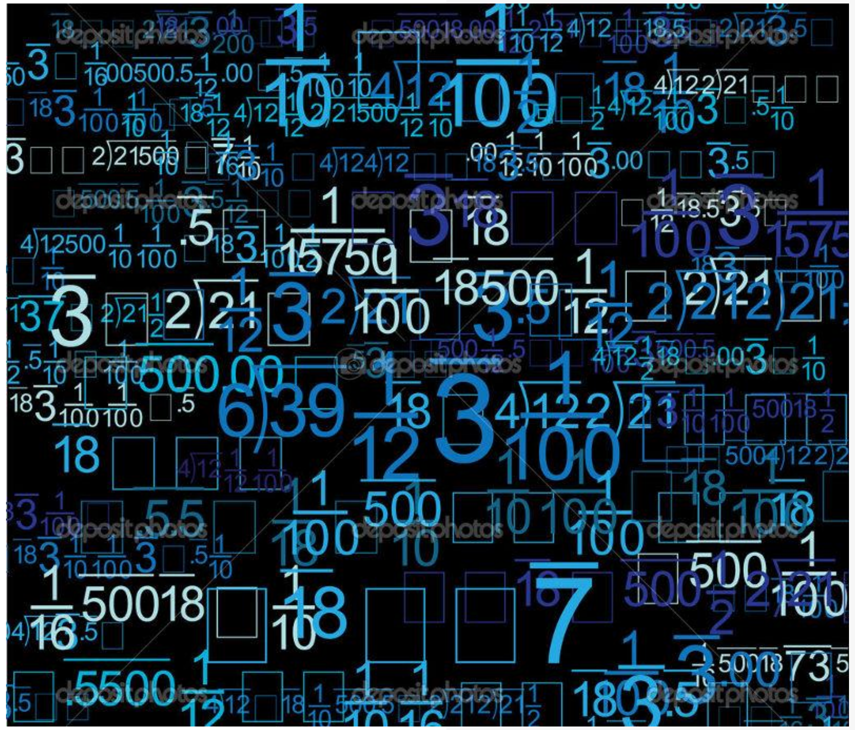
Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936



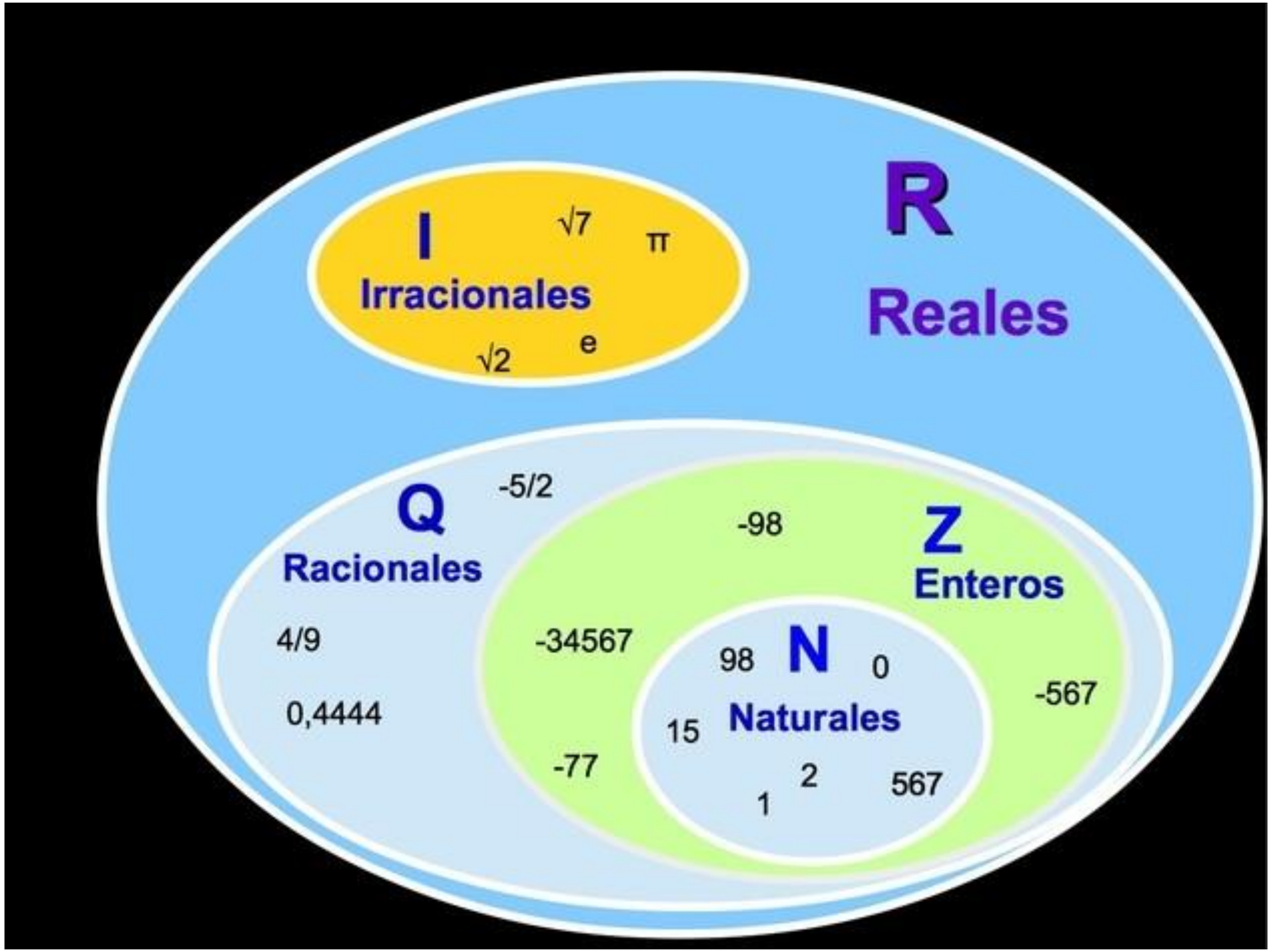
Sistemas Numéricos

Un sistema numérico es un método para tratar el concepto de «cuántos». Diferentes culturas han adoptado diversos métodos, que abarcan desde el básico, «uno, dos, tres, muchos», hasta la extremadamente sofisticada notación decimal posicional que usamos hoy en día.

Tomado de: Crilly, Tony. 50 cosas que hay que saber sobre matemáticas.

Fundada en 1936

Propiedades de los números reales ▶ Adición y sustracción ▶ Multiplicación y división ▶ La recta de números reales ▶ Conjuntos e intervalos ▶ Valor absoluto y distancia


I
√7
π
Irracionales
√2
e
R
Reales
Q
-5/2
Racionales
4/9
0,4444
-98
Z
Enteros
-34567
98
N
0
-567
15
Naturales
-77
2
567
1

Sistemas numéricos

- Los **números naturales** son: $1, 2, 3, 4, \ldots$ Representamos por $\mathbb{N}$ al conjunto de todos lo números naturales, es decir, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

- Los **números enteros** están formados por los números naturales junto con los números enteros negativos y el 0. Denotamos por $\mathbb{Z}$ al conjunto de los números enteros: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

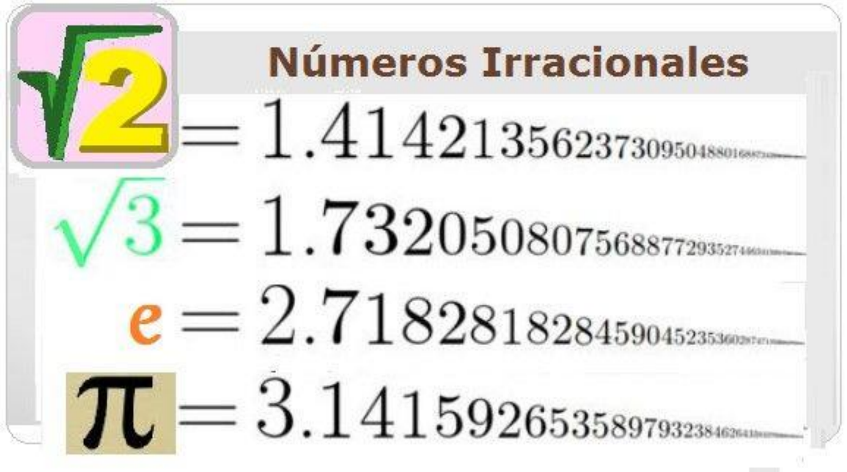
  Algunas veces, se acostumbra escribir $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$.

- El conjunto de los **números racionales** se obtiene al formar cocientes de números enteros. Este conjunto lo denotamos por $\mathbb{Q}$. Luego, $r \in \mathbb{Q}$ si y sólo si $r = \dfrac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

Números como $\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{-7}{4}$, $0 = \dfrac{0}{1}$, $2 = \dfrac{2}{1}$, $0.1 = \dfrac{1}{10}$ son ejemplos de números racionales.

¡Recuerde que no es posible dividir por cero, por tanto, expresiones como $\dfrac{3}{0}$ ó $\dfrac{0}{0}$ no están definidas!

- Existen números que no pueden expresarse en la forma $\dfrac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Estos números se denominan **irracionales**, denotados por $\mathbb{I}$. Es posible probar que números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, e, π pertenecen a $\mathbb{I}$.



- los números irracionales son números reales que no somos capaces de expresarlos en forma de fracción porque desconocemos tanto el numerador como el denominador

Número	En fracción	Es...
1,25	5/4	Racional
0,33333333333333...	1/3	Racional
2	8/4	Racional
1,4142135623... (√2)	¡No se puede!	Irracional
0,97	97/100	Racional
3,1415926535... (π)	¡No se puede!	Irracional
1,0909090909090909...	12/11	Racional

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

- El conjunto de lo **números reales** se representa por $\mathbb{R}$ y consta de la unión de los racionales y los irracionales, es decir, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números reales y el conjunto de puntos de una recta. De esta manera representamos al conjunto $\mathbb{R}$ mediante una recta geométrica.

  Todos los números reales tienen una **representación decimal**. Si el número es racional, entonces, su decimal correspondiente es periódico. Por ejemplo $\frac{1}{5} = 0.20000... = 0.2\overline{0}$, $\frac{1}{3} = 0.3333... = 0.\overline{3}$, $\frac{157}{495} = 0.3171717... = 0.3\overline{17}$, $\frac{595}{123} = 4.8373983739... = 4.\overline{83739}$.

  La barra significa que la sucesión de cifras se repite indefinidamente. Si el número es irracional, la representación decimal no es periódica, por ejemplo

$$\sqrt{2} = 1.414213562373..., \; e = 2.7182818284590452....$$

  En la práctica, se acostumbra aproximar un número irracional por medio de uno racional, por ejemplo

$$\sqrt{2} \approx 1.4142, \; e \approx 2.71828, \; \pi \approx 3.1416.$$

PREGUNTA:

Dada la representación decimal periódica de un número, ¿Cómo hallamos la fracción equivalente?

Exprese cada uno de los decimales periódicos en forma de fracción:

a) $3.\overline{13}$

b) $2.\overline{39}$

c) $4.\overline{145}$

Un número decimal periódico como

$$x = 3.5474747\ldots$$

es un número racional. Para convertirlo a una razón entre dos enteros, escribimos

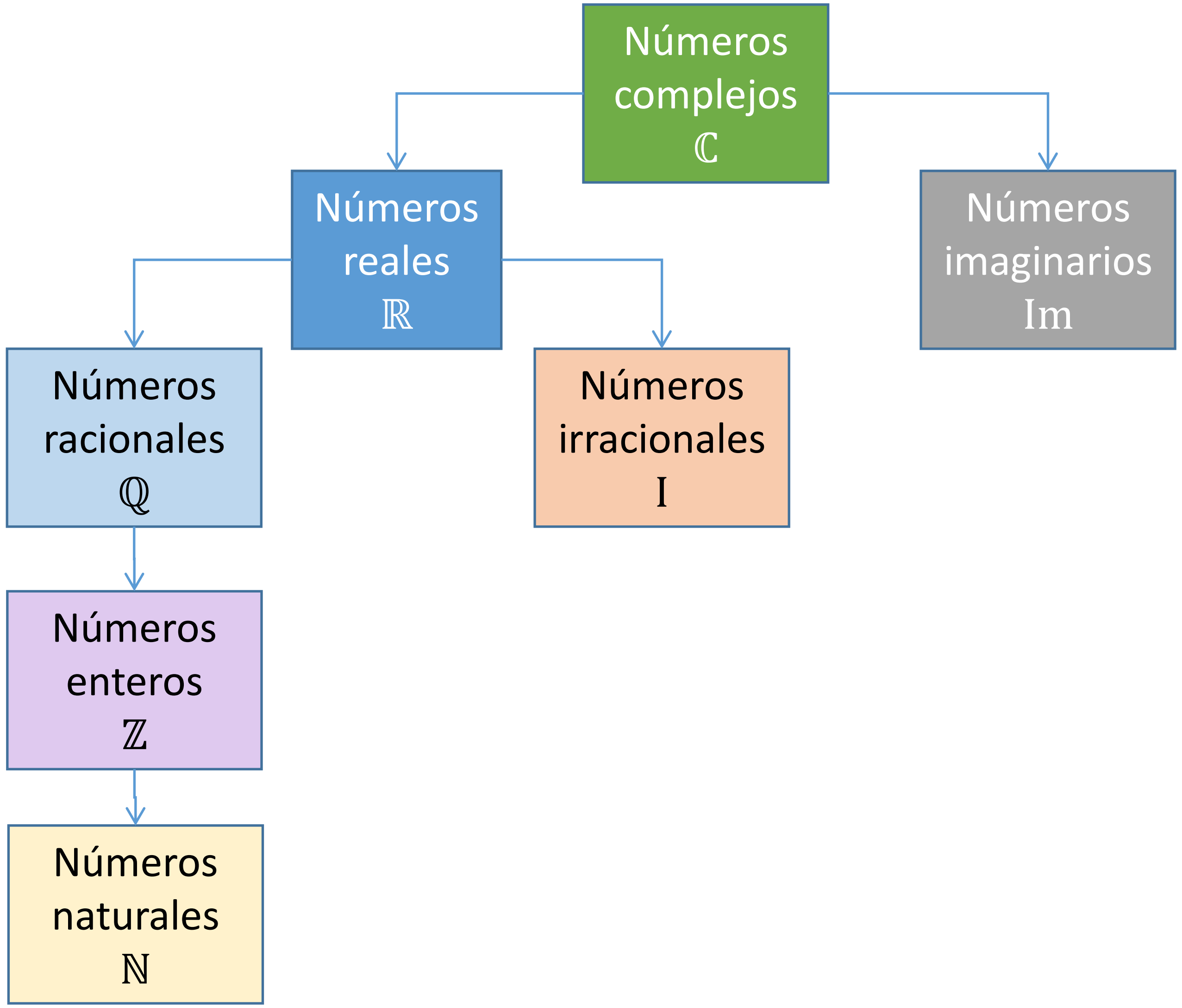
$$\begin{aligned} 1000x &= 3547.47474747\ldots \\ 10x &= 35.47474747\ldots \\ \hline 990x &= 3512.0 \end{aligned}$$

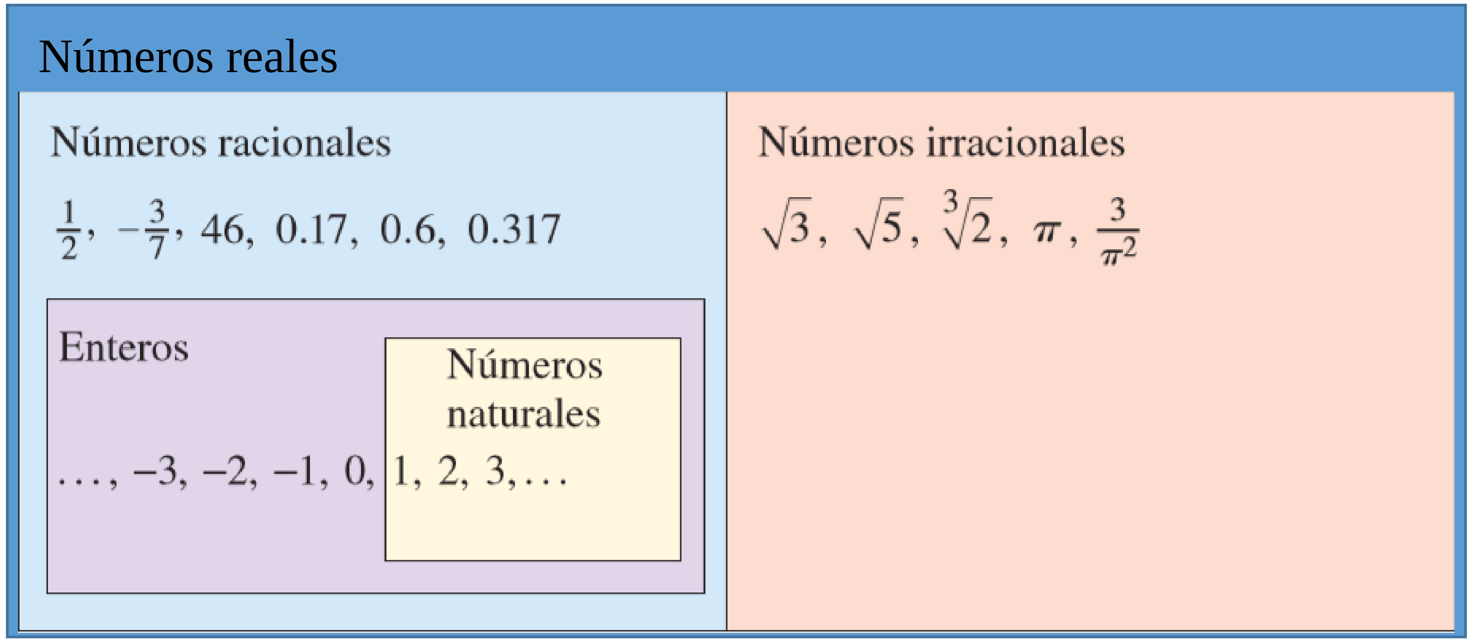
Por tanto, $x = \frac{3512}{990}$. La idea es multiplicar x por las potencias apropiadas de 10 y luego restar para eliminar la parte periódica.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Para la matemática, cobra un especial sentido los conjuntos numéricos.
El siguiente esquema resume la relación de los conjuntos numéricos





Pregunta:

¿Qué es un número imaginario?

Los **números imaginarios** son definidos como la raíz cuadrada de **números** negativos y no tienen un valor tangible. En otras palabras, Un **número imaginario** es un **número** que, al ser elevado al cuadrado, tiene un resultado negativo.

¿Cómo se representa?

$$i = \sqrt{-1}$$

Pregunta:

¿Qué es un número complejo?

Los números complejos son los números que son expresados en la forma *a+bi*, en donde *a* y *b* son números reales e "*i*" es la unidad imaginaria.

¿Cómo se representa?

$$\underbrace{a}_{\text{Real part}}+\underbrace{bi}_{\text{Imaginary part}}$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Propiedades	Ejemplo	Descripción
Conmutativas		
$a + b = b + a$	$7 + 3 = 3 + 7$	Cuando sumamos dos números, el orden no importa.
$ab = ba$	$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$	Cuando multiplicamos dos números, el orden no importa.
Asociativas		
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(2 + 4) + 7 = 2 + (4 + 7)$	Cuando sumamos tres números, no importa cuáles dos de ellos sumamos primero.
$(ab)c = a(bc)$	$(3 \cdot 7) \cdot 5 = 3 \cdot (7 \cdot 5)$	Cuando multiplicamos tres números, no importa cuáles dos de ellos multiplicamos primero.
Distributivas		
$a(b + c) = ab + ac$ $(b + c)a = ab + ac$	$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$ $(3 + 5) \cdot 2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$	Cuando multiplicamos un número por una suma de dos números, obtenemos el mismo resultado si multiplicamos el número por cada uno de los términos y luego sumamos los resultados.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO 1 | Uso de la Propiedad Distributiva

(a) $2(x+3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3$ Propiedad Distributiva

$= 2x + 6$ Simplifique

(b) $\overbrace{(a+b)}(x+y) = (a+b)x + (a+b)y$ Propiedad Distributiva

$= (ax + bx) + (ay + by)$ Propiedad Distributiva

$= ax + bx + ay + by$ Propiedad Asociativa de la Adición

En el último paso eliminamos el paréntesis porque, de acuerdo con la Propiedad Asociativa, no importa el orden de la adición.

PROPIEDADES DE NEGATIVOS

Propiedad	Ejemplo
1. $(-1)a = -a$	$(-1)5 = -5$
2. $-(-a) = a$	$-(-5) = 5$
3. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$	$(-5)7 = 5(-7) = -(5 \cdot 7)$
4. $(-a)(-b) = ab$	$(-4)(-3) = 4 \cdot 3$
5. $-(a + b) = -a - b$	$-(3 + 5) = -3 - 5$
6. $-(a - b) = b - a$	$-(5 - 8) = 8 - 5$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO 2 | Uso de las propiedades de los negativos

Sea x, y y z números reales.

(a) $-(x + 2) = -x - 2$ Propiedad 5: $-(a + b) = -a - b$

(b) $-(x + y - z) = -x - y - (-z)$ Propiedad 5: $-(a + b) = -a - b$

$= -x - y + z$ Propiedad 2: $-(-a) = a$

PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$	Para **multiplicar fracciones**, multiplique numeradores y denominadores.
2. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$	$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$	Para **dividir fracciones**, multiplique por el recíproco del divisor.
3. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$	$\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{2 + 7}{5} = \frac{9}{5}$	Para **sumar fracciones** con el mismo denominador, **sume los numeradores**.
4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$	$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \frac{29}{35}$	Para **sumar fracciones** con **denominadores diferentes**, encuentre un común denominador y a continuación sume los numeradores.
5. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$	$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$	**Cancele** números que sean **factores comunes** en numerador y denominador.
6. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$	$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, así que $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$	**Multiplicación cruzada**.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

El Máximo Común Divisor (MCD)

El máximo común divisor de dos números puede calcularse determinando la descomposición en factores primos de los dos números y tomando los factores comunes elevados a la menor potencia, el producto de los cuales será el mcd.

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$48 = 2^4 \cdot 3 \qquad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

El MCD son los factores comunes con su menor exponente, esto es:

$$\mathrm{mcd}(48, 60) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

El Mínimo Común Multiplo (MCM)

- El mínimo común múltiplo (abreviado m.c.m), de dos o más números naturales es el menor número natural que es múltiplo de todos ellos.
- su mínimo común múltiplo será el resultado de multiplicar los factores comunes y no comunes elevados a la mayor potencia

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 \qquad 50 = 2 \cdot 5^2$$

Tomando los factores comunes y no comunes con su mayor exponente, tenemos que:

$$\mathrm{mcm}(72, 50) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO 3 | Uso del MCM para sumar fracciones

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Evalúe: $\dfrac{5}{36} + \dfrac{7}{120}$

SOLUCIÓN La factorización de cada denominador en factores primos dará

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad \text{y} \qquad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Entonces el MCM es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Entonces,

$$\frac{5}{36} + \frac{7}{120} = \frac{5 \cdot 10}{36 \cdot 10} + \frac{7 \cdot 3}{120 \cdot 3} \qquad \text{Use común denominador}$$

$$= \frac{50}{360} + \frac{21}{360} = \frac{71}{360} \qquad \text{Propiedad 3: Suma de fracciones con el mismo denominador}$$

La recta real

Los números reales pueden ser representados por puntos sobre una recta, como se muestra en la Figura 3. La dirección positiva (hacia la derecha) está indicada por una flecha. Escogemos un punto de referencia arbitrario O, llamado el **origen**, que corresponde al número real 0. Dada cualquier unidad de medida conveniente, cada número positivo x está representado por el punto sobre la recta a una distancia de x unidades a la derecha del origen, y cada número negativo $-x$ está representado por el punto a x unidades a la izquierda del origen. El número asociado con el punto P se llama coordenada de P y la recta se llama **recta coordenada**, o **recta de los números reales**, o simplemente **recta real.** A veces identificamos el punto con su coordenada y consideramos que un número es un punto sobre la recta real.

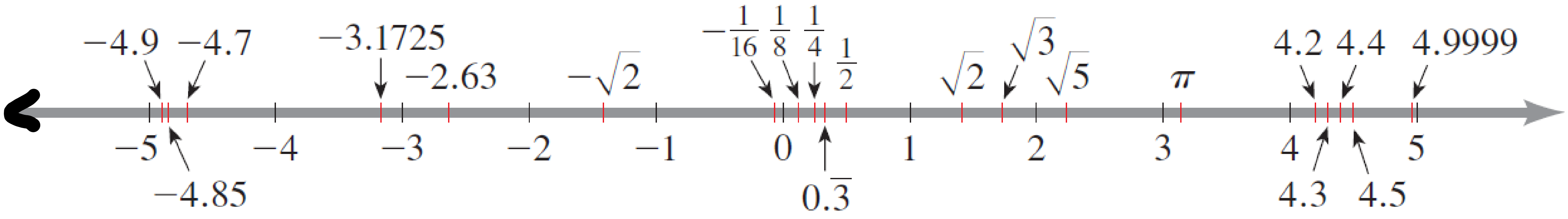


FIGURA 3 La recta real

Los números reales son *ordenados*. Decimos que ***a* es menor que *b*** y escribimos $a < b$ si $b - a$ es un número positivo. Geométricamente, esto significa que a está a la izquierda de b en la recta numérica, o bien, lo que es lo mismo, podemos decir que ***b* es mayor que *a*** y escribimos $b > a$. El símbolo $a \le b$ (o $b \ge a$) quiere decir que $a < b$ o que $a = b$ y se lee "a es menor o igual a b". Por ejemplo, las siguientes son desigualdades verdaderas (vea Figura 4):

$$7 < 7.4 < 7.5 \qquad -\pi < -3 \qquad \sqrt{2} < 2 \qquad 2 \le 2$$

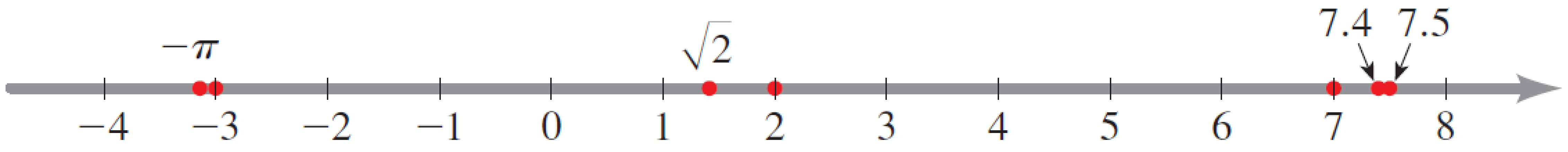


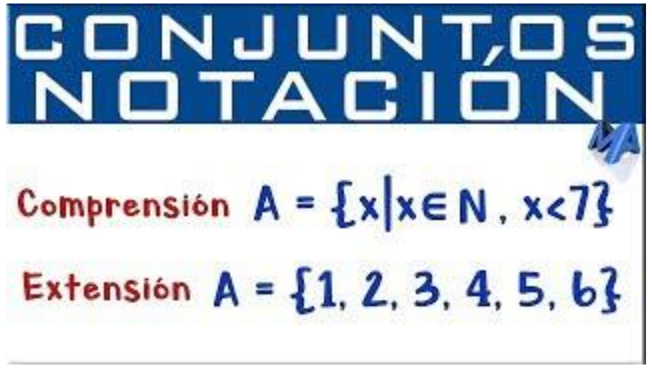
FIGURA 4

NOCIONES SOBRE CONJUNTOS

Un conjunto es una colección de objetos, llamados elementos del conjunto.

Un conjunto puede describirse:

- Por extensión: haciendo una lista explícita de sus elementos, separados por comas y encerrados entre llaves, o
- Por comprensión: dando la condición o condiciones que cumplen los elementos del conjunto.



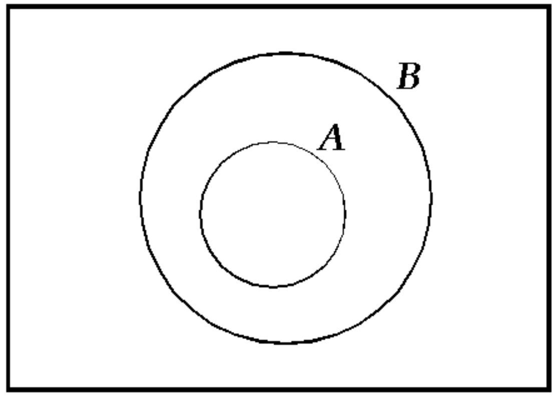
Si A es un conjunto, decimos que a **pertenece a** A y escribimos $a \in A$ si a es un elemento de A. En caso contrario decimos que a **no pertenece a** A y escribimos $a \notin A$.

Si un conjunto no tiene elementos se llama conjunto vacío y se denota por:

$$\emptyset = \{ \ \}$$

Conjunto vacio

Si A y B son conjuntos, decimos que A es subconjunto de B y escribimos $A \subseteq B$ si todo elemento de A es también elemento de B.



$$A \subseteq B$$

$A = \{ 2,4,6,8 \}$

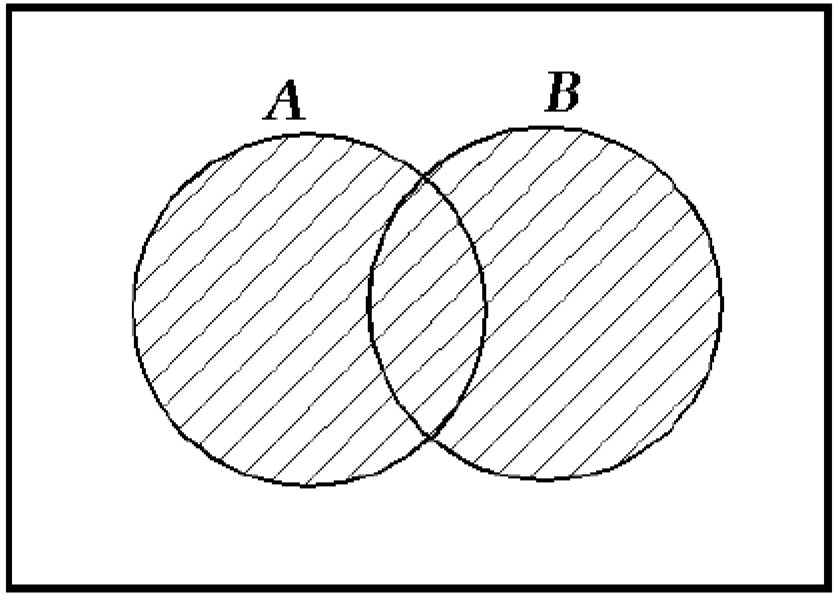
$B = \{ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \}$

Operaciones entre conjuntos

1. Unión

Sean A y B dos conjuntos. Definimos la **unión de A y B**, denotada por $A \cup B$, como el conjunto

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

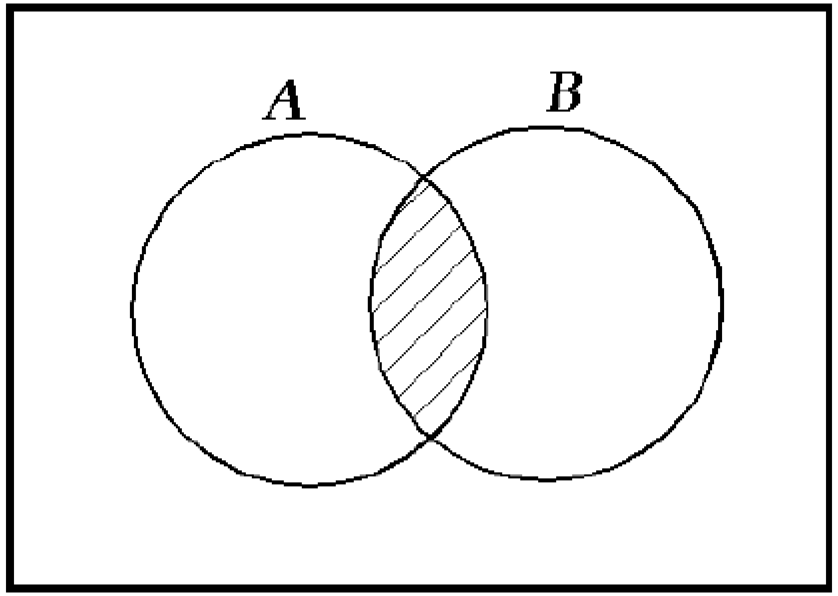


$A \cup B$

2. Intersección

Sean A y B dos conjuntos. Definimos la **intersección de** A **y** B, denotada por $A \cap B$, como el conjunto

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

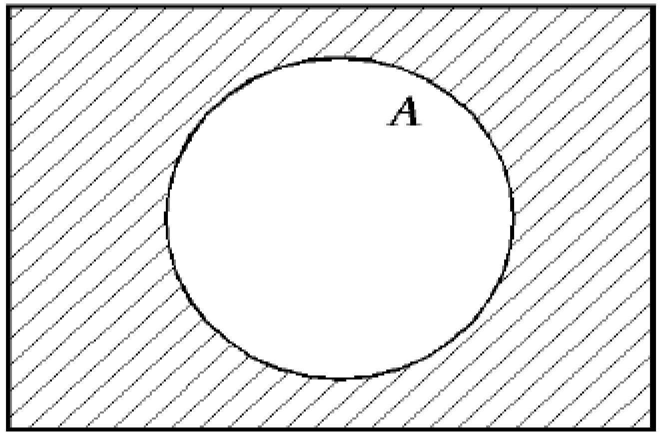


$A \cap B$

3. Complemento

Si U es un conjunto universal y A es un subconjunto de U, definimos el **complemento de** A, denotado por A', como el conjunto

$$A' = \{x \in U / x \notin A\}.$$

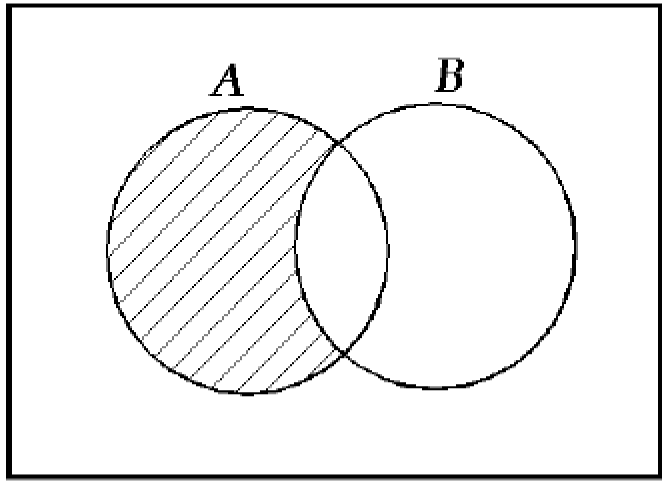


A'

4. Diferencia

Sean A y B dos conjuntos. Definimos la **diferencia de** A **y** B, denotada por $A - B$, como

$$A - B = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

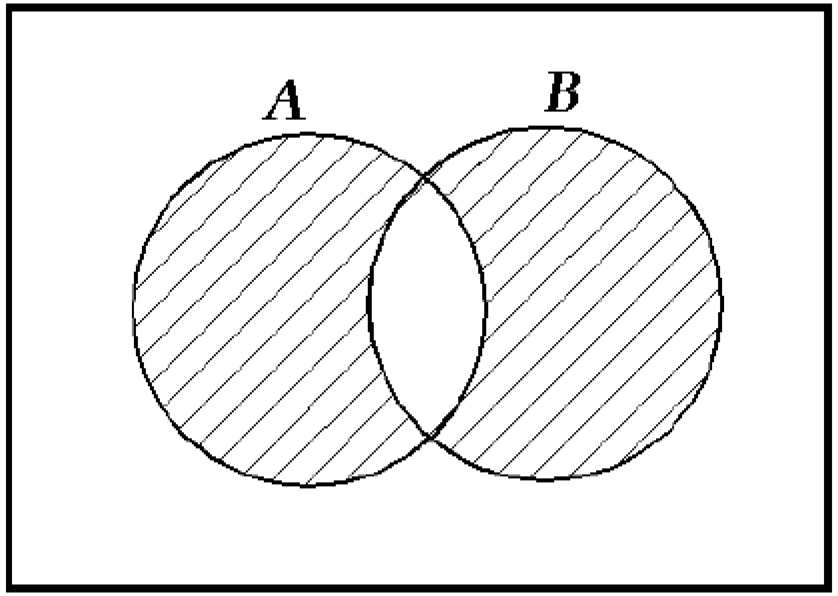


$A - B$

5. Diferencia simétrica

La **diferencia simétrica** de dos conjuntos A y B es otro conjunto $A \,\Delta\, B$ cuyos elementos son todos los elementos de A o B, a excepción de los elementos comunes a ambos:

> $x \in A \,\Delta\, B$ si y sólo si, o bien $x \in A$ o bien $x \in B$



EJEMPLO 4 | Unión e intersección de conjuntos

Si $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{4, 5, 6, 7\}$, y $V = \{6, 7, 8\}$, encuentre los conjuntos $S \cup T$, $S \cap T$ y $S \cap V$.

SOLUCIÓN

$S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ Todos los elementos en S o T

$S \cap T = \{4, 5\}$ Elementos comunes a S y T

$S \cap V = \varnothing$ S y V no tienen elementos en común

Ejercicio:

Encontrar: S – T, T Δ V

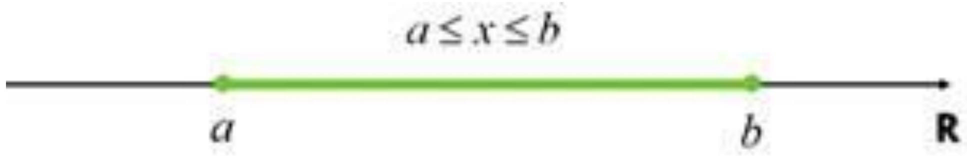
Intervalos

El intervalo, en matemáticas, es un subconjunto de **números reales** que se encuentran entre dos valores que delimitan un extremo inferior y/u otro superior.

Sean a y $b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.

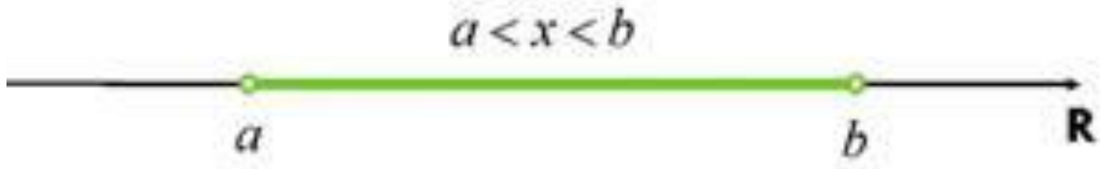
- ***Cerrados*: ** Cuando sus extremos sí pertenecen al subconjunto. Se representan como $[a, b]$
- Y comprende todos los números reales x que cumplen con:

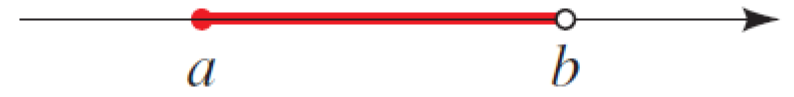
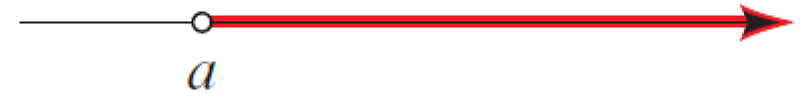
$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b, \quad x \in \mathbf{R}\}$$



- ***Abiertos*: ** Cuando sus extremos no pertenecen al subconjunto. Se representan como (a, b)
- Y comprende todos los números reales x que cumplen con:

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b, \quad x \in \mathbf{R}\}$$



Notación	Descripción de conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

45-50 ■ Exprese el intervalo en términos de desigualdades y, a continuación, grafique el intervalo.

45. $(-3, 0)$

46. $(2, 8]$

47. $[2, 8)$

48. $[-6, -\frac{1}{2}]$

49. $[2, \infty)$

50. $(-\infty, 1)$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

51-56 ■ Exprese la desigualdad en notación de intervalos y, a continuación, grafique el intervalo correspondiente.

51. $x \leq 1$

52. $1 \leq x \leq 2$

53. $-2 < x \leq 1$

54. $x \geq -5$

55. $x > -1$

56. $-5 < x < 2$

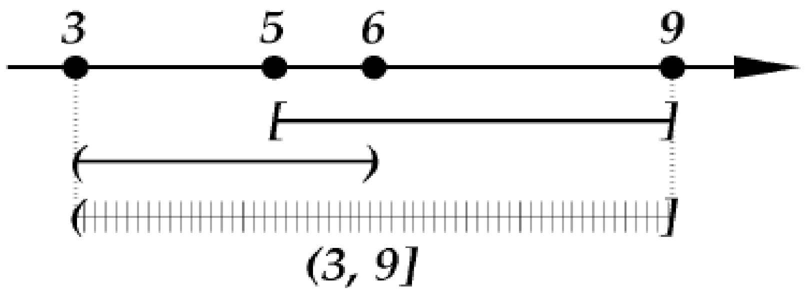
Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Como los intervalos son conjuntos podemos realizar entre ellos las operaciones entre conjuntos

Ejemplo: [5,9] U (3,6)

$$\{x/5 \leq x \leq 9\} \cup \{x/3 < x < 6\} = \{x/3 < x \leqslant 9\}.$$



EJEMPLO 6 | Hallar uniones e intersecciones de intervalos

Grafique cada conjunto.

(a) $(1, 3) \cap [2, 7]$ **(b)** $(1, 3) \cup [2, 7]$

Valor absoluto y distancia

El **valor absoluto** de un número a, denotado por $|a|$, es la distancia de a a 0 en la recta de números reales (vea Figura 9). La distancia es siempre positiva o cero, de modo que tenemos $|a| \geq 0$ para todo número a. Recordando que $-a$ es positivo cuando a es negativo, tenemos la siguiente definición.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

DEFINICIÓN DE VALOR ABSOLUTO

Si a es un número real, entonces el **valor absoluto** de a es

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

a) $|8| = 8$

b) $|-7| = -(-7) = 7$

c) $|0| = 0$

- $|3 - e| = 3 - e$ (ya que $e < 3 \implies 3 - e > 0$).
- $|2 - \pi| = -(2 - \pi) = \pi - 2$ (ya que $2 < \pi \implies 2 - \pi < 0$).

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\lvert a \rvert \geq 0$	$\lvert -3 \rvert = 3 \geq 0$	El valor absoluto de un número siempre es positivo o cero.
2. $\lvert a \rvert = \lvert -a \rvert$	$\lvert 5 \rvert = \lvert -5 \rvert$	Un número y su negativo tienen el mismo valor absoluto.
3. $\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \lvert b \rvert$	$\lvert -2 \cdot 5 \rvert = \lvert -2 \rvert \lvert 5 \rvert$	El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.
4. $\left\lvert \dfrac{a}{b} \right\rvert = \dfrac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$	$\left\lvert \dfrac{12}{-3} \right\rvert = \dfrac{\lvert 12 \rvert}{\lvert -3 \rvert}$	El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

65-70 ■ Evalúe cada expresión.

65. (a) $|100|$ (b) $|-73|$

66. (a) $|\sqrt{5}-5|$ (b) $|10-\pi|$

67. (a) $||-6|-|-4||$ (b) $\dfrac{-1}{|-1|}$

68. (a) $|2-|-12||$ (b) $-1-|1-|-1||$

69. (a) $|(-2)\cdot 6|$ (b) $|(-\frac{1}{3})(-15)|$

70. (a) $\left|\dfrac{-6}{24}\right|$ (b) $\left|\dfrac{7-12}{12-7}\right|$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

DISTANCIA ENTRE PUNTOS SOBRE LA RECTA REAL

Si a y b son números reales, entonces la **distancia** entre los puntos a y b sobre la recta real es

$$d(a, b) = |b - a|$$

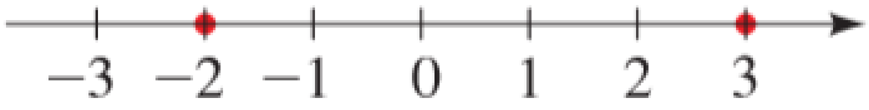
De la Propiedad 6 de negativos se deduce que

$$|b - a| = |a - b|$$

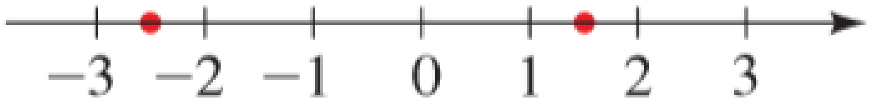
Esto confirma que, como es de esperarse, la distancia de a a b es la misma distancia de b a a.

71-74 ■ Encuentre la distancia entre los números dados.

71.



72.



73. **(a)** 2 y 17 **(b)** -3 y 21 **(c)** $\frac{11}{8}$ y $-\frac{3}{10}$

74. **(a)** $\frac{7}{15}$ y $-\frac{1}{21}$ **(b)** -38 y -57 **(c)** -2.6 y -1.8

REFERENCIA

Stewart, J., Precálculo Matemáticas para el Cálculo, Cengage Learning, séptima edición.

Referencia en línea

http://www.ebooks7-24.com.consultaremota.upb.edu.co/stage.aspx?il


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín