Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

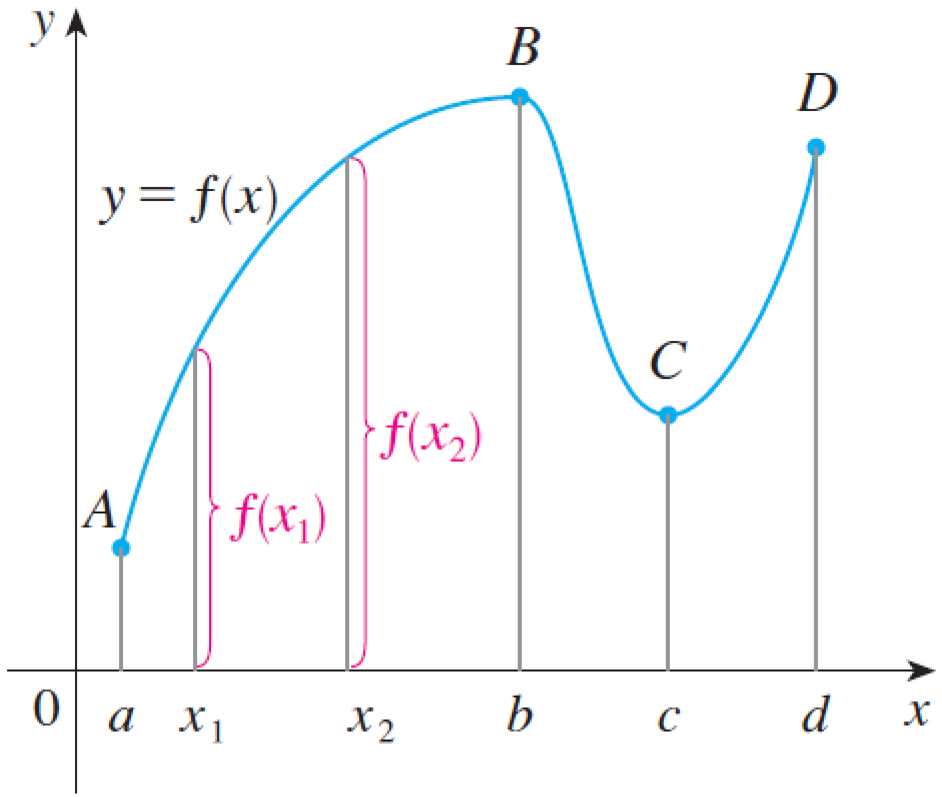
FUNCIONES

Continuación de la Sección 1.1: Funciones crecientes decrecientes

Sección 1.2: Funciones Esenciales: lineales, polinomios, potencia, racionales, algebraicas

Funciones crecientes y decrecientes

La gráfica que se muestra en la figura 22 sube desde A hasta B, desciende de B a C y sube otra vez de C a D. Se dice que la función f es creciente sobre el intervalo $[a, b]$, decreciente sobre $[b, c]$ y creciente nuevamente sobre $[c, d]$. Observe que si x_1 y x_2 son dos números entre a y b con $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Utilizamos esta propiedad para definir una función creciente.



Una función f se llama *creciente* sobre un intervalo I si

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

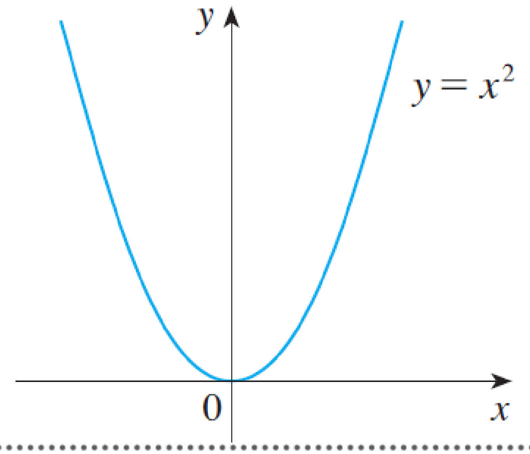
Se llama **decreciente** sobre I si

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

En la definición de una función creciente, es importante darse cuenta de que la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ debe cumplirse para *todo* par de números x_1 y x_2 en I con $x_1 < x_2$.

Puede observarse en la figura 23 que la función $f(x) = x^2$ es decreciente sobre el intervalo $(-\infty, 0]$ y creciente sobre el intervalo $[0, \infty)$.



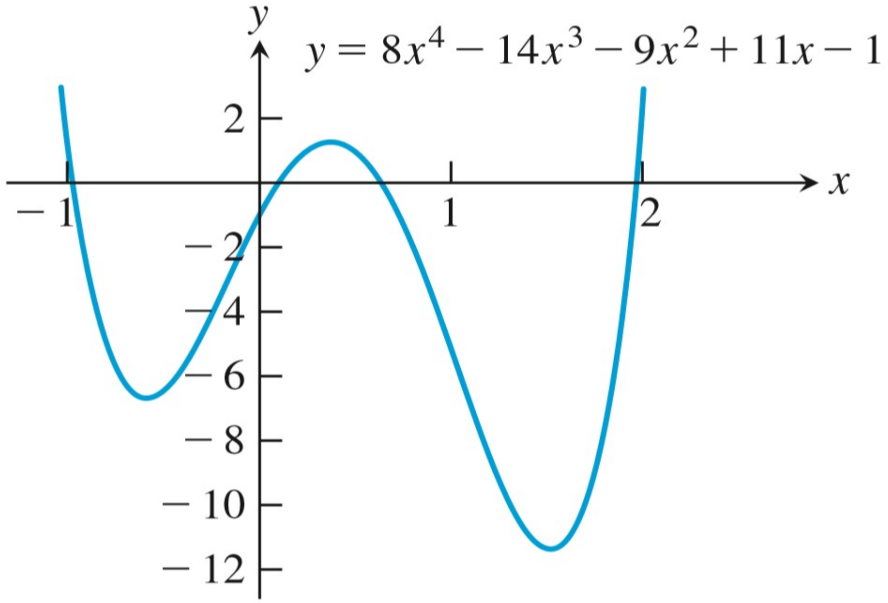
Funciones esenciales

Funciones polinómicas o polinomiales

Una función P se llama **polinomial** si

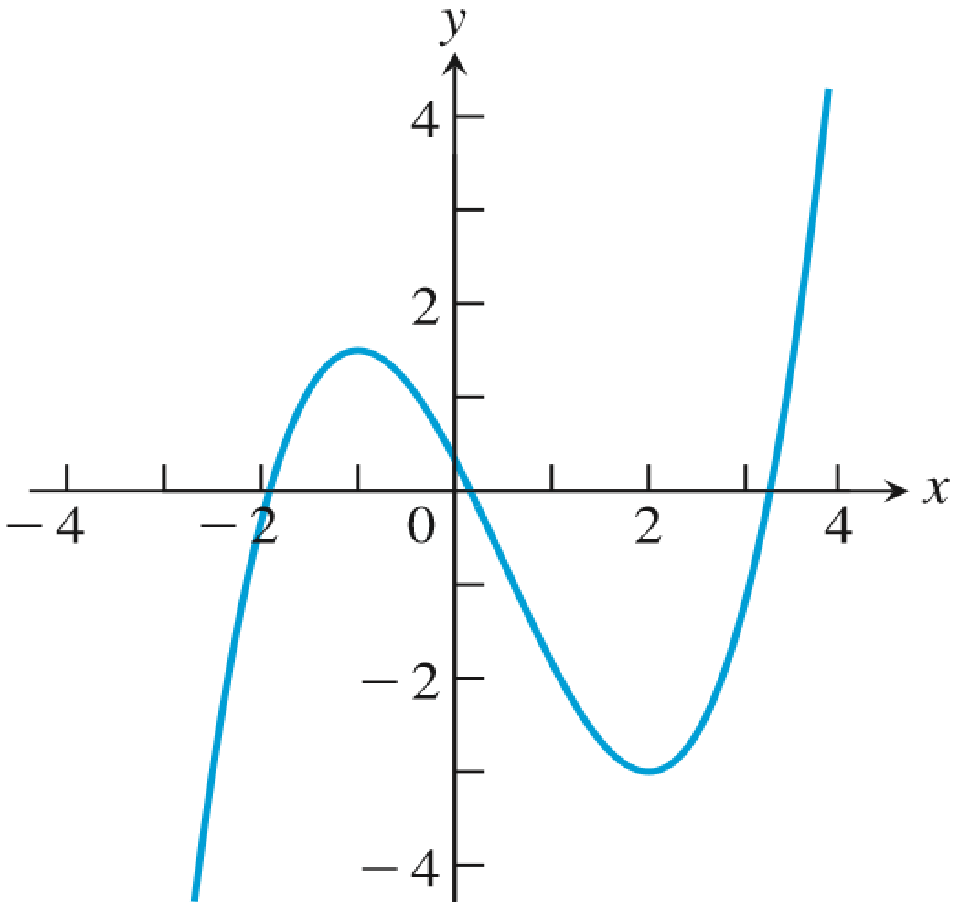
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

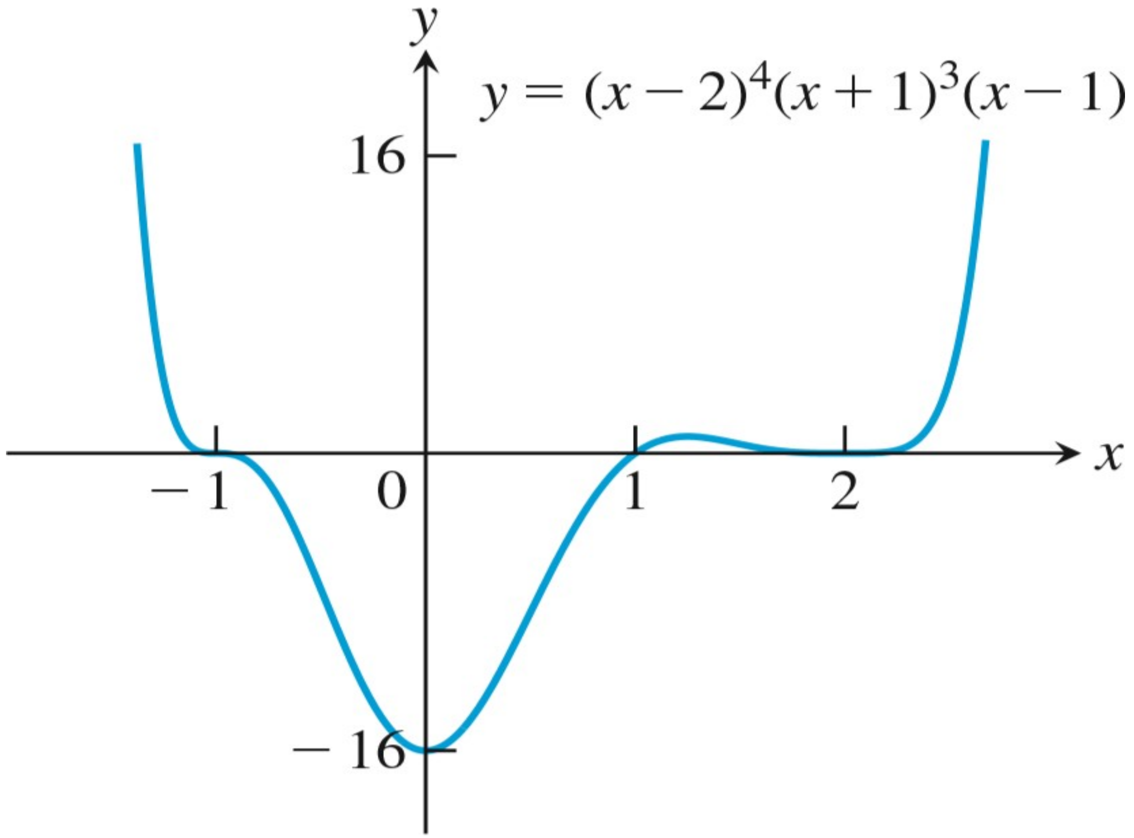
donde n es un número entero no negativo y $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes llamadas los **coeficientes** de la polinomial. El dominio de cualquier polinomial es $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Si el coeficiente principal $a_n \neq 0$, entonces el **grado** de la polinomial es n. Por ejemplo, la función



Funciones polinómicas

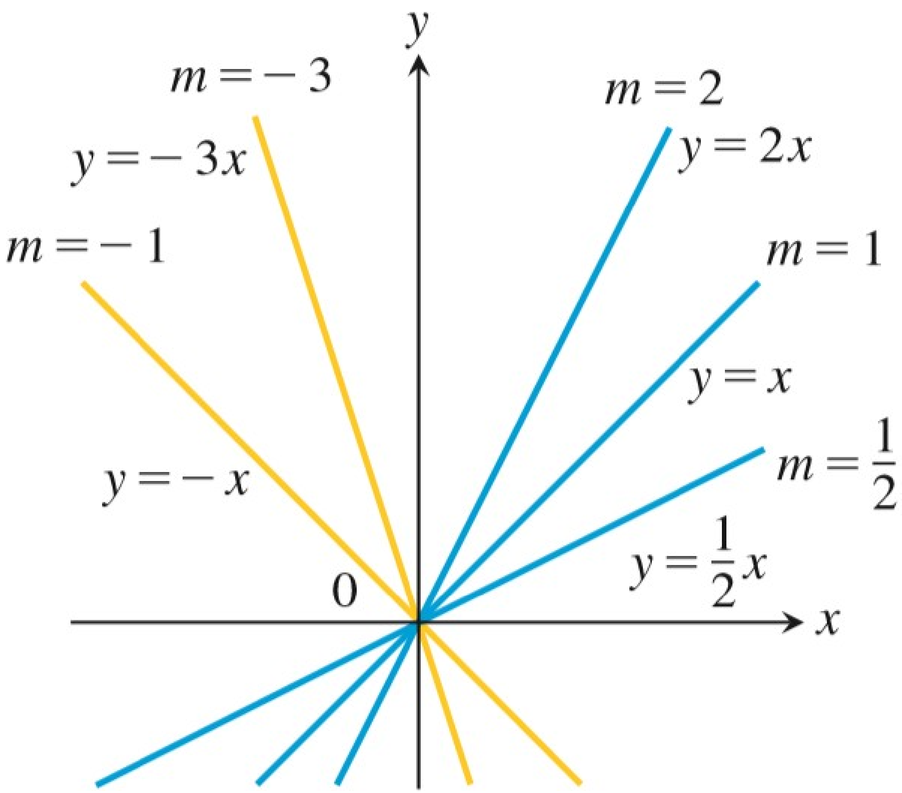
$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$$

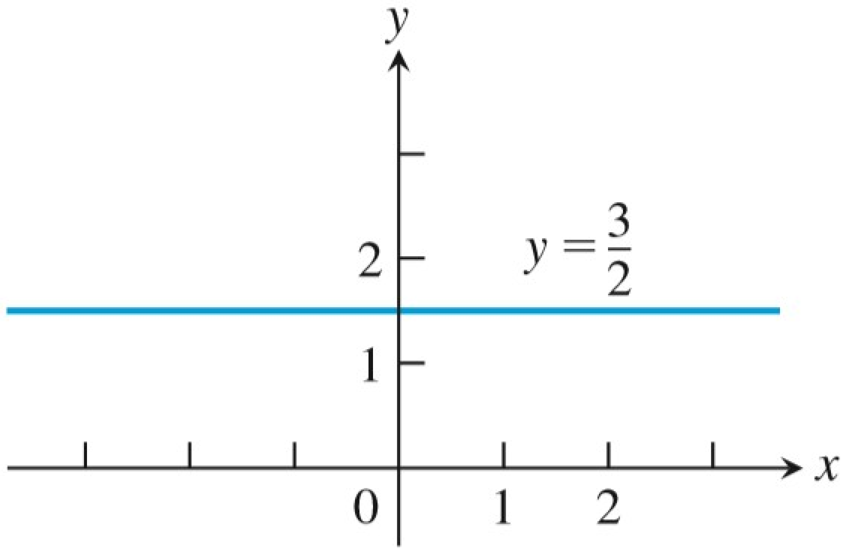




Funciones lineales

Una función de la forma $f(x) = mx + b$, donde m y b son constantes fijas, se denomina una **función lineal**. La función $f(x) = x$, donde $m = 1$ y $b = 0$, sedenomina **función identidad**.

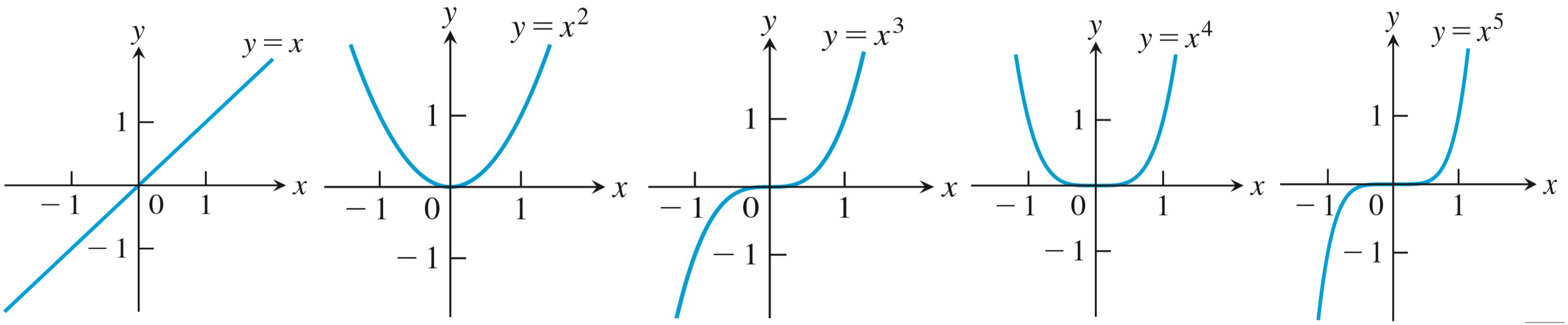




Funciones potencia

Una función de la forma $f(x) = x^a$, donde a es una constante, se llama **función potencia**. Consideramos varios casos.

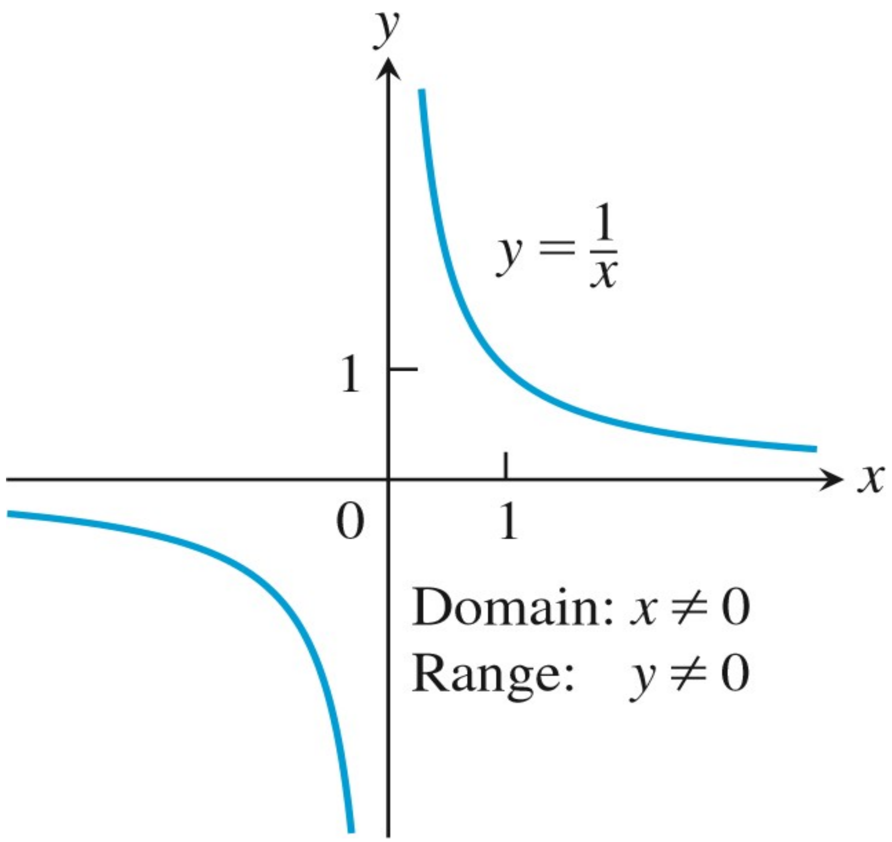
(a) $f(x) = x^a$, con $a = n$, un entero positivo. Las gráficas de $f(x) = x^n$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ se muestran a continuación. Estas funciones están definidas para todos los valores reales de x.

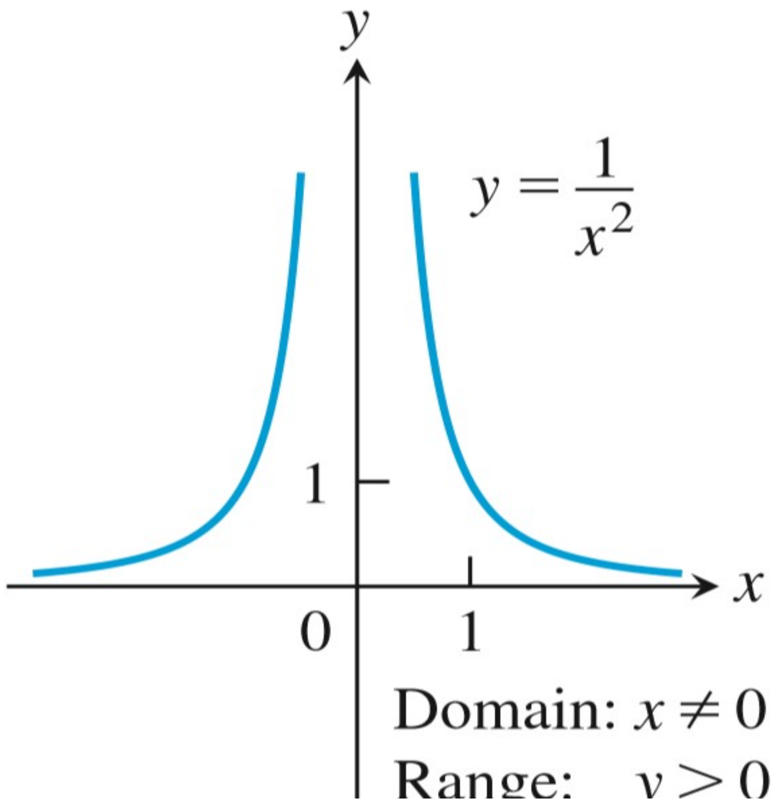


Funciones potencia

(b) $f(x) = x^a$, con $a = -1$ o $a = -2$. Las gráficas de las funciones $f(x) = x^{-1}$ y $g(x) = x^{-2}$ se muestran a continuación.

Ambas funciones están definidas para todo $x \neq 0$

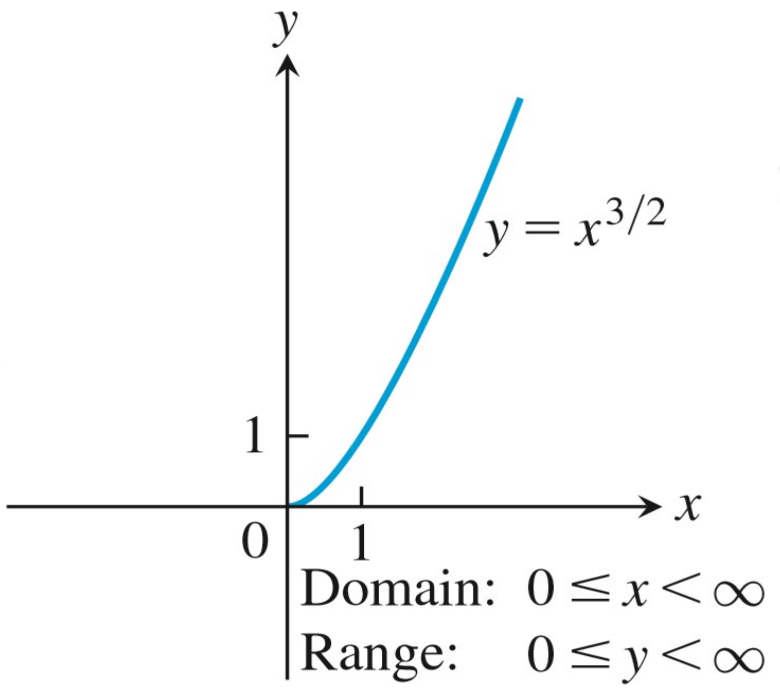


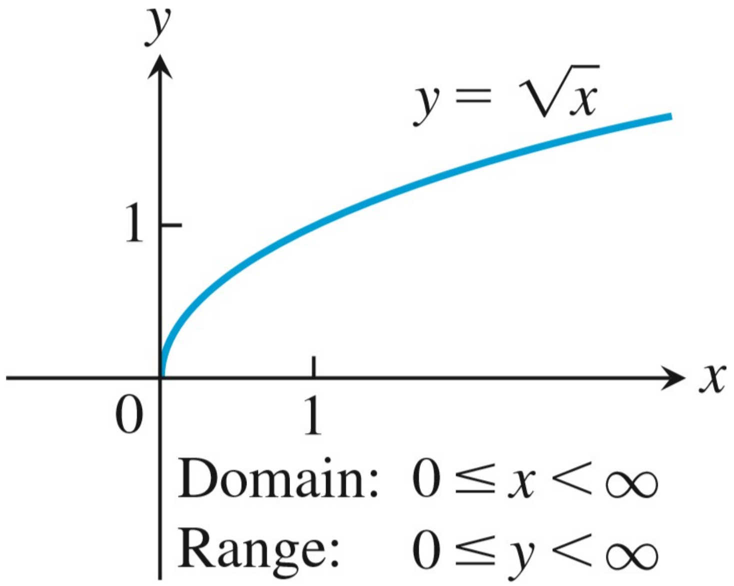


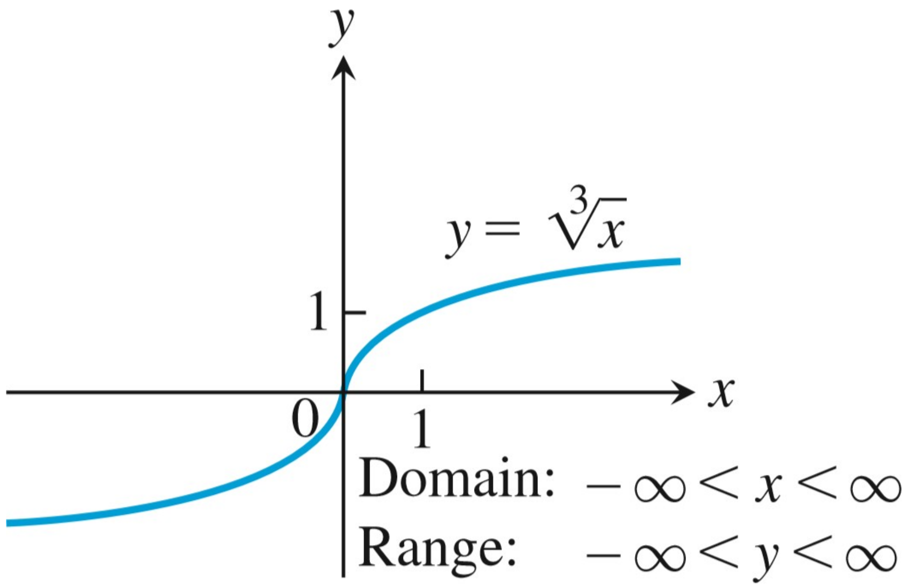
Función recíproca o hiperbólica

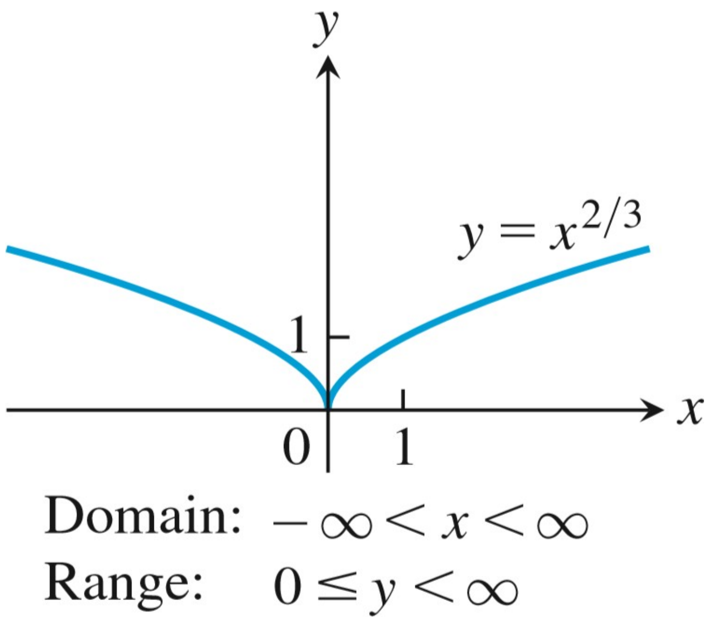
Funciones potencia

(c) $f(x) = x^a$, con $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$. Las funciones $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ son las funciones **raíz cuadrada** y **raíz cúbica**, respectivamente. El dominio de la función raíz cuadrada es $[0, \infty)$, pero la función raíz cúbica está definida para todos los x reales.









Funciones racionales

Una **función racional** f es un cociente de dos funciones polinomiales:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomiales. El dominio consiste en todos los valores de x tales que $Q(x) \neq 0$. Un ejemplo simple de una función racional es $f(x) = 1/x$, cuyo dominio es $\{x \mid x \neq 0\}$; esta es la función recíproca graficada en la figura 14. La función

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

es una función racional con dominio $\{x \mid x \neq \pm 2\}$. La gráfica se muestra en la figura 16.

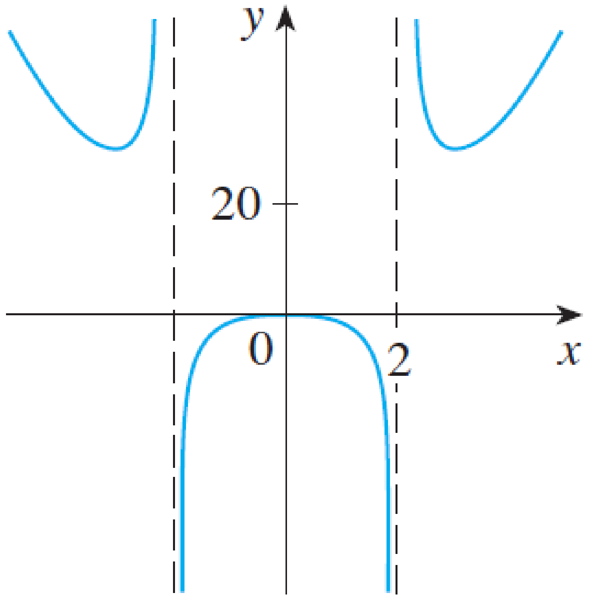


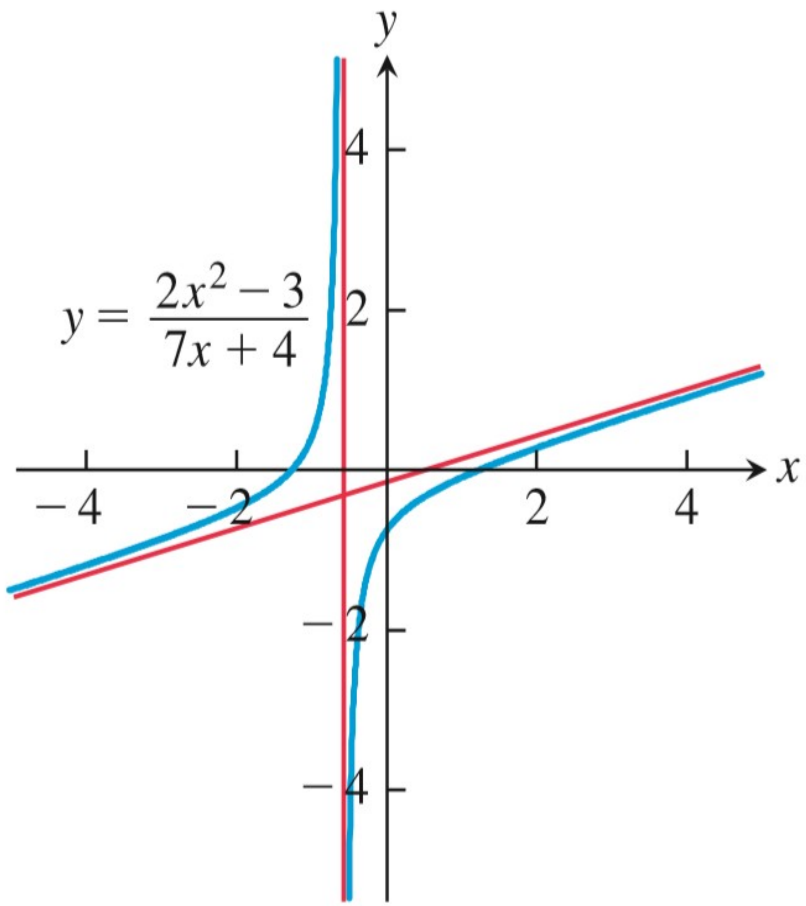
FIGURA 16

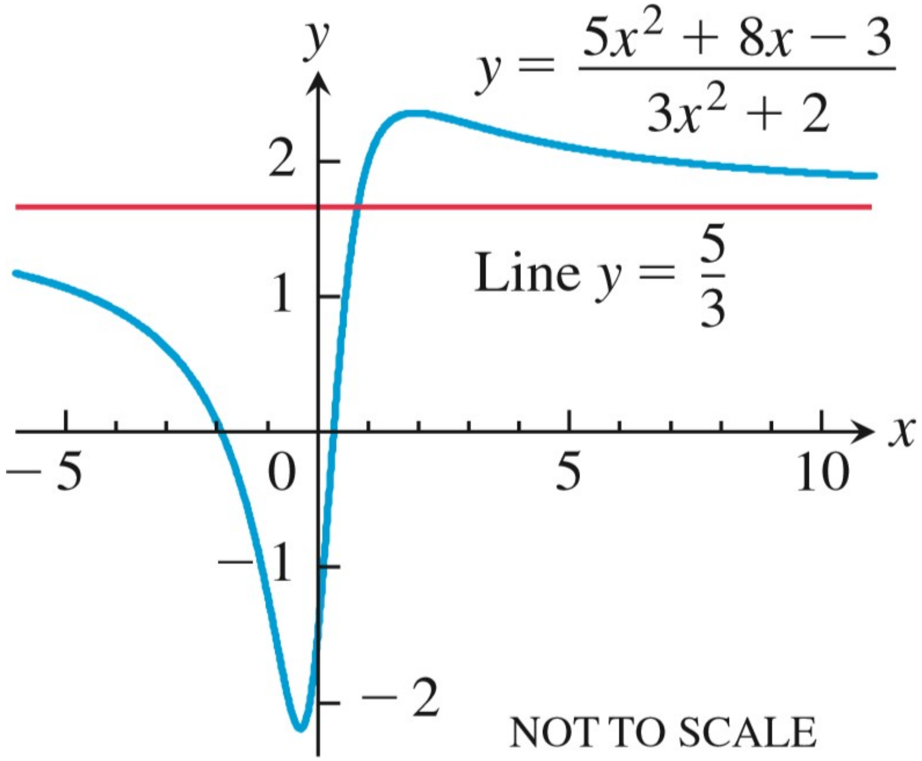
$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

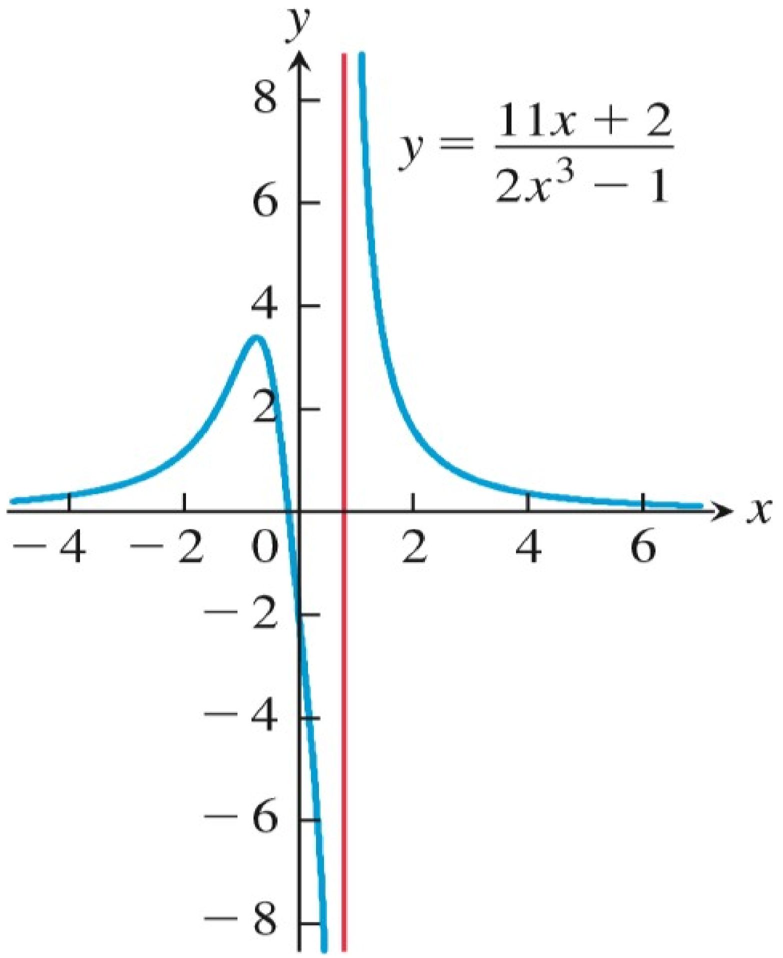
Funciones racionales

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936







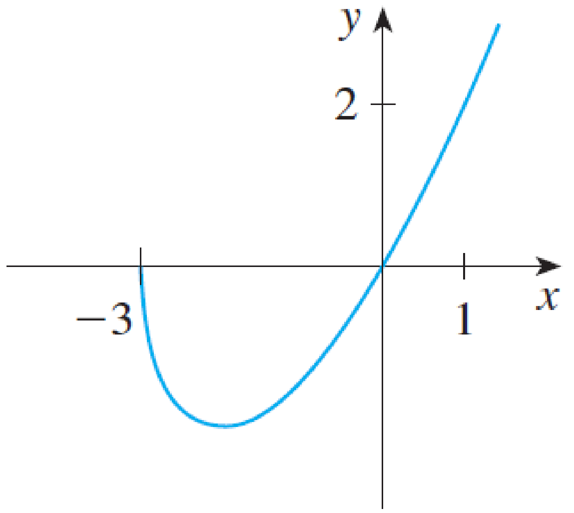
Funciones algebraicas

Una función f se llama *función algebraica* si puede construirse utilizando operaciones algebraicas (como suma, resta, multiplicación, división y tomando raíces) comenzando con las polinomiales. Cualquier función racional es automáticamente una función algebraica. Aquí hay dos ejemplos más:

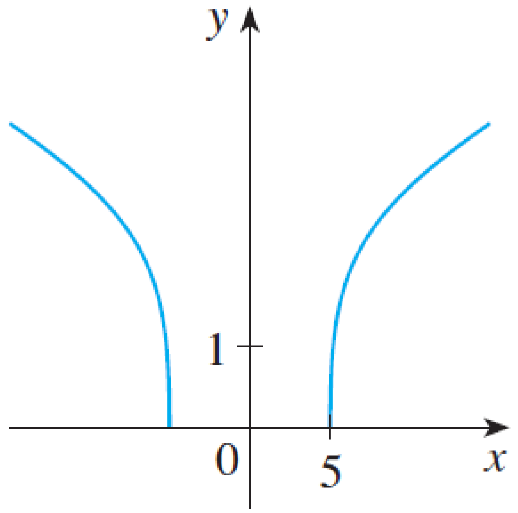
Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

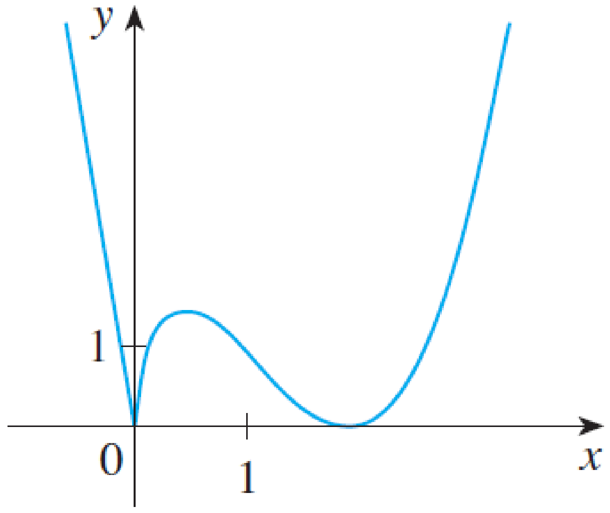
$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}$$



a) $f(x) = x\sqrt{x+3}$

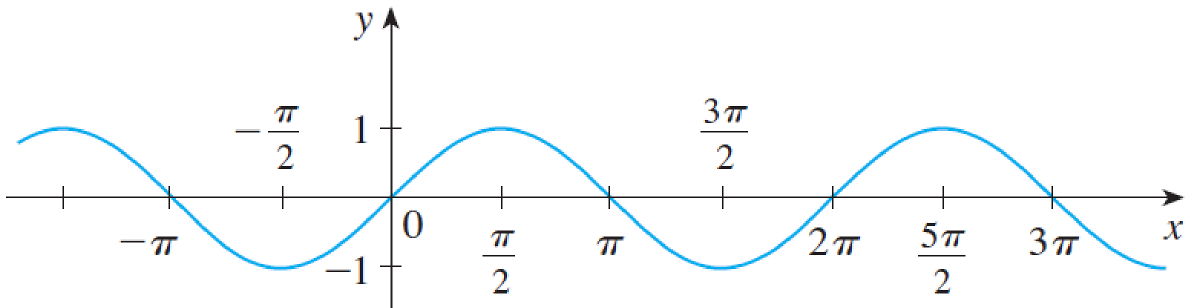


b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$

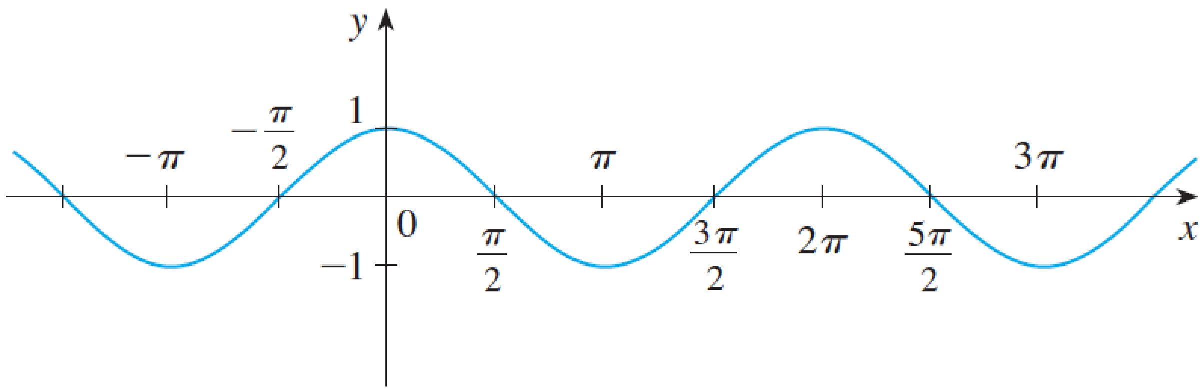


c) $h(x) = x^{2/3}(x-2)^2$

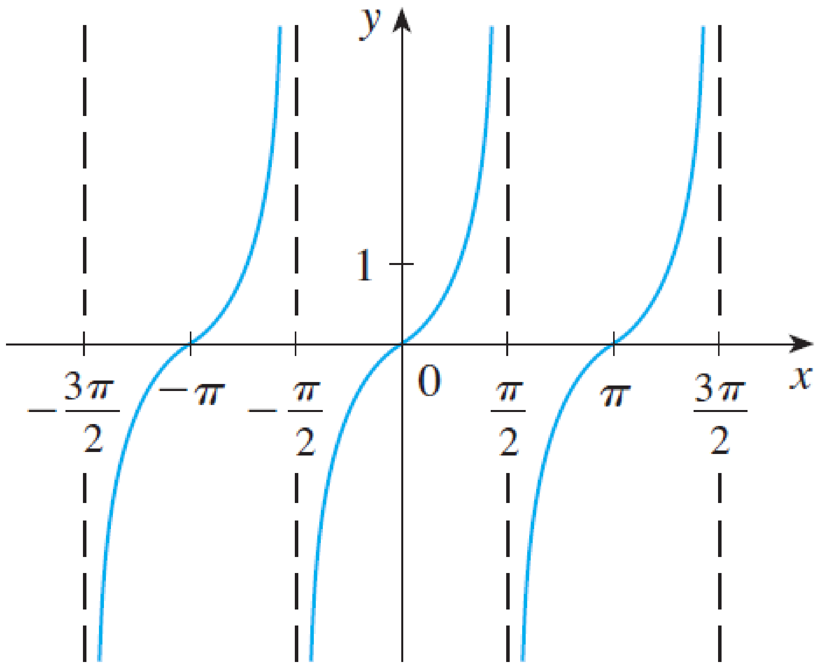
Funciones trigonométricas



a) $f(x) = \text{sen } x$



b) $g(x) = \cos x$



$y = \tan x$

$$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

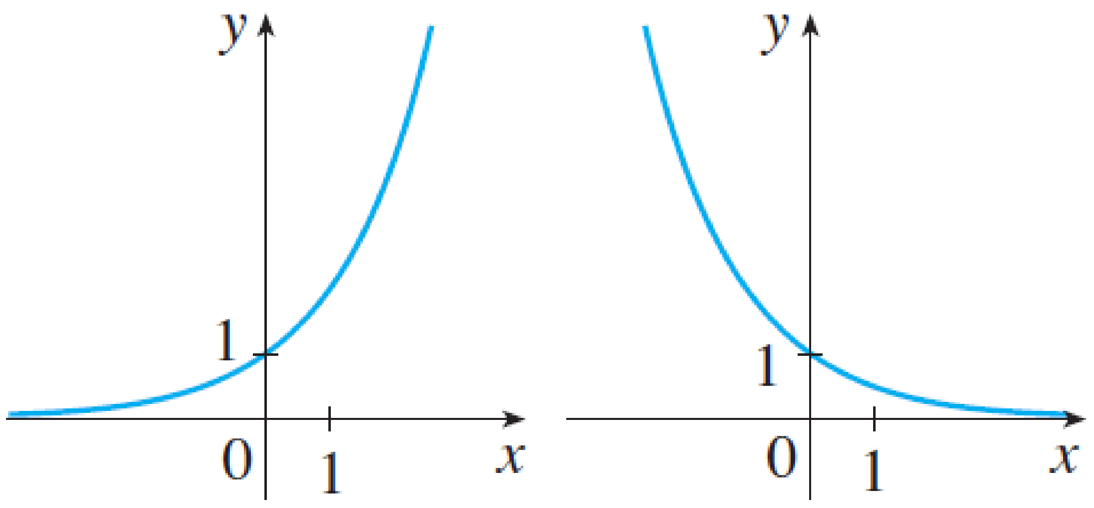
$$\text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } x \qquad \cos (x + 2\pi) = \cos x$$

La trigonometría y las funciones trigonométricas se repasan en la página de referencia 2 y también en el apéndice D. En Cálculo, por convención, siempre se utilizan medidas en radianes (excepto cuando se indique lo contrario). Por ejemplo, cuando utilizamos la función $f(x) = \text{sen } x$, se sobreentiende que sen x significa el seno de un ángulo cuya medida en radianes es x. Así, las gráficas de las funciones seno y coseno son como se muestra en la figura 18.

Funciones exponenciales

Las **funciones exponenciales** son funciones de la forma $f(x) = a^x$, donde la base a es una constante positiva. Las gráficas de $y = 2^x$ y $y = (0, 5)^x$ se muestran en la figura 20. En ambos casos el dominio es $(-\infty, \infty)$, y el rango es $(0, \infty)$.

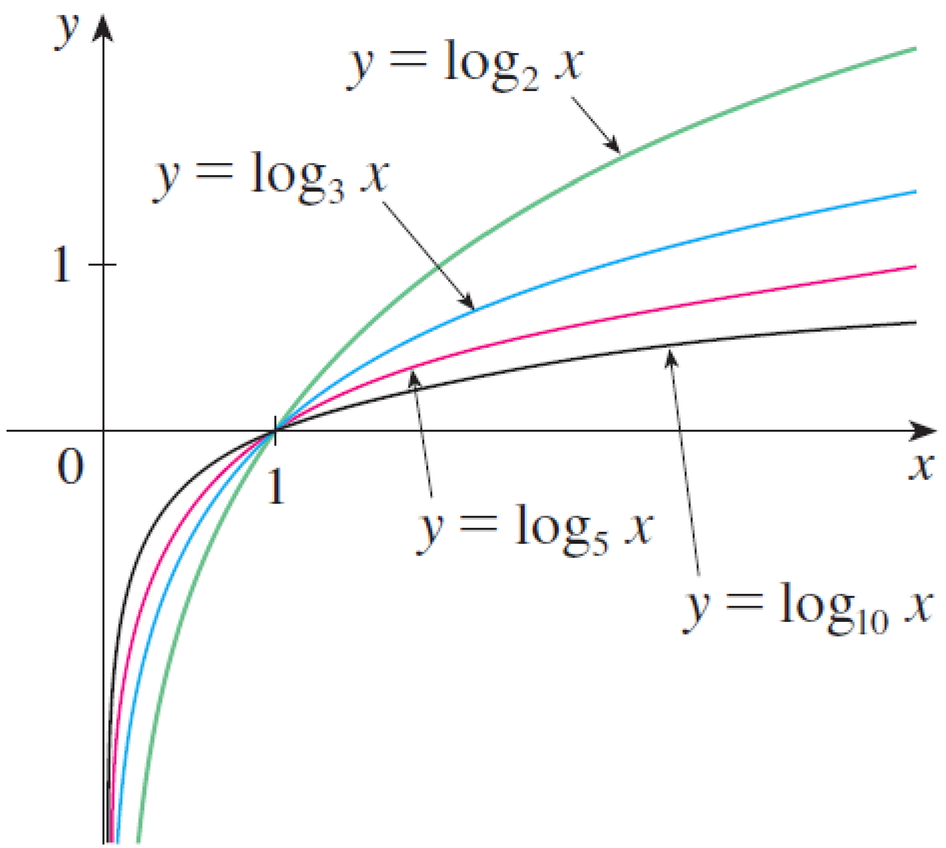
Las funciones exponenciales serán estudiadas en detalle en la sección 1.5, y veremos que son útiles para modelar muchos fenómenos naturales, como el crecimiento de una población (si $a > 1$) y la desintegración radiactiva (si $a < 1$).



a) $y = 2^x$ b) $y = (0.5)^x$

Funciones logarítmicas

Las **funciones logarítmicas** $f(x) = \log_a x$, donde la base a es una constante positiva, son las funciones inversas de las funciones exponenciales, que estudiaremos en la sección 1.6. La figura 21 muestra las gráficas de cuatro funciones logarítmicas con diferentes bases. En cada caso el dominio es $(0, \infty)$, el rango es $(-\infty, \infty)$, y la función crece lentamente cuando $x > 1$.



Ejercicios

1-2 Clasifique cada función como una función potencia, función raíz, polinomial (establezca su grado), función racional, función algebraica, función trigonométrica, función exponencial o función logarítmica.

1. a) $f(x) = \log_2 x$

b) $g(x) = \sqrt[4]{x}$

c) $h(x) = \dfrac{2x^3}{1 - x^2}$

d) $u(t) = 1 - 1.1t + 2.54t^2$

e) $v(t) = 5^t$

f) $w(\theta) = \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta$

2. a) $y = \pi^x$

b) $y = x^\pi$

c) $y = x^2(2 - x^3)$

d) $y = \tan t - \cos t$

e) $y = \dfrac{s}{1 + s}$

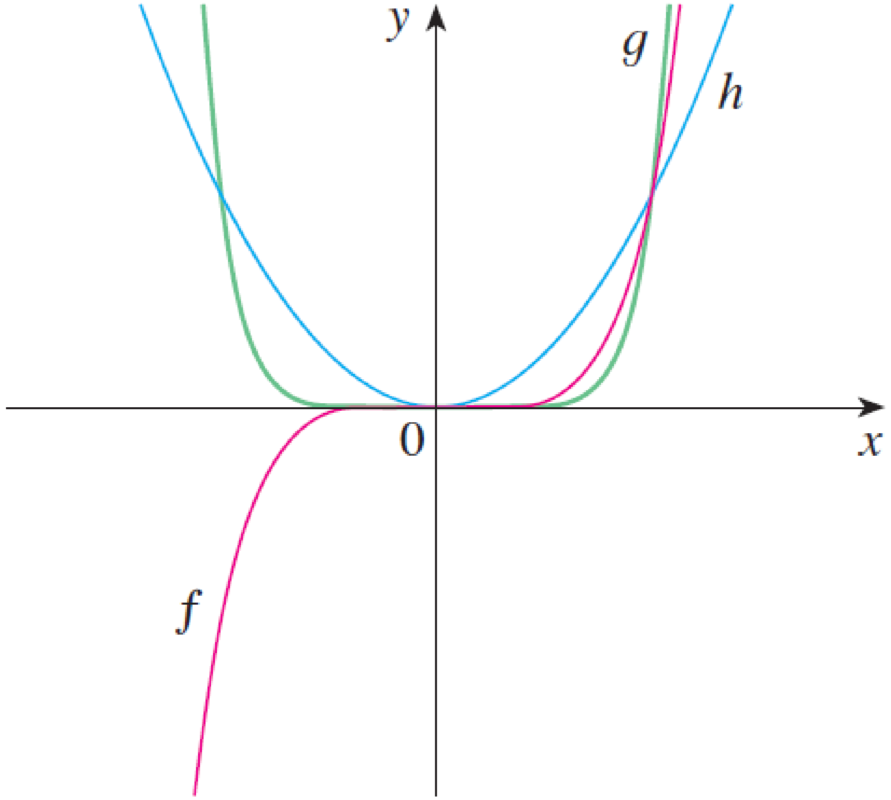
f) $y = \dfrac{\sqrt{x^3 - 1}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

Universidad Pontificia Bolivariana

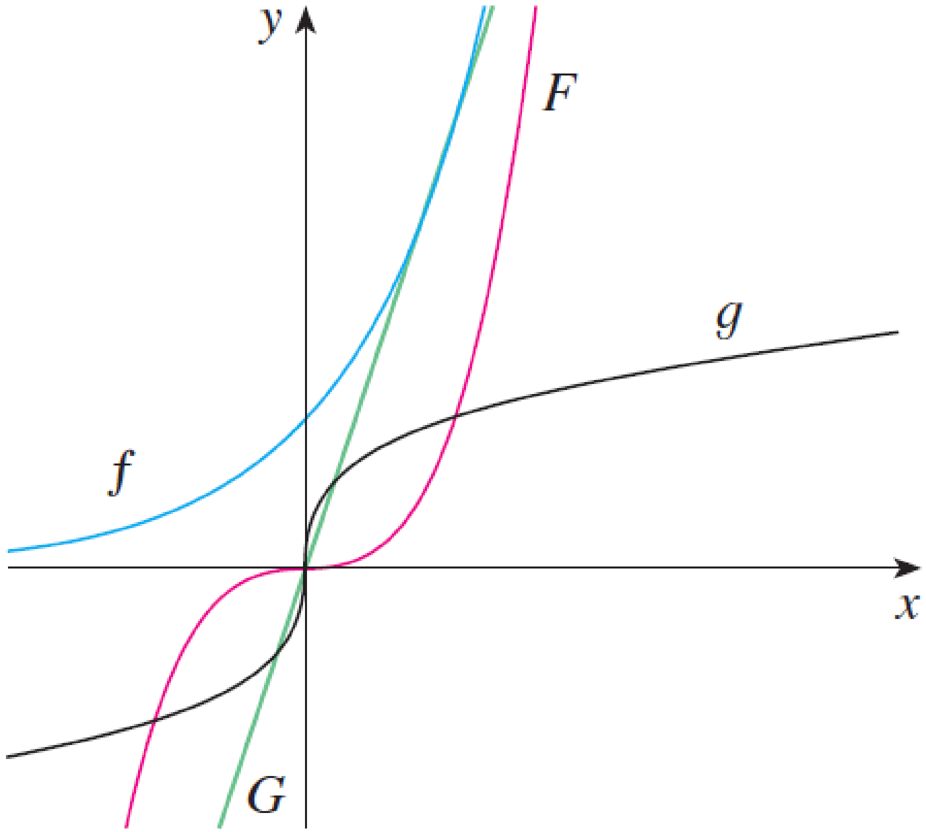
Fundada en 1936

3-4 Relacione cada una de las siguientes ecuaciones con su gráfica. Explique el porqué de su elección. (No utilice computadora o calculadora graficadora.)

3. a) $y = x^2$ b) $y = x^5$ c) $y = x^8$



4. a) $y = 3x$ b) $y = 3^x$
c) $y = x^3$ d) $y = \sqrt[3]{x}$



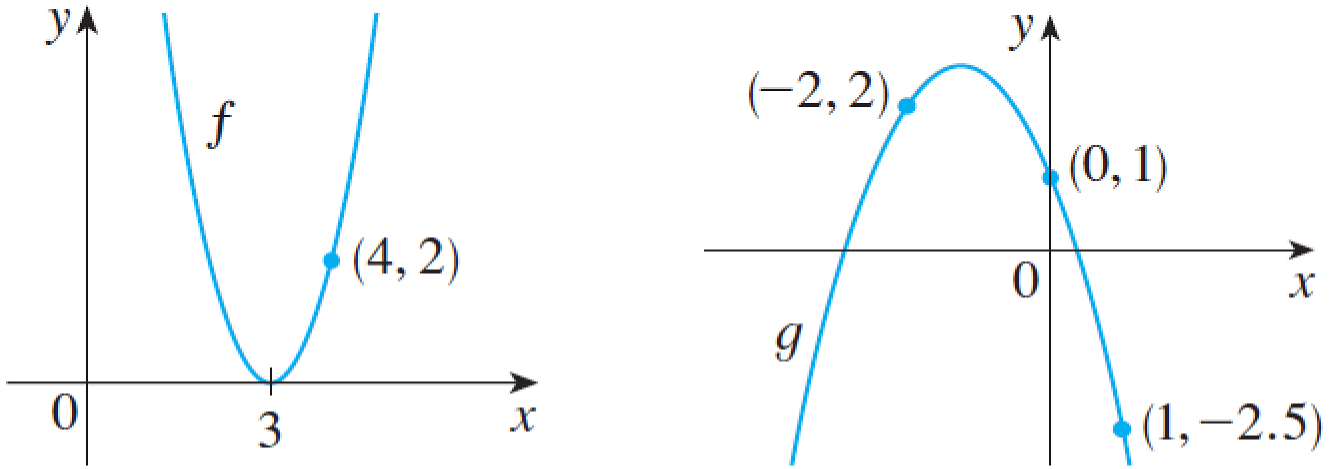
Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

5. a) Encuentre una ecuación para la familia de funciones lineales con pendiente 2 y esboce varios miembros de la familia.
b) Encuentre una ecuación para la familia de funciones lineales tal que $f(2) = 1$ y esboce varios miembros de la familia.
c) ¿Qué función pertenece a ambas familias?

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

8. Encuentre expresiones para las funciones cuadráticas cuyas gráficas se muestran.



9. Encuentre una expresión para una función cúbica f si $f(1) = 6$ y $f(-1) = f(0) = f(2) = 0$.

13. La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por la función lineal $F = \frac{9}{5}C + 32$.

a) Trace la gráfica de esta función.

b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa? ¿Cuál es la intersección con el eje F y qué representa?

18. El costo mensual de conducir un coche depende del número de millas recorridas. Lynn encontró que en mayo le costó \$380 conducir 480 millas y en junio le costó \$460 conducir 800 millas.

a) Exprese el costo mensual C como una función de la distancia recorrida d, suponiendo que una relación lineal da un modelo adecuado.

b) Utilice el inciso a) para predecir el costo de conducir 1 500 millas por mes.

c) Dibuje la gráfica de la función lineal. ¿Qué representa la pendiente?

d) ¿Qué representa la intersección en C?

e) ¿Por qué una función lineal es un modelo adecuado en esta situación?

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

16. El gerente de una fábrica de muebles encontró que cuesta \$2 200 fabricar 100 sillas en un día y \$4 800 producir 300 sillas en un solo día.

a) Exprese el costo en función del número de sillas producidas, suponiendo que es lineal. A continuación trace la gráfica.

b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?

c) ¿Cuál es la intersección en y de la gráfica y qué representa?

17. En la superficie del océano, la presión del agua es la misma que la presión del aire por encima del agua, 15 lb/pulg^2. Debajo de la superficie, la presión del agua aumenta 4.34 lb/pulg^2 por cada 10 pies de descenso.

a) Exprese la presión del agua en función de la profundidad bajo la superficie del océano.

b) ¿A qué profundidad la presión es de 100 lb/pulg^2?

REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.

Referencia en línea

http://www.ebooks7-24.com.consultaremota.upb.edu.co/stage.aspx?il


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín