Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

ENCUENTRO 8.1

Sección 3.3: Límites trigonométricos

Para calcular límites trigonométricos, se deben tener en cuenta los siguientes teoremas:

$$\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a \qquad \lim_{x \to a} \cos x = \cos a$$

$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{sen} x = r \in [-1,1]} \qquad \boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \cos x = r \in [-1,1]}$$

Además:

- Emplear las leyes de los límites
- Considerar que si las funciones trigonométricas son diferentes a senos y cosenos, conviene llevarlas a senos y cosenos.

Demostrar

$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0}$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\cos\theta - 1}{\theta} \cdot \frac{\cos\theta + 1}{\cos\theta + 1} \right) = \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos^2\theta - 1}{\theta(\cos\theta + 1)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2\theta}{\theta(\cos\theta + 1)} = -\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + 1} \right)$$

$$= -\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + 1}$$

$$= -1 \cdot \left(\frac{0}{1 + 1} \right) = 0$$

EJEMPLO 5 Determine $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{4x}$.

SOLUCIÓN Con objeto de aplicar la ecuación 2, primero vuelva a escribir la función para multiplicarla por 7 y dividirla entre 7:

$$\frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} = \frac{7}{4}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right)$$

Si considera $\theta = 7x$, entonces $\theta \to 0$, conforme $x \to 0$, de este modo, mediante la ecuación 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} = \frac{7}{4} \lim_{x \to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right)$$

$$= \frac{7}{4} \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = \frac{7}{4} \cdot 1 = \frac{7}{4}$$

V **EJEMPLO 6** Calcule $\lim_{x \to 0} x \cot x$.

SOLUCIÓN En este caso se divide tanto el numerador como el denominador entre x:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} x \cot x &= \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{\lim_{x \to 0} \cos x}{\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} \\
&= \frac{\cos 0}{1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Determinar cada uno de los límites indicados:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 8x}{5x}$

Para aplicar los teoremas indicados, se debe escribir la función multiplicándola por 8 y dividiéndola por 8.

$$\frac{\text{sen } 8x}{5x} = \frac{8(\text{sen } 8x)}{8(5x)} = \frac{8}{5}\left(\frac{\text{sen } 8x}{8x}\right)$$

Luego :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } 8x}{5x} = \frac{8}{5} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\text{sen } 8x}{8x}\right) = \frac{8}{5}(1) = \frac{8}{5}$$

$$2)\ \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 4x}{\text{sen} 7x}$$

Para aplicar los teoremas indicados, la función se puede escribir así:

$$\frac{\text{sen } 4x}{\text{sen} 7x} = \frac{\frac{4x \text{ sen } 4x}{4x}}{\frac{7x \text{ sen } 7x}{7x}} = \frac{4}{7}\left[\frac{\frac{\text{sen } 4x}{4x}}{\frac{\text{sen } 7x}{7x}}\right]$$

Luego :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 4x}{\text{sen} 7x} = \frac{4}{7} \lim_{x \to 0}\left[\frac{\frac{\text{sen } 4x}{4x}}{\frac{\text{sen } 7x}{7x}}\right] = \frac{4}{7}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{4}{7}$$

3) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\text{sen }\theta}{\theta+\tan\theta}$

La función se puede escribir así:

$$\frac{\text{sen }\theta}{\theta+\tan\theta} = \frac{\text{sen }\theta}{\theta+\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}} = \frac{\frac{\text{sen}\theta}{\theta}}{1+\left(\frac{\text{sen}\theta}{\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)}$$

Aplicando los teoremas y las leyes de los límites:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen }\theta}{\theta+\tan\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\frac{\text{sen}\theta}{\theta}}{1+\left(\frac{\text{sen}\theta}{\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)} = \frac{1}{1+(1)\left(\frac{1}{1}\right)} = \frac{1}{2}$$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x \text{ sen} 5x}{x^2}$

La función se puede escribir así:

$$\left(\frac{\text{sen } 3x}{x}\right)\left(\frac{\text{sen } 5x}{x}\right) = \left(\frac{3\text{sen } 3x}{3x}\right)\left(\frac{5\text{sen } 5x}{5x}\right) = 15\left(\frac{\text{sen } 3x}{3x}\right)\left(\frac{\text{sen } 5x}{5x}\right)$$

Luego:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x \text{ sen} 5x}{x^2} = \lim 15\left(\frac{\text{sen } 3x}{3x}\right)\left(\frac{\text{sen } 5x}{5x}\right) = 15(1)(1) = 15$$

5) Evaluar $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{x^2+x-2}$

Al sustituir x por 1 el resultado es: $\frac{\text{sen}0}{0} = \frac{0}{0}$.

Para eliminar la indeterminación , se hace lo siguiente:

$$\frac{\text{sen}(x-1)}{(x+2)(x-1)}$$

Luego el límite de la función se puede escribir como :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{x^2+x-2} = \lim_{u\to 0} \frac{\text{sen } u}{(u+3)(u)} = \lim_{u\to 0} \left(\frac{1}{u+3}\right)\left(\frac{\text{sen } u}{u}\right) = \left(\frac{1}{0+3}\right)(1) = \frac{1}{3}$$

39-48 Determine cada uno de los siguientes límites.

39. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

40. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} 6x}$

41. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\tan 6t}{\operatorname{sen} 2t}$

42. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\cos \theta - 1}{\operatorname{sen} \theta}$

43. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{5x^3 - 4x}$

44. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x}{x^2}$

45. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta + \tan \theta}$

46. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$

47. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{1 - \tan x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

48. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x - 1)}{x^2 + x - 2}$

52. a) Evalúe $\lim\limits_{x \to \infty} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

b) Evalúe $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

c) Ilustre los incisos a) y b) graficando $y = x \operatorname{sen}(1/x)$.

56. Evalúe $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t^3}{\tan^3(2t)}$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

REFERENCIA

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín