Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CEROS COMPLEJOS Y TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

El Teorema Fundamental de Álgebra y Factorización Completa ▶ Ceros y sus multiplicidades ▶ Los ceros complejos vienen en pares conjugados ▶ Factores lineales y cuadráticos

El Teorema Fundamental de Álgebra y Factorización Completa

El siguiente teorema es la base para gran parte de nuestro trabajo de factorizar polinomios y resolver ecuaciones con polinomios.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE ÁLGEBRA

Toda función polinomial

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (n \geq 1,\ a_n \neq 0)$$

con coeficientes complejos tiene al menos un cero complejo.

Debido a que cualquier número real también es un número complejo, el teorema también se aplica a funciones polinomiales con coeficientes reales.

El Teorema Fundamental de Álgebra y el Teorema del Factor juntos demuestran que un polinomio se puede factorizar completamente en factores lineales, como lo demostramos a continuación.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

TEOREMA DE FACTORIZACIÓN COMPLETA

Si $P(x)$ es una función polinomial de grado $n \geq 1$, entonces existen números complejos $a, c_1, c_2, \ldots, c_n$ (con $a \neq 0$) tal que

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

EJEMPLO 1 | Factorizar completamente una función polinomial

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Sea $P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$.

(a) Encuentre todos los ceros de P.

(b) Encuentre la factorización completa de P.

SOLUCIÓN

(a) Primero factorizamos P como sigue.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 3x^2 + x - 3 && \text{Dado} \\ &= x^2(x-3) + (x-3) && \text{Agrupar términos} \\ &= (x-3)(x^2+1) && \text{Factorizar } x-3 \end{aligned}$$

Encontramos los ceros de P al igualar a 0 cada factor:

$$P(x) = (x-3)(x^2+1)$$

Este factor es 0 cuando $x = 3$

Este factor es 0 cuando $x = i$ o $-i$

Haciendo $x - 3 = 0$, vemos que $x = 3$ es un cero. Haciendo $x^2 + 1 = 0$, obtenemos $x^2 = -1$, de modo que $x = \pm i$. Por lo tanto, los ceros de P son 3, i y $-i$.

(b) Como los ceros son 3, i y $-i$ por el Teorema de Factorización Completa P se factoriza como

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-3)(x-i)[x-(-i)] \\ &= (x-3)(x-i)(x+i) \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 | Factorizar completamente una función polinomial

Sea $P(x) = x^3 - 2x + 4$.

(a) Encuentre todos los ceros de P.

(b) Encuentre la factorización completa de P.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

SOLUCIÓN

(a) Los posibles ceros racionales son los factores de 4, que son ± 1, ± 2, ± 4. Usando división sintética (vea al margen), encontramos que -2 es un cero, y los factores con polinomios como

$$P(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

Este factor es 0 cuando $x = -2$

Use la Fórmula Cuadrática para hallar cuándo es 0 este factor

Para hallar los ceros, igualamos a 0 cada factor. Desde luego, $x + 2 = 0$ significa que $x = -2$. Usamos la fórmula cuadrática para hallar cuándo es 0 el otro factor.

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \qquad \text{Iguale a 0 el factor}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} \qquad \text{Fórmula Cuadrática}$$

$$x = \frac{2 \pm 2i}{2} \qquad \text{Tome raíz cuadrada}$$

$$x = 1 \pm i \qquad \text{Simplifique}$$

Por lo tanto, los ceros de P son -2, $1 + i$ y $1 - i$.

(b) Como los ceros son -2, $1 + i$ y $1 - i$, por el Teorema de Factorización Completa, P se factoriza como

$$\begin{aligned} P(x) &= [x - (-2)][x - (1 + i)][x - (1 - i)] \\ &= (x + 2)(x - 1 - i)(x - 1 + i) \end{aligned}$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Ceros y sus multiplicidades

En el Teorema de Factorización Completa los números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son los ceros de P. Estos ceros no necesitan ser todos diferentes. Si el factor $x - c$ aparece k veces en la factorización completa de $P(x)$, entonces decimos que c es un cero de **multiplicidad *k*** (vea página 240). Por ejemplo, el polinomio

$$P(x) = (x - 1)^3(x + 2)^2(x + 3)^5$$

tiene los siguientes ceros:

$$1 \text{ (multiplicidad 3)}, \qquad -2 \text{ (multiplicidad 2)} \qquad -3 \text{ (multiplicidad 5)}$$

La función polinomial P tiene el mismo número de ceros que su grado: tiene grado 10 y tiene 10 ceros, siempre que contemos multiplicidades. Esto es verdadero para todas las funciones polinomiales, como lo demostramos en el siguiente teorema.

TEOREMA DE CEROS

Toda función polinomial de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n ceros, siempre que un cero de multiplicidad k se cuente k veces.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO 3 | Factorización de una función polinomial con ceros complejos

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Encuentre la factorización completa y los cinco ceros de la función polinomial

$$P(x) = 3x^5 + 24x^3 + 48x$$

SOLUCIÓN Como $3x$ es un factor común, tenemos

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x(x^4 + 8x^2 + 16) \\ &= 3x(x^2 + 4)^2 \end{aligned}$$

Este factor es 0 cuando $x = 0$

Este factor es 0 cuando $x = 2i$ o $x = -2i$

Para factorizar $x^2 + 4$, observe que $2i$ y $-2i$ son ceros de esta función polinomial. Entonces, $x^2 + 4 = (x - 2i)(x + 2i)$, y

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x[(x - 2i)(x + 2i)]^2 \\ &= 3x(x - 2i)^2(x + 2i)^2 \end{aligned}$$

0 es un cero de multiplicidad 1

$2i$ es un cero de multiplicidad 2

$-2i$ es un cero de multiplicidad 2

Los ceros de P son 0, $2i$ y $-2i$. Como los factores $x - 2i$ y $x + 2i$ se presentan cada uno dos veces en la factorización completa de P, los ceros $2i$ y $-2i$ son de multiplicidad 2 (o *dobles* ceros). Por lo tanto, hemos encontrado los cinco ceros.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 4 | Hallar funciones polinomiales con ceros especificados

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

(a) Encuentre una función polinomial $P(x)$ de grado 4, con ceros $i, -i$, 2 y -2, y con $P(3) = 25$.

SOLUCIÓN

(a) El polinomio pedido tiene la forma

$$
\begin{aligned}
P(x) &= a(x - i)(x - (-i))(x - 2)(x - (-2)) \\
&= a(x^2 + 1)(x^2 - 4) && \text{Diferencia de cuadrados} \\
&= a(x^4 - 3x^2 - 4) && \text{Multiplique}
\end{aligned}
$$

Sabemos que $P(3) = a(3^4 - 3 \cdot 3^2 - 4) = 50a = 25$, de modo que $a = \frac{1}{2}$. Entonces,

$$P(x) = \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{3}{2}x^2 - 2$$

(b) Encuentre una función polinomial $Q(x)$ de grado 4, con ceros -2 y 0, donde -2 es un cero de multiplicidad 3.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

(b) Requerimos

$$\begin{aligned} Q(x) &= a[x - (-2)]^3(x - 0) \\ &= a(x + 2)^3 x \\ &= a(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)x \qquad \text{Fórmula 4 de Productos Notables (Sección 1.3)} \\ &= a(x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x) \end{aligned}$$

Como no nos dan información acerca de Q que no sea sus ceros y su multiplicidad, podemos escoger cualquier número por a. Si usamos $a = 1$, obtenemos

$$Q(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x$$

EJEMPLO 5 | Hallar todos los ceros de una función polinomial

Encuentre todos los ceros de $P(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4$.

SOLUCIÓN Usando el Teorema de Ceros Racionales de la Sección 3.4, obtenemos la siguiente lista de posibles ceros racionales: $\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4, \ \pm\frac{1}{3}, \ \pm\frac{2}{3}, \ \pm\frac{4}{3}$. Comprobando éstos usando división sintética, encontramos que 2 y $-\frac{1}{3}$ son ceros, y obtenemos la siguiente factorización:

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4 \\ &= (x-2)(3x^3 + 4x^2 + 7x + 2) && \text{Factorice } x - 2 \\ &= (x-2)\left(x + \tfrac{1}{3}\right)(3x^2 + 3x + 6) && \text{Factorice } x + \tfrac{1}{3} \\ &= 3(x-2)\left(x + \tfrac{1}{3}\right)(x^2 + x + 2) && \text{Factorice } 3 \end{aligned}$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Los ceros del factor cuadrático son

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$$ Fórmula cuadrática

por lo tanto los ceros de $P(x)$ son

$$2, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

TEOREMA DE CEROS CONJUGADOS

Si la función polinomial P tiene coeficientes reales y si el número complejo z es un cero de P, entonces su complejo conjugado $\overline{z}$ también es un cero de P.

EJEMPLO 6 | Una función polinomial con un cero complejo especificado

Encuentre una función polinomial $P(x)$ de grado 3 que tenga coeficientes enteros y ceros $\frac{1}{2}$ y $3 - i$.

SOLUCIÓN Como $3 - i$ es un cero, entonces también lo es $3 + i$ por el Teorema de Ceros Conjugados. Esto significa que $P(x)$ debe tener la siguiente forma.

$$\begin{aligned} P(x) &= a\left(x - \tfrac{1}{2}\right)[x - (3 - i)][x - (3 + i)] \\ &= a\left(x - \tfrac{1}{2}\right)[(x - 3) + i][(x - 3) - i] && \text{Reagrupe} \\ &= a\left(x - \tfrac{1}{2}\right)[(x - 3)^2 - i^2] && \text{Fórmula de Diferencia de Cuadrados} \\ &= a\left(x - \tfrac{1}{2}\right)(x^2 - 6x + 10) && \text{Expanda} \\ &= a\left(x^3 - \tfrac{13}{2}x^2 + 13x - 5\right) && \text{Expanda} \end{aligned}$$

Para hacer enteros todos los coeficientes, hacemos $a = 2$ y tenemos

$$P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 26x - 10$$

Cualquier otra función polinomial que satisfaga los requisitos dados debe ser un múltiplo entero de éste.

TEOREMA DE FACTORES LINEALES Y CUADRÁTICOS

Toda función polinomial con coeficientes reales puede ser factorizado en un producto de factores lineales y cuadráticos irreductibles con coeficientes reales.

EJEMPLO 7 | Factorizar una función polinomial en factores lineales y cuadráticos

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Sea $P(x) = x^4 + 2x^2 - 8$.

(a) Factorice P en factores lineales y cuadráticos irreductibles con coeficientes reales.

(b) Factorice P completamente en factores lineales con coeficientes reales.

SOLUCIÓN

(a)

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + 2x^2 - 8 \\ &= (x^2 - 2)(x^2 + 4) \\ &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 4) \end{aligned}$$

El factor $x^2 + 4$ es irreducible, porque no tiene ceros reales.

(b) Para obtener la factorización completa, factorizamos el factor cuadrático restante.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 4) \\ &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 2i)(x + 2i) \end{aligned}$$

Evalúe la expresión y escriba el resultado en la forma $\mathbf{a+bi}$.

1. Si $\boldsymbol{p(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3}$

A. Hallar los ceros de $p(x)$

B. Factorice a $p(x)$ en los Complejos

2. Si $\boldsymbol{p(x) = x^3 - 2x + 4}$

A. Hallar los ceros de $p(x)$

B. Factorice a $p(x)$ en los Complejos

3. Si $\boldsymbol{p(x) = 3x^5 + 24x^3 + 48x}$

A. Hallar los ceros de $p(x)$

B. Factorice a $p(x)$ en los Complejos

4. Si $\boldsymbol{p(x) = x^2 + 3x + 3}$

A. Hallar los ceros de $p(x)$

B. Factorice a $p(x)$ en los Complejos

Evalúe la expresión y escriba el resultado en la forma $\mathbf{a+bi}$.

5. Si $\boldsymbol{p(x) = x^4 - 16}$

A. Hallar los ceros de $p(x)$

B. Factorice a $p(x)$ en los Complejos

6. Si $\boldsymbol{p(x) = x^4 + 13x^2 + 36}$

A. Hallar los ceros de $p(x)$

B. Factorice a $p(x)$ en los Complejos

7. Si $\boldsymbol{p(x) = 4x^4 + 11x^2 - 3}$

A. Hallar los ceros de $p(x)$

B. Factorice a $p(x)$ en los Complejos

8. Resolver $\boldsymbol{x^4 - 45x^2 - 196 = 0}$

REFERENCIA

Stewart, J., Precálculo Matemáticas para el Cálculo, Cengage Learning, séptima edición.

Referencia en línea

http://www.ebooks7-24.com.consultaremota.upb.edu.co/stage.aspx?il


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín