Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

# FUNCIONES

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

# Sección 1.1: Definición de función, dominio, rango, gráfica de una función, prueba de la recta vertical, funciones definidas por tramos.

## Representaciones de funciones

Hay cuatro posibles maneras de representar una función:

- Verbalmente (por una descripción en palabras)
- Numéricamente (por una tabla de valores)
- Visualmente (por una gráfica)
- Algebraicamente (por una fórmula explícita)

Si una función puede representarse de las cuatro maneras, con frecuencia es muy útil pasar de una representación a otra a fin de disponer de información adicional de la función. (En el ejemplo 2, empezamos con formas algebraicas y de ellas obtuvimos gráficas.) Pero ciertas funciones se describen de manera más naturalmente por una forma que por otra. Con esto en mente, reexaminaremos las cuatro situaciones que consideramos al inicio de esta sección.

Las funciones surgen siempre que una cantidad depende de otra. Considere las cuatro situaciones siguientes:

**A.** El área $A$ de un círculo depende de su radio $r$. La regla que relaciona $A$ con $r$ está dada por la ecuación $A = \pi r^2$. Con cada número positivo $r$ hay asociado un valor de $A$, por lo que decimos que $A$ es una *función* de $r$.

La representación probablemente más útil del área de un círculo como una función de su radio es la fórmula algebraica $A(r) = \pi r^2$, aunque es posible compilar una tabla de valores para esbozar una gráfica (la mitad de una parábola). Debido a que un círculo tiene un radio positivo, el dominio es $\{r \mid r > 0\} = (0, \infty)$, y el rango $(0, \infty)$.

**B.** La población humana del mundo $P$ depende del tiempo $t$. La tabla muestra las estimaciones de la población mundial $P(t)$ en el tiempo $t$, para algunos años. Por ejemplo,

$$P(1950) \approx 2\,560\,000\,000$$

Pero para cada valor del tiempo $t$ hay un valor correspondiente de $P$, por lo que decimos que $P$ es una función de $t$.

Se nos da una descripción de la función en palabras: $P(t)$ es la población humana del mundo en el tiempo $t$. Vamos a medir $t$, así que $t = 0$ se corresponde con el año 1900. La tabla de valores de la población mundial proporciona una representación adecuada de esta función. Si se grafican estos valores, obtenemos la gráfica (llamada gráfica de *dispersión*) en la figura 9. También es una representación útil porque la gráfica nos permite disponer de todos los datos a la vez. ¿Qué pasa con una fórmula? Por supuesto, es imposible concebir una fórmula explícita que proporcione la población humana exacta $P(t)$ en cualquier tiempo $t$. Pero es posible encontrar una expresión para una función que se *aproxime* a $P(t)$. De hecho, utilizando los métodos que se explican en la sección 1.2, conseguimos la aproximación

$$P(t) \approx f(t) = (1.43653 \times 10^9) \cdot (1.01395)^t$$

| Año | Población (millones) |
|---|---|
| 1900 | 1 650 |
| 1910 | 1 750 |
| 1920 | 1 860 |
| 1930 | 2 070 |
| 1940 | 2 300 |
| 1950 | 2 560 |
| 1960 | 3 040 |
| 1970 | 3 710 |
| 1980 | 4 450 |
| 1990 | 5 280 |
| 2000 | 6 080 |
| 2010 | 6 870 |

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

La figura 10 muestra que es un "ajuste" razonablemente bueno. La función $f$ se llama *modelo matemático* para el crecimiento de la población. En otras palabras, es una función con una fórmula explícita que aproxima el comportamiento de nuestra función dada. Sin embargo, veremos que las ideas del Cálculo también pueden aplicarse a una tabla de valores; una fórmula explícita no es necesaria.



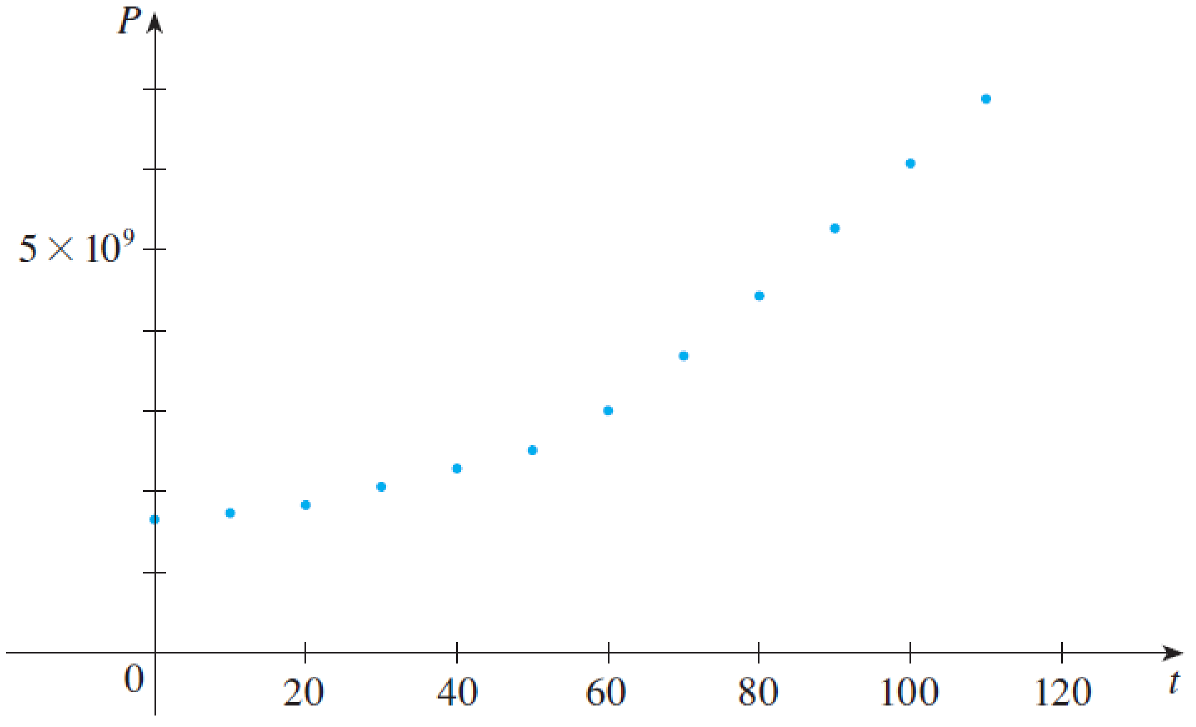



**FIGURA 9**

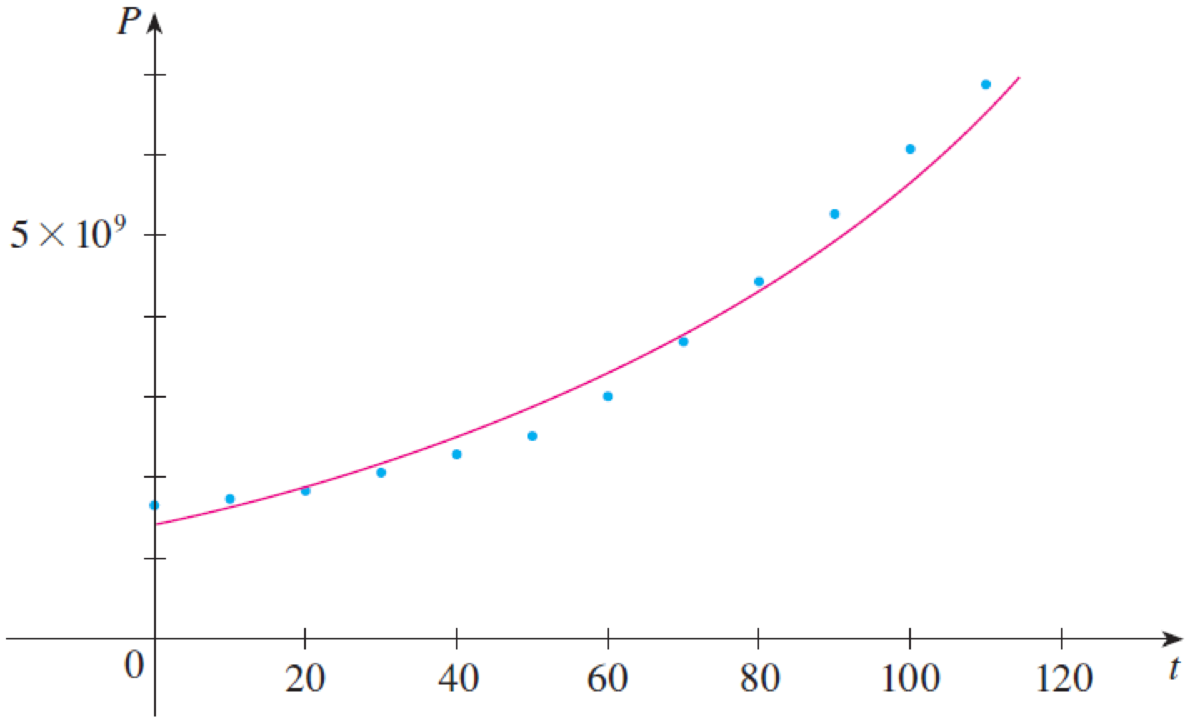



**FIGURA 10**

**C.** El costo $C$ de envío de un paquete por correo depende de su peso $w$. Aunque no hay alguna fórmula simple que relacione a $w$ con $C$, la oficina de correos tiene una regla para determinar $C$ cuando se conoce $w$.

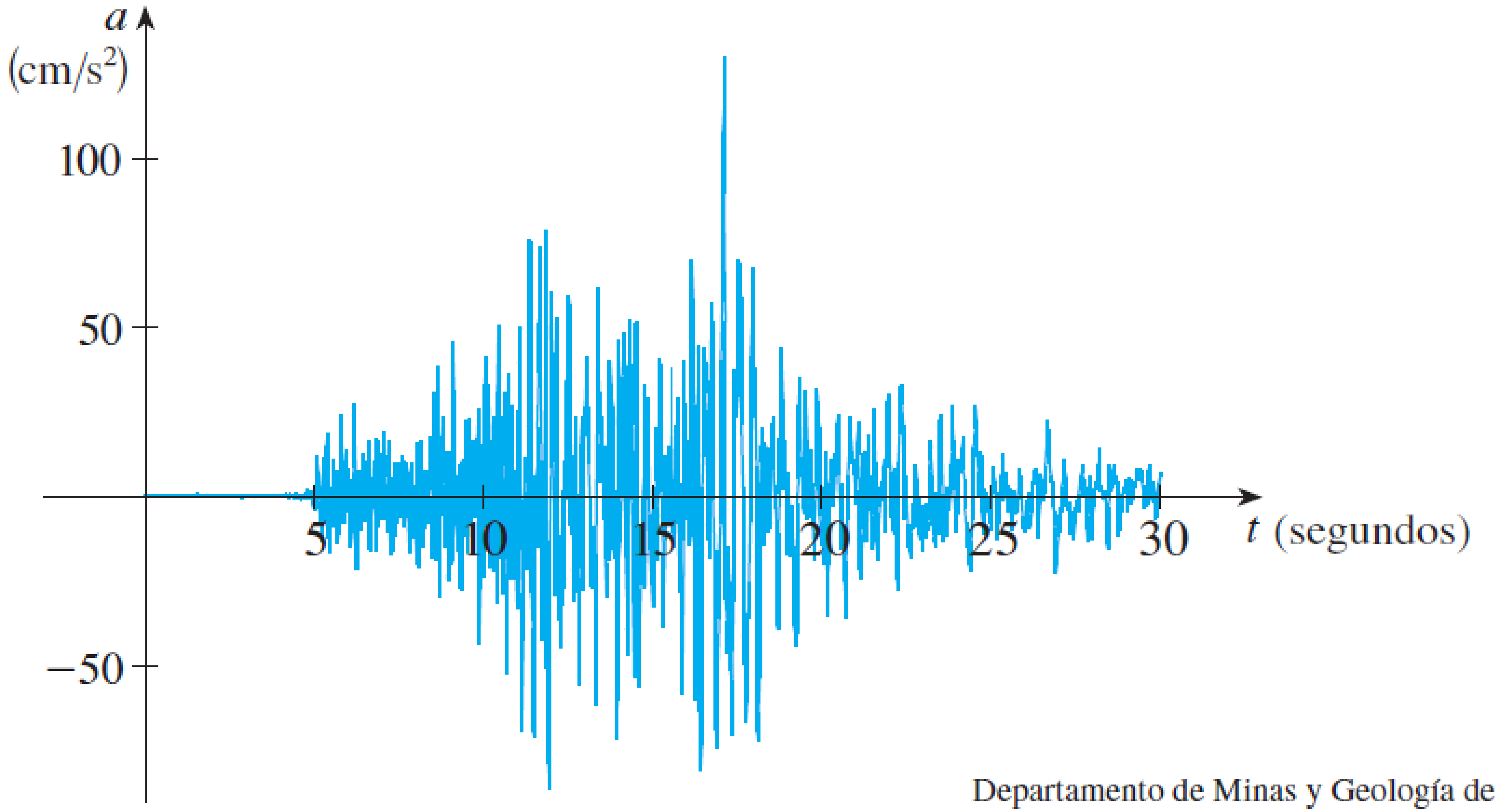
Nuevamente la función se describe con palabras: sea $C(w)$ el costo de envío por correo de un paquete con peso $w$. La regla que el Servicio Postal de EU utiliza desde 2010 es la siguiente: el costo es de 88 centavos de dólar para paquetes hasta de 1 onza, más 17 centavos por cada onza adicional (o menos) hasta 13 onzas. La tabla de valores que se muestran en el margen es la representación más conveniente para esta función, aunque es posible esbozar una gráfica (véase el ejemplo 10).

| $w$ (onzas) | $C(w)$ (dólares) |
|---|---|
| $0 < w \leqslant 1$ | 0.88 |
| $1 < w \leqslant 2$ | 1.05 |
| $2 < w \leqslant 3$ | 1.22 |
| $3 < w \leqslant 4$ | 1.39 |
| $4 < w \leqslant 5$ | 1.56 |
| ⋮ | ⋮ |

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

**D.** La aceleración vertical $a$ de suelo, medida por un sismógrafo durante un terremoto, es una función del tiempo transcurrido $t$. La figura 1 muestra una gráfica generada por la actividad sísmica durante el terremoto de Northridge que sacudió Los Ángeles en 1994. Para un determinado valor de $t$, la gráfica proporciona un valor correspondiente de $a$.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936




Departamento de Minas y Geología de California

La gráfica que se muestra en la figura 1 es la representación más natural de la función aceleración vertical $a(t)$. Es cierto que podría elaborarse una tabla de valores, y que incluso es posible idear una fórmula aproximada. Pero todo lo que necesita saber un geólogo —las amplitudes y patrones— puede verse fácilmente en la gráfica. (Lo mismo es cierto para los patrones que se observan en los electrocardiogramas de pacientes que sufren del corazón y en polígrafos para la detección de mentiras).

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Una **función** $f$ es una regla que asigna a cada elemento $x$ de un conjunto $D$ exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto $E$.

Usualmente consideramos funciones para los cuales los conjuntos $D$ y $E$ son conjuntos de números reales. Al conjunto $D$ se le denomina **dominio** de la función. El número $f(x)$ es el **valor de *f* en *x*** y se lee "*f de x*". El **rango** de $f$ es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ conforme $x$ varía a través de todo el dominio. Un símbolo que representa un número arbitrario en el *dominio* de una función $f$ se llama **variable independiente**. Un símbolo que representa un número en el *rango* de $f$ se conoce como **variable dependiente**. En el ejemplo **A**, $r$ es la variable independiente, y $A$ es la variable dependiente.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Es útil pensar en una función como una **máquina** (véase la figura 2). Si $x$ está en el dominio de la función $f$, cuando $x$ entra en la máquina, que se acepta como una entrada, la máquina produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. Así, podemos pensar el dominio como el conjunto de todas las posibles entradas, y en el rango como el conjunto de todas las posibles salidas.



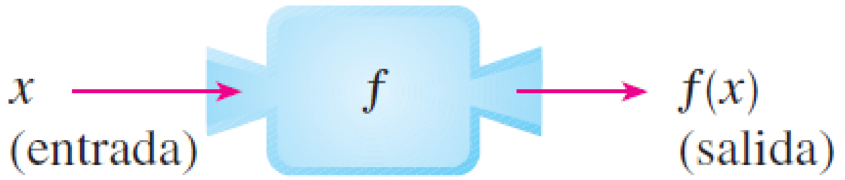



**FIGURA 2**
Diagrama de una función $f$ como una máquina

Otra forma de imaginar una función es con un **diagrama de flechas** como en la figura 3. Cada flecha conecta un elemento de $D$ con un elemento de $E$. La flecha indica que $f(x)$ está asociada con $x$, $f(a)$ está asociada con $a$, y así sucesivamente.

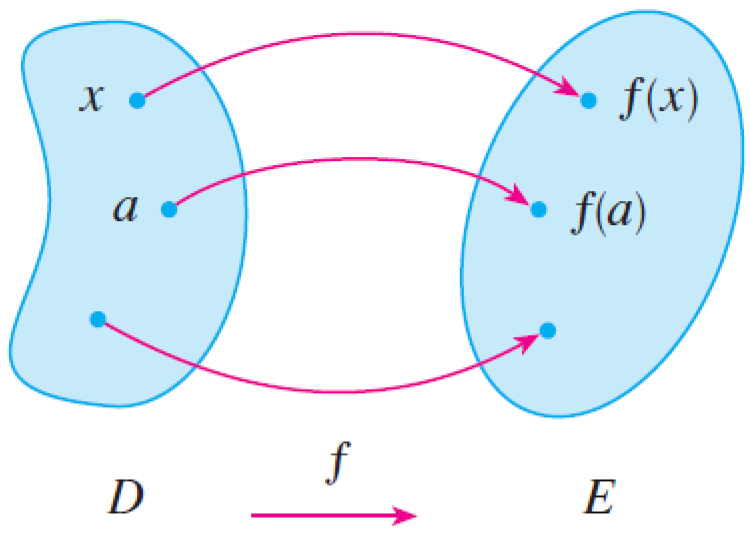



**FIGURA 3**
Diagrama de flechas para $f$

El método más común para la visualización de una función es con su gráfica. Si $f$ es una función con dominio $D$, entonces su **gráfica** es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

(Observe que estos son pares de entrada-salida). En otras palabras, la gráfica de $f$ consta de todos los puntos $(x, y)$ en el plano coordenado tales que $y = f(x)$ y $x$ está en el dominio de $f$.

La gráfica de una función $f$ nos da una imagen visual útil del comportamiento o "historia de vida" de una función. Dado que la coordenada $y$ de cualquier punto $(x, y)$ en el gráfico es $y = f(x)$, podemos leer el valor de $f(x)$ de la gráfica como la altura de la gráfica por encima del punto $x$ (véase la figura 4). La gráfica de $f$ permite también tener una imagen visual del dominio de $f$ en el eje $x$ y su rango en el eje $y$ como en la figura 5.

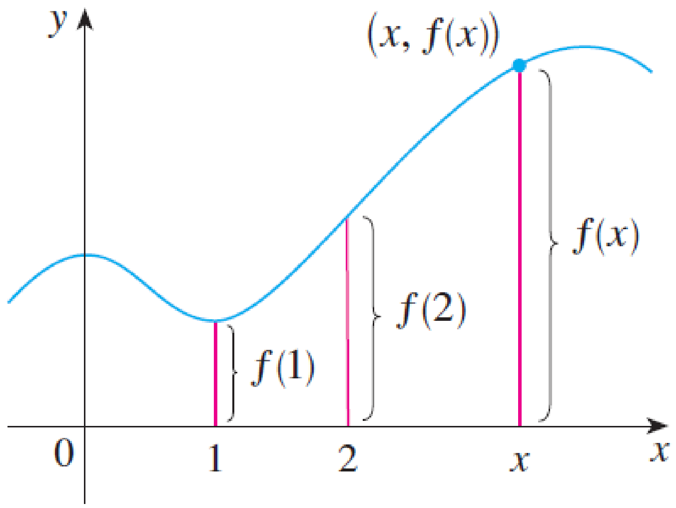



**FIGURA 4**

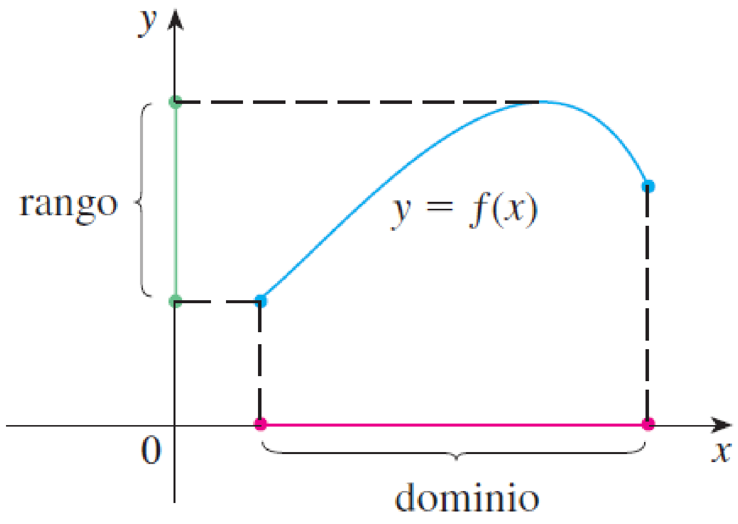



**FIGURA 5**

**EJEMPLO 1** La gráfica de una función $f$ se muestra en la figura 6.

a) Encuentre los valores de $f(1)$ y $f(5)$.

b) ¿Cuál es el dominio y el rango de $f$?

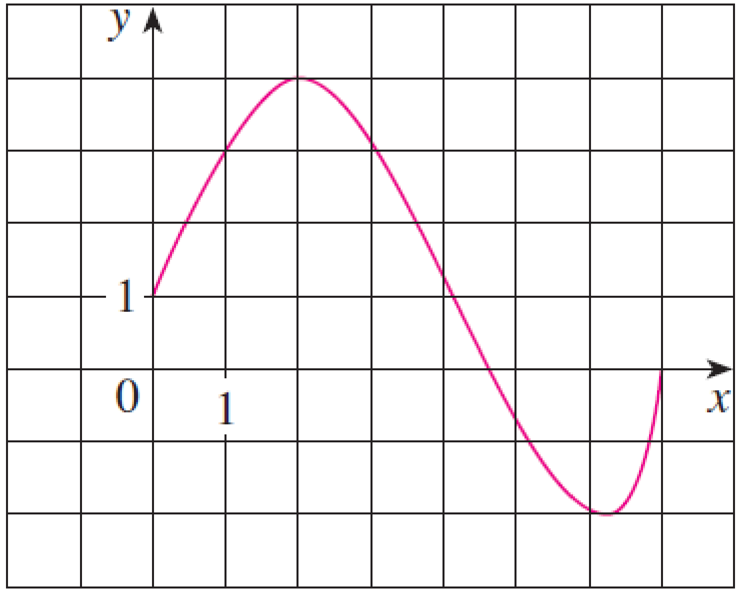



**FIGURA 6**

## SOLUCIÓN

a) De la figura 6 vemos que el punto (1, 3) está en la gráfica de $f$, por lo que el valor de $f$ en 1 es $f(1) = 3$. (En otras palabras, el punto en la gráfica que se encuentra por encima de $x = 1$ está 3 unidades por encima del eje $x$.)

Cuando $x = 5$, la gráfica se encuentra aproximadamente a 0.7 unidades por debajo del eje $x$, así que estimamos que $f(5) \approx -0.7$.

b) Vemos que $f(x)$ está definida cuando $0 \leqslant x \leqslant 7$, por lo que el dominio de $f$ es el intervalo cerrado $[0, 7]$. Observe que $f$ toma todos los valores de $-2$ a 4, así que el rango de $f$ es

$$\{y \mid -2 \leqslant y \leqslant 4\} = [-2, 4]$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

**EJEMPLO 2** Trace la gráfica y encuentre el dominio y rango de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x - 1$ b) $g(x) = x^2$

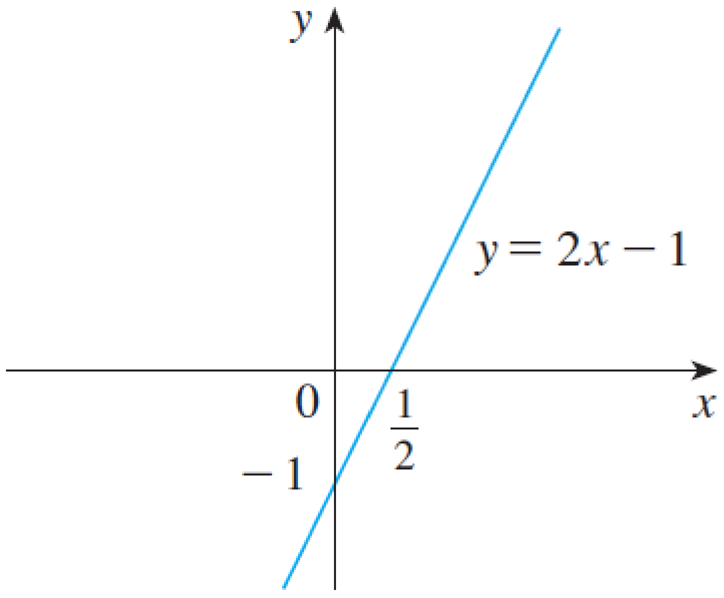



FIGURA 7

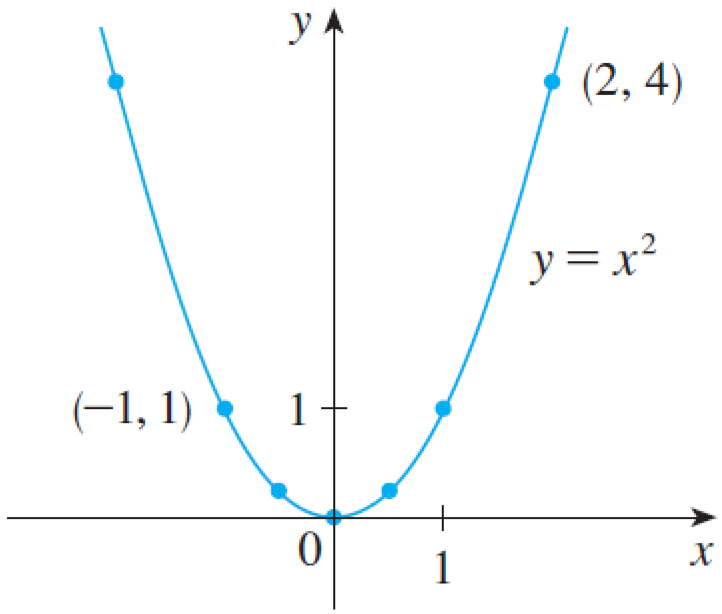



FIGURA 8

## SOLUCIÓN

a) La ecuación de la gráfica es $y = 2x - 1$ y representa la ecuación de una recta con pendiente 2 e intersección con el eje $y$ en $y = -1$ (recuerde que la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta es $y = mx + b$. Véase el apéndice B). Esto nos permite dibujar la porción de la gráfica de $f$ en la figura 7. La expresión $2x - 1$ está definida para todos los números reales, así que el dominio de $f$ es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales. La gráfica muestra que el rango también es $\mathbb{R}$.

b) Dado que $g(2) = 2^2 = 4$ y $g(-1) = (-1)^2 = 1$, podemos ubicar los puntos $(2, 4)$ y $(-1, 1)$ junto con algunos otros puntos de la gráfica, y después unirlos para obtener la gráfica (figura 8). La ecuación de la gráfica es $y = x^2$ y representa una parábola (véase apéndice C). El dominio de $g$ es $\mathbb{R}$, y el rango consiste en todos los valores de $g(x)$, esto es, todos los números de la forma $x^2$. Pero $x^2 \geqslant 0$ para todos los números $x$, y todo número $y$ en estas condiciones es positivo, así que el rango de $g$ es $\{y \mid y \geqslant 0\} = [0, \infty)$. Esto puede verse en la figura 8.

**EJEMPLO 3** Si $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ y $h \neq 0$, evalúe $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

**SOLUCIÓN** Primero evaluamos $f(a+h)$ reemplazando $x$ por $a+h$ en la expresión para $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= 2(a+h)^2 - 5(a+h) + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5(a+h) + 1 \\ &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 \end{aligned}$$

Después sustituimos en la expresión dada y simplificamos:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1) - (2a^2 - 5a + 1)}{h} \\ &= \frac{2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 - 2a^2 + 5a - 1}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 - 5h}{h} = 4a + 2h - 5 \end{aligned}$$

**EJEMPLO 6** Encuentre el dominio de cada una de las siguientes funciones:

*a)* $f(x) = \sqrt{x + 2}$

*b)* $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

## SOLUCIÓN

a) Debido a que la raíz cuadrada de un número negativo no está definida (como un número real), el dominio de $f$ consta de todos los valores de $x$ tales que $x + 2 \geqslant 0$. Esto es equivalente a $x \geqslant -2$, por lo que el dominio es el intervalo $[-2, \infty)$.

b) Como

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x - 1)}$$

y no se permite la división entre 0, vemos que $g(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Por tanto, el dominio de $g$ es

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

que también puede escribirse en notación de intervalos como

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

La gráfica de una función es una curva en el plano $xy$. Pero surge la pregunta: ¿qué curvas en el plano $xy$ son gráficas de funciones? Esta pregunta se contesta con la siguiente prueba.



**La prueba de la vertical** Una curva en el plano $xy$ es la gráfica de una función de $x$ si y sólo si no hay recta vertical que intercepte la curva más de una vez.

La razón de la validez de la prueba de la vertical puede verse en la figura 13. Si cada recta vertical $x = a$ intercepta una curva sólo una vez, en $(a, b)$, entonces se define exactamente un valor funcional para $f(a) = b$. Pero si una recta $x = a$ intercepta la curva dos veces, en $(a, b)$ y $(a, c)$, entonces la curva no puede representar una función debido a que una función no puede asignar dos valores diferentes de $a$.

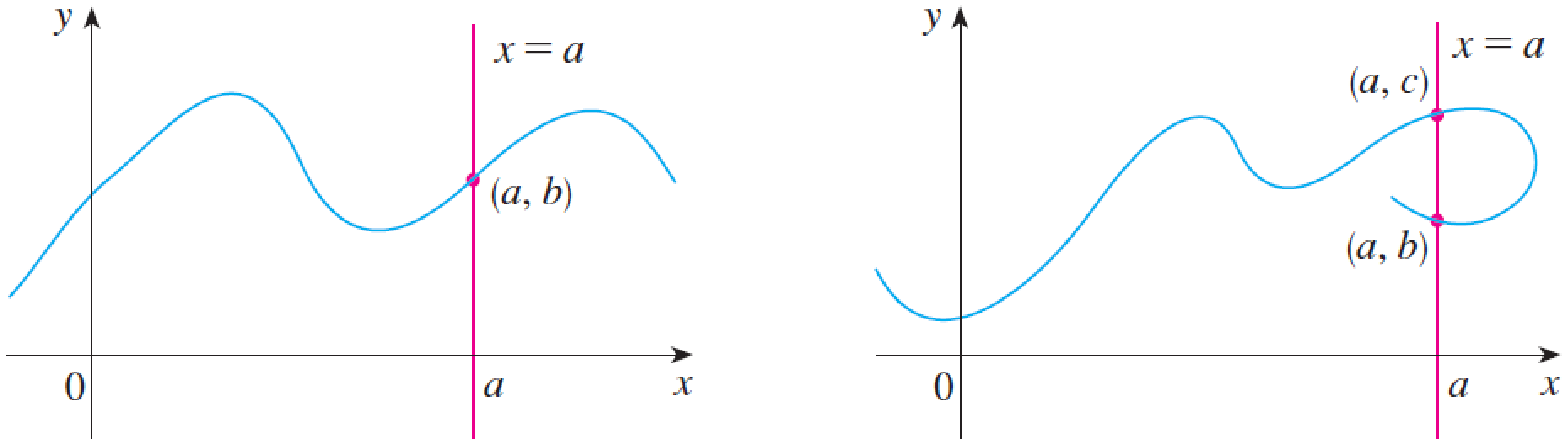
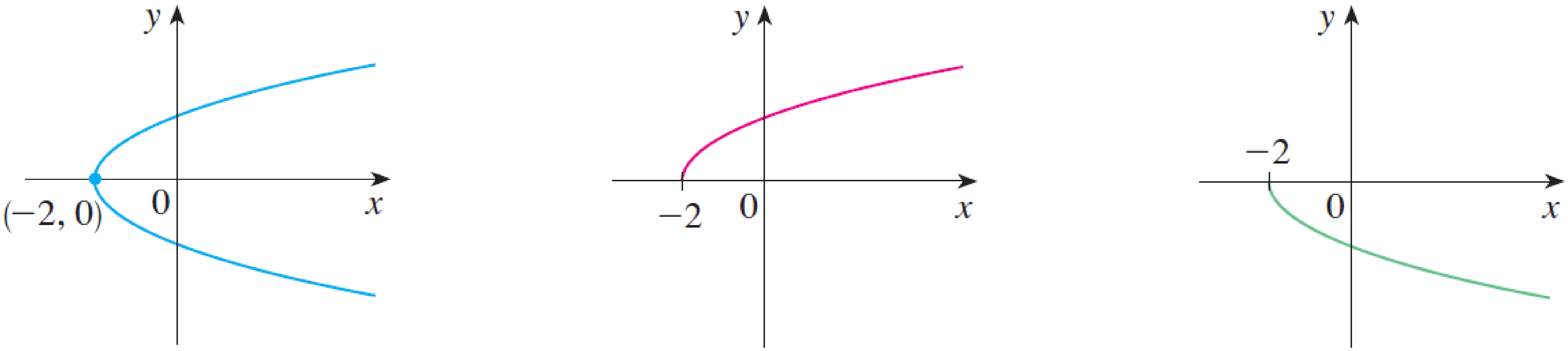



**FIGURA 13**

Por ejemplo, la parábola $x = y^2 - 2$ que se muestra en la figura 14 a) no es la gráfica de una función de $x$ porque, como puede ver, hay rectas verticales que intersectan a la parábola dos veces. La parábola, sin embargo, contiene las gráficas de *dos* funciones de $x$. Note que la ecuación $x = y^2 - 2$ implica que $y^2 = x + 2$, así que $y = \pm\sqrt{x + 2}$. Por tanto, las mitades superior e inferior de la parábola son las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x + 2}$ [del ejemplo 6 a)] y $g(x) = -\sqrt{x + 2}$. [Véanse las figuras 14 b) y c).] Observamos que si invertimos los roles de $x$ y $y$, entonces la ecuación $x = h(y) = y^2 - 2$ define a $x$ como una función de $y$ (con $y$ como la variable independiente y $x$ como la variable dependiente), y la parábola aparece ahora como la gráfica de la función $h$.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936




a) $x = y^2 - 2$ b) $y = \sqrt{x + 2}$ c) $y = -\sqrt{x + 2}$

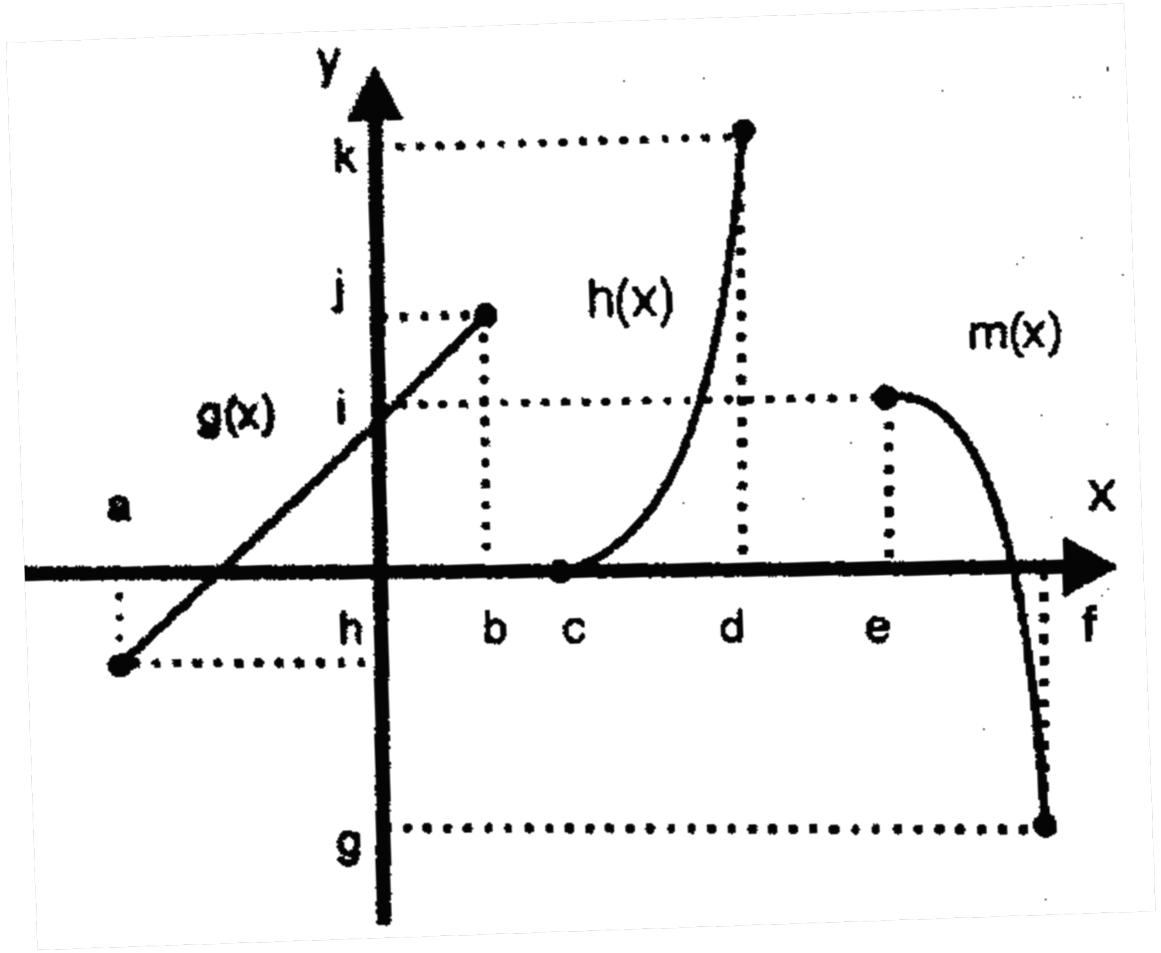
**FIGURA 14**

# Funciones definidas por secciones

Una función segmentada o por tramos está formada por un número infinito o finito de funciones, es decir, consta de un número de “piezas” desconectadas o conectadas entre sí.

Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & si\ a \leq x \leq b \\ h(x) & si\ c \leq x \leq d \\ m(x) & si\ e \leq x \leq f \end{cases}$$




Si a ∈ $\mathbb{R}^-$; b, c, d, e, f ∈ $\mathbb{R}^+$, con a < b < c < d < e < f

Donde el Dominio: $Dom_f = Dom_g \cup Dom_h \cup Dom_m$
y el Rango: $Ran_f = Ran_g \cup Ran_h \cup Ran_m$

**V** **EJEMPLO 7** Una función $f$ está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Evalúe $f(-2)$, $f(-1)$ y $f(0)$ y grafique la función.

SOLUCIÓN Recuerde que una función es una regla. Para esta función en particular la regla es la siguiente: primero ver el valor de la entrada $x$. Si sucede que $x \leqslant -1$, entonces el valor de $f(x)$ se encuentra con $1 - x$. Por otro lado, si $x > -1$, entonces el valor de $f(x)$ se obtiene con $x^2$.

$$\text{Puesto que } -2 \leqslant -1, \text{ tenemos } f(-2) = 1 - (-2) = 3$$

$$\text{Puesto que } -1 \leqslant -1, \text{ tenemos } f(-1) = 1 - (-1) = 2$$

$$\text{Puesto que } 0 > -1, \text{ tenemos } f(0) = 0^2 = 0.$$

¿Cómo obtenemos la gráfica de $f$? Observamos que si $x \leqslant -1$, entonces $f(x) = 1 - x$, por lo que la parte de la gráfica de $f$ que se encuentra a la izquierda de la recta vertical $x = -1$ debe coincidir con la recta $y = 1 - x$, que tiene pendiente $-1$ e intersección en $(0, 1)$. Si $x > -1$, entonces $f(x) = x^2$, por lo que la parte de la gráfica de $f$ que se encuentra a la derecha de la recta $x = -1$ debe coincidir con la gráfica de $y = x^2$, que es una parábola. Esto nos permite esbozar la gráfica en la figura 15. El punto relleno indica que $(-1, 2)$ está incluido en la gráfica; el punto hueco indica que $(-1, 1)$ está excluido de la gráfica.

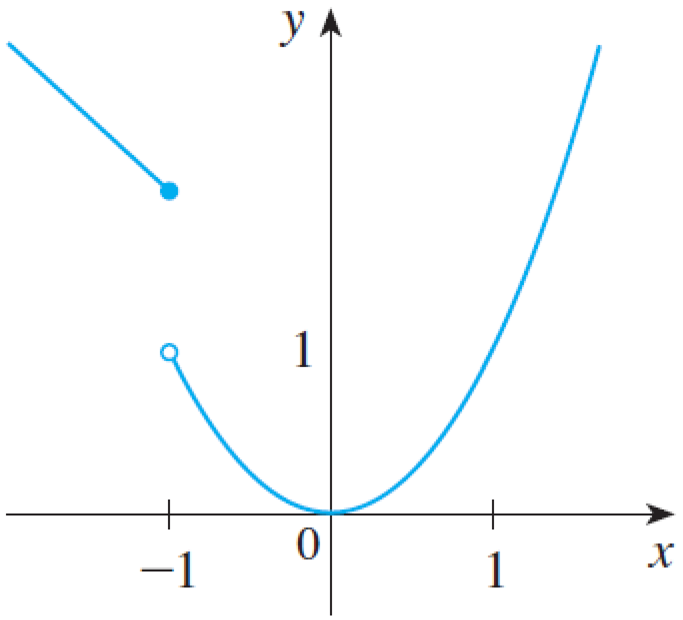
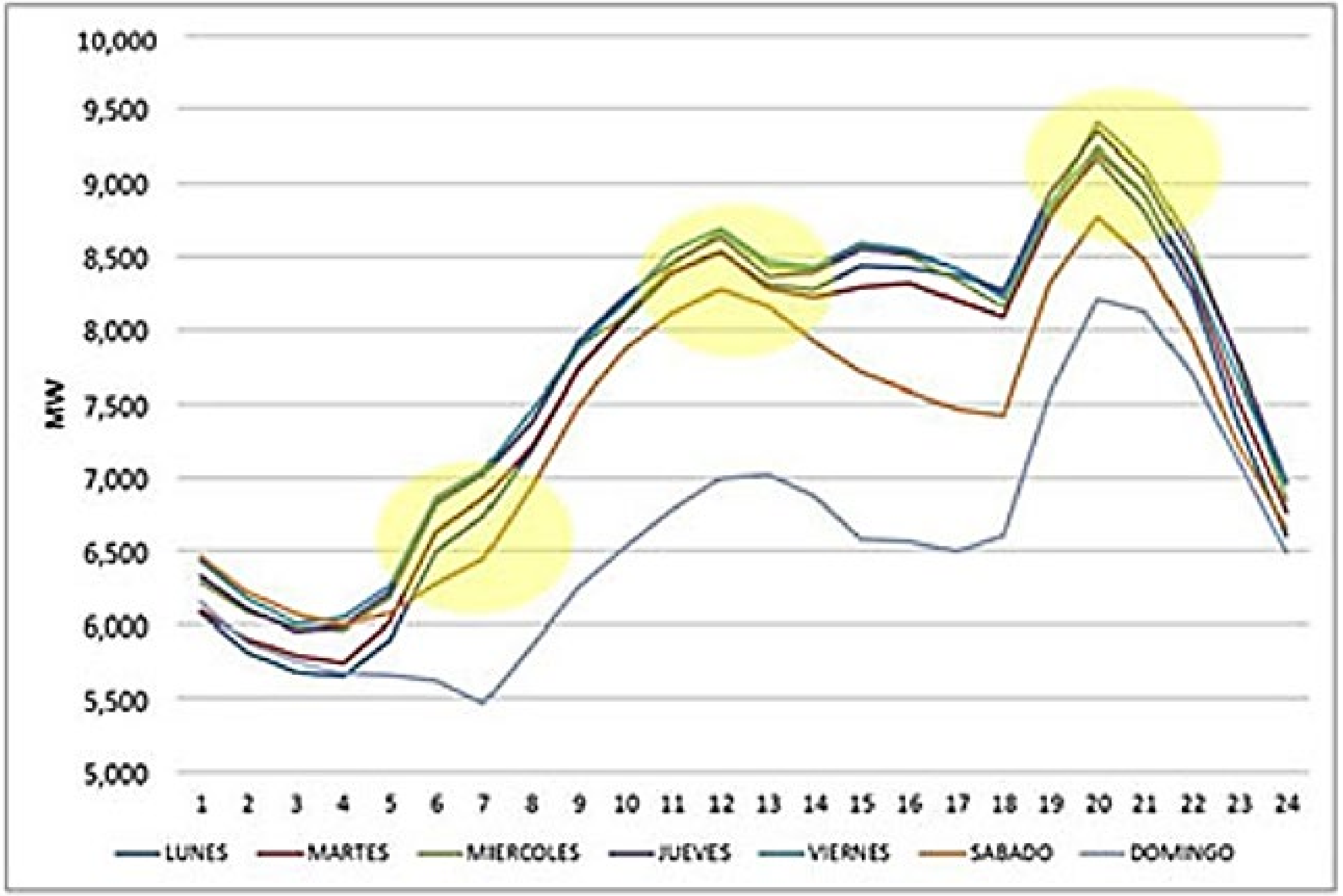



FIGURA 15

## Ejemplo

### Curva de demanda promedio en Colombia

La gráfica muestra el consumo de potencia para un día de la semana en Colombia (P se mide en Megavatios [MW], t se registra en horas a partir de la media noche).




https://www.xm.com.co/Paginas/Consumo/historico-de-demanda.aspx

**Indique:**

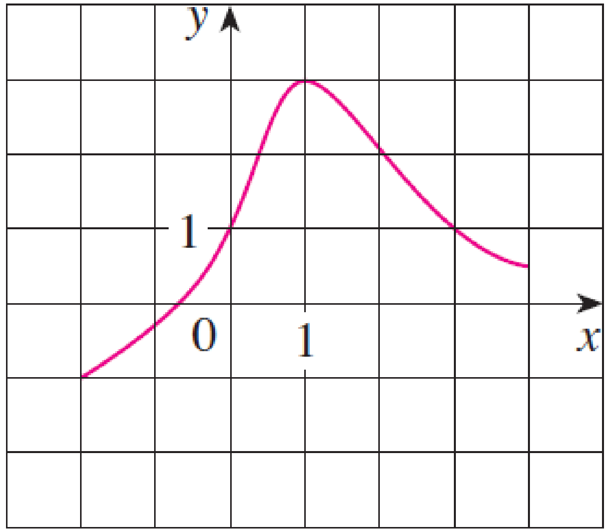
a. ¿cuál fue el consumo de potencia a las 6 AM?
b. ¿cuál fue el consumo de potencia a las 18:00 del sábado y del domingo?
c. ¿cuándo se da el consumo de potencia más bajo?
d. ¿cuándo se da el consumo de potencia más alto?

# Ejercicios

**1.** Si $f(x) = x + \sqrt{2 - x}$ y $g(u) = u + \sqrt{2 - u}$, ¿es verdad que $f = g$?

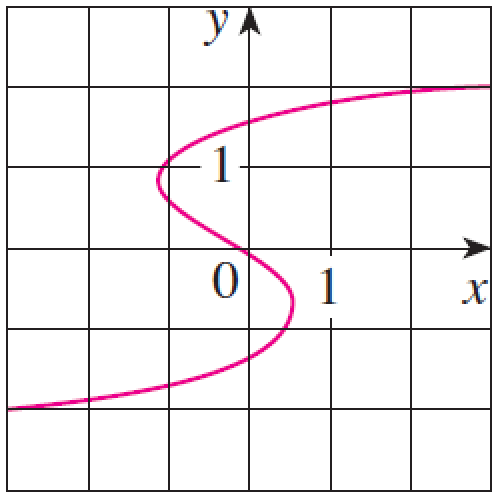
**3.** La gráfica de una función $f$ está dada.

a) Establezca el valor de $f(1)$.
b) Estime el valor de $f(-1)$.
c) ¿Para qué valores de $x$ es $f(x) = 1$?
d) Estime el valor de $x$ tal que $f(x) = 0$.
e) Establezca el dominio y el rango de $f$.
f) ¿Sobre qué intervalo es creciente $f$?

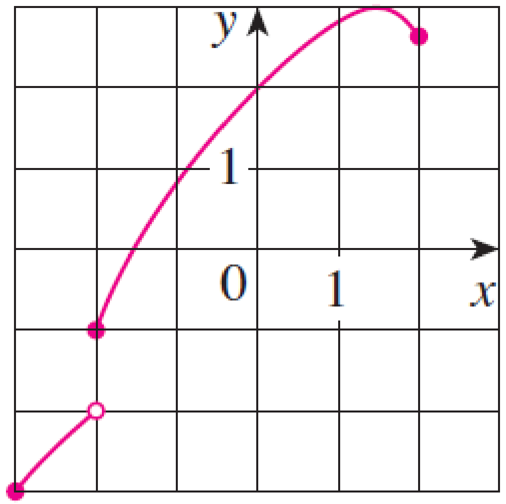



Determine si la curva es la gráfica de una función de $x$. Si lo es, establezca el dominio y el rango de la función.

**7.**




**9.**



**27-30** Evalúe el cociente de diferencias de cada una de las siguientes funciones. Simplifique su respuesta.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

**27.** $f(x) = 4 + 3x - x^2, \qquad \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$

**28.** $f(x) = x^3, \qquad \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

**29.** $f(x) = \dfrac{1}{x}, \qquad \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

**30.** $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}, \qquad \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

**31-37** Encuentre el dominio de cada una de las siguientes funciones.

**31.** $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2 - 9}$

**32.** $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5}{x^2 + x - 6}$

**35.** $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 5x}}$

**36.** $f(u) = \dfrac{u+1}{1 + \dfrac{1}{u+1}}$

**33.** $f(t) = \sqrt[3]{2t - 1}$

**34.** $g(t) = \sqrt{3 - t} - \sqrt{2 + t}$

**37.** $F(p) = \sqrt{2 - \sqrt{p}}$

**38.** Encuentre el dominio y el rango, y dibuje la gráfica de la función $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

**39-50** Encuentre el dominio y grafique cada una de las siguientes funciones:

**39.** $f(x) = 2 - 0.4x$

**40.** $F(x) = x^2 - 2x + 1$

**41.** $f(t) = 2t + t^2$

**42.** $H(t) = \dfrac{4 - t^2}{2 - t}$

**43.** $g(x) = \sqrt{x - 5}$

**44.** $F(x) = |2x + 1|$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

# EJERCICIOS ADICIONALES

1. Sea $f(x) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$

   Entonces:

   (a) $f\left(\frac{1}{2}\right) =$ _____

   (b) El dominio de $f$ es el conjunto de los números reales excepto _____, _____ y _____.

2. Sea $f(x) = \dfrac{7-\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{25-x^2}}$

   Entonces el dominio de $f$ es: $(\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_] \cup [\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_)$.

3. Encuentre el dominio y el rango de la función

$$f(x) = 2\sqrt{4-x^2} - 3.$$

   Respuesta: Dominio de $f$: $[\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_]$, y rango de $f$: $[\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_]$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

4. Sea $f(x) = x^3 - 4x^2 - 11x - 190$

El conjunto de todos los números $x$ tales que

$|f(x) - 40| < 260$

es $(\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_) \cup (\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_)$.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

5. Sea $f(x) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{2}{1 + \dfrac{1}{1-x}}}$

(a) Encuentre $f(1/2)$. Respuesta: _____

(b) Encuentre el dominio de $f$. Respuesta: el dominio de $f$ es el conjunto de todos los números reales *excepto* _____, _____ y _____.

6. Sea $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{5 - \sqrt{36 - x^2}}$

Entonces, en notación de intervalo, la parte del dominio de $f$ que está a la derecha del origen es $[2, a) \cup (a, b]$, con $a =$ _____ y $b =$ _____

# REFERENCIA

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.

Referencia en línea

http://www.ebooks7-24.com.consultaremota.upb.edu.co/stage.aspx?il


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín