Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

Vigilada Mineducación

ENCUENTRO 10.1

Continuación de la Sección 2.8: Derivadas de orden superior

Derivadas superiores

Si f es una función derivable, entonces su derivada f' también es una función, así que f' puede tener una derivada de sí misma, señalada por $(f')' = f''$. Esta nueva función f'' se denomina **segunda derivada** de f porque es la derivada de la derivada de f.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}}$$

La tercera derivada f''' es la derivada de la segunda derivada: $f''' = (f'')'$. De este modo, $f'''(x)$ puede interpretarse como la pendiente de la curva $y = f''(x)$ o como la razón de cambio de $f''(x)$.

$$\boxed{y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}}$$

El proceso puede continuar. La cuarta derivada f'''' usualmente se denota mediante $f^{(4)}$. En general, la n-ésima derivada de f se denota mediante $f^{(n)}$ y se obtiene derivando n veces a f. Si $y = f(x)$, escribimos

$$\boxed{y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}}$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 6 Si $f(x) = x^3 - x$, halle e interprete $f''(x)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 2 encontramos que la primera derivada es $f'(x) = 3x^2 - 1$. Así que la segunda derivada es

$$f''(x) = (f')'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[3(x+h)^2 - 1] - [3x^2 - 1]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (6x + 3h) = 6x$$

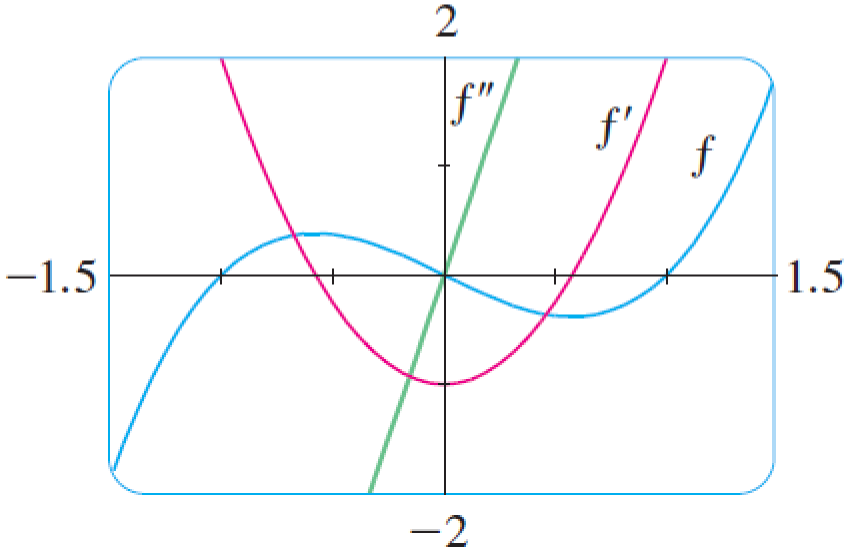


FIGURA 10

Las gráficas de f, f' y f'' se exhiben en la figura 10.

Puede interpretarse $f''(x)$ como la pendiente de la curva $y = f'(x)$ en el punto $(x, f'(x))$. En otras palabras, es la razón de cambio de la pendiente de la curva original $y = f(x)$.

Observe de la figura 10 que $f''(x)$ es negativa cuando $y = f'(x)$ tiene pendiente negativa y es positiva cuando $y = f'(x)$ tiene pendiente positiva. De esta manera, las gráficas sirven como una comprobación de sus cálculos.

EJEMPLO 7 Si $f(x) = x^3 - x$, halle $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 6 encontramos que $f''(x) = 6x$. La gráfica de la segunda derivada tiene ecuación $y = 6x$ y, de este modo, es una línea recta con pendiente 6. Ya que la derivada $f'''(x)$ es la pendiente de $f''(x)$, se tiene

$$f'''(x) = 6$$

para todos los valores de x. Así, f''' es una función constante y su gráfica es una recta horizontal. En consecuencia, para todos los valores de x,

$$f^{(4)}(x) = 0$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Si $s = s(t)$ es la función posición de un objeto que se desplaza en línea recta, su primera derivada representa la velocidad $v(t)$ del objeto como una función del tiempo:

$$\boxed{v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}}$$

A la razón de cambio de la velocidad instantánea respecto al tiempo se le llama **aceleración** $a(t)$ del objeto. En estos términos, la función aceleración es la derivada de la función velocidad y, en consecuencia, es la segunda derivada de la función posición:

$$\boxed{a(t) = v'(t) = s''(t)}$$

o en la notación de Leibniz

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}}$$

Puede interpretarse físicamente la tercera derivada en el caso donde la función es la función posición $s = s(t)$ de un objeto que se desplaza a lo largo de una línea recta. Como $s''' = (s'')' = a'$, la tercera derivada de la función posición es la derivada de la función aceleración y se le denomina **jerk** (tirón):

$$\boxed{j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}}$$

Así, el jerk, j, es la razón de cambio de la aceleración. Nombre apropiado porque un jerk considerable significa un cambio repentino de aceleración, que ocasiona un movimiento repentino en un vehículo.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

LA LUNA

La masa de la Luna es de 7.349×10^{22} kg y la de la Tierra 5.976×10^{24} kg. El radio de la Luna es 1 737 km y el de la Tierra 6 378 km. Puesto que la fuerza de gravedad de un planeta es directamente proporcional a su masa e inversamente proporcional al cuadrado de su radio, la razón entre las fuerzas de gravedad en la Luna y en la Tierra es

$$\frac{(5.976 \times 10^{24})/6\,378^2}{(7.349 \times 10^{22})/1\,737^2} \approx 6.0.$$

EJEMPLO 10 Aceleración de la gravedad

Puesto que la Luna carece de atmósfera, un objeto que cae en ella no encuentra resistencia del aire. En 1971, el astronauta David Scott verificó que una pluma de ave y un martillo caen con la misma velocidad. La función posición para cada uno de esos objetos es

$$s(t) = -0.81t^2 + 2$$

donde $s(t)$ es la altura en metros y t el tiempo en segundos. ¿Cuál es la relación entre la fuerza de gravedad de la Tierra respecto a la de la Luna?

Solución alcular la aceleración, derivar dos veces la función posición.

$$s(t) = -0.81t^2 + 2 \qquad \text{Función posición.}$$

$$s'(t) = -1.62t \qquad \text{Función velocidad.}$$

$$s''(t) = -1.62 \qquad \text{Función aceleración.}$$

De esta forma resulta que la aceleración de la gravedad en la Luna es de $-1.62\ m/s^2$. Puesto que la aceleración de la gravedad en la Tierra es de $-9.8\ m/s^2$, la fuerza de gravedad de la Tierra respecto a la de la Luna es

$$\frac{\text{Fuerza de gravedad en la Tierra}}{\text{Fuerza de gravedad en la Luna}} = \frac{-9.8}{-1.62} \approx 6.0.$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

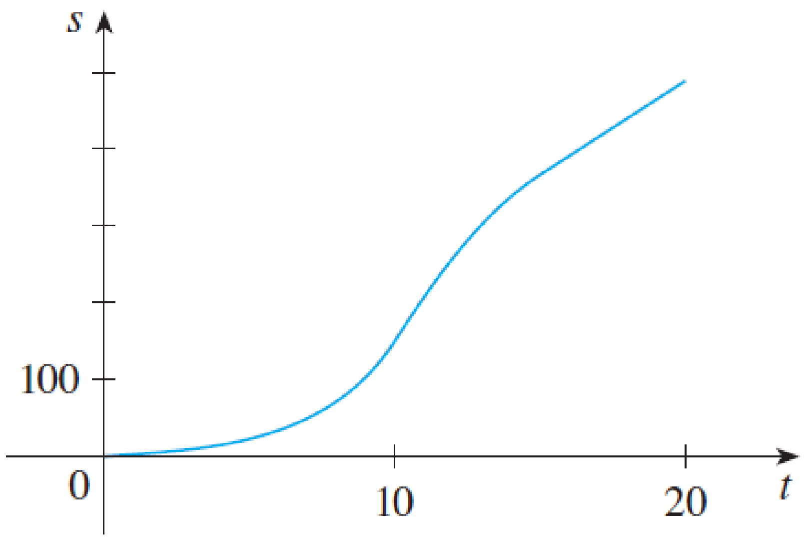
Ejercicios

47-48 Utilice la definición de derivada para hallar $f'(x)$ y $f''(x)$. Después, grafique f, f' y f'' en una misma pantalla y verifique para ver si sus respuestas son razonables.

47. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ **48.** $f(x) = x^3 - 3x$

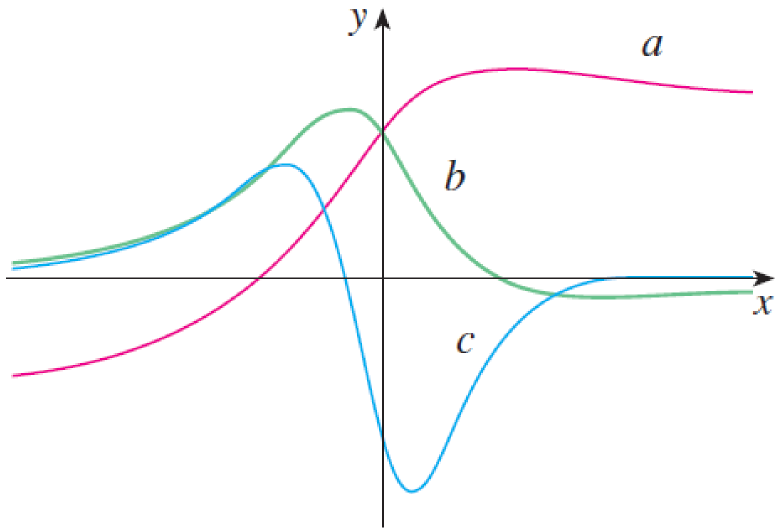
49. Si $f(x) = 2x^2 - x^3$, encuentre $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$. Grafique f, f' f'' y f''' en una misma pantalla. ¿Las gráficas son consistentes con la interpretación geométrica de estas derivadas?

50. a) Se muestra la gráfica de una función posición de un automóvil, donde s se mide en pies y t en segundos. Utilice la gráfica de la velocidad y la aceleración del automóvil. ¿Cuál es la aceleración en $t = 10$ segundos?

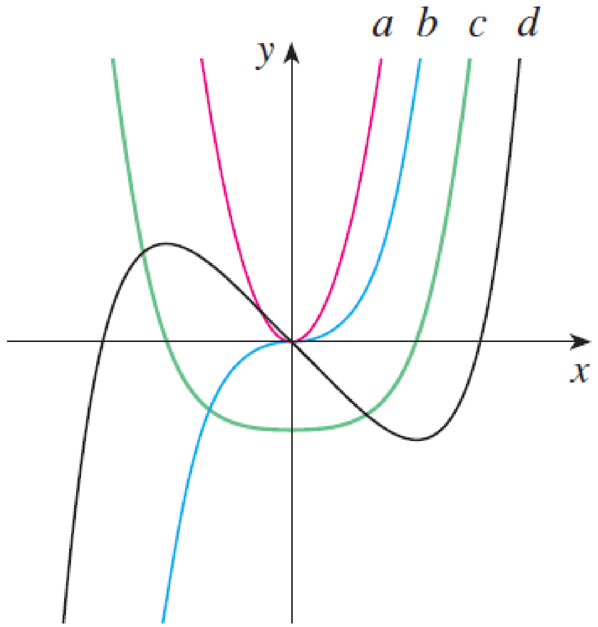


Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

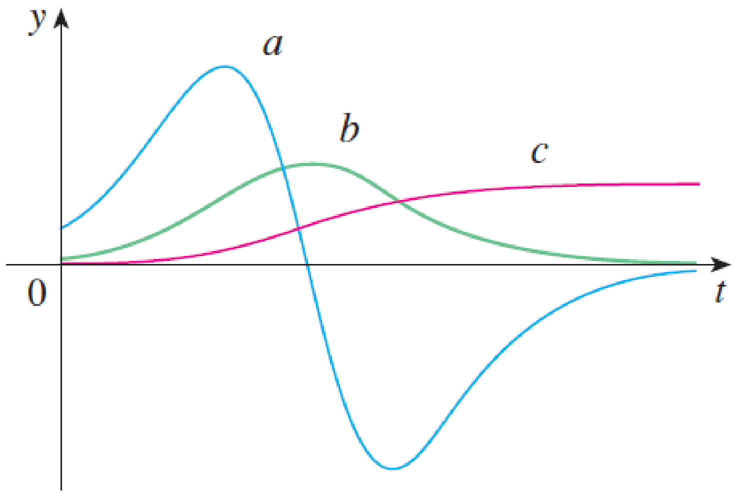
43. La figura muestra las graficas de f, f' y f''. Indique cada curva y explique el porqué de su elección.



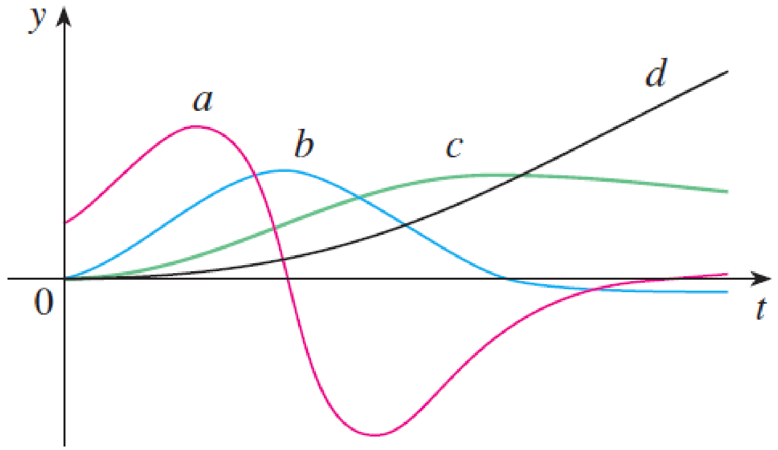
44. La figura muestra gráficas de f, f', f'' y f'''. Identifique cada curva y explique las razones de su elección.



45. La figura exhibe las gráficas de tres funciones. Una es la función posición de un automóvil, otra es la velocidad del mismo, y la de su aceleración. Identifique cada curva y explique las razones de su elección.



46. La figura muestra las gráficas de cuatro funciones relacionadas con el movimiento de un automóvil: la de posición, la de velocidad, la de aceleración y la del jerk. Identifique cada curva y explique los motivos de su elección.

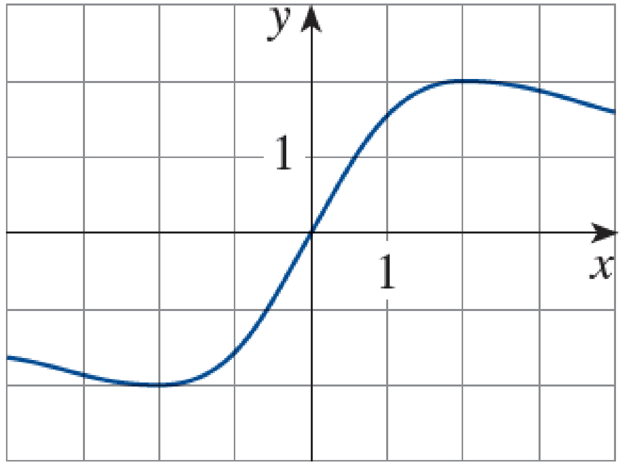


Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

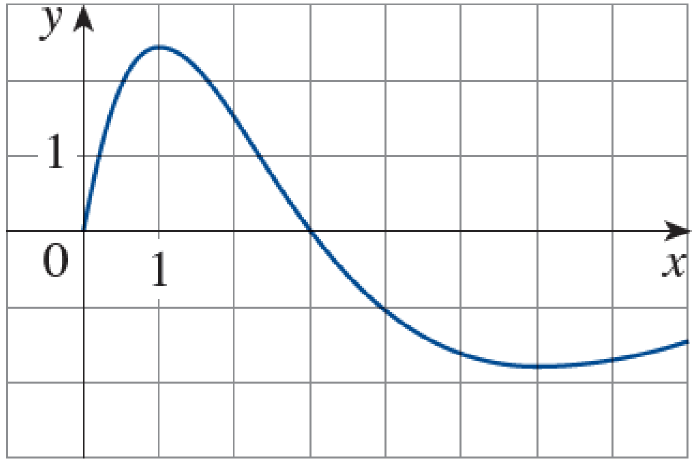
Ejercicios

1–2 Utilice la gráfica que se proporciona para calcular el valor de cada derivada. Luego trace la gráfica de f'.

1. (a) $f'(-3)$ (b) $f'(-2)$ (c) $f'(-1)$ (d) $f'(0)$
(e) $f'(1)$ (f) $f'(2)$ (g) $f'(3)$

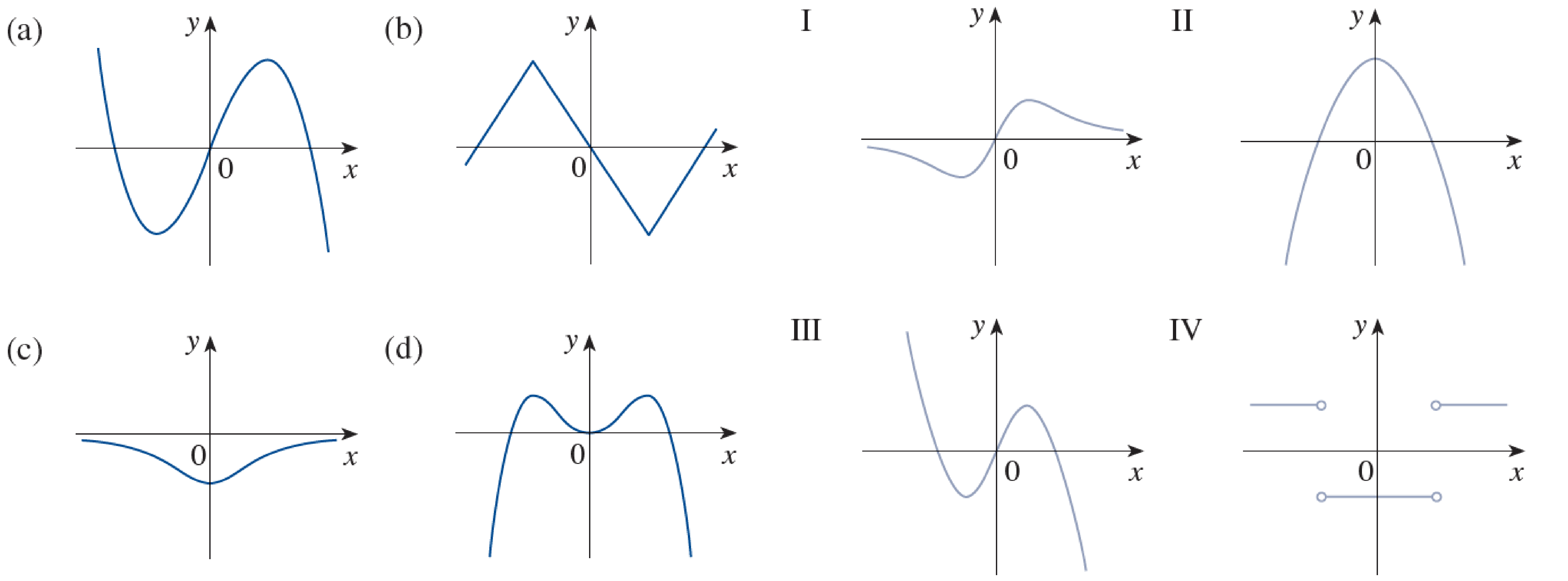


2. (a) $f'(0)$ (b) $f'(1)$ (c) $f'(2)$ (d) $f'(3)$
(e) $f'(4)$ (f) $f'(5)$ (g) $f'(6)$ (h) $f'(7)$



Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

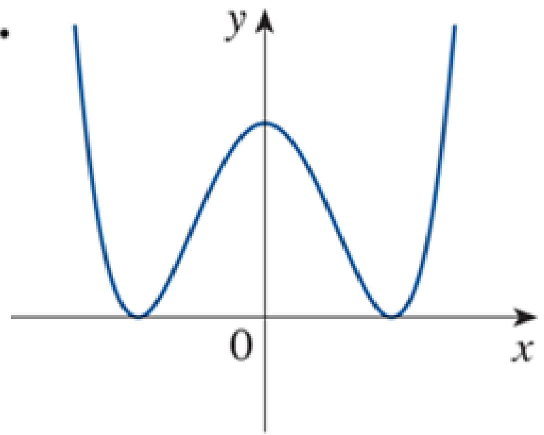
3. Relacione la gráfica de cada función dada en las figuras (a)-(d) con las gráficas de sus derivadas en las figuras I-IV. Dé las razones para sus selecciones.



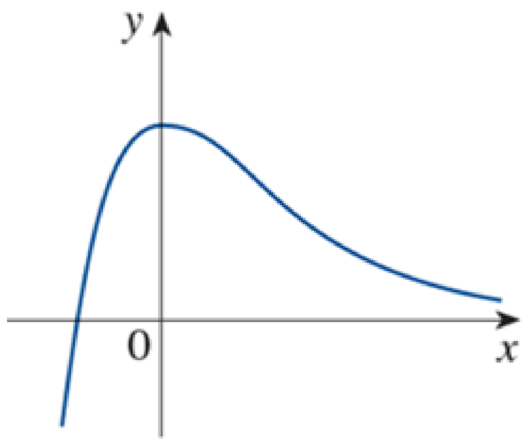
Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

4–11 Trace o copie la gráfica de la función dada f. (Suponga que los ejes tienen escalas iguales.) Luego utilice el método del ejemplo 1 para trazar la gráfica de f' debajo de esta.

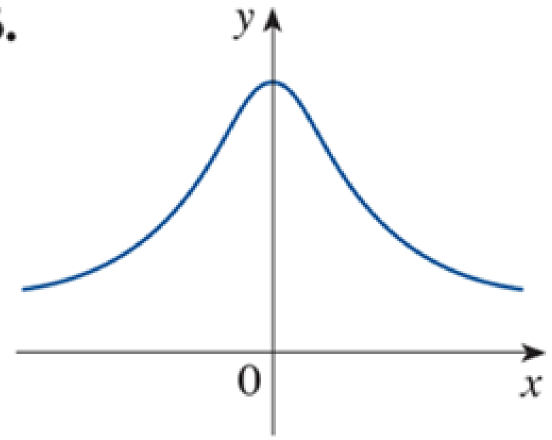
4.



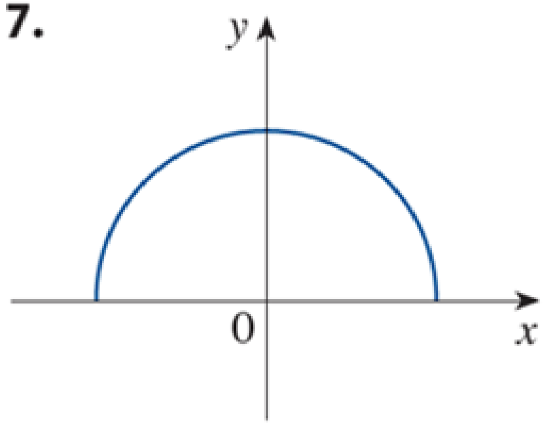
5.



6.

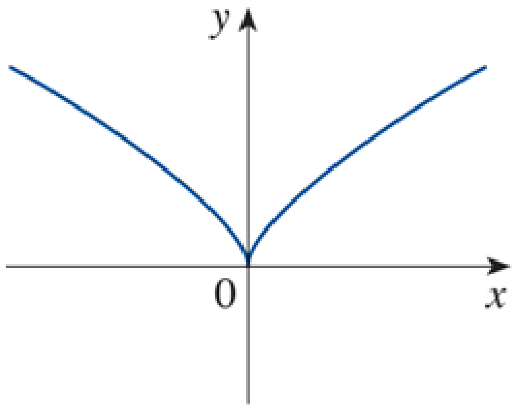


7.

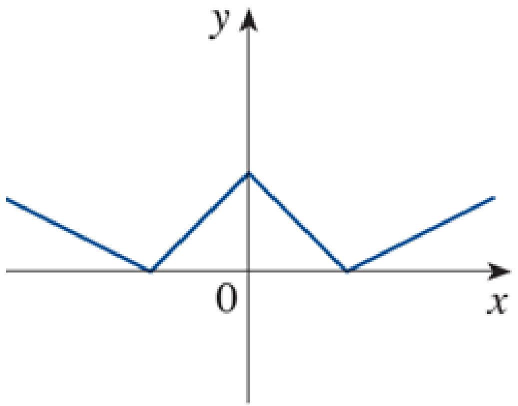


4–11 Trace o copie la gráfica de la función dada f. (Suponga que los ejes tienen escalas iguales.) Luego utilice el método del ejemplo 1 para trazar la gráfica de f' debajo de esta.

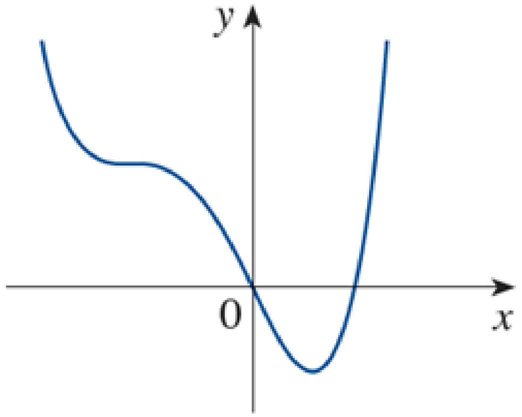
8.



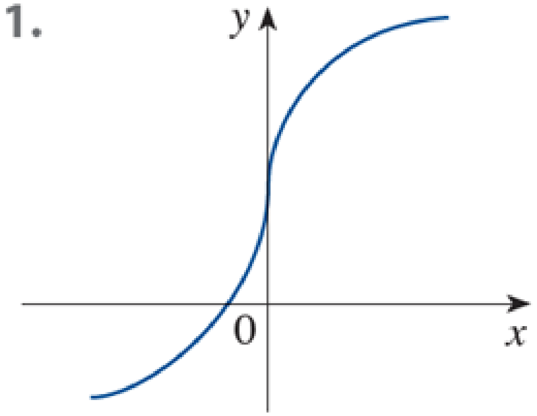
9.



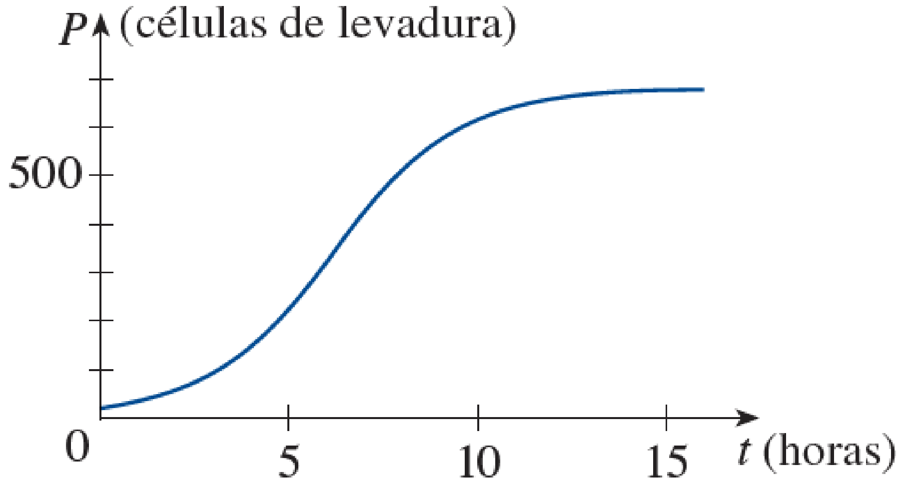
10.



11.



12. Se muestra la gráfica de la función población $P(t)$ para células de levadura en un cultivo de laboratorio. Utilice el método del ejemplo 1 para trazar la gráfica de la derivada $P'(t)$. ¿Qué indica la gráfica de P' acerca de la población de levadura?



21–31 Encuentre la derivada de cada una de las funciones siguientes usando la definición de derivada. Indique los dominios de la función y de su derivada.

21. $f(x) = 3x - 8$

22. $f(x) = mx + b$

23. $f(t) = 2.5t^2 + 6t$

24. $f(x) = 4 + 8x - 5x^2$

25. $f(x) = x^3 - 3x + 5$

26. $f(x) = x + \sqrt{x}$

27. $g(x) = \sqrt{9 - x}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 3}$

29. $G(t) = \dfrac{1 - 2t}{3 + t}$

30. $f(x) = x^{3/2}$

31. $f(x) = x^4$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

36. Sea $P(t)$ el porcentaje de población de Filipinas arriba de 60 años de edad en el instante t. La tabla da las proyecciones de los valores de esta función de 1995 a 2020.

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1995	5.2	2010	6.7
2000	5.5	2015	7.7
2005	6.1	2020	8.9

(a) ¿Cuál es el significado de $P'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Construya una tabla de valores para $P'(t)$.
(c) Trace la gráfica de P y P'.

37. La tabla da la altura conforme pasa el tiempo de un árbol de pino típico de madera en un sitio administrado.

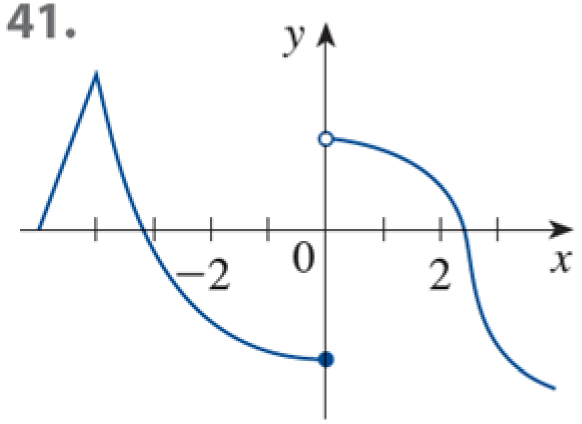
Edad tres (años)	14	21	28	35	42	49
Altura (pies)	41	54	64	72	78	83

Fuente: Arkansas Forestry Commission

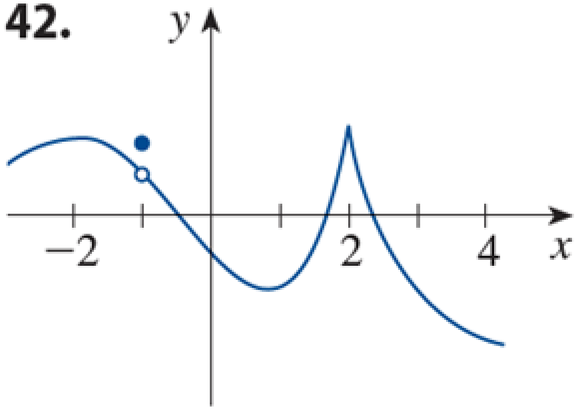
Si $H(t)$ es la altura del árbol después de t años, construya una tabla de valores calculados para H' y trace su gráfica.

41–44 Observe la gráfica de f. Indique, con razones, los números en los que f *no* es derivable.

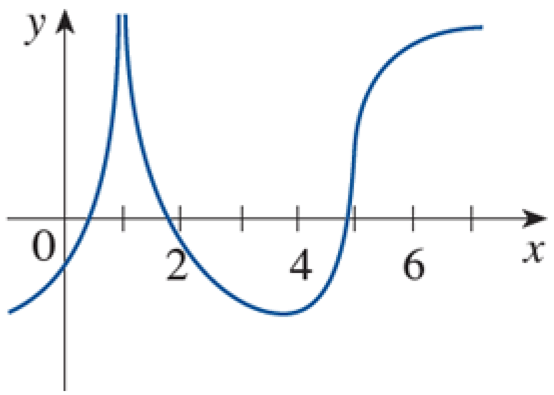
41.



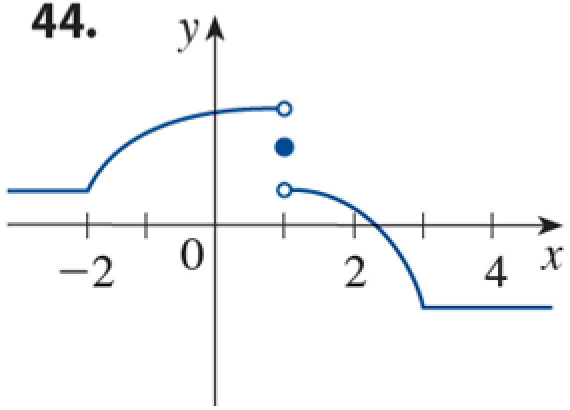
42.



43.



44.



64. Las derivadas **por la izquierda** y **por la derecha** de f en a están definidas por

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

y

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si estos límites existen. Entonces $f'(a)$ existe si y solo si estas derivadas laterales existen y son iguales.

(a) Determine $f'_-(4)$ y $f'_+(4)$ para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 5 - x & \text{si } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5-x} & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

(b) Trace la gráfica de f.

(c) ¿Dónde es discontinua f?

(d) ¿Dónde f no es derivable?

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. Explique qué significa cada uno de los enunciados siguientes e ilustre con un trazo.

(a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

(d) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ (e) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

2. Describa varias formas en que un límite puede no existir. Ilustre con gráficas.

3. Enuncie las leyes de los límites siguientes.

(a) Ley de la suma
(b) Ley de la diferencia
(c) Ley del múltiplo constante
(d) Ley del producto
(e) Ley del cociente
(f) Ley de la potencia
(g) Ley de la raíz

4. ¿Qué establece el teorema de la compresión?

5. (a) ¿Qué quiere darse a entender al decir que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la curva $y = f(x)$? Trace curvas para ilustrar las diversas posibilidades.

(b) ¿Qué significa decir que la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$? Trace curvas para ilustrar las diversas posibilidades.

6. ¿Cuáles de las curvas siguientes tienen asíntotas verticales? ¿Cuáles tienen asíntotas horizontales?

(a) $y = x^4$ (b) $y = \operatorname{sen} x$ (c) $y = \tan x$

(d) $y = \tan^{-1}x$ (e) $y = e^x$ (f) $y = \ln x$

(g) $y = 1/x$ (h) $y = \sqrt{x}$

7. (a) ¿Qué significa que f sea continua en a?

(b) ¿Qué significa que f sea continua sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$? ¿Qué puede decir acerca de la gráfica de esta función?

8. (a) Dé ejemplos de funciones que sean continuas en $[-1, 1]$.

(b) Dé un ejemplo de una función que no sea continua en $[0, 1]$.

9. ¿Qué establece el teorema del valor intermedio?

10. Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

11. Suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta con posición $f(t)$ en el instante t. Escriba una expresión para la velocidad instantánea de un objeto en el instante $t = a$. ¿Cómo se puede interpretar esta velocidad en términos de la gráfica de f?

12. Si $y = f(x)$ y x cambia de x_1 a x_2, escriba expresiones para lo siguiente.

(a) La razón promedio de cambio de y con respecto a x a lo largo del intervalo $[x_1, x_2]$.

(b) La razón de cambio instantáneo de y con respecto a x en $x = x_1$.

13. Defina la derivada $f'(a)$. Analice dos maneras de interpretar este número.

14. Defina la segunda derivada de f. Si $f(t)$ es la función de posición de una partícula, ¿cómo puede interpretar la segunda derivada?

15. (a) ¿Qué significa que f sea derivable en a?

(b) ¿Cuál es la relación entre derivabilidad y continuidad de una función?

(c) Trace la gráfica de una función que sea continua, pero no derivable en $a = 2$.

16. Describa varias maneras en que una función puede no ser derivable. Ilustre con gráficas.

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. $\lim_{x\to 4}\left(\dfrac{2x}{x-4}-\dfrac{8}{x-4}\right)=\lim_{x\to 4}\dfrac{2x}{x-4}-\lim_{x\to 4}\dfrac{8}{x-4}$

2. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6}=\dfrac{\lim_{x\to 1}(x^2+6x-7)}{\lim_{x\to 1}(x^2+5x-6)}$

3. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x^2+2x-4}=\dfrac{\lim_{x\to 1}(x-3)}{\lim_{x\to 1}(x^2+2x-4)}$

4. $\dfrac{x^2-9}{x-3}=x+3$

5. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)$

6. Si $\lim_{x\to 5} f(x)=2$ y $\lim_{x\to 5} g(x)=0$, entonces $\lim_{x\to 5}[f(x)/g(x)]$ no existe.

7. Si $\lim_{x\to 5} f(x)=0$ y $\lim_{x\to 5} g(x)=0$, entonces $\lim_{x\to 5}[f(x)/g(x)]$ no existe.

8. Si no existe el $\lim_{x\to a} f(x)$ y ni el $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ no existe.

9. Si el $\lim_{x\to a} f(x)$ existe pero no existe el $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ no existe.

10. Si existe el $\lim_{x\to 6}[f(x)g(x)]$ entonces el límite debe ser igual a $f(6)\,g(6)$.

11. Si p es un polinomio, entonces $\lim_{x\to b} p(x)=p(b)$

12. Si $\lim_{x\to 0} f(x)=\infty$ y $\lim_{x\to 0} g(x)=\infty$, entonces $\lim_{x\to 0}[f(x)-g(x)]=0$.

13. Una función puede tener dos asíntotas horizontales distintas.

14. Si f tiene dominio $[0,\infty)$ y no tiene asíntota horizontal entonces $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ o $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$.

15. Si la recta $x=1$ es una asíntota vertical de $y=f(x)$, entonces f no está definida en 1.

16. Si $f(1)>0$ y $f(3)<0$, entonces existe un número c entre 1 y 3 tal que $f(c)=0$.

17. Si f es continua en 5 y $f(5)=2$ y $f(4)=3$, entonces $\lim_{x\to 2} f(4x^2-11)=2$.

18. Si f es continua en $[-1,1]$ y $f(-1)=4$ y $f(1)=3$, entonces existe un número r tal que $|r|<1$ y $f(r)=\pi$.

21. Si f es continua en a, entonces f es derivable en a.

22. Si $f'(r)$ existe, entonces $\lim_{x\to r} f(x)=f(r)$.

23. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

24. La ecuación $x^{10}+10x^2+5=0$ tiene una raíz en el intervalo $(0,2)$.

25. Si f es continua en a, también lo es $|f|$.

26. Si $|f|$ es continua en a, también lo es f.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

REFERENCIA

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín