Виды диффуров

0.1 Метод изоклин

a. $y' = const = C$

в. строим графики

c. проводим прямые под углом $\operatorname{arctg}(C)$

0.2 Составление ДУ

$\varphi(x, y, C_1 \dots C_n) = 0$

a. берем производные вплоть до (n)

б. решаем систему от-но констант

в. подставляем в исходное выр-е

4.1 Системы ДУ (однородные)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} x_n \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n \end{cases}$$

a. Найти eigenvalues для $A = \|a_{ij}\|$

i. Если геом. кр = алг. кр, то

$\lambda_j \leftrightarrow y_j = C_1 \cdot v_j^1 \cdot e^{\lambda_j t} + \dots$

ii. Если не совпадают, то

$s = k$ - алг. кр $\qquad m$ - геом. кр

Подстановка: $x(t) = (a + bt + \dots + dt^{k-m})e^{\lambda t}$

Подставить в систему и выразить через k констант.

iii. Если $\lambda_j \in \mathbb{C}$, то находим eigenvector и записываем решение в виде

$$y_j = \operatorname{Re}(v_j \cdot e^{\lambda t}) + \operatorname{Im}(v_j \cdot e^{\lambda t})$$

☑ $v \cdot e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{(3+2i)t}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{3t} \cdot (\cos 2t + i \sin 2t)$

4.2 Системы ДУ (неоднородные)

$\dot{x} = a x_1 + \dots + d x_n + f_i(t)$

a. $f_i(t) = P_m \cdot e^{\gamma t}$

$\Downarrow$

$x_i^{r} = Q_{m+s} \cdot e^{\gamma t}$, s - кратность γ

в. Можно решить при помощи вариаций

$x_0 = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$

$C_1' e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n' e^{\lambda_n t} = f_i(t)$

и т.д.

1.1 Однородные диффуры

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ или $N(x,y)\,dx + M(x,y) = dy$, $N(kx, ky) = k^n \cdot N(x,y)$

n - порядок уравнения

a. Замена $t = \frac{y}{x}$

б. Решить от-но t

в. Обратная замена $y = t \cdot x$

1.2 Линейные диффуры

$y' + a(x) \cdot y = b(x)$

a. Решить $y' + a(x) \cdot y = 0$ Результат: $y = C(x) \cdot f(x)$

в. Подставить в исходное и найти $C = \varphi(x)$

c. Собрать ответ

1.3 Уравнение Бернулли

$y' + a(x) \cdot y = b(x) \cdot y^n$

a.1 Замена $z = y^{1-n}$, $dy = \frac{y^n \cdot dz}{1-n}$

б.1 Решаем как Бернулли

a.2 Замена $y = u(x) \cdot v(x)$

в.2 Обнуляем v' и находим u

1.4 Уравнение Риккати

$y' = p(x) \cdot y^2 + q(x) y + f(x)$

a.1 $y = y_r + \varphi(x)$ - подставить в исходное

$y' = y^2 + x^\alpha$

a.2 Решается, если $\frac{\alpha}{2\alpha + 4} \in \mathbb{Z}$

2.1 Диффуры высоких порядков I

$F(x, y^{(k)}, \dots y^{(k+n)}) = 0$

a. Замена $z = y^{(k)}(x)$

2.2 Диффуры высоких порядков II

$F(y, y', \dots y^{(n)}) = 0$

a. Замена $z = y'$

$y'' = (z(y))'_x = z' \cdot y' = z'z$

$y''' = z''z^2 + (z')^2 z$

2.3 Линейные ДУ с постоянными коэф. (однородные)

$a_0 \cdot y^{(n)} + \dots + a_n \cdot y = 0$

$a_0 \lambda^n + \dots + a_n = 0 \; : \chi$

λ_i - корень χ

a. $\lambda_i \in \mathbb{R}$, кратность k

$y_i = (C_1 + C_2 x + \dots + C_k \cdot x^{k-1}) e^{\lambda_i x}$

в. $\lambda_i = a \pm bi \in \mathbb{C}$, кратность k

$y_i = (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx + \dots + C_{2k-1} \cdot x^{k-1} \cos bx + C_{2k} \cdot x^{k-1} \sin bx) \cdot e^{ax}$

2.4 Линейные ДУ с постоянными коэф. (неоднородные)

$a_0 y^{(n)} + \dots + a_n y = f(x)$

$y_{реш} = y_{общ}^{\boxed{2.3}} + y_r$

a. $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\gamma x}$

$y_r = x^s \cdot Q_n(x) \cdot e^{\gamma x}$, s - кратность γ как корня χ

в. $f(x) = (P_m \cos bx + Q_m \sin bx) e^{ax}$

$y_r = x^s (N_m \cdot \cos bx + M_m \sin bx) e^{ax}$

3.1 Параметризация

$e^{y'} + y' = x$, $\exists y'_x = t$

$x = t + e^t$

$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 + e^t \\ \frac{dy}{dx} = t \end{cases} \Rightarrow y'_t = t(1 + e^t)$

3.2 Интегрирующий множитель

$\psi(\omega) = \frac{M'_x - N'_y}{N \cdot \omega'_y - M \omega'_x}$

$N(x,y)\,dx + M(x,y)\,dy = 0$

$\mu = C \cdot e^{\int \psi \, d\omega}$