Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

ENCUENTRO 13.2

Sección 3.9: Razones relacionadas

Razones relacionadas

Si estamos inflando un globo, tanto su volumen como su radio se incrementan, y sus razones de incremento están relacionadas entre sí. Pero es mucho más fácil medir de modo directo la rapidez de aumento de volumen que la rapidez de crecimiento del radio.

En un problema de razones de cambio relacionadas, la idea es calcular la razón de cambio de una cantidad en términos de la razón de cambio de otra cantidad (la cual podría medirse con más facilidad). El procedimiento es determinar una ecuación que relacione las dos cantidades y aplicar la regla de la cadena para derivar ambos miembros respecto al tiempo.

Estrategia de resolución de problemas Es útil recordar algunos de los principios para resolver problemas que se encuentran en la página 75 y adaptarlos a las razones de cambio relacionadas:

1. Lea con cuidado el problema.
2. Si es posible, dibuje un diagrama.
3. Introduzca la notación. Asigne símbolos a todas las cantidades que están en función del tiempo.
4. Exprese la información dada y la razón requerida en términos de derivadas.
5. Escriba una ecuación que relacione las diferentes cantidades del problema. Si es necesario, utilice las propiedades geométricas de la situación para eliminar una de las variables por sustitución.
6. Utilice la regla de la cadena para derivar respecto a t ambos miembros de la ecuación.
7. Sustituya la información dada en la ecuación resultante y resuelva para la razón de cambio desconocida.

V **EJEMPLO 1** Se infla un globo esférico y su volumen crece a razón de $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. ¿Qué tan rápido aumenta el radio del globo cuando el diámetro es de 50 cm?

SOLUCIÓN Empezamos por identificar dos aspectos:

la *información dada:*

la razón de incremento del volumen del globo es $100 \text{ cm}^3/\text{s}$

y *lo que se desconoce:*

la rapidez de incremento del radio cuando el diámetro es 50 cm

Con objeto de expresar estas cantidades en forma matemática, introduzca una *notación* sugerente:

sea V el volumen del globo y r su radio.

La clave que se debe tener presente es que las razones de cambio son derivadas. En este problema, tanto el volumen como el radio son funciones del tiempo t. La rapidez de incremento del volumen respecto al tiempo es la derivada dV/dt, y la rapidez del incremento del radio es dr/dt. Por tanto, replantee lo que conoce y lo que desconoce de la manera siguiente:

$$\textit{Conocido:} \qquad \frac{dV}{dt} = 100 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$\textit{Desconocido:} \qquad \frac{dr}{dt} \quad \text{cuando } r = 25 \text{ cm}$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Con objeto de relacionar dV/dt y dr/dt, primero relacionamos V y r mediante la fórmula del volumen de una esfera:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

A fin de utilizar la información dada, derive respecto a t a ambos miembros de la ecuación. Para derivar el lado derecho necesita aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Ahora resuelva para la cantidad desconocida:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

Si sustituimos $r = 25$ y $dV/dt = 100$ en esta ecuación, obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(25)^2}100 = \frac{1}{25\pi}$$

El radio del globo se incrementa a razón de $1/(25\pi) \approx 0.0127\,\mathrm{cm/s}$.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO 2 Una escalera de 10 pies de largo está apoyada contra un muro vertical. Si la parte inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared a razón de 1 pie/s, ¿qué tan rápido la parte superior de la escalera resbala hacia abajo por la pared cuando la parte inferior de la escalera está a 6 pies del muro?

SOLUCIÓN Primero dibuje un esquema y ponga los datos como se muestra en la figura 1. Sea x pies la distancia desde la parte inferior de la escalera al muro y y pies la distancia desde la parte superior de la escalera al piso. Observe que x y y son funciones del tiempo t (medido en segundos).

Sabemos que $dx/dt = 1$ pie/s, y se pide determinar dy/dt cuando $x = 6$ pies (véase figura 2). En este problema, la relación entre x y y la define el teorema de pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 100$$

Al derivar con respecto a t ambos miembros aplicando la regla de la cadena tenemos

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

y al resolver esta ecuación para determinar la rapidez deseada, obtenemos

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Cuando $x = 6$, el teorema de Pitágoras da $y = 8$ y al sustituir estos valores y $dx/dt = 1$, llegamos a

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{6}{8}(1) = -\frac{3}{4} \text{ pies/s}$$

El hecho de que dy/dt sea negativa quiere decir que la distancia desde la parte superior de la escalera al suelo está *decreciendo* a razón de $\frac{3}{4}$ pies/s. En otras palabras, la parte superior de la escalera se resbala hacia abajo de la pared a razón de $\frac{3}{4}$ pies/s.

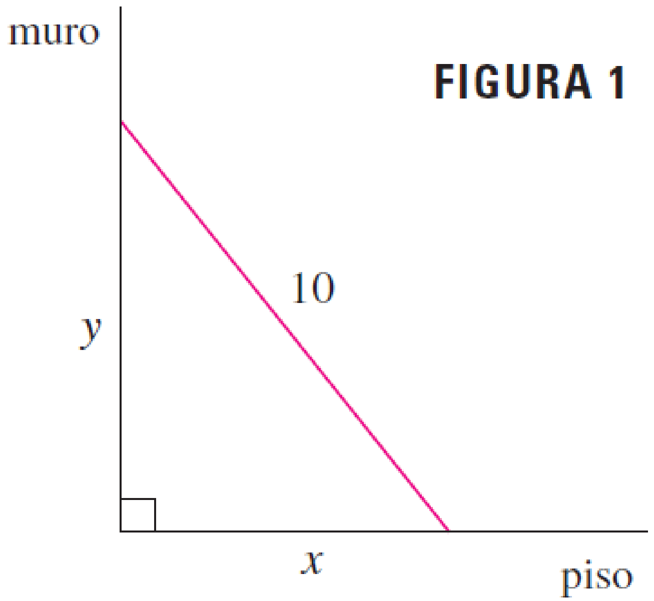


FIGURA 1

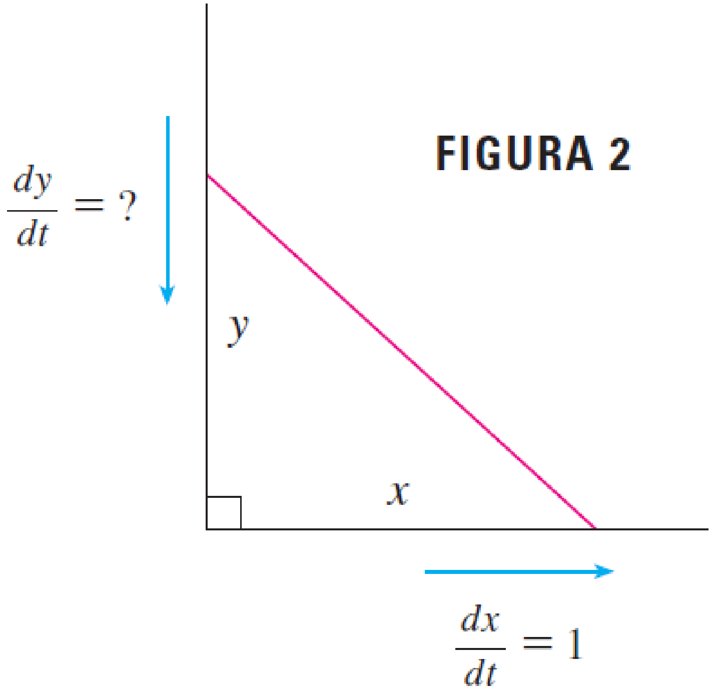


FIGURA 2

EJEMPLO 3 Un depósito para agua tiene la forma de un cono circular invertido; el radio de la base es de 2 m, y la altura es de 4 m. Si el agua se bombea hacia el depósito a razón de $2\,\text{m}^3/\text{min}$, determine la rapidez a la cual el nivel del agua sube cuando el agua tiene 3 m de profundidad.

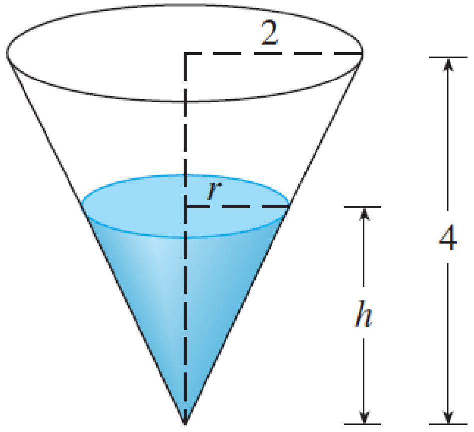


FIGURA 3

SOLUCIÓN Primero elabore un diagrama del cono y denote la información como en la figura 3. Sean V, r y h el volumen del agua, el radio de la superficie circular y la altura en el tiempo t, respectivamente, donde t se mide en minutos.

Sabemos que $dV/dt = 2\,\text{m}^3/\text{min}$, y se nos pide determinar dh/dt cuando h es 3 m. Las cantidades V y h se relacionan mediante la ecuación

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

pero es muy útil expresar V sólo en función de h. Con objeto de eliminar r, recurra a los triángulos semejantes en la figura 3 para escribir

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \qquad r = \frac{h}{2}$$

y la expresión para V se vuelve

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$$

Ahora podemos derivar cada miembro respecto a t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

de modo que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

Al sustituir $h = 3\,\text{m}$ y $dV/dt = 2\,\text{m}^3/\text{min}$ tenemos que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(3)^2}\cdot 2 = \frac{8}{9\pi}$$

El nivel del agua está subiendo a razón de $8/(9\pi) \approx 0.28\,\text{m/min}$.

EJEMPLO 2 Un globo ascendente

Un globo de aire caliente que asciende en línea recta desde el nivel del suelo es rastreado por un observador que está a 500 pies del punto de elevación. En el momento que el ángulo de elevación del observador es $\pi/4$, el ángulo crece a razón de 0.14 rad/min. ¿Qué tan rápido se está elevando el globo en ese momento?

Solución Para responder la pregunta anterior, realizamos los seis pasos de la estrategia anterior.

1. *Hacemos un dibujo y damos nombre a las variables y a las constantes* (figura 3.43). Las variables en el dibujo son

   θ = el ángulo, en radianes, que forma el observador con respecto al suelo.

   y = la altura del globo, en pies.

Sea t el tiempo en minutos, y supongamos que θ y y son funciones diferenciables de t.

En el dibujo, la constante es la distancia entre el observador y el punto de despegue del globo (500 pies). No es necesario nombrarla con un símbolo especial.

2. *Escribimos la información numérica adicional.*

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.14 \text{ rad/min} \qquad \text{cuando} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

3. *Escribimos lo que se pide encontrar*. Queremos determinar dy/dt en el instante en que $\theta = \pi/4$.

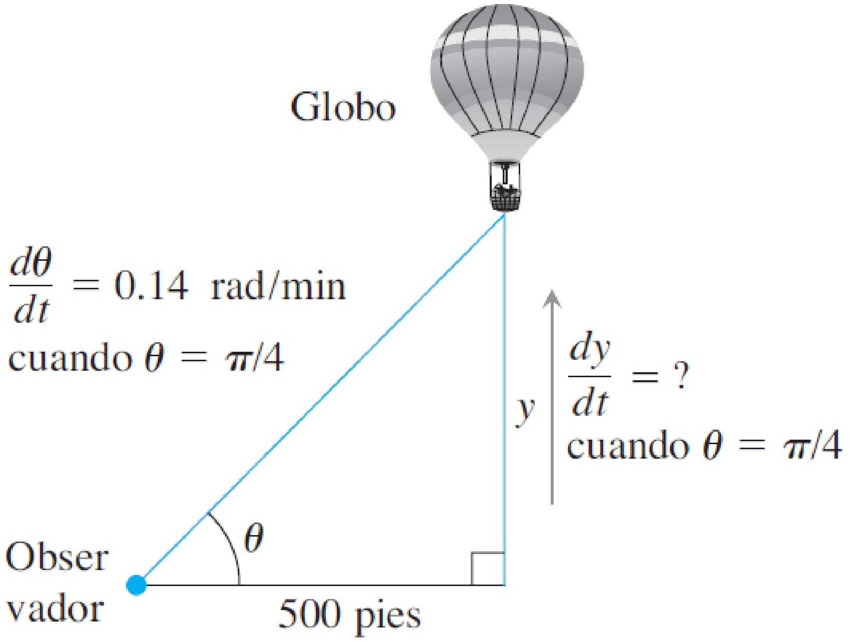


FIGURA 3.43 La razón de cambio de la altura del globo está relacionada con la razón de cambio del ángulo que forman el observador y el suelo (ejemplo 2).

4. *Escribimos una ecuación que relaciones las variables y θ.*

$$\frac{y}{500} = \tan\theta \qquad \text{o} \qquad y = 500\tan\theta$$

5. *Derivamos con respecto a t.* Utilizando la regla de la cadena. El resultado nos dice cómo se relaciona dy/dt (la incógnita que queremos determinar) con $d\theta/dt$ (el dato que conocemos).

$$\frac{dy}{dt} = 500\,(\sec^2\theta)\,\frac{d\theta}{dt}$$

6. *Evaluamos con* $\theta = \pi/4$ *y* $d\theta/dt = 0.14$ *para encontrar* dy/dt.

$$\frac{dy}{dt} = 500\left(\sqrt{2}\right)^2(0.14) = 140 \qquad \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

En el momento en cuestión, el globo está subiendo a razón de 140 pies/min. ■

V **EJEMPLO 4** El automóvil A se dirige hacia el oeste a 50 millas/h y el automóvil B viaja hacia el norte a 60 millas/h. Ambos se dirigen hacia la intersección de los dos caminos. ¿Con qué rapidez se aproximan los vehículos entre sí cuando el automóvil A está a 0.3 millas y el automóvil B está a 0.4 millas de la intersección?

SOLUCIÓN Dibuje la figura 4, donde C es la intersección de los caminos. En un tiempo dado t, sea x la distancia entre el automóvil A y C, sea y la distancia del automóvil B a C y sea z la distancia entre los vehículos, donde x, y y z se miden en millas.

Sabemos que $dx/dt = -50$ millas/h y $dy/dt = -60$ millas/h. Las derivadas son negativas porque x y y son decrecientes. Se pide calcular dz/dt. La ecuación que relaciona x, y y z la proporciona el teorema de Pitágoras:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

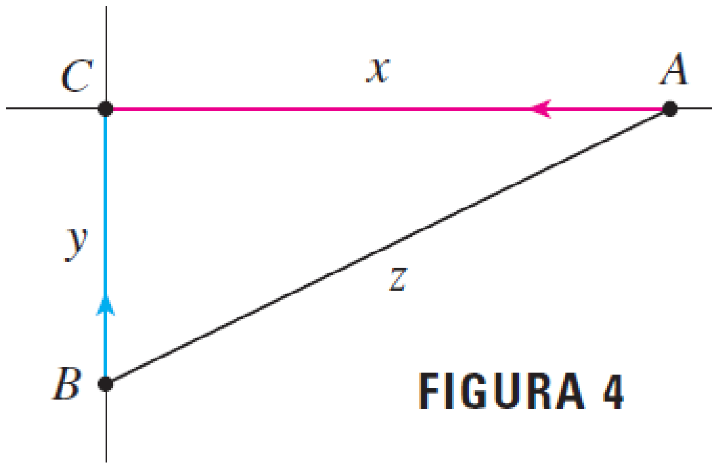


FIGURA 4

Al derivar ambos lados respecto a t obtenemos

$$2z \frac{dz}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right)$$

Cuando $x = 0.3$ millas y $y = 0.4$ millas, el teorema de Pitágoras da $z = 0.5$ millas, de modo que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0.5} [0.3(-50) + 0.4(-60)]$$

$$= -78 \text{ mi/h}$$

Los vehículos se aproximan entre sí a razón de 78 millas/h.

V **EJEMPLO 5** Un hombre camina a lo largo de una trayectoria recta a una rapidez de 4 pies/s. Un faro está situado sobre el nivel de la tierra a 20 pies de la trayectoria y se mantiene enfocado hacia el hombre. ¿Con qué rapidez el faro gira cuando el hombre está a 15 pies del punto sobre la trayectoria más cercana a la fuente de luz?

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

SOLUCIÓN Trace la figura 5 y haga que x sea la distancia desde el hombre hasta el punto sobre la trayectoria que esté más cercana al faro. Sea θ el ángulo entre el rayo desde el faro y la perpendicular a la trayectoria.

Sabemos que $dx/dt = 4$ pies/s, y se pide calcular $d\theta/dt$ cuando $x = 15$. La ecuación que relaciona x y θ puede escribirse a partir de la figura 5:

$$\frac{x}{20} = \tan\theta \qquad x = 20\tan\theta$$

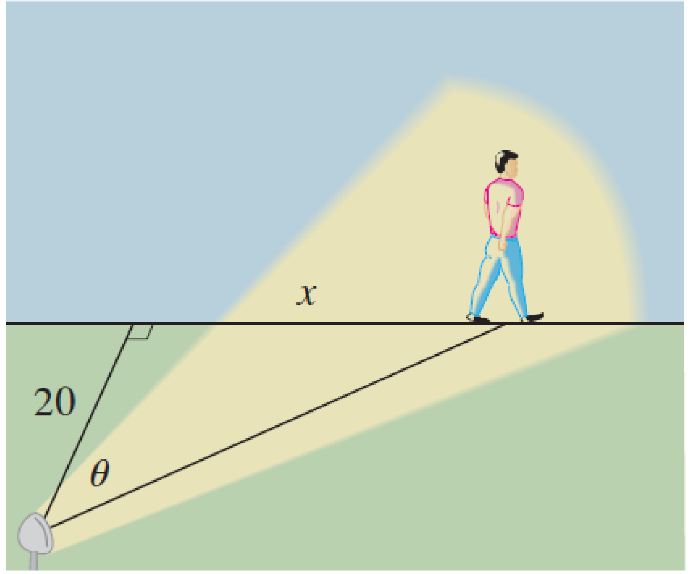


FIGURA 5

Al derivar respecto a t ambos miembros, obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = 20\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt},$$

por lo que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2\theta\,\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{1}{20}\cos^2\theta\,(4) = \frac{1}{5}\cos^2\theta$$

Cuando $x = 15$, la longitud del rayo es 25, así que $\cos\theta = \frac{4}{5}$ y

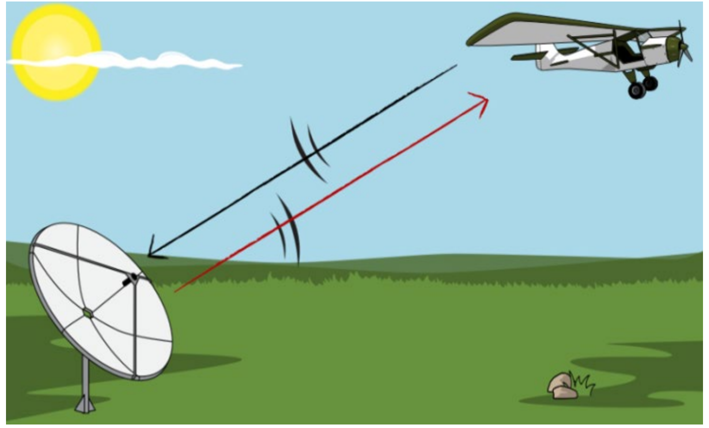
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{125} = 0.128$$

El faro gira con una rapidez de 0.128 rad/s.

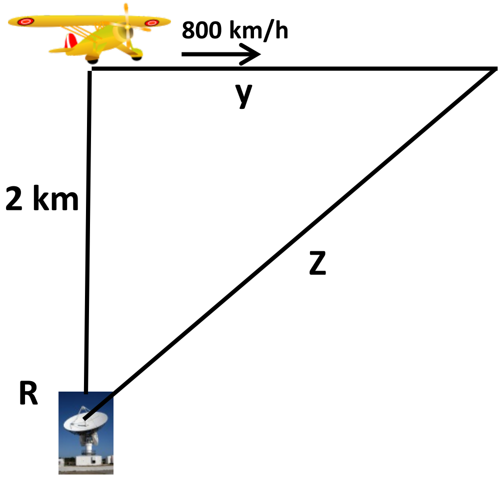
Ejemplos propuestos

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

13. Un avión vuela horizontalmente a una altitud de 2 km y a una rapidez de 800 km/h y pasa directamente sobre una estación de radar. Calcule la rapidez con la que aumenta la distancia desde el avión a la estación cuando este se encuentra a 3 km de la estación.



https://www.storyboardthat.com/es/innovations/radar



$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2z\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{y}{z}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{z^2 - x^2}}{z}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{5}}{3}800\frac{km}{h}$$

$y = distancia\ recorrida\ por\ el\ avión$

x: distancia del radar a la línea de trayectoria del avión, $x = 2km$

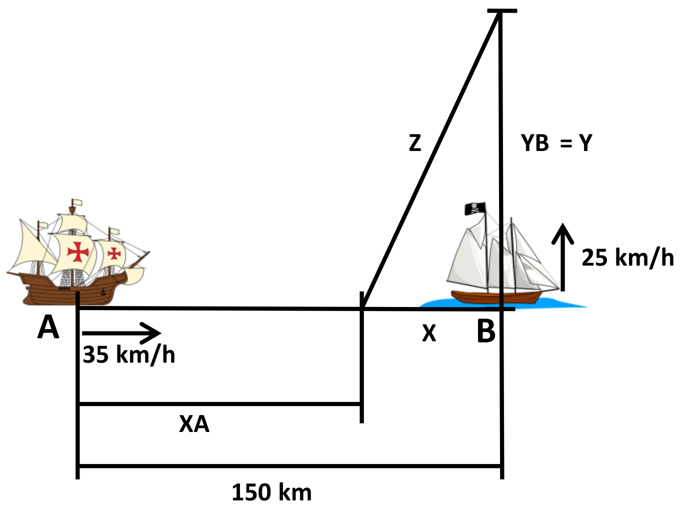
$z = distancia\ entre\ el\ avión\ y\ el\ radar.$

$\frac{dy}{dt} = velocidad\ del\ avión = 800\frac{km}{h}$

$\frac{dz}{dt} = velocidad\ con\ la\ cual\ se\ aleja\ el\ avión\ del\ radar$

Ejemplos propuestos

16. A mediodía, un barco A está a 150 km al oeste del barco B. El barco A navega hacia el este a 35 km/h y el barco B navega hacia el norte a 25 km/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los barcos a las 16:00?



$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{z}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{10 \times (-35) + 100 \times 25}{\sqrt{10^2 + 100^2}}$$

$$\frac{dz}{dt} = 21{,}39\ \frac{km}{h}$$

A las 16:00 (4:00 pm)

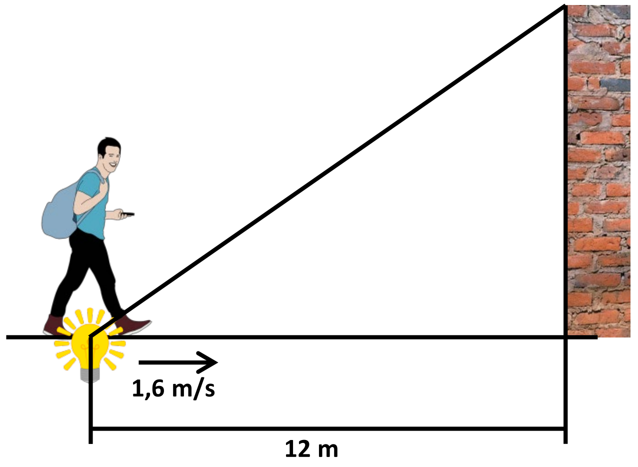
Para A: XA = 35 km/h x 4 h = 140 km

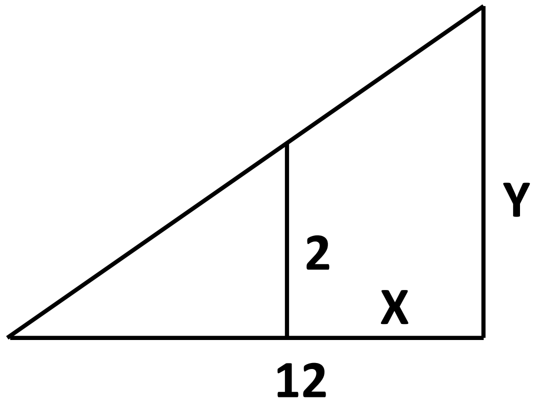
Para B: YB = 25 km/h x 4 h = 100 km

Ejemplos propuestos

18. Un foco sobre el piso ilumina una pared a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de estatura camina desde el foco hacia el edificio a una rapidez de 1.6 m/s, ¿qué tan rápido disminuye la longitud de su sombra sobre la pared cuando está a 4 m del edificio?

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936





$$\frac{12}{y} = \frac{12-x}{2}$$

$$y = \frac{24}{(12-x)} = 24(12-x)^{-1}$$

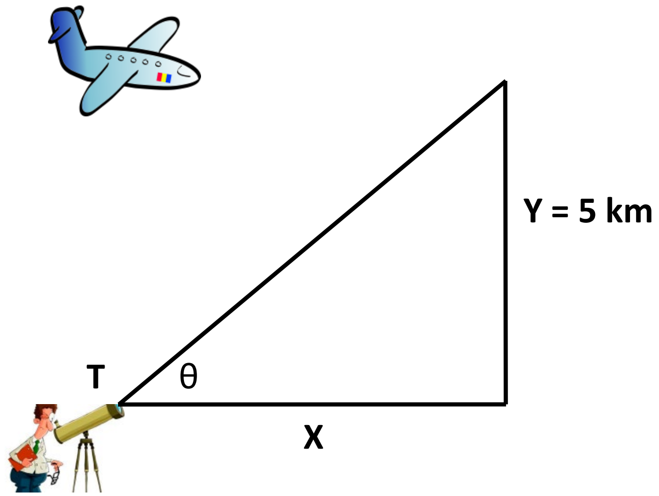
con x = 4, y = 3

$$\frac{dy}{dt} = 24(-1)(12-x)^{-2}(-1)\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{24}{(12-x)^2}\frac{dx}{dt} = -0{,}6\,\frac{m}{s}$$

Ejemplos propuestos

45. Un avión vuela horizontalmente a una altitud de 5 km y pasa directamente sobre un telescopio de seguimiento en la superficie de la Tierra. Cuando el ángulo de elevación es $\pi/3$, este ángulo está disminuyendo a razón de $\pi/6$ rad/min. ¿Con qué rapidez está viajando el avión en ese instante?



$$tan\theta = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad x = y\ cot\theta$$

$$\frac{dx}{dt} = -ycsc^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = -5csc^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = 5\,\frac{4}{3}\,\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{10\pi}{9}\,\frac{km}{min}$$

Ejercicios

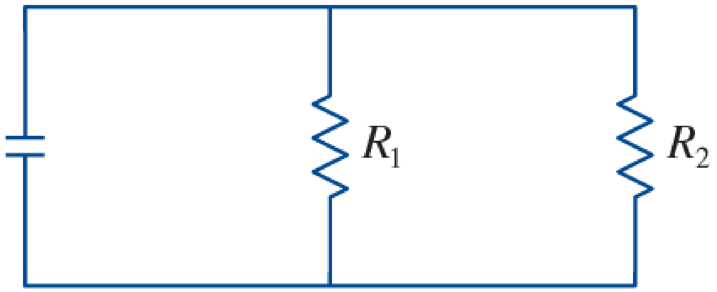
17. Dos automóviles parten desde el mismo punto. Uno se dirige hacia el sur a 30 km/h y el otro hacia el oeste a 72 km/h. ¿Con qué rapidez se incrementa la distancia entre los automóviles dos horas después?

19. Un hombre empieza a caminar hacia el norte a 1.2 m/s desde un punto P. Cinco minutos más tarde, una mujer empieza a caminar hacia el sur a 1.6 m/s desde un punto a 200 m directo al este de P. ¿Con qué rapidez se están separando las personas 15 min después de que la mujer empezó a caminar?

39. Si se conectan dos resistencias R_1 y R_2 en paralelo, como se muestra en la figura, entonces la resistencia total R, medida en ohms (Ω) está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Si R_1 y R_2 se incrementan a razón de 0.3 Ω/s y 0.2 Ω/s, respectivamente, ¿qué tan rápido cambia R cuando $R_1 = 80\ \Omega$ y $R_2 = 100\ \Omega$?



43. Una cámara de televisión se instala a 1200 m de la base de una plataforma de lanzamiento de cohetes. El ángulo de elevación de la cámara tiene que cambiar con la rapidez correcta con el objeto de tener siempre a la vista al cohete. Asimismo, el mecanismo de enfoque de la cámara tiene que tomar en cuenta la distancia creciente de la cámara al cohete que se eleva. Suponga que el cohete se eleva verticalmente y que su rapidez es 200 m/s cuando se ha elevado 900 m.

(a) ¿Qué tan rápido cambia la distancia de la cámara de televisión al cohete en ese momento?

(b) Si la cámara de televisión se mantiene dirigida hacia el cohete, ¿qué tan rápido cambia el ángulo de elevación de la cámara en ese momento?

REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín