Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

- Suma y resta de polinomios
- Multiplicación de expresiones algebraicas
- Fórmulas de productos notables
- Factorización de factores comunes
- Factorización de trinomios
- Fórmulas especiales de factorización
- Factorización por agrupación de términos

Una **expresión algebraica** es una combinación de **constantes** (números) y **variables** (elementos genéricos de un conjunto numérico, representados por letras), mediante suma, resta, multiplicación, división y potenciación con exponentes enteros o racionales.

Generalmente las variables se representan con las últimas letras del alfabeto: u, v, w, x, ...

$$3x^2 + 4x - 5, \quad \frac{x+z}{y^2+x}, \quad \frac{\sqrt{y} - 4z}{z+y},$$

son expresiones algebraicas.

POLINOMIOS

Un **polinomio** en la variable x es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales, y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, entonces el polinomio tiene **grado n**. Los monomios $a_k x^k$ que conforman el polinomio reciben el nombre de **términos** del polinomio.

$7x^5 - 3x^4 + 2x^2 + x + 1$ es un polinomio en la variable x de grado 5. El término en x^3 no se escribe porque su coeficiente es 0.

Suma y resta de polinomios

Sumamos y **restamos** polinomios usando las propiedades de números reales que vimos en la Sección 1.1. La idea es combinar **términos semejantes** (esto es, términos con las mismas variables elevados a las mismas potencias) usando la Propiedad Distributiva. Por ejemplo,

$$5x^7 + 3x^7 = (5 + 3)x^7 = 8x^7$$

Para restar polinomios, tenemos que recordar que si un signo menos precede a una expresión en paréntesis, entonces se cambia el signo de cada término dentro del paréntesis cuando quitemos el paréntesis:

$$-(b + c) = -b - c$$

[Éste es simplemente el caso de la Propiedad Distributiva, $a(b + c) = ab + ac$, con $a = -1$.]

EJEMPLO 1 | Suma y resta de polinomios

(a) Encuentre la suma $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
&(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x) \\
&\quad = (x^3 + x^3) + (-6x^2 + 5x^2) + (2x - 7x) + 4 && \text{Agrupe términos semejantes} \\
&\quad = 2x^3 - x^2 - 5x + 4 && \text{Combine términos semejantes}
\end{aligned}$$

Multiplicación de expresiones algebraicas

Para hallar el **producto** de polinomios o de otras expresiones algebraicas, es necesario usar repetidamente la Propiedad Distributiva. En particular, usándola tres veces en el producto de dos binomios, obtenemos

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO | Multiplicación de polinomios

Encuentre el producto: $(2x + 3)(x^2 - 5x + 4)$

SOLUCIÓN : Usando la Propiedad Distributiva

$$\begin{aligned}
(2x + 3)(x^2 - 5x + 4) &= 2x(x^2 - 5x + 4) + 3(x^2 - 5x + 4) && \text{Propiedad Distributiva} \\
&= (2x \cdot x^2 - 2x \cdot 5x + 2x \cdot 4) + (3 \cdot x^2 - 3 \cdot 5x + 3 \cdot 4) && \text{Propiedad Distributiva} \\
&= (2x^3 - 10x^2 + 8x) + (3x^2 - 15x + 12) && \text{Leyes de Exponentes} \\
&= 2x^3 - 7x^2 - 7x + 12 && \text{Combine términos semejantes}
\end{aligned}$$

Encuentre la suma, diferencia o producto.

13. $(12x - 7) - (5x - 12)$ **14.** $(5 - 3x) + (2x - 8)$

15. $(3x^2 + x + 1) + (2x^2 - 3x - 5)$

16. $(3x^2 + x + 1) - (2x^2 - 3x - 5)$

17. $(x^3 + 6x^2 - 4x + 7) - (3x^2 + 2x - 4)$

18. $3(x - 1) + 4(x + 2)$

19. $8(2x + 5) - 7(x - 9)$

20. $4(x^2 - 3x + 5) - 3(x^2 - 2x + 1)$

21. $2(2 - 5t) + t^2(t - 1) - (t^4 - 1)$

22. $5(3t - 4) - (t^2 + 2) - 2t(t - 3)$

23. $(3t - 2)(7t - 4)$ **24.** $(4s - 1)(2s + 5)$

25. $(3x + 5)(2x - 1)$ **26.** $(7y - 3)(2y - 1)$

27. $(x + 3y)(2x - y)$ **28.** $(4x - 5y)(3x - y)$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Fórmulas de productos notables

Ciertos tipos de productos se presentan con tanta frecuencia que es necesario aprenderlos. Se pueden verificar las siguientes fórmulas al ejecutar las multiplicaciones.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

FÓRMULAS DE PRODUCTOS NOTABLES

Si A y B son números reales cualesquiera o expresiones algebraicas, entonces

1. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$	Suma y producto de términos iguales
2. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$	Cuadrado de una suma
3. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$	Cuadrado de una diferencia
4. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$	Cubo de una suma
5. $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$	Cubo de una diferencia

Triángulo de Pascal

En las matemáticas, el triángulo de Pascal es una representación de los coeficientes binomiales ordenados en forma de triángulo.

Es llamado así en honor al filósofo y matemático francés Blaise Pascal, quien introdujo esta notación en 1654, en su Tratado del triángulo aritmético.

De esta forma, los coeficientes desarrollados de la forma $(a+b)^n$ se encuentran en la fila «n+1» del Triángulo de Pascal.

n = 0 1
n = 1 1 1
n = 2 1 2 1
n = 3 1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
n = 10 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

TRIÁNGULO DE PASCAL

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

...

POTENCIA DE UNA SUMA

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

...

EJEMPLO 4 | Uso de las fórmulas de productos notables

Use las fórmulas de productos notables para hallar cada producto.

(a) $(3x + 5)^2$

SOLUCIÓN

Sustituyendo $A = 3x$ y $B = 5$ en la Fórmula 2 de Productos, obtenemos:

$$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5) + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

(b) $(x^2 - 2)^3$

SOLUCIÓN

Sustituyendo $A = x^2$ y $B = 2$ en la Fórmula 5 de Productos, obtenemos:

$$\begin{aligned}(x^2 - 2)^3 &= (x^2)^3 - 3(x^2)^2(2) + 3(x^2)(2)^2 - 2^3 \\ &= x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8\end{aligned}$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO 5 | Uso de las fórmulas de productos notales

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Encuentre cada producto.

(a) $(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y})$

Sustituyendo $A = 2x$ y $B = \sqrt{y}$ en la Fórmula 1 de Productos, obtenemos:

$$(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y}) = (2x)^2 - (\sqrt{y})^2 = 4x^2 - y$$

(b) $(x + y - 1)(x + y + 1)$

Si agrupamos $x + y$ y la vemos como una expresión algebraica, podemos usar la Fórmula 1 de Productos con $A = x$ y $B = 1$.

$$\begin{aligned}(x + y - 1)(x + y + 1) &= [(x + y) - 1][(x + y) + 1] \\ &= (x + y)^2 - 1^2 && \text{Fórmula de Producto 1} \\ &= x^2 + 2xy + y^2 - 1 && \text{Fórmula de Producto 2}\end{aligned}$$

29-44 ■ Multiplique las expresiones algebraicas usando una fórmula de producto notable y simplifique.

29. $(3x + 4)^2$

30. $(1 - 2y)^2$

31. $(2u + v)^2$

32. $(x - 3y)^2$

33. $(2x + 3y)^2$

34. $(r - 2s)^2$

35. $(x + 5)(x - 5)$

36. $(y - 3)(y + 3)$

37. $(3x - 4)(3x + 4)$

38. $(2y + 5)(2y - 5)$

39. $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)$

40. $(\sqrt{y} + \sqrt{2})(\sqrt{y} - \sqrt{2})$

41. $(y + 2)^3$

42. $(x - 3)^3$

43. $(1 - 2r)^3$

44. $(3 + 2y)^3$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Factorización

Factorizar una expresión algebraica consiste en expresarla como un producto de expresiones más simples. En los ejemplos anteriores desarrollamos productos de expresiones algebraicas utilizando reiteradamente la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma. Si “reversamos” este proceso hasta tener las expresiones algebraicas en términos de productos, decimos que hemos factorizado dichas expresiones.

Factorización de factores comunes

Usamos la Propiedad Distributiva para expandir expresiones algebraicas. A veces necesitamos invertir este proceso (de nuevo usando la Propiedad Distributiva) al **factorizar** una expresión como un producto de otras más sencillas. Por ejemplo, podemos escribir

FACTORIZACIÓN $\rightarrow$

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

$\leftarrow$ EXPANSIÓN

Decimos que $x - 2$ y $x + 2$ son **factores** de $x^2 - 4$.

EJEMPLO 6 | Factorización de factores comunes

Factorice lo siguiente.

(a) $3x^2 - 6x$

SOLUCIÓN

El máximo factor común en los términos $3x^2$ y $-6x$ es $3x$, de modo que tenemos

$$3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

(b) $8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4$

SOLUCIÓN

Observamos que

$$\begin{gathered}8, 6 \text{ y } -2 \text{ tienen el máximo factor común } 2\\ x^4, y^3 \text{ y } x \text{ tienen el máximo factor común } x\\ y^2, y^3 \text{ y } y^4 \text{ tienen el máximo factor común } y^2\end{gathered}$$

Por tanto, el máximo factor común de los tres términos del polinomio es $2xy^2$, y tenemos

$$\begin{aligned}8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 &= (2xy^2)(4x^3) + (2xy^2)(3x^2y) + (2xy^2)(-y^2\\ &= 2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2)\end{aligned}$$

(c) $(2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3)$

SOLUCIÓN

Los dos términos tienen el factor común $x - 3$.

$$
\begin{aligned}
(2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3) &= [(2x + 4) - 5](x - 3) && \text{Propiedad Distributiva} \\
&= (2x - 1)(x - 3) && \text{Simplifique}
\end{aligned}
$$

61-66 ■ Factorice el factor común.

61. $-2x^3 + 16x$

62. $2x^4 + 4x^3 - 14x^2$

63. $y(y - 6) + 9(y - 6)$

64. $(z + 2)^2 - 5(z + 2)$

65. $2x^2y - 6xy^2 + 3xy$

66. $-7x^4y^2 + 14xy^3 + 21xy^4$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Factorización de trinomios

Para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, observamos que

$$(x + r)(x + s) = x^2 + (r + s)x + rs$$

por lo que necesitamos escoger números r y s tales que $r + s = b$ y $rs = c$.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO 7 | Factorizar $x^2 + bx + c$ por ensayo y error.

Factorice: $x^2 + 7x + 12$

SOLUCIÓN Necesitamos hallar dos enteros cuyo producto sea 12 y cuya suma sea 7. Por ensayo y error encontramos que los dos enteros son 3 y 4. Entonces, la factorización es

$$x^2 + 7x + 12 = (x + \underbrace{3)(x + 4}_{\text{factores de 12}})$$

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$, buscamos factores de la forma $px + r$ y $qx + s$:

$$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s) = pqx^2 + (ps + qr)x + rs$$

Por tanto, tratamos de hallar números p, q, r y s tales que $pq = a$ y $rs = c$, $ps + qr = b$. Si estos números son enteros todos ellos, entonces tendremos un número limitado de posibilidades de intentar conseguir p, q, r y s.

De la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ y $a \neq 1$:

A fin de factorizar este tipo de expresiones, observemos que

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \frac{1}{a}(a^2x^2 + b(ax) + ac) \\ &= \frac{1}{a}((ax)^2 + b(ax) + ac). \end{aligned}$$

La expresión entre paréntesis es de la forma $z^2 + Bz + C$, donde $z = ax$. Así, podemos factorizar esta expresión usando el caso anterior.

EJEMPLO 8 | Factorización de $ax^2 + bx + c$ por ensayo y error

Factorice: $6x^2 + 7x - 5$

SOLUCIÓN Podemos factorizar 6 como $6 \cdot 1$ o $3 \cdot 2$ y -5 como $-5 \cdot 1$ o $5 \cdot (-1)$. Al tratar estas posibilidades, llegamos a la factorización

$$6x^2 + 7x - 5 = (\overset{\text{factores de 6}}{3}x + \underset{\text{factores de }-5}{5})(\overset{}{2}x - 1)$$

67-74 ■ Factorice el trinomio.

67. $x^2 + 2x - 3$

68. $x^2 - 6x + 5$

69. $8x^2 - 14x - 15$

70. $6y^2 + 11y - 21$

71. $3x^2 - 16x + 5$

72. $5x^2 - 7x - 6$

73. $(3x + 2)^2 + 8(3x + 2) + 12$

74. $2(a + b)^2 + 5(a + b) - 3$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Fórmulas especiales de factorización

Algunas expresiones algebraicas notables se pueden factorizar usando las fórmulas que siguen. Las tres primeras son simplemente Fórmulas de Productos Notables escritas a la inversa.

FÓRMULAS ESPECIALES DE FACTORIZACIÓN

Fórmula	Nombre
1. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$	Diferencia de cuadrados
2. $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$	Cuadrado perfecto
3. $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$	Cuadrado perfecto
4. $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$	Diferencia de cubos
5. $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$	Suma de cubos

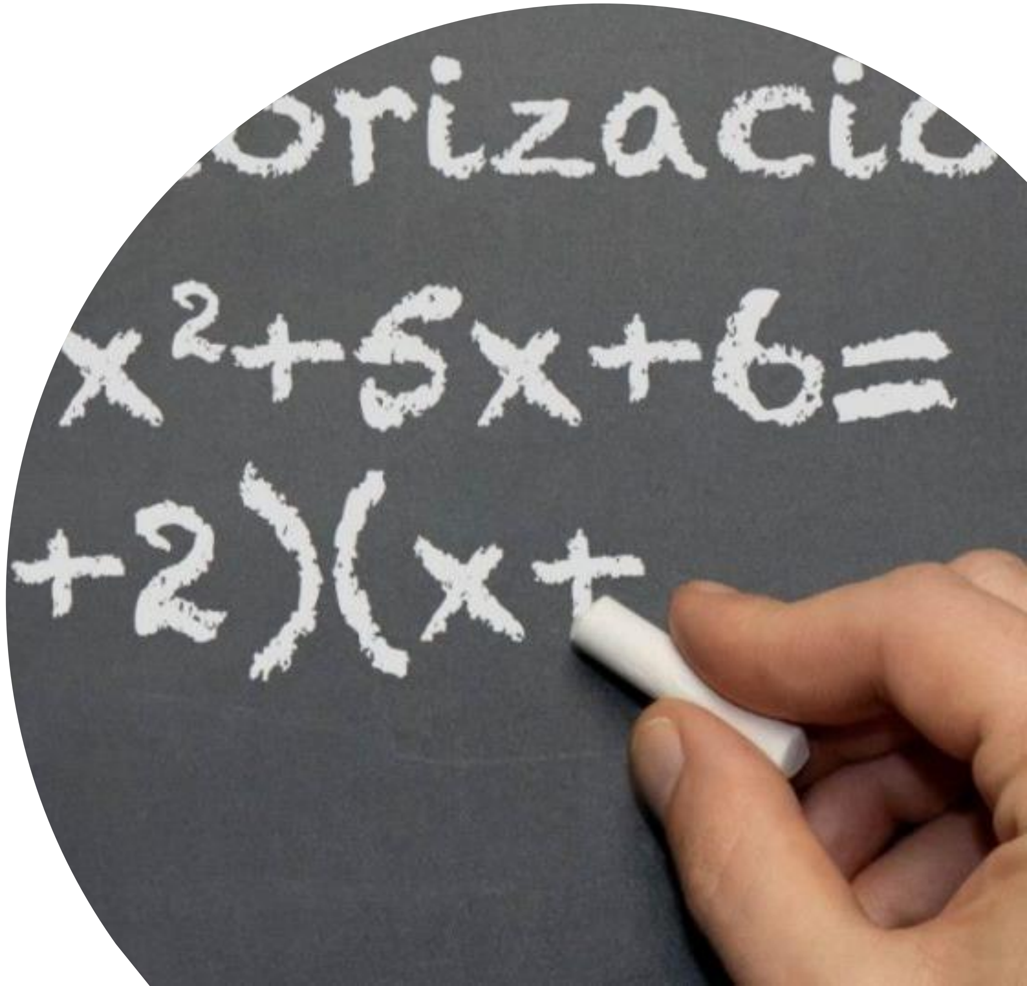
ones:

RECORDAR:

$$\frac{a+b}{(a^2-b^2)} = \frac{1}{a-b}$$

Simplificación de expresiones racionales

Factorizar es transformar una expresión en factores primos mientras que simplificar es eliminar factores que son comunes en una expresión para llevarla a su forma más básica.



EJEMPLO 10 | Factorización de diferencias de cuadrados

Factorice lo siguiente.

(a) $4x^2 - 25$ **(b)** $(x + y)^2 - z^2$

SOLUCIÓN

(a) Usando la fórmula de Diferencia de Cuadrados con $A = 2x$ y $B = 5$, tenemos

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5)(2x + 5)$$

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

(b) Usamos la fórmula de Diferencia de Cuadrados con $A = x + y$ y $B = z$.

$$(x + y)^2 - z^2 = (x + y - z)(x + y + z)$$

EJEMPLO 11 | Factorización de diferencias y sumas de cubos

Factorice cada polinomio.

(a) $27x^3 - 1$ **(b)** $x^6 + 8$

SOLUCIÓN

(a) Usando la fórmula de la Diferencia de Cubos con $A = 3x$ y $B = 1$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
27x^3 - 1 &= (3x)^3 - 1^3 = (3x - 1)[(3x)^2 + (3x)(1) + 1^2] \\
&= (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)
\end{aligned}
$$

(b) Usando la fórmula de Suma de Cubos con $A = x^2$ y $B = 2$, tenemos

$$x^6 + 8 = (x^2)^3 + 2^3 = (x^2 + 2)(x^4 - 2x^2 + 4)$$

EJEMPLO 12 | Reconocer cuadrados perfectos

Factorice cada trinomio.

(a) $x^2 + 6x + 9$ **(b)** $4x^2 - 4xy + y^2$

SOLUCIÓN

(a) Aquí $A = x$ y $B = 3$, de modo que $2AB = 2 \cdot x \cdot 3 = 6x$. Como el término medio es $6x$, el trinomio es un cuadrado perfecto. Por la fórmula del Cuadrado Perfecto tenemos

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

(b) Aquí $A = 2x$ y $B = y$, de modo que $2AB = 2 \cdot 2x \cdot y = 4xy$. Como el término medio es $-4xy$, el trinomio es un cuadrado perfecto. Por la fórmula del Cuadrado Perfecto tenemos

$$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$$

75-82 ■ Use una fórmula de factorización especial para factorizar la expresión.

75. $9a^2 - 16$

76. $(x + 3)^2 - 4$

77. $27x^3 + y^3$

78. $a^3 - b^6$

79. $8s^3 - 125t^3$

80. $1 + 1000y^3$

81. $x^2 + 12x + 36$

82. $16z^2 - 24z + 9$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO 13 | Factorizar por completo una expresión

Factorice por completo cada expresión.

(a) $2x^4 - 8x^2$ **(b)** $x^5y^2 - xy^6$

SOLUCIÓN

(a) Primero factorizamos la potencia de x que tenga el exponente más pequeño.

$$\begin{aligned} 2x^4 - 8x^2 &= 2x^2(x^2 - 4) && \text{El factor común es } 2x^2 \\ &= 2x^2(x - 2)(x + 2) && \text{Factorice } x^2 - 4 \text{ como una diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

(b) Primero factorizamos las potencias de x y de y que tengan los exponentes más pequeños.

$$\begin{aligned} x^5y^2 - xy^6 &= xy^2(x^4 - y^4) && \text{El factor común es } xy^2 \\ &= xy^2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) && \text{Factorice } x^4 - y^4 \text{ como una diferencia de cuadrados} \\ &= xy^2(x^2 + y^2)(x + y)(x - y) && \text{Factorice } x^2 - y^2 \text{ como una diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

EJEMPLO 14 | Factorizar expresiones con exponentes fraccionarios

Factorice lo siguiente.

(a) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ **(b)** $(2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3}$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

SOLUCIÓN

(a) Factorice la potencia de x que tenga el *exponente más pequeño*, es decir, $x^{-1/2}$.

$$\begin{aligned} 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2} &= 3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2) && \text{Factorice } 3x^{-1/2} \\ &= 3x^{-1/2}(x - 1)(x - 2) && \text{Factorice la ecuación de segundo grado } x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

(b) Factorice la potencia de $2 + x$ que tenga el *exponente más pequeño*, es decir, $(2 + x)^{-2/3}$

$$\begin{aligned} (2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3} &= (2 + x)^{-2/3}[x + (2 + x)] && \text{Factorice } (2 + x)^{-2/3} \\ &= (2 + x)^{-2/3}(2 + 2x) && \text{Simplifique} \\ &= 2(2 + x)^{-2/3}(1 + x) && \text{Factorice 2} \end{aligned}$$

89-94 ■ Factorice por completo la expresión. Empiece por factorizar la potencia más baja de cada factor común.

89. $x^{5/2} - x^{1/2}$

90. $3x^{-1/2} + 4x^{1/2} + x^{3/2}$

91. $x^{-3/2} + 2x^{-1/2} + x^{1/2}$

92. $(x - 1)^{7/2} - (x - 1)^{3/2}$

93. $(x^2 + 1)^{1/2} + 2(x^2 + 1)^{-1/2}$

94. $x^{-1/2}(x + 1)^{1/2} + x^{1/2}(x + 1)^{-1/2}$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Factorización por agrupación de términos

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Los polinomios con al menos cuatro términos pueden factorizarse a veces por agrupación de términos. El siguiente ejemplo ilustra la idea.

EJEMPLO 15 | Factorización por agrupación

Factorice lo siguiente.

(a) $x^3 + x^2 + 4x + 4$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + 4x + 4 &= (x^3 + x^2) + (4x + 4) && \text{Agrupe términos} \\ &= x^2(x + 1) + 4(x + 1) && \text{Factorice factores comunes} \\ &= (x^2 + 4)(x + 1) && \text{Factorice } x + 1 \text{ de cada término} \end{aligned}$$

(b) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - 3x + 6 &= (x^3 - 2x^2) - (3x - 6) && \text{Agrupe términos} \\ &= x^2(x - 2) - 3(x - 2) && \text{Factorice factores comunes} \\ &= (x^2 - 3)(x - 2) && \text{Factorice } x - 2 \text{ de cada término} \end{aligned}$$

83-88 ■ Factorice la expresión agrupando términos.

83. $x^3 + 4x^2 + x + 4$

84. $3x^3 - x^2 + 6x - 2$

85. $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

86. $-9x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

87. $x^3 + x^2 + x + 1$

88. $x^5 + x^4 + x + 1$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

REFERENCIA

Stewart, J., Precálculo Matemáticas para el Cálculo, Cengage Learning, séptima edición.

Referencia en línea

http://www.ebooks7-24.com.consultaremota.upb.edu.co/stage.aspx?il


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín