Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

ENCUENTRO 15.3

Sección 4.4: Formas indeterminadas y la regla de L'Hôpital.

Formas indeterminadas y regla de l´Hospital

Regla de l'Hospital Suponga que f y g son derivables y $g'(x) \neq 0$ sobre un intervalo abierto I que contiene a (excepto posiblemente en a). Suponga que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

o que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(En otras palabras, tenemos una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.) Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si existe el límite del lado derecho (o es ∞ o $-\infty$).

NOTA 1 La regla de l'Hospital señala que el límite de un cociente de funciones es igual al límite del cociente de sus derivadas, siempre que se cumplan con las condiciones dadas. Es especialmente importante verificar las condiciones impuestas a los límites de f y g antes de utilizar la regla de l'Hospital.

NOTA 2 La regla de l'Hospital también es válida para límites unilaterales y límites al infinito o al infinito negativo; es decir, "$x \to a$" puede ser sustituido por cualquiera de los símbolos $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

NOTA 3 Para el caso especial en que $f(a) = g(a) = 0$, f' y g' son continuas y $g'(a) \neq 0$, es fácil ver por qué la regla de l'Hospital es cierta. De hecho, utilizando la forma alternativa de la definición de una derivada, tenemos

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

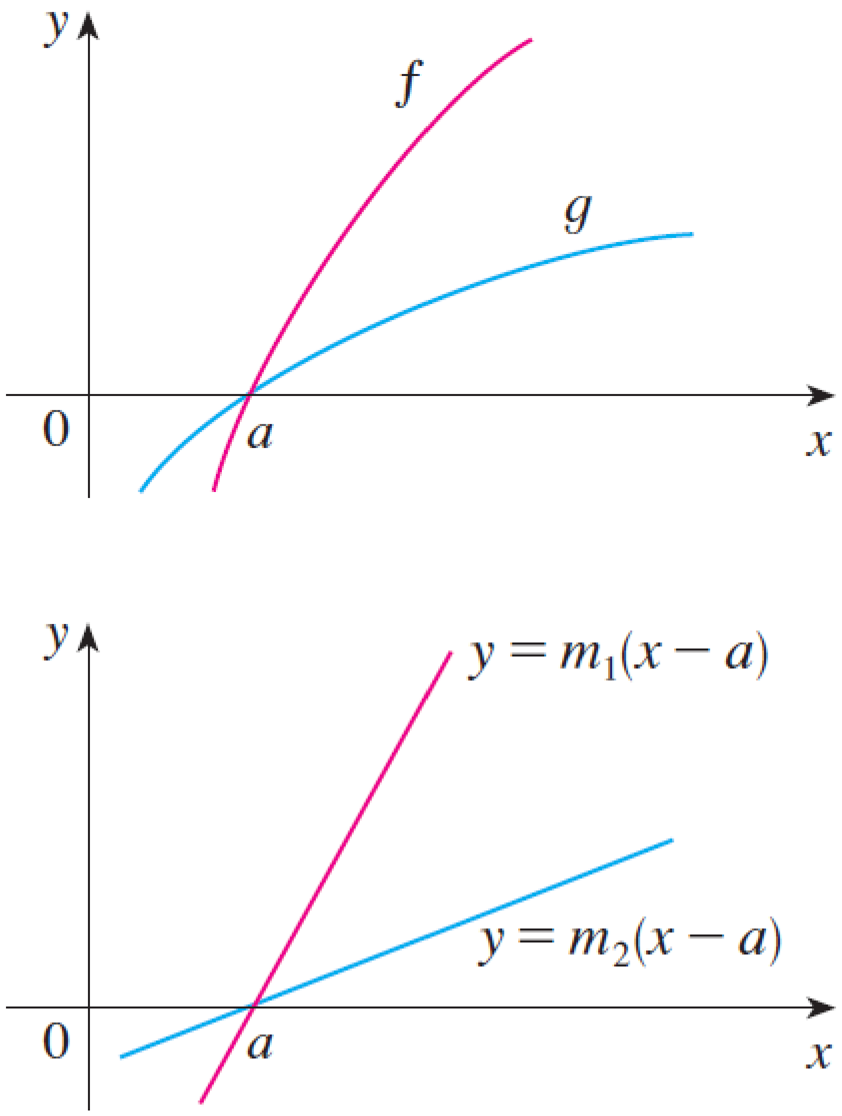

FIGURA 1

La figura 1 sugiere visualmente por qué regla de l'Hospital puede ser cierta. La primera gráfica muestra dos funciones derivables f y g, donde ambas se acercan a 0 conforme $x \to a$. Si pudiéramos acercarnos hacia el punto $(a, 0)$, las gráficas empezarían a parecerse a una recta. Pero si realmente las funciones fueran lineales, como en la segunda gráfica, entonces su razón sería

$$\frac{m_1(x - a)}{m_2(x - a)} = \frac{m_1}{m_2}$$

que es la razón de sus derivadas. Esto sugiere que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

V EJEMPLO 1 Encuentre $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

SOLUCIÓN Dado que

$$\lim_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$$

podemos aplicar la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{d}{dx}(\ln x)}{\dfrac{d}{dx}(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

⊘ Observe que cuando se utiliza la regla de l'Hospital derivamos el numerador y el denominador por separado. No utilizamos la regla del cociente.

V EJEMPLO 2 Obtenga $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$.

SOLUCIÓN Tenemos $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$, así que la regla de l'Hospital da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{d}{dx}(e^x)}{\dfrac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x}$$

Ya que $e^x \to \infty$ y $2x \to \infty$ conforme $x \to \infty$, el límite del lado derecho también está indeterminado, pero aplicando nuevamente la regla de l'Hospital obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

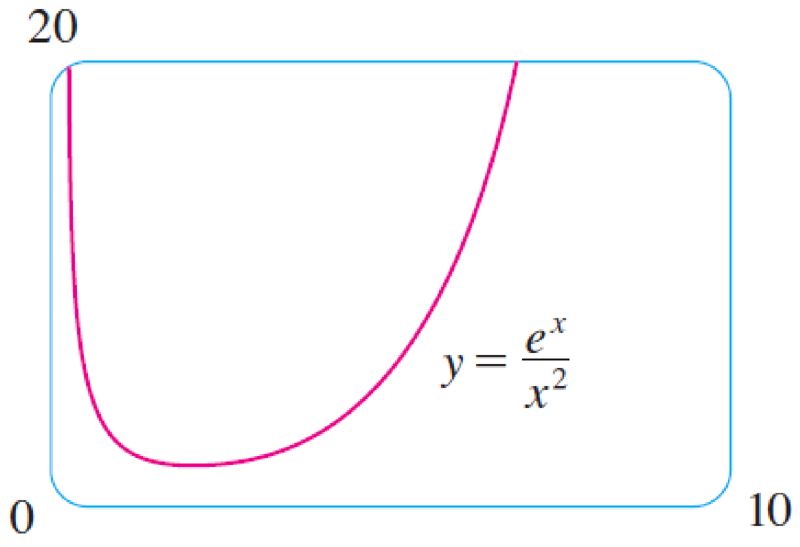

FIGURA 2

V **EJEMPLO 3** Obtenga $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

SOLUCIÓN Dado que $x \to \infty$ y $\sqrt[3]{x} \to \infty$ conforme $x \to \infty$, utilizamos la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}$$

Note que ahora el límite del lado derecho es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Pero en lugar de aplicar la regla de l'Hospital una segunda vez, como lo hicimos en el ejemplo 2, primero simplificamos la expresión y vemos que la segunda aplicación no es necesaria:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

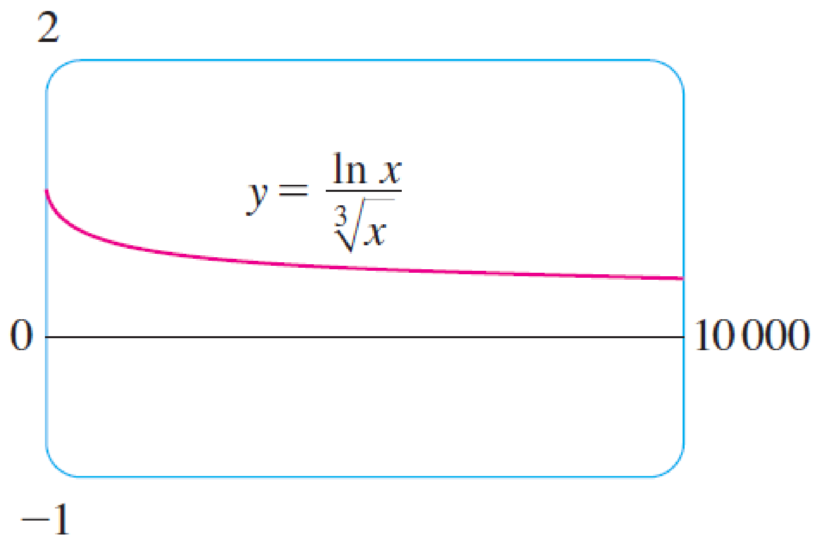

FIGURA 3

EJEMPLO 4 Encuentre $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$.

SOLUCIÓN Observamos que $\tan x - x \to 0$ y $x^3 \to 0$ a medida que $x \to 0$, así que aplicamos la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

Ya que el límite del lado derecho es aún una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, volvemos a aplicar la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x \tan x}{6x}$$

Puesto que $\lim_{x\to 0}\sec^2 x = 1$, simplificamos el cálculo escribiendo

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x \tan x}{6x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\sec^2 x \cdot \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$

Podemos evaluar este último límite utilizando la regla de l'Hospital por tercera vez o expresando la $\tan x$ como $(\operatorname{sen} x)/(\cos x)$ y recurriendo a nuestro conocimiento de límites trigonométricos. Haciendo todos estos pasos, obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x \tan x}{6x}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{1} = \frac{1}{3}$$

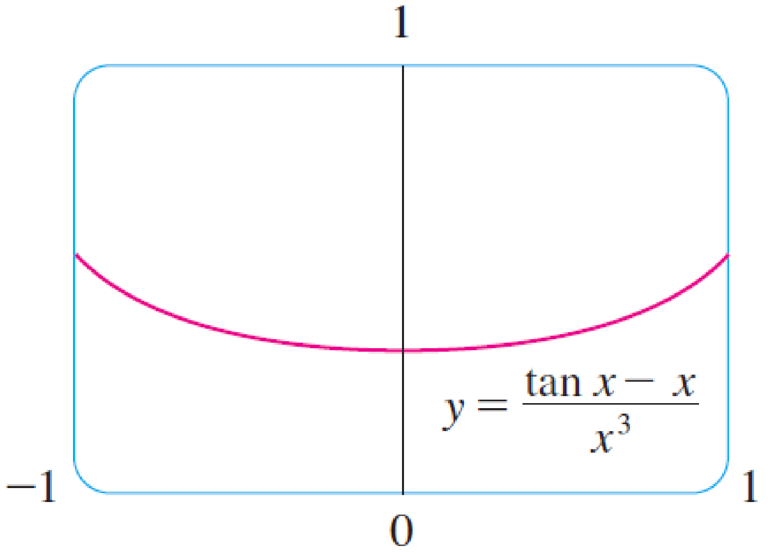

FIGURA 4

V **EJEMPLO 5** Encuentre $\lim_{x \to \pi^-} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$.

SOLUCIÓN Si intentamos ciegamente utilizar la regla de l'Hospital, obtendríamos

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to \pi^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$$

¡Esto es erróneo! Aunque el numerador $x \to 0$ conforme $x \to \pi^-$, note que el denominador $(1 - \cos x)$ no tiende a 0, así que aquí no es posible aplicar la regla de l'Hospital.

El límite requerido es, de hecho, fácil de encontrar porque la función es continua en π y el denominador es distinto de cero:

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \frac{\operatorname{sen} \pi}{1 - \cos \pi} = \frac{0}{1 - (-1)} = 0$$

El ejemplo 5 muestra lo que puede salir mal si se utiliza la regla de l'Hospital sin pensar. Hay otros límites que *pueden* encontrarse mediante la regla de l'Hospital, pero se encuentran más fácilmente por otros métodos, por lo que al evaluar cualquier límite debe tener en cuenta otros métodos antes de utilizar la regla de l'Hospital.

Productos indeterminados

Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ (o $-\infty$), entonces no es claro cuál es el valor de $\lim_{x\to a} [f(x)\,g(x)]$, si existe. Hay una lucha entre f y g. Si gana f, la respuesta será 0; si gana g, la respuesta será ∞ (o $-\infty$). O puede haber un comportamiento intermedio donde la respuesta es un número finito distinto de cero. Este tipo de límite se llama **forma indeterminada de tipo $\mathbf{0 \cdot \infty}$**, y lo podemos abordar expresando el producto fg como un cociente:

$$fg = \frac{f}{1/g} \qquad \text{o} \qquad fg = \frac{g}{1/f}$$

Esto convierte el límite dado en una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞, por lo que podemos utilizar la regla de l'Hospital.

V EJEMPLO 6 Evalúe $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$.

SOLUCIÓN El límite dado está indeterminado porque, conforme $x \to 0^+$, el primer factor (x) tiende a 0, mientras que el segundo factor $(\ln x)$ tiende a $-\infty$. Escribiendo $x = 1/(1/x)$, tenemos $1/x \to \infty$ a medida que $x \to 0^+$, por lo que la regla de l'Hospital da

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

La figura 5 muestra la gráfica de la función del ejemplo 6. Observe que la función está indefinida en $x = 0$; la gráfica se aproxima al origen, pero nunca lo alcanza.

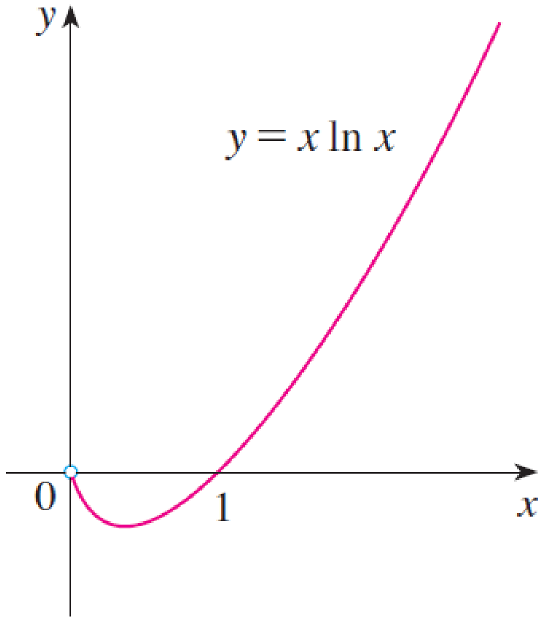

FIGURA 5

NOTA Tenga en cuenta que al resolver el ejemplo 6 otra opción posible habría sido escribir

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1/\ln x}$$

Esto da una forma indeterminada del tipo 0/0, pero si aplicamos la regla de l'Hospital, obtenemos una expresión más complicada que con la que empezamos. En general, cuando rescribimos un producto indeterminado, intentamos elegir la opción que conduce hasta el límite más simple.

Diferencias indeterminadas

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, entonces el límite

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)]$$

se llama **forma indeterminada de tipo $\infty - \infty$**. Una vez más hay un contienda entre f y g. ¿La respuesta será ∞ (gana f) o será $-\infty$ (gana g) o habrá un término intermedio en un número finito? Para encontrarlo, intentamos convertir la diferencia en un cociente (p. ej., utilizando un común denominador, racionalizando o factorizando un factor común), de manera que tenemos una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.

EJEMPLO 7 Obtenga $\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\sec x - \tan x)$

SOLUCIÓN Primero observe que $\sec x \to \infty$ y $\tan x \to \infty$ conforme $x \to (\pi/2)^-$, por lo que el límite está indeterminado. Aquí usamos un común denominador:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\sec x - \tan x) = \lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = 0$$

Observe que el uso de la regla de l'Hospital está justificada porque $1 - \operatorname{sen} x \to 0$ y $\cos x \to 0$ a medida que $x \to (\pi/2)^-$.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Potencias indeterminadas

Hay varias formas indeterminadas que surgen del límite

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo 0^0
2. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo ∞^0
3. $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ tipo 1^∞

Cada uno de estos tres casos puede ser tratado ya sea tomando el logaritmo natural:

$$\text{sea} \quad y = [f(x)]^{g(x)}, \quad \text{entonces} \quad \ln y = g(x) \ln f(x)$$

o expresando la función como una exponencial: $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$

(Recuerde que ambos métodos fueron utilizados en la derivada de estas funciones.) Cualquiera de los métodos nos lleva al producto indeterminado $g(x) \ln f(x)$, que es del tipo $0 \cdot \infty$.

EJEMPLO 8 Obtenga $\lim_{x\to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}$.

SOLUCIÓN Primero observe que cuando $x \to 0^+$, tenemos $1 + \operatorname{sen} 4x \to 1$ y $\cot x \to \infty$, por lo que el límite dado está indeterminado. Sea

$$y = (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}$$

Entonces $$\ln y = \ln\left[(1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}\right] = \cot x \ln(1 + \operatorname{sen} 4x)$$

Así que la regla de l'Hospital da

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} 4x)}{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{4\cos 4x}{1 + \operatorname{sen} 4x}}{\sec^2 x} = 4$$

Hasta ahora hemos calculado el límite de $\ln y$, pero lo que queremos es el límite de y. Para encontrar este límite, utilizamos el hecho de que $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{x\to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x} = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^4$$

V EJEMPLO 9 Encuentre $\lim_{x \to 0^+} x^x$.

SOLUCIÓN Note que este límite está indeterminado ya que $0^x = 0$ para cualquier $x > 0$, pero $x^0 = 1$ para cualquier $x \neq 0$. Podríamos proceder como en el ejemplo 8 o expresando la función como una exponencial:

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

En el ejemplo 6 usamos la regla de l'Hospital para demostrar que

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

En la figura 6 se muestra la gráfica de la función $y = x^x$, $x > 0$. Observe que, aunque 0^0 no está definido, los valores de la función tienden a 1 conforme $x \to 0^+$. Esto confirma el resultado del ejemplo 9.

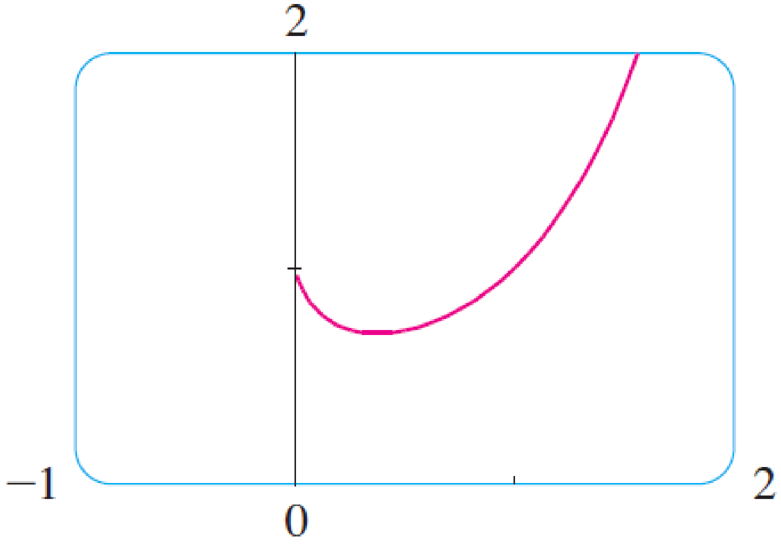

FIGURA 6

Ejemplos propuestos

Calcular $\lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{sen(\pi/x)}$

Solución

Sea $x = \frac{1}{t}$

si $x \to \infty, t \to 0$

Si $\lim_{t \to 0} \frac{t}{sen(\pi t)}$ existe, entonces: $\lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{sen(\pi/x)}$ existe y son iguales; pero no es difícil justificar que:

$$\lim_{t \to 0} \frac{t}{sen(\pi t)} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\pi cos(\pi t)} = \frac{1}{\pi}$$

Por lo tanto: $\lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{sen(\pi/x)} = \frac{1}{\pi}$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Ejemplos propuestos

Calcular $\lim\limits_{x \to 0^+} (-lnx)^x$

Solución

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} (-lnx) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$, estamos en la forma indeterminada ∞^0

Hacemos $y = (-lnx)^x$, de modo que $lny = xln(-lnx)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} (lny) &= \lim_{x \to 0^+} xln(-lnx) \qquad \text{(forma } 0\infty\text{)} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{ln(-lnx)}{\frac{1}{x}} \qquad \text{(forma } \tfrac{\infty}{\infty}\text{)} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{-lnx}\left(\frac{-1}{x}\right)}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x}{lnx} = \lim_{x \to 0^+} x\left(\frac{-1}{lnx}\right) = 0
\end{aligned}$$

Hasta el momento tenemos que $\lim\limits_{x \to 0^+} lny = 0$; así, para terminar necesitamos un paso más:

$$\lim_{x \to 0^+} (-lnx)^x = \lim_{x \to 0^+} e^{lny} = e^0 = 1$$

Ejemplos propuestos

Calcular $\lim_{x \to 0^+} x^{senx}$

Solución

Como $\lim_{x \to 0^+} x = 0$ y $\lim_{x \to 0^+} senx = 0$, estamos en la forma indeterminada 0^0

Si $y = x^{senx}$, entonces $lny = senxln(x)$, así:

$$\lim_{x \to 0^+} senxlnx = \lim_{x \to 0^+} \frac{lnx}{cscx}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-cscxcotx} = \lim_{x \to 0^+} \frac{senx}{x}(-tanx) = 0$$

De modo que: $\lim_{x \to 0^+} x^{senx} = e^0 = 1$

Ejemplos propuestos

8–68 Encuentre el límite. Utilice la regla de L'Hôpital donde sea apropiado. Si existe un método más elemental, considere la posibilidad de usarlo. Si no aplica la regla de L'Hôpital, explique por qué.

10. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

20. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} \pi x}$

22. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln \ln x}{x}$

34. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

44. $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$

54. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\tan^{-1} x} \right)$

58. $\lim\limits_{x \to 0^+} (\tan 2x)^x$

60. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{a}{x} \right)^{bx}$

68. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x - 3}{2x + 5} \right)^{2x+1}$

A. $\lim\limits_{x \to +\infty} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

B. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{x^2}$

C. $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$

Ejercicios

8–68 Encuentre el límite. Utilice la regla de L'Hôpital donde sea apropiado. Si existe un método más elemental, considere la posibilidad de usarlo. Si no aplica la regla de L'Hôpital, explique por qué.

13. $\lim_{x\to(\pi/2)^+} \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

19. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

21. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-4x}}{x}$

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tanh x}{\tan x}$

32. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

36. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x \operatorname{sen}(x-1)}{2x^2 - x - 1}$

38. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan^{-1}(4x)}$

40. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

41. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^a - ax + a - 1}{(x-1)^2}$

42. $\lim_{x\to a^+} \dfrac{\cos x \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$

43. $\lim_{x\to 0} \cot 2x \operatorname{sen} 6x$

47. $\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2}$

51. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

53. $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

56. $\lim_{x\to 1^+} [\ln(x^7 - 1) - \ln(x^5 - 1)]$

59. $\lim_{x\to 0} (1 - 2x)^{1/x}$

61. $\lim_{x\to 1^+} x^{1/(1-x)}$

65. $\lim_{x\to 0^+} (4x + 1)^{\cot x}$

69–70 Utilice una gráfica para estimar el valor del límite. Después utilice la regla de L'Hôpital para encontrar el valor exacto.

69. $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$

70. $\lim_{x\to 0} \dfrac{5^x - 4^x}{3^x - 2^x}$

REFERENCIA

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín