Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

ENCUENTRO 15.2

Sección 4.3: Cómo las derivadas afectan la forma de una gráfica.

Cómo afecta la derivada la forma de una gráfica

Muchas de las aplicaciones del cálculo dependen de nuestra capacidad para deducir hechos acerca de una función f a partir de la información que se obtiene de sus derivadas. Ya que $f'(x)$ representa la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$, nos indica la dirección de la curva en cada punto. Así, es razonable esperar que la información relacionada con $f'(x)$ nos proporcione información asociada con $f(x)$.

¿Qué indica f' respecto a f?

Para ver cómo la derivada de f puede decirnos dónde una función es creciente o decreciente, miremos la figura 1. (Las funciones crecientes y las decrecientes fueron definidas en la sección 1.1). Entre A y B y entre C y D, las rectas tangentes tienen pendiente positiva, por lo que $f'(x) > 0$. Entre B y C, las rectas tangentes tienen pendiente negativa, así que $f'(x) < 0$. Así, parece que f crece cuando $f'(x)$ es positiva y decrece cuando $f'(x)$ es negativa. Para demostrar que esto siempre es el caso, usamos el teorema del valor medio.

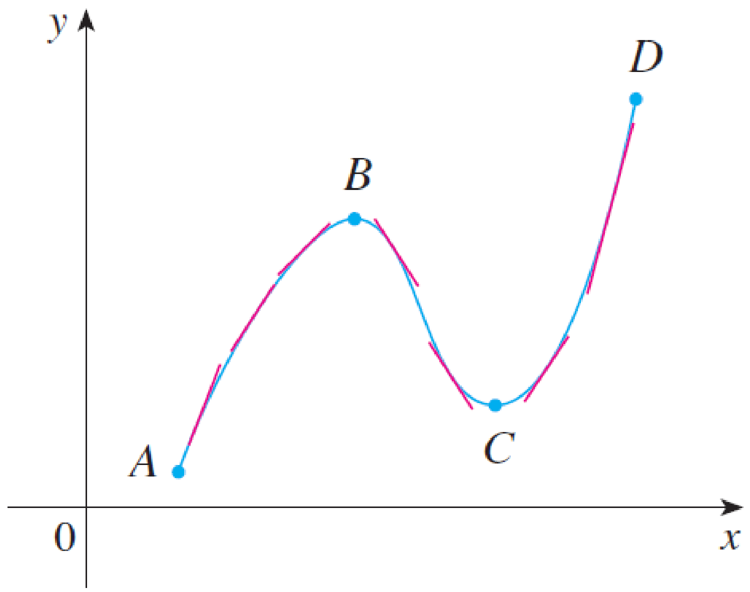


FIGURA 1

Prueba creciente/decreciente (C/D)

a) Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces f es creciente sobre ese intervalo.

b) Si $f'(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces f es decreciente sobre ese intervalo.

Prueba de la primera derivada Supongamos que $x = c$ es un número crítico de una función continua f.

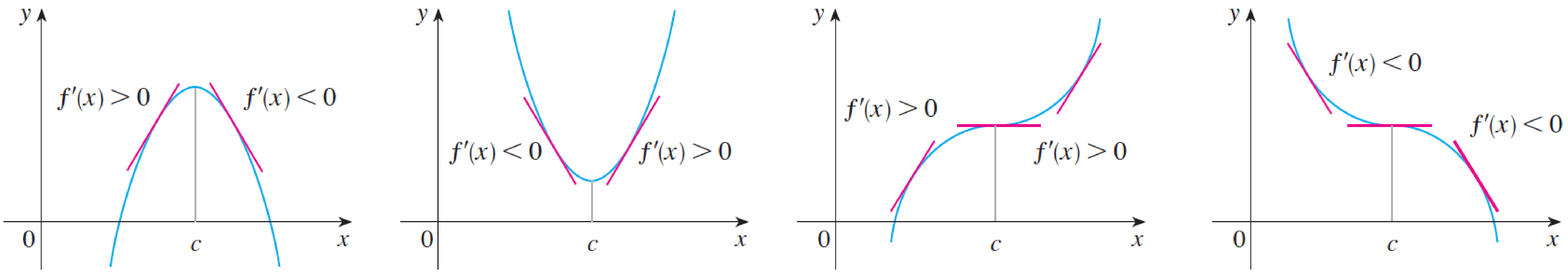
a) Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.

b) Si f' cambia de negativo a positivo en c, entonces f tiene un mínimo local en c.

c) Si f' no cambia de signo en c (p. ej., si f' es positiva por ambos lados de c o negativa por ambos lados), entonces f no tiene ningún máximo o mínimo local en c.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936



a) Máximo local   b) Mínimo local   c) Sin máximos ni mínimos   d) Sin máximos ni mínimos

V **EJEMPLO 1** Encuentre dónde la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ es creciente y dónde es decreciente.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)(x + 1)$$

Para utilizar la prueba C/D tenemos que investigar dónde $f'(x) > 0$ y dónde $f'(x) < 0$. Esto depende de los signos de los tres factores de $f'(x)$, es decir, $12x$, $(x - 2)$ y $(x + 1)$. Para esto, dividimos la recta real en intervalos cuyos extremos son los números críticos: -1, 0 y 2, y organizamos nuestro trabajo en una gráfica. Un signo *más* indica que la expresión dada es positiva, y un signo *menos* indica que es negativa. La última columna de la tabla da la conclusión basada en la prueba C/D. Por ejemplo, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$, por lo que f es decreciente sobre $(0, 2)$. (También sería correcto decir que f es decreciente sobre el intervalo cerrado $[0, 2]$.)

Intervalo	$12x$	$x - 2$	$x + 1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	$-$	$-$	$-$	$-$	Decreciente sobre $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$	Creciente sobre $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$+$	$-$	Decreciente sobre $(0, 2)$
$x > 2$	$+$	$+$	$+$	$+$	Creciente sobre $(2, \infty)$

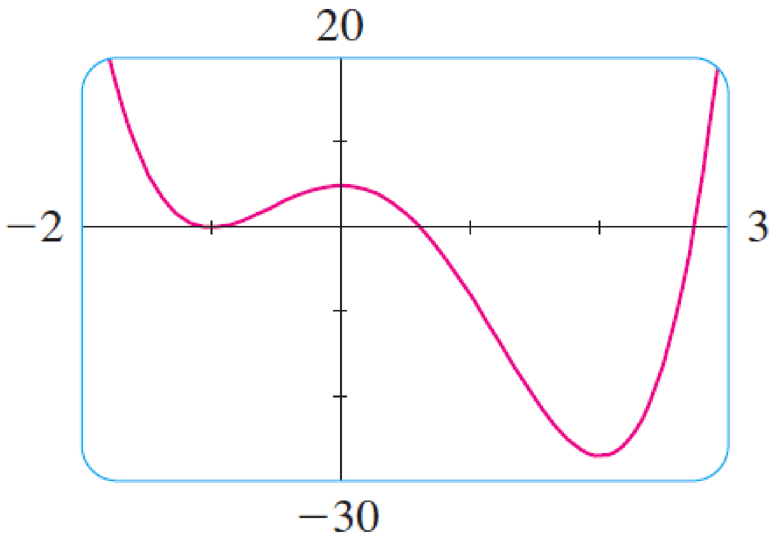


FIGURA 2

Puede observarse en la figura 2 que $f(0) = 5$ es un valor máximo local de f porque crece sobre $(-1, 0)$ y disminuye sobre $(0, 2)$. O bien, en términos de derivadas, $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$ y $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$. En otras palabras, el signo de $f'(x)$ cambia de positivo a negativo en $x = 0$.

V **EJEMPLO 2** Encuentre los valores mínimos y máximos locales de la función f en el ejemplo 1.

SOLUCIÓN De la tabla en la solución del ejemplo 1 vemos que $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en $x = -1$, así que $f(-1) = 0$ es un valor mínimo local por la prueba de la primera derivada. Del mismo modo, f' cambia de negativa a positiva en $x = 2$, por lo que $f(2) = -27$ también es un valor mínimo local. Como se ha señalado anteriormente, $f(0) = 5$ es un valor máximo local porque $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en $x = 0$.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO 3 Encuentre los valores máximo y mínimo locales de la función

$$g(x) = x + 2 \operatorname{sen} x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

SOLUCIÓN Para encontrar los números críticos de g, derivamos:

$$g'(x) = 1 + 2 \cos x$$

Así que $g'(x) = 0$ cuando $\cos x = -\frac{1}{2}$. Las soluciones de esta ecuación son $2\pi/3$ y $4\pi/3$. Debido a que g es derivable para toda x, los únicos números críticos son $2\pi/3$ y $4\pi/3$, así que podemos analizar a g en la siguiente tabla.

Intervalo	$g'(x) = 1 + 2\cos x$	g
$0 < x < 2\pi/3$	$+$	creciente sobre $(0, 2\pi/3)$
$2\pi/3 < x < 4\pi/3$	$-$	decreciente sobre $(2\pi/3, 4\pi/3)$
$4\pi/3 < x < 2\pi$	$+$	creciente sobre $(4\pi/3, 2\pi)$

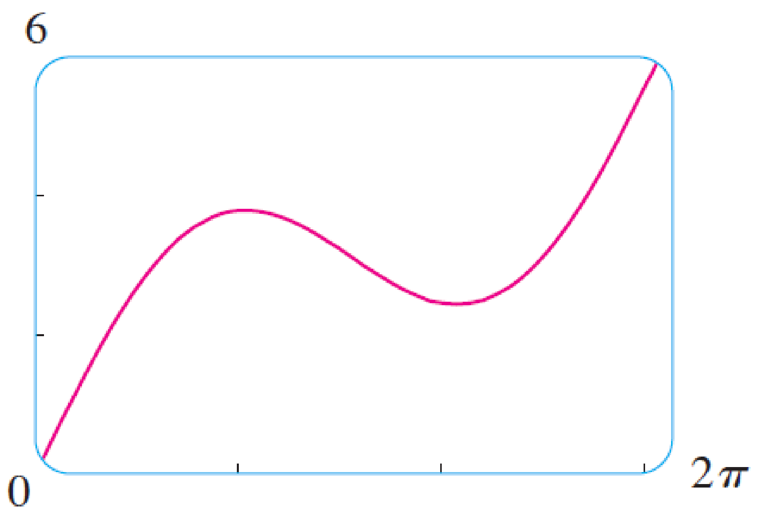


FIGURA 4
$g(x) = x + 2 \operatorname{sen} x$

Ya que $g'(x)$ cambia de positivo a negativo en $2\pi/3$, la prueba de la primera derivada nos indica que existe un máximo local en $x = 2\pi/3$ y el máximo valor local es

$$g(2\pi/3) = \frac{2\pi}{3} + 2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3.83$$

Por otro lado, $g'(x)$ cambia de negativa a positiva en $x = 4\pi/3$ y, por tanto,

$$g(4\pi/3) = \frac{4\pi}{3} + 2 \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2.46$$

es un valor mínimo local. La gráfica de g en la figura 4 apoya nuestra conclusión.

¿Qué dice f'' respecto a f?

La figura 5 muestra las gráficas de dos funciones crecientes sobre (a, b). Ambas gráficas unen el punto A al punto B, pero parecen diferentes porque se doblan en diferentes direcciones. ¿Cómo podemos distinguir entre estos dos tipos de comportamiento? En la figura 6, las rectas tangentes a estas curvas se han dibujado en varios puntos. En a) sobre la curva queda por arriba de las rectas tangentes y se dice que f es *cóncava hacia arriba* sobre (a, b). En b), la curva se encuentra por debajo de las rectas tangentes y g se llama *cóncava hacia abajo* sobre (a, b).

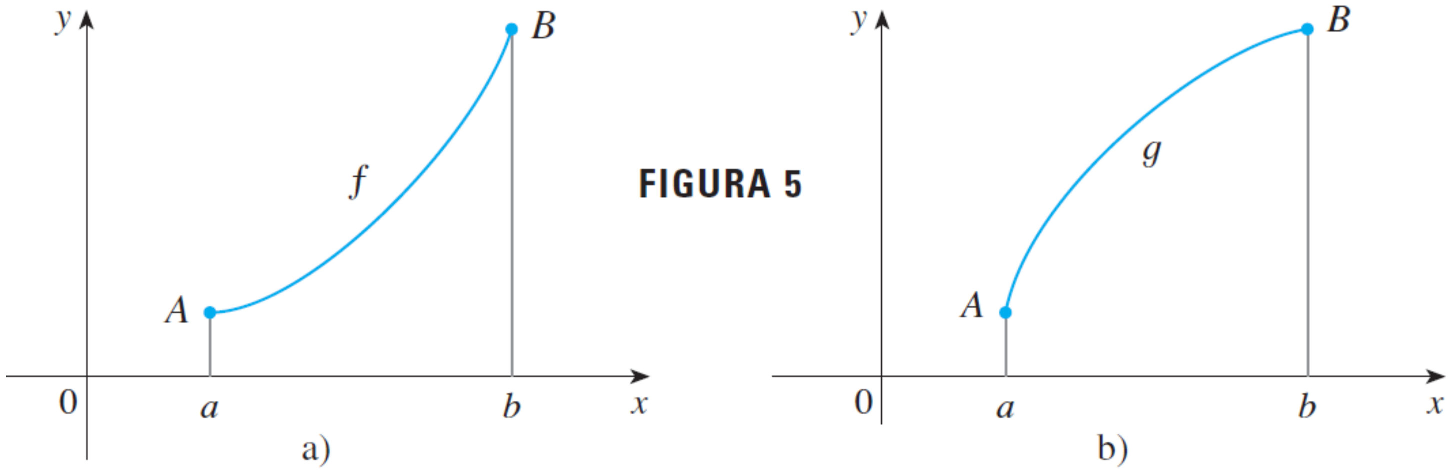


FIGURA 5

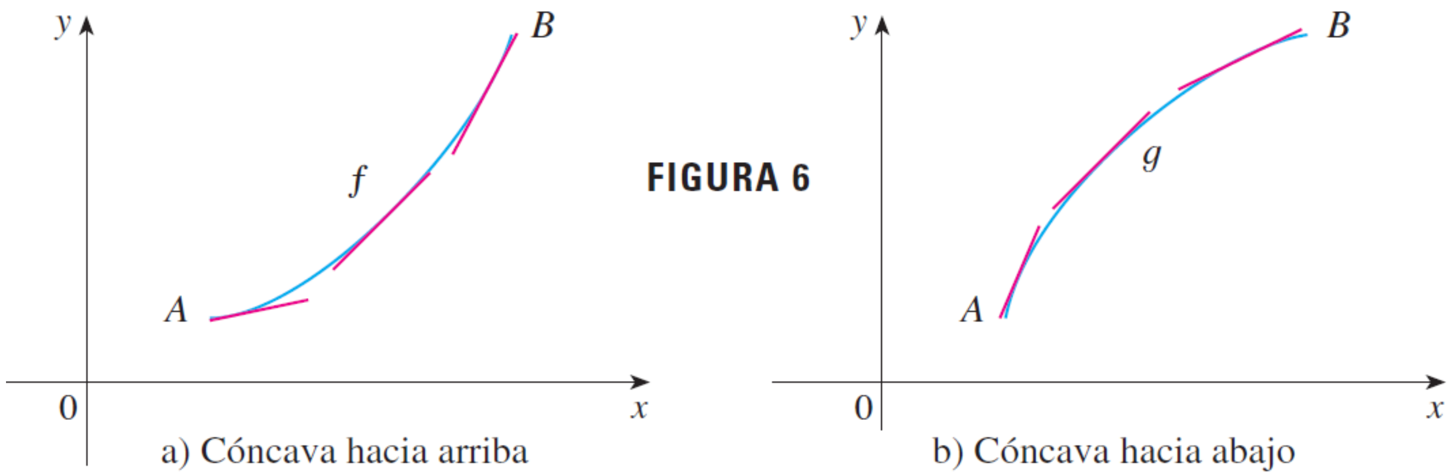


FIGURA 6

¿Qué dice f'' respecto a f?

Veamos cómo la segunda derivada ayuda a determinar los intervalos de concavidad. Al observar la figura 6a, puede verse que, de izquierda a derecha, la pendiente de la recta tangente es creciente. Esto significa que la derivada f' es una función creciente y, por tanto, su derivada f'' es positiva. Asimismo, en la figura 6b) la pendiente de la recta tangente decrece de izquierda a derecha, así que f' decrece y, por ende, f'' es negativa. Este razonamiento puede invertirse y sugiere que el siguiente teorema es verdadero. En el apéndice F se da una demostración con la ayuda del teorema del valor medio.

Prueba de concavidad

a) Si $f''(x) > 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre I.

b) Si $f''(x) < 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre I.

Definición Si la gráfica de f queda por arriba de todas sus rectas tangentes sobre un intervalo I, entonces se dice que es **cóncava hacia arriba** sobre I. Si la gráfica de f queda por abajo de todas sus rectas tangentes, se dice que es **cóncava hacia abajo** sobre I.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

La figura 7 muestra la gráfica de una función que es cóncava hacia arriba (abreviado CA) sobre los intervalos (b, c), (d, e) y (e, p), y cóncava hacia abajo (CB) sobre los intervalos (a, b), (c, d), y (p, q).

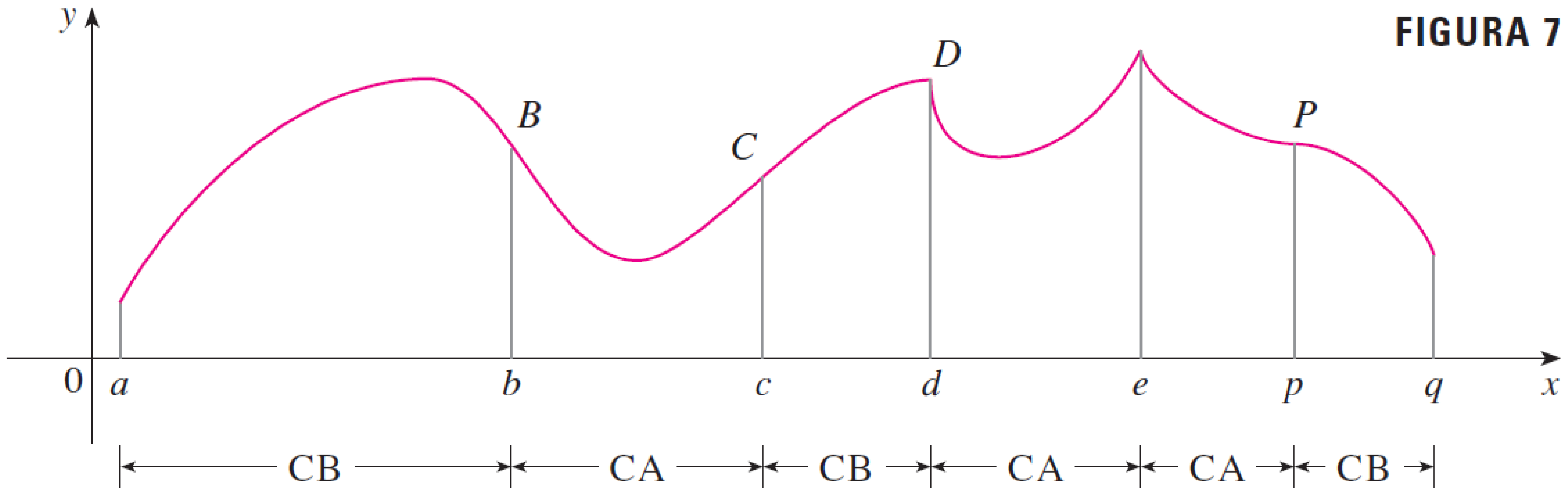


FIGURA 7

EJEMPLO 4 La figura 8 muestra una gráfica de la población de abejas de Chipre criadas en un colmenar. ¿Cómo cambia la tasa de crecimiento poblacional con el tiempo? ¿Cuándo esta tasa es más alta? ¿Sobre qué intervalos es P cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?

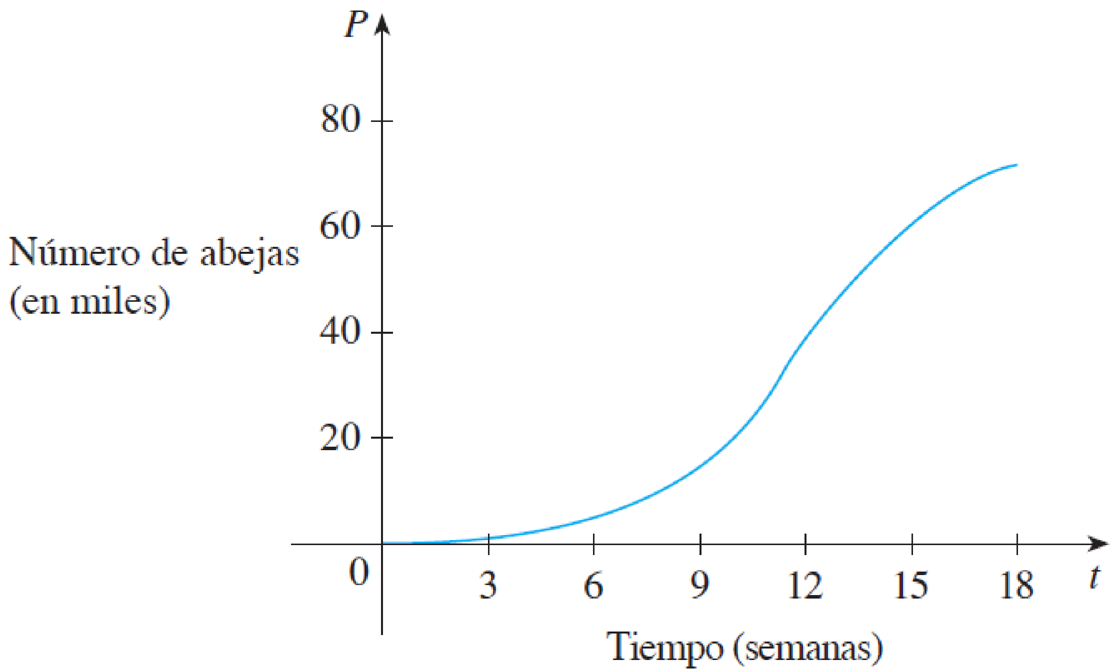


FIGURA 8

SOLUCIÓN Observando la pendiente de la curva cuando t aumenta, vemos que la tasa de crecimiento de la población es inicialmente muy pequeña, después aumenta hasta que llega un máximo aproximadamente a $t = 12$ semanas y disminuye a medida que la población comienza a nivelarse. A medida que la población se acerca a su valor máximo de aproximadamente 75 000 (llamado la *capacidad de acarreo*), la tasa de crecimiento, $P'(t)$, se aproxima a 0. La curva parece ser cóncava hacia arriba en (0, 12) y cóncava hacia abajo en (12, 18).

En el ejemplo 4, la curva de la población ha cambiado de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo en aproximadamente el punto (12, 38 000). Este punto se denomina *punto de inflexión* de la curva. La importancia de este punto es que la tasa de crecimiento de la población tiene allí su valor máximo. En general, un punto de inflexión es aquel donde una curva cambia de dirección la concavidad.

Definición Un punto P sobre una curva $y = f(x)$ se llama *punto de inflexión* si f es allí continua y la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en P.

Por ejemplo, en la figura 7, B, C, D y P son los puntos de inflexión. Observe que si una curva tiene una recta tangente en un punto de inflexión, entonces la curva corta a la recta tangente en ese punto.

De acuerdo con la prueba de concavidad, existe un punto de inflexión en cualquier punto donde la segunda derivada cambia de signo.

Otra aplicación de la segunda derivada es la siguiente prueba para los valores máximos y mínimos, que no es más que una consecuencia de la prueba de concavidad.

Prueba de la segunda derivada Supongamos que f'' es continua cerca de $x = c$.

a) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en $x = c$.

b) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en $x = c$.

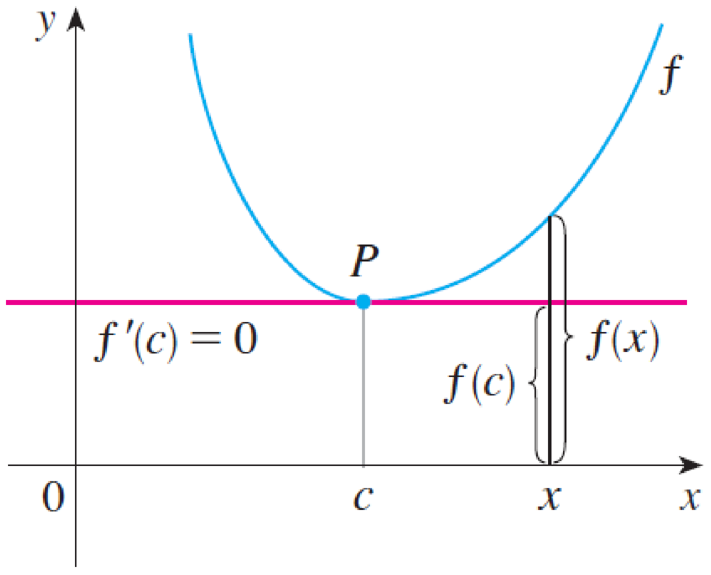


FIGURA 10

$f''(c) > 0$, f es cóncava hacia arriba

V **EJEMPLO 5** Esboce una posible gráfica de una función f que cumpla con las condiciones siguientes:

i) $f'(x) > 0$ sobre $(-\infty, 1)$, $f'(x) < 0$ sobre $(1, \infty)$

ii) $f''(x) > 0$ sobre $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$, $f''(x) < 0$ sobre $(-2, 2)$

iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

SOLUCIÓN La condición i) nos señala que f es creciente sobre $(-\infty, 1)$ y decreciente sobre $(1, \infty)$. La condición ii) dice que f es cóncava hacia arriba sobre $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$ y cóncava hacia abajo sobre $(-2, 2)$. De la condición iii) sabemos que la gráfica de f tiene dos asíntotas horizontales: $y = -2$ e $y = 0$.

Primero dibujamos la asíntota horizontal $y = -2$ como una recta discontinua (véase la figura 9). Después dibujamos la gráfica de f aproximándose a esta asíntota hacia el extremo izquierdo, creciendo a su punto máximo en $x = 1$ y decreciendo hacia el eje x hacia el extremo derecho. También nos aseguramos de que la gráfica tiene puntos de inflexión cuando $x = -2$ y $x = 2$. Observe que hicimos que la curva se doble hacia arriba para $x < -2$ y $x > 2$, y se doble hacia abajo cuando x está entre -2 y 2.

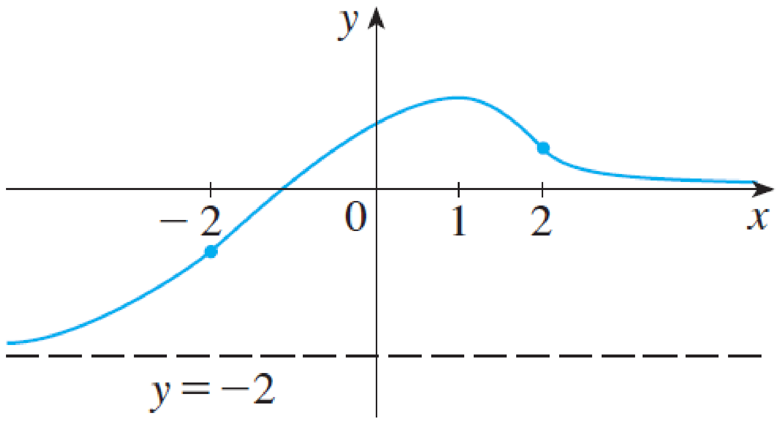


FIGURA 9

V EJEMPLO 6 Discuta la curva $y = x^4 - 4x^3$ respecto a la concavidad, puntos de inflexión y máximos y mínimos locales. Utilice esta información para esbozar la curva.

SOLUCIÓN Si $f(x) = x^4 - 4x^3$, entonces $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

Para encontrar los números críticos establecemos $f'(x) = 0$ para obtener $x = 0$ y $x = 3$. Para utilizar la prueba de la segunda derivada evaluamos f'' en estos números críticos:

$$f''(0) = 0 \qquad f''(3) = 36 > 0$$

Ya que $f'(3) = 0$ y $f''(3) > 0$, $f(3) = -27$ es un mínimo local. Como $f''(0) = 0$, la prueba de la segunda derivada no aporta información sobre el número crítico $x = 0$. Pero ya que $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y también para $0 < x < 3$, la prueba de la primera derivada nos dice que f no tiene un máximo o mínimo local en 0. [De hecho, la expresión para $f'(x)$ muestra que f decrece a la izquierda de 3 y crece a la derecha de 3.]

Puesto que $f''(x) = 0$ cuando $x = 0$ o $x = 2$, dividimos la recta real en intervalos con estos números como extremos y completamos la siguiente tabla.

Intervalo	$f''(x) = 12x(x - 2)$	Concavidad
$(-\infty, 0)$	$+$	hacia arriba
$(0, 2)$	$-$	hacia abajo
$(2, \infty)$	$+$	hacia arriba

El punto (0, 0) es un punto de inflexión, ya que la curva cambia ahí de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo. También $(2, -16)$ es un punto de inflexión, ya que allí la curva cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

Utilizando el mínimo local, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión, esbozamos la curva de la figura 11.

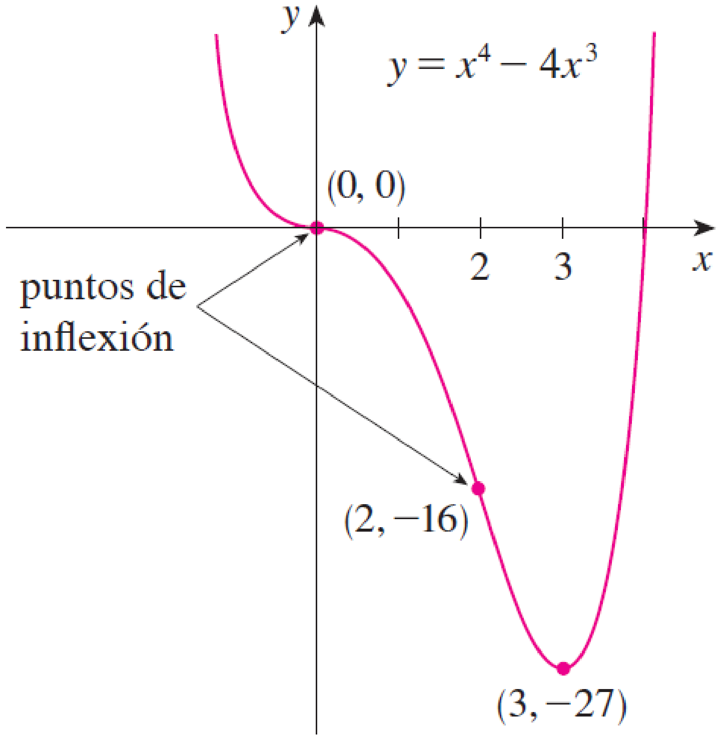


FIGURA 11

NOTA La prueba de la segunda derivada es incierta cuando $f''(c) = 0$. En otras palabras, en tal punto puede haber un máximo, puede haber un mínimo, o podría no haber máximo o mínimo (como en el ejemplo 6). Esta prueba también falla cuando $f''(c)$ no existe. En tales casos, debe utilizarse la prueba de la primera derivada. De hecho, aun cuando se aplican ambas pruebas, la prueba de la primera derivada es a menudo más fácil de utilizar.

EJEMPLO 7 Esboce la gráfica de la función $f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$.

SOLUCIÓN Con las primeras dos derivadas obtenemos

$$f'(x) = \frac{4 - x}{x^{1/3}(6 - x)^{2/3}} \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6 - x)^{5/3}}$$

Dado que $f'(x) = 0$ cuando $x = 4$ y $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$ o $x = 6$, los números críticos son 0, 4 y 6.

Intervalo	$4 - x$	$x^{1/3}$	$(6 - x)^{2/3}$	$f'(x)$	f
$x < 0$	+	−	+	−	decreciente sobre $(-\infty, 0)$
$0 < x < 4$	+	+	+	+	creciente sobre $(0, 4)$
$4 < x < 6$	−	+	+	−	decreciente sobre $(4, 6)$
$x > 6$	−	+	+	−	decreciente sobre $(6, \infty)$

Para encontrar los valores extremos locales utilizamos la prueba de la primera derivada. Puesto que f' cambia de negativa a positiva en $x = 0$, $f(0) = 0$ es un mínimo local. Ya que f' cambia de positiva a negativa en $x = 4$, $f(4) = 2^{5/3}$ es un máximo local. El signo de f' no cambia en $x = 6$, por lo que no hay mínimo o máximo. (La prueba de la segunda derivada podría utilizarse en $x = 4$, pero no en $x = 0$ o $x = 6$ porque f'' no existe en ninguno de estos números.)

Observando la expresión para $f''(x)$ y tomando nota de que $x^{4/3} \geqslant 0$ para toda x, tenemos $f''(x) < 0$ para $x < 0$ y para $0 < x < 6$, y $f''(x) > 0$ para $x > 6$. Así que f es cóncava hacia abajo sobre $(-\infty, 0)$ y $(0, 6)$ y cóncava hacia arriba sobre $(6, \infty)$, y el único punto de inflexión es $(6, 0)$. La gráfica se esboza en la figura 12. Tenga en cuenta que la curva tiene una recta tangente vertical en $(0, 0)$ y $(6, 0)$ debido a que $|f'(x)| \to \infty$ conforme $x \to 0$ y a medida que $x \to 6$.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

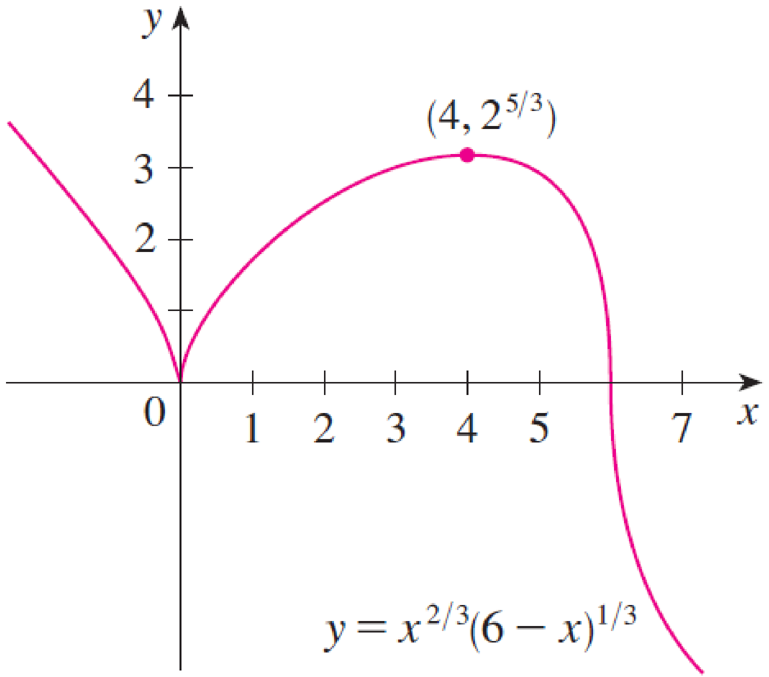


FIGURA 12

EJEMPLO 8 Utilice la primera y segunda derivadas de $f(x) = e^{1/x}$, junto con las asíntotas, para esbozar su gráfica.

SOLUCIÓN Note que el dominio de f es $\{x \mid x \neq 0\}$, por lo que comprobamos para asíntotas verticales calculando los límites por la izquierda y por la derecha cuando $x \to 0$. Conforme $x \to 0^+$, sabemos que $t = 1/x \to \infty$, así que

$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = \lim_{t \to \infty} e^t = \infty$$

y esto demuestra que $x = 0$ es una asíntota vertical. A medida que $x \to 0^-$, tenemos $t = 1/x \to -\infty$, por lo que

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

Conforme $x \to \pm\infty$, tenemos $1/x \to 0$ así que

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

Esto demuestra que $y = 1$ es una asíntota horizontal.

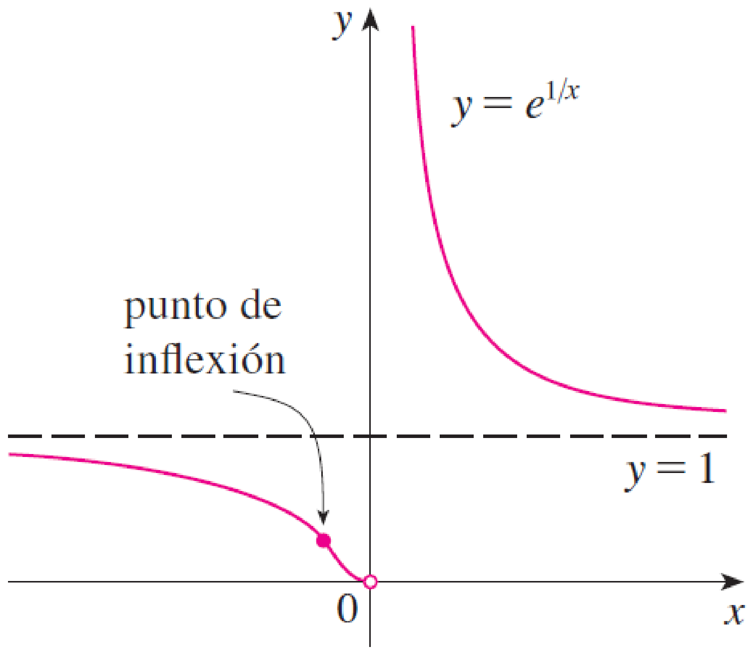
Ahora vamos a calcular la derivada. La regla de la cadena da $f'(x) = -\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$

Como $e^{1/x} > 0$ y $x^2 > 0$ para toda $x \neq 0$, tenemos $f'(x) < 0$ para toda $x \neq 0$. Así f es decreciente sobre $(-\infty, 0)$ y sobre $(0, \infty)$. No hay un número crítico, por lo que la función no tiene máximos ni mínimos locales. La segunda derivada es

$$f''(x) = -\frac{x^2 e^{1/x}(-1/x^2) - e^{1/x}(2x)}{x^4} = \frac{e^{1/x}(2x + 1)}{x^4}$$

Puesto que $e^{1/x} > 0$ y $x^4 > 0$, tenemos $f''(x) > 0$ cuando $x > -\frac{1}{2}$ $(x \neq 0)$ y $f''(x) < 0$ cuando $x < -\frac{1}{2}$. Así que la curva es cóncava hacia abajo sobre $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y cóncava hacia arriba sobre $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ y sobre $(0, \infty)$. El punto de inflexión es $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$.

Para esbozar la gráfica de f trazamos primero la asíntota horizontal $y = 1$ (como una recta discontinua), junto con las partes de la curva cerca de la asíntota en un esbozo preliminar [figura 13a]. Estas partes reflejan la información relativa a los límites y el hecho de que f es decreciente sobre $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. Observe que hemos indicado que $f(x) \to 0$ conforme $x \to 0^-$, a pesar de que $f(0)$ no existe. En la Figura 13b terminamos el esbozo incorporando la información relativa a la concavidad y el punto de inflexión. En la figura 13c) revisamos nuestro trabajo con un dispositivo de graficación.



b) Dibujo terminado

Ejemplos propuestos

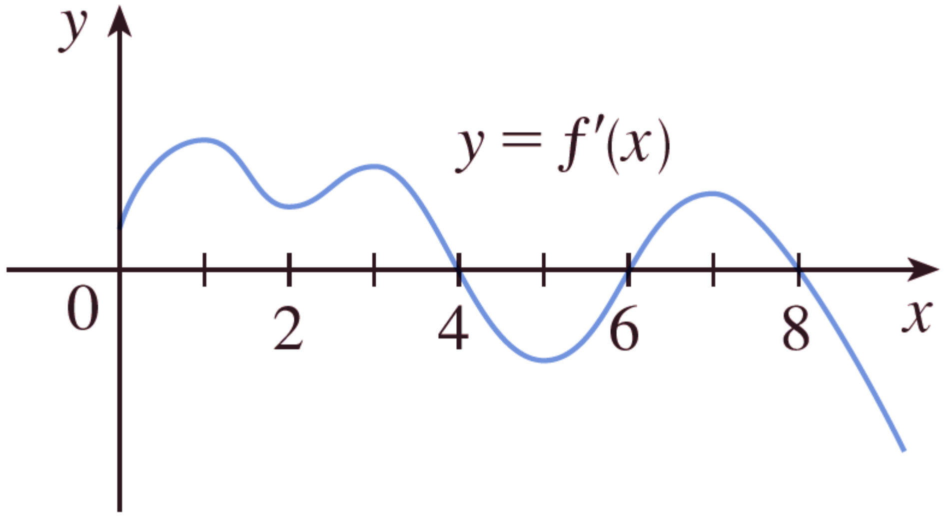
8. Se muestra la gráfica de la primera derivada f' de una función f.

(a) ¿Sobre qué intervalos f es creciente? Explique.

(b) ¿En qué valores de x tiene f un máximo o mínimo local? Explique.

(c) ¿Sobre qué intervalos es f cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo? Explique.

(d) ¿Cuáles son las coordenadas x de los puntos de inflexión de f? ¿Por qué?



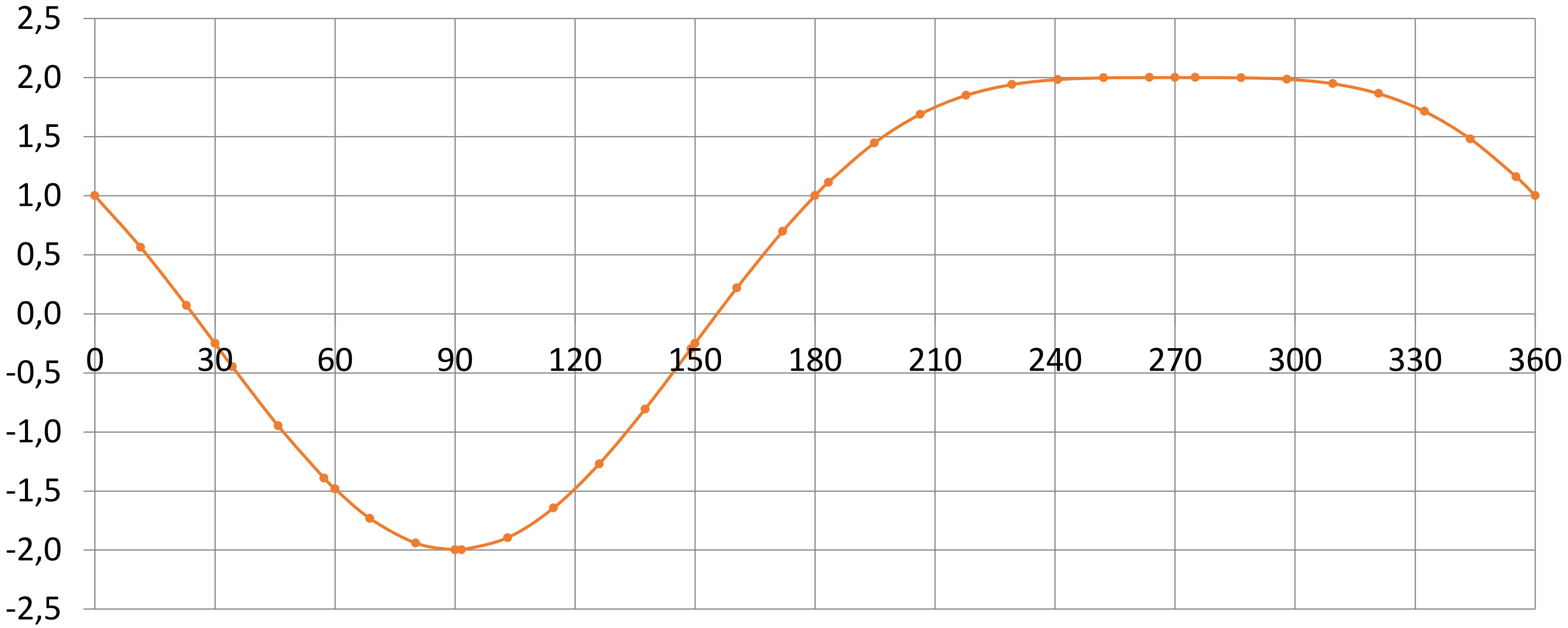
Ejemplos propuestos

14. (a) Encuentre los intervalos sobre los cuales f es creciente o decreciente.

(b) Encuentre los valores máximos y mínimos locales de f.

(c) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

$$f(x) = \cos^2 x - 2\,\text{sen}\,x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$



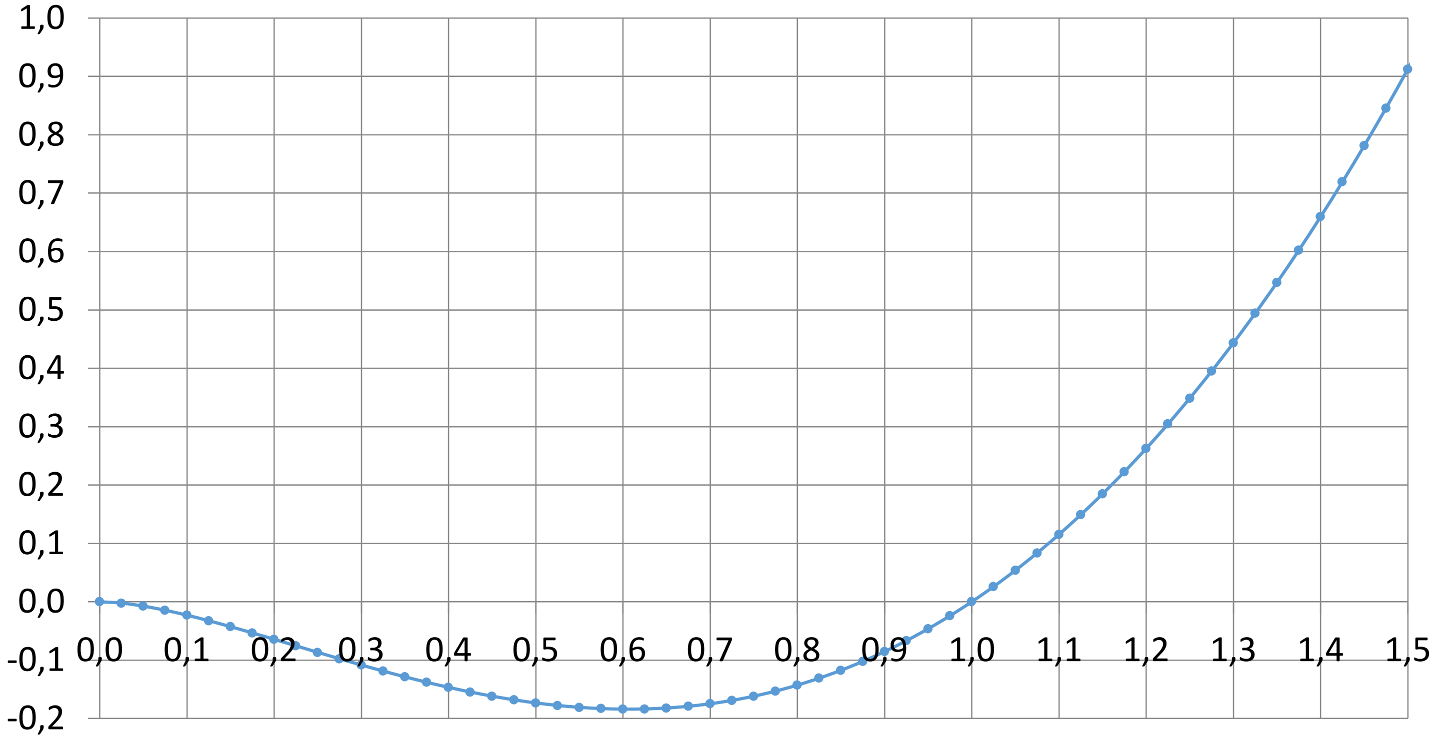
Ejemplos propuestos

16. (a) Encuentre los intervalos sobre los cuales f es creciente o decreciente.

(b) Encuentre los valores máximos y mínimos locales de f.

(c) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

$$f(x) = x^2 \ln x$$



Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Ejemplos propuestos

30. Trace la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones dadas.

$$f'(0) = f'(4) = 0, \quad f'(x) = 1 \text{ si } x < -1$$

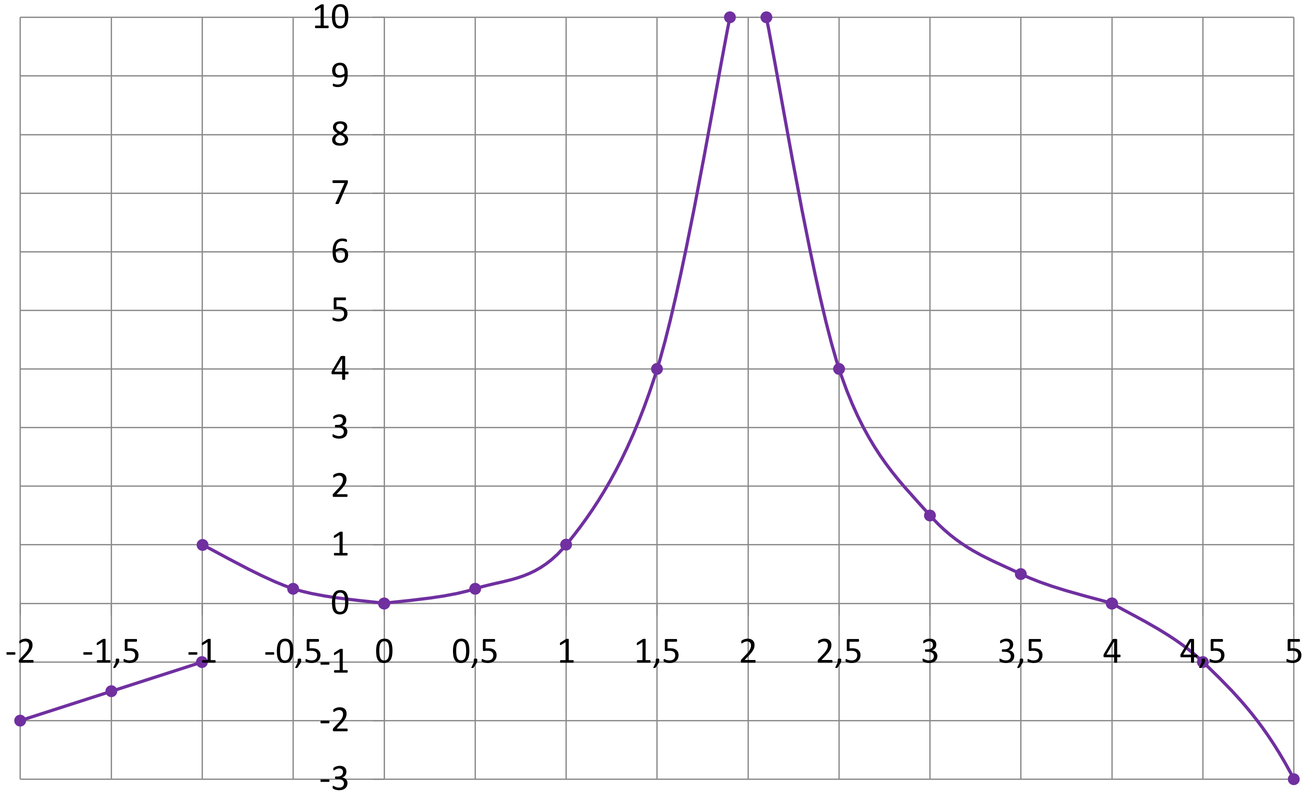
$$f'(x) > 0 \text{ si } 0 < x < 2,$$

$$f'(x) < 0 \text{ si } -1 < x < 0 \text{ o } 2 < x < 4 \text{ o } x > 4$$

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \infty, \quad \lim_{x \to 2^+} f'(x) = -\infty,$$

$$f''(x) > 0 \text{ si } -1 < x < 2 \text{ o } 2 < x < 4,$$

$$f''(x) < 0 \text{ si } x > 4$$



Ejemplos propuestos

Encontrar los intervalos en que la curva $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ es creciente o decreciente, intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

Solución

i) Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x^2 + x - 6) = 6(x + 3)(x - 2)$

Se representan en la recta real los valores de x que hacen cero la primera derivada:

$f'(x)$: $+++++++\ +$ $\quad ------\ -$ $\quad ------\ -$ $\quad ++++++\ +$

$-3 \qquad 0 \qquad 2$

Se concluye que $f(x)$ crece en $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(-3, 2)$

ii) Máximos y mínimos:

Existe un máximo local en $x = -3$, $f(-3) = 2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 36(-3) = 81$

Existe un mínimo local en $x = 2$, $f(2) = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 36(2) = -44$

iii) Intervalos de concavidad y puntos de inflexión:

$f''(x) = 12x + 6 = 6(2x + 1)$

Se representan en la recta real los valores de x que hacen cero la segunda derivada:

$f''(x)$: $------------\ -$ $\quad +++++++++++++\ +$

$-1/2$

Se concluye que:

$f(x)$ es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

$f(x)$ es cóncava hacia arriba en $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

$f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = -\frac{1}{2}$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{2}$$

Ejemplos propuestos

Encontrar los intervalos en que la curva $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ es creciente o decreciente, intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

Solución

i) Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{1(x^2+1)-(x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = \frac{-(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

Se representan en la recta real los valores de x que hacen cero la primera derivada:

$f'(x)$: $- - - - - - - - - -$ $\;(-1)\;$ $+ + + + + + + + + +$ $\;(0)\;$ $\;(1)\;$ $- - - - - - - - - -$

Se concluye que $f(x)$ decrece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y $f(x)$ crece en $(-1, 1)$

ii) Máximos y mínimos:

Existe un mínimo local en $x = -1$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$

Existe un máximo local en $x = 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$

iii) Intervalos de concavidad y puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

Se representan en la recta real los valores de x que hacen cero la segunda derivada:

$f''(x)$: $- - - - - -$ $\;(-\sqrt{3})\;$ $+ + + + +$ $\;(0)\;$ $- - - - - -$ $\;(\sqrt{3})\;$ $+ + + + +$

Se concluye que:

$f(x)$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

$f(x)$ es cóncava hacia arriba en $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

$f(x)$ tiene un puntos de inflexión en $x = 0$, $f(0) = 0$

$x = \pm\sqrt{3}$, $f(\pm\sqrt{3}) = \frac{\pm\sqrt{3}}{4}$

Ejemplos propuestos

Encontrar los intervalos en que la curva $f(x) = x^2 - x - Lnx$ es creciente o decreciente, intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Solución

i) Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x} = \frac{(x-1)(2x+1)}{x}$$

Se representan en la recta real los valores de x que hacen cero la primera derivada y donde $f'(x)$ no existe:

$f'(x)$: $-----\,-$ $++++++\,+$

$-1/2$ 0 1

Recordar que $Domf(x) = \mathbb{R}^+$

Se concluye que $f(x)$ crece en $(1, +\infty)$ y $f(x)$ decrece en $(0, 1)$

ii) Máximos y mínimos:

Existe un mínimo local en $x = 1$, $f(1) = 0$

iii) Intervalos de concavidad y puntos de inflexión:

$$f''(x) = 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 + 1}{x^2}$$

Representada en la recta real la segunda derivada:

$f''(x)$: $++++++++++++\,+$

0

Se concluye que:

$f(x)$ es cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$

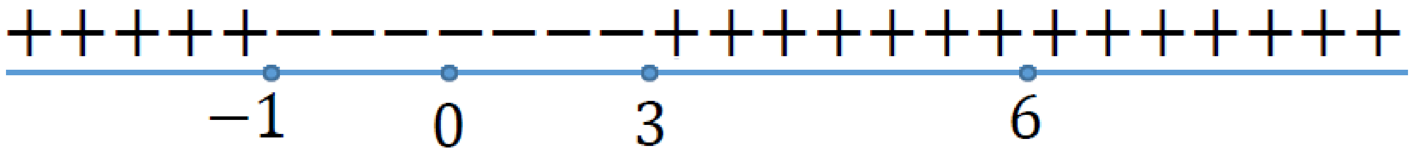
$f(x)$ no tiene puntos de inflexión

Ejemplos propuestos

Suponiendo que la derivada de una función es $f'(x) = (x+1)^3(x-3)^5(x-6)^4$, analizar sobre que intervalo $f(x)$ es creciente.

Solución

Se representan en la recta real los valores de x que hacen cero la primera derivada:

$f'(x)$: 

Se concluye que $f(x)$ crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

Ejercicios

1. Utilice la gráfica de f para encontrar lo siguiente.

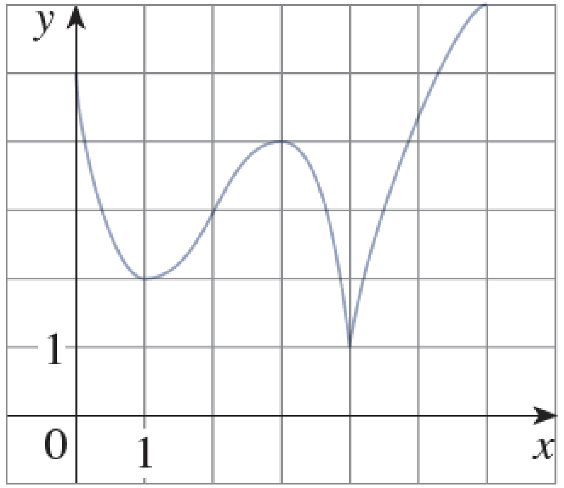
(a) Los intervalos abiertos en los que f es creciente.

(b) Los intervalos abiertos en los que f es decreciente.

(c) Los intervalos abiertos en los que f es cóncava hacia arriba.

(d) Los intervalos abiertos en los que f es cóncava hacia abajo.

(e) Las coordenadas de los puntos de inflexión.

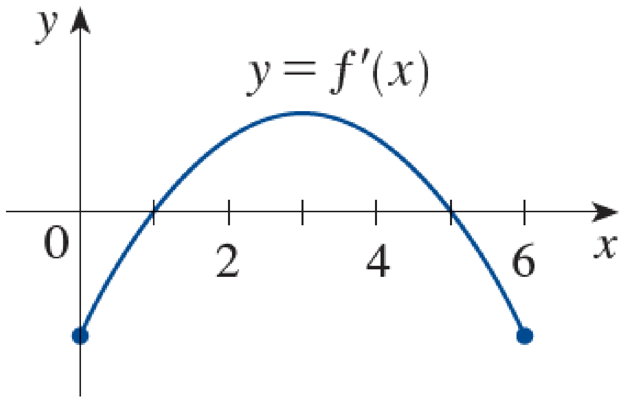


5–6 En los ejercicios 5 y 6, se muestran las gráficas de la *derivada* f' de una función f.

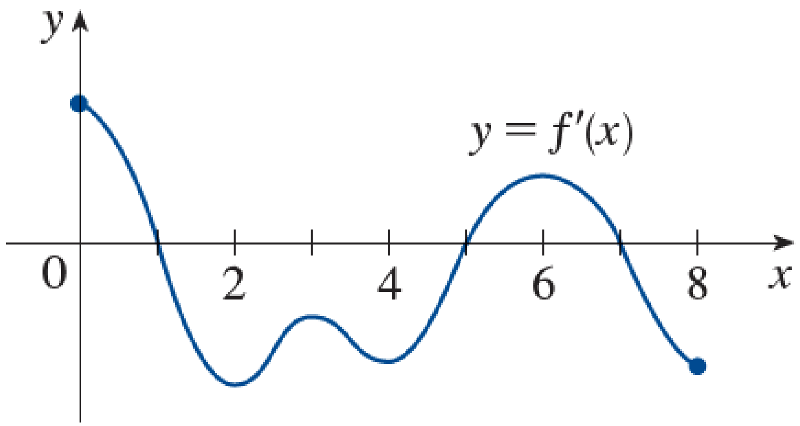
(a) ¿En qué intervalos f crece o decrece?

(b) ¿Para qué valores de x, f tiene un máximo o mínimo local?

5.



6.



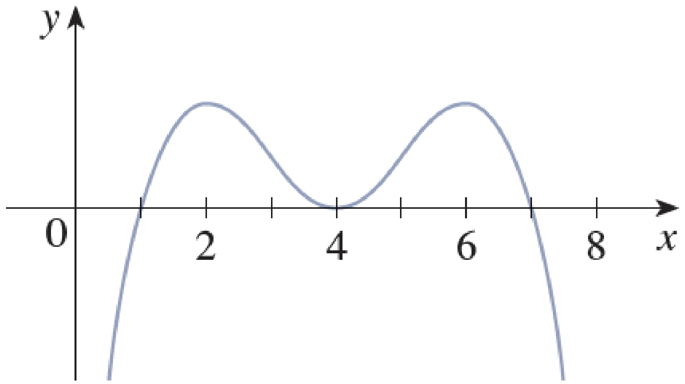
Ejercicios

7. En cada inciso establezca las coordenadas x de los puntos de inflexión de f. Dé las razones de sus respuestas.

(a) La curva dada es la gráfica de f.

(b) La curva dada es la gráfica de f'.

(c) La curva dada es la gráfica de f''.



9–18

(a) Encuentre los intervalos sobre los cuales f es creciente o decreciente.

(b) Encuentre los valores máximos y mínimos locales de f.

(c) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

13. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

18. $f(x) = \sqrt{x}\, e^{-x}$

35–36 Se muestra la gráfica de la derivada f' de una función continua f.

(a) ¿En qué intervalos es f creciente? ¿Decreciente?

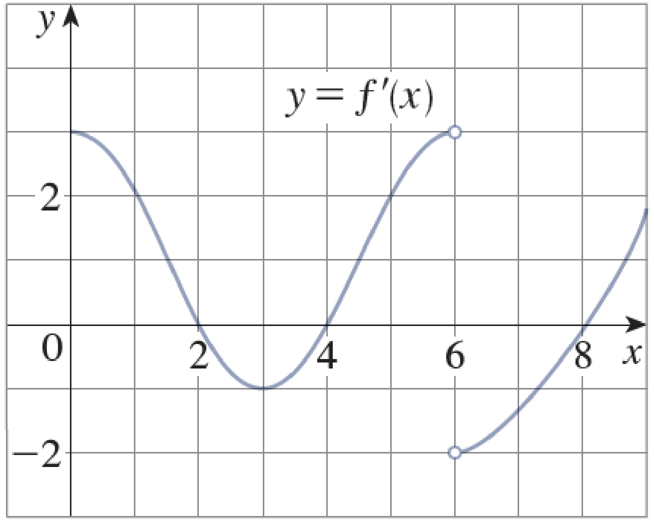
(b) ¿En qué valores de x tiene f un máximo local? ¿Y un mínimo local?

(c) ¿En qué intervalos es f cóncava hacia arriba? ¿Cóncava hacia abajo?

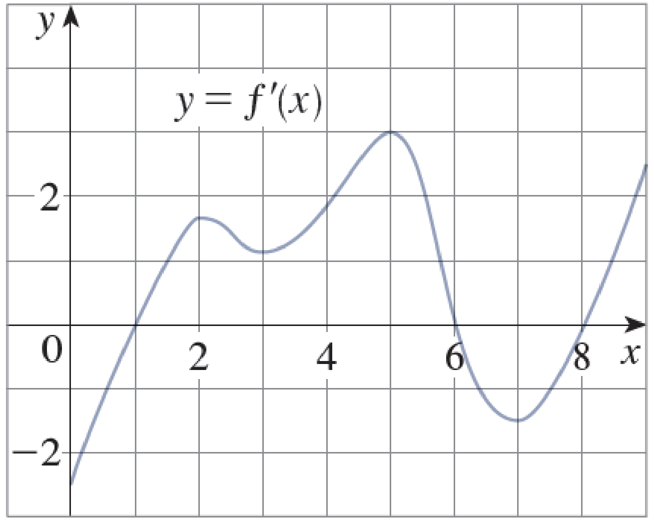
(d) Establezca las coordenadas x de los puntos de inflexión.

(e) Suponiendo que $f(0) = 0$, trace una gráfica de f.

35.



36.



Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Ejercicios

24–31 Trace la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones. dadas.

26. $f'(1) = f'(-1) = 0, \quad f'(x) < 0$ si $|x| < 1$.
$f'(x) > 0$ si $1 < |x| > 2, \quad f'(x) = -1$ si $|x| > 2$,
$f''(x) < 0$ si $-2 < x < 0$, punto de inflexión $(0, 1)$

27. $f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0$,
$f'(x) > 0$ si $x < 0$ o $2 < x < 4$,
$f'(x) < 0$ si $0 < x < 2$ o $x > 4$,
$f''(x) > 0$ si $1 < x < 3, \quad f''(x) < 0$ si $x < 1$ o $x > 3$

28. $f(x) > 0$ para toda $x \neq 1$, asíntota vertical $x = 1$,
$f''(x) > 0$ si $x < 1$ o $x > 3, \quad f''(x) < 0$ si $1 < x < 3$

29. $f'(5) = 0, \quad f'(x) < 0$ cuando $x < 5$,
$f'(x) > 0$ cuando $x > 5, \quad f''(2) = 0, f''(8) = 0$,
$f''(x) < 0$ cuando $x < 2$ o $x > 8$,
$f''(x) > 0$ para $2 < x < 8, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 3, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$

31. $f'(x) > 0$ si $x \neq 2, \quad f''(x) > 0$ si $x < 2$,
$f''(x) < 0$ si $x > 2$, f tiene punto de inflexión en $(2, 5)$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 8, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

37–48

(a) Encuentre los intervalos donde crece o decrece.
(b) Encuentre los valores máximos y mínimos locales.
(c) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
(d) Utilice la información de los incisos (a)-(c) para trazar la gráfica. Si tiene un dispositivo graficador, verifique sus respuestas.

37. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

44. $G(x) = 5x^{2/3} - 2x^{5/3}$

45. $C(x) = x^{1/3}(x + 4)$

47. $f(\theta) = 2\cos\theta + \cos^2\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

Ejercicios

49–56

(a) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales.
(b) Encuentre los intervalos donde crece o decrece.
(c) Determine los valores máximos y mínimos locales.
(d) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
(e) Utilice la información de los incisos (a)-(d) para trazar la gráfica de f.

49. $f(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

50. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

51. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

52. $f(x) = \frac{e^x}{1 - e^x}$

53. $f(x) = e^{-x^2}$

55. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín