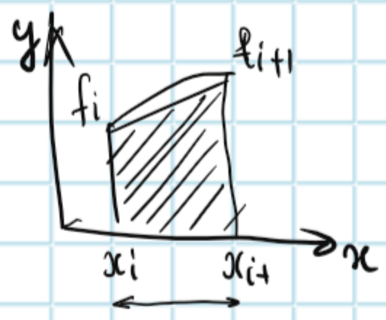
1. Метод прямоугольников.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_0(x)\,dx = \int_a^b f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)dx = (b-a)\, f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$$

Погрешность: $\left| J_a^b - J_{a\ \text{прямоуг}}^b \right| \le \frac{M_2}{24}(b-a)h^2$

$$M_2 = \max_{[a;b]} |f''(x)|$$

2. Метод трапеций



$$L_1(x) = C_i(x)\cdot f_i + C_{i+1}^{(x)} f_{i+1} =$$

$$= \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f_{i+1} =$$

$$= (1-q) f_i + q f_{i+1}$$

$q = \frac{x - x_i}{x_i - x_{i+1}}$ База интерполирования

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_1(x)\,dx = \int_a^b [(1-q)f_i + q f_{i+1}]\,\underbrace{h_{i+1}\,dq}_{=dx}$$

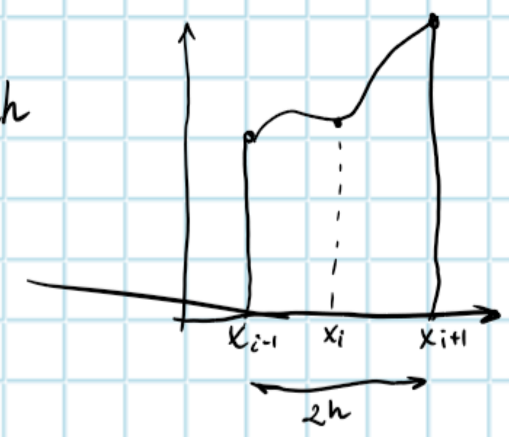
☑ $\int_1^e \frac{dx}{x}$

13.04 ФНП. предел ФНП, непрерывность, $\frac{\partial}{\partial x}$

Метод Парабол

шаг h

len $= 2h$



X – векторное п-во ; $\|\cdot\|$ – неотриц ф-я $\|\cdot\|: X \to [0;+\infty)$

Удовл. условиям:

1. $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$
2. $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\| \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\|\vec{x}\| \leq \|\vec{y}\| + \|\vec{z}\|$ (нер-во треугольника)

① $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \qquad \vec{x} \in X \in \mathbb{R}^n$

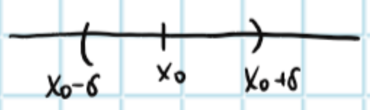
$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad \vec{x} = (x_1, \dots x_n)$

② $\|\vec{x}\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} x_i$

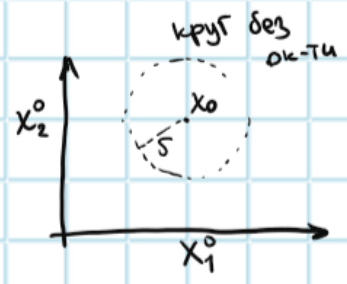
③ $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

def $B_\delta(x_0) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \delta\}$ – открытый шар или δ-ок-ть

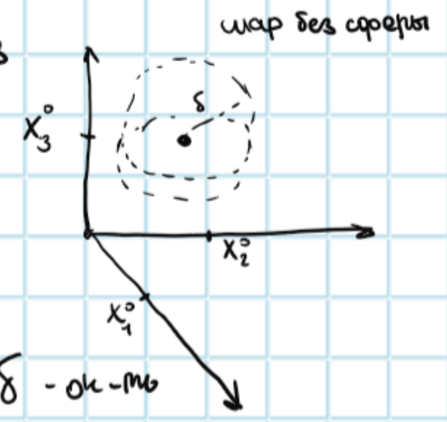
$\mathbb{R}^1 \quad \|x - x_0\| \; \delta$



$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3$



def $\bar{B}_\delta(x_0) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \delta\}$ – замкнутый шар или δ-ок-ть

def $\Pi_\delta(x_0) = \{\bar{X} \in \mathbb{R}^n, \; |X_1 - X_1^0| < \delta_1, \dots |X_n - X_n^0| < \delta_n\}$

$\delta = \min \delta_i$

def G – открытое мн-во , $G \subset \mathbb{R}^n$

$\forall \bar{x} \in G$ входит в G вместе со своей δ-ок-тью

def P_0 – предельная точка множества $E \subset \mathbb{R}^n$

если в $\forall\, U_\delta(P_0)$ найдется хотя бы одна т. $P \neq P_0$

$\bar{X} = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\{\bar{x}_i\}_{i=1}^{m}$ – сх-ся к предельной точке $X_0 \iff \|X_m - X_0\| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$

def (предел ФНП)

$E \subset \mathbb{R}^n \quad f: E \to \mathbb{R} \qquad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta: \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$

$\forall \bar{x} \in E \quad \exists! f(\bar{x}) \to \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \|f(\bar{x}) - A\| < \varepsilon$

$\bar{X}_0$ – предельная точка мн-ва E $\qquad f(\bar{x}) \in U_\varepsilon(A)$

$A = \lim\limits_{\bar{X} \to \bar{X}_0} f(\bar{x}) = \lim\limits_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ \dots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1 \dots x_n)$

$\forall \bar{X}_n \to \bar{X}_0, \; \bar{X}_n \neq \bar{X}_0 \Rightarrow f(\bar{X}_n) \to A$

def $f(x,y) \quad (x_0, y_0)$

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$ двойной предел

$\lim\limits_{x \to x_0} \Big(\underbrace{\lim\limits_{y \to y_0} (f(x,y))}_{\varphi(x)} \Big)$, $\lim\limits_{y \to y_0} \Big(\underbrace{\lim\limits_{x \to x_0} (f(x,y))}_{\psi(y)} \Big)$ – повторные пределы

$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$

$f(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}) \Rightarrow \lim = -\frac{1}{2}$

$f(x,y) = x \sin\frac{1}{y}$

$\lim\limits_{y \to 0} \big(\lim\limits_{x \to 0} (x \sin\frac{1}{y}) \big) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \big(\lim\limits_{y \to 0} x \sin\frac{1}{y} \big) \nexists$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$

def $f(x,y)$ непрерывна в т. $P_0(x_0, y_0)$

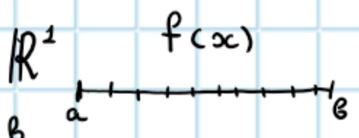
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

$\Delta f(x,y) = A\Delta x + B\Delta y + \bar{o}(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$

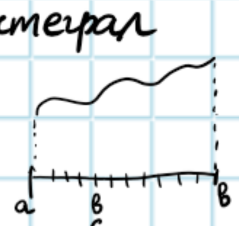
$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\mathbb{R}^2)$

20.04 **Двойной интеграл**

$\mathbb{R}^1$

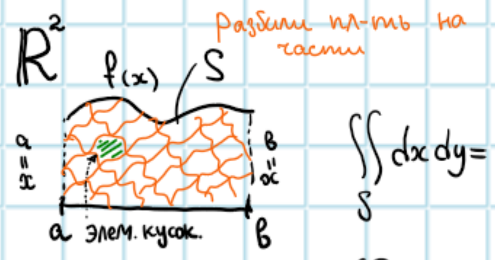


$\int_a^в dx = в - a = L_{[a,в]}$



$\int_a f(x)dx = S_{\text{крив. тр.}}$

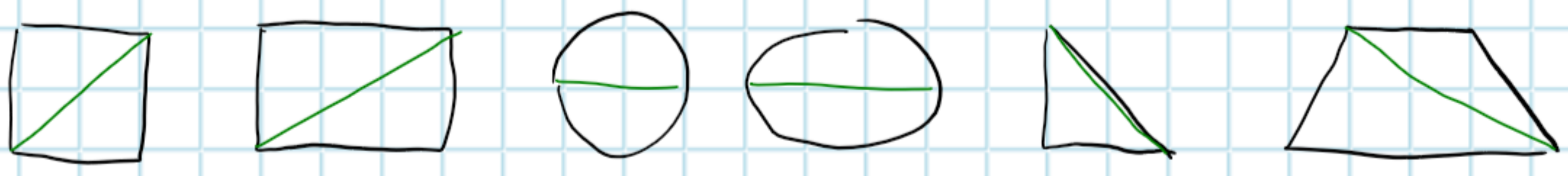
$\mathbb{R}^2$



$\iint_S dx\,dy = S_{\text{крив. тр.}}$

$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = V$

Квадрируемая фигура – у которой есть площадь



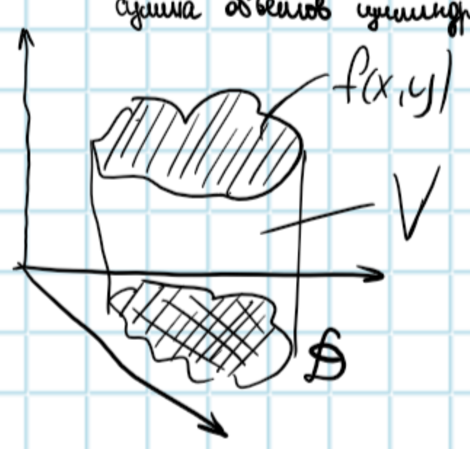
def Разбиение T_{ω_i} области $\mathcal{D}$ на плоскости называется правильным, если $\mathcal{D}/\cup_{\omega_i}$ имеет нулевую меру и $\omega_i \cap \omega_j = \varnothing$
{заменяет гладкость кривой}

$$\max d_{\omega_i} = \max_{p_i, p_j \in \mathcal{D}} \| p_i - p_j \|$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T_\omega : \max d\omega_i \to 0 \qquad \lim_{\max d\omega_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta\omega_i = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = J$$

$$|\sigma - J| < \varepsilon$$

σ – сумма объемов цилиндров



Th Пусть $f^{(x,y)}$ определена на

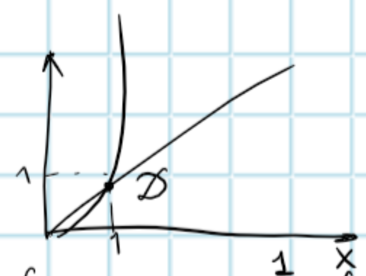
$$\mathcal{D} := \{ x \in [a,в],\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \}$$

y_1, y_2 – непрерывны на $[a,в]$

Тогда
$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^в \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

внешний

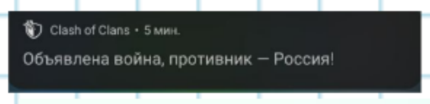
внутренний интеграл



$$\iint_{\mathcal{D}} x\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} x\,dy \right) dx = \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

27.04 Двойные интегралы 2: возвращение легенды [Замена переменной]

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_x^{x^2} x\,dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} x\,dx$$



D: $y = x$, $y = x^2$ $x \in [0,1]$ $y \in [0,1]$

Свойства:

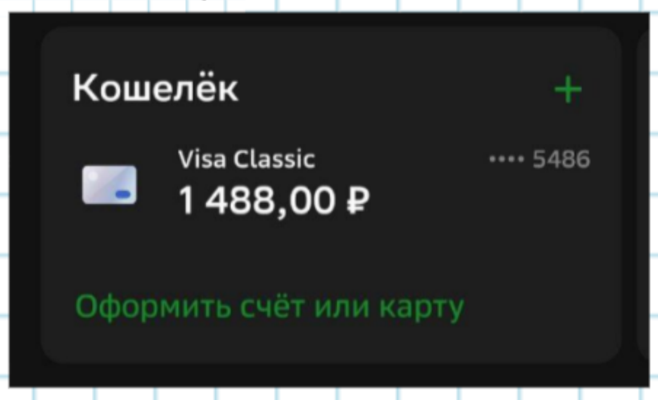
1. Линейность
2. $f(x,y) \le g(x,y)$ $\forall x,y \in \bar{D}$ $\Downarrow$ $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$
3. Теорема о среднем: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(P_i)\cdot \underbrace{S_D}_{=\iint_D dx\,dy}$, $P_i \in D$
4. Если $f(x,y)$ и $g(x,y)$ – интегрируемы $\Rightarrow$ $f\cdot g$ – тоже

Теорема о замене переменных в двойном интеграле

$$\varphi: \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad (x,y) \xrightarrow{\psi} (\rho,\varphi)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = D\left(\frac{x,y}{\rho,\varphi}\right)$$ Якобиан перехода

паплкан
Якобиан перехода

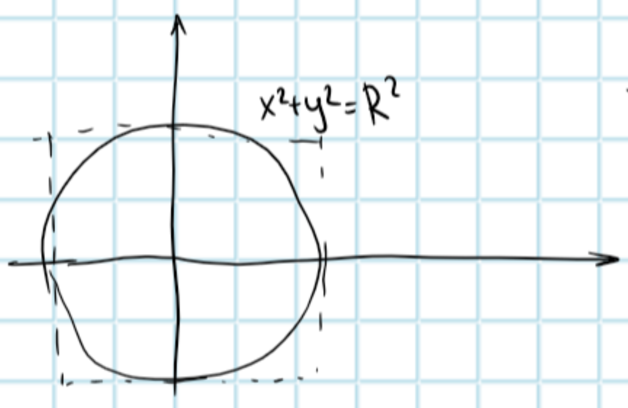


$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \qquad D \xleftrightarrow{\psi} G$$ взаимнооднозначность

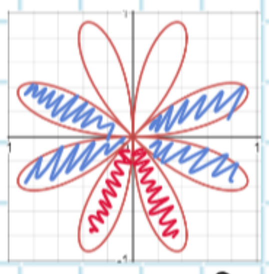
$x'_u, x'_v, y'_u, y'_v \in C(\bar{D})$

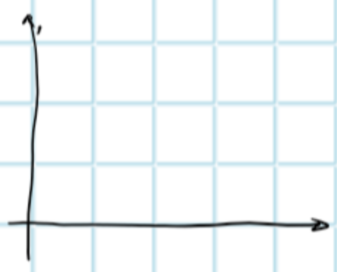
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G f(u,v)\,D\left(\frac{x,y}{u,v}\right)du\,dv$$

$$D = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$$



$$\iint_{x^2+y^2=R^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\,dy = \iint_G f(\rho,\varphi)\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(\rho,\varphi)\,\rho\,d\rho$$





$$S = \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi} \sin^2 4\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 8\varphi}{16}\,d8\varphi = \frac{1}{32}a^2\cdot\left(8\varphi - \sin 8\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^2}{2}$$

$x^2 = ay$ $\quad a = \frac{x^2}{y}$

$y^2 = bx$ $\quad b = \frac{y^2}{x}$

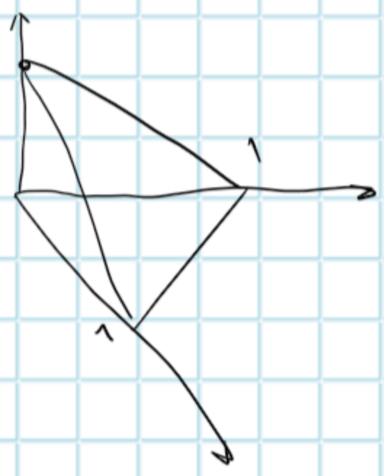
$$D\left(\frac{a,b}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 2\frac{x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & 2\frac{y}{x} \end{vmatrix} = 3$$

$$D\left(\frac{x,y}{a,b}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\iint_{x^2+y^2\le R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{\dots}}^{\sqrt{R^2-x^2}} e^{-x^2-y^2}\,dy = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ x^2+y^2 = \rho^2 \end{vmatrix} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho\cdot e^{-\rho^2}\,d\rho = 2\pi\left(-\frac{1}{2}\int^R e^{-\rho^2}\,d(-\rho^2)\right) = \pi\left(1-e^{-R^2}\right)$$

Тройной интеграл

$$\lim_{\max d\omega_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta\omega_i = \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int dx \left(\iint_D f(x,y,z)\,dy\,dz\right)$$



04.05

$z'^2 + z = xz'$

$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2 + z = x\cdot\frac{dz}{dx} \quad \Big/ \cdot \frac{d}{dx}$

$2z''z' + \cancel{z'} = \cancel{z'} + x\cdot z''$

$z''(2z'-x) = 0$

$2z' = x$

$2dz = x\,dx$

$z = \frac{x^2}{4} + c$

$y = \frac{x^3}{12} + C_1x + \tilde{C}$

$z'' = 0$

$y''' = 0$

$y'' = C$

$d(y') = C_1dx$

$y' = C_1x + C_2$

$y = \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3$

$z = xz' - (z')^2$

$z' = p$

$z = xp - p^2$

$\cancel{p} = \cancel{p} + xp' - 2pp'$

$(x-2p)p' = 0$

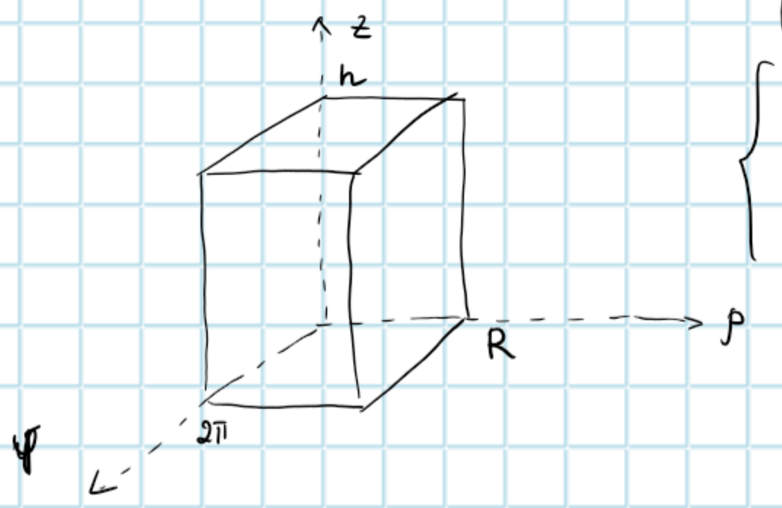
$p = \text{const}$

$z = cx - c^2$

$\boxed{y = \frac{C_1}{2}x^2 - C_1^2x + C_2}$

$z = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}$

$\boxed{y = \frac{x^3}{12} + C}$



Цилиндрическая СК

$$\begin{cases} x = p\cos\varphi & 0 \le \varphi < 2\pi \\ y = p\sin\varphi & 0 < p \le R \\ z = z & 0 \le z \le h \end{cases}$$

Якобиан перехода p

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R p\,dp \int_0^h f(\varphi,p,z)\,dz =$$

Цилиндр : $x^2+y^2=R^2$, $z \in [0,h]$

$$= \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2+x^2}} dy \int_0^h f(x,y,z)\,dz$$

Сферические СК

$0 \le \varphi < 2\pi$

$0 \le p \le R$

$-\frac{\pi}{2} \le \Theta \le \frac{\pi}{2}$

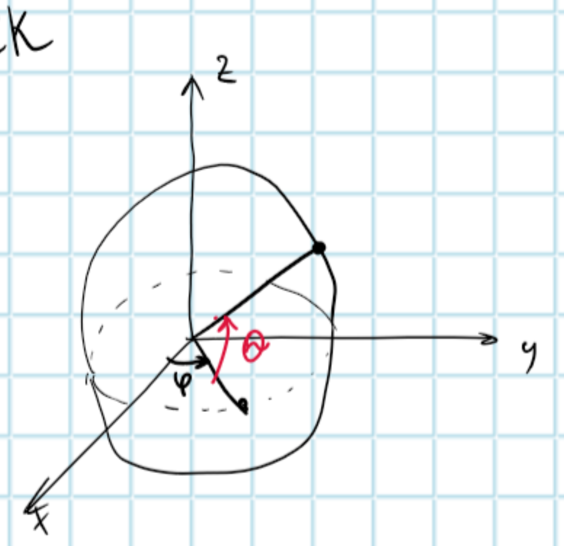
$x = p\cos\varphi\cos\Theta$

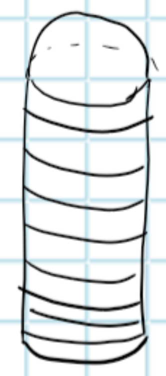
$y = p\sin\varphi\cos\Theta$

$z = p\sin\Theta$

Якобиан $J = p^2\cos\Theta$

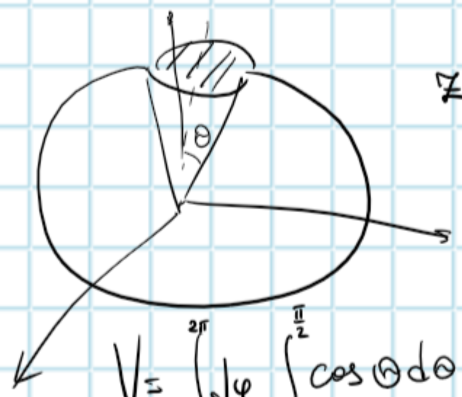
$$\iiint\limits_{V_1} p^2\cos\Theta\,d\varphi\,dp\,d\Theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\Theta\,d\Theta \int_0^R p^2\,dp = \frac{4}{3}\pi R^3$$





$p^2 + (z-h)^2 = R^2$

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R p\,dp \int_0^{\sqrt{R^2-p^2}+h} dz$$



$z^2 + z - R^2 = 0$

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\Theta\,d\Theta \int_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} p^2\,dp$$

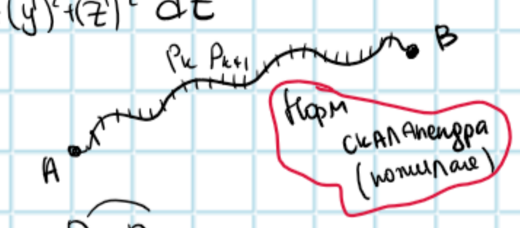
$\int d\varphi \int p$

13:44

11.05 Снова интегралы: Криволинейные, Поверхностные

Гладкая — Кусочно-гладкая: в конечном числе точек нарушается гладкость

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad ds = \sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,dt$$



$\overset{\frown}{P_k, P_{k+1}}$ $\quad \overline{P_k P_{k+1}}$ $\quad P_k^* \in \overset{\frown}{P_k, P_{k+1}}$

$y = f(t)$ – ДПСК параметризация
$x = t$

Криволинейный интеграл первого рода

$x^2+y^2=R^2$
$$\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$
Полярная СК

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=R^2$
$$\begin{cases} x = a\,\rho(\varphi)\cos^n\varphi \\ y = b\,\rho(\varphi)\sin^n\varphi \end{cases}$$
Обобщенная полярная СК

S_k – длина k-ой дуги $\qquad \sigma = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(P_k^*)\,S_k$

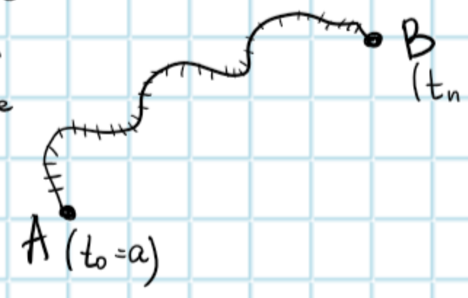
$$\lim_{\max S_k \to 0} \sigma = const = \int\limits_\gamma f(x,y,z)\,ds$$

Дифференциал дуги

ds в Дпск $= \sqrt{1+(f')^2}\,dx$!!
в полярной ск $= \sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi$

Криволинейный интеграл второго рода

скалярное поле
$f: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
векторное поле
$f\, D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$



$\tau = \{a = t_0 < t_1 \ldots < t_{n-1} < t_{n+1} = b\}$

$$\gamma := \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$P_k\,(x(t_k), y(t_k), z(t_k))$

$P_k^*(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \in \overset{\frown}{P_k, P_{k+1}}$

$$\sigma^x = \sum_{k=0}^{n-1} f(P_k^*)(x_{k+1}-x_k)$$
$$\sigma^y = \sum_{k=0}^{n-1} f(P_k^*)(y_{k+1}-y_k)$$

$$\lim_{\max S_k \to 0}\left(\sigma^x + \sigma^y + \sigma^z\right)$$

Вычисляет работу тела вдоль кривой

Интегрируем векторную функцию

$$\int P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

$$f(P_k^*) = (P(P_k^*), Q(P_k^*), R(P_k^*))$$

Теорема

Крив. интеграл 2-го рода не зависит от пути интегрирования, если подынтегральная функция - полный дифф

$f(x,y,z)$
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

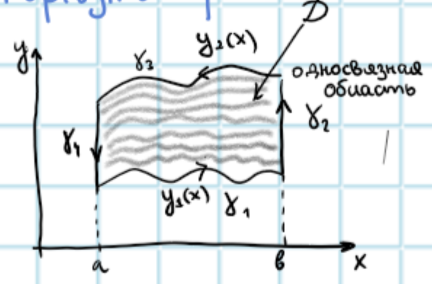
Условие потенциальности поля

18.05 Поверхностный интеграл I и II рода

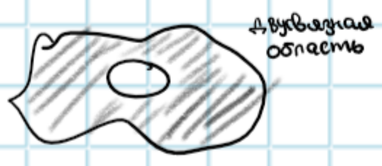
Today's topics:
* Ф-ла Грина

Формула Грина

13:46 still listening



$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$



Th (вспомогательная)

$\left.\begin{array}{l} \mathcal{D} \text{ - \underline{квадрируемая} [есть площадь]} \\ P(x,y) \in C(\bar{\mathcal{D}}),\ \frac{\partial P}{\partial y} \in C(\bar{\mathcal{D}}) \end{array}\right\} \Rightarrow \int_\gamma P(x,y)\,dx = -\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$

$Q(x,y) \in C(\bar{\mathcal{D}}),\ \frac{\partial Q}{\partial x} \in C(\bar{\mathcal{D}}) \Rightarrow \int_\gamma Q(x,y)\,dy = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy$

$\square$ $\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial x}\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int_a^b [P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))]\,dx$

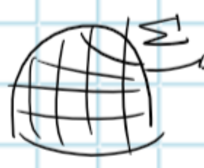
$$\int_\gamma P(x,y)\,dx = \int_{\substack{\gamma_1 \\ x=x \\ y=y_1(x)}} + \int_{\substack{\gamma_2 \\ x=b \\ y=y \\ dx=0}} + \int_{\substack{\gamma_3 \\ x=-x \\ y=y_2(x) \\ dx=-dx}} + \int_{\substack{\gamma_4 \\ x=a \\ y=y \\ dx=0}} = \int_a^b P(x,y_1(x))\,dx - \int_a^b P(x,y_2(x))\,dx = -\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$$

$$\int_\gamma (P(x,y) + Q(x,y))\,dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Поверхностные интегралы

Интеграл I-го рода

$f(P)$



$\lim\limits_{\max d \to 0} \sum f(P_i)\,\Delta\sigma_i$

$d\Sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy$

$\Sigma:\ z = z(x,y)$

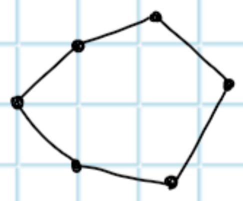
направляющие cos

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy = \iint_\Sigma (\bar{f}(P), \bar{n})\,d\Sigma$$

$\boxed{25.05}$ Очередная интересная (нет) лекция по Матану

Формула Грина: Говорим про то, когда она работает

Для многогранника тоже верна $\longrightarrow$ верна и для ок-ти



Мы остановились на поверхностном интеграле 1 и 2 рода

I vs II: скалярное vs векторное поле

I род:

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\, d\Sigma$$

$$d\Sigma = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\, dxdy \quad \# \; z = z(x,y)$$

Steve Huys.

II род:

$$\iint_{\Sigma} P\, dydz + Q\, dxdz + R\, dxdy \;;\; \vec{F} = \overrightarrow{(P,Q,R)}$$

Нормаль к пов-ти: $\bar{n} = (-z'_x; -z'_y; 1) \Rightarrow \bar{n}_{норм} = \left(\underbrace{-\frac{z'_x}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}}_{\cos\alpha};\ \underbrace{-\frac{z'_y}{\sqrt{\ldots}}}_{\cos\beta};\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\ldots}}}_{\cos\gamma}\right)$

$z - z(x,y) = 0$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\, dxdy = \iint_{\Sigma} \frac{f(x,y,z)}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}\, d\Sigma = \iint_{\Sigma} f(x,y,z) \cos\gamma\, d\Sigma$$

$\bar{F} = (P, Q, R) \qquad \bar{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$$= \iint_{\Sigma} \underbrace{(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)}_{f(x,y,z)}\, d\Sigma$$

Перешли от интеграла II рода к I

Формула Гаусса-Остроградского

$f(x,y,z) \longrightarrow \vec{F}(P,Q,R)$

$\overrightarrow{\text{grad} f} = (f'_x, f'_y, f'_z)$

$\text{div}\, \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

$\text{rot}\, \bar{F} = \bar{\nabla} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$

$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$

<u>Теорема</u> (если пов-ть замкнутая)

Σ - кусочно-гладкая пов-ть в $\mathbb{R}$, огр. область V

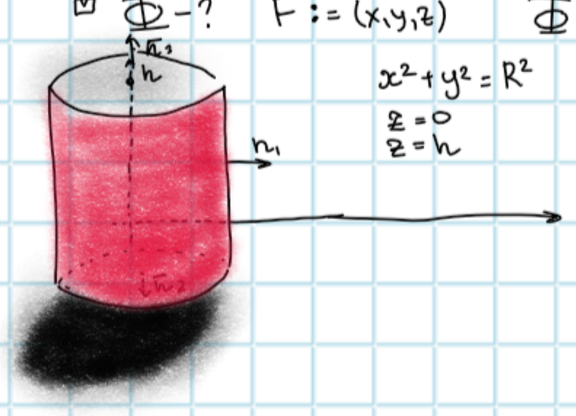
$R(x,y,z) \in C(\bar{D})$, $\frac{\partial R}{\partial z} \in C(\bar{D}) \Rightarrow$

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\, dxdy = \iiint_{V} \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz$$

$$\iint_{S} \vec{a}\, ds = \iiint_{V} \text{div}\, \vec{a}\, dV$$

Как ей правильно пользоваться:

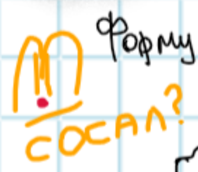
☑ Φ - ? $\quad \bar{F} := (x,y,z) \quad \Phi = \Phi_{бок} + \Phi_{низ} + \Phi_{верх}$



$x^2+y^2 = R^2 \qquad \bar{n}_3 = (0,0,1)$

$z = 0 \qquad \bar{n}_2 = (0,0,-1)$

$z = h$



Формула Стокса

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} \overline{\text{rot}\, F}\, d\Sigma$$

Доказательство будут спрашивать

☑