Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

ENCUENTRO 11.2

Sección 3.4: Regla de la cadena

Regla de la cadena *Si* g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, entonces la función compuesta $F = f \circ g$ definida mediante $F(x) = f(g(x))$ es derivable en x, y F' está dada por el producto

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

En la notación de Leibniz, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones derivables, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

La regla de la cadena puede escribirse con apóstrofos

2 $$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

o bien, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, en la notación de Leibniz:

3 $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

La ecuación 3 es fácil de recordar porque si dy/du y du/dx fueran cocientes, entonces podría cancelar du. Sin embargo, recuerde que du no se ha definido y no debe concebir du/dx realmente como un cociente.

EJEMPLO 1 Encuentre $F'(x)$ si $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

SOLUCIÓN 1 (Utilizando la ecuación 2): Al principio de esta sección, expresamos F como $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ donde $f(u) = \sqrt{u}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Dado que

$$f'(u) = \tfrac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = 2x$$

tenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 (Utilizando la ecuación 3): Si hacemos $u = x^2 + 1$ y $y = \sqrt{u}$, entonces

$$F'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Al utilizar la fórmula 3, debemos tener presente que dy/dx se refiere a la derivada de y cuando ésta se considera como función de x (llamada *derivada de y respecto a x*), en tanto que dy/du se refiere a la derivada de y cuando se considera como función de u (la derivada de y respecto a u). Por tanto, en el ejemplo 1, y puede considerarse como función de x $\left(y = \sqrt{x^2+1}\right)$ y también como una función de u $\left(y = \sqrt{u}\right)$. Observe que

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{mientras que} \quad \frac{dy}{du} = f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

Al aplicar la regla de la cadena, es útil considerar que la función compuesta $f \circ g$ está constituida por dos partes: una interior y otra exterior.

Función exterior

$$y = f(g(x)) = f(u)$$

Función interior

La derivada de $y = f(u)$ es la derivada de la función exterior (en la función interior u) multiplicada por la derivada de la función interior.

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

NOTA En la aplicación de la regla de la cadena, trabajamos del exterior hacia el interior. La fórmula 2 expresa que *derivamos la función exterior f* [*en la función interior* $g(x)$] *y, a continuación, multiplicamos por la derivada de la función interior.*

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\substack{\text{función}\\ \text{exterior}}}\;\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{exterior}}}\;\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}}$$

V EJEMPLO 2 Derive a) $y = \operatorname{sen}(x^2)$ y b) $y = \operatorname{sen}^2 x$.

SOLUCIÓN

a) Si $y = \operatorname{sen}(x^2)$, entonces la función exterior es la función seno, y la interior es la función elevar al cuadrado, de modo que la regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \underbrace{\operatorname{sen}}_{\substack{\text{función}\\ \text{exterior}}} \underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{exterior}}} \underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}}$$

$$= 2x\cos(x^2)$$

b) Observe que $\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2$. En este caso, la función exterior es la de elevar al cuadrado, y la interior es la función seno. Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \underbrace{(\operatorname{sen} x)}_{\substack{\text{función}\\ \text{interior}}}{}^2 = \underbrace{2}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{exterior}}} \cdot \underbrace{(\operatorname{sen} x)}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}}$$

La respuesta puede dejarse como $2 \operatorname{sen} x \cos x$, o bien, escribirse como $\operatorname{sen} 2x$ (por una identidad trigonométrica conocida como fórmula del ángulo doble).

4 Regla de la potencia combinada con la regla de la cadena Si n es cualquier número real y $u = g(x)$ es derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

De modo alternativo,

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO Regla de potencias para funciones

Diferencie $y = (4x^3 + 3x + 1)^7$.

Solución Con la identificación de que $u = g(x) = 4x^3 + 3x + 1$, por (6) vemos que

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{7}^{n}\overbrace{(4x^3 + 3x + 1)^6}^{u^{n-1}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(4x^3 + 3x + 1)}^{du/dx} = 7(4x^3 + 3x + 1)^6(12x^2 + 3).$$

EJEMPLO Regla de potencias para funciones

Para diferenciar $y = 1/(x^2 + 1)$, podríamos, por supuesto, usar la regla del cociente. No obstante, al volver a escribir la función como $y = (x^2 + 1)^{-1}$, también es posible usar la regla de potencias para funciones con $n = -1$:

$$\frac{dy}{dx} = (-1)(x^2 + 1)^{-2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 1) = (-1)(x^2 + 1)^{-2}\, 2x = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO Regla de potencias para funciones

Diferencie $y = \dfrac{1}{(7x^5 - x^4 + 2)^{10}}$.

Solución Escribimos la función dada como $y = (7x^5 - x^4 + 2)^{-10}$. Se identifica $u = 7x^5 - x^4 + 2$, $n = -10$ y se usa la regla de potencias (6):

$$\frac{dy}{dx} = -10(7x^5 - x^4 + 2)^{-11} \cdot \frac{d}{dx}(7x^5 - x^4 + 2) = \frac{-10(35x^4 - 4x^3)}{(7x^5 - x^4 + 2)^{11}}.$$

EJEMPLO Regla de potencias para funciones

Diferencie $y = \tan^3 x$.

Solución Para recalcar, primero volvemos a escribir la función como $y = (\tan x)^3$ y luego con $u = \tan x$ y $n = 3$:

$$\frac{dy}{dx} = 3(\tan x)^2 \cdot \frac{d}{dx}\tan x.$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\tan^2 x \sec^2 x.$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO Regla del cociente y luego regla de potencias

Diferencie $y = \dfrac{(x^2 - 1)^3}{(5x + 1)^8}$.

Solución Empezamos con la regla del cociente seguida por dos aplicaciones de la regla de potencias para:

Regla de potencias para funciones

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(5x+1)^8 \cdot \frac{d}{dx}(x^2-1)^3 - (x^2-1)^3 \cdot \frac{d}{dx}(5x+1)^8}{(5x+1)^{16}}$$

$$= \frac{(5x+1)^8 \cdot 3(x^2-1)^2 \cdot 2x - (x^2-1)^3 \cdot 8(5x+1)^7 \cdot 5}{(5x+1)^{16}}$$

$$= \frac{6x(5x+1)^8(x^2-1)^2 - 40(5x+1)^7(x^2-1)^3}{(5x+1)^{16}}$$

$$= \frac{(x^2-1)^2(-10x^2+6x+40)}{(5x+1)^9}.$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO

Encontrar los puntos de la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ en los que $f'(x) = 0$ y aquellos en los que $f'(x)$ no existe.

Solución Reescribir de nuevo la función como

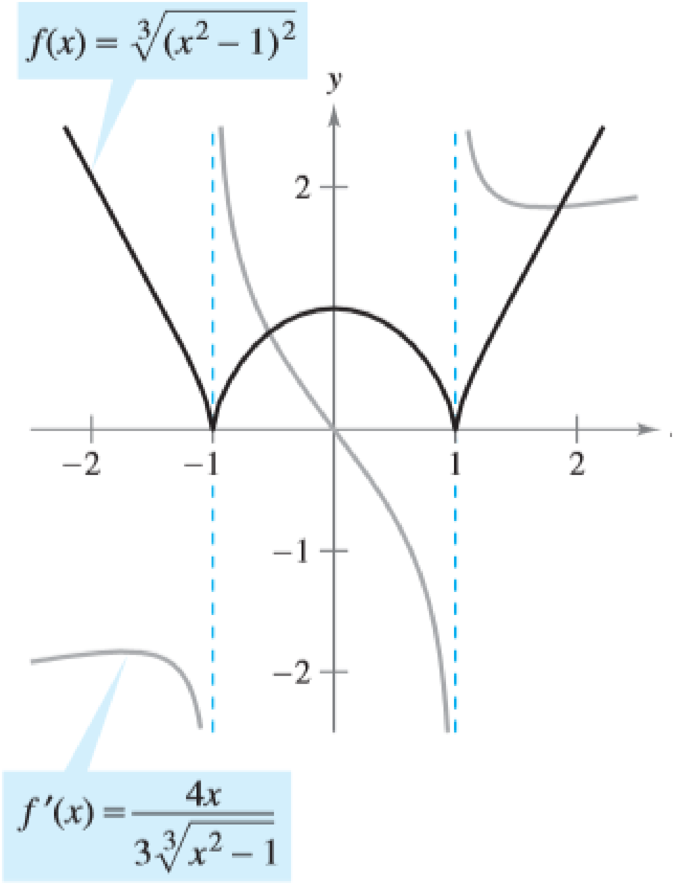
$$f(x) = (x^2-1)^{2/3}.$$

Aplicar ahora la regla general de las potencias (con $u = x^2 - 1$); se obtiene

$$f'(x) = \underbrace{\frac{2}{3}}_{n}\underbrace{(x^2-1)^{-1/3}}_{u^{n-1}}\underbrace{(2x)}_{u'}$$ Aplicar la regla general de las potencias.

$$= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}.$$ Expresar en forma radical.

De tal manera, $f'(x) = 0$ en $x = 0$ y $f'(x)$ no existe en $x = \pm 1$, como se muestra en la figura



La derivada de f es 0 en $x = 0$ y no está definida en $x = \pm 1$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 3 Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$.

SOLUCIÓN Si, en $\boxed{4}$, se toman $u = g(x) = x^3 - 1$ y $n = 100$, tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)^{100} = 100(x^3 - 1)^{99}\frac{d}{dx}(x^3 - 1)$$

$$= 100(x^3 - 1)^{99} \cdot 3x^2 = 300x^2(x^3 - 1)^{99}$$

V **EJEMPLO 4** Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$.

SOLUCIÓN En primer lugar, reescribimos f como: $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1/3}$

De este modo

$$f'(x) = -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)$$

$$= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}(2x + 1)$$

EJEMPLO 5 Encuentre la derivada de la función

$$g(t) = \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^9$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

SOLUCIÓN Si se combinan la regla de la potencia, la regla de la cadena y la regla del cociente, obtenemos

$$g'(t) = 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \frac{d}{dt}\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)$$

$$= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \frac{(2t+1)\cdot 1 - 2(t-2)}{(2t+1)^2} = \frac{45(t-2)^8}{(2t+1)^{10}}$$

Ejemplos

Hallar la derivada de la siguiente función $y = \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^3$

Solución:

En este caso se aplica la regla de la cadena, donde se comienza por la derivada de una potencia:

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$$

La derivada interna corresponde a la derivada de un cociente, por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2 \left(\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(x^2+1)^2(2x^3-2x-2x^3-2x)}{(x^2-1)^2(x^2-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(x^2+1)^2(-4x)}{(x^2-1)^4}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{12x(x^2+1)^2}{(x^2-1)^4}$$

63. Se da una tabla de valores de f, g, f' y g'.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

(a) Si $h(x) = f(g(x))$, encuentre $h'(1)$.
(b) Si $H(x) = g(f(x))$, determine $H'(1)$.

Solución:

(a) $h'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$
$h'(1) = f'\big(g(1)\big)g'(1) = f'(2)(6) = (5)(6) = 30$

(b) $H'(x) = g'\big(f(x)\big)f'(x)$
$H'(1) = g'\big(f(1)\big)f'(1) = g'(3)(4) = (9)(4) = 36$

64. Sean f y g las funciones del ejercicio 63.
(a) Si $F(x) = f(f(x))$, encuentre $F'(2)$.
(b) Si $G(x) = g(g(x))$, encuentre $G'(3)$.

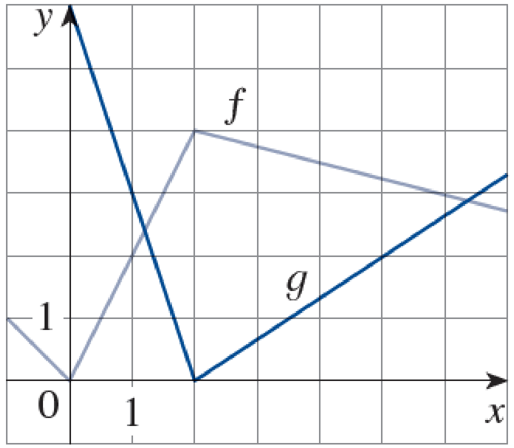
Solución:

(a) $F'(x) = f'\big(f(x)\big)f'(x)$
$F'(2) = f'\big(f(2)\big)f'(2) = f'(1)(5) = (4)(5) = 20$

(b) $G'(x) = g'\big(g(x)\big)g'(x)$
$G'(3) = g'\big(g(3)\big)g'(3) = g'(2)(9) = (7)(9) = 63$

65. Sean f y g las funciones cuyas gráficas se muestran; sea $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$ y $w(x) = g(g(x))$. Encuentre, si existe, cada derivada. Si no existe, explique por qué.

(a) $u'(1)$ (b) $v'(1)$ (c) $w'(1)$



Solución:

Antes de comenzar encontremos las funciones $f(x)$ y $g(x)$,

$$f(x)=\begin{cases} -x & -1 \le x < 0 \\ 2x & 0 \le x < 2 \\ \frac{-x}{4} + \frac{9}{2} & 2 \le x < 7 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -3x + 6 & 0 \le x < 2 \\ \frac{2x}{3} - \frac{4}{3} & 2 \le x < 7 \end{cases}$$

Solución:

(a) $u'(x) = f'(g(x))g'(x)$

$$u'(1) = f'(g(1))g'(1) = f'\ (3)(-3)$$

$$u'(1) = \left(\frac{-1}{4}\right)(-3) = \frac{3}{4}$$

(b) $v'(x) = g'\big(f(x)\big)f'(x)$

$$v'(1) = g'\big(f(1)\big)f'(1) = g'\ (2)(2)$$

$$v'(1) = (no\ existe)(2) = no\ existe$$

(c) $w'(x) = g'(g(x))g'(x)$

$$w'(1) = g'(g(1))g'(1) = g'(3)(-3)$$

$$w'(1) = \left(\frac{2}{3}\right)(-3) = -2$$

71. Si $r(x) = f(g(h(x)))$, donde $h(1) = 2$, $g(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g'(2) = 5$ y $f'(3) = 6$, encuentre $r'(1)$.

Solución:

Si $r(x) = f\left(g\big(h(x)\big)\right)$, entonces aplicando la regla de la cadena:

$$r'(x) = f'\left(g\big(h(x)\big)\right) g'\big(h(x)\big)h'(x)$$
$$r'(1) = f'\left(g\big(h(1)\big)\right) g'\big(h(1)\big)h'(1)$$
$$r'(1) = f'\big(g(2)\big)g'(2)(4)$$
$$r'(1) = f'(3)(5)(4)$$
$$r'(1) = (6)(5)(4) = 120$$

72. Si g es una función dos veces derivable y $f(x) = xg(x^2)$, determine f'' en términos de g, g' y g''.

Solución:

Encontremos $f'(x) = g(x^2) + xg'(x^2)(2x) = g(x^2) + 2x^2g'(x^2)$
Ahora $f''(x) = g'(x^2)(2x) + 4xg'(x^2) + 2x^2g''(x^2)(2x)$
Para llegar a $f''(x) = 2xg'(x^2) + 4xg'(x^2) + 4x^3g''(x^2) = 6xg'(x^2) + 4x^3g''(x^2)$

EJEMPLO 6 Derive $y = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$.

SOLUCIÓN En este ejemplo debemos aplicar la regla del producto antes de aplicar la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= (2x + 1)^5 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)^4 + (x^3 - x + 1)^4 \frac{d}{dx}(2x + 1)^5 \\
&= (2x + 1)^5 \cdot 4(x^3 - x + 1)^3 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1) \\
&\qquad + (x^3 - x + 1)^4 \cdot 5(2x + 1)^4 \frac{d}{dx}(2x + 1) \\
&= 4(2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1) + 5(x^3 - x + 1)^4(2x + 1)^4 \cdot 2
\end{aligned}$$

Observe que cada término tiene el factor común $2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3$, así que podemos factorizarlo y escribir la respuesta como

$$\frac{dy}{dx} = 2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3(17x^3 + 6x^2 - 9x + 3)$$

Ejemplo

Determine la tangente a la curva $y = \frac{(x-1)}{(x+1)^2}$ en $x = 0$

Solución:

La recta pedida es de la forma: $y - y_0 = m(x - x_0)$

En este caso como la recta tiene el punto de tangencia en $x = 0$, entonces $x_0 = 0$ y y_0 se calcula reemplazando $x_0 = 0$ en la función original, es decir: $y_0 = \frac{(0-1)}{(0+1)^2} = -1$

Para obtener m, como la pendiente de la recta tangente es la derivada de la curva en el punto de tangencia, $m = dy/dx$, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1)(x+1)^2 - (x-1)(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$$

Sin necesidad de simplificar, se evalúa esta derivada en $x = 0$:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{(1)(0+1)^2 - (0-1)(2(0)+2)}{(0^2+2(0)+1)^2} = \frac{1+2}{1} = 3$$

Luego la recta tangente pedida es: $y + 1 = 3(x - 0)$ o $3x - y - 1 = 0$

EJEMPLO 7 Derive $y = e^{\operatorname{sen} x}$.

SOLUCIÓN En este caso la función interior es $g(x) = \operatorname{sen} x$, y la exterior es la función exponencial $f(x) = e^x$. Por tanto, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{\operatorname{sen} x}\right) = e^{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = e^{\operatorname{sen} x}\cos x$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Podemos aplicar la regla de la cadena para derivar una función exponencial con cualquier base $a > 0$. Recuerde, por lo visto en la sección 1.6, que $a = e^{\ln a}$. De este modo,

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

y la regla de la cadena da

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{(\ln a)x}) = e^{(\ln a)x}\frac{d}{dx}(\ln a)x$$
$$= e^{(\ln a)x} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

porque $\ln a$ es una constante. En consecuencia, tenemos la fórmula

5

$$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a}$$

No confunda la fórmula 5 (donde x es el *exponente*) con la regla de la potencia (donde x es la *base*):

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

V **EJEMPLO 8** Si $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\tan x))$, entonces

$$f'(x) = \cos(\cos(\tan x))\,\frac{d}{dx}\cos(\tan x)$$

$$= \cos(\cos(\tan x))[-\operatorname{sen}(\tan x)]\,\frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= -\cos(\cos(\tan x))\operatorname{sen}(\tan x)\sec^2 x$$

EJEMPLO 9 Derive $y = e^{\sec 3\theta}$.

SOLUCIÓN La función exterior es la función exponencial, la función media es la función secante y la función interna es el triple de la función. De modo que

$$\frac{dy}{d\theta} = e^{\sec 3\theta}\,\frac{d}{d\theta}(\sec 3\theta)$$

$$= e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta\tan 3\theta\,\frac{d}{d\theta}(3\theta)$$

$$= 3e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta\tan 3\theta$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO Regla de la cadena

Diferencie $y = \tan(6x^2 + 1)$.

Solución La función es tan u con $u = 6x^2 + 1$. La derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{\sec^2(6x^2 + 1)}^{\sec^2 u} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(6x^2 + 1)}^{\frac{du}{dx}} = 12x \sec^2(6x^2 + 1).$$

EJEMPLO Uso repetido de la regla de la cadena

Diferencie $y = \cos^4(7x^3 + 6x - 1)$.

Solución Para recalcar, primero escribimos la función dada como $y = [\cos(7x^3 + 6x - 1]^4$. Observe que esta función es la composición $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$ donde $f(x) = x^4$, $g(x) = \cos x$ y $h(x) = 7x^3 + 6x - 1$. Primero aplicamos la regla de la cadena en la forma de regla de potencias:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 4[\cos(7x^3 + 6x - 1)]^3 \cdot \frac{d}{dx}\cos(7x^3 + 6x - 1) && \leftarrow \text{primera regla de la cadena: diferenciar la potencia} \\
&= 4\cos^3(7x^3 + 6x - 1)\cdot\left[-\operatorname{sen}(7x^3 + 6x - 1)\cdot\frac{d}{dx}(7x^3 + 6x - 1)\right] && \leftarrow \text{segunda regla de la cadena: diferenciar el coseno} \\
&= -4(21x^2 + 6)\cos^3(7x^3 + 6x - 1)\operatorname{sen}(7x^3 + 6x - 1).
\end{aligned}$$

En el ejemplo final, la función dada es una composición de cuatro funciones.

EJEMPLO Uso repetido de la regla de la cadena

Diferencie $y = \operatorname{sen}\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)$.

Solución La función es $f(g(h(k(x))))$, donde $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \tan x$, $h(x) = \sqrt{x}$, y $k(x) = 3x^2 + 4$. En este caso se aplica la regla de la cadena tres veces consecutivas como sigue:

$$\frac{dy}{dx} = \cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)\cdot\frac{d}{dx}\tan\sqrt{3x^2+4} \qquad \leftarrow \text{primera regla de la cadena: diferenciar el seno}$$

$$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)\cdot\sec^2\sqrt{3x^2+4}\cdot\frac{d}{dx}\sqrt{3x^2+4} \qquad \leftarrow \text{segunda regla de la cadena: diferenciar la tangente}$$

$$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)\cdot\sec^2\sqrt{3x^2+4}\cdot\frac{d}{dx}(3x^2+4)^{1/2} \qquad \leftarrow \text{se vuelve a escribir la potencia}$$

$$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)\cdot\sec^2\sqrt{3x^2+4}\cdot\frac{1}{2}(3x^2+4)^{-1/2}\cdot\frac{d}{dx}(3x^2+4) \qquad \leftarrow \text{tercera regla de la cadena: diferenciar la potencia}$$

$$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)\cdot\sec^2\sqrt{3x^2+4}\cdot\frac{1}{2}(3x^2+4)^{-1/2}\cdot 6x \qquad \leftarrow \text{simplificar}$$

$$= \frac{3x\cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)\cdot\sec^2\sqrt{3x^2+4}}{\sqrt{3x^2+4}}.$$

EJEMPLO Reglas del producto y de la cadena

Encuentre los puntos sobre la gráfica de $y = 3x^2e^{-x^2}$ donde la recta tangente es horizontal.

Solución Se usa la regla del producto junto con (14):

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 3x^2 \cdot \frac{d}{dx} e^{-x^2} + e^{-x^2} \cdot \frac{d}{dx} 3x^2 \\ &= 3x^2(-2xe^{-x^2}) + 6xe^{-x^2} \\ &= e^{-x^2}(-6x^3 + 6x).\end{aligned}$$

Puesto que $e^{-x^2} \neq 0$ para todos los números reales x, $\frac{dy}{dx} = 0$ cuando $-6x^3 + 6x = 0$. Al factorizar la última ecuación obtenemos $x(x + 1)(x - 1) = 0$ y así $x = 0$, $x = -1$ y $x = 1$. Así, los puntos correspondientes sobre la gráfica de la función dada son $(0, 0)$, $(-1, 3e^{-1})$ y $(1, 3e^{-1})$. La gráfica de $y = 3x^2e^{-x^2}$ junto con las tres rectas tangentes (en rojo) se muestran en la FIGURA 3.8.2.

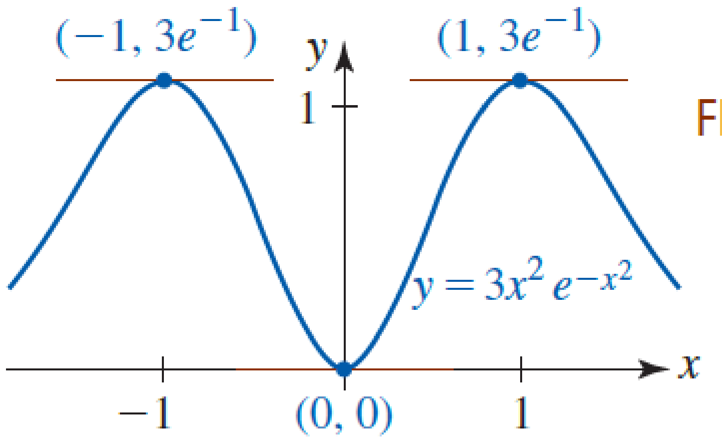


FIGURA 3.8.2

EJEMPLO Recta tangente paralela a una recta

Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = 2e^{-x}$ donde la recta tangente es paralela a $y = -4x - 2$.

Solución Sea $(x_0, f(x_0)) = (x_0, 2e^{-x_0})$ el punto desconocido sobre la gráfica de $f(x) = 2e^{-x}$ donde la recta tangente es paralela a $y = -4x - 2$. Entonces, a partir de la derivada $f'(x) = -2e^{-x}$, la pendiente de la recta tangente en este punto es $f'(x_0) = -2e^{-x_0}$. Puesto que $y = -4x - 2$ y la recta tangente es paralela en ese punto, las pendientes son iguales:

$$f'(x_0) = -4 \qquad \text{o bien,} \qquad -2e^{-x_0} = -4 \qquad \text{o bien,} \qquad e^{-x_0} = 2.$$

A partir de (16), la última ecuación proporciona $-x_0 = \ln 2$ o $x_0 = -\ln 2$. Por tanto, el punto es $(-\ln 2, 2e^{\ln 2})$.

Puesto que $e^{\ln 2} = 2$, el punto es $(-\ln 2, 4)$.

En la FIGURA 3.8.3, la línea proporcionada se muestra en verde y la recta tangente en rojo.

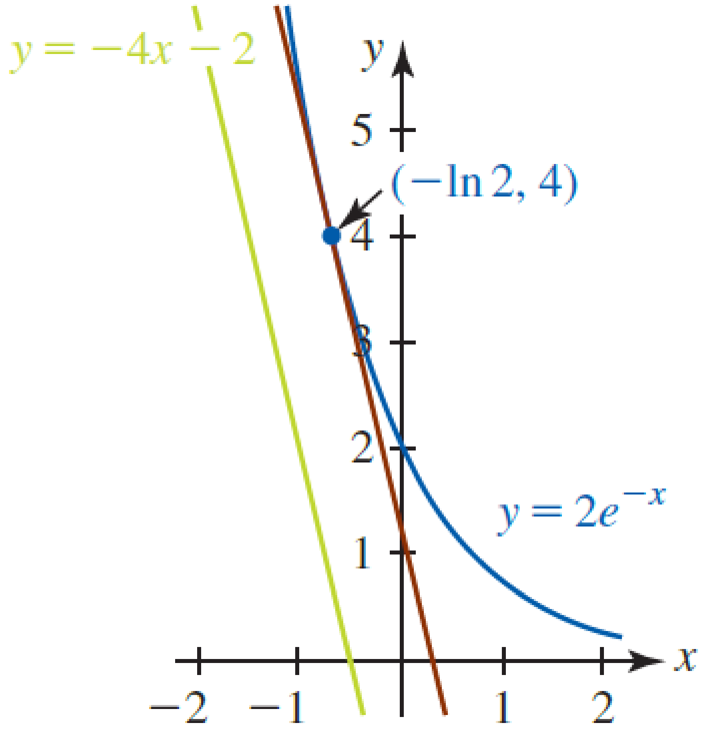


FIGURA 3.8.3

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Ejercicios

1–6 Escriba la función compuesta en la forma $f(g(x))$. [Identifique la función interior $u = g(x)$ y la exterior $y = f(u)$]. Luego, encuentre la derivada dy/dx de cada una de las funciones siguientes.

1. $y = \operatorname{sen} 4x$
2. $y = \sqrt{4 + 3x}$
3. $y = (1 - x^2)^{10}$
4. $y = \tan(\operatorname{sen} x)$
5. $y = e^{\sqrt{x}}$
6. $y = \sqrt{2 - e^x}$

7–46 Obtenga la derivada de cada una de las funciones siguientes.

7. $F(x) = (5x^6 + 2x^3)^4$
8. $F(x) = (1 + x + x^2)^{99}$
9. $f(x) = \sqrt{5x + 1}$
10. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$
11. $f(\theta) = \cos(\theta^2)$
12. $g(\theta) = \cos^2 \theta$
13. $y = x^2 e^{-3x}$
14. $f(t) = t \operatorname{sen} \pi t$
15. $f(t) = e^{at} \operatorname{sen} bt$
16. $g(x) = e^{x^2 - x}$
17. $f(x) = (2x - 3)^4 (x^2 + x + 1)^5$
18. $g(x) = (x^2 + 1)^3 (x^2 + 2)^6$
19. $h(t) = (t + 1)^{2/3}(2t^2 - 1)^3$
20. $F(t) = (3t - 1)^4 (2t + 1)^{-3}$
21. $y = \sqrt{\dfrac{x}{x + 1}}$
22. $y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^5$
23. $y = e^{\tan \theta}$
24. $f(t) = 2^{t^3}$
25. $g(u) = \left(\dfrac{u^3 - 1}{u^3 + 1}\right)^8$
26. $s(t) = \sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{sen} t}{1 + \cos t}}$
27. $r(t) = 10^{2\sqrt{t}}$
28. $f(z) = e^{z/(z-1)}$
29. $H(r) = \dfrac{(r^2 - 1)^3}{(2r + 1)^5}$
30. $J(\theta) = \tan^2(n\theta)$
31. $F(t) = e^{t \operatorname{sen} 2t}$
32. $F(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt{t^3 + 1}}$
33. $G(x) = 4^{C/x}$
34. $U(y) = \left(\dfrac{y^4 + 1}{y^2 + 1}\right)^5$
35. $y = \operatorname{sen}(\tan 2x)$
36. $y = \sec^2(m\theta)$
37. $y = \cot^2(\operatorname{sen} \theta)$
38. $y = \sqrt{1 + xe^{-2x}}$
39. $f(t) = \tan(\sec(\cos t))$
40. $y = e^{\operatorname{sen} 2x} + \operatorname{sen}(e^{2x})$
41. $f(t) = \tan(e^t) + e^{\tan t}$
42. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$
43. $g(x) = (2ra^{rx} + n)^p$
44. $y = 2^{3^{4^x}}$
45. $y = \cos\sqrt{\operatorname{sen}(\tan \pi x)}$
46. $y = [x + (x + \operatorname{sen}^2 x)^3]^4$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

47–50 Encuentre y' y y''.

47. $y = \cos(\text{sen } 3\theta)$

48. $y = \dfrac{1}{(1 + \tan x)^2}$

49. $y = \sqrt{1 - \sec t}$

50. $y = e^{e^x}$

51–54 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

51. $y = 2^x$, $(0, 1)$

52. $y = \sqrt{1 + x^3}$, $(2, 3)$

53. $y = \text{sen}(\text{sen} x)$, $(\pi, 0)$

54. $y = xe^{-x^2}$, $(0, 0)$

59. Encuentre todos los puntos sobre la gráfica de la función $f(x) = 2 \text{ sen } x + \text{sen}^2 x$ en los cuales la recta tangente es horizontal.

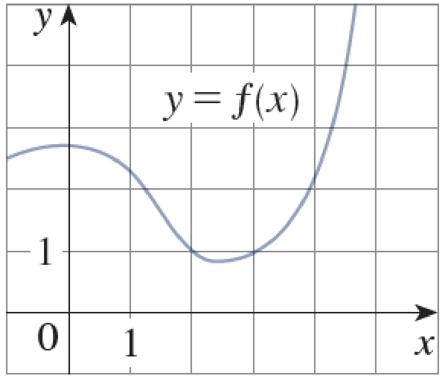
60. ¿En qué puntos de la curva $y = \sqrt{1 + 2x}$, es la recta tangente perpendicular a la recta $6x + 2y = 1$?

61. Si $F(x) = f(g(x))$, donde $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$, y $g'(5) = 6$, determine $F'(5)$.

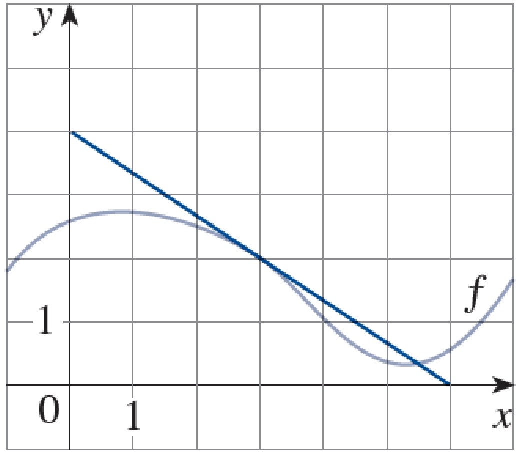
62. Si $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$, donde $f(1) = 7$ y $f'(1) = 4$, determine $h'(1)$.

66. Si f es la función cuya gráfica se muestra, sea $h(x) = f(f(x))$ y $g(x) = f(x^2)$. Utilice la gráfica de f para calcular el valor de cada derivada.

(a) $h'(2)$ (b) $g'(2)$



67. Si $g(x) = \sqrt{f(x)}$, donde f es la gráfica que se muestra, evalúe $g'(3)$.



68. Suponga que f es derivable en $\mathbb{R}$ y α es un número real. Sea $F(x) = f(x^{\alpha})$ y y $G(x) = [f(x)]^{\alpha}$. Encuentre expresiones para (a) $F'(x)$ y (b) $G'(x)$.

69. Suponga que f es derivable en $\mathbb{R}$. Sea $F(x) = f(e^x)$ y $G(x) = e^{f(x)}$. Encuentre expresiones para (a) $F'(x)$ y (b) $G'(x)$.

70. Sea $g(x) = e^{cx} + f(x)$ y $h(x) = e^{kx}f(x)$, donde $f(0) = 3$, $f'(0) = 5$, y $f''(0) = -2$.

(a) Encuentre $g'(0)$ y $g''(0)$ en términos de c.

(b) En términos de k, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de h en el punto donde $x = 0$.

73. Si $F(x) = f(3f(4f(x)))$, donde $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$, encuentre $F'(0)$.

74. Si $F(x) = f(xf(xf(x)))$, donde $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 4$, $f'(2) = 5$ y $f'(3) = 6$, determine $F'(1)$.

75. Demuestre que la función $y = e^{2x}(A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x)$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 13y = 0$.

76. ¿Para qué valores de r la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 4y' + y = 0$?

77. Encuentre la derivada cincuenta de $y = \cos 2x$.

78. Encuentre la derivada mil de $f(x) = xe^{-x}$.

79. El desplazamiento de una partícula sobre una cuerda vibrante está dada por la ecuación $s(t) = 10 + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(10\pi t)$ donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la velocidad de la partícula después de t segundos.

80. Si la ecuación del movimiento de una partícula está dada por $s = A \cos(\omega t + \delta)$, se dice que la partícula describe un *movimiento armónico simple*.

(a) Encuentre la velocidad de la partícula en el instante t.

(b) ¿Cuándo es 0 la velocidad?

REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín