18.02 **Строение линейного оператора**

$X_n = L \dotplus M$ $\quad A = \begin{pmatrix} A_L & \Theta \\ \Theta & A_M \end{pmatrix}$

$\{e_i\}_{i=1}^n$

$\dim L = l$, $l + m = n$ $\quad \{e_i\}_{i=1}^{l} - L$

$\dim M = m$ $\quad \{e_i\}_{i=l+1}^{m} - M$

$X_n = \dot{\sum\limits_{i=1}^{n}} L_i \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$

Lm $\mathcal{A} : X_n \to X_n$ $\quad \mathcal{A}$ - невырожденный

$L \subset X_n$, L - инвариантное п/п $\mathcal{A}$

$\forall x \in L \; \exists! \, y \in L : \mathcal{A} y = x$

□ $\mathcal{A}_L : L \to L$

$\mathcal{A}_L x = \mathcal{A} x$, $\forall x \in L$

$\mathcal{A}_L x = \mathcal{A} x = 0$ $\quad x = 0 \Rightarrow \mathcal{A}_L$ - невыр $\Rightarrow \mathcal{A}_L y = x$ единств реш- $\forall x \in L$ ■

Ультраинвариантное п/п - L_1, L_2 (если $X = L_1 \dotplus L_2$)

df $x \in X$, $\mathcal{A} : X \to X$

Если $\exists \lambda$ и $x \neq \Theta : \mathcal{A} x = \lambda x \Rightarrow x$ - собственный вектор $\mathcal{A}$

λ - собственное число $\mathcal{A}$

(λ, x) - собственная пара $\mathcal{A}$

df (λ, x) - собственная пара $\mathcal{A}$: $\forall \alpha \in K : \mathcal{A}(\alpha x) = \lambda \alpha x$

одномерное п/п $: e_1 = x$ - инвариантно отн. $\mathcal{A}$

$Y = \{x\}$

df λ - с.ч. $\mathcal{A}$

$\ker(\mathcal{A} - \lambda I) = L_\lambda$ - собственное п/п оператора $\mathcal{A}$

$x \in L_\lambda$ - собственный вектор $\mathcal{A}$, отвечающий с.ч. λ

$\mathcal{A} x = \lambda x$
$\mathcal{A} x - \lambda x = 0$
$(\mathcal{A} - I\lambda) x = 0$

Th $\forall \mathcal{A} : \mathbb{C}_n \to \mathbb{C}_n$ имеет собственный вектор # Попробовать доказать самому

df $\mathcal{A} : X \to X$ $\quad \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ перестановочные

$\mathcal{B} : X \to X$

Lm $L_\lambda < X$ - собственное п/п $\mathcal{A} \Rightarrow$ инвариантное п/п для $\mathcal{B}$

$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ - перестановочные

□ $\exists x \in L_\lambda$: $\mathcal{A} x = \lambda x \Rightarrow \mathcal{B} \mathcal{A} x = \lambda \mathcal{B} x \Rightarrow \mathcal{A} \mathcal{B} x = \lambda \mathcal{B} x$

$\mathcal{B} x \in L_\lambda$ ■

df $\det(\mathcal{A} - \lambda I) = \det(A - \lambda I) = P_n(\lambda)$ - характеристический полином A

Его корни - собственные числа $\mathcal{A}$

$\sigma(A)$ - спектр A, все её собственные числа

$\forall \lambda \in \sigma(A) \; \exists x \neq 0 : \mathcal{A} x = \lambda x$

Th Характеристические полиномы (а значит - и спектры) подобных матриц совпадают

□ $B = T^{-1} A T$ - подобны (матрицы одного и того же оператора в разных базисах)

$B - \lambda I = T^{-1} A T - \lambda I = T^{-1}(A - \lambda I) T$

$\det(T^{-1}) = \frac{1}{\det(T)}$; $\det(B - \lambda I) = \frac{1}{\det(T)} \cdot \det(A - \lambda T) \cdot \det T$; $\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda T)$ ■

(18.02)

Th $\mathcal{A}: X_n \to X_n$; $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_p\}$

$x^1, x^2, \dots x^p$ – с.в. $\mathcal{A}$; $\mathcal{A}x^k = \lambda_k \cdot x^k$, $k = \overline{1,p}$

$\Rightarrow \{X_1, \dots x^p\}$ – ЛНЗ

□ $\{x^1, \dots, x^p\}$ – ЛЗ

$\{x^1, \dots, x^r\}$ – ЛНЗ, $r < p$

$L_r \subset X_n$, $\dim L_r = r$, L_r – инвар. $\mathcal{A}$

$\mathcal{A}_{L_r}$ – сужение $\mathcal{A}$ на L_r

$\{\lambda_1, \dots \lambda_r\}$ – $\sigma(\mathcal{A}_{L_r})$

$x^{r+1} \neq 0$ $x^{r+1} \in L_r$, $\mathcal{A}_{L_r}(x^{r+1}) = \mathcal{A}(x^{r+1}) = \lambda_{r+1} \cdot x^{r+1}$

λ_{r+1} – с.ч. $\mathcal{A}_{L_r}$ $\rightarrow\!|\!\leftarrow$ ■

df $\{x_1, \dots x_n\}$ – собств. вектора $\mathcal{A}: X_n \to X_n \Rightarrow \{x_i\}_{i=1}^n$ – базис X_n

$\{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$ – с.ч. $\mathcal{A}$

$\Rightarrow$ A – диагональная (в $\{x_i\}_{i=1}^n$), $\alpha_i^i = \lambda_i$ $i = \overline{1,n}$

A_e $\quad A_x$ – собств. базис $\quad T_{x \to e}$ (собств. вектора по столбцам)

df Алгебраическая кратность – кратность λ как корня характерист. ур-я $\quad P_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k} \cdot P_{n-k}(\lambda)$, $k = \beta$

Геометрическая кратность $\dim(L_\lambda) = \alpha_\lambda$

Th $\alpha \leq \beta$ б.д.

df Если $\exists$ собств. базис, то $\mathcal{A}$ – оператор простой структуры

Th $\mathcal{A}$ – оператор простой структуры $\Leftrightarrow \forall \lambda: \alpha_\lambda = \beta_\lambda$

25.02 **Спектральный анализ. Скалярный тип.** [redacted]

$\mathcal{A}: X \to X \qquad \mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$

☑ $X = L_1 \dotplus L_2 \qquad \dim L_1 = k \qquad \dim X = n$

$P_{L_1}^{\parallel L_2}: X \to X \iff \operatorname{diag}\{1, 1, \ldots, 1_k, 0, 0, \ldots, 0_{n-k}\}$

$\sigma_p = \{0, 1\}$

df с.з. λ – простое, если оно корень характ. полинома, кратность – 1

λ_1 – простое $\iff \chi_{\mathcal{A}}(\lambda_1) = 0, \ \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \tilde{\chi}_{\mathcal{A}}(\lambda), \ \tilde{\chi}_{\mathcal{A}}(\lambda) \neq 0$

Лм Все собственные п/п оператора с простым спектром – одномерны

□ $L_{\lambda_i} = \{x_i \in X : \mathcal{A}x_i = \lambda_i x_i\}$

$\exists \ \dim L_{\lambda_i} \geq 1$

$\lambda_i \leftrightarrow x_i = e_i \qquad \lambda_1 \to x_1, \ \lambda_2 \to x_2, \ \ldots, \ \lambda_n \to x_n$

$\lambda_i \neq \lambda_j : i \neq j \Rightarrow \{x_i\}_{i=1}^n$ – базис X

$\dim L_{\lambda_n} > 1 \Rightarrow \lambda_n \to x_n, \ \lambda_n \to x_{n+1} \Rightarrow (n+1)$ ЛНЗ векторов $\to\leftarrow$ ■

$L_{\lambda_i} = \ker(\mathcal{A} - \lambda_i I)$

Th $\mathcal{A}: X \to X$, линейный оператор с простым спектром Б. Д.

$\sigma_{\mathcal{A}} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\}, \quad \mathcal{A}x_i = \lambda_i \cdot x_i$

$\mathcal{A} \leftrightarrow A, \quad A_e \leftrightarrow A_d$

$A_d = T^{-1} \cdot A_e \cdot T_{e \to x} \qquad x$ – собств. базис.

df $\mathcal{A}: X \to X$, λ_i – с.з. $\mathcal{A}$

P_{λ_i} – спектральный проектор – оператор проектирования на L_{λ_i}

NB $\{x_i\}_{i=1}^n$ – базис X, $\{x_i\}_{i=1}^k$ – базис L_{λ_i} $\Rightarrow X = L_{\lambda_i} \dotplus L\{x_i\}_{i=k+1}^n$

Лм $\mathcal{A}: X \to X$, с простым спектром $\sigma_{\mathcal{A}} = \{\lambda_1, \ldots \lambda_n\}$

$P_{\lambda_i} x = (f^i, x) x_i, \quad \forall x \in X$

$\{x_i\}_{i=1}^n$ – базис X из собств. векторов $\mathcal{A}$

$\{f^i\}_{i=1}^n$ – сопряженный базис

$(f^i, x_k) = \delta_k^i = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$

□ $x \in L_{\lambda_i}, \ y \in L\{x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots x_n\}$

$P_{\lambda_i} x_i = x_i; \quad P_{\lambda_i} y = \theta$

$P_{\lambda_i} x_i = (f^i, x_i) x_i = \delta_i^i x_i = x_i$

$P_{\lambda_i} y = P_{\lambda_i} x_{j \neq i} = (f^i, x_j) x_i = \delta_j^i x_i = \theta.$ ■

NB $P_{\lambda_i}^2 = P_{\lambda_i}(P_{\lambda_i}) = P_{\lambda_i}$ // идемпотентность

Лм $X = L_{\lambda_1} \dotplus L_{\lambda_2} \dotplus \ldots \dotplus L_{\lambda_n} \iff \forall x \in X \ \exists! \ x = \underset{\in L_{\lambda_1}}{x_1} + \underset{\in L_{\lambda_2}}{x_2} + \ldots + \underset{\in L_{\lambda_n}}{x_n}$

□ $\{e_i\}_{i=1}^n$ базис X, $\mathcal{A}e_i = \lambda_i \cdot e_i$

$x = \sum\limits_{i=1}^n \alpha^i e_i = \underbrace{\alpha^1 e_1}_{L_{\lambda_1}} + \underbrace{\alpha^2 e_2}_{L_{\lambda_2}} + \ldots + \underbrace{\alpha^n e_n}_{L_{\lambda_n}}$ ■

Лм $\forall x \in X: \quad x = \sum\limits_{i=1}^n P_{\lambda_i}(x) \qquad (f^i, x) = \xi^i$

□ $\{e_i\}$ – базис X, $\{f^i\}$ – базис X^*

$x = \sum\limits_{i=1}^n \xi^i e_i = \sum\limits_{i=1}^n (f^i, x) e_i = \sum\limits_{i=1}^n P_{\lambda_i}(x)$ ■

Th Спектральная теорема $\mathcal{A}: X \to X$

$\mathcal{A} = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i P_{\lambda_i} \iff \forall x \in X \quad \mathcal{A}x = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i P_{\lambda_i}(x)$

□ $\mathcal{A}x = \mathcal{A}\left(\sum\limits_{i=1}^n P_{\lambda_i}(x)\right) = \sum\limits_{i=1}^n \mathcal{A}(P_{\lambda_i}(x)) = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i P_{\lambda_i}(x)$ ■

NB $\sigma_{A} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, $k<n = \dim X$

$\lambda_i \leftrightarrow L_{\lambda_i}$, $\dim L_{\lambda_i} = m_i$

$L_{\lambda_i} = L\{e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{m_i}^{(i)}\}$, $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$

$P_{\lambda_i} * = \sum_{j=1}^{m_i} (f^{j}_{(i)}, *)\, e_j^{(i)}$

Св-во идемпотентности сохраняется

$$X: \{\underbrace{e_1^1, e_2^1, \dots e_{m_1}^1}_{L_{\lambda_1}};\ \underbrace{e_1^2 \dots e_{m_2}^2}_{L_{\lambda_2}};\ \dots;\ \underbrace{e_1^k \dots e_{m_k}^k}_{L_{\lambda_k}}\}$$

Lm $X = \dot{+}_{i=1}^{k} L_{\lambda_i} \Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^{k} P_{\lambda_i}(x)$

$A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_{\lambda_i}$

Th $p(\lambda)$ – скалярный полином ($\lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

$p(A) = \sum_{i=1}^{k} p(\lambda_i) \cdot P_{\lambda_i}$, $p(\lambda) = \sum_j \alpha_j \lambda^j$

NB Для произвольной функции f

$f(A) = \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i) \cdot P_{\lambda_i}$

11.03 **Квадратичные формы в ЛП**

$f: X(F) \to F$

$b: X \times X \to F$

df Билинейная форма

1) $b(x,y) = b(y,x)$ 2) Удовл. св-вам линейности

$F = \mathbb{R}$

$F = \mathbb{C}$

$b(x,y) = \overline{b(y,x)}$

$\{e_j\}_{j=1}^n \in X$

$b \leftrightarrow b_{ij} = b(e_i, e_j) \quad B = \|b_{ij}\|$

$x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j$

$y = \sum_{j=1}^n \eta^j e_j$

$b(x,y) = b\left(\sum_{j=1}^n \xi^j e_j, \sum_{i=1}^n \eta^i e_i\right) = \sum_{i,j=1}^n \xi^j \cdot b(e_j, e_i) \cdot \eta^i$

$b(x,y) = x^T B y$

$b(x,x) = q(x) \quad x \in X$

$q(x) = x^T \cdot Q x$

Th $\{e_i\}$ $\{f_i\}$: $Q_f = T^T \cdot Q \cdot T$

$T_{e \to f}$

Закон преобразования квадратичных форм

df квадратичная форма диагональна, если её матрица диагональна

$Q = \operatorname{diag}\{\alpha_1, \dots \alpha_n\}$

$\alpha_i \in \{0, \pm 1\}$ – Q имеет канонический вид.

Приведение к главным осям

Th Если одна и та же квадратичная форма приведена к главным осям — количество положительных и отриц. коэф совпадает

$q(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot |\xi^i|^2 \quad \alpha_1, \dots, \alpha_p > 0 \quad \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+q} < 0$

$q(x) = \sum_{i=1}^n \hat{\alpha}_i |\hat{\xi}^i|^2 \quad \alpha'_1, \dots, \alpha_{p'} > 0 \quad \alpha_{p'+1}, \dots \alpha_{p'+q'} < 0$

Тогда $p' = p \quad q' = q \quad p + q \le n$

☐ Пусть $p > p'$

$\{e_1, \dots e_p, e_{p+1}, \dots e_{p+q}, e_{p+q+1}, \dots, e_n\}$

$L = \mathcal{L}\{e_1, \dots e_p\}$, $L' = \mathcal{L}\{e_{p'+1}, \dots e_n\}$

$X = L + L'$

$\dim L + \dim L' = p + (n - p') = n + (p - p') > 0$

$\dim L + \dim L' = \dim(L \cap L') + \dim(L + L')$

$\dim(L \cap L') > 0 \Rightarrow L \cap L' \ne \{0\}$

$z \in L \cap L'$, $z \ne 0$

$L: q(z) = \sum_{i=1}^p \alpha_i |\eta^i|^2 > 0$

$L': q(z) = \sum_{i=p'+1}^n \alpha_i |\hat{\eta}_i|^2 \le 0$

$\rightarrow\leftarrow$ ■

$p = p' = n_+$ положительный индекс инерции кв. формы ; $q = q' = n_-$; $n - (p+q) = n_0$ нулевой индекс

(n_+, n_-, n_0) – сигнатура

Ex $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ однополосный гиперболоид $(2, 1, 0)$

df $n_+ = n = \dim X$ – положительно-определенная

$\forall x \in X: q(x) \ge 0$, $q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Lm Квадратичная форма в ЛП может быть приведена к diag. виду (Метод выделения полных квадратов Лагранжа)

18.03 Видимо, доказываем лемму про диагонализовывание

□ $q(x) = \sum_{i,j=1}^n q_{ij}\xi^i\xi^j$

$q_{11}\neq 0$ $\quad \tilde\xi^1 = \xi^1 - \xi^k \quad \tilde\xi^k = \xi^1+\xi^k \quad \tilde\xi^i = \xi^i, \ i\neq 1, i\neq k$

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^n q_{ij}\xi^i\xi^j = \overbrace{q_{11}|\xi^1|^2 + 2q_{12}|\xi^1||\xi^2| + \dots + 2q_{1n}|\xi^1||\xi^n|}^{*} + \sum_{i,j=2}^n q_{ij}\xi^i\xi^j$$

минус смешанные произведения

$$* = q_{11}\left(|\xi^1|^2 + 2\frac{q_{12}}{q_{11}}\xi^1\xi^2 + \dots 2\frac{q_{1n}}{q_{11}}\xi^1\xi^n\right) = q_{11}\left(|\xi^1| + \frac{q_{12}}{q_{11}}|\xi^2| + \dots \frac{q_{1n}}{q_{11}}|\xi^n|\right)^2 - \frac{q_{12}^2}{q_{11}}|\xi^2|^2 - \dots - \frac{q_{1n}^2}{q_{11}}|\xi^n| - 2\frac{q_{12}q_{13}}{q_{11}}|\xi^2||\xi^3| - \dots - 2\frac{q_{1n-1}q_{1n}}{q_{11}}|\xi^{n-1}||\xi^n|$$

$$q(x) = [\text{привед. } *] + \sum_{i,j=2}^n q_{ij}\xi^i\xi^j \underset{|\xi^2|^2 \text{ например}}{\overset{\text{будут одинак. слагаемые}}{=}} q_{11}\left(\sum_{j=1}^n \frac{q_{1j}}{q_{11}}\xi^j\right)^2 + \sum_{i,j=2}^n \tilde q_{ij}\xi^i\xi^j$$

$\tilde q_{23} = q_{23} - 2\frac{q_{12}q_{13}}{q_{11}}$

$$\eta_1 = \sum_{j=1}^n \frac{q_{1j}}{q_{11}}\xi^j$$

$$q(x) = q_{11}|\eta_1|^2 + \sum_{i,j=2}^n \tilde q_{ij}\xi^i\xi^j \Rightarrow q(x) = \alpha_{11}|\psi^1|^2 + \dots + \alpha_{nn}|\psi^n|^2 \quad ■$$

Квадратичные формы в евклидовом п-ве E

$q(X)$, E, $\mathcal{A}: E\to E$

df $\mathcal A$ - присоед. оператор, если $q(x,x) = (\mathcal A x, x)$

R: $b(x,y) = b(y,x)$

C: $b(x,y)=\overline{b(y,x)}$

Ура! Для них можно использовать спектральный анализ

df Сопряжённый оператор $\mathcal A^*$ к $\mathcal A$

df Оператор $\mathcal A$ Эрмитов, если $\mathcal A^* = \mathcal A \Rightarrow q(x,x) = (\mathcal Ax, x) = (x, \mathcal Ax)$

NB Если оператор присоединённый, то он Эрмитов

Q - матрица $q(x,x)$ $\quad$ Для эрмитовых операторов $Ax = x^TA$

$Q = A\cdot G$ $\quad$ Прикол: A и G коммутативны $\quad (Ax)^T = x^TA$

□ $q(x,x) = (\mathcal Ax, x) = (x, \mathcal Ax) = x^T G A x = x^T A G x$

$q(x,x) = x^T\cdot Q\cdot x$

Th Для любой $q(x,x)$ в E $\exists$ ортонорм базис, в котором $Q = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

Векторы базиса: собств. векторы $\mathcal A$,

□ E - евкл. п-во, $\{e_i\}_{i=1}^n$ - ортонорм. базис $(e_i = x^{\mathcal A}_{\lambda_j})$ $\quad \mathcal A e_j = \lambda_j e_j$

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i : \quad q\left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \sum_{j=1}^n \xi^j e_j\right) = q(\mathcal Ax, x) = q\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\xi^i e_i, \sum_{j=1}^n \xi^j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \xi^i \xi^j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\xi^i|^2 \quad ■$$

Lm с.з. $\mathcal A$: $\det(Q - \lambda G) = 0$

□ $\det(A - \lambda I) = 0$

$A = QG^{-1}$: $\det(QG^{-1} - \lambda I) = 0$; $\det(Q - \overset{\text{очев.}}{\bar\lambda \bar G}) = 0$ ■

Th Любая квадратичная форма может быть приведена к diag виду ортогональным преобразованием

25.03

M – метрическое п-во; $\rho: M \times M \to \mathbb{R}$ (расстояние); пространство, в котором есть такая метрика

① $\rho(x,y) \geq 0$; $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

② $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

③ $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$

Л.П. X; $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ (норма) — нормированное п-во

① $\|x\| \geq 0$; $x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$

② $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

③ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

NB Любое норм. п-во явл. метрич.

$\rho(x,y) = \|x-y\|$

E – вещ. евклидово п-во, $g(x,y) = (x,y)$ (метрическая форма $\Leftrightarrow$ скалярное произв.)

① $g(x,y)$ – билинейная форма [+ св-ва линейности]

② $g(x,y) = g(y,x)$

③ $(x,x) \geq 0$; $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

NB явл. норм.

$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$

Нер-во Шварца

$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

□ $\measuredangle$ $\|\lambda x+y\|^2 = (\lambda x+y, \lambda x+y) = \lambda^2(x,x) + 2\lambda(x,y) + (y,y) = |\lambda|^2\|x\|^2 + \lambda[(x,y)+(y,x)] + \|y\|^2 \overset{*}{\Rightarrow} |\lambda^2|\,\|x\|^2 + 2\lambda(x,y) + \|y\|^2 \geq 0$ (Корней нет)

* $K = \mathbb{R}$

$D = 4\lambda^2|(x,y)|^2 - 4\lambda^2\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$

$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ очев. ■

Ортонормированный базис

$x \perp y \Leftrightarrow (x,y) = 0$

$(x,y)_Q = (Qx, y)$; если $(x,y)_Q = 0$, то x,y Q-ортогональны (сопряжены)

Lm $x \perp y_1, y_2 \ldots y_n \Rightarrow x \perp \mathcal{L}\{y_1, \ldots, y_n\}$

□ $\measuredangle \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i, x\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (y_i, x) = 0$ очев. ■

Th (Теорема об ортогональности и ЛНЗ)

$\{x_i\}_{i=1}^n : (x_i, x_j) = 0 \Leftrightarrow i \neq j \implies \{x_i\}_{i=1}^n$ – ЛНЗ

□ $\measuredangle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \,/\cdot x_j$; $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, x_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i, x_j) = \alpha_j (x_j, x_j) = \alpha_j \|x_j\|^2 = 0 \Leftrightarrow x_j = 0$ (в общем случае не равен) или $\alpha_j = 0$

for all $j = \overline{1, \ldots n} \Rightarrow \nexists \alpha_j \neq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \neq 0$ ■

Th $\{x_i\}_{i=1}^n : x_i \neq 0$; $(x_i, x_j) = 0$, $i \neq j \Rightarrow \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$

Th Пифагора

□ $\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = (\sum x_i, \sum x_i) = \sum_{i,j=1}^{n} (x_i, x_j) = \sum_{a=1}^{n} \|x_a\|^2$ очев. ■

E, $L \subset E$

$x \perp L \Leftrightarrow x \perp y, \forall y \in L$

$M := \{x \perp L, x \in E\}$ – ортогональное дополнение L; $M = L^{\perp}$

Ортогональный базис

Th $\{x_i\}_{i=1}^m$ – базис в E ($\dim E = m$) $\Rightarrow$ можно преобразовать в ортогональный базис

$\{x_i\}_{i=1}^m \Rightarrow \{e_i\}_{i=1}^m$, $(e_i, e_j) = 0$, $i \neq j$

Ортонормированный базис

$\{e_i\}_{i=1}^m \Leftrightarrow (e_i, e_j) = \delta_i^j$

□ Процедура ортогонализации Грама – Шмидта

1. $e_1 = x_1$ очев.
2. $e_2 = x_2 + \alpha \cdot e_1$ $\quad (x_1, x_2) = -\alpha(x_1, x_1) \Rightarrow \alpha = -\frac{(x_1, x_2)}{(x_1, x_1)}$
3. $e_3 = x_3 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$

$(e_3, e_1) = 0 \quad (x_3, e_1) + \beta_1(e_1, e_1) + \beta_2 \overset{0}{(e_1, e_2)} = 0 \Rightarrow \beta_1 = -\frac{(x_3, e_1)}{(e_1, e_1)}$

$(e_3, e_2) = 0 \quad (x_3, e_2) + \beta_1(e_1, e_2) + \beta_2(e_2, e_2) = 0 \Rightarrow \beta_2 = -\frac{(x_3, e_2)}{(e_2, e_2)}$

m: $e_m = x_m + \gamma_1 e_1 + \ldots + \gamma_{m-1} e_m$; $\quad (e_m, e_i) = 0$, $i = \overline{1, \ldots (m-1)}$

$\gamma_j = -\frac{(x_m, e_j)}{(e_j, e_j)}$ ■

swag

NB $\{e_i\}_{i=1}^m$ – ЛНЗ

□ $\exists e_m = 0 = 1 \cdot x_m + \sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i e_i = 1 \cdot x_m + \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i x_i = 0 \Leftrightarrow \forall \xi_i = 0$ Но! $\xi_m = 1$ $\to\leftarrow$ ■

$e_{m+1} = 0$;

Прикол: $\|e_m\| \leq \|x_m\|$ □ $\|e_m\|^2 = (x_m, e_m) + \sum_{i=1}^{m-1} \overset{0}{(e_i, e_m)} \leq \|x_m\| \cdot \|e_m\|$

$\|e_m\|^2 \leq \|x_m\| \cdot \|e_m\|$

$\|e_m\| \leq \|x_m\|$ ■

15.04 Дифуры: The new Beginning

☑ $y(t)$, Δt, $y(t+\Delta t) - y(t) \approx k \cdot y(t)\Delta t$

$\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx k \cdot y(t)$; $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y(t)$; $y' = k \cdot y(t)$ | $y = t \cdot k$, $k = k^2 \cdot t$, $t = \frac{1}{k}$ | $e^{kt} = y$, $k \cdot e^{kt} = k \cdot e^{kt}$ $\forall t \in R$

$m(t_0) = 25$ гр. $t_0 = 0$

$m(t_1) = 42$ гр. $t_1 = 30$ мин

$m(t_2) = 50$ гр. $t_2 - ?$

$m' = km \Rightarrow m = C \cdot e^{kt}$

$m(0) = 25 \Rightarrow C = 25$

$m(30) = 42 \Rightarrow \frac{42}{25} = e^{k \cdot 30}$, $\frac{\ln 42 - \ln 25}{30} = k \approx 0{,}017$

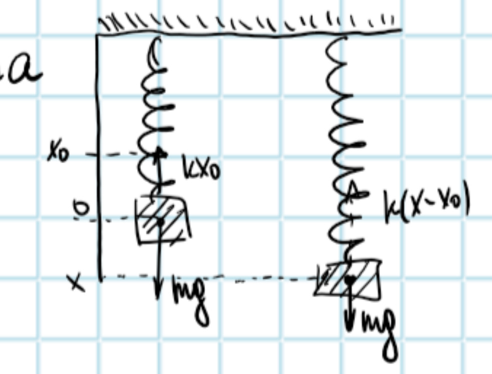
$m(t) = 25 \cdot e^{0{,}017t}$

$50 = 25\, e^{0{,}017t}$

$t \to \infty$

$m \to \infty$

☑ $F = ma$



$a = x''$

$m x'' = mg - k(x - x_0)$

$0 = mg - k(0 - x_0) \Rightarrow kx_0 = -mg$

$mx'' = -x_0k - kx + kx_0$

$mx'' = -kx$

$x(t) = C_1 \cdot \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}} + C_2\right)$

ОДУ I-го порядка:

def $F(x, y, y') = 0$ – ОДУ I-го порядка

φ – решение, если

1) $\varphi \in C^1(a,b)$ 2) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$ на (a,b)

def Интегральная кривая – график решения ОДУ

def Частное решение – конкретное решение ур-я

def Общее решение – мн-во всех решений

def Общий интеграл $\Phi(x, y, C) = 0$; частный – при конкретном C

Не всегда мы можно описать решение ур-я

☑ $y' = x$; $\frac{dy}{dx} = x$; $dy = x\,dx$; $y = \frac{x^2}{2} + C$, $C \in R$, $x \in R$

$\{y: (a,b) \to R \mid y(x) = \frac{x^2}{2} + C,\ a<b,\ C \in R\}$

$y_1 = \frac{x^2}{2}$

$y_2 = \frac{x^2}{2} + 5$

$\boxed{x^2 - 2y + C = 0}$ общий интеграл

def

Ур-е в нормальной форме

$y' = f(x, y)$

def область задания – обл опред. правой части

☑ $y' = -\frac{1}{x^2}$

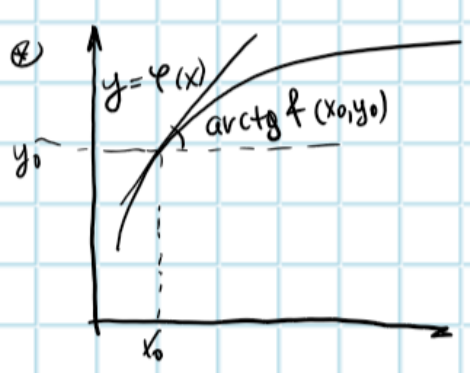
$D(f) := \{(x,y) \in R^2 \mid x \neq 0\}$

Геом. смысл решения ОДУ

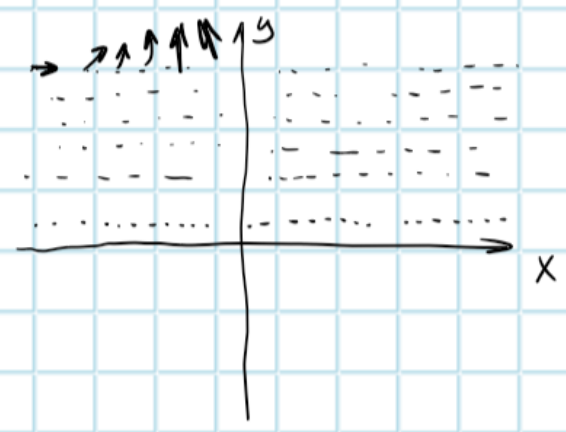
$\circledast$ $y' = f(x,y)$, $y = \varphi(x)$ – решение $\circledast$

(x_0, y_0), $y_0 = \varphi(x_0)$

$\varphi'(x_0) = f(x_0, y_0)$



vector field

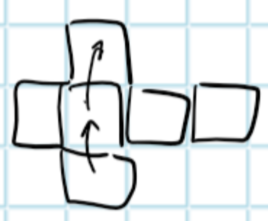


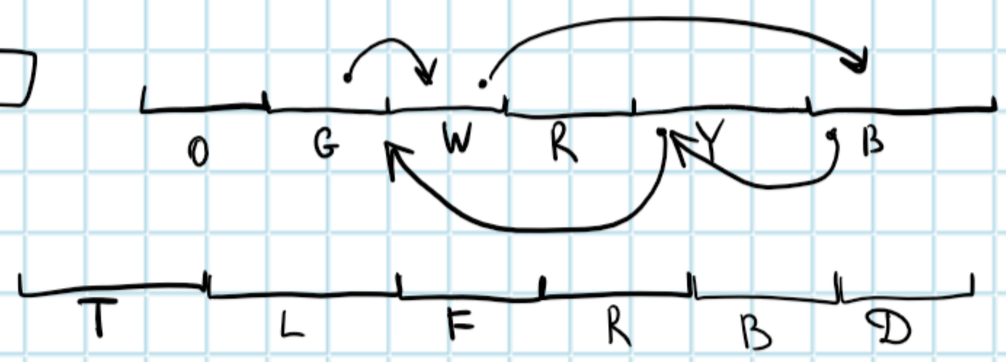
Все гладкие кривые, касающиеся направленний поля, явл. решением

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} : \frac{1}{x^\alpha} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{p-\alpha}} = \lim\limits_{x\to\infty} C \frac{\frac{1}{x}}{x^{p-\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^{p-\alpha}}$

$p \in (1, +\infty)$

$\alpha \in (1, p)$





22.04

$y' = f(x,y)$; $y' = \frac{dy}{dx}$; $\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow dy = f(x,y)dx$

$dy - f(x,y)dx = 0$

df Ур-е в дифференциалах

(1) $P(x,y)dy + Q(x,y)dx = 0$

df φ – решение (1)

а) $\varphi \in C^1(a,b)$

б) $P(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x) + Q(x,\varphi(x)) \equiv 0$

NB $y = \varphi(x)$ $x = \psi(y)$ also can be a solution

df $D_{ОДУ} = D_P \cap D_Q$ область определения ОДУ

☑ $x\,dx + y\,dy = 0$; $\frac{x^2}{2} + C_1 = -\frac{y^2}{2} + C_2$; $y = \pm\sqrt{C - x^2}$; $y = \varphi(x)$; $x = \pm\sqrt{C - y^2}$; $x = \psi(y)$; $r(t) = (\sqrt{C}\cos t, \sqrt{C}\sin t)$

① Область задания – $\mathbb{R}^2$

df $r(t) = (\psi(t), \varphi(t))$ параметрич. решение

а) $P(\psi(t), \varphi(t))\cdot\psi'(t) + Q(\psi(t), \varphi(t))\cdot\varphi'(t) \equiv 0$

б) $\varphi(t), \psi(t) \in C^1(\alpha,\beta)$, $r'(t) \neq 0$ $\forall t \in (\alpha,\beta)$ критичный момент

NB изучаем поведение (1)

$y'_x = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$, $P(x,y) \neq 0$

$x'_y = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, $Q(x,y) \neq 0$

df Особая точка $(x_0,y_0) \Leftrightarrow P(x_0,y_0) = Q(x_0,y_0) = 0$

Геометрический смысл

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$; $r(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t \in (\alpha,\beta)$

$P(\varphi(t), \psi(t))\cdot\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \equiv 0$

vector field

$F(P,Q)$: $F(r(t))\cdot r'(t) = 0$ Поле перпендикуляров

F = new Vector(P, Q)

Задача Коши

$y' = f(x,y)$; $y_0 = y(x_0)$ (2)

(x_0,y_0) – начальные данные

Геометрически – частное решение, проходящее через (x_0,y_0)

II main questions:

1. Does solution exist combien de solutions existent
2. How many

☑ $y' = 3y^{2/3}$

$\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ $y > 0$ – $\exists!$ решение $y = (x-c)^3$

$y < 0$

$\frac{2}{\sqrt[3]{y}} = (3y^{2/3})'_y$

$(x_0, 0)$ $\forall x_0$ $\varphi(x) = 0$

Th $G \subseteq \mathbb{R}^2$ (область задания функции)

$f \in C(G)$

$(x_0,y_0) \in G$

Решение существует

Th $G \subseteq \mathbb{R}^2$

$f, f'_y \in C(G)$

$(x_0,y_0) \in G$

$\exists$ $\varphi_1(x)$ – решение (2) $\Rightarrow \varphi_1(x) = \varphi_2(x)$

$\varphi_2(x)$

$\varphi(x_0) = \psi(x_0)$, $\varphi(x) \neq \psi(x)$ в ок-ти (x_0,y_0)

$\psi(x)$ – особое решение

df Интегральная кривая – особая, если в каждой т. нарушается условие ед-ти

Уравнение, интегрируемое в квадратурах

$P(x)dx + Q(y)dy = 0$ Ур-е с разделёнными переменными

$P \in C(a,b)$

$Q \in C(c,d)$

$y = \varphi(x)$ – решение

1) $\varphi \in C^1(\alpha,\beta)$ $(\alpha,\beta) \subseteq (a,b)$

неявно задана

$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$

29.04

def Однородная функция

$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} F(x,y)$

Примеры однородных функций

- $x+y$
- x^2+y^2, x^2+yx

Однородное ур-е?

def $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

Сводится к $y' = f(\frac{x}{y})$

Решается: $t = \frac{x}{y}$

Параметрические решения диффура: ?

$x = \varphi(t)$
$y = \psi(t)$

$P(\lambda\varphi, \lambda\psi)\varphi' + Q(\lambda\varphi, \lambda\psi)\psi' = 0$

$P(\varphi,\psi)\varphi' + Q(\varphi,\psi)\psi' = 0$

def Линейное ур-е первого порядка

$y' = p(x)\cdot y + q(x)$

Если $q(x) = 0$, то ур-е – однородное

иначе – неоднородное

Lm Общее решение линейного диффура I-го пор-ка

$p \in C(a,b)$

$y' = p(x)\cdot y$

Решение: $y = C\cdot e^{\int p(x)dx}$

□ $\exists\, y > 0$

$\frac{dy}{y} = p(x)dx \xrightarrow{\int} \ln(y) = P(x) + C_0 \xrightarrow{\exp(\ )} y = C_1\cdot e^{P(x)}$ ■

ЛУ I-го порядка

$p, q \in C(a,b)$

$y' = p(x)y + q(x)$

$y = \left(C + \int q e^{-\int p}\right) e^{\int p}$, $C \in \mathbb{R}$, $D_y = (a,b)$

□ Док-во – подстановкой ■

Метод Лагранжа

1) $y = C\cdot e^{\int p}$ – решим одн. диффур

2) $C = C(x)$

$y' = C' e^{\int p} + \cancel{C\cdot p\cdot e^{\int p}} = \cancel{p\cdot C\cdot e^{\int p}} + q$

$dC = (q\cdot e^{-\int p})dx$

$C = \tilde{C} + \int q e^{-\int p}$

Бернулли

$y' = p(x)\cdot y + q(x)y^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}/\{0, 1\}$

1) $\frac{y'}{y^{\alpha}} = p(x)\cdot y^{1-\alpha} + q(x)$ $z = y^{1-\alpha}$

$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}\cdot y' \Rightarrow y' = \frac{z'\cdot y^{\alpha}}{(1-\alpha)}$

$\frac{z'}{(1-\alpha)} = p(x)z + q(x)$

Ур-е Риккати

$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$

Решаемо, если Лиувилля

$y' = y^2 + x^{\alpha}$, $\frac{\alpha}{2\alpha+4} \in \mathbb{Z}$, $\alpha = -2$

$\exists\, \varphi$ – частное решение (подбирается)

$y = z + \varphi \Rightarrow$ сведение к Бернулли

def Ур-е в полных диффр. УПД

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

$\exists\, U(x,y)$

$dU = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

$U'_x = P$, $U'_y = Q$

Решение:

$G \subset \mathbb{R}^2$

$U \in C^1(G)$, $U'_x = P$, $U'_y = Q$

$y = \varphi(x)$ – решение $\Leftrightarrow$ $\varphi \in C^1(a,b)$

$U(x,y) = C$

$\boxed{06.05}$ Уравнения, не разрешенные отн-но производной

$F(x,y,y') = 0$

Метод введения параметра

$\gamma: I \to \mathbb{R}^2$

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\gamma = (\varphi, \psi)$

Если $\gamma(I)$ – график неп. ф-ции $y = f(x)$, то

φ, φ^{-1} $y = \psi(\varphi^{-1})$

Неполные ур-я

$F(x, y') = 0$

$R_{x,y'}$ $y' = g(x)$

$x = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$, $t \in I$

$\exists\, \varphi \in C^1(\alpha,\beta)$, $\varphi'(t) \neq 0$

$\psi \in C(\alpha,\beta)$

$F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$ на (α,β)

$x = \varphi(t)$, $y = \int \psi(t)\cdot\varphi'(t)\,dt + C$ – решение

□ $\varphi'(t) \neq 0 \Rightarrow \varphi(t)$ – строго монотонна и $\exists\, \varphi^{-1}(t)$

$y = g(x)$ $(a,b) = \varphi(\alpha,\beta)$

$g'(x) = \frac{\left(\int \psi(t)\varphi'(t)dt + C\right)'}{\varphi'(t)} = \psi(t)$

$dy = y'_x dx$, $dy = y'_t dt$, $y'_x = \psi(t)$ $dx = \varphi'(t)dt$

$y'_t = \psi(t)\varphi'(t) \Rightarrow y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C$ ■

$e^{y'} + y' = x \Rightarrow x = e^t + t$

$y'_t = t$

$dy = y'_t dt$, $y'_x = t$, $dx = (e^t+1)dt$

$y'_t = t\cdot(e^t+1) \Rightarrow \begin{cases} y = e^t(t-1) + \frac{t^2}{2} + C \\ x = e^t + t \end{cases}$

$F(y, y') = 0$

$y = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$

$dy = \varphi'(t)\,dt$

$dx = x'_t dt \Rightarrow \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$

Полное ДУ

$F(x,y,y') = 0$ $\mathbb{R}^3_{x,y,y'}$: $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, $y' = \chi(u,v)$

$dy = \psi'_u du + \psi'_v dv$

$y' = \chi(u,v)$

$dx = \varphi'_u du + \varphi'_v dv$

$(\psi'_u - \chi\cdot\varphi'_u)du + (\psi'_v - \chi\cdot\varphi'_v)dv = 0$

13.05 Системы диффуров

$$\begin{cases} F_1(y_1', \dots y_n', x, y_1, \dots y_n) = 0 \\ \dots \\ F_n(\text{—}\,''\,\text{—}) = 0 \end{cases}$$

Нормальная система ДУ

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f(x, y_1, \dots y_n) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, \dots y_n) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = y_1(x) \\ \dots \\ y_n = y_n(x) \end{matrix}$$

Solution

Задача Коши:

$$y_1'(x_0) = y_1^0$$
$$\dots$$
$$y_n'(x_0) = y_n^0$$
$$(x_0, y_1^0 \dots y_n^0) \in D$$

Общее решение ОДУ

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x, C_1 \dots C_n) \\ \dots \\ y_n = y_n(x, C_1 \dots C_n) \end{cases}$$

В $\forall$ точке нарушается ед-ть – решение особое

Метод Гаусса тоже работает!

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x, y_1)$$
$$\frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, y_2)$$
$$\dots$$
$$\frac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2 \dots y_n)$$

Метод интегрирующих комбинаций

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = x + y \qquad \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = y - x$$

$$\frac{d(x+y)}{dt} = x + y \Rightarrow \frac{d(x+y)}{x+y} = dt \qquad \frac{d(x-y)}{x-y} = -dt$$

$$\ln(x+y) = t + \ln(C_1) \qquad x - y = C_2 \cdot e^{-t} \; ②$$

$$x + y = C_1 \cdot e^t \; ①$$

$$1,2 \Rightarrow \frac{C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-t}}{2} = x \qquad \frac{C_1 \cdot e^t - C_2 \cdot e^{-t}}{2} = y$$

At the end:

$$\Phi_1(x, y_1 \dots y_n) = C_1$$

СЛДУ

$$\frac{dy_j}{dx} = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y_i + f_j(x)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum a_j(t) x + f_i(t)$$

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X + F$$

Векторная форма

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} dx_1/dt \\ \vdots \\ dx_n/dt \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\frac{dX}{dt} - A \cdot X = L[X]$$

оператор, действующий на X

1) $L[cx] = cL[x], \; c \in K$

2) $L[x_1 + x_2] = L[x_1] + L[x_2]$

$$L \cdot X = F$$

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X + F$$

1) $F = 0$ – система однородная $\quad L[X] = 0$

2) $F \neq 0$ – неоднородная система $\quad L[X] = F$

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = a_1 x(t) + b_1 y(t) \\ \frac{dy}{dt} = a_2 x(t) + b_2 y(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda k_1 e^{\lambda t} = a_1 k_1 e^{\lambda t} + b_1 k_2 e^{\lambda t} \\ \lambda k_2 e^{\lambda t} = a_2 k_1 e^{\lambda t} + b_2 k_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

$$x(t) = k_1 \cdot e^{\lambda t}$$
$$y(t) = k_2 \cdot e^{\lambda t}$$

$$\begin{cases} k_1(a_1 - \lambda) + k_2 b_1 = 0 \\ k_1 \cdot a_2 + k_2(b_2 - \lambda) = 0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

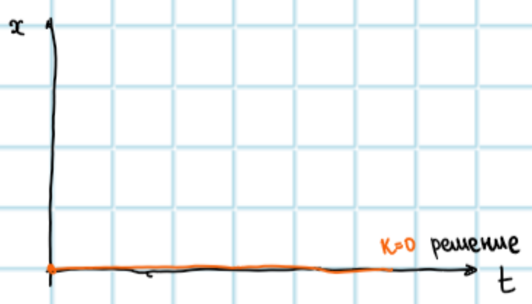
$$x'(t) = k_1 \lambda e^{\lambda t}$$
$$y'(t) = k_2 \lambda e^{\lambda t}$$

Теория устойчивости

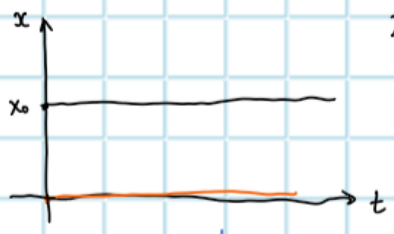
☑ $x' = \lambda x$

Общее решение: $x(t) = C \cdot e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ — фиксированное число
$\llcorner x_0 \cdot e^{\lambda t}$, $x_0 = x(0)$

Как изменится решение $x=0$, если „пошевелить" начальное значение x?

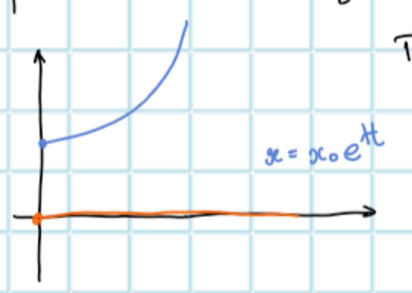


$\lambda = 0$



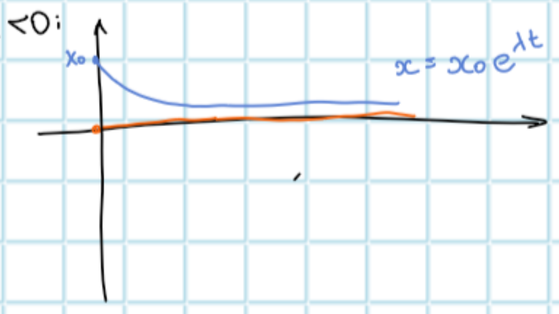
$x=0$ · устойчивое решение

$\lambda > 0$:



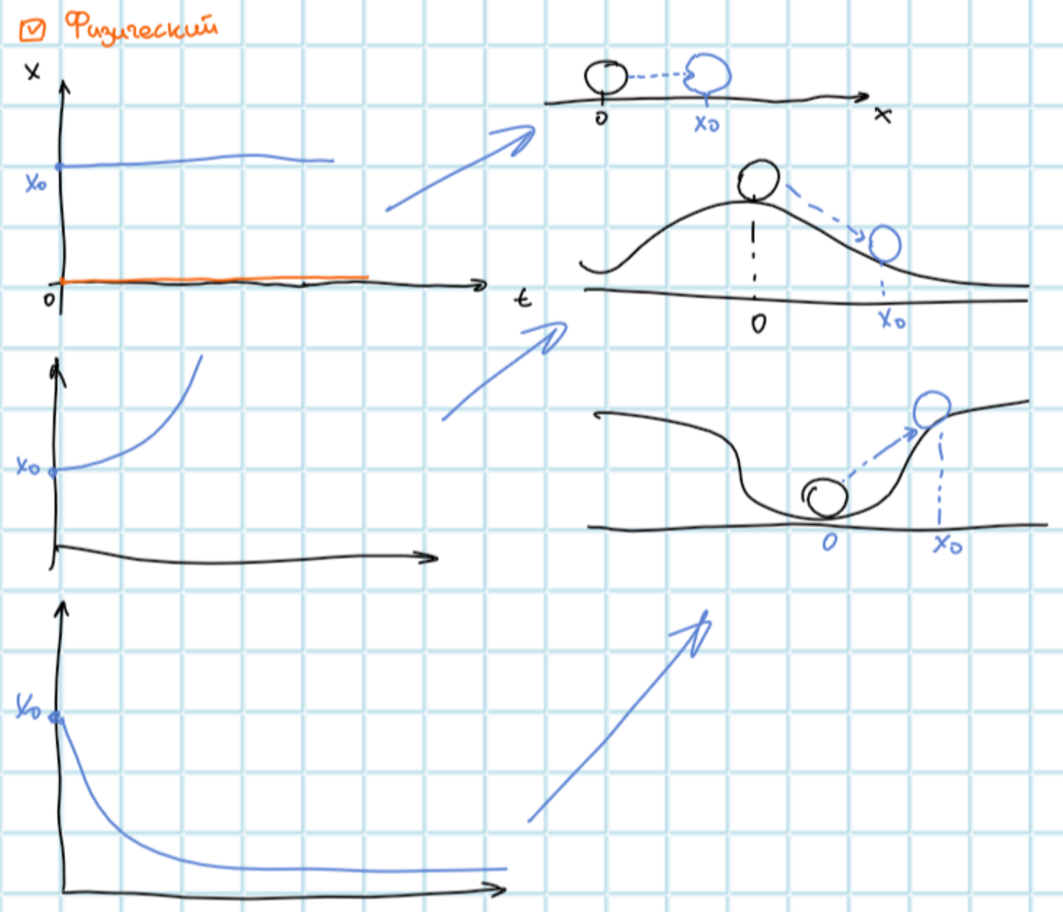
Тогда $x=0$ — неустойчивое решение

$\lambda < 0$:



$x=0$ — асимптотически устойчиво

☑ Физический



$r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $r(t, r_0)$ — решение, т.ч. $r(0, r_0) = r_0$

Рассматриваем только автономные системы, т.е.

$r' = f(r)$

☑ $\begin{cases} x' = 3x - 5y \\ y' = x^2 - 10xy \end{cases}$

NB Если $f(0)=0$, то система $r' = f(r)$ имеет решение $r \equiv 0$

def Пусть $f(0)=0$, решение $r \equiv 0$ системы называется устойчив. если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall r_0 : |r_0| < \delta \quad \forall t \geq 0 \quad |r(t, r_0)| < \varepsilon$$

П1 $x' = -2x$, $x(0) = 0$ — исследовать на устойчивость

$x = Ce^{-2t}$ — общее решение

$x(t, x_0) = x_0 \cdot e^{-2t}$

Возьмём $\varepsilon > 0$, $\measuredangle$ $|x(t, x_0)| < \varepsilon \iff |x_0 \cdot e^{-2t}| < \varepsilon$

Заметим, что если $|x_0| < \varepsilon$, то $|x_0 \cdot e^{-2t}| < \varepsilon \quad \forall t > 0 \Rightarrow$

$\delta = \varepsilon$

Опр (общее): решение φ системы $r' = f(r)$ назыв. устойчивым, если устойчиво решение $s=0$ системы $s' = q(s)$, $q(s) = f(s+\varphi) - f(\varphi)$

Упр. $r' = Ar$ Proof that $\forall$ решение этой системы имеет тот же хар-р устойчивости, что и нулевое решение

▷ $q(s) = f(s+\varphi) - f(\varphi) = A(s+\varphi) - A\varphi = As$ — совп. с исх ☒

Опр. $r=0$ — асимп. устойчивое решение $r' = f(r)$ если
1) $r=0$ устойчиво
2) $\exists \delta > 0 \quad \forall r_0, |r_0| < \delta \quad r(t, r_0) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

Th (устойчивости лин. системы)

$r' = Ar$

1) $\forall \lambda \in \sigma(A) \quad \operatorname{Re}\lambda < 0 \Rightarrow$ (ЛС) Асимп. уст
2) $\exists \lambda \in \sigma(A) \quad \operatorname{Re}\lambda > 0 \Rightarrow$ неуст.
3) $\forall \lambda \in \sigma(A) \quad \operatorname{Re}\lambda \leq 0$ и $\exists \lambda \in \sigma(A)$ $\operatorname{Re}\lambda = 0$

при этом для таких с.ч. геом. кр = алг. кр $\Rightarrow$ ЛС уст.
а если среди таких с.ч. есть число, у которого геом. кр < алг
$\Rightarrow$ ЛС неуст.

$f(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x,y) \\ \psi(x,y) \end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \psi'_x & \varphi'_y \end{pmatrix} = f'$

Пусть f — дифф. в нуле, $f(0)=0$

$\Rightarrow f(r) - f(0) = \mathcal{D}r + o(r)$ (ф-ла Тейлора)

$\Rightarrow f(r) = \mathcal{D}r + o(r)$

$r' = \mathcal{D}r + o(r)$

$r' = \mathcal{D}r$ — система первого приближения для $r' = f(r)$

3.06 Системы ДУ

Закон движения точки (x,y)

① $\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix}$ Параметризация фазовой траектории

$\boxed{\text{Решение (тривиальное) } \begin{cases} x \equiv 0 \\ y \equiv 0 \end{cases}}$ Набор точек, тоже обр. траект. Состояние равновесия, т. покоя

$\Downarrow$

в момент времени t_0 точка была в $(0,0)$

$P = (x(t), y(t))$, движемся по ней

xOy – Фазовая плоскость

Фазовая траектория (ФТ)

$\boxed{\text{Мы хотим найти все ФТ для СДУ}}$ // $\det A \neq 0$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

СДУ: $\dot{X} = AX$

Самая простая СДУ: [$\nexists$ СДУ, т.ч. $b, c \equiv 0$]

$\begin{cases} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = d \cdot y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1 e^{at} \\ y = C_2 \cdot e^{dt} \end{cases}$

Общее решение

Варианты:

1. $C_1 = C_2 = 0$ // Точка покоя
2. $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$ // $t \to \infty$ $\quad d > 0 \quad d < 0$
   а. $C_2 > 0 \Rightarrow y \in (0, +\infty)$
   б. $C_2 < 0 \Rightarrow y \in (-\infty, 0)$ отдаляется приближаемся $\boxed{\text{к точке покоя}}$
3. $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$
4. $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0 \Rightarrow$ выражаем $y(x)$

$y(x) = C \cdot x^{\lambda_2/\lambda_1}$

а. $\lambda_2, \lambda_1 > 0 \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0 \Rightarrow$ График проходит через $(0,0)$ и касается одной из осей $\Rightarrow$ т. покоя разбивает ФТ на две

$|\lambda_2| > |\lambda_1| \Rightarrow Ox$
$|\lambda_2| < |\lambda_1| \Rightarrow Oy$
$\Rightarrow$ Фазовая Картина - Узел (неустойчивый)
$\hookrightarrow$ Будет устойчивый, если $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

$\lambda_2 = \lambda_1 \Rightarrow$ Звёздный узел

б. $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0 \Rightarrow$ Гипербола $\quad \lambda_1 < 0 < \lambda_2 \ \uparrow Oy$

$y = 0 \quad x = 0 \quad (0,0)$ – седло

если $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, седло, но другое $\uparrow Ox$

Усложняем СДУ

$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{\lambda x + y}{\lambda y}$

$\lambda y dx = \lambda x dy + y dy$

$\lambda (y dx - x dy) = y dy \Rightarrow y \equiv 0$

$\lambda \left(\frac{y dx - x dy}{y^2} \right) = \frac{dy}{y} \quad :y^2$

$\lambda \cdot d\left(\frac{x}{y}\right) = d(\ln|y|)$

$\lambda \frac{x}{y} = \ln|y| + C$

$x = \frac{y}{\lambda} \ln C|y| \rightarrow$ Получается вырожденный узел

Еще больше усложняем

$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y \\ \dot{y} = -\beta x + \alpha y \end{cases}$, $\beta \neq 0$ $\quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ Кососимметричная

$\chi_A = (\alpha - \lambda)^2 + \beta^2$

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$\frac{dx}{dy} = \frac{\alpha x + \beta y}{-\beta x + \alpha y}$

$(-\beta x + \alpha y) dx = (\alpha x + \beta y) dy$

$\alpha (y dx - x dy) = \beta (y dy + x dx)$

$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \end{cases}$ $\quad x dx + y dy = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2) = \frac{d\rho^2}{2} = \rho d\rho$

$y dx - x dy = -x^2 d\frac{y}{x} = -\rho^2 \cos^2\varphi \, d\,\mathrm{tg}\varphi = -\rho^2 d\varphi$

$-\alpha \rho^2 d\varphi = \beta \rho d\rho$ $\quad \boxed{\rho = 0 \text{ – т. покоя}}$ $\quad \rho > 0$

$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{\alpha}{\beta} \rho$

$\boxed{\rho = C \cdot e^{-\frac{\alpha}{\beta}\varphi}}$ $\quad$ Картинка – спираль