Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

ENCUENTRO 6.2

Sección 1.3: Transformaciones de funciones, combinación y composición de funciones

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Transformaciones de funciones

Mediante la aplicación de ciertas transformaciones de la gráfica de una función dada, podemos obtener las gráficas de algunas funciones relacionadas. Esto nos dará la posibilidad de esbozar rápidamente a mano las gráficas de muchas funciones. También nos permitirá expresar ecuaciones para las gráficas dadas. Consideremos primero las **traslaciones**. Si c es un número positivo, entonces la gráfica de $y = f(x) + c$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada verticalmente hacia arriba una distancia de c unidades (ya que cada coordenada y se incrementa por el mismo número c). Por otro lado, si $g(x) = f(x - c)$, donde $c > 0$, entonces el valor de g en x es el mismo que el valor de f en $x - c$ (c unidades a la izquierda de x). Así, la gráfica de $y = f(x - c)$ es la gráfica de $y = f(x)$, desplazada c unidades a la derecha (véase la figura 1).

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Desplazamientos vertical y horizontal Suponga que $c > 0$. Para obtener la gráfica de

$y = f(x) + c$, desplace verticalmente c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$
$y = f(x) - c$, desplace verticalmente c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$
$y = f(x - c)$, desplace horizontalmente c unidades a la derecha la gráfica de $y = f(x)$
$y = f(x + c)$, desplace horizontalmente c unidades a la izquierda la gráfica de $y = f(x)$

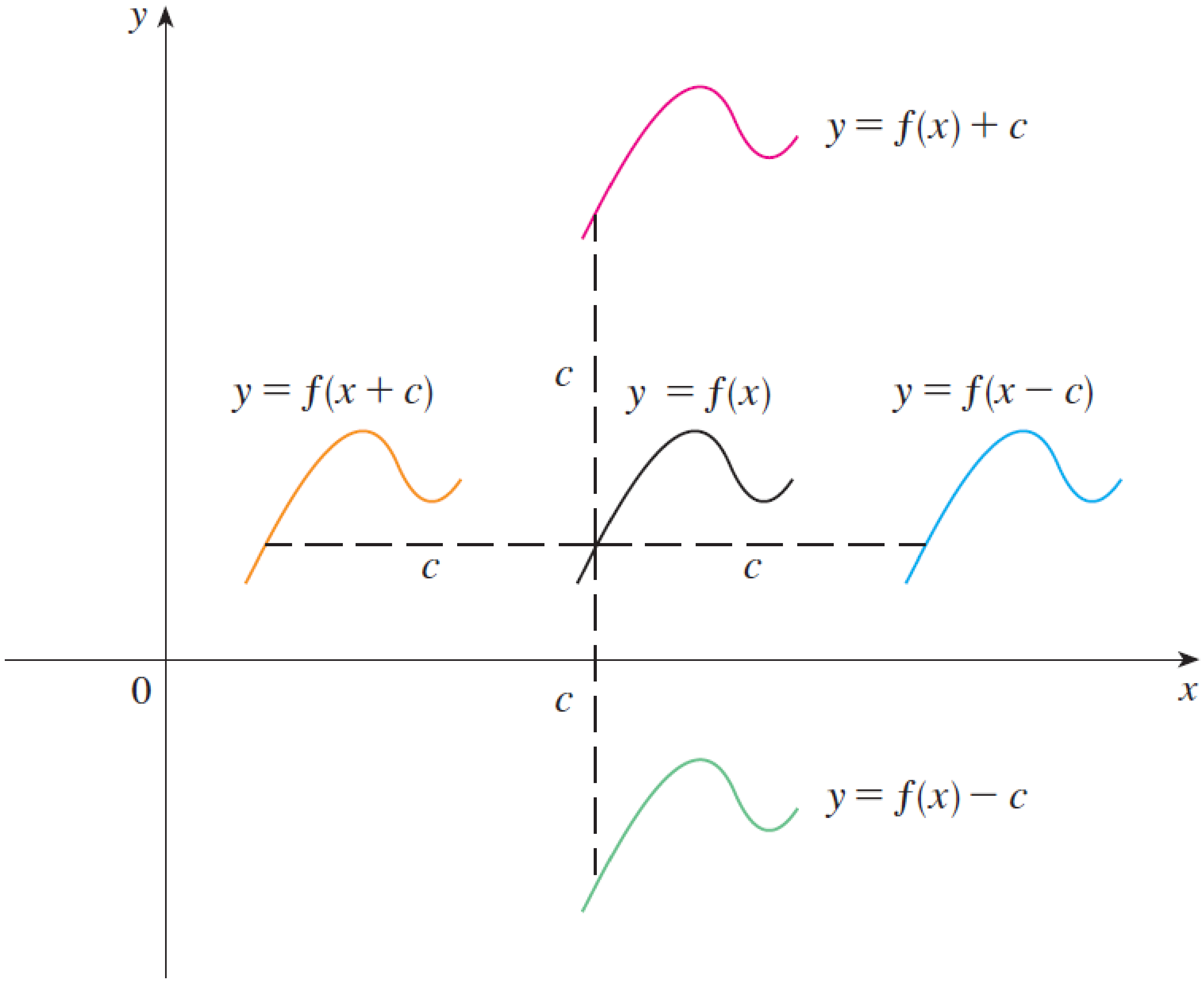


FIGURA 1
Traslación de la gráfica de f

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Ahora consideremos las transformaciones por **estiramiento** y **reflexión**. Si $c > 1$, entonces la gráfica de $y = cf(x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ alargada verticalmente por un factor de c (porque cada coordenada y, se multiplica por el número c). La gráfica de $y = -f(x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ reflejada en relación con el eje x porque el punto (x, y) se reemplaza por el punto $(x, -y)$. (Véase la figura 2 y el siguiente cuadro, donde también se dan los resultados de otras transformaciones de alargamiento, compresión y reflexión.)

Alargamientos y reflexiones vertical y horizontal Supongamos que $c > 1$. Para obtener la gráfica de

$y = cf(x)$, alargar verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.

$y = (1/c)\,f(x)$, comprimir verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.

$y = f(cx)$, comprimir horizontalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.

$y = f(x/c)$, alargar horizontalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.

$y = -f(x)$, reflejar la gráfica de $y = f(x)$ sobre el eje x

$y = f(-x)$, reflejar la gráfica de $y = f(x)$ sobre el eje y

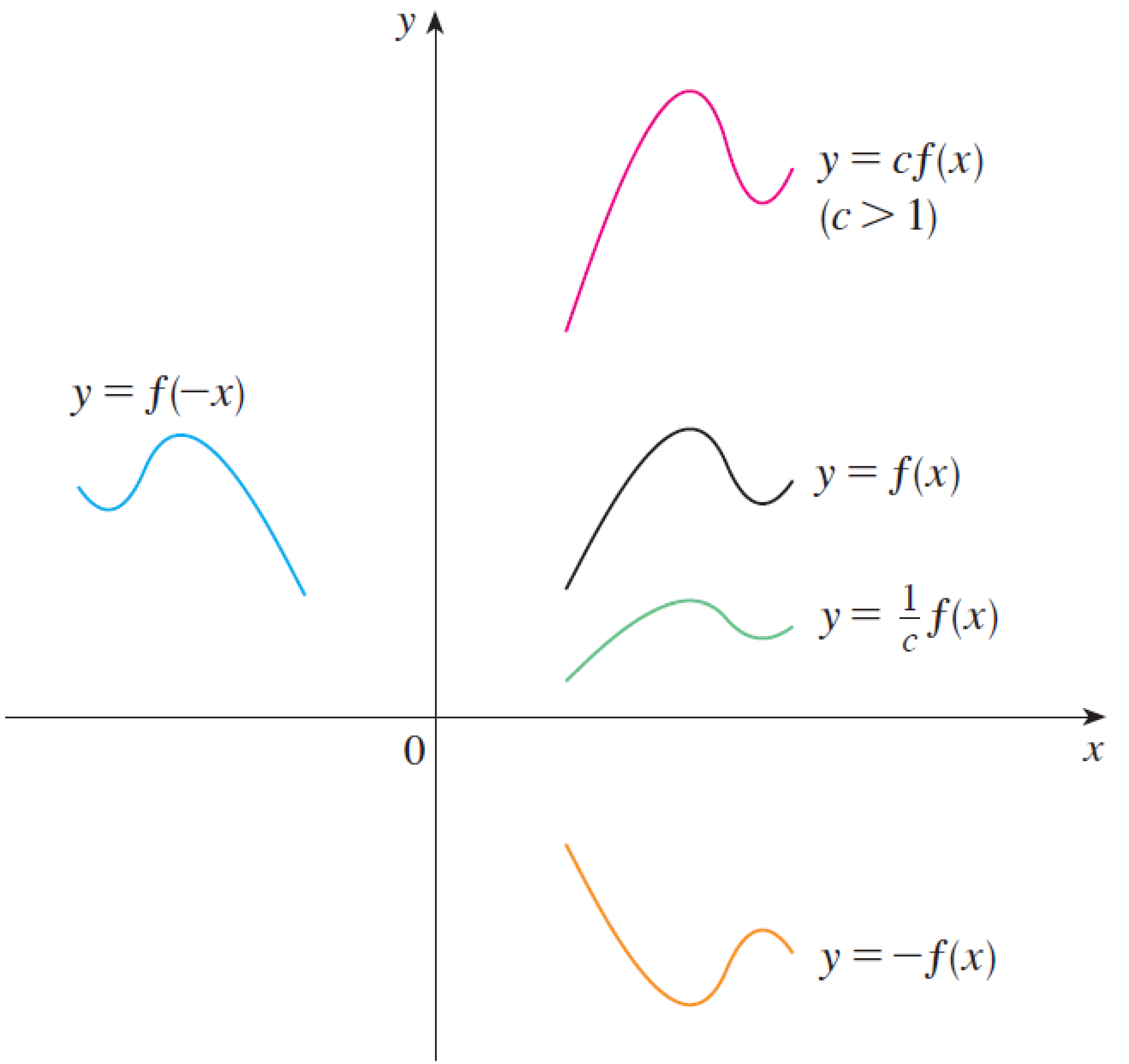


FIGURA 2

Estiramiento y reflexión de la gráfica de f

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

La figura 3 ilustra estas transformaciones de alargamiento cuando se aplican a la función coseno con $c = 2$. Por ejemplo, para obtener la gráfica de $y = 2 \cos x$ multiplicamos la coordenada y de cada punto en la gráfica de $y = \cos x$ por 2. Esto significa que la gráfica de $y = \cos x$ se alarga verticalmente por un factor de 2.

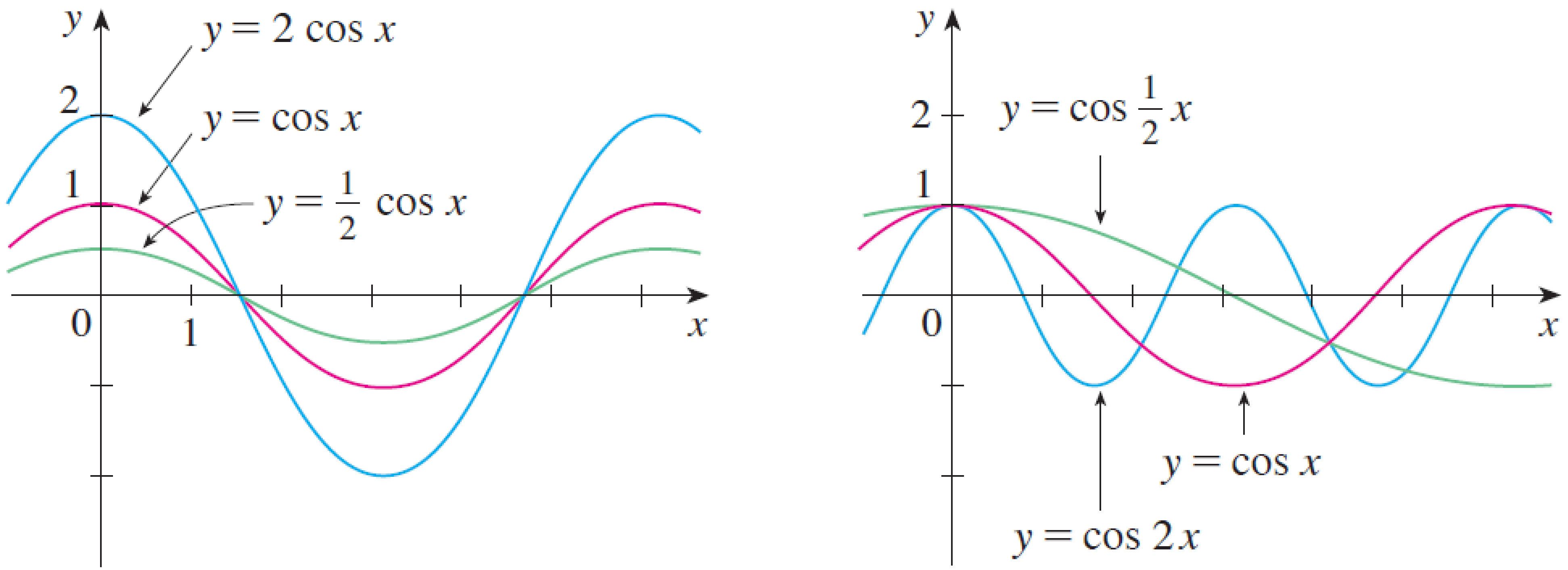
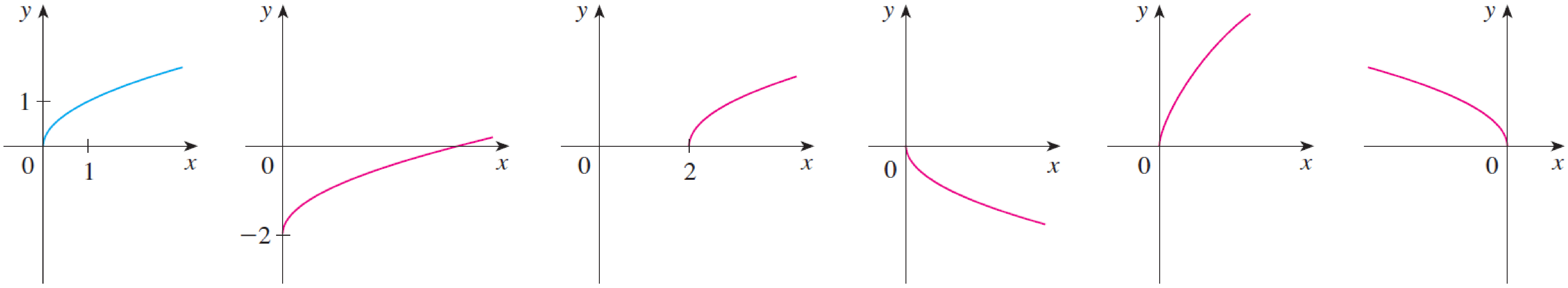


FIGURA 3

V EJEMPLO 1 Dada la gráfica de $y = \sqrt{x}$, use transformaciones para graficar $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x-2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ y $y = \sqrt{-x}$.

SOLUCIÓN La gráfica de la función raíz cuadrada $y = \sqrt{x}$, obtenida de la figura 13a) en la sección 1.2, se muestra en la figura 4a). En otras partes de la figura se ha trazado $y = \sqrt{x} - 2$ desplazándola 2 unidades hacia abajo, $y = \sqrt{x-2}$ por desplazamiento de 2 unidades a la derecha, $y = -\sqrt{x}$ reflejando sobre el eje x, $y = 2\sqrt{x}$ estirando verticalmente por un factor de 2 y $y = \sqrt{-x}$ reflejando sobre el eje y.



a) $y = \sqrt{x}$ b) $y = \sqrt{x} - 2$ c) $y = \sqrt{x-2}$ d) $y = -\sqrt{x}$ e) $y = 2\sqrt{x}$ f) $y = \sqrt{-x}$

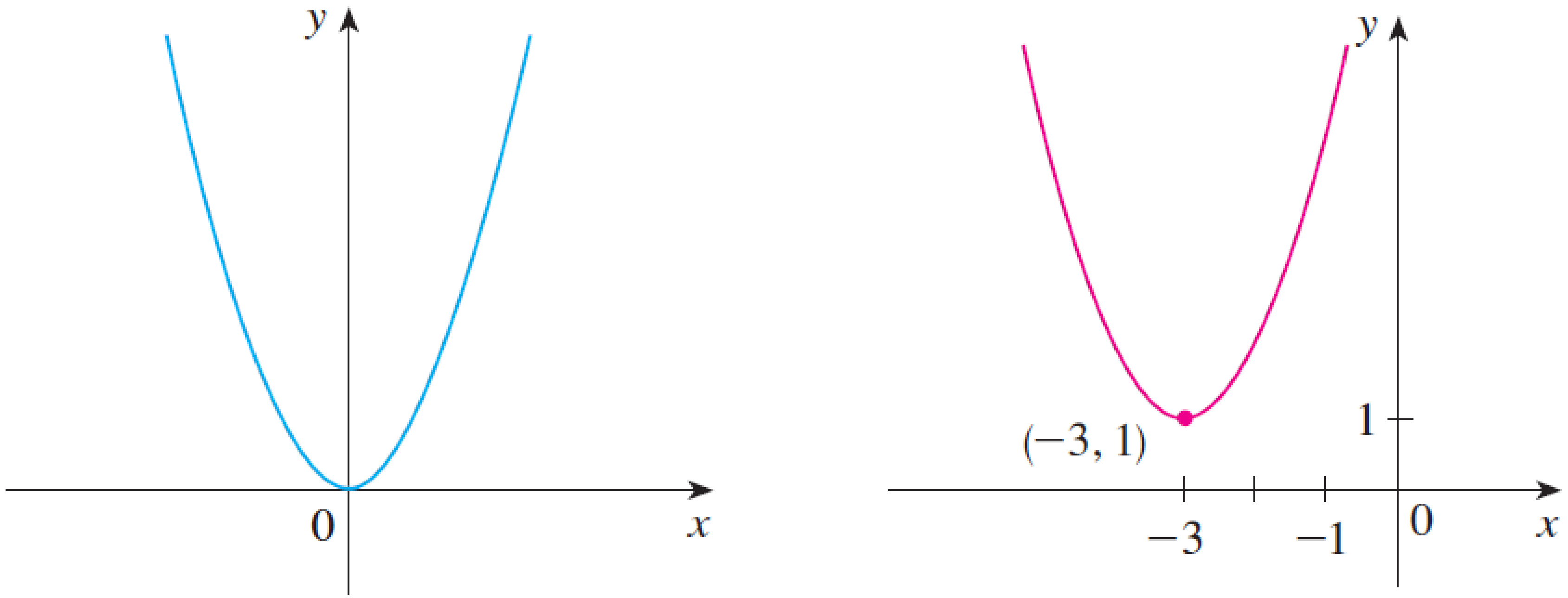
FIGURA 4

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

SOLUCIÓN Completando el cuadrado, escribimos la ecuación de la gráfica como

$$y = x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$$

Esto significa que obtenemos la gráfica deseada iniciando con la parábola $y = x^2$ y desplazándola 3 unidades a la izquierda y, a continuación, 1 unidad hacia arriba (véase la figura 5).



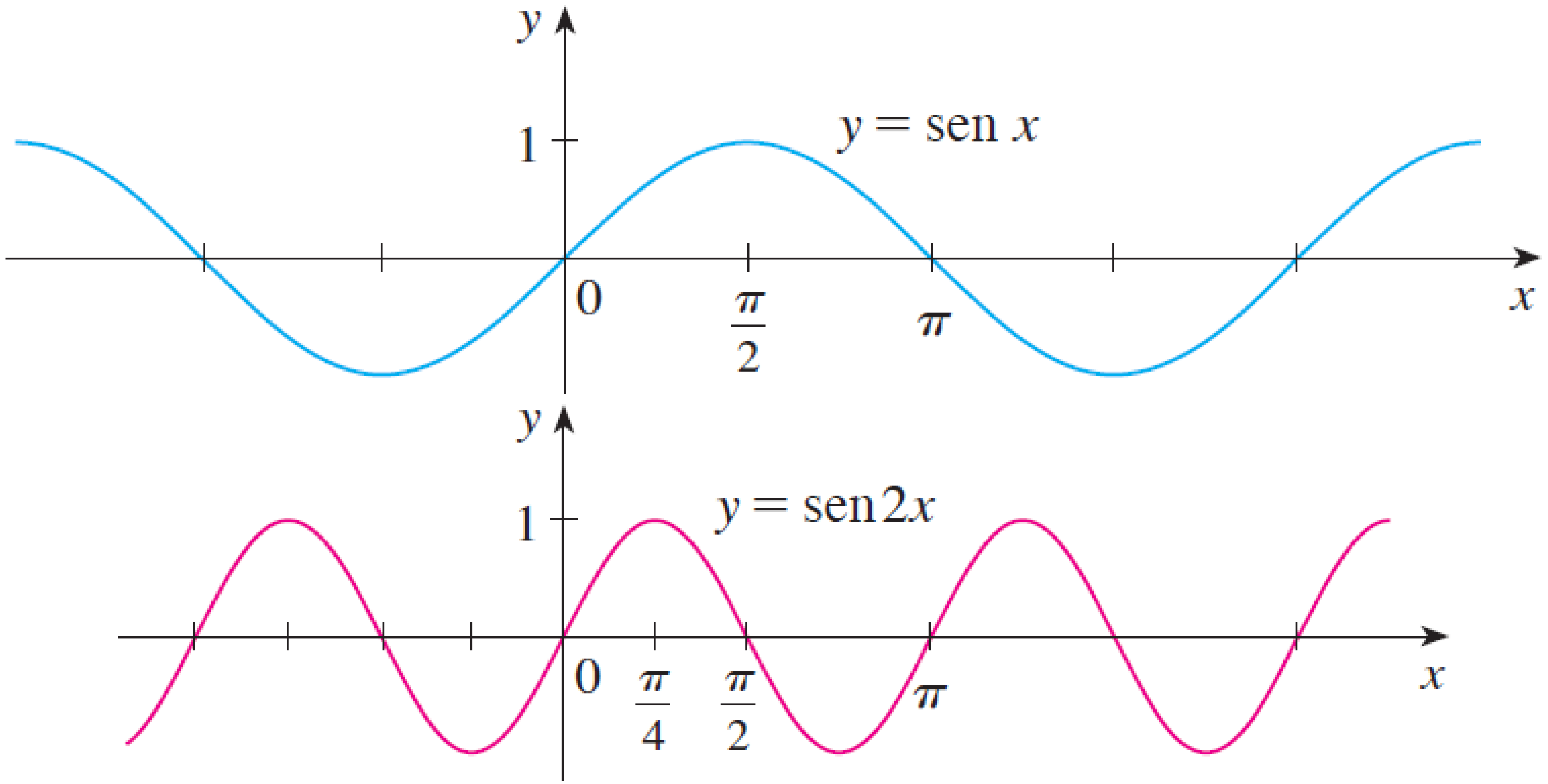
a) $y = x^2$ b) $y = (x+3)^2 + 1$

EJEMPLO 3 Trace las gráficas de las siguientes funciones.

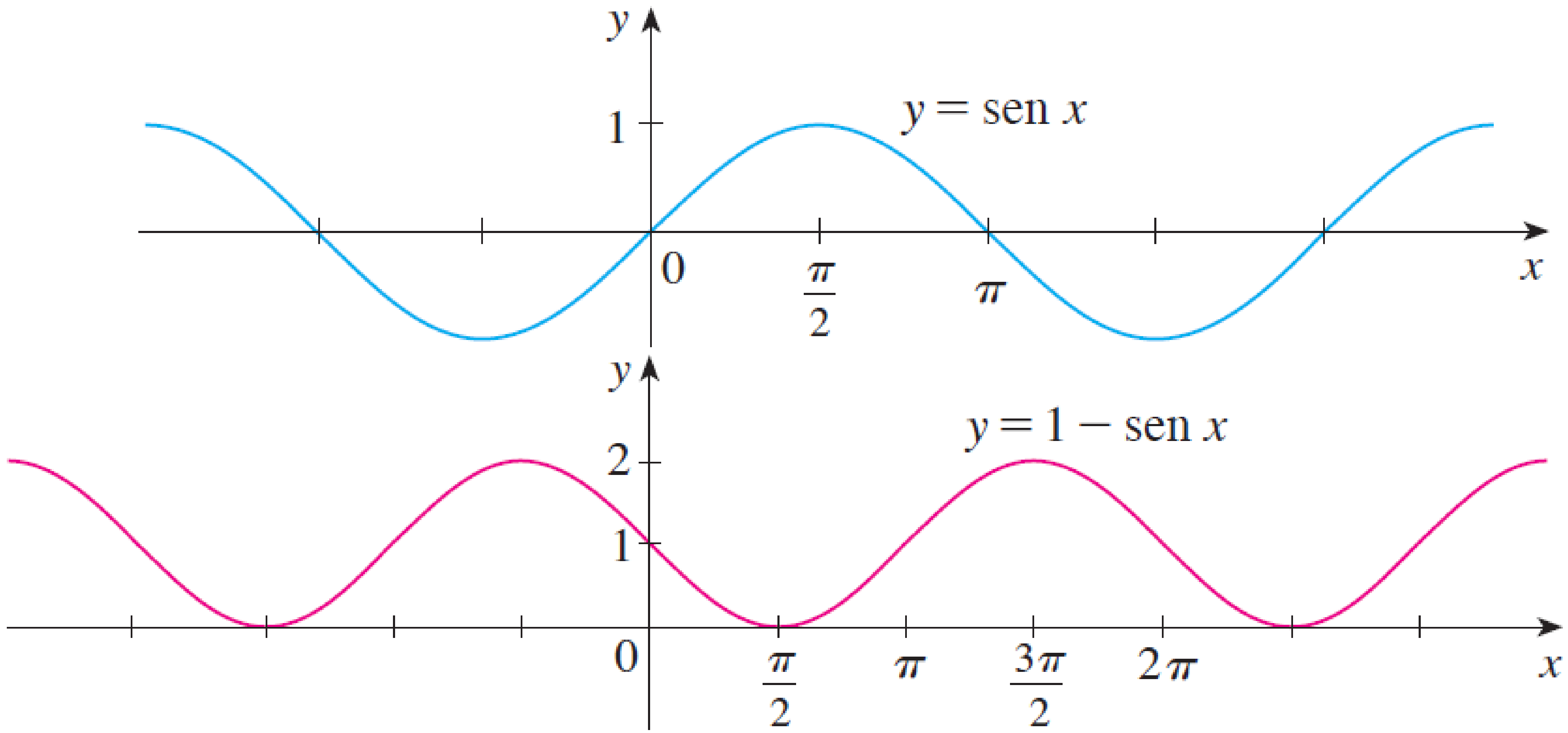
a) $y = \text{sen } 2x$ b) $y = 1 - \text{sen } x$

SOLUCIÓN

a) Obtenemos la gráfica de $y = \text{sen } 2x$ comprimiendo horizontalmente a $y = \text{sen } x$ por un factor de 2. (Véanse las figuras 6 y 7). Por tanto, considerando que el periodo de $y = \text{sen } x$ es 2π, el periodo de $y = \text{sen } 2x$ es $2\pi/2 = \pi$.

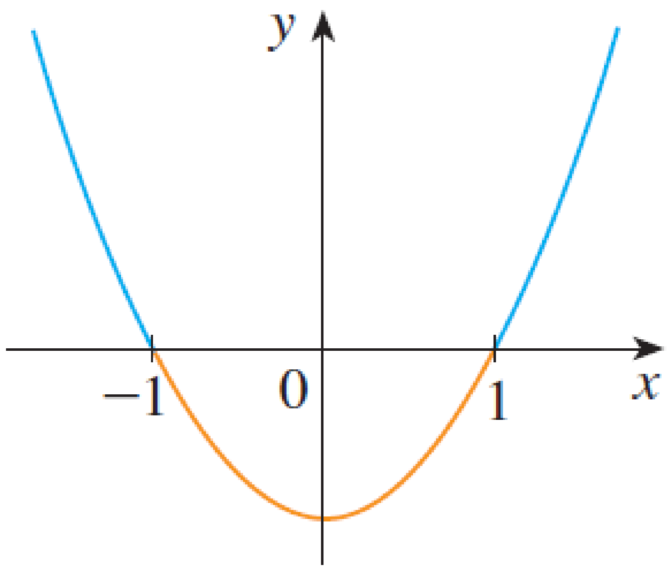


b) Para obtener la gráfica de $y = 1 - \text{sen } x$, empezamos de nuevo con $y = \text{sen } x$. Reflejamos sobre el eje x para obtener la gráfica de $y = -\text{sen } x$ y, a continuación, desplazamos 1 unidad hacia arriba para obtener $y = 1 - \text{sen } x$ (véase la figura 8).

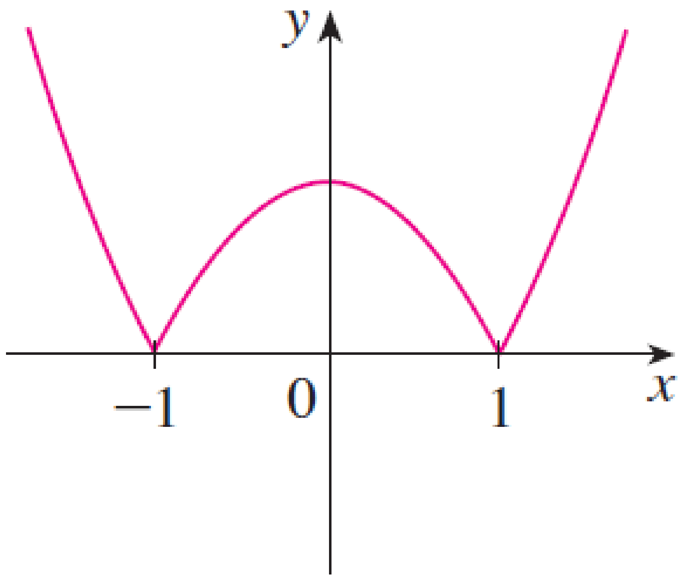


V EJEMPLO 5 Trace la gráfica de la función $y = |x^2 - 1|$.

SOLUCIÓN En primer lugar, graficamos la parábola $y = x^2 - 1$ en la figura 10a), desplazando verticalmente 1 unidad hacia abajo la parábola $y = x^2$. Vemos que la gráfica se encuentra por debajo del eje x cuando: $-1 < x < 1$, por lo que reflejamos esa parte de la gráfica sobre el eje x para obtener la gráfica de $y = |x^2 - 1|$ en la figura 10b).



a) $y = x^2 - 1$



b) $y = |x^2 - 1|$

EJERCICIOS

1. ¿Qué pasa con cada una de las siguientes transformaciones? Explique. Halle la función segmentada que la representa, el dominio, la gráfica y el rango.

A. $g(x) = \left||x| - 2\right|$

B. $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}$

C. $E(t) = |t-1| + |t-2|$

D. $A(t) = |t+1| + |t+2|$

2. Explique cómo se obtiene cada gráfica a partir de la gráfica de $y = f(x)$.

a) $y = f(x) + 8$ b) $y = f(x + 8)$ c) $y = 8f(x)$

d) $y = f(8x)$ e) $y = -f(x) - 1$ f) $y = 8f\left(\frac{1}{8}x\right)$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Solución:

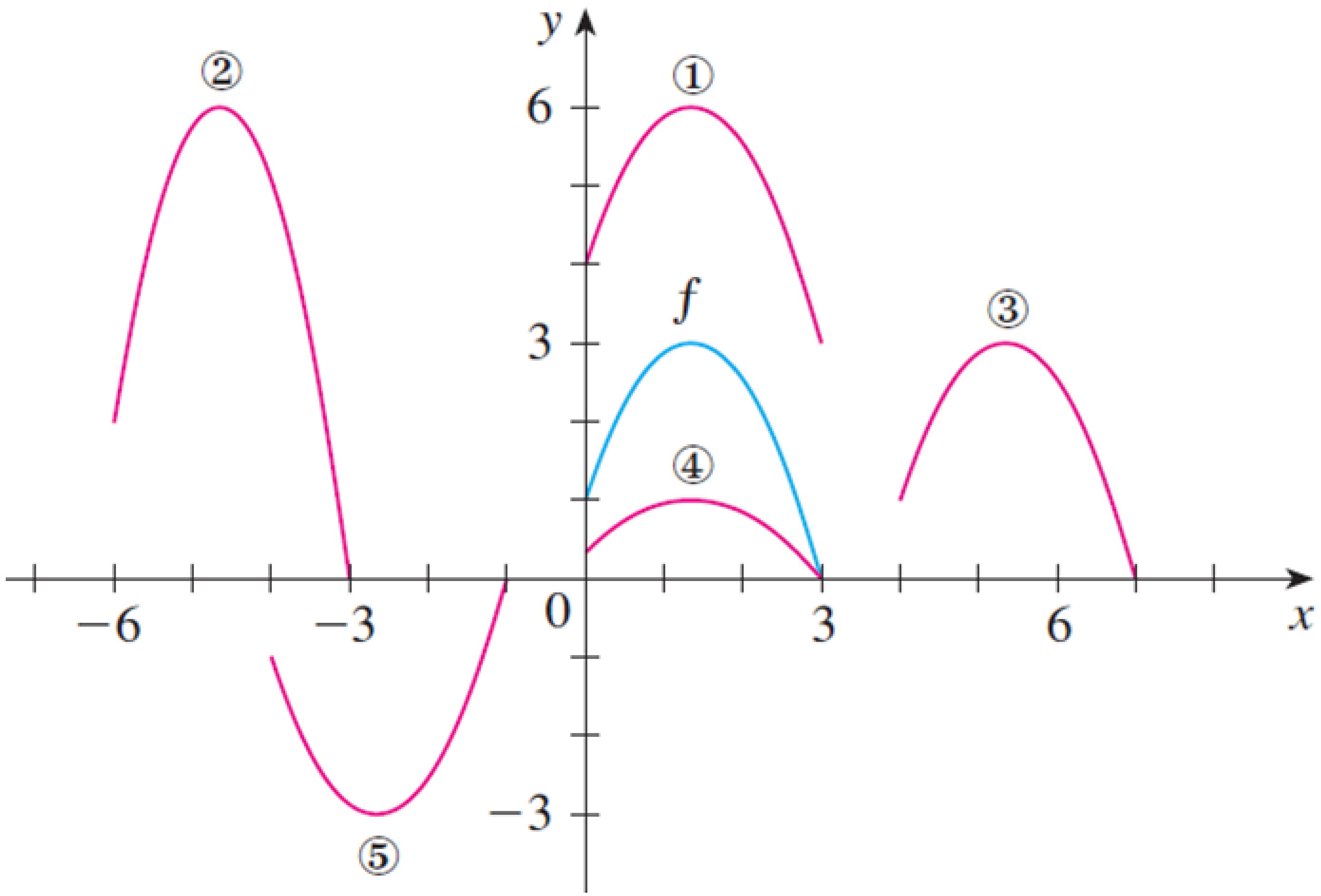
a) Se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ 8 unidades hacia arriba.
b) Se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ 8 unidades hacia la izquierda.
c) Se alarga verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor 8.
d) Se comprime horizontalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor 8.
e) Se refleja la gráfica de $y = f(x)$ respecto al eje x, se desplaza la gráfica reflejada una unidad hacia abajo.
f) Se alarga verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor 8, la gráfica resultante se alarga horizontalmente por un factor 8.

3. La gráfica de $y = f(x)$ está dada. Relacione cada ecuación con su gráfica y argumente sus elecciones.

a) $y = f(x - 4)$ b) $y = f(x) + 3$

c) $y = \frac{1}{3}f(x)$ d) $y = -f(x + 4)$

e) $y = 2f(x + 6)$



Solución:

a) $y = f(x - 4)$ corresponde a la gráfica 3

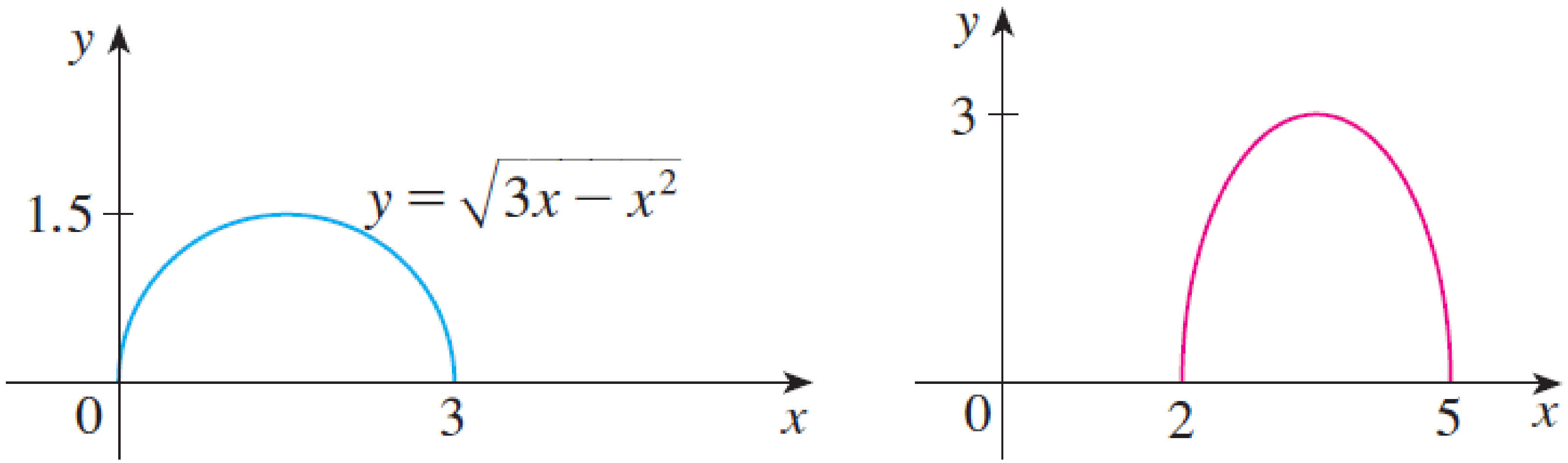
b) $y = f(x) + 3$ corresponde a la gráfica 1

c) $y = \frac{1}{3}f(x)$ corresponde a la gráfica 4

d) $y = -f(x + 4)$ corresponde a la gráfica 5

e) $y = 2f(x + 6)$ corresponde a la gráfica 2

6 La gráfica de $y = \sqrt{3x - x^2}$ está dada. Utilice transformaciones para crear una función cuya gráfica es como se muestra.



Solución

La gráfica se amplia verticalmente por un factor 2 y se desplaza horizontalmente 2 unidades a la derecha. Después de las transformaciones la ecuación correspondiente es:

$$y = 2\sqrt{3(x-2) - (x-2)^2} \qquad y = 2\sqrt{3x - 6 - (x^2 - 4x + 4)}$$

$$y = 2\sqrt{3x - 6 - x^2 + 4x - 4} \qquad y = 2\sqrt{-x^2 + 7x - 10}$$

4. Realizar la gráfica de las siguientes funciones, empezando con una función esencial y luego aplicando transformaciones. Indicar el dominio y el rango de cada una y emplear Geogebra para verificar las gráficas.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

17. $y = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$

18. $y = 1 - 2\sqrt{x + 3}$

19. $y = 1 - 2x - x^2$

20. $y = |x| - 2$

23. $y = |\sqrt{x} - 1|$

24. $y = |\cos \pi x|$

Combinación de funciones

Dos funciones f y g pueden combinarse para formar nuevas funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g en forma similar a la suma, resta, multiplicación y división de números reales. La suma y diferencia de funciones se definen mediante:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Si el dominio de f es A y el dominio de g es B, el dominio de $f + g$ es la intersección $A \cap B$ porque $f(x)$ y $g(x)$ tienen que estar definidas. Por ejemplo, el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es $A = [0, \infty)$, y el dominio de $g(x) = \sqrt{2 - x}$ es $B = (-\infty, 2]$, por lo que el dominio de $(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2 - x}$ es $A \cap B = [0, 2]$.

Del mismo modo, se definen el producto y cociente de funciones por

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

El dominio de fg es $A \cap B$, pero no podemos dividir por 0, así que el dominio de f/g es $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 1$, entonces el dominio de la función racional $(f/g)(x) = x^2/(x - 1)$ es $\{x \mid x \neq 1\}$, o bien $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

29-30 Encuentre a) $f + g$, b) $f - g$, c) fg y d) f/g y establezca sus dominios.

29. $f(x) = x^3 + 2x^2, \quad g(x) = 3x^2 - 1$

30. $f(x) = \sqrt{3 - x}, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Hay otra forma de combinar dos funciones para obtener una nueva función. Por ejemplo, supongamos que $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$. Como y es una función de u y u es, a su vez, una función de x, se concluye que, finalmente, y es una función de x. Podemos calcular esto por sustitución:

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Este procedimiento se denomina *composición* porque la nueva función se *compone* de las dos funciones dadas f y g.

En general, dadas dos funciones cualesquiera f y g, empezamos con un número x en el dominio de g y encontramos su imagen $g(x)$. Si este número $g(x)$ está en el dominio de f, entonces podemos calcular el valor de $f(g(x))$. Observe que la salida de una función se usa como entrada para la próxima función. El resultado es una nueva función $h(x) = f(g(x))$ obtenida mediante la sustitución de g en f y se llama la *composición* (o *compuesta*) de f y g, y se denota por $f \circ g$ ("f círculo g").

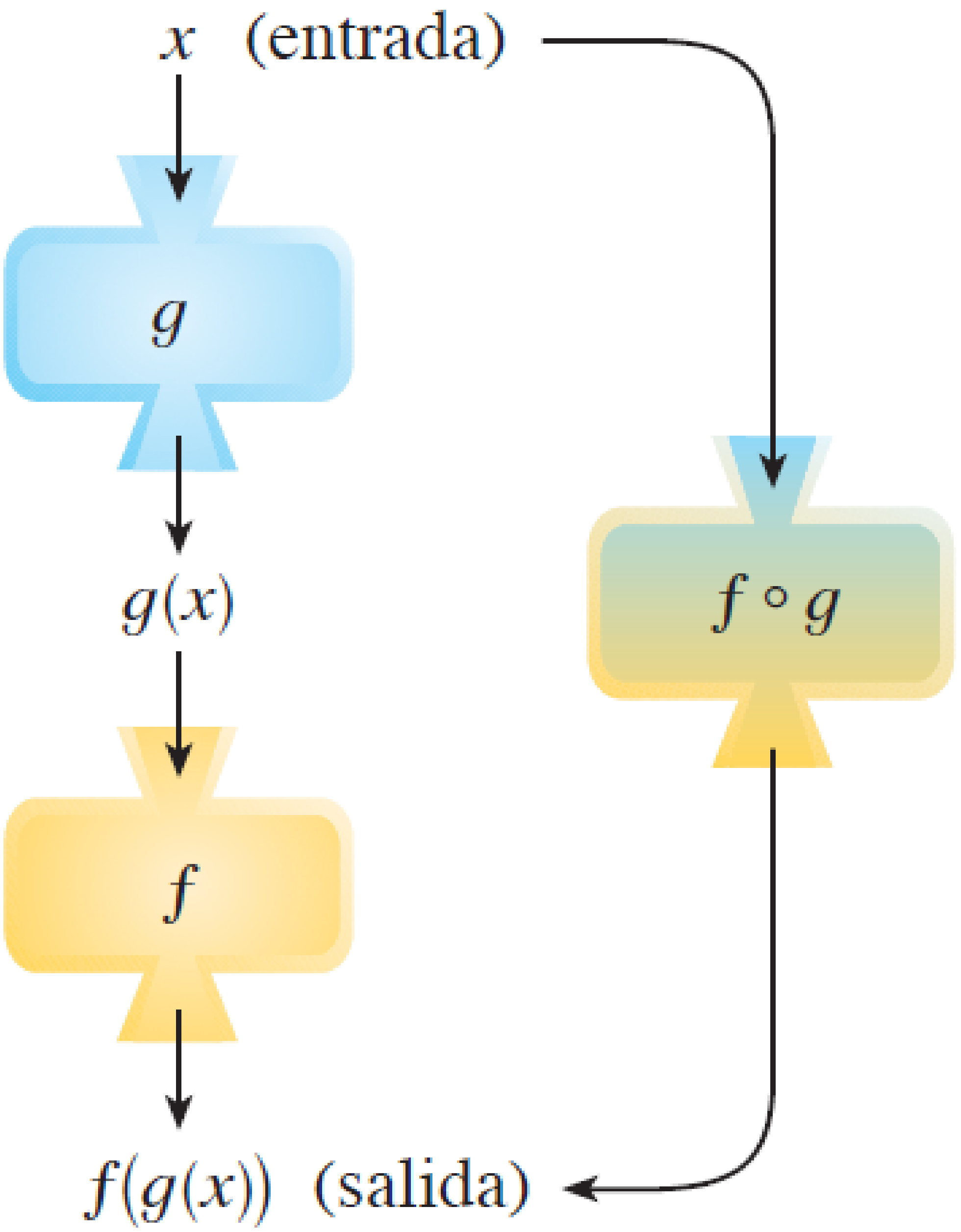


FIGURA 11

La máquina $f \circ g$ se compone de la máquina g (primero) y la máquina f (después)

Definición Dadas dos funciones f y g, la función compuesta $f \circ g$ (también llamada la **composición** de f y g) se define como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f. En otras palabras, $(f \circ g)(x)$ está definida siempre que $g(x)$ y $f(g(x))$ estén definidas. La figura 11 muestra $f \circ g$ en términos de máquinas.

EJEMPLO 6 Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$, encuentre la composición de las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

SOLUCIÓN Tenemos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

NOTA En el ejemplo 6 puede verse que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$. Recuerde, la notación $f \circ g$ significa que la función g se aplica primero y, a continuación, se aplica f. En el ejemplo 6, $f \circ g$ es la función que *primero* resta 3 y, *después*, eleva al cuadrado; $g \circ f$ es la función que *primero* eleva al cuadrado y, *después*, resta 3.

V **EJEMPLO 7** Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encuentre cada una de las siguientes funciones y su dominio.

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ f$ d) $g \circ g$

SOLUCIÓN

a) $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{2 - x}\right) = \sqrt{\sqrt{2 - x}} = \sqrt[4]{2 - x}$$

El dominio de $f \circ g$ es $\{x \mid 2 - x \geqslant 0\} = \{x \mid x \leqslant 2\} = (-\infty, 2]$.

b) $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$$

Para que $\sqrt{x}$ esté definida debe cumplirse con que $x \geqslant 0$. Para que $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$ esté definida debe cumplirse con que $2 - \sqrt{x} \geqslant 0$, esto es, $\sqrt{x} \leqslant 2$ o $x \leqslant 4$. Así que $0 \leqslant x \leqslant 4$, por lo que el dominio de $g \circ f$ es el intervalo cerrado $[0, 4]$.

c) $$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

El dominio de $f \circ f$ es $[0, \infty)$.

d) $$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\sqrt{2-x}\right) = \sqrt{2-\sqrt{2-x}}$$

Esta expresión está definida cuando $2 - x \geqslant 0$ y $2 - \sqrt{2-x} \geqslant 0$. La primera desigualdad significa $x \leqslant 2$, y la segunda es equivalente a $\sqrt{2-x} \leqslant 2$, o $2 - x \leqslant 4$ o $x \geqslant -2$. Así, $-2 \leqslant x \leqslant 2$, por lo que el dominio de $g \circ g$ es el intervalo cerrado $[-2, 2]$.

Es posible tomar la composición de tres o más funciones. Por ejemplo, la composición $f \circ g \circ h$ se encuentra aplicado primero h, después g y, por último, f como sigue:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 8 Encuentre $f \circ g \circ h$ si $f(x) = x/(x+1)$, $g(x) = x^{10}$ y $h(x) = x + 3$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x+3)) \\ &= f((x+3)^{10}) = \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}\end{aligned}$$

EJEMPLO 9 Dada $F(x) = \cos^2(x + 9)$, encuentre las funciones f, g y h tales que $F = f \circ g \circ h$.

SOLUCIÓN Como $F(x) = [\cos(x + 9)]^2$, la fórmula para F dice: primero sume 9, después tome el coseno del resultado y, finalmente, eleve al cuadrado. Así, tenemos

$$h(x) = x + 9 \qquad g(x) = \cos x \qquad f(x) = x^2$$

Entonces

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 9)) = f(\cos(x + 9)) \\ &= [\cos(x + 9)]^2 = F(x)\end{aligned}$$

31-36 Encuentre las funciones a) $f \circ g$, b) $g \circ f$, c) $f \circ f$, y d) $g \circ g$ y sus dominios.

31. $f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = 2x + 1$

32. $f(x) = x - 2, \quad g(x) = x^2 + 3x + 4$

33. $f(x) = 1 - 3x, \quad g(x) = \cos x$

34. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$

35. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{x + 1}{x + 2}$

36. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}, \quad g(x) = \operatorname{sen} 2x$

37-40 Encuentre $f \circ g \circ h$.

37. $f(x) = 3x - 2, \quad g(x) = \operatorname{sen} x, \quad h(x) = x^2$

38. $f(x) = |x - 4|, \quad g(x) = 2^x, \quad h(x) = \sqrt{x}$

39. $f(x) = \sqrt{x - 3}, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = x^3 + 2$

40. $f(x) = \tan x, \quad g(x) = \dfrac{x}{x - 1}, \quad h(x) = \sqrt[3]{x}$

41-46 Exprese la función en la forma $f \circ g$

41. $F(x) = (2x + x^2)^4$

42. $F(x) = \cos^2 x$

43. $F(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

44. $G(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{1 + x}}$

45. $v(t) = \sec(t^2)\tan(t^2)$

46. $u(t) = \dfrac{\tan t}{1 + \tan t}$

47-49 Exprese la función en la forma $f \circ g \circ h$.

47. $R(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 1}$

48. $H(x) = \sqrt[8]{2 + |x|}$

49. $H(x) = \sec^4(\sqrt{x})$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

50. Utilice la tabla para evaluar cada una de las siguientes expresiones:

a) $f(g(1))$ b) $g(f(1))$ c) $f(f(1))$

d) $g(g(1))$ e) $(g \circ f)(3)$ f) $(f \circ g)(6)$

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

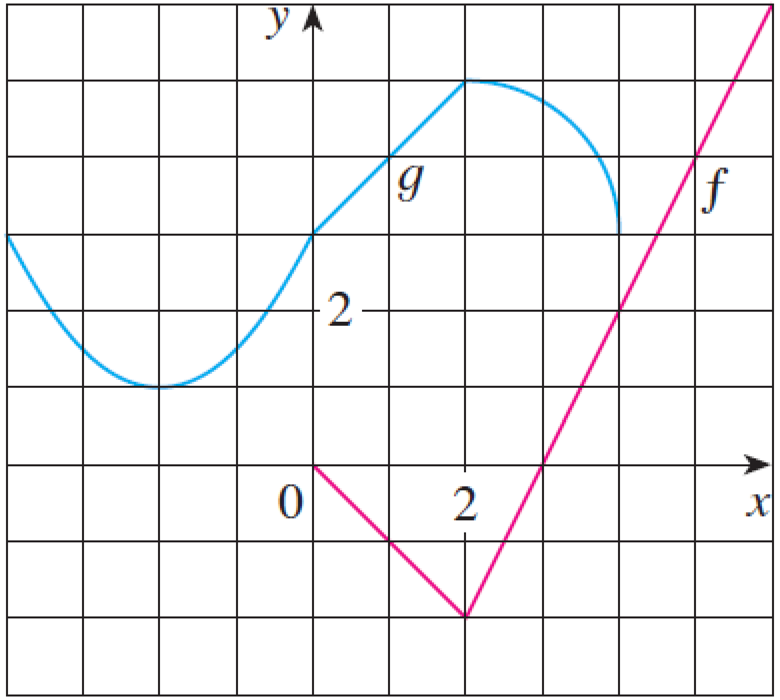
Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

51. Utilice las gráficas dadas de f y g para evaluar cada una de las siguientes expresiones, o explique por qué no están definidas:

a) $f(g(2))$ b) $g(f(0))$ c) $(f \circ g)(0)$

d) $(g \circ f)(6)$ e) $(g \circ g)(-2)$ f) $(f \circ f)(4)$



REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín