Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

ENCUENTRO 8.2

Sección 2.5: Continuidad, tipos de discontinuidad, teoremas sobre continuidad

1 Definición Una función f es **continua en un número $x = a$** si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Note que la definición 1 requiere implícitamente tres cosas. Si f es continua en a, entonces:

1. $f(a)$ está definida (esto es, a está en el dominio de f)
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

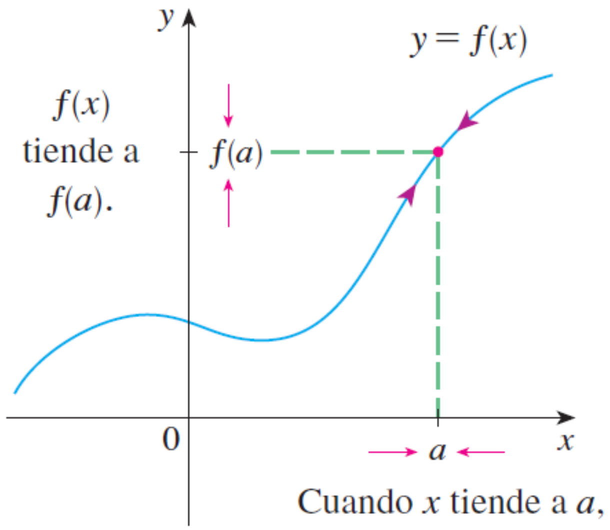


FIGURA 1

La definición indica que f es continua en a si $f(x)$ tiende a $f(a)$ cuando x tiende a a. Así, una función continua f tiene la propiedad de que un pequeño cambio en x produce sólo un pequeño cambio en $f(x)$. De hecho, el cambio en $f(x)$ puede mantenerse tan pequeño como se quiera manteniendo el cambio en x suficientemente pequeño.

EJEMPLO 1 La figura 2 muestra la gráfica de una función f. ¿Para qué valores de $x = \mathrm{a}$, f es discontinua? ¿Por qué?

SOLUCIÓN Pareciera que hay una discontinuidad cuando $a = 1$ porque la gráfica tiene una ruptura allí. La razón formal de que f es discontinua en 1 es que $f(1)$ no está definida.

La gráfica también tiene una ruptura cuando $a = 3$, pero la razón para la discontinuidad es diferente. Aquí, $f(3)$ está definida, pero $\lim_{x\to 3} f(x)$ no existe (porque los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes), así que f es discontinua en $x = 3$.

¿Qué hay en relación con $a = 5$? Aquí, $f(5)$ está definida y el $\lim_{x\to 5} f(x)$ existe (porque los límites por la izquierda y por la derecha son iguales). Pero

$$\lim_{x\to 5} f(x) \neq f(5)$$

Así que f es discontinua en 5.

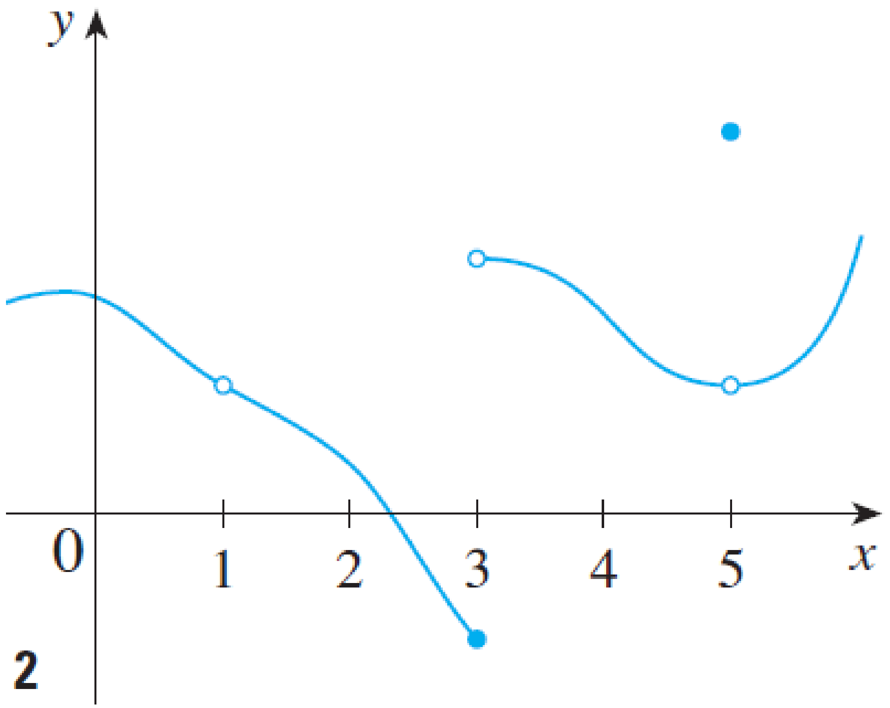


FIGURA 2

V **EJEMPLO 2** ¿Dónde es discontinua cada una de las siguientes funciones?

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

d) $f(x) = [\![x]\!]$

SOLUCIÓN

a) Note que $f(2)$ no está definida, así que f es discontinua en $x = 2$. Más tarde veremos por qué f es continua en todos los otros números.

b) Aquí $f(0) = 1$ está definida, pero

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

no existe. (Véase el ejemplo 8 de la sección 2.2.) Así que f es discontinua en $x = 0$.

c) Aquí $f(2) = 1$ está definida y

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 1) = 3$$

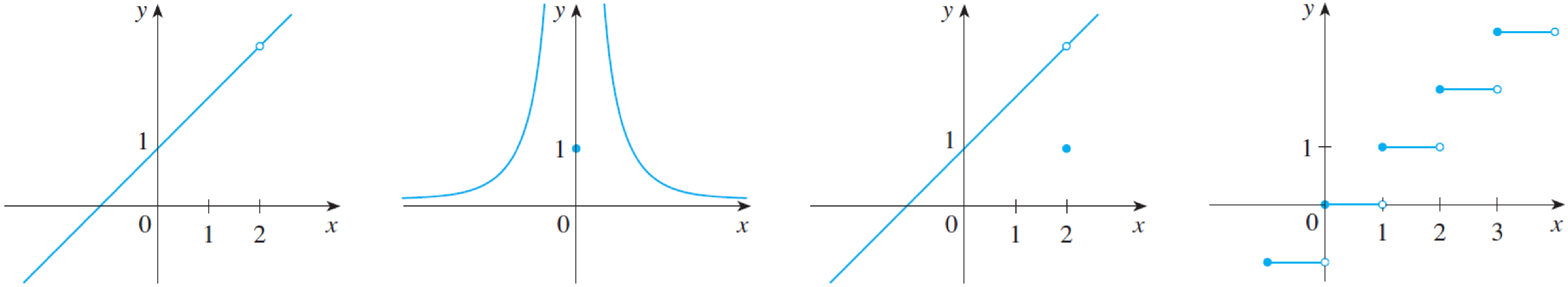
existe. Pero

$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$$

así que f no es continua en $x = 2$.

d) La función entero mayor $f(x) = [\![x]\!]$ tiene discontinuidades en todos los enteros porque $\lim_{x \to n} [\![x]\!]$ no existe si n es un entero. (Véanse el ejemplo 10 y el ejercicio 51 en la sección 2.3).

La figura 3 muestra las gráficas de las funciones del ejemplo 2. En cada caso la gráfica no puede ser dibujada sin levantar el lápiz del papel porque hay un agujero o ruptura o salto en la gráfica. El tipo de discontinuidad ilustrada en los incisos a) y c) se llama **removible** porque podemos remover la discontinuidad redefiniendo f sólo en $x = 2$. [La función $g(x) = x + 1$ es continua.] La discontinuidad en el inciso b) se llama **discontinuidad infinita**. Las discontinuidades en el inciso d) se llaman **discontinuidades de salto** porque la función "salta" de un valor a otro.



a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

d) $f(x) = [\![x]\!]$

FIGURA 3

Gráficas de las funciones del ejemplo 2

2 Definición Una función f es **continua por la derecha de un número $x = a$** si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y f es **continua por la izquierda de $x = a$** si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

3 Definición Una función f es **continua sobre un intervalo** si es continua en cada número en el intervalo. (Si f está definida sólo en un lado de un punto extremo del intervalo, entendemos por *continua* en el punto extremo, como *continua por la derecha* o *continua por la izquierda*.)

CONTINUIDAD EN UN INTERVALO

$f(x)$ es continua por la derecha de a si y solo si: $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

$f(x)$ es continua por la izquierda de b si y solo si: $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

$f(x)$ es continua en (a, b) si es continua para todo punto en (a, b)

$f(x)$ es continua en **[a, b]** si cumple:

i) $f(x)$ es continua en (a, b)

ii) $f(x)$ es continua por la derecha de a

iii) $f(x)$ es continua por la izquierda de b

$f(x)$ es continua en **(a, b]** si cumple:

i) $f(x)$ es continua en (a, b)

ii) $f(x)$ es continua por la izquierda de b

$f(x)$ es continua en **[a, b)** si cumple:

i) $f(x)$ es continua en (a, b)

ii) $f(x)$ es continua por la derecha de a

EJEMPLO 3 En cada entero n, la función $f(x) = [\![x]\!]$ [Véase la figura 3d)] es continua por la derecha, pero discontinua por la izquierda porque

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = n = f(n)$$

pero
$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} [\![x]\!] = n - 1 \neq f(n)$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 4 Demuestre que la función $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ es continua sobre el intervalo $[-1, 1]$.

SOLUCIÓN Si $-1 < a < 1$, entonces utilizando las leyes de los límites, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) \\
&= 1 - \lim_{x \to a} \sqrt{1 - x^2} && \text{(por las leyes 2 y 7)} \\
&= 1 - \sqrt{\lim_{x \to a} (1 - x^2)} && \text{(por la ley 11)} \\
&= 1 - \sqrt{1 - a^2} && \text{(por las leyes 2, 7 y 9)} \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

Así, por la definición 1, f es continua en $x = a$ si $-1 < a < 1$. Cálculos similares muestran que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1 = f(-1) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

de manera que f es continua por la derecha en $x = -1$ y continua por la izquierda en $x = 1$. Por eso, de acuerdo con la definición 3, f es continua en $[-1, 1]$.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

La gráfica de f está trazada en la figura 4 y es la mitad inferior de la circunferencia

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

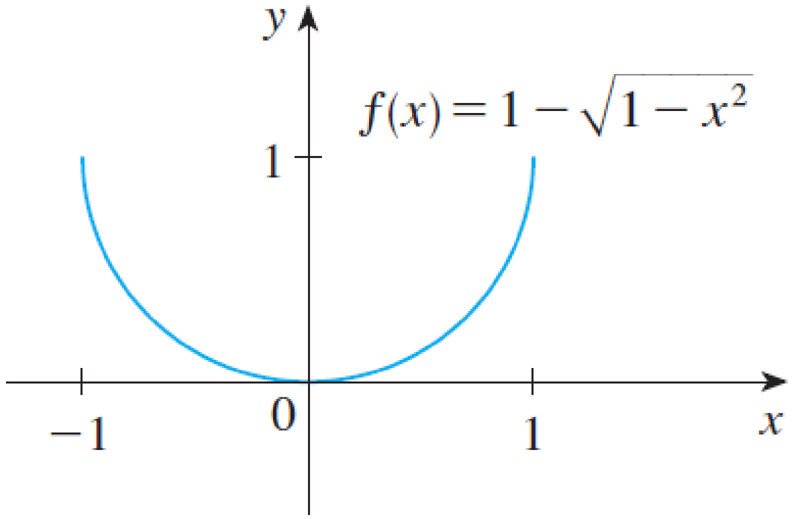


FIGURA 4

4 Teorema Si f y g son continuas en $x = a$ y $x = c$ es una constante, entonces las siguientes funciones son también continuas en $x = a$:

1. $f + g$
2. $f - g$
3. cf
4. fg
5. $\dfrac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$

5 Teorema

a) Cualquier función polinomial es continua en todo su dominio; es decir, es continua sobre $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

b) Cualquier función racional es continua siempre que esté definida; esto es, es continua en su dominio.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 5 Encuentre el $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

SOLUCIÓN La función

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

es racional, así que por el teorema 5 es continua en su dominio, que es $\{x \mid x \neq \frac{5}{3}\}$.

Por tanto,

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -\frac{1}{11}$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

7 Teorema Los siguientes tipos de funciones son continuas en todo número de sus dominios:

funciones polinomiales funciones racionales funciones raíz

funciones trigonométricas funciones trigonométricas inversas

funciones exponenciales funciones logarítmicas

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO 6 ¿En dónde es continua la función $f(x) = \dfrac{\ln x + \tan^{-1}x}{x^2 - 1}$?

SOLUCIÓN Por el teorema 7 sabemos que la función $y = \ln x$ es continua para $x > 0$ y $y = \tan^{-1}x$ es continua sobre $\mathbb{R}$. Así, por el inciso 1 del teorema 4, $y = \ln x + \tan^{-1}x$ es continua sobre $(0, \infty)$. El denominador, $y = x^2 - 1$, es una función polinomial, de modo que es continua para toda x. Por tanto, por el inciso 5 del teorema 4, f es continua en todos los números positivos x, excepto donde $x^2 - 1 = 0$. Por ende, f es continua sobre los intervalos $(0, 1)$ y $(1, \infty)$.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 7 Evalúe $\lim_{x \to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$.

SOLUCIÓN El teorema 7 nos dice que $y = \operatorname{sen} x$ es continua. La función en el denominador, $y = 2 + \cos x$, es la suma de dos funciones continuas y en consecuencia es continua. Note que esta función jamás es cero porque $\cos x \geqslant -1$ para toda x y también $2 + \cos x > 0$ para toda x. Así, el cociente

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$$

es continuo para toda x. Por tanto, mediante la definición de función continua,

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x} = \lim_{x \to \pi} f(x) = f(\pi) = \frac{\operatorname{sen} \pi}{2 + \cos \pi} = \frac{0}{2 - 1} = 0$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

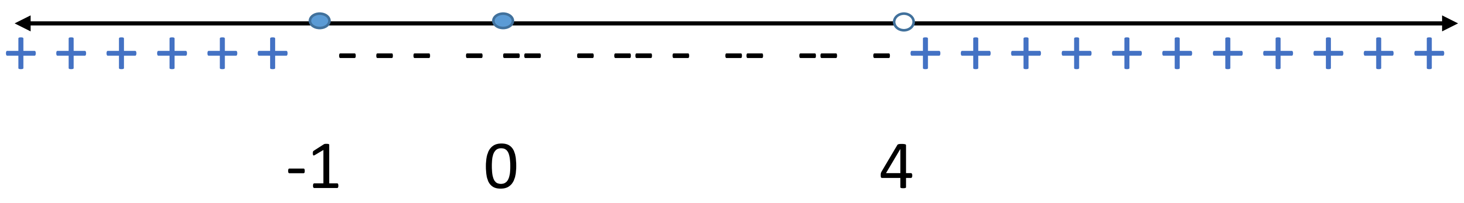
Ejemplo:

Para que valores de x, la función $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2x-8}}$ es continua?

Solución:

Como toda función es continua en su dominio, hallamos el dominio de la función dada.

Sea $\frac{x+1}{2x-8} \geq 0$ con $2x - 8 \neq 0$



Luego $D = (-\infty, -1] \cup (4, \infty)$

Entonces la función es continua en los intervalos anteriores.

17-22 Explique por qué cada una de las siguientes funciones es discontinua en el número dado $x = a$. Dibuje la gráfica de la función.

19. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ $\quad a = 0$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Solución:

Sea:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (e^x) = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2) = (0)^2 = 0$$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$,

Se puede afirmar que la función no es continua en $x = 0$ y existe una discontinuidad por salto.

41-43 Encuentre los números en los que f es discontinua. ¿En cuáles de estos números f es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguna de las dos? Trace la gráfica de f.

43. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Solución:

Analizar la continuidad en $x = 0$ y $x = 1$

i) Para $x = 0$, sea : $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x + 2) = 2$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (e^x) = e^0 = 1$$

Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$, la funcion no es continua en : $x = 0$

ii) Para $x = 1$

Sea : $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^x = e^1 = e$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2 - x = 2 - 1 = 1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x),$

Como los límites laterales son diferentes, la función no es continua en $x = 1$

* Analizando las continuidades laterales:

i) Por la izquierda en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2$$

$$f(0) = e^0 = 1$$

Luego no hay continuidad por la izquierda en $x = 0$.

ii) Por derecha en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$f(0) = e^0 = 1$$

Luego la función es continua por la derecha en $x = 0$.

iii) Por la izquierda en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = e$$

$$f(1) = e^1 = e$$

Luego la función es continua por la izquierda en $x = 1$.

iv) Por derecha en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$f(1) = e^1 = e$$

Luego no hay continuidad por la derecha en $x = 1$.

46. Encuentre los valores de a y b que hacen a f continua para toda x.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ 2x - a + b & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Solución:

La función puede escribir así:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 \; si \; x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 \; si \; 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b \; si \; x \geq 3 \end{cases}$$

Si se analiza la continuidad en $x = 2$ y $x = 3$

i) Para $x = 2$, por definición de continuidad en un punto:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

Reemplazando:

$$\lim_{x \to 2^-} (x + 2) = \lim_{x \to 2^+} (ax^2 - bx + 3)$$

Llevado al límite:

$$4 = 4a - 2b + 3 \rightarrow 4a - 2b = 1 \qquad \textbf{(1)}$$

ii) Para $x = 3$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

Reemplazando:

$$\lim_{x\to 3^-}(ax^2 - bx + 3) = \lim_{x\to 3^+}(2x - a + b)$$

Llevado al límite:

$9a - 3b + 3 = 6 - a + b \ \rightarrow 10a - 4b = 3$ **(2)**

El sistema $4a - 2b = 1$ **(1)**

$10a - 4b = 3$ **(2)**

Conclusión:

La función es continua en todos los reales para $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{2}$

Preguntas:

(a) ¿Cómo queda redefinida f?

(b) Construya la gráfica.

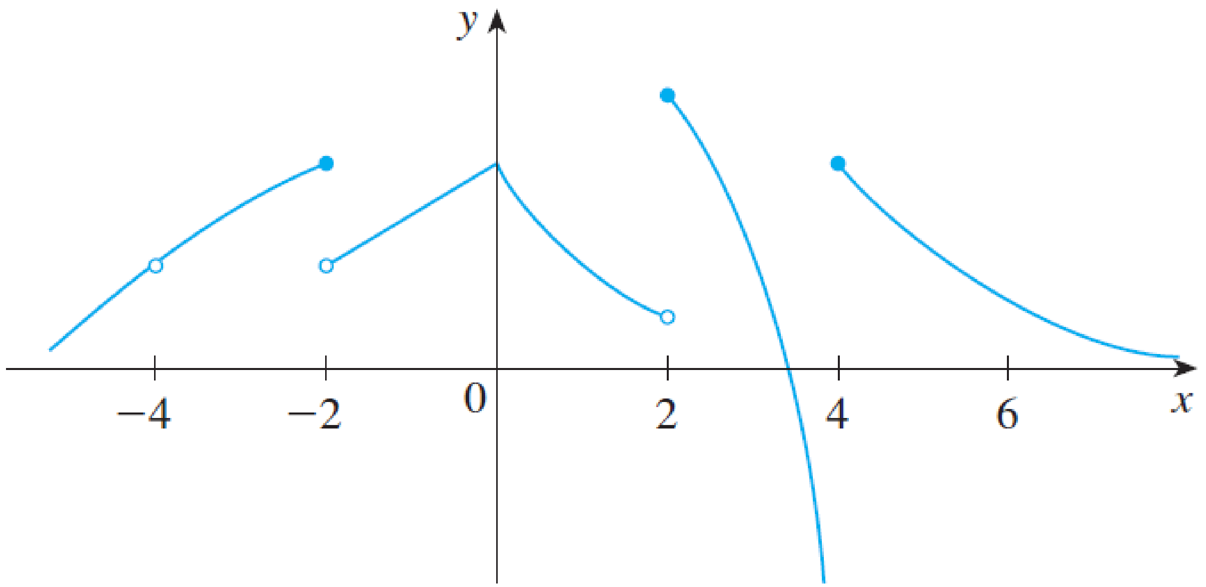
Ejercicios

1. Escriba una ecuación que exprese el hecho de que una función f es continua en el número 4.

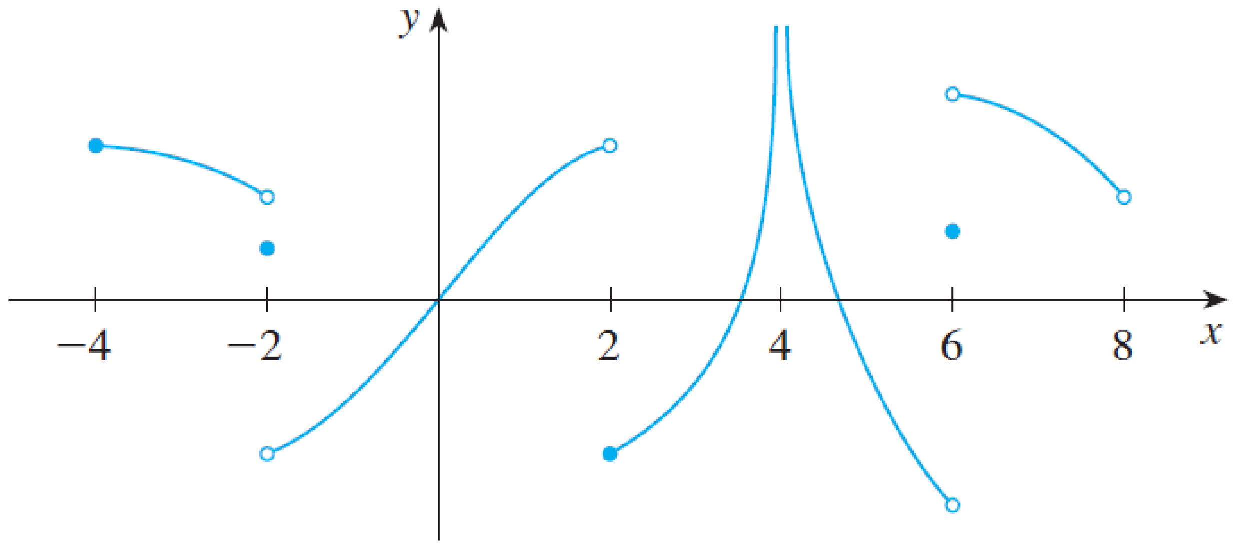
2. Si f es continua sobre $(-\infty, \infty)$, ¿qué puede decir acerca de su grafica?

3. a) A partir de la grafica de f, establezca el número en el cual f es discontinua y explique por qué.

b) Para cada uno de los números que se obtuvieron en el inciso a), determine si f es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguno de los dos lados.



4. A partir de la grafica de g, establezca los intervalos sobre los que g es continua.



5-8 Dibuje la gráfica de una función f que es continua, a excepción de la discontinuidad señalada.

5. Discontinua, pero continua por la derecha, en $x = 2$.

6. Discontinuidades en $x = -1$ y $x = 4$, pero continuas por la izquierda en $x = -1$ y por la derecha en $x = 4$.

7. Discontinuidad removible en $x = 3$, discontinuidad de salto en $x = 5$.

8. Ni por la izquierda ni por la derecha es continua en $x = -2$, continua sólo por la izquierda en $x = 2$.

9. El peaje T que se cobra por conducir en un determinado tramo de una carretera es de \$5, excepto durante las horas pico (entre las 7 y las 10 y entre las 16 y 19 horas) cuando el peaje es de \$7.

a) Esboce una gráfica de T como una función del tiempo t, medido en horas pasada la medianoche.

b) Analice las discontinuidades de esta función y su significado para alguien que utiliza la carretera.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

10. Explique por qué cada una de las siguientes funciones es continua o discontinua.

a) La temperatura en una localidad específica como una función del tiempo

b) La temperatura en un momento determinado como una función de la distancia al oeste de la ciudad de Nueva York

c) La altitud sobre el nivel del mar como una función de la distancia al oeste de la ciudad de Nueva York

d) El costo de transportarse en taxi como una función de la distancia de traslado

e) La corriente en un circuito de iluminación en una habitación como una función del tiempo

11. Si f y g son funciones continuas tales que $g(2) = 6$ y $\lim_{x\to 2} [3f(x) + f(x)g(x)] = 36$, encuentre $f(2)$.

12-14 Utilice la definición de continuidad y las propiedades de los limites para demostrar que cada una de las siguientes funciones es continua en el número dado $x = a$.

12. $f(x) = 3x^4 - 5x + \sqrt[3]{x^2 + 4}, \quad a = 2$

13. $f(x) = (x + 2x^3)^4, \quad a = -1$

14. $h(t) = \dfrac{2t - 3t^2}{1 + t^3}, \quad a = 1$

15-16 Utilice la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que cada una de las siguientes funciones es continua sobre el intervalo dado.

15. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 2}, \quad (2, \infty)$

16. $g(x) = 2\sqrt{3 - x}, \quad (-\infty, 3]$

17-22 Explique por qué cada una de las siguientes funciones es discontinua en el número dado $x = a$. Dibuje la gráfica de la función.

17. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2} \qquad a = -2$

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ 1 & \text{si } x = -2 \end{cases} \qquad a = -2$

20. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

21. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad a = 0$

22. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases} \qquad a = 3$

23-24 ¿Cómo podría "remover la discontinuidad" en cada una de las siguientes funciones? En otras palabras, ¿cómo redefiniría $f(2)$ a fin de que sean continuas en $x = 2$?

23. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

24. $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

25-32 Utilizando los teoremas 4, 5, 7 y 9, explique por qué cada una de las siguientes funciones es continua en todo número de su dominio. Determine el dominio.

25. $F(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 1}$

26. $G(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - x - 1}$

27. $Q(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{x^3 - 2}$

28. $R(t) = \dfrac{e^{\operatorname{sen} t}}{2 + \cos \pi t}$

29. $A(t) = \operatorname{arcsen}(1 + 2t)$

30. $B(x) = \dfrac{\tan x}{\sqrt{4 - x^2}}$

31. $M(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$

32. $N(r) = \tan^{-1}(1 + e^{-r^2})$

33-34 Identifique las discontinuidades de cada una de las siguientes funciones e ilústrelas con una gráfica.

33. $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

34. $y = \ln(\tan^2 x)$

63. ¿Para qué valores de x es f continua?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

64. ¿Para qué valores de x es g continua?

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

39-40 Demuestre que cada una de las siguientes funciones es continua sobre $(-\infty, \infty)$.

39. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < \pi/4 \\ \cos x & \text{si } x \geqslant \pi/4 \end{cases}$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

41-43 Encuentre los números en los que f es discontinua. ¿En cuáles de estos números f es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguna de las dos? Trace la gráfica de f.

41. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2 - x & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1/x & \text{si } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

45. ¿Para qué valor de la constante c la función f es continua sobre $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

44. La fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre una masa unitaria a una distancia r del centro del planeta es

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{si } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{si } r \geqslant R \end{cases}$$

donde M es la masa de la Tierra, R su radio y G la constante gravitacional. ¿Es F una función continua de r?

47. ¿Cuál de las funciones f siguientes tiene discontinuidad removible en $x = a$? Si la discontinuidad es removible, determine una función g que concuerde con f para $x \neq a$ y sea continua en $x = a$.

a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}, \quad a = 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}, \quad a = 2$

c) $f(x) = [\![\operatorname{sen} x]\!], \quad a = \pi$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín