Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

ENCUENTRO 7.1

Sección 1.5: Funciones trigonométricas inversas.

Funciones trigonométricas inversas

Cuando tratamos de encontrar las funciones trigonométricas inversas, tenemos una pequeña dificultad: debido a que las funciones trigonométricas no son uno a uno, no tienen funciones inversas. La dificultad se supera mediante la restricción de los dominios de estas funciones para que sean uno a uno.

Puede verse en la figura 17 que la función seno, $y = \operatorname{sen} x$, no es uno a uno (utilice la prueba de la recta horizontal). Pero la función $f(x) = \operatorname{sen} x,\ -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2,$ es uno a uno (figura 18). La función inversa de la función seno restringida f existe y se denota por sen^{-1} o arcsen. Se llama **función seno inverso** o **función arco seno**.

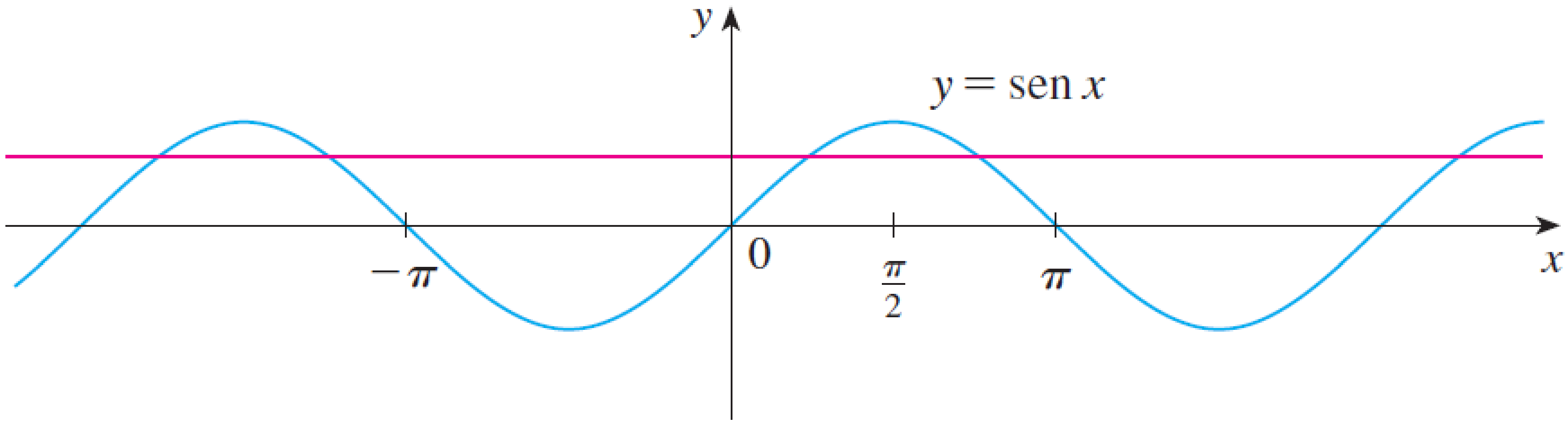


FIGURA 17

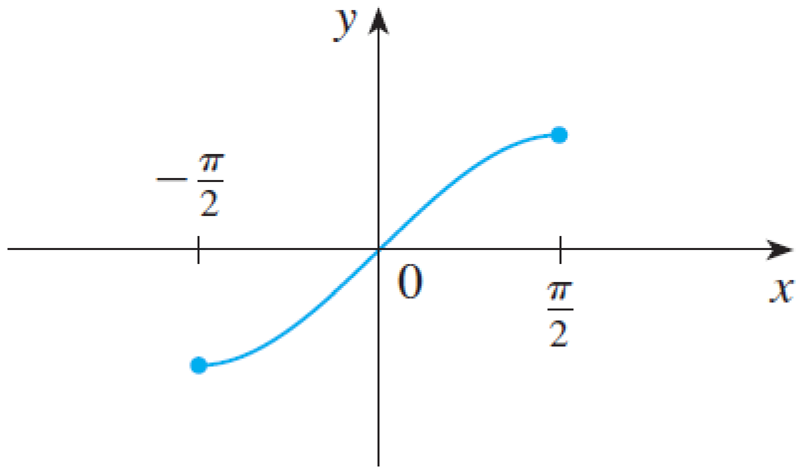


FIGURA 18 $y = \operatorname{sen} x,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

Dado que la definición de una función inversa indica que

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

tenemos

$$\boxed{\operatorname{sen}^{-1} x = y \iff \operatorname{sen} y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}}$$

Por tanto, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ es el número entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ cuyo seno es x.

$$\operatorname{sen}^{-1} x \neq \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

La función inversa del seno, sen^{-1}, tiene dominio $[-1, 1]$ y rango $[-\pi/2, \pi/2]$, y su gráfica, que se muestra en la figura 20, se obtiene a partir de la función seno restringido (figura 18), mediante la reflexión sobre la recta $y = x$.

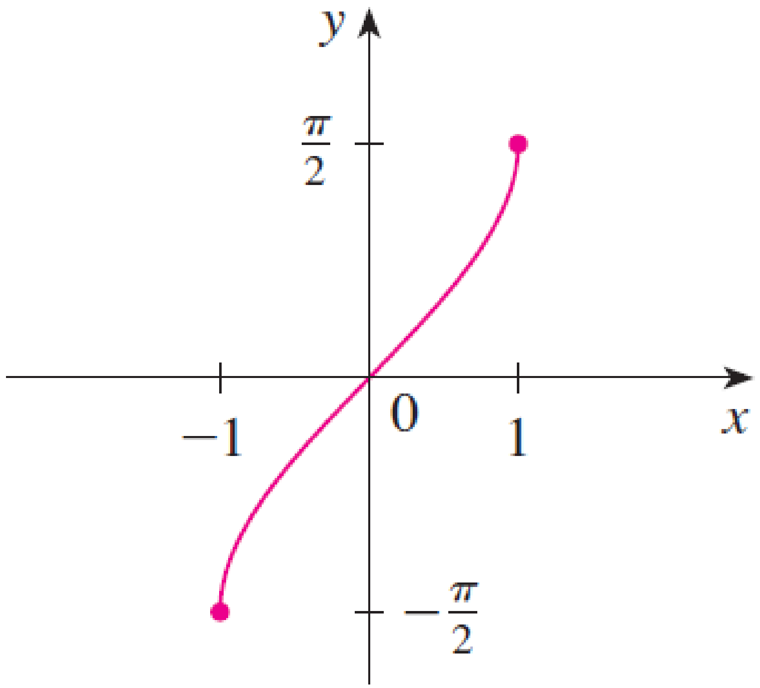


FIGURA 20
$y = \text{sen}^{-1} x = \text{arcsen } x$

Las ecuaciones de cancelación para las funciones inversas resultan ser, en este caso,

$$\text{sen}^{-1}(\text{sen}\, x) = x \quad \text{para} -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\text{sen}\,(\text{sen}^{-1} x) = x \quad \text{para} -1 \leqslant x \leqslant 1$$

La **función coseno inverso** se maneja en forma similar. La función coseno restringida $f(x) = \cos x$, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, es uno a uno (figura 21) y, por tanto, tiene una función inversa denotada por $\cos^{-1}$ o arccos.

$$\cos^{-1} x = y \iff \cos y = x \quad \text{y} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi$$

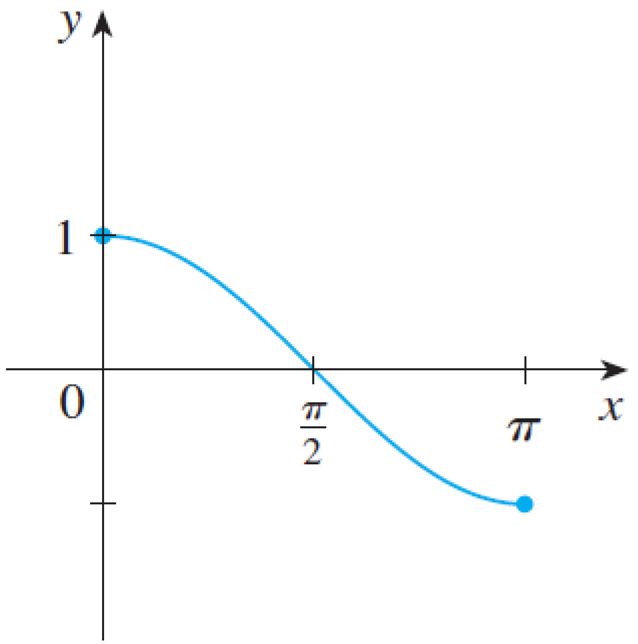


FIGURA 21
$y = \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$

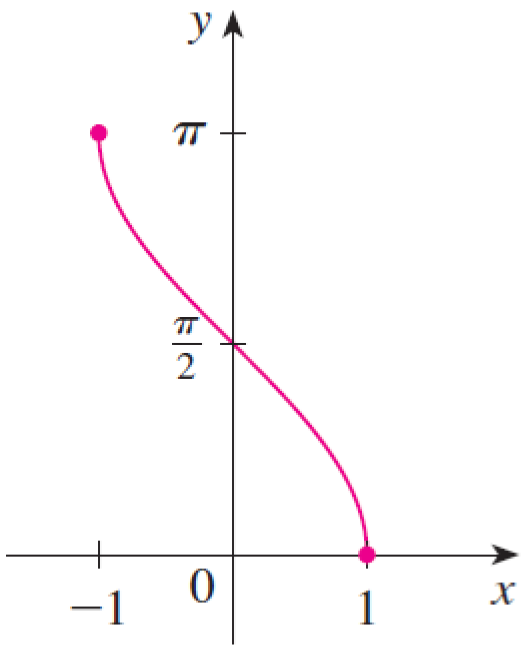


FIGURA 22
$y = \cos^{-1} x = \arccos x$

Las ecuaciones de cancelación son

$$\cos^{-1}(\cos x) = x \quad \text{para } 0 \leqslant x \leqslant \pi$$
$$\cos(\cos^{-1} x) = x \quad \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1$$

La función coseno inverso, $\cos^{-1}$, tiene dominio $[-1, 1]$ y rango $[0, \pi]$. Su gráfica se muestra en la figura 22.

La función tangente puede hacerse uno a uno mediante la restricción de que el intervalo sea $(-\pi/2, \pi/2)$. Así, la **función tangente inversa** se define como la inversa de la función $f(x) = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$. (Véase la figura 23), y se denota por $\tan^{-1}$ o arctan.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

$$\tan^{-1}x = y \iff \tan y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

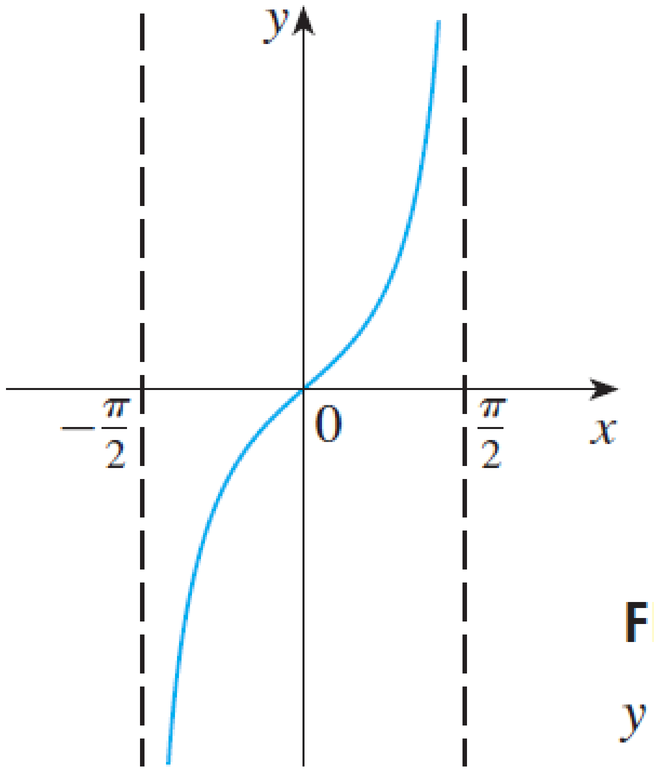


FIGURA 23

$y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

La función tangente inversa, $\tan^{-1} = \arctan$, tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(-\pi/2, \pi/2)$. Su gráfica se muestra en la figura 25.

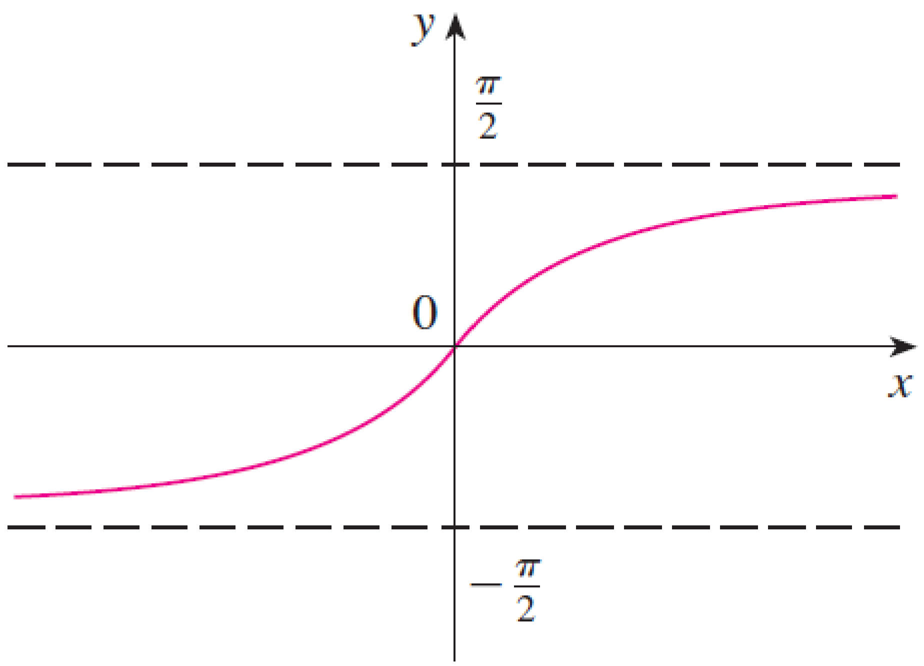


FIGURA 25

$y = \tan^{-1} x = \arctan x$

El resto de las funciones trigonométricas inversas no se utilizan con tanta frecuencia y se resumen aquí.

11

$$y = \csc^{-1} x \ (|x| \geqslant 1) \iff \csc y = x \quad \text{y} \quad y \in (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2$$

$$y = \sec^{-1} x \ (|x| \geqslant 1) \iff \sec y = x \quad \text{y} \quad y \in [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2$$

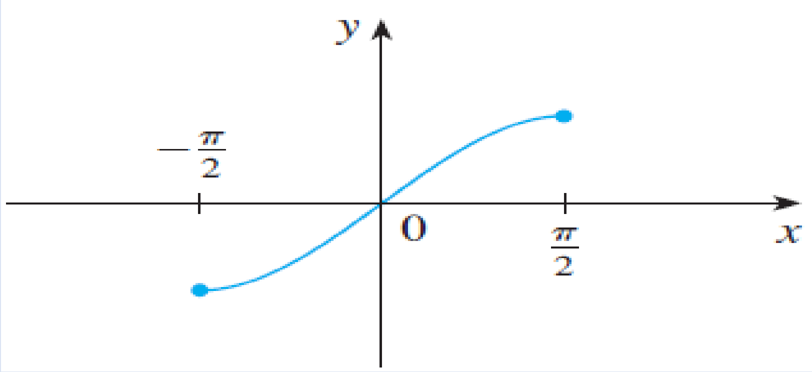
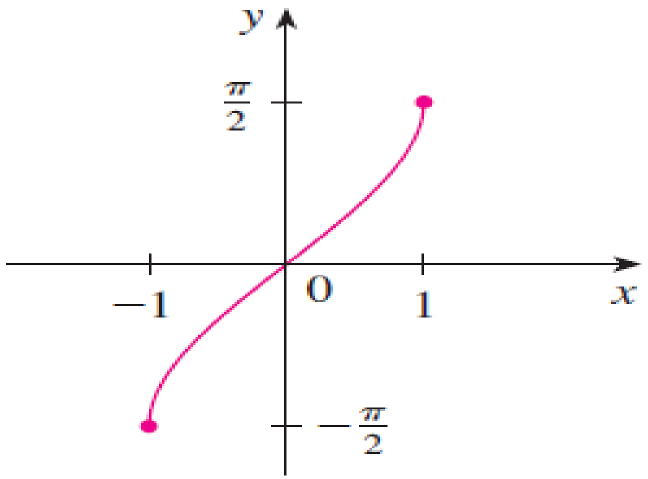
$$y = \cot^{-1} x \ (x \in \mathbb{R}) \iff \cot y = x \quad \text{y} \quad y \in (0, \pi)$$

Universidad Pontificia Bolivariana

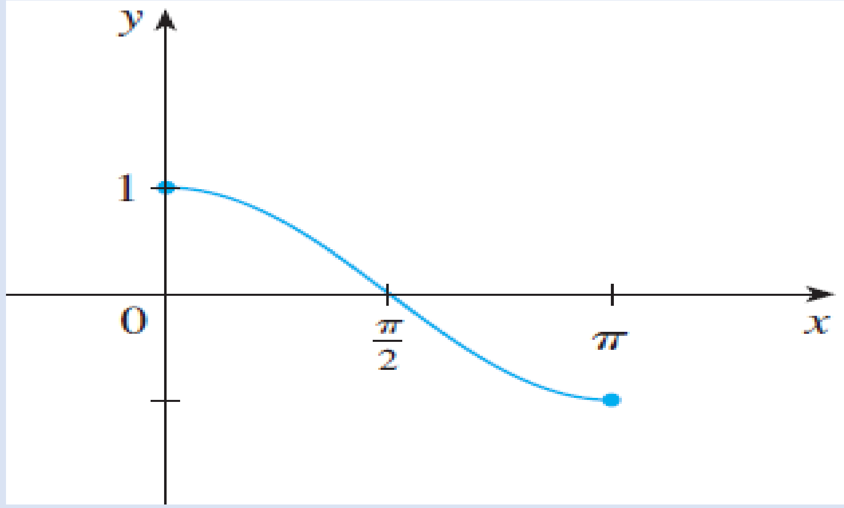
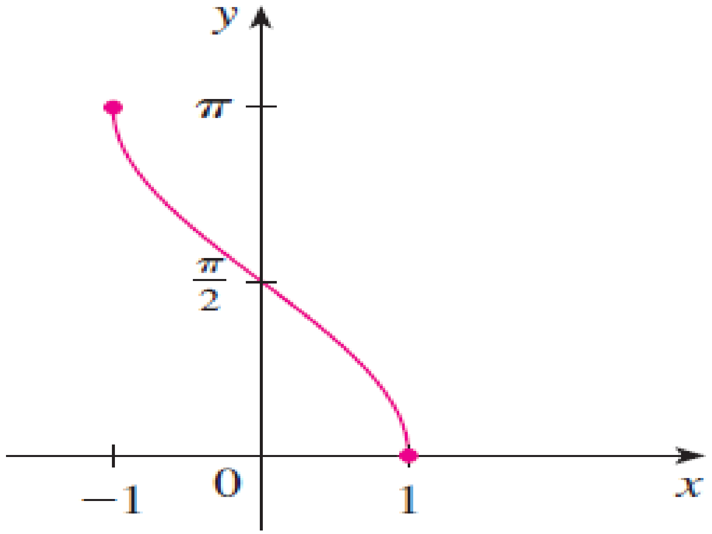
Fundada en 1936

RESUMEN FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

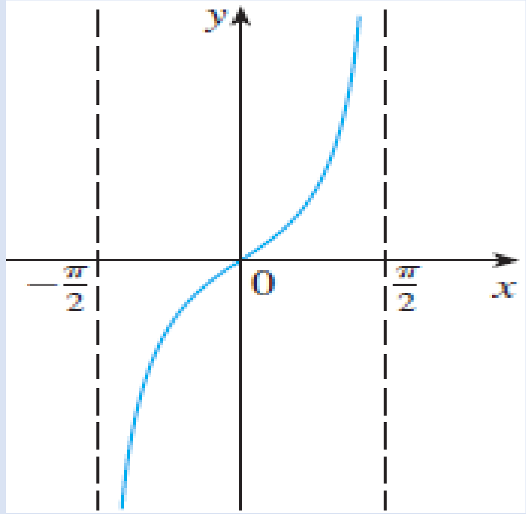
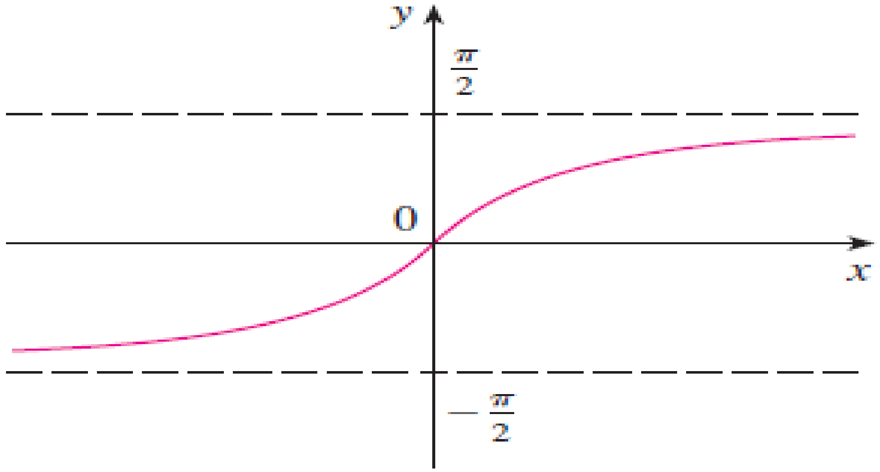
Dado que las funciones trigonométricas no son uno a uno (ver prueba de la recta horizontal), no tienen funciones inversas. La dificultad se supera mediante la restricción de los dominios de estas funciones para que sean uno a uno.

Función trigonométrica	Dominio	Rango	Gráfica
$y = senx$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1, 1\,]$	
$y = sen^{-1}x$ $y = arcsenx$	$[-1, 1\,]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	

RESUMEN FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Función trigonométrica	Dominio	Rango	Gráfica
$y = cosx$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$	
$y = cos^{-1}x$ $y = arccosx$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	

RESUMEN FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Función trigonométrica	Dominio	Rango	Gráfica
$y = tanx$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$(-\infty, +\infty)$	
$y = tan^{-1}x$ $y = arctanx$	$(-\infty, +\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	

RESUMEN FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Completar la siguiente información:

Función trigonométrica	Dominio	Rango	Gráfica
$y = \csc x$			
$y = \csc^{-1} x$ $y = arccsc x$			

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

RESUMEN FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Completar la siguiente información:

Función trigonométrica	Dominio	Rango	Gráfica
$y = \sec x$			
$y = \sec^{-1} x$ $y = arcsec x$			

RESUMEN FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Completar la siguiente información:

Función trigonométrica	**Dominio**	**Rango**	**Gráfica**
$y = \cot x$			
$y = \cot^{-1} x$ $y = arc\cot x$			

EJEMPLO 13 Simplifique la expresión $\cos(\tan^{-1} x)$.

SOLUCIÓN 1 Sea $y = \tan^{-1} x$. Tenemos que, $\tan y = x$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$. Queremos encontrar $\cos y$, pero, ya que $\tan y$ es conocida, es más fácil encontrar primero $\sec y$:

$$\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

$$\sec y = \sqrt{1 + x^2} \qquad (\text{ya que } \sec y > 0 \text{ para } -\pi/2 < y < \pi/2)$$

Así
$$\cos(\tan^{-1} x) = \cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

SOLUCIÓN 2 En lugar de utilizar las identidades trigonométricas como en la solución 1, es quizá más fácil usar un diagrama. Si $y = \tan^{-1} x$, entonces $\tan y = x$, y podemos leer en la figura 24 (que ilustra el caso $y > 0$) que

$$\cos(\tan^{-1} x) = \cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

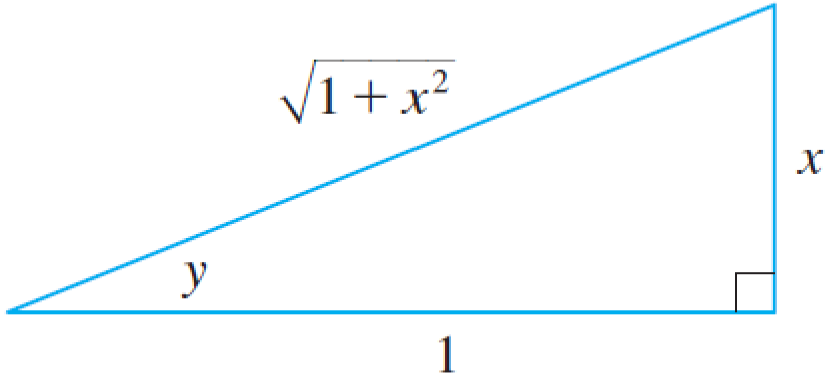


FIGURA 24

63-68 Encuentre el valor exacto de cada una de las siguientes expresiones.

63. a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{3}/2\right)$ b) $\cos^{-1}(-1)$

64. a) $\tan^{-1}\left(1/\sqrt{3}\right)$ b) $\sec^{-1} 2$

65. a) $\arctan 1$ b) $\operatorname{sen}^{-1}\left(1/\sqrt{2}\right)$

66. a) $\cot^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ b) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

67. a) $\tan(\arctan 10)$ b) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(7\pi/3))$

68. a) $\tan(\sec^{-1} 4)$ b) $\operatorname{sen}\left(2 \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$

---

69. Pruebe que $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$

70-72 Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

70. $\tan(\operatorname{sen}^{-1} x)$ **71.** $\operatorname{sen}(\tan^{-1} x)$

72. $\cos(2 \tan^{-1} x)$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

REPASO

Verificación de conceptos

1. a) ¿Qué es una función? ¿Cuáles son su dominio y su rango?
b) ¿Qué es la gráfica de una función?
c) ¿Cómo se puede saber si una curva dada es la gráfica de una función?

2. Analice cuatro maneras de representar una función. Ilustre la discusión con ejemplos.

3. a) ¿Qué es una función par? ¿Cómo puede saber si una función es par observando su gráfica? Dé tres ejemplos de una función par.
b) ¿Qué es una función impar? ¿Cómo puede saber si una función es impar observando su gráfica? Dé tres ejemplos de una función impar.

4. ¿Qué es una función creciente?

5. ¿Qué es un modelo matemático?

6. Dé un ejemplo de cada tipo de función

a) lineal
b) potencia
c) exponencial
d) cuadrática
e) polinomial de grado 5
f) racional

7. Trace a mano, en los mismos ejes, las gráficas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x$
b) $g(x) = x^2$
c) $h(x) = x^3$
d) $j(x) = x^4$

8. Trace a mano un bosquejo de la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

a) $y = \operatorname{sen} x$
b) $y = \tan x$
c) $y = e^x$
d) $y = \ln x$
e) $y = 1/x$
f) $y = |x|$
g) $y = \sqrt{x}$
h) $y = \tan^{-1} x$

9. Suponga que f tiene dominio A y g tiene dominio B.
a) ¿Cuál es el dominio de $f + g$?
b) ¿Cuál es el dominio de fg?
c) ¿Cuál es el dominio de f/g?

10. ¿Cómo se define la función compuesta $f \circ g$? ¿Cuál es su dominio?

11. Suponga que la gráfica de f está dada. Escriba una ecuación para cada una de las gráficas que se obtienen de aquella de f de la siguiente manera.
a) Desplazamiento de 2 unidades hacia arriba.
b) Desplazamiento de 2 unidades hacia abajo.
c) Desplazamiento de 2 unidades a la derecha.
d) Desplazamiento de 2 unidades a la izquierda.
e) Reflexión sobre el eje x.
f) Reflexión sobre el eje y.
g) Alargamiento vertical por un factor de 2.
h) Contraer verticalmente por un factor de 2.
i) Alargar horizontalmente por un factor de 2.
j) Contraer horizontalmente por un factor de 2.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

12. a) ¿Qué es una función uno a uno? ¿Cómo puede saber si una función es uno a uno observando su gráfica?
b) Si f es una función uno a uno, ¿cómo se define su función inversa f^{-1}? ¿Cómo se obtiene la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f?

13. a) ¿Cómo se define la función seno inverso $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$? ¿Cuáles son su dominio y su rango?
b) ¿Cómo se define la función coseno inverso $f(x) = \cos^{-1} x$? ¿Cuáles son su dominio y rango?
c) ¿Cómo se define la función tangente inversa $f(x) = \tan^{-1} x$? ¿Cuáles son su dominio y rango?

Examen rápido Verdadero-Falso

Determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la afirmación.

1. Si f es una función, entonces $f(s + t) = f(s) + f(t)$.
2. Si $f(s) = f(t)$, entonces $s = t$.
3. Si f es una función, entonces $f(3x) = 3f(x)$.
4. Si $x_1 < x_2$ y f es una función decreciente, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.
5. Una recta vertical intersecta la gráfica de una función a lo más una vez.
6. Si f y g son funciones, entonces $f \circ g = g \circ f$.
7. Si f es uno a uno, entonces $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
8. Siempre puede dividirse por e^x.
9. Si $0 < a < b$, entonces $\ln a < \ln b$.
10. Si $x > 0$, entonces $(\ln x)^6 = 6 \ln x$.
11. Si $x > 0$ y $a > 1$, entonces $\dfrac{\ln x}{\ln a} = \ln \dfrac{x}{a}$.
12. $\tan^{-1}(-1) = 3\pi/4$.
13. $\tan^{-1} x = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\cos^{-1} x}$.
14. Si x es cualquier número real, entonces $\sqrt{x^2} = x$.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín