Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

ECUACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

El álgebra nos proporciona una forma peculiar de resolver problemas, un método deductivo con una vuelta de tuerca. Esa vuelta de tuerca es el «pensamiento hacia atrás». Piense por un momento en el problema de coger el número 25, sumarle 17, y obtener 42. Esto es pensamiento hacia adelante. Pero ¿y si, en lugar de ello, nos dieran la solución 42, y nos hicieran otra pregunta? Ahora queremos el número que nos dé 42 si le sumamos 25. Aquí es donde interviene el pensamiento hacia atrás. Queremos el valor de x que resuelva la ecuación $25 + x = 42$ y sustraemos 25 a 42 para obtenerlo.

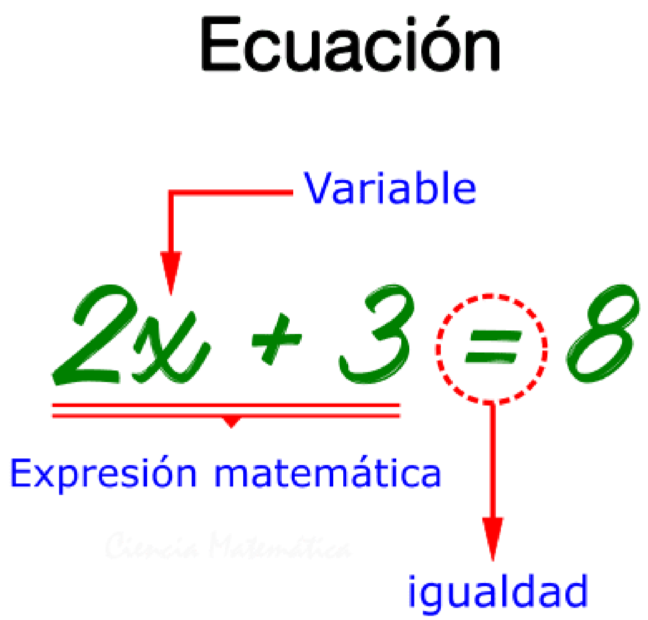
Tomado de: Crilly, Tony. 50 cosas que hay que saber sobre matemáticas.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Solución de ecuaciones lineales ▶ Solución de ecuaciones cuadráticas ▶ Otros tipos de ecuaciones

Definición

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que aparecen valores conocidos o datos, y valores desconocidos llamados incógnitas o variables, relacionados mediante operaciones matemáticas.



Si en una ecuación se reemplazan las variables por números que convierten la ecuación en una proposición verdadera, decimos que dichos números son **soluciones** o **raíces** de la ecuación.

El conjunto de todas las soluciones de una ecuación se llama **conjunto solución** de la ecuación.

Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución.

Resolver una ecuación es encontrar todas las soluciones de la ecuación, y para ello transformamos la ecuación inicial en una ecuación equivalente más simple, usando las siguientes propiedades de la igualdad entre expresiones algebraicas:

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

Propiedad	Descripción
1. $A = B \quad \Leftrightarrow \quad A + C = B + C$	Sumar la misma cantidad a ambos lados de una ecuación da una ecuación equivalente.
2. $A = B \quad \Leftrightarrow \quad CA = CB \quad (C \neq 0)$	Multiplicar ambos lados de una ecuación por la misma cantidad diferente de cero da una ecuación equivalente.

ECUACIONES LINEALES

Una **ecuación lineal** en una variable es una ecuación equivalente a una de la forma

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números reales y x es la variable.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

A continuación veamos algunos ejemplos que ilustran la diferencia entre ecuaciones lineales y no lineales.

Ecuaciones lineales	**Ecuaciones no lineales**	
$4x - 5 = 3$	$x^2 + 2x = 8$	No lineal; contiene el cuadrado de la variable
$2x = \frac{1}{2}x - 7$	$\sqrt{x} - 6x = 0$	No lineal; contiene la raíz cuadrada de la variable
$x - 6 = \dfrac{x}{3}$	$\dfrac{3}{x} - 2x = 1$	No lineal; contiene el recíproco de la variable

EJEMPLO 1 | Solución de una ecuación lineal

Resuelva la ecuación $7x - 4 = 3x + 8$.

SOLUCIÓN Resolvemos ésta al cambiarla a una ecuación equivalente con todos los términos que tenga la variable x en un lado y todos los términos constante en el otro.

$7x - 4 = 3x + 8$	Ecuación dada
$(7x - 4) + 4 = (3x + 8) + 4$	Sume 4
$7x = 3x + 12$	Simplifique
$7x - 3x = (3x + 12) - 3x$	Reste $3x$
$4x = 12$	Simplifique
$\frac{1}{4} \cdot 4x = \frac{1}{4} \cdot 12$	Multiplique por $\frac{1}{4}$
$x = 3$	Simplifique

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 3$:

$x = 3$ $\qquad$ $x = 3$

$$\text{LI} = 7(3) - 4 = 17 \qquad \text{LD} = 3(3) + 8 = 17$$

LI = LD ✔

EJEMPLO 2 | Solución para una variable en términos de otras

Despeje M de la ecuación siguiente.

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

SOLUCIÓN Aun cuando esta ecuación contiene más de una variable, la resolvemos como es usual al aislar M en un lado, tratando a las otras variables como si fueran números.

$$F = \left(\frac{Gm}{r^2}\right)M \qquad \text{Factorice } M \text{ del lado derecho}$$

$$\left(\frac{r^2}{Gm}\right)F = \left(\frac{r^2}{Gm}\right)\left(\frac{Gm}{r^2}\right)M \qquad \text{Multiplique por el recíproco de } \frac{Gm}{r^2}$$

$$\frac{r^2F}{Gm} = M \qquad \text{Simplifique}$$

La solución es $M = \dfrac{r^2F}{Gm}$.

EJEMPLO 3 | Despejar una variable en términos de otras

El área superficial A del rectángulo cerrado que se muestra en la Figura 1 puede calcularse a partir de la longitud l, el ancho w y la altura h de acuerdo con la fórmula

$$A = 2lw + 2wh + 2lh$$

Despeje w en términos de las otras variables de esta ecuación.

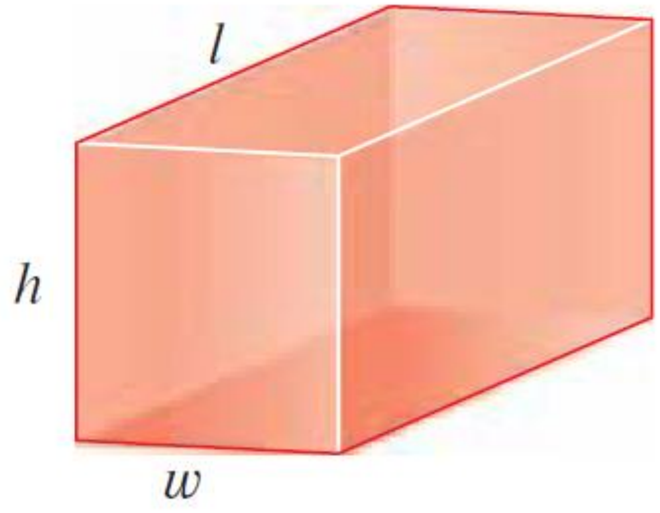


FIGURA 1 Una caja rectangular cerrada

SOLUCIÓN Aun cuando esta ecuación contiene más de una variable, la resolvemos como es usual al aislar w en un lado, tratando las otras variables como si fueran números.

$$A = (2lw + 2wh) + 2lh \qquad \text{Reúna términos que contengan } w$$

$$A - 2lh = 2lw + 2wh \qquad \text{Reste } 2lh$$

$$A - 2lh = (2l + 2h)w \qquad \text{Factorice } w \text{ del lado derecho}$$

$$\frac{A - 2lh}{2l + 2h} = w \qquad \text{Divida entre } 2l + 2h$$

La solución es $w = \dfrac{A - 2lh}{2l + 2h}$.

■ La ecuación dada es lineal o equivalente a una ecuación lineal. Resuelva la ecuación.

19. $2(1 - x) = 3(1 + 2x) + 5$

20. $\dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{2}(y - 3) = \dfrac{y + 1}{4}$

21. $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x - 5 = 0$

22. $2x - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x + 1}{4} = 6x$

23. $\dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{3x} + 1$

24. $\dfrac{2x - 1}{x + 2} = \dfrac{4}{5}$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

■ De las siguientes ecuaciones, despeje la variable indicada.

31. $P = 2l + 2w$; despeje w

32. $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$; despeje R_1

33. $\dfrac{ax + b}{cx + d} = 2$; despeje x

34. $a - 2[b - 3(c - x)] = 6$; despeje x

35. $a^2x + (a - 1) = (a + 1)x$; despeje x

39. $a^2 + b^2 = c^2$; despeje b

40. $A = P\left(1 + \dfrac{i}{100}\right)^2$; despeje i

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Algunas ecuaciones cuadráticas pueden resolverse al factorizar y usar las siguientes propiedades básicas de números reales.

PROPIEDAD DE PRODUCTO CERO

$$AB = 0 \qquad \text{si y sólo si} \qquad A = 0 \quad \text{o} \quad B = 0$$

Esto significa que si podemos factorizar el lado izquierdo de una ecuación cuadrática (o de otro grado), entonces podemos resolverla igualando a 0 cada factor a la vez. Este método funciona sólo cuando el lado derecho de la ecuación es 0.

EJEMPLO 4 | Solución de una ecuación cuadrática por factorización

Resuelva la ecuación $x^2 + 5x = 24$.

SOLUCIÓN Primero debemos reescribir la ecuación de modo que el lado derecho sea 0.

$$x^2 + 5x = 24$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0 \qquad \text{Reste 24}$$

$$(x - 3)(x + 8) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 8 = 0 \qquad \text{Propiedad de Producto Cero}$$

$$x = 3 \qquad\qquad x = -8 \qquad \text{Resuelva}$$

Las soluciones son $x = 3$ y $x = -8$.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA SENCILLA

Las soluciones de la ecuación $x^2 = c$ son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 5 | Solución de ecuaciones cuadráticas sencillas

Resuelva las siguientes ecuaciones.

(a) $x^2 = 5$ **(b)** $(x - 4)^2 = 5$

SOLUCIÓN

(a) Del principio contenido en el cuadro precedente, obtenemos $x = \pm\sqrt{5}$.

(b) También podemos tomar la raíz cuadrada de cada lado de esta ecuación.

$$(x-4)^2 = 5$$

$$x - 4 = \pm\sqrt{5} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{5} \qquad \text{Sume 4}$$

Las soluciones son $x = 4 + \sqrt{5}$ y $x = 4 - \sqrt{5}$.

COMPLETAR EL CUADRADO

Para hacer que $x^2 + bx$ sea un cuadrado perfecto, sume $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, que es el cuadrado de la mitad del coeficiente de x. Esto da el cuadrado perfecto.

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 6 | Resolver ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

Resuelva lo siguiente.

(a) $x^2 - 8x + 13 = 0$ **(b)** $3x^2 - 12x + 6 = 0$

SOLUCIÓN

(a) $x^2 - 8x + 13 = 0$ Ecuación dada

$x^2 - 8x = -13$ Reste 13

$x^2 - 8x + 16 = -13 + 16$ Complete el cuadrado: sume $\left(\frac{-8}{2}\right)^2 = 16$

$(x - 4)^2 = 3$ Cuadrado perfecto

$x - 4 = \pm\sqrt{3}$ Tome la raíz cuadrada

$x = 4 \pm \sqrt{3}$ Sume 4

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

(b) Después de restar 6 de cada lado de la ecuación, debemos factorizar el coeficiente de x^2 (el 3) del lado izquierdo para poner la ecuación en la forma correcta para completar el cuadrado.

$$
\begin{aligned}
3x^2 - 12x + 6 &= 0 && \text{Ecuación dada} \\
3x^2 - 12x &= -6 && \text{Reste 6} \\
3(x^2 - 4x) &= -6 && \text{Factorice 3 del lado izquierdo}
\end{aligned}
$$

Ahora completamos el cuadrado al sumar $(-2)^2 = 4$ *dentro* de los paréntesis. Como todo dentro de los paréntesis está multiplicado por 3, esto significa que en realidad estamos sumando $3 \cdot 4 = 12$ al lado izquierdo de la ecuación. Entonces, también debemos sumar 12 al lado derecho.

$$
\begin{aligned}
3(x^2 - 4x + 4) &= -6 + 3 \cdot 4 && \text{Complete el cuadrado: sume 4} \\
3(x - 2)^2 &= 6 && \text{Cuadrado perfecto} \\
(x - 2)^2 &= 2 && \text{Divida entre 3} \\
x - 2 &= \pm\sqrt{2} && \text{Tome la raíz cuadrada} \\
x &= 2 \pm \sqrt{2} && \text{Sume 2}
\end{aligned}
$$

■ Resuelva la ecuación por factorización.

49. $3x^2 + 5x = 2$

50. $6x(x - 1) = 21 - x$

51. $2x^2 = 8$

52. $3x^2 - 27 = 0$

53. $(3x + 2)^2 = 10$

54. $(2x - 1)^2 = 8$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

55-62 ■ Resuelva la ecuación completando el cuadrado.

55. $x^2 + 2x - 5 = 0$

56. $x^2 - 4x + 2 = 0$

57. $x^2 - 6x - 11 = 0$

58. $x^2 + 3x - \frac{7}{4} = 0$

59. $2x^2 + 8x + 1 = 0$

60. $3x^2 - 6x - 1 = 0$

61. $4x^2 - x = 0$

62. $x^2 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

LA FÓRMULA CUADRÁTICA

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DEMOSTRACIÓN Primero, dividimos entre a cada lado de la ecuación y pasamos la constante al lado derecho, obteniendo

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad \text{Divida entre } a$$

A continuación completamos el cuadrado al sumar $(b/2a)^2$ a cada lado de la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad \text{Complete el cuadrado: sume } \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \qquad \text{Cuadrado perfecto}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Reste } \frac{b}{2a}$$

■

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 7 | Uso de la fórmula cuadrática

Encuentre todas las soluciones de las ecuaciones siguientes.

(a) $3x^2 - 5x - 1 = 0$ **(b)** $4x^2 + 12x + 9 = 0$ **(c)** $x^2 + 2x + 2 = 0$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

SOLUCIÓN

(a) En esta ecuación cuadrática $a = 3$, $b = -5$ y $c = -1$.

$$\underbrace{3}_{a=3}x^2 \overbrace{-\,5}^{b=-5}x \underbrace{-\,1}_{c=-1} = 0$$

Por la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

Si se desean aproximaciones, podemos usar una calculadora para obtener

$$x = \frac{5 + \sqrt{37}}{6} \approx 1.8471 \qquad \text{y} \qquad x = \frac{5 - \sqrt{37}}{6} \approx -0.1805$$

(b) Usando la fórmula cuadrática con $a = 4$, $b = 12$ y $c = 9$ dará

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm 0}{8} = -\frac{3}{2}$$

Esta ecuación tiene sólo una solución, $x = -\frac{3}{2}$.

(c) Usando la fórmula cuadrática, con $a = 1$, $b = 2$ y $c = 2$ resulta

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Como el cuadrado de cualquier número real es no negativo, $\sqrt{-1}$ no está definido en el sistema de números reales. La ecuación no tiene solución real.

63-78 ■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación cuadrática.

63. $x^2 - 2x - 15 = 0$

64. $x^2 + 5x - 6 = 0$

65. $x^2 - 7x + 10 = 0$

66. $x^2 + 30x + 200 = 0$

67. $2x^2 + x - 3 = 0$

68. $3x^2 + 7x + 4 = 0$

69. $3x^2 + 6x - 5 = 0$

70. $x^2 - 6x + 1 = 0$

71. $z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{9}{16} = 0$

72. $2y^2 - y - \frac{1}{2} = 0$

73. $4x^2 + 16x - 9 = 0$

74. $0 = x^2 - 4x + 1$

75. $w^2 = 3(w - 1)$

76. $3 + 5z + z^2 = 0$

77. $10y^2 - 16y + 5 = 0$

78. $25x^2 + 70x + 49 = 0$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EL DISCRIMINANTE

El **discriminante** de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ es $D = b^2 - 4ac$.

1. Si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

2. Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene exactamente una solución real.

3. Si $D < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real.

EJEMPLO 8 | Uso del discriminante

Use el discriminante para determinar cuántas soluciones reales tiene cada ecuación.

(a) $x^2 + 4x - 1 = 0$ **(b)** $4x^2 - 12x + 9 = 0$ **(c)** $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 0$

SOLUCIÓN

(a) El discriminante es $D = 4^2 - 4(1)(-1) = 20 > 0$, por lo cual la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

(b) El discriminante es $D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$, por lo cual la ecuación tiene una solución real.

(c) El discriminante es $D = (-2)^2 - 4(\frac{1}{3})4 = -\frac{4}{3} < 0$, por lo cual la ecuación no tiene solución real.

79-84 ■ Use el discriminante para determinar el número de soluciones reales de la ecuación. No resuelva la ecuación.

79. $x^2 - 6x + 1 = 0$

80. $3x^2 = 6x - 9$

81. $x^2 + 2.20x + 1.21 = 0$

82. $x^2 + 2.21x + 1.21 = 0$

83. $4x^2 + 5x + \frac{13}{8} = 0$

84. $x^2 + rx - s = 0 \quad (s > 0)$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Otros tipos de ecuaciones

Algunas ecuaciones se presentan en otras formas, las cuales, mediante operaciones algebraicas, se transforman en ecuaciones lineales o cuadráticas.

1. **Ecuaciones en las que la variable o variables hacen parte del denominador de expresiones fraccionarias**

   Si en una ecuación las variables aparecen en los denominadores de expresiones fraccionarias, realizamos las operaciones indicadas, y analizamos la expresión simplificada para determinar qué ecuación debe resolverse.

EJEMPLO 10 | Una ecuación que contiene expresiones fraccionarias

Resuelva la ecuación $\dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x+2} = 2$.

SOLUCIÓN Eliminamos los denominadores al multiplicar cada lado por el mínimo común denominador.

Resuelva la ecuación $\dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x+2} = 2$.

$\left(\dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x+2}\right)x(x+2) = 2x(x+2)$	Multiplique por el MCD $x(x+2)$
$3(x+2) + 5x = 2x^2 + 4x$	Expanda
$8x + 6 = 2x^2 + 4x$	Expanda el lado izquierdo
$0 = 2x^2 - 4x - 6$	Reste $8x + 6$
$0 = x^2 - 2x - 3$	Divida entre 2 ambos lados
$0 = (x-3)(x+1)$	Factorice
$x - 3 = 0$ o $x + 1 = 0$	Propiedad de Producto Cero
$x = 3$ $\quad$ $x = -1$	Resuelva

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = 3$:

$$\text{LI} = \frac{3}{3} + \frac{5}{3+2} = 1 + 1 = 2$$

$\text{LD} = 2$

$\text{LI} = \text{LD}$ ✔

$x = -1$:

$$\text{LI} = \frac{3}{-1} + \frac{5}{-1+2} = -3 + 5 = 2$$

$\text{LD} = 2$

$\text{LI} = \text{LD}$ ✔

Debemos verificar nuestras respuestas porque multiplicar por una expresión que contenga la variable puede introducir soluciones extrañas. De *Verifique sus respuestas* vemos que las soluciones son $x = 3$ y -1.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación.

85. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{5}{4}$

86. $\dfrac{10}{x}-\dfrac{12}{x-3}+4=0$

87. $\dfrac{x^2}{x+100}=50$

88. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2}=0$

89. $\dfrac{x+5}{x-2}=\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{28}{x^2-4}$

90. $\dfrac{x}{2x+7}-\dfrac{x+1}{x+3}=1$

2. Ecuaciones en las que la variable o variables son parte de cantidades subradicales

Si en la ecuación sólo aparece un radical, la escribimos de tal forma que a un lado de la igualdad sólo aparezca el radical, luego elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación. Con este procedimiento la ecuación resultante puede tener raíces que no lo sean de la ecuación original, por lo que debemos determinar cuáles de las raíces de la ecuación resultante son raíces de la ecuación original.

EJEMPLO 11 | Una ecuación que contiene un radical

Resuelva la ecuación $2x = 1 - \sqrt{2 - x}$.

SOLUCIÓN Para eliminar la raíz cuadrada, primero la aislamos en un lado del signo igual y luego elevamos al cuadrado:

$2x - 1 = -\sqrt{2-x}$	Reste 1
$(2x-1)^2 = 2 - x$	Eleve al cuadrado cada lado
$4x^2 - 4x + 1 = 2 - x$	Expanda el lado izquierdo
$4x^2 - 3x - 1 = 0$	Sume $-2 + x$
$(4x+1)(x-1) = 0$	Factorice
$4x + 1 = 0$ o $x - 1 = 0$	Propiedad de Producto Cero
$x = -\frac{1}{4}$ $\quad x = 1$	Resuelva

Los valores $x = -\frac{1}{4}$ y $x = 1$ son sólo soluciones potenciales. Debemos verificarlas para ver si satisfacen la ecuación original. De *Verifique sus respuestas* vemos que $x = -\frac{1}{4}$ es una solución pero $x = 1$ no lo es. La única solución es $x = -\frac{1}{4}$.

Universidad Pontificia Bolivariana

$$2x = 1 - \sqrt{2-x}.$$

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = -\frac{1}{4}$:

$$\text{LI} = 2\left(-\tfrac{1}{4}\right) = -\tfrac{1}{2}$$

$$\text{LD} = 1 - \sqrt{2 - \left(-\tfrac{1}{4}\right)}$$

$$= 1 - \sqrt{\tfrac{9}{4}}$$

$$= 1 - \tfrac{3}{2} = -\tfrac{1}{2}$$

$$\text{LI} = \text{LD} \quad ✔$$

$x = 1$:

$$\text{LI} = 2(1) = 2$$

$$\text{LD} = 1 - \sqrt{2-1}$$

$$= 1 - 1 = 0$$

$$\text{LI} \neq \text{LD} \quad ✗$$

■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación.

91. $\sqrt{2x+1}+1=x$

92. $\sqrt{5-x}+1=x-2$

93. $2x+\sqrt{x+1}=8$

94. $\sqrt{\sqrt{x-5}+x}=5$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

3. Ecuaciones de la forma $x^{2n} \pm x^n + c = 0$

Estas ecuaciones se pueden transformar en ecuaciones cuadráticas utilizando otra variable en reemplazo de x^n. Si $y = x^n$, la ecuación original se escribe como $y^2 \pm y + c = 0$, que es una ecuación cuadrática en la variable y, la cual sabemos resolver. Conociendo los valores de y que satisfacen esta nueva ecuación, los reemplazamos en $y = x^n$, y hallamos los correspondientes valores de x que son las soluciones de la ecuación original. El procedimiento anteriormente descrito se llama **solución de ecuaciones usando cambio de variable**.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 12 | Una ecuación de cuarto grado de tipo cuadrático

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$.

SOLUCIÓN Si hacemos $W = x^2$, entonces obtenemos una ecuación cuadrática con la nueva variable W:

$$(x^2)^2 - 8x^2 + 8 = 0 \qquad \text{Escriba } x^4 \text{ como } (x^2)^2$$

$$W^2 - 8W + 8 = 0 \qquad \text{Sea } W = x^2$$

$$W = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 8}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{2} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

$$x^2 = 4 \pm 2\sqrt{2} \qquad W = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Por lo tanto, hay cuatro soluciones:

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}, \qquad -\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}, \qquad -\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

Usando una calculadora, obtenemos las aproximaciones $x \approx 2.61, 1.08, -2.61, -1.08$.

EJEMPLO 13 | Una ecuación con potencias fraccionarias

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x^{1/3} + x^{1/6} - 2 = 0$.

SOLUCIÓN Esta ecuación es del tipo cuadrático porque si hacemos $W = x^{1/6}$, entonces $W^2 = (x^{1/6})^2 = x^{1/3}$.

$$x^{1/3} + x^{1/6} - 2 = 0$$

$$W^2 + W - 2 = 0 \qquad \text{Sea } W = x^{1/6}$$

$$(W - 1)(W + 2) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$W - 1 = 0 \quad \text{o} \quad W + 2 = 0 \qquad \text{Propiedad de Producto Cero}$$

$$W = 1 \qquad W = -2 \qquad \text{Resuelva}$$

$$x^{1/6} = 1 \qquad x^{1/6} = -2 \qquad W = x^{1/6}$$

$$x = 1^6 = 1 \qquad x = (-2)^6 = 64 \qquad \text{Tome la 6a. potencia}$$

De *Verifique sus respuestas* vemos que $x = 1$ es una solución pero $x = 64$ no lo es. La solución es $x = 1$.

■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación.

95. $x^4 - 13x^2 + 40 = 0$

96. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

97. $2x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

98. $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$

99. $x^{4/3} - 5x^{2/3} + 6 = 0$

100. $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} - 4 = 0$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

4. Ecuaciones con valor absoluto

Para resolver ecuaciones que involucran valor absoluto, podemos usar el hecho de que $|a| = a$ ó $|a| = -a$ según se tenga $a \geq 0$ ó $a < 0$, respectivamente.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 14 | Una ecuación con valor absoluto

Resuelva la ecuación $|2x - 5| = 3$.

SOLUCIÓN Por la definición de valor absoluto, $|2x - 5| = 3$ es equivalente a

$$\begin{aligned} 2x - 5 &= 3 & \quad \text{o} \quad && 2x - 5 &= -3 \\ 2x &= 8 & && 2x &= 2 \\ x &= 4 & && x &= 1 \end{aligned}$$

Las soluciones son $x = 1$, $x = 4$.

■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación.

105. $|3x + 5| = 1$

106. $|2x| = 3$

107. $|x - 4| = 0.01$

108. $|x - 6| = -1$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

REFERENCIA

Stewart, J., Precálculo Matemáticas para el Cálculo, Cengage Learning, séptima edición.

Referencia en línea

http://www.ebooks7-24.com.consultaremota.upb.edu.co/stage.aspx?il


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín