Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

Vigilada Mineducación

ENCUENTRO 13.3

Sección 3.9: Razones relacionadas

Estrategia de resolución de problemas Es útil recordar algunos de los principios para resolver problemas que se encuentran en la página 75 y adaptarlos a las razones de cambio relacionadas:

1. Lea con cuidado el problema.
2. Si es posible, dibuje un diagrama.
3. Introduzca la notación. Asigne símbolos a todas las cantidades que están en función del tiempo.
4. Exprese la información dada y la razón requerida en términos de derivadas.
5. Escriba una ecuación que relacione las diferentes cantidades del problema. Si es necesario, utilice las propiedades geométricas de la situación para eliminar una de las variables por sustitución.
6. Utilice la regla de la cadena para derivar respecto a t ambos miembros de la ecuación.
7. Sustituya la información dada en la ecuación resultante y resuelva para la razón de cambio desconocida.

Más ejemplos propuestos

4. El largo de un rectángulo se incrementa a razón de 8 cm/s y el ancho a razón de 3 cm/s. Cuando el largo es 20 cm y el ancho es 10 cm, ¿qué tan rápido se incrementa el área del rectángulo?

$A \ = \ área.$

$y = ancho = 10cm$

$x = largo = 20cm$

$$\frac{dx}{dt} = incremento\ del\ largo\ con\ respecto\ al\ tiempo = 8\ cm/s$$
$$\frac{dy}{dt} = incremento\ del\ ancho\ con\ respecto\ al\ tiempo = 3cm/s$$
$$\frac{dA}{dt} = incremento\ del\ área\ con\ respecto\ al\ tiempo = ?$$

La ecuación que relaciona las variables es:

$$A = xy$$

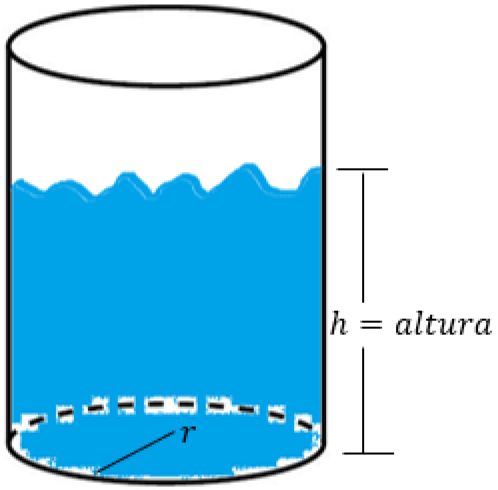
$$\frac{dA}{dt} = y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}$$

Reemplazando los datos conocidos:

$$\frac{dA}{dt} = (10)(8) + (20)(3)$$
$$\frac{dA}{dt} = 140\ cm^2/seg$$

Ejemplos propuestos

5. Un tanque cilíndrico con 5 cm de radio se está llenando con agua a razón de $3\,cm^3/min$. ¿Qué tan rápido se incrementa la altura del agua?



$\boldsymbol{V = volumen}$

$\frac{dv}{dt} = incremento\ del\ volumen\ con\ respecto\ al\ tiempo = 3cm^3/min$

$\frac{dh}{dt} = incremento\ de\ la\ altura\ con\ respecto\ \ al\ tiempo =?$

La ecuación que relaciona al volumen con la altura es

$v = \pi r^2 h.$

$\frac{dv}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$

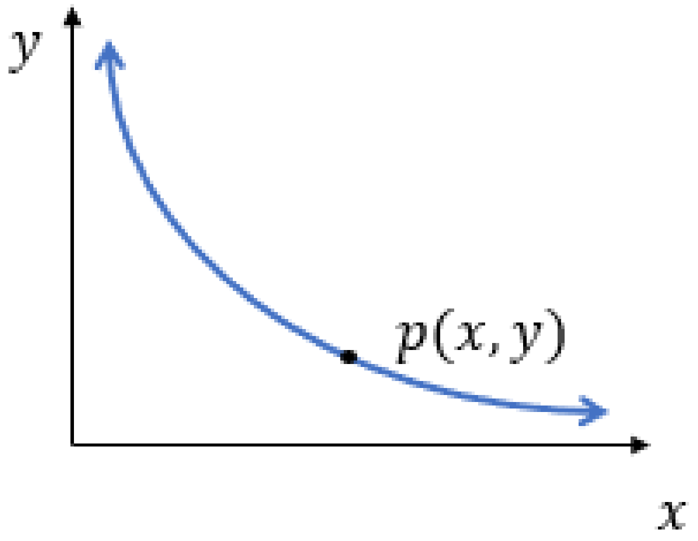
Se reemplazan los datos conocidos y se despeja $\frac{dh}{dt}$

$3 = \pi(25)\frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{3}{\pi(25)}\left(\frac{cm}{min}\right)$

Ejemplos propuestos

12. Una partícula se desplaza a lo largo de la hipérbola $xy = 8$. Cuando alcanza el punto $(4, 2)$, la coordenada y disminuye con una rapidez de 3 cm/s. ¿Qué tan rápido cambia la coordenada x del punto en movimiento en ese instante?



$$\frac{dx}{dt} = cambio\ de\ x\ con\ respecto\ al\ tiempo =?$$
$$\frac{dy}{dt} = cambio\ de\ y\ con\ respecto\ \ al\ tiempo = 3\ cm/seg$$

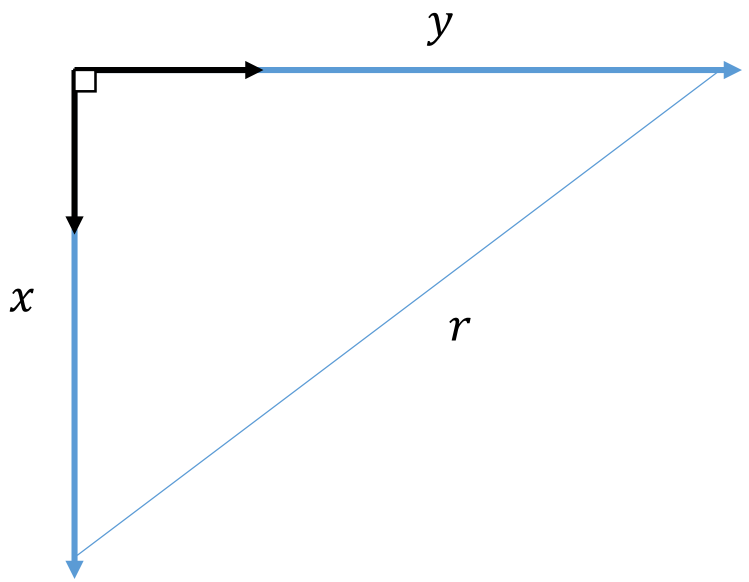
La ecuación que relaciona a x y y es $xy = 8$

Derivando implícitamente con respecto al tiempo:

$$x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{-x\,dy/dt}{y} = \frac{-(4)(-3)}{2} = 6cm/seg$$

Ejemplos propuestos

17. Dos automóviles parten desde el mismo punto. Uno se dirige hacia el sur a 60 km/h y el otro hacia el este a 25 km/h . ¿Con qué rapidez se incrementa la distancia entre los automóviles dos horas después?



$x = distancia\ recorrida\ al\ sur.$
$y = distacia\ recorrida\ al\ este.$
$r = distancia\ entre\ los\ dos\ autos.$
$t = tiempo\ transcurrido = 2h$
$\frac{dx}{dt} = velocidad\ del\ auto\ al\ sur = 60km/h$
$\frac{dy}{dt} = velocidad\ del\ auto\ al\ este = 25km/h$
$\frac{dr}{dt} = velocidad\ con\ la\ cual\ se\ alejan\ los\ autos = ?$

La ecuación que relaciona las 3 variables es $r^2 = x^2 + y^2$ (1)
Derivando implícitamente con respecto al tiempo:

$$2r\frac{dr}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$$

Despejando $\frac{dr}{dt}$: $\frac{dr}{dt} = \frac{\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)}{r}$ (2)

Para hallar x y y, recordar que:
$espacio = (velocidad)(tiempo)$:

$$x = \left(60\frac{km}{h}\right)(2h) = 120km$$

$$y = \left(25\frac{km}{h}\right)(2h) = 50km$$

Para hallar r, se utiliza (1):

$$r = \sqrt{(120)^2 + (50)^2}$$

$$r = \sqrt{14400 + 2500}$$

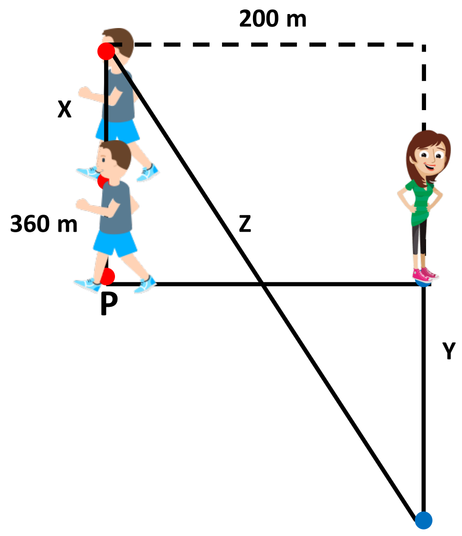
$$r = 130km$$

Reemplazando datos en (2):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{(120)(60)+(50)(25)}{130} = 65\ km/h$$

Ejemplos propuestos

19. Un hombre empieza a caminar hacia el norte a 1.2 m/s desde un punto P. Cinco minutos más tarde, una mujer empieza a caminar hacia el sur a 1.6 m/s desde un punto a 200 m directo al este de P. ¿Con qué rapidez se están separando las personas 15 min después de que la mujer empezó a caminar?



A 5 minutos:

dH = $1{,}2\,\frac{m}{s} \times 5min \times \frac{60\,s}{1\,min}$

dH = 360 m

A 15 minutos:

dH = $1{,}2\,\frac{m}{s} \times 15min \times \frac{60\,s}{1\,min}$

dH = 1080 m = x

dM = $1{,}6\,\frac{m}{s} \times 15min \times \frac{60\,s}{1\,min}$

dM = 1440 m = y

$$z^2 = (x + 360 + y)^2 + 200^2$$

$$2z\frac{dz}{dt} = 2(x + 360 + y)\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right)$$

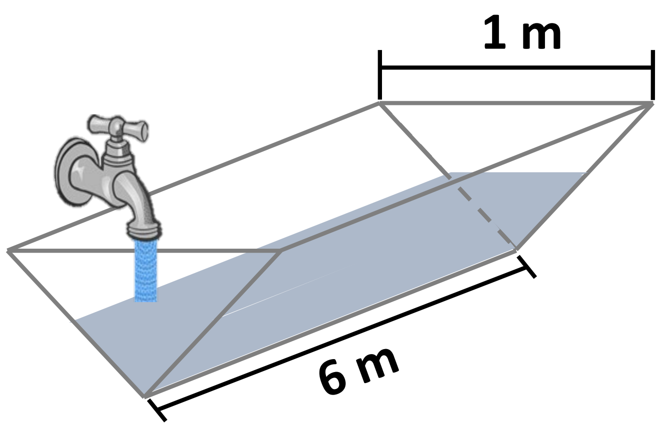
$$\frac{dz}{dt} = \frac{(x + 360 + y)\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right)}{z}$$

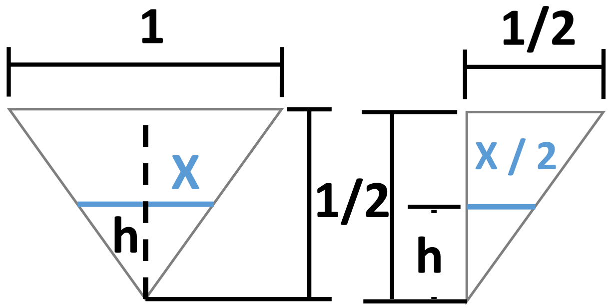
$$\frac{dz}{dt} = \frac{(1080 + 360 + 1440)(1{,}2 + 1{,}6)}{\sqrt{(1080 + 360 + 1440)^2 + 200^2}}$$

$$\frac{dz}{dt} = 2{,}79\,\frac{m}{s}$$

Ejemplos propuestos

26. Se tiene un canal de 6 m de largo con extremos en forma de triángulos isósceles que están a 1 m en la parte superior y tiene una altura de 50 cm. Si el canal se está llenando de agua a razón de 1.2 m^3/min, ¿qué tan rápido está aumentando el nivel del agua cuando se encuentra a 30 cm de profundidad?





$$A\Delta = \frac{Xh}{2} = h^2$$

$$\frac{\frac{x}{2}}{h} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$x = 2h$$

$$V = h^2 \times 6$$

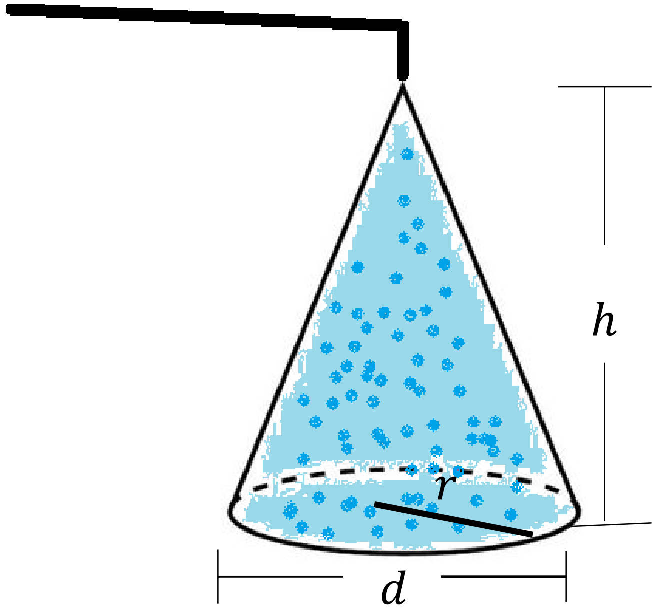
$$\frac{dV}{dt} = 12h\,\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{12h}$$

$$\frac{dh}{dt} = 0,\widehat{33}\,\frac{m}{min}$$

Ejemplos propuestos

29. Se descarga grava por medio de una banda transportadora a razón de $30\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$, y el grosor de granos es tal que forma una pila en forma de cono cuyo diámetro y altura son siempre iguales. ¿Qué tan rápido se incrementa la altura de la pila cuando esta mide 10 m de alto?



$h = altura = 2r = 10m$
$d = diametro = 10m$
$r = radio = 5\,m$

$v = volumen\ del\ cono.$
$h = altura\ del\ cono.$
$\frac{dv}{dt} = velocidad\ con\ la\ cual\ cae\ la\ arena = 30m^3/min$
$\frac{dh}{dt} = incremento\ de\ la\ altura\ con\ respecto\ al\ tiempo.$

La ecuación que liga a v, r, h es:

$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (1)

Pero $h = 2r$ $\qquad v = \frac{1}{3}\pi r^2(2r)$

$v = \frac{2}{3}\pi r^3$ (2)

Derivando implícitamente a (2) con respecto al tiempo:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{3}\pi\left(3r^2\frac{dr}{dt}\right) = 2\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dv}{dt}}{2\pi r^2}$$

Con $\frac{dr}{dt} = \frac{30\ m^3/min}{2\pi(5m)^2} = \frac{30}{50\pi}\left(\frac{m}{min}\right)$

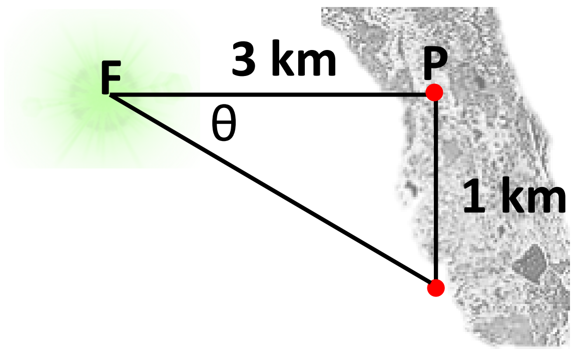
$$\frac{dr}{dt} = \frac{3}{5\pi}\left(\frac{m}{min}\right)$$

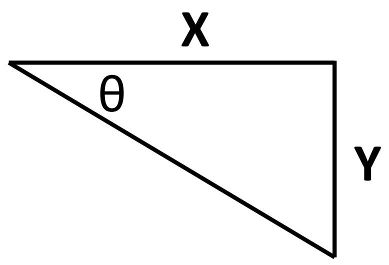
La razón de cambio de la altura con respecto al tiempo es:

$\frac{dh}{dt} = 2\left(\frac{3}{5\pi}\right) = \frac{6}{5\pi}\left(\frac{m}{min}\right)$, recordando que $h = 2r$

Ejemplos propuestos

44. Un faro se localiza en una pequeña isla a 3 km de distancia del punto P más cercano que se encuentra en una playa recta, y su luz da cuatro revoluciones por minuto. ¿Qué tan rápido se mueve el haz de luz a lo largo de la playa cuando está a 1 km de P?





$$tan\theta = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad y = 3\ tan\theta$$

$$\frac{dy}{dt} = 3\ sec^2\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = 3sec^2\left(tan^{-1}\frac{1}{3}\right)(8\pi)$$

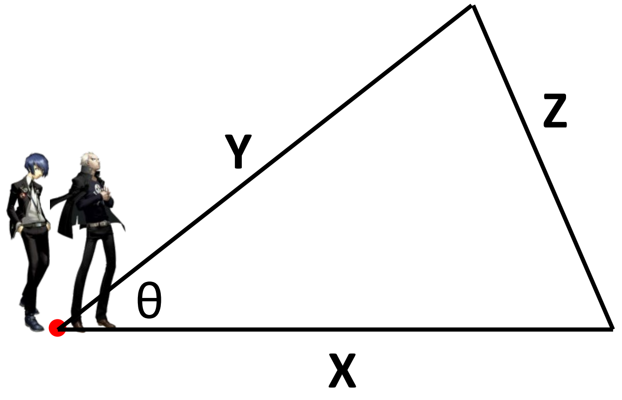
$$\frac{dy}{dt} = 83{,}78\frac{km}{min}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = w = 4\frac{rev}{min} \times \frac{2\pi\ rad}{1\ rev} = 8\pi\frac{rad}{min}$$

Ejemplos propuestos

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

48. Dos personas parten del mismo punto. Una camina hacia el este a 4 km/h, y la otra camina hacia el noreste a 2 km/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre las personas después de 15 minutos?



$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xycos\theta$$

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} - 2xcos\theta\frac{dy}{dt} - 2ycos\theta\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} - xcos\theta\frac{dy}{dt} - ycos\theta\frac{dx}{dt}}{z}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1 \times 4 + 0{,}5 \times 2 - 1 \times cos45° \times 2 - 0{,}5 \times cos45° \times 4}{\sqrt{1^2 + 0{,}5^2 - 2 \times 1 \times 0{,}5 \times cos45°}}$$

$$\frac{dz}{dt} = 2{,}95\ \frac{km}{h}$$

Después de 15 minutos:
X = 4 km/h x 0,25 h = 1 km
Y = 2 km/h x 0,25 h = 0,5 km

Ejercicios

1. Si V es el volumen de un cubo con arista x, y el cubo se expande conforme pasa el tiempo, exprese dV/dt en términos de dx/dt.

3. Cada lado de un cuadrado se incrementa a razón de 6 cm/s. ¿Con qué rapidez se incrementa el área del cuadrado cuando su área es de 16 cm^2?

7. El radio de una pelota esférica está aumentando a razón de 2 cm/min. ¿Con qué velocidad está aumentando la superficie de la pelota cuando el radio es de 8 cm?

11. Si $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $dx/dt = 5$ y $dy/dt = 4$, encuentre dz/dt cuando $(x, y, z) = (2, 2, 1)$.

14. Si una bola de nieve se derrite de tal modo que el área superficial disminuye a razón de 1 cm^2/min, calcule la rapidez con la que disminuye el diámetro cuando es 10 cm.

15. Una lámpara está instalada en lo alto de un poste de 6 m de altura. Un hombre de 2 m de estatura se aleja caminando desde el poste con una rapidez de 1.5 m/s a lo largo de una trayectoria rectilínea. ¿Qué tan rápido se desplaza la punta de su sombra cuando el hombre está a 10 m del poste?

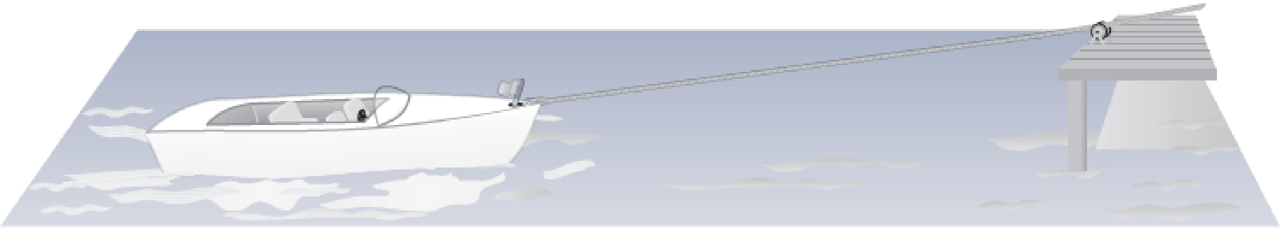
Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

21. La altura de un triángulo se incrementa a razón de 1 cm/min, mientras que el área del triángulo aumenta a razón de 2 cm^2/min. ¿Con qué rapidez cambia la base del triángulo cuando la altura es de 10 cm y el área es de 100 cm^2?

23. A mediodía, el barco A está a 100 km al oeste del barco B. El barco A se dirige hacia el sur a 35 km/h, y el barco B va hacia el norte a 25 km/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los barcos a las 16:00?

22. Un bote se jala hacia un muelle mediante una soga unida a la proa y que pasa por una polea que se encuentra instalada en el muelle a 1 m más arriba que la proa del bote. Si la soga se jala a una rapidez de 1 m/s, ¿qué tan rápido se aproxima el bote al muelle cuando se encuentra a 8 m?



25. El agua sale de un depósito en forma de cono invertido a razón de 10 000 cm^3/min al mismo tiempo que se bombea agua al depósito a razón constante. El depósito mide 6 m de altura, y el diámetro en la parte superior es de 4 m. Si el nivel del agua se eleva a razón de 20 cm/min cuando la altura del agua es de 2 m, calcule la razón a la cual el agua está siendo bombeada hacia el tanque.

30. Un papalote que está a 50 m arriba de la superficie de la tierra se desplaza en forma horizontal a una rapidez de 2 m/s. ¿Con qué rapidez disminuye el ángulo entre la cuerda y la horizontal cuando se han soltado 100 m de cuerda?

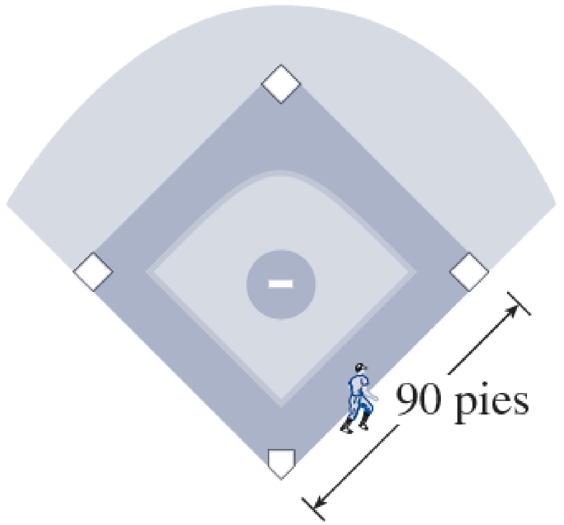
27. Un canal de agua tiene 10 m de longitud y una sección transversal en forma de un trapecio isósceles con 30 cm de ancho en la parte inferior, 80 cm de ancho en la parte superior, y una altura de 50 cm. Si el canal se llena con agua a razón de 0.2 m^3/min, ¿qué tan rápido está aumentando el nivel del agua cuando se encuentra a 30 cm de profundidad?

33. La parte superior de una escalera se desliza por una pared con una rapidez vertical de 0.15 m/s. En el momento en que la parte inferior de la escalera está a 3 m de la pared, se desliza alejándose de esta con una rapidez de 0.2 m/s. ¿Cuál es la longitud de la escalera?

20. Un diamante de béisbol es un cuadrado de 90 pies por lado. Un bateador golpea la pelota y corre hacia la primera base con una rapidez de 24 pies/s.

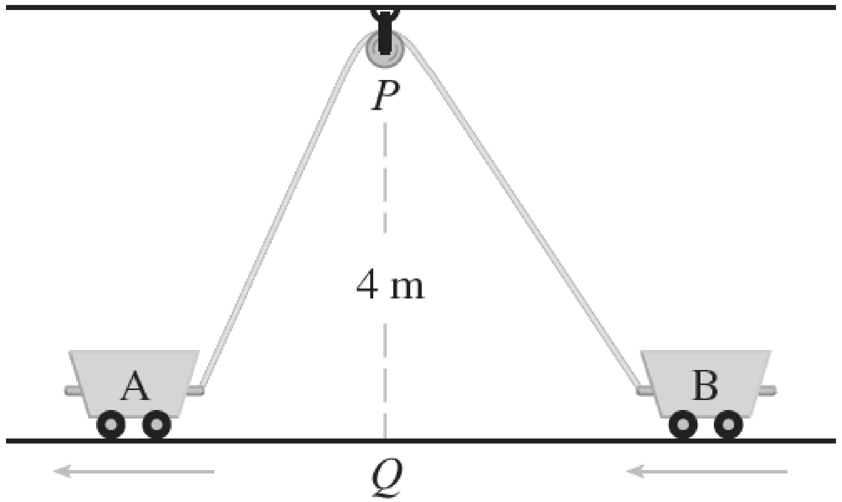
(a) ¿Con qué rapidez decrece su distancia desde la segunda base cuando está a medio camino de la primera base?

(b) ¿Con qué rapidez se incrementa su distancia desde la tercera base en el mismo momento?



41. Los lados de un triángulo tienen longitudes de 12 y 15 m. El ángulo entre ellos se incrementa a razón de $2°/\text{min}$. ¿Qué tan rápido se incrementa la longitud del tercer lado cuando el ángulo entre los lados de longitud fija es de 60º?

42. Dos carros A y B están conectados por medio de una soga de 12 m de longitud que pasa por una polea P (véase la figura). El punto Q está en el suelo a 4 m directamente abajo de P y entre los carros. El carro A es jalado a partir de Q a una rapidez de $0.5\ \text{m/s}$. ¿Qué tan rápido se mueve el carro B hacia Q en el instante en que el carro A está a 3 m de Q?



37. La ley de Boyle establece que, cuando una muestra de gas se comprime a temperatura constante, la presión P y el volumen V satisfacen la ecuación $PV = C$, donde C es una constante. Suponga que en un cierto instante el volumen es de 600 cm^3, la presión es de 150 kPa y que la presión se incrementa a razón de 20 kPa/min ¿Con qué rapidez disminuye el volumen en ese instante?

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

46. Una rueda de la fortuna de 10 m de radio está girando a razón de una revolución cada 2 min. ¿Qué tan rápido se está elevando un pasajero cuando su silla está a 16 m del nivel del suelo?

47. Un avión que vuela con rapidez constante de 300 km/h pasa sobre una estación terrestre de radar a una altitud de 1 km y se eleva con un ángulo de 30°. ¿Con qué rapidez se incrementa la distancia del avión a la estación de radar un minuto más tarde?

49. Un individuo corre por una pista circular de 100 m de radio a una rapidez constante de 7 m/s. Un amigo del corredor está parado a una distancia de 200 m del centro de la pista. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los amigos cuando la distancia entre ellos es de 200 m?

50. La manecilla de los minutos de un reloj mide 8 mm de largo y la manecilla de las horas mide 4 mm de largo. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre las puntas de las manecillas cuando es 13:00?

REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín