Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

ENCUENTRO 10.2

Sección 3.1: Derivadas de funciones polinómicas y exponenciales

Derivadas de funciones polinomiales y exponenciales

Empezamos por la más sencilla de todas las funciones: la función constante $f(x) = c$. La gráfica de esta función es la recta horizontal $y = c$, la cual tiene pendiente 0, de modo que debe tener $f'(x) = 0$. (Véase la figura 1.) Una demostración formal, a partir de la definición de derivada, también es fácil:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

En la notación de Leibniz, esta regla se expresa como sigue.

Derivada de una función constante

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

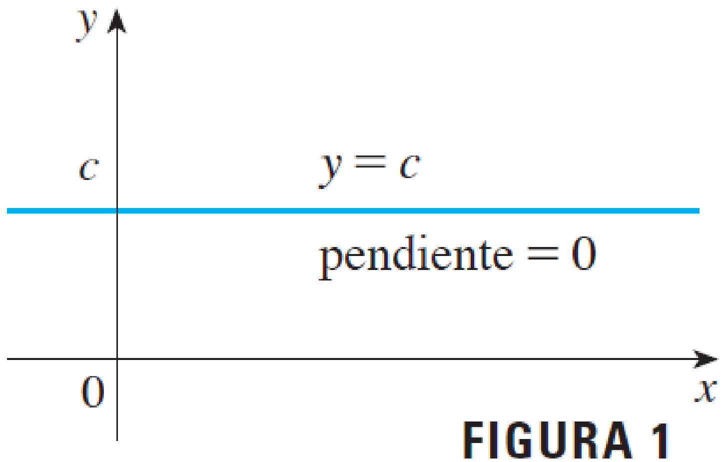


FIGURA 1
La gráfica de $f(x) = c$ es la recta $y = c$; por tanto, $f'(x) = 0$.

Función potencia

Enseguida, se consideran las funciones $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo. Si $n = 1$, la gráfica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$, la cual tiene pendiente 1 (véase la figura 2). De modo que

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x) = 1}$$

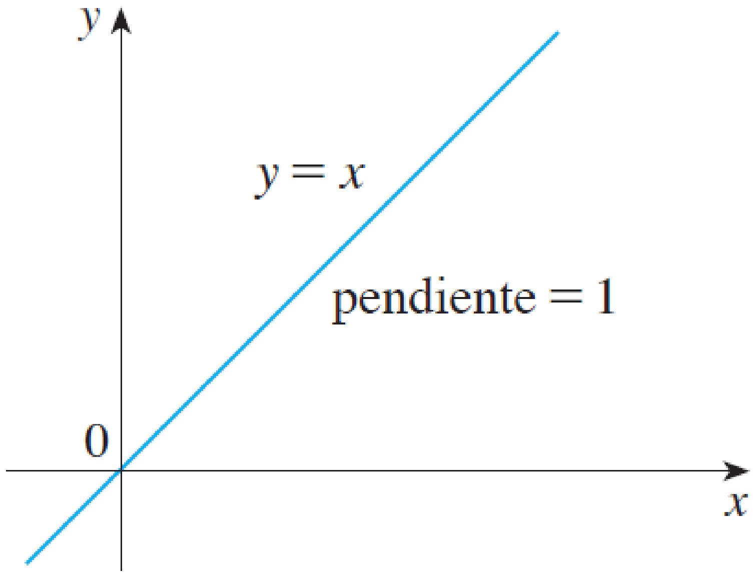


FIGURA 2
La grafica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$; por tanto, $f'(x) = 1$.

Regla de la potencia Si n es un entero positivo, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Tarea: Consultar demostración en el texto guía

EJEMPLO 1

a) Si $f(x) = x^6$, entonces $f'(x) = 6x^5$. b) Si $y = x^{1000}$, entonces $y' = 1000x^{999}$.

c) Si $y = t^4$, entonces $\dfrac{dy}{dt} = 4t^3$. d) Si $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3r^2$

Regla de la potencia (versión general) Si n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

EJEMPLO 2 Derive:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ Dado que $f(x) = x^{-2}$, utilizamos la regla de la potencia con $n = -2$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

b) $y = \sqrt[3]{x^2}$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \dfrac{d}{dx}(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3}$

La regla de la potencia permite hallar las rectas tangentes sin hacer uso de la definición de derivada. Además, permite encontrar *rectas normales*. La **recta normal** a una curva C en un punto P es la recta a través de P que es perpendicular a la recta tangente en P. (En el estudio de la óptica, necesita considerar el ángulo entre un rayo de luz y la recta normal a un lente.)

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

V **EJEMPLO 3** Halle la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva $y = x\sqrt{x}$ en el punto $(1, 1)$. Ilustre dibujando la curva y estas rectas.

SOLUCIÓN La derivada de $f(x) = x\sqrt{x} = xx^{1/2} = x^{3/2}$ es

$$f'(x) = \tfrac{3}{2}x^{(3/2)-1} = \tfrac{3}{2}x^{1/2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}$$

De este modo, la pendiente de la recta tangente en (1, 1) es $f'(1) = \frac{3}{2}$. Por consiguiente, la ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = \tfrac{3}{2}(x - 1) \quad \text{o bien} \quad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

La recta normal es perpendicular a la recta tangente de tal manera que su pendiente es el recíproco negativo de $\frac{3}{2}$, es decir, $-\frac{2}{3}$. En estos términos, una ecuación de la recta normal es

$$y - 1 = -\tfrac{2}{3}(x - 1) \quad \text{o bien} \quad y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{5}{3}$$

En la figura 4 se traza la gráfica de la curva y las rectas tangente y normal.

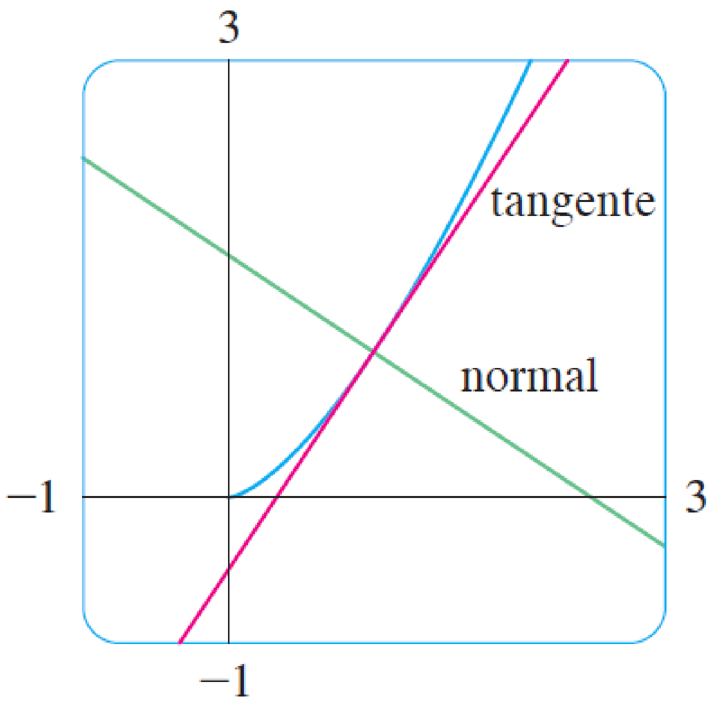


FIGURA 4
$y = x\sqrt{x}$

Fórmulas generales

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

1. $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$

2. $\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$

3. $\dfrac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

4. $\dfrac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$

5. $\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ (regla del producto)

6. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ (regla del cociente)

7. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ (regla de potencias)

Regla del múltiplo constante Si c es una constante y f es una función derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = cf(x)$. Entonces

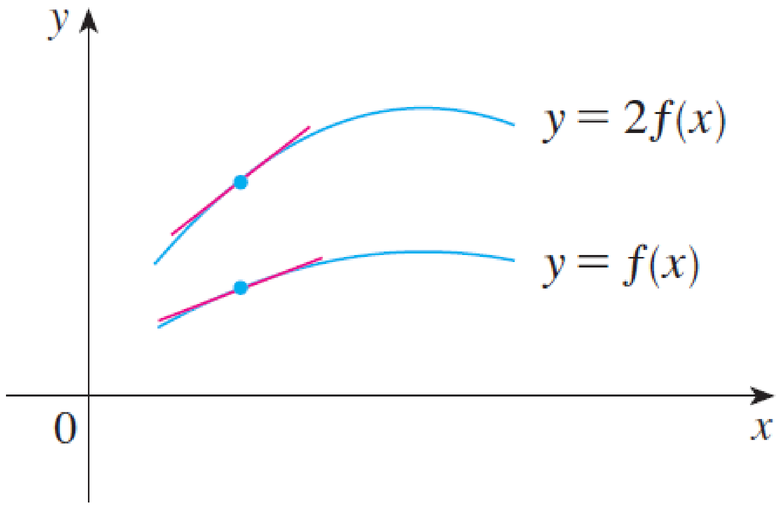
$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} c\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$$

$$= c\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{(por la ley 3 de los límites)}$$

$$= cf'(x)$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA
DE LA REGLA DEL MÚLTIPLO CONSTANTE



La multiplicación por $c = 2$ estira la gráfica verticalmente en un factor de 2. Todas las elevaciones se han duplicado, pero los avances permanecen iguales. Las pendientes también se duplican.

EJEMPLO 4

a) $\dfrac{d}{dx}(3x^4) = 3\dfrac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3$

b) $\dfrac{d}{dx}(-x) = \dfrac{d}{dx}[(-1)x] = (-1)\dfrac{d}{dx}(x) = -1(1) = -1$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Regla de la suma Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

DEMOSTRACIÓN Sea $F(x) = f(x) + g(x)$. Entonces

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \qquad \text{(por la ley 1)} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

La regla de la suma puede extenderse a la suma de cualquier número de funciones. Por ejemplo, si se aplica este teorema dos veces, se obtiene

$$(f + g + h)' = [(f + g) + h]' = (f + g)' + h' = f' + g' + h'$$

Al escribir $f - g$ como $f + (-1)g$ y aplicando la regla de la suma y la del múltiplo constante, se obtiene la siguiente fórmula.

Regla de la diferencia Si tanto f como g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

Las reglas de múltiplo constante, la suma y la diferencia pueden combinarse con la regla de la potencia para derivar cualquier función polinomial, como se muestra en los ejemplos que siguen.

EJEMPLO 5

$$\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$= 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0$$

$$= 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6$$

EJEMPLO Polinomio con seis términos

Diferencie $y = 4x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 9x^3 + 10x^2 - 13x + 6.$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{d}{dx}x^5 - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}x^4 + 9\frac{d}{dx}x^3 + 10\frac{d}{dx}x^2 - 13\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}6.$$

Puesto que $\frac{d}{dx}6 = 0$ obtenemos $\frac{dy}{dx} = 4(5x^4) - \frac{1}{2}(4x^3) + 9(3x^2) + 10(2x) - 13(1) + 0$

$$= 20x^4 - 2x^3 + 27x^2 + 20x - 13.$$

EJEMPLO Recta tangente

Encuentre una ecuación de una recta tangente a la gráfica $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 7x$ en el punto correspondiente a $x = -1$.

Solución Por la regla de la suma,

$$f'(x) = 3(4x^3) + 2(3x^2) - 7(1) = 12x^3 + 6x^2 - 7.$$

Cuando las f y f' se evalúan en el mismo número $x = -1$, obtenemos

$$f(-1) = 8 \qquad \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (-1, 8)$$

$$f'(-1) = -13. \qquad \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } (-1, 8) \text{ es } -13$$

Con la ecuación punto-pendiente obtenemos una ecuación de la recta tangente

$$y - 8 = -13(x - (-1)) \qquad \text{o bien,} \qquad y = -13x - 5.$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO Volver a escribir los términos de una función

Diferencie $y = 4\sqrt{x} + \dfrac{8}{x} - \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}} + 10.$

Solución Antes de diferenciar, los tres primeros términos se vuelven a escribir como potencias de x:

$$y = 4x^{1/2} + 8x^{-1} - 6x^{-1/3} + 10.$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{d}{dx}x^{1/2} + 8\frac{d}{dx}x^{-1} - 6\frac{d}{dx}x^{-1/3} + \frac{d}{dx}10.$$

Por la regla de potencias (3) y (4) obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 4 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} + 8 \cdot (-1)x^{-2} - 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3} + 0 \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{8}{x^2} + \frac{2}{x^{4/3}}.\end{aligned}$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

V EJEMPLO 6 Encuentre los puntos sobre la curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ donde la recta tangente es horizontal.

SOLUCIÓN Se tienen tangentes horizontales donde la derivada es cero. Observe que,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) - 6\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4)\\ &= 4x^3 - 12x + 0 = 4x(x^2 - 3)\end{aligned}$$

Así, $dy/dx = 0$ si $x = 0$ o $x^2 - 3 = 0$, es decir, $x = \pm\sqrt{3}$. Por tanto, la curva dada tiene rectas tangentes horizontales cuando $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$. Los puntos correspondientes son $(0, 4)$, $(\sqrt{3}, -5)$ y $(-\sqrt{3}, -5)$. (Véase la figura 5.)

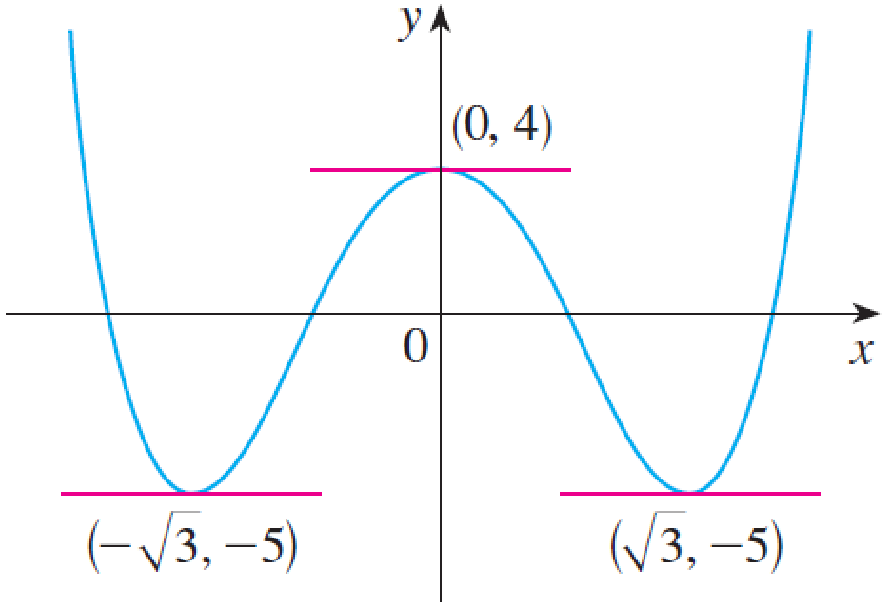


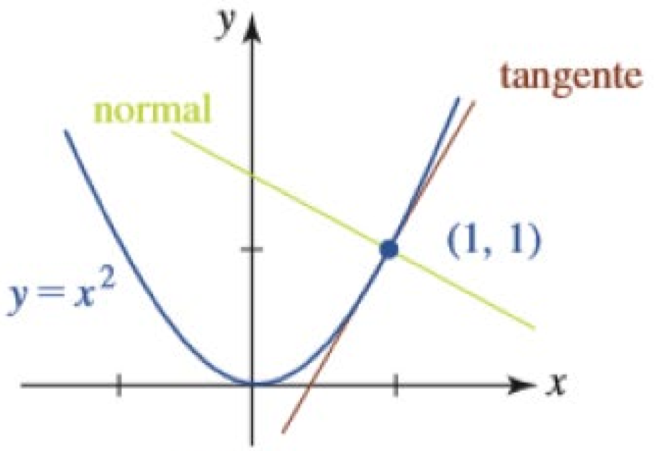
FIGURA 5
La curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ y sus rectas tangentes horizontales

EJEMPLO Ecuación de una recta normal

Encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = x^2$ en $x = 1$.

Solución Puesto que $dy/dx = 2x$, sabemos que $m_{\tan} = 2$ en $(1, 1)$. Por tanto, la pendiente de la recta normal que se muestra en verde en la FIGURA es el negativo recíproco de la pendiente de la recta tangente; es decir, $m = -\frac{1}{2}$. Por la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, entonces una ecuación de la recta normal es

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \quad \text{o bien,} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$



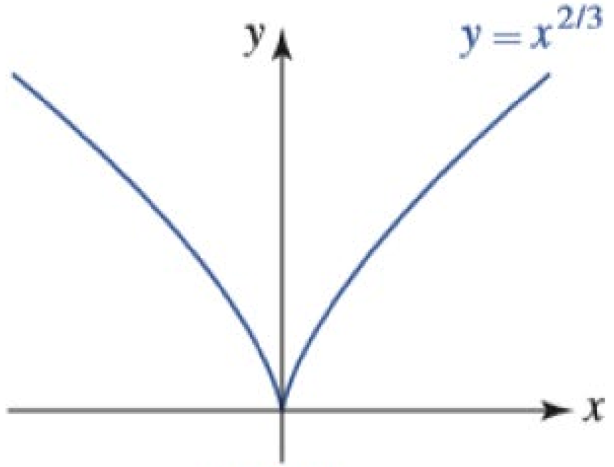
FIGURA

EJEMPLO Tangente vertical

Para la función potencia $f(x) = x^{2/3}$ la derivada es

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}.$$

Observe que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ mientras $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$. Puesto que f es continua en $x = 0$ y $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to 0$, concluimos que el eje y es una tangente vertical en (0, 0). Este hecho resulta evidente a partir de la gráfica en la FIGURA



FIGURA

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 7 La ecuación de movimiento de una partícula es $s = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Hallar la aceleración como una función del tiempo. ¿Cuál es la aceleración después de 2 segundos?

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

SOLUCIÓN La velocidad y la aceleración son

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 10t + 3$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t - 10$$

La aceleración después de 2 s es $a(2) = 14\,\text{cm/s}^2$.

Funciones exponenciales

Intente calcular la derivada de la función exponencial $f(x) = a^x$, aplicando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

El factor a^x no depende de h, de modo que puede llevarlo delante del límite:

$$f'(x) = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Observe que el límite es el valor de la derivada de f en 0; esto es,

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f'(0)$$

En consecuencia, ha demostrado que, si la función exponencial $f(x) = a^x$ es derivable en 0, entonces es derivable para cualquier x; así que

$$f'(x) = f'(0)a^x$$

En esta ecuación se afirma que *la razón de cambio de cualquier función exponencial es proporcional a la función misma.* (La pendiente es proporcional a la altura.)

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Definición del número e

$$e \text{ es el número tal que } \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Geométricamente, esto significa que, de todas las funciones exponenciales posibles $y = a^x$, la función $f(x) = e^x$ es aquella cuya recta tangente en $(0, 1)$ tiene pendiente $f'(0)$ que es exactamente 1. (Véanse las figuras 6 y 7.)

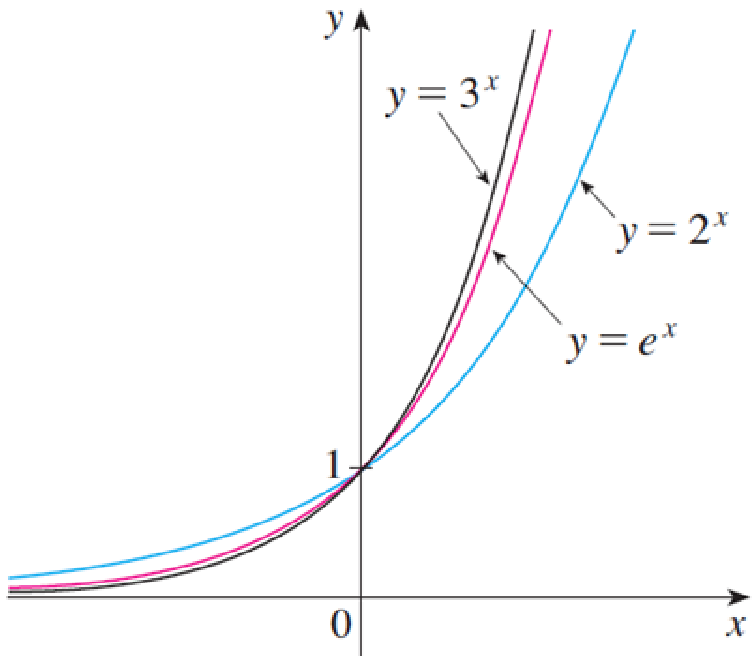


FIGURA 6

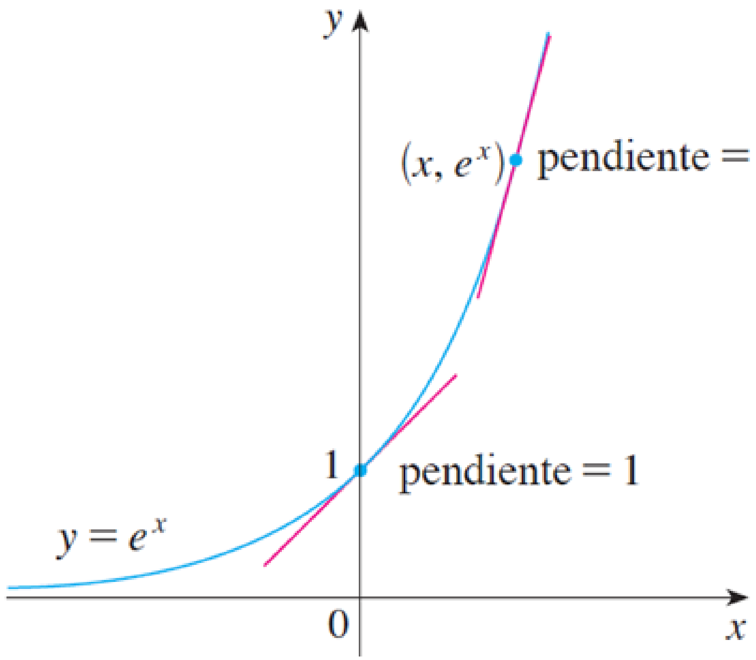


FIGURA 7

Si hacemos $a = e$ y, por tanto, $f'(0) = 1$ en la ecuación 4, se convierte en la importante fórmula de derivación que se proporciona a continuación.

Funciones exponenciales

1. $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

2. $\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

V EJEMPLO 8 Si $f(x) = e^x - x$, encuentre f' y f''. Compare las gráficas de f y f'.

SOLUCIÓN Si se aplica la regla de la diferencia, se tiene

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

En la sección 2.8 se define la segunda derivada como la derivada de f', así que

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(1) = e^x$$

La función f y su derivada f' se grafican en la figura 8. Observe que f tiene una recta tangente horizontal cuando $x = 0$; esto corresponde al hecho de que $f'(0) = 0$. Asimismo, observe que para $x > 0$, $f'(x)$ es positiva y f es creciente. Cuando $x < 0$, $f'(x)$ es negativa y f es decreciente.

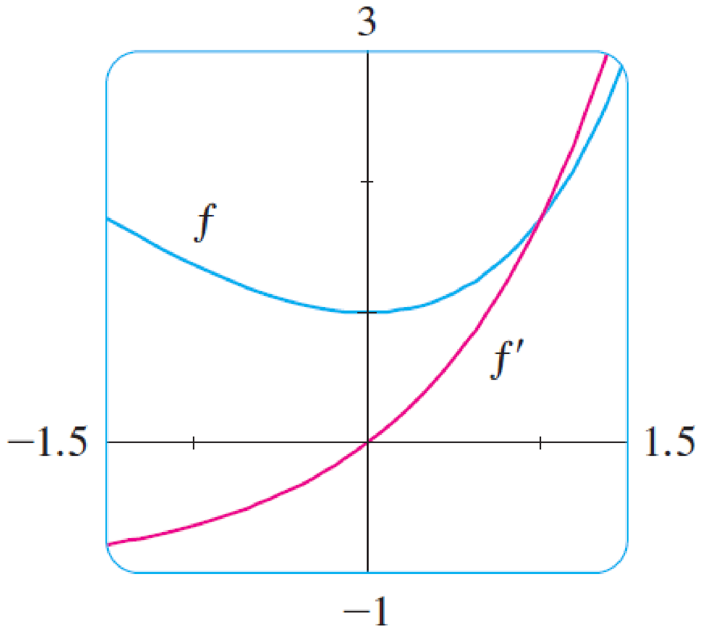


FIGURA 8

EJEMPLO 9 ¿En qué punto de la curva $y = e^x$ la recta tangente es paralela a la recta $y = 2x$?

SOLUCIÓN Puesto que $y = e^x$, tenemos $y' = e^x$. Sea a la coordenada x del punto en cuestión. Entonces, la pendiente de la recta tangente en ese punto es e^a. Esta recta tangente será paralela a la recta $y = 2x$ si tiene la misma pendiente; es decir, 2. Si se igualan las pendientes, se tiene

$$e^a = 2 \qquad\qquad a = \ln 2$$

Por tanto, el punto requerido es $(a, e^a) = (\ln 2, 2)$. (Véase la figura 9.)

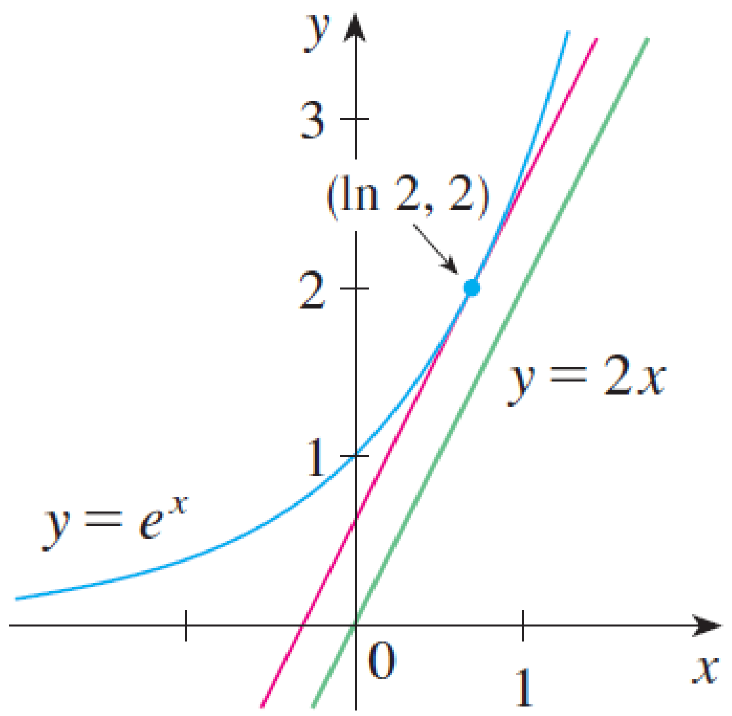


FIGURA 9

Ejercicios

3–32 Derive cada una de las funciones siguientes.

3. $f(x) = 186.5$

4. $f(x) = \sqrt{30}$

5. $f(x) = 5.2x + 2.3$

6. $g(x) = \frac{7}{4}x^2 - 3x + 12$

7. $f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 4t$

8. $f(t) = 1.4t^5 - 2.5t^2 + 6.7$

9. $g(x) = x^2(1 - 2x)$

10. $H(u) = (3u - 1)(u + 2)$

11. $y = x^{-2/5}$

12. $B(y) = ay^{-3}$

13. $F(r) = \dfrac{5}{r^3}$

14. $y = x^{5/3} - x^{2/3}$

15. $R(a) = (3a + 1)^2$

16. $h(t) = \sqrt[4]{t} - 4e^t$

17. $S(p) = \sqrt{p} - p$

18. $y = \sqrt[3]{x}(2 + x)$

19. $y = 3e^x + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$

20. $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$

21. $h(u) = Au^3 + Bu^2 + Cu$

22. $y = \dfrac{\sqrt{x} + x}{x^2}$

23. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

24. $G(t) = \sqrt{5t} + \dfrac{\sqrt{7}}{t}$

25. $j(x) = x^{2.4} + e^{2.4}$

26. $y = ae^v + \dfrac{b}{v} + \dfrac{c}{v^2}$

27. $G(q) = (1 + q^{-1})^2$

28. $F(z) = \dfrac{A + Bz + Cz^2}{z^2}$

29. $f(v) = \dfrac{\sqrt[3]{v} - 2ve^v}{v}$

30. $D(t) = \dfrac{1 + 16t^2}{(4t)^3}$

31. $z = \dfrac{A}{y^{10}} + Be^y$

32. $y = e^{x+1} + 1$

33–36 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las curvas siguientes en el punto dado.

33. $y = 2x^3 - x^2 + 2, \quad (1, 3)$

34. $y = 2e^x + x, \quad (0, 2)$

35. $y = x + \dfrac{2}{x}, \quad (2, 3)$

36. $y = \sqrt[4]{x} - x \quad (1, 0)$

37–38 Encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a cada una de las curvas siguientes en el punto dado.

37. $y = x^2 - x^4, \quad (1, 0)$

38. $y^2 = x^3, \quad (1, 1)$

49. La ecuación de movimiento de una partícula es $s = t^3 - 3t$, donde s está en metros y t en segundos. Encuentre

(a) la velocidad y la aceleración como funciones de t,

(b) la aceleración después de 2 s, y

(c) la aceleración cuando la velocidad es cero.

55. Encuentre los puntos sobre la curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ donde la recta tangente es horizontal.

56. ¿Para qué valores de x la gráfica de $f(x) = e^x - 2x$ tiene una recta tangente horizontal?

57. Demuestre que la curva $y = 2e^x + 3x + 5x^3$ no tiene una recta tangente cuya pendiente es 2.

58. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 + 1$ que es paralela a la recta $32x - y = 15$.

59. Encuentre las ecuaciones de ambas rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$ y paralela a la recta $3x - y = 15$.

61. Determine una ecuación de la recta normal a la curva $y = \sqrt{x}$ que es paralela a la recta $2x + y = 1$.

62. ¿Dónde la recta normal a la parábola $y = x^2 - 1$ en el punto $(-1, 0)$ interseca la parábola por segunda vez? Ilustre con un trazo de la gráfica.

66. Encuentre la n-ésima derivada de cada una de las funciones siguientes calculando algunas derivadas y observando el patrón de recurrencia.

(a) $f(x) = x^n$ (b) $f(x) = 1/x$

67. Encuentre un polinomio P de segundo grado tal que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$, y $P''(2) = 2$.

68. La ecuación $y'' + y' - 2y = x^2$ es una **ecuación diferencial** porque implica una función desconocida y y sus derivadas y' y y''. Encuentre las constantes A, B y C tales que la función $y = Ax^2 + Bx + C$ satisface esta ecuación. (Las ecuaciones diferenciales se estudiarán en detalle en el capítulo 9.)

69. Encuentre una ecuación cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya gráfica tiene rectas tangentes horizontales en los puntos $(-2, 6)$ y $(2, 0)$.

70. Encuentre una parábola con ecuación $y = ax^2 + bx + c$ que tiene pendiente 4 en $x = 1$, pendiente -8 en $x = -1$ y que pasa por el punto $(2, 15)$.

71. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x + 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

¿Es f derivable en 1? Trace las gráficas de f y f'.

72. ¿En qué números es derivable la función g siguiente?

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 2 - x & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Proporcione una fórmula para g' y trace las gráficas de g y g'.

75. Encuentre la parábola con ecuación $y = ax^2 + bx$ cuya recta tangente en (1, 1) tiene por ecuación $y = 3x - 2$.

76. Suponga que la curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene una recta tangente cuando $x = 0$ con ecuación $y = 2x + 1$ y una recta tangente cuando $x = 1$ con ecuación $y = 2 - 3x$. Encuentre los valores de a, b, c, y d.

77. ¿Para qué valores de a y b la recta $2x + y = b$ es tangente a la parábola $y = ax^2$ cuando $x = 2$?

78. Encuentre el valor de c tal que la recta $y = \frac{3}{2}x + 6$ es tangente a la curva $y = c\sqrt{x}$.

79. ¿Cuál es el valor de c tal que la recta $y = 2x + 3$ es tangente a la parábola $y = cx^2$?

80. La gráfica de cualquier función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola. Demuestre que el promedio de las pendientes de las rectas tangentes a la parábola en los puntos finales de cualquier intervalo $[p, q]$ es igual a la pendiente de la tangente en el punto medio del intervalo.

81. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ mx + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Encuentre los valores de m y b que hacen que f sea derivable para todas.

REFERENCIA

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín