Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

DESIGUALDADES E INECUACIONES

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Resolución de desigualdades lineales ▶ Resolución de desigualdades no lineales ▶ Desigualdades con valor absoluto

Una desigualdad es una relación de orden que se da entre dos cantidades empleando los símbolos $<$, $\leq$, $>$ y $\geq$. Cuando en una o en las dos cantidades aparece una variable decimos que la desigualdad es **en una variable**.

Al proceso de hallar todos los valores de la variable que hacen cierta la desigualdad se le conoce como **resolver la desigualdad**.

Al conjunto de todas las soluciones de una desigualdad se le llama **conjunto solución de la desigualdad.**

Dos desigualdades son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución.

Para resolver una desigualdad la transformamos en una desigualdad equivalente, en la que la solución es obvia, y para ello usamos las propiedades de orden de los números reales, las cuales son también válidas para expresiones algebraicas:

REGLAS PARA DESIGUALDADES

Regla	Descripción
1. $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad A + C \leq B + C$	**Sumar** la misma cantidad a cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
2. $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad A - C \leq B - C$	**Restar** la misma cantidad de cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
3. Si $C > 0$, entonces $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad CA \leq CB$	**Multiplicar** cada lado de una desigualdad por la misma cantidad *positiva* da una desigualdad equivalente.
4. Si $C < 0$, entonces $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad CA \geq CB$	**Multiplicar** cada lado de una desigualdad por la misma *cantidad negativa invierte la dirección* de la desigualdad.
5. Si $A > 0$ y $B > 0$, entonces $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{A} \geq \dfrac{1}{B}$	**Tomar** recíprocos de cada lado de una desigualdad que contenga cantidades *positivas invierte la dirección* de la desigualdad.
6. Si $A \leq B$ y $C \leq D$, entonces $A + C \leq B + D$	Las desigualdades se pueden sumar.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Solución de desigualdades lineales

Una desigualdad es **lineal** si cada término es constante o un múltiplo de la variable. Para resolver una desigualdad lineal, aislamos la variable en un lado del signo de desigualdad.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO 1 | Resolver una desigualdad lineal

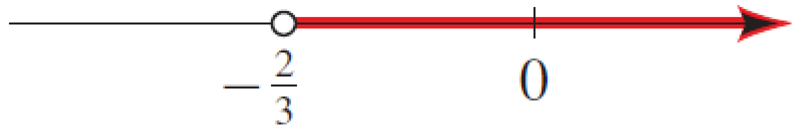
Resuelva la desigualdad $3x < 9x + 4$ y trace el conjunto solución.

SOLUCIÓN

$3x < 9x + 4$	Desigualdad dada
$3x - 9x < 9x + 4 - 9x$	Reste $9x$
$-6x < 4$	Simplifique
$\left(-\frac{1}{6}\right)(-6x) > \left(-\frac{1}{6}\right)(4)$	Multiplique por $-\frac{1}{6}$ e invierta la desigualdad
$x > -\frac{2}{3}$	Simplifique

Multiplicar por el número negativo $-\frac{1}{6}$ *invierte* la dirección de la desigualdad.

El conjunto solución está formado por todos los números mayores a $-\frac{2}{3}$. En otras palabras, la solución de la desigualdad es el intervalo $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$. Está graficada en la Figura 1.



$\left\{ x \in \mathbb{R} : x > -\frac{2}{3} \right\}$

EJEMPLO 2 | Resolver un par de desigualdades simultáneas

Resuelva las desigualdades $4 \leq 3x - 2 < 13$.

SOLUCIÓN El conjunto solución está formado por todos los valores de x que satisfacen las desigualdades $4 \leq 3x - 2$ y $3x - 2 < 13$. Usando las Reglas 1 y 3, vemos que las siguientes desigualdades son equivalentes:

$4 \leq 3x - 2 < 13$	Desigualdad dada
$6 \leq 3x < 15$	Sume 2
$2 \leq x < 5$	Divida entre 3

Por lo tanto, el conjunto de solución es $[2, 5)$, como se ve en la Figura 2.

FIGURA 2

■ Resuelva la desigualdad lineal. Exprese la solución usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

19. $3x + 11 \leq 6x + 8$

20. $6 - x \geq 2x + 9$

21. $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} > 2$

22. $\frac{2}{5}x + 1 < \frac{1}{5} - 2x$

23. $\frac{1}{3}x + 2 < \frac{1}{6}x - 1$

24. $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{6} + x$

29. $-1 < 2x - 5 < 7$

30. $1 < 3x + 4 \leq 16$

31. $-2 < 8 - 2x \leq -1$

32. $-3 \leq 3x + 7 \leq \frac{1}{2}$

33. $\dfrac{1}{6} < \dfrac{2x - 13}{12} \leq \dfrac{2}{3}$

34. $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{4 - 3x}{5} \leq \dfrac{1}{4}$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Solución de desigualdades no lineales

Para resolver este tipo de desigualdades procedemos en forma similar a como lo hacemos en ecuaciones, es decir, aplicamos propiedades y realizamos operaciones hasta tener 0 a un lado de la desigualdad, y el otro lado factorizado, y resolvemos la desigualdad teniendo en cuenta las "leyes de signos". Sean a, b y c números reales:

- Si $(a < 0$ y $b < 0)$, o $(a > 0$ y $b > 0)$ entonces $ab > 0$ y $\dfrac{a}{b} > 0$ si b $\neq 0$.
- Si $(a > 0$ y $b < 0)$ o $(a < 0$ y $b > 0)$ entonces $ab < 0$ y $\dfrac{a}{b} < 0$ si b $\neq 0$.
- $abc > 0$ si los tres factores son positivos, o si uno de ellos es positivo y los otros dos son negativos.
- $abc < 0$ si los tres factores son negativos, o si uno de ellos es negativo y los otros dos positivos.

GUÍA PARA RESOLVER DESIGUALDADES NO LINEALES

1. **Pase todos los términos a un lado.** Si es necesario, reescriba la desigualdad de modo que todos los términos diferentes de cero aparezcan en un lado del signo de desigualdad. Si el lado diferente de cero de la desigualdad contiene cocientes, páselos a un común denominador.
2. **Factorice.** Factorice el lado diferente de cero de la desigualdad.
3. **Encuentre los intervalos.** Determine los valores para los cuales cada factor es cero. Estos números dividirán la recta real en intervalos. Haga una lista de los intervalos que están determinados por estos números.
4. **Haga una tabla o diagrama.** Use valores de prueba para hacer una tabla o diagrama de los signos de cada factor en cada intervalo. En el último renglón de la tabla determine el signo del producto (o cociente) de estos factores.
5. **Resuelva.** Determine la solución de la desigualdad a partir del último renglón de la tabla de signos. Asegúrese de verificar si la desigualdad queda satisfecha por algunos o todos los puntos extremos de los intervalos. (Esto puede ocurrir si la desigualdad contiene $\leq$ o $\geq$.

La técnica de factorización que se describe en esta guía funciona sólo si todos los términos diferentes de cero aparecen en un lado del símbolo de desigualdad. Si la desigualdad no se escribe en esta forma, primero la reescribimos, como se indica en el Paso 1.

EJEMPLO 3 | Resolver una desigualdad cuadrática

Halle el conjunto solución de la desigualdad $-x < 2 - x^2$.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Solución:

1. Realizamos operaciones hasta tener 0 a un lado de la desigualdad:

$$x^2 - x - 2 < 0$$

2. Factorizamos el lado izquierdo:

$$(x-2)(x+1) < 0$$

3. Debemos hallar los valores para los cuales el producto de $x-2$ y $x+1$ es menor que 0.

   Para ello primero ubicamos sobre la recta real los números para los cuales uno de los factores es 0, en este caso: $x=2$ y $x=-1$, que definen los intervalos $(-\infty,-1)$, $(-1,2)$ y $(2,\infty)$.

Luego analizamos sobre la recta real los signos de cada factor en cada uno de estos intervalos y, con base en ellos, determinamos el signo del producto y el intervalo donde dicho producto es negativo.

Signo de (x - 2)	−	−	+
Signo de (x + 1)	−	+	+
Signo de (x - 2)(x + 1)	+	−	+

4. Finalmente analizamos si los extremos del intervalo satisfacen la desigualdad.

En este caso $x = 2$ y $x = -1$ no satisfacen la desigualdad ya que hacen cero el producto.

Luego, el conjunto solución de la desigualdad $x^2 < x + 2$ es

$$\{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 2\},$$

que es el intervalo $(-1, 2)$.

EJEMPLO 3 | Resolver una desigualdad cuadrática

Resuelva la desigualdad $x^2 \leq 5x - 6$.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

SOLUCIÓN Seguiremos la guía dada líneas antes.

Pase todos los términos a un lado. Pasamos todos los términos al lado izquierdo.

$$x^2 \leq 5x - 6 \qquad \text{Desigualdad dada}$$

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0 \qquad \text{Reste } 5x \text{, sume } 6$$

Factorice. Factorizando el lado izquierdo de la desigualdad, obtenemos

$$(x - 2)(x - 3) \leq 0 \qquad \text{Factorice}$$

Encuentre los intervalos. Los factores del lado izquierdo son $x - 2$ y $x - 3$. Estos factores son cero cuando x es 2 y 3, respectivamente. Como se ve en la Figura 3, los números 2 y 3 dividen la recta real en los tres intervalos

$$(-\infty, 2), (2, 3), (3, \infty)$$

Los factores $x - 2$ y $x - 3$ cambian de signo sólo en 2 y 3, respectivamente. Por lo tanto, estos factores mantienen su signo en cada uno de estos tres intervalos.

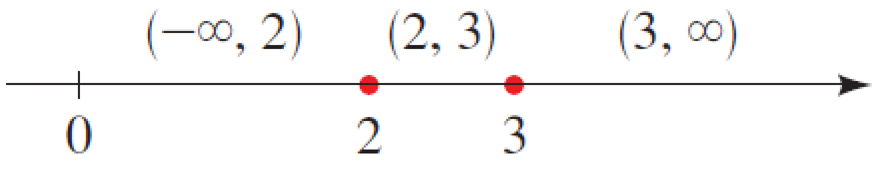
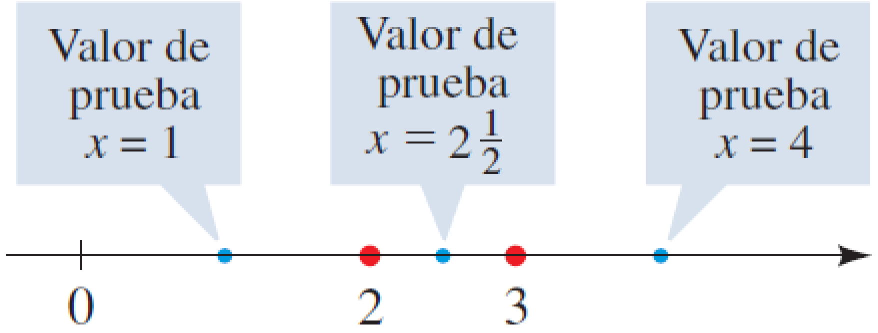


FIGURA 3

Haga una tabla o diagrama. Para determinar el signo de cada factor en cada uno de los intervalos que encontramos, usamos **valores de prueba.** Escogemos un número dentro de cada intervalo y comprobamos el signo de los factores $x - 2$ y $x - 3$ en el número que escojamos. Para el intervalo $(-\infty, 2)$, escojamos el valor de prueba 1 (vea Figura 4). Sustituyendo 1 por x en los factores $x - 2$ y $x - 3$, obtenemos

$$x - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$$
$$x - 3 = 1 - 3 = -2 < 0$$



Por lo tanto ambos factores son negativos en este intervalo. Nótese que necesitamos verificar sólo un valor de prueba por cada intervalo porque los factores $x - 2$ y $x - 3$ no cambian signo en ninguno de los tres intervalos que encontramos.

Usando los valores de prueba $x = 2\frac{1}{2}$ y $x = 4$ para los intervalos $(2, 3)$ y $(3, \infty)$ (vea Figura 4), respectivamente, construimos la siguiente tabla de signos. El renglón final de la tabla se obtiene del dato que la expresión del último renglón es el producto de los dos factores.

Intervalo	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de $x - 2$	$-$	$+$	$+$
Signo de $x - 3$	$-$	$-$	$+$
Signo de $(x - 2)(x - 3)$	$+$	$-$	$+$

Si el lector así lo prefiere, puede representar esta información en una recta real, como en el siguiente diagrama de signos. Las rectas verticales indican los puntos en los que la recta real está dividida en intervalos:

		2		3	
Signo de $x - 2$	$-$		$+$		$+$
Signo de $x - 3$	$-$		$-$		$+$
Signo de $(x - 2)(x - 3)$	$+$		$-$		$+$

Resuelva. Leemos de la tabla o el diagrama que $(x - 2)(x - 3)$ es negativo en el intervalo $(2, 3)$. Entonces, la solución de la desigualdad $(x - 2)(x - 3) \leq 0$ es

$$\{x \mid 2 \leq x \leq 3\} = [2, 3]$$

Hemos incluido los puntos extremos 2 y 3 porque buscamos valores de x tales que el producto es menor o *igual a* cero. La solución está ilustrada en la Figura 5.

EJEMPLO 4 | Resolver una desigualdad con factores repetidos

Resuelva la desigualdad $x(x-1)^2(x-3) < 0$.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

SOLUCIÓN Todos los términos diferentes de cero ya están en un lado de la desigualdad, y el lado diferente de cero de la desigualdad ya está factorizado. Por lo tanto, empezamos por hallar los intervalos para esta desigualdad.

Encuentre los intervalos. Los factores del lado izquierdo son x, $(x-1)^2$ y $x-3$. Éstos son cero cuando $x = 0, 1, 3$. Estos números dividen la recta real en los intervalos

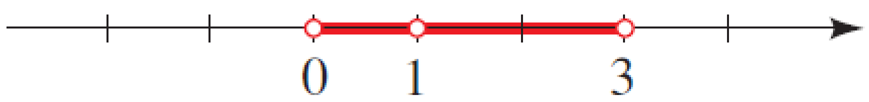
$$(-\infty, 0), (0, 1), (1, 3), (3, \infty)$$

Haga un diagrama. Hacemos el siguiente diagrama, usando puntos de prueba para determinar el signo de cada factor en cada intervalo.

		0		1		3	
Signo de x	$-$		$+$		$+$		$+$
Signo de $(x-1)^2$	$+$		$+$		$+$		$+$
Signo de $(x-3)$	$-$		$-$		$-$		$+$
Signo de $x(x-1)^2(x-3)$	$+$		$-$		$-$		$+$

Resuelva. Del diagrama vemos que $x(x-1)^2(x-3) < 0$ para x en el intervalo $(0, 1)$ o para x en $(1, 3)$. Por lo tanto, el conjunto solución es la unión de estos dos intervalos:

$$x \in \quad (0, 1) \cup (1, 3)$$



El conjunto solución está graficado en la Figura 6.

EJEMPLO 5 | Resolver una desigualdad con un cociente

Resuelva la desigualdad $\dfrac{1+x}{1-x} \geq 1$

SOLUCIÓN

Pase todos los términos a un lado. Movemos los términos al lado izquierdo y simplificamos usando un denominador común.

$$\frac{1+x}{1-x} \geq 1 \qquad \text{Desigualdad dada}$$

$$\frac{1+x}{1-x} - 1 \geq 0 \qquad \text{Reste 1}$$

$$\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} \geq 0 \qquad \text{Denominador común } 1-x$$

$$\frac{1+x-1+x}{1-x} \geq 0 \qquad \text{Combine las fracciones}$$

$$\frac{2x}{1-x} \geq 0 \qquad \text{Simplifique}$$

Es tentador simplemente multiplicar ambos lados de la desigualdad por $1 - x$ (como se haría si fuera una *ecuación*.) Pero esto no funciona porque no sabemos si $1 - x$ es positivo o negativo, de modo que no podemos decir si la desigualdad necesita ser invertida.

Encuentre los intervalos. Los factores del lado izquierdo son $2x$ y $1 - x$. Éstos son cero cuando x es 0 y 1. Estos números dividen la recta real en los intervalos

$$(-\infty, 0), (0, 1), (1, \infty)$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

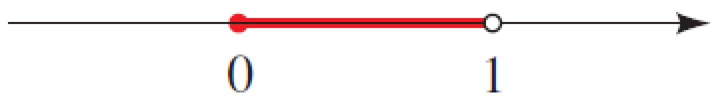
Haga un diagrama. Hacemos el siguiente diagrama usando puntos de prueba para determinar el signo de cada factor en cada intervalo.

	$x<0$	0	$0<x<1$	1	$x>1$
Signo de $2x$	$-$		$+$		$+$
Signo de $1 - x$	$+$		$+$		$-$
Signo de $\dfrac{2x}{1-x}$	$-$		$+$		$-$

Resuelva. Del diagrama vemos que $\dfrac{2x}{1-x} \geq 0$ para x en el intervalo $[0, 1)$. Incluimos el punto extremo 0 porque la desigualdad original requiere que el cociente sea mayor *o igual a* 1. No obstante, no incluimos el otro punto extremo 1 porque el cociente de la desigualdad no está definido en 1. Por lo tanto, el conjunto solución es el intervalo

$$x \in [0, 1)$$

El conjunto solución está graficado en la Figura 7.



■ Resuelva la desigualdad no lineal. Exprese la solución usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

41. $2x^2 + x \geq 1$

42. $x^2 < x + 2$

43. $3x^2 - 3x < 2x^2 + 4$

44. $5x^2 + 3x \geq 3x^2 + 2$

45. $x^2 > 3(x + 6)$

46. $x^2 + 2x > 3$

51. $(x - 4)(x + 2)^2 < 0$

52. $(x + 3)^2(x + 1) > 0$

53. $(x - 2)^2(x - 3)(x + 1) \leq 0$

54. $x^2(x^2 - 1) \geq 0$

57. $\dfrac{x - 3}{x + 1} \geq 0$

58. $\dfrac{2x + 6}{x - 2} < 0$

59. $\dfrac{4x}{2x + 3} > 2$

60. $-2 < \dfrac{x + 1}{x - 3}$

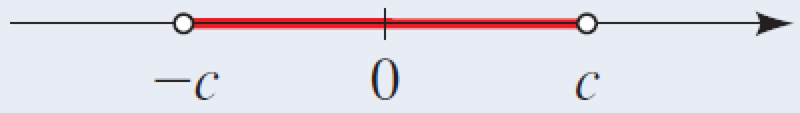
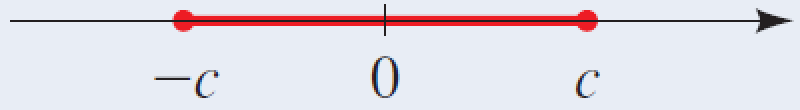
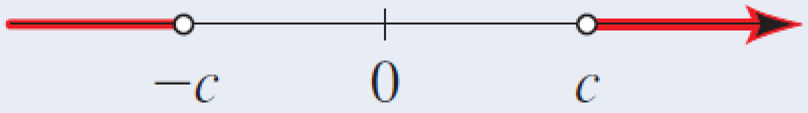
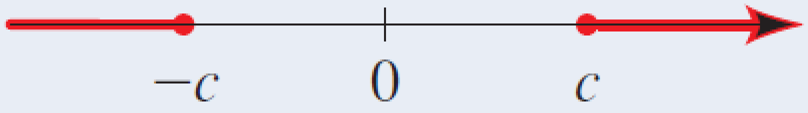
61. $\dfrac{2x + 1}{x - 5} \leq 3$

62. $\dfrac{3 + x}{3 - x} \geq 1$

Desigualdades con valor absoluto

Usamos las siguientes propiedades para resolver desigualdades que contienen valor absoluto.

PROPIEDADES DE DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO

Desigualdad	Forma equivalente	Gráfica
1. $\lvert x \rvert < c$	$-c < x < c$	
2. $\lvert x \rvert \leq c$	$-c \leq x \leq c$	
3. $\lvert x \rvert > c$	$x < -c$ o $c < x$	
4. $\lvert x \rvert \geq c$	$x \leq -c$ o $c \leq x$	

EJEMPLO 6 | Resolver una desigualdad con valor absoluto

Resuelva la desigualdad $|x - 5| < 2$.

SOLUCIÓN 1 La desigualdad $|x - 5| < 2$ es equivalente a

$$-2 < x - 5 < 2 \qquad \text{Propiedad 1}$$

$$3 < x < 7 \qquad \text{Sume 5}$$

El conjunto solución es el intervalo abierto $(3, 7)$.

SOLUCIÓN 2 Geométricamente, el conjunto solución está formado por todos los números x cuya distancia desde 5 es menor a 2. De la Figura 9 vemos que éste es el intervalo (3, 7).

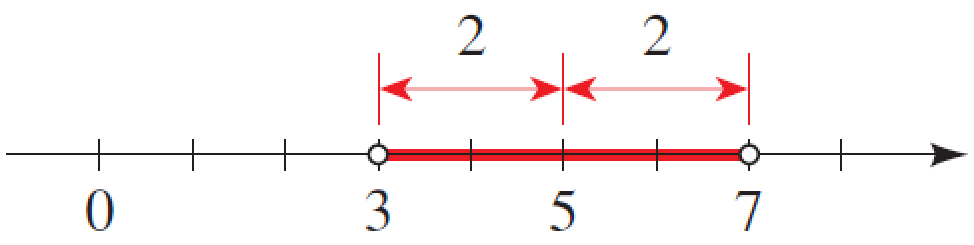


FIGURA 9

EJEMPLO 7 | Resolver una desigualdad con valor absoluto

Resuelva la desigualdad $|3x + 2| \geq 4$.

SOLUCIÓN Por la Propiedad 4, la desigualdad $|3x + 2| \geq 4$ es equivalente a

$$3x + 2 \geq 4 \quad \text{o} \quad 3x + 2 \leq -4$$

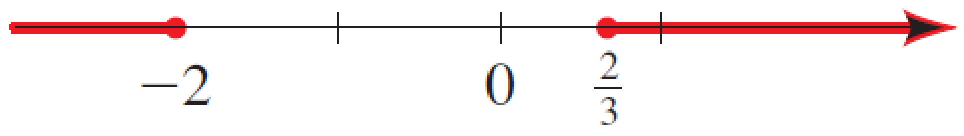
$$3x \geq 2 \qquad\qquad 3x \leq -6 \qquad \text{Reste 2}$$

$$x \geq \tfrac{2}{3} \qquad\qquad x \leq -2 \qquad \text{Divida entre 3}$$

Entonces el conjunto solución es

$$\{x \mid x \leq -2 \quad \text{o} \quad x \geq \tfrac{2}{3}\} = (-\infty, -2] \cup [\tfrac{2}{3}, \infty)$$

El conjunto está graficado en la Figura 10.



73–88 ■ Resuelva la desigualdad con valor absoluto. Exprese la respuesta usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

73. $|x| \leq 4$

74. $|3x| < 15$

75. $|2x| > 7$

76. $\frac{1}{2}|x| \geq 1$

77. $|x - 5| \leq 3$

78. $|x + 1| \geq 1$

79. $|2x - 3| \leq 0.4$

80. $|5x - 2| < 6$

81. $|3x - 2| \geq 5$

82. $|8x + 3| > 12$

83. $\left|\dfrac{x - 2}{3}\right| < 2$

84. $\left|\dfrac{x + 1}{2}\right| \geq 4$

85. $|x + 6| < 0.001$

86. $3 - |2x + 4| \leq 1$

87. $8 - |2x - 1| \geq 6$

88. $7|x + 2| + 5 > 4$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

REFERENCIA

Stewart, J., Precálculo Matemáticas para el Cálculo, Cengage Learning, séptima edición.

Referencia en línea

http://www.ebooks7-24.com.consultaremota.upb.edu.co/stage.aspx?il


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín