Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

ENCUENTRO 7.1

Sección 1.5: Funciones inversas.

FUNCIONES INVERSAS

Es bien sabido que muchas funciones no tienen inversas en sus dominios naturales, razón por la cual se hace una restricción de dicho dominio de tal manera que cumpla con lo que establece el criterio de la recta horizontal. Por otra parte, la inversa de una función está asociada al carácter biyectivo de la misma, es decir, esta debe ser inyectiva y sobreyectiva. Las imágenes que a continuación presentaremos se fundamentan precisamente en estos dos aspectos importantes de las funciones.

1 Definición Una función f se llama *uno a uno* si nunca toma el mismo valor dos veces; esto es,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 \neq x_2.$$

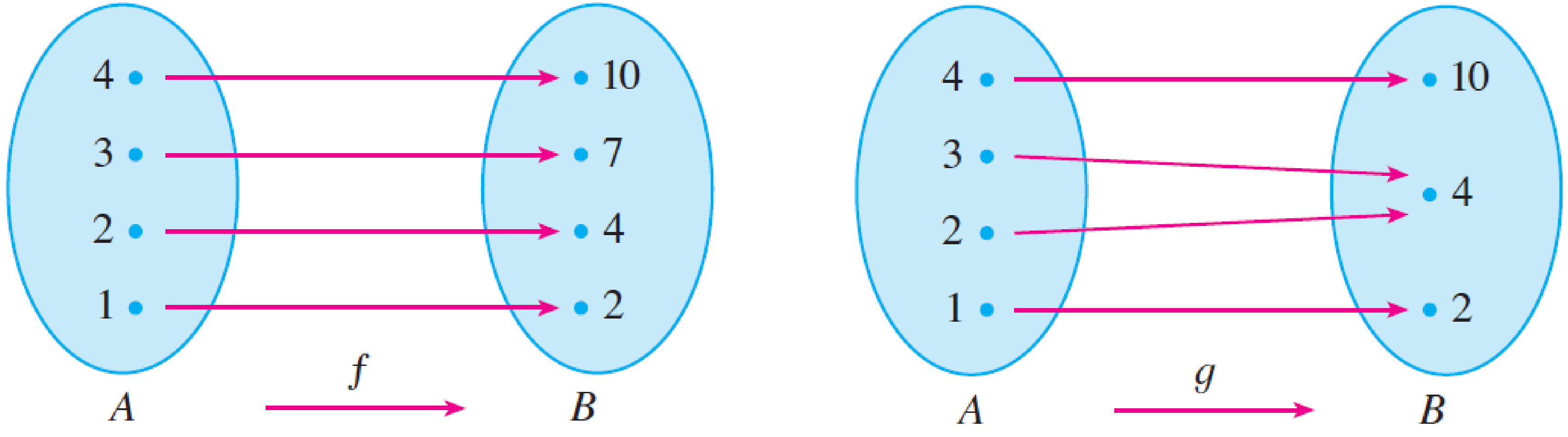


FIGURA 1

f es uno a uno; g no lo es

Si una recta horizontal interseca la gráfica de f en más de un punto, entonces vemos en la figura 2 que hay números x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Esto significa que f no es uno a uno, por tanto, con el siguiente método geométrico podemos determinar si una función es uno a uno.

> **Prueba de la recta horizontal** Una función es uno a uno si y sólo si no existe una recta horizontal que interseque su gráfica más de una vez.

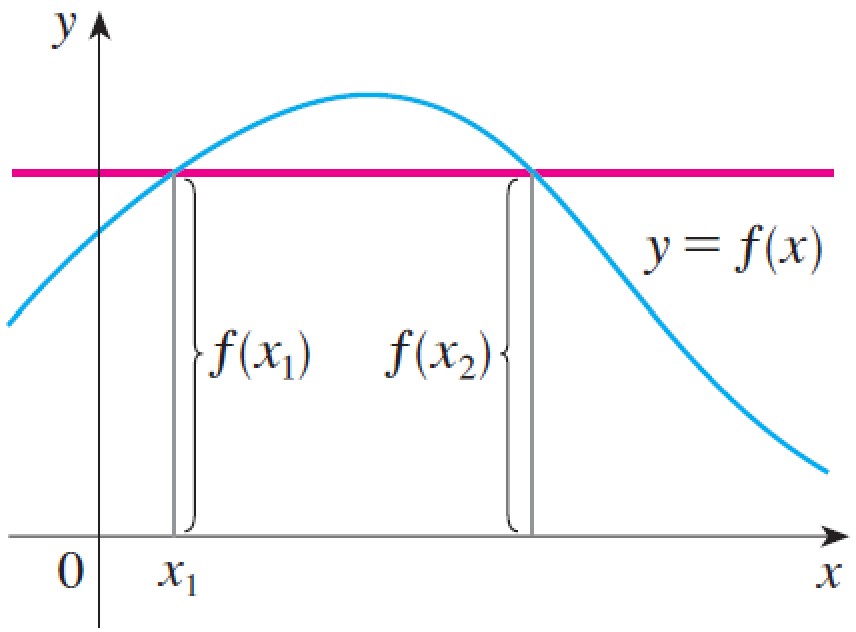


FIGURA 2
Esta función no es uno a uno, ya que $f(x_1) = f(x_2)$

V EJEMPLO 1 ¿Es la función $f(x) = x^3$ uno a uno?

SOLUCIÓN 1 Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1^3 \neq x_2^3$ (dos números diferentes no pueden tener el mismo cubo). Por tanto, por la definición 1, $f(x) = x^3$ es uno a uno.

SOLUCIÓN 2 De la figura 3 se observa que no existe recta horizontal que interseque a la gráfica de $f(x) = x^3$ más de una vez. Por tanto, por la prueba de la recta horizontal, f es uno a uno.

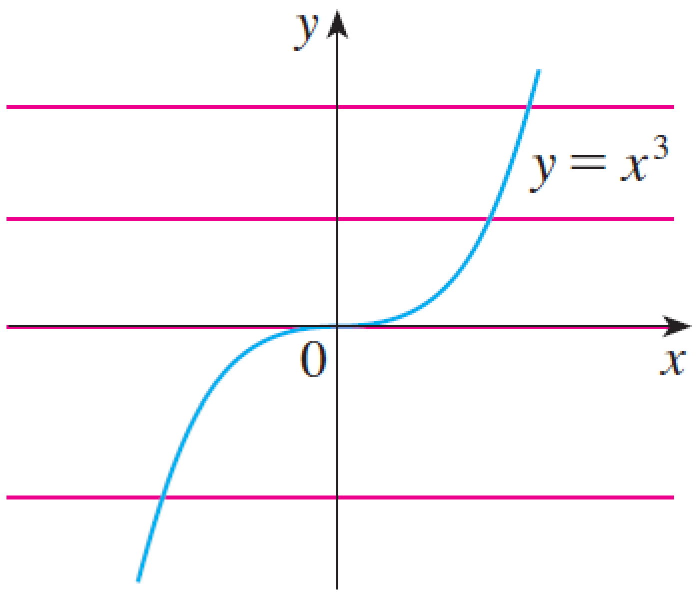


FIGURA 3
$f(x) = x^3$ es uno a uno

V **EJEMPLO 2** ¿Es uno a uno la función $g(x) = x^2$?

SOLUCIÓN 1 Esta función no es uno a uno, ya que, por ejemplo,

$$g(1) = 1 = g(-1),$$

por lo que 1 y -1 tienen la misma salida.

SOLUCIÓN 2 De la figura 4 se observa que existen rectas horizontales que cruzan la gráfica de g más de una vez. Por tanto, por la prueba de la recta horizontal, g no es uno a uno.

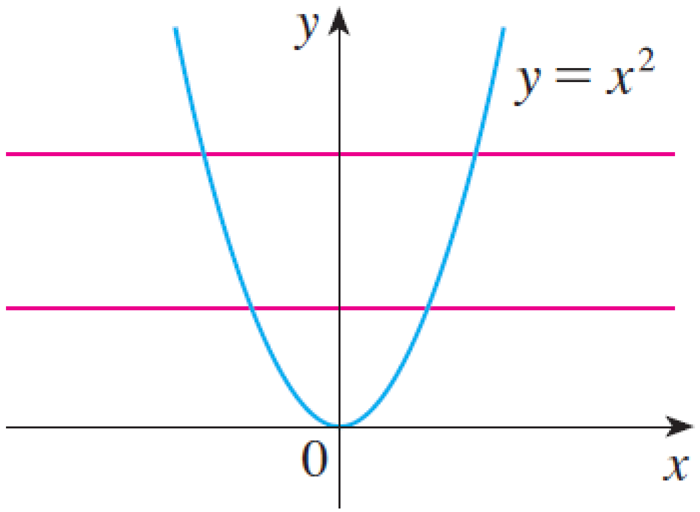


FIGURA 4
$g(x) = x^2$ no es uno a uno

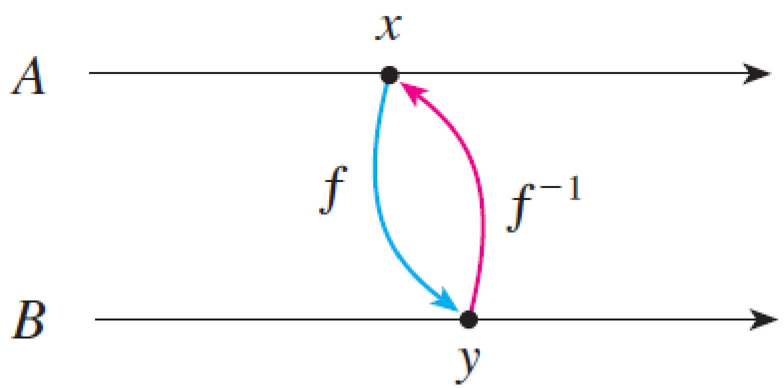
2 Definición Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. Entonces, la **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y rango A y está definida por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

para cualquier y en B.

Por ejemplo, la función inversa de $f(x) = x^3$ es $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ ya que si $y = x^3$, entonces

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$



$$\text{dominio de } f^{-1} = \text{rango de } f$$

$$\text{rango de } f^{-1} = \text{dominio de } f$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

CUIDADO No cometa el error de pensar en -1 en f^{-1} como un exponente. Es decir,

$$f^{-1}(x) \quad \textit{no} \text{ significa } \frac{1}{f(x)}$$

En todo caso, $1/f(x)$ es el recíproco y debería escribirse como $[f(x)]^{-1}$.

V EJEMPLO 3 Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ y $f(8) = -10$, encuentre $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$ y $f^{-1}(-10)$.

SOLUCIÓN De la definición de f^{-1}, tenemos

$$f^{-1}(7) = 3 \quad \text{ya que} \quad f(3) = 7$$

$$f^{-1}(5) = 1 \quad \text{ya que} \quad f(1) = 5$$

$$f^{-1}(-10) = 8 \quad \text{ya que} \quad f(8) = -10$$

El diagrama en la figura 6 aclara cómo f^{-1} invierte el efecto de f en este caso.

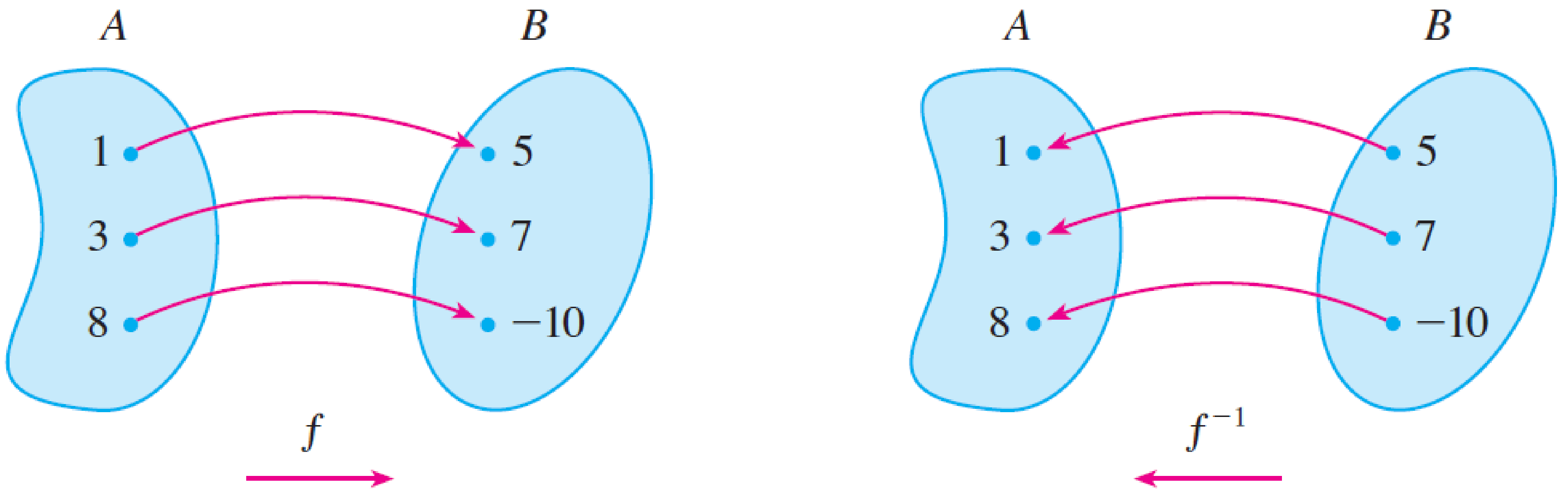


FIGURA 6
La función inversa invierte las salidas y las entradas

La letra x es tradicionalmente utilizada como la variable independiente, así que cuando nos concentramos en f^{-1} en vez de f, usualmente cambiamos los roles de x y y en la definición 2, y escribimos

3

$$\boxed{f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x}$$

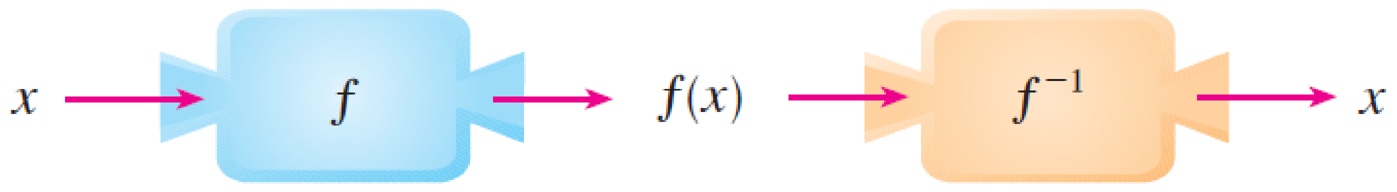
Al sustituir por y en la definición 2 y sustituyendo por x en $\boxed{3}$, obtenemos las siguientes **ecuaciones de cancelación**

4

$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \quad \text{para toda } x \text{ en } A \\ f(f^{-1}(x)) &= x \quad \text{para toda } x \text{ en } B \end{aligned}}$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

La primera ecuación cancelada indica que si comenzamos con x, aplicando f y, a continuación, aplicamos f^{-1}, llegamos de regreso a x, donde empezamos (consulte el diagrama de máquinas en la figura 7). Así, f^{-1} deshace a f. La segunda ecuación señala que f deshace lo que hace f^{-1}.



Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, entonces $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ y, por tanto, las ecuaciones de cancelación son

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = (x^3)^{1/3} = x$$

$$f\big(f^{-1}(x)\big) = (x^{1/3})^3 = x$$

Estas ecuaciones dicen simplemente que la función *elevar al cubo* y la función *raíz cúbica* se anulan mutuamente cuando se aplican una después de la otra.

15. Suponga que f es una función uno a uno.

a) Si $f(6) = 17$, ¿qué es $f^{-1}(17)$?

b) Si $f^{-1}(3) = 2$, ¿qué es $f(2)$?

16. Si $f(x) = x^5 + x^3 + x$, encuentre $f^{-1}(3)$ y $f(f^{-1}(2))$.

17. Si $g(x) = 3 + x + e^x$, encuentre $g^{-1}(4)$.

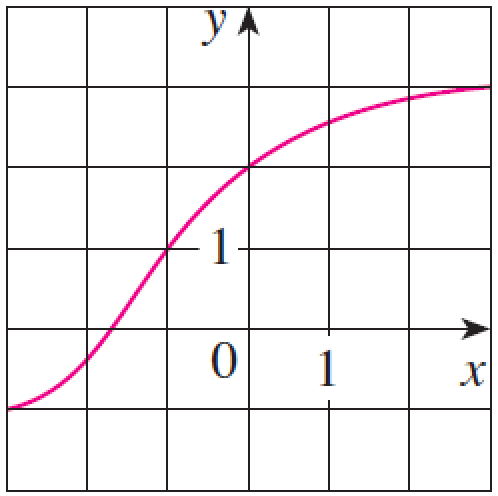
18. La gráfica de f está dada.

a) ¿Por qué es f uno a uno?

b) ¿Cuáles son el dominio y el rango de f^{-1}?

c) ¿Cuál es el valor de $f^{-1}(2)$?

d) Estime el valor de $f^{-1}(0)$.



Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Ahora veamos cómo calcular funciones inversas. Si tenemos una función $y = f(x)$ y somos capaces de resolver esta ecuación para x en términos de y, entonces, de acuerdo con la definición 2, debemos obtener $x = f^{-1}(y)$. Si queremos llamar a la variable independiente x, intercambiamos x por y y llegamos a la ecuación $y = f^{-1}(x)$.

5 Cómo encontrar la función inversa de una función f uno a uno

Paso 1 Escribir $y = f(x)$.

Paso 2 Resolver esta ecuación para x en términos de y (si es posible).

Paso 3 Para expresar f^{-1} en función de x, intercambiamos x por y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

V **EJEMPLO 4** Encuentre la función inversa de $f(x) = x^3 + 2$.

SOLUCIÓN De acuerdo con $\boxed{5}$ empezamos escribiendo

$$y = x^3 + 2$$

Después, despejamos x

$$x^3 = y - 2$$

$$x = \sqrt[3]{y - 2}$$

Finalmente, intercambiamos x y y:

$$y = \sqrt[3]{x - 2}$$

Ahora, la función inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$.

En el ejemplo 4, note cómo f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la regla "elevar al cubo y después sumar 2"; f^{-1} es la regla "restar dos y después tomar la raíz cúbica".

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Halle una fórmula para la inversa de la función.

21. $f(x) = 1 + \sqrt{2 + 3x}$ **22.** $f(x) = \dfrac{4x - 1}{2x + 3}$

24. $y = x^2 - x, \quad x \geqslant \frac{1}{2}$

31. Sea $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

a) Encuentre f^{-1}. ¿Cómo se relaciona con f?

b) Identifique la gráfica de f y explique su respuesta al inciso a).

Solución 21

$y = 1 + \sqrt{2 + 3x}$ $\quad$ $y - 1 = \sqrt{2 + 3x}$

$(y - 1)^2 = 2 + 3x$ $\quad$ $(y - 1)^2 - 2 = 3\text{x}$ $\quad$ $\dfrac{(y-1)^2-2}{3} = x$ $\quad$ $\dfrac{(x-1)^2-2}{3} = y$ $\quad$ $f^{-1}(x) = \dfrac{(x-1)^2-2}{3}$

El principio de intercambio de x e y para encontrar la función inversa también nos da el método para obtener la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f. Ya que $f(a) = b$ si y sólo si $f^{-1}(b) = a$, el punto (a, b) está en la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1}. Así, el punto (b, a) a partir del punto (a, b) se obtiene reflejando el segundo sobre la recta $y = x$. (Véase la figura 8.)

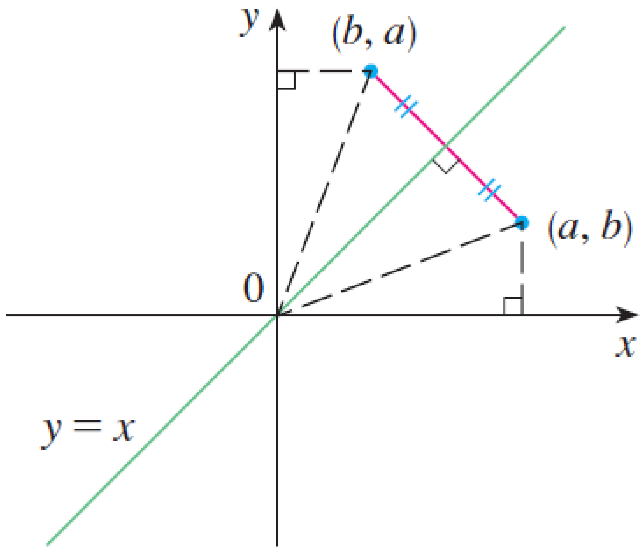


FIGURA 8

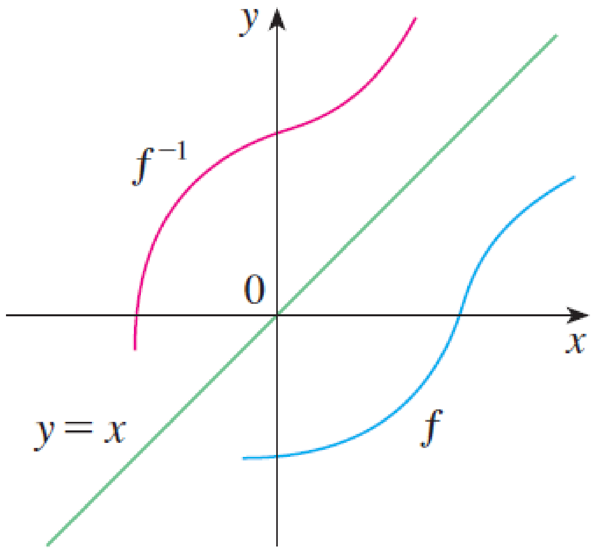
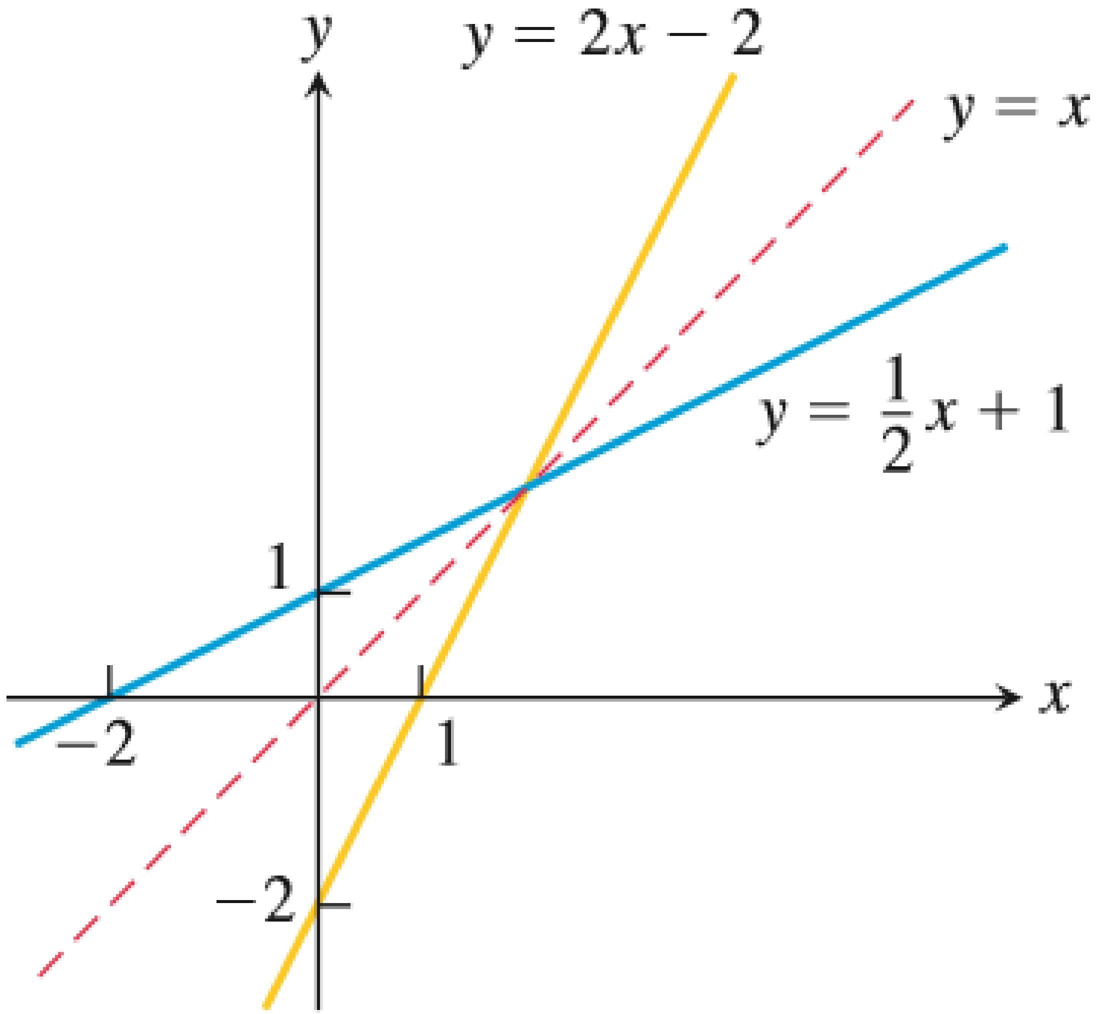


FIGURA 9

Así, como se ejemplifica en la figura 9:

> La gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f sobre la recta $y = x$.

FUNCIONES INVERSAS



REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín