

Precálculo

Matemáticas para el cálculo

Séptima edición

Stewart • Redlin • Watson

SÉPTIMA EDICIÓN

PRECÁLCULO

MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO

ACERCA DE LOS AUTORES

JAMES STEWART obtuvo la maestría de la Universidad de Stanford y el doctorado de la Universidad de Toronto. Realizó una investigación en la Universidad de Londres y fue influenciado por el famoso matemático George Polya en la Universidad de Stanford. Stewart es profesor emérito de la Universidad McMaster y actualmente es profesor de matemáticas en la Universidad de Toronto. Su campo de investigación es el análisis armónico y las conexiones entre las matemáticas y la música. James Stewart es el autor de una exitosa serie de libros de texto para cálculo publicada por Cengage Learning, incluyendo *Cálculo*, *Cálculo: trascendentes tempranas* y *Cálculo: conceptos y contextos*; una serie de textos de precálculo; y una serie de libros de texto de matemáticas para secundaria.

LOTHAR REDLIN creció en la isla de Vancouver, obtuvo una licenciatura en Ciencias de la Universidad de Victoria, y recibió un doctorado de la Universidad de McMaster en 1978. Posteriormente se dedicó a la investigación y la docencia en la Universidad de Washington, en la Universidad de Waterloo y en la Universidad Estatal de California en Long Beach. En la actualidad es profesor de matemáticas en la Universidad Estatal de Pennsylvania, en el Campus de Abington. Su campo de investigación es la topología.

SALEEM WATSON recibió su licenciatura en Ciencias por la Universidad Andrews, en Michigan. Realizó estudios de posgrado en la Universidad de Dalhousie y en la Universidad de McMaster, donde obtuvo su doctorado, en 1978. Posteriormente se dedicó a la investigación en el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Varsovia, en Polonia. También enseñó en la Universidad Estatal de Pennsylvania. Actualmente es profesor de matemáticas en la Universidad Estatal de California, Long Beach. Su campo de investigación es el análisis funcional.

Stewart, Redlin y Watson también han publicado *College Algebra, Trigonometry, Algebra and Trigonometry* y (con Phyllis Panman) *College Algebra: Concepts and Contexts*.

La obra cuenta con material adicional en línea. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

SÉPTIMA EDICIÓN

PRECÁLCULO

MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO

JAMES STEWART

McMASTER UNIVERSITY Y UNIVERSITY OF TORONTO

LOTHAR REDLIN

THE PENNSYLVANIA STATE UNIVERSITY

SALEEM WATSON

CALIFORNIA STATE UNIVERSITY, LONG BEACH

Con la ayuda de Phyllis Panman

Traducción

Mtro. Javier León Cárdenas

Formación básica ESIQIE • IPN

Revisión técnica

Dra. Ana Elizabeth García Hernández

Instituto Politécnico Nacional



**Precálculo. Matemáticas
para el cálculo, 7a. ed.**

James Stewart, Lothar Redlin
y Saleem Watson

**Director Editorial para
Latinoamérica:**

Ricardo H. Rodríguez

**Editora de Adquisiciones
para Latinoamérica:**

Claudia C. Garay Castro

**Gerente de Manufactura para
Latinoamérica:**

Antonio Mateos Martínez

**Gerente Editorial de Contenidos
en Español:**

Pilar Hernández Santamarina

Gerente de Proyectos Especiales:

Luciana Rabuffetti

Coordinador de Manufactura:

Rafael Pérez González

Editora:

Abril Vega Orozco

Diseño de portada:

Anneli Daniela Torres Arroyo

Imagen de portada:

© zhu difeng/Shutterstock

Composición tipográfica:

Heriberto Gachuz Chavez
Humberto Nuñez Ramos

© D.R. 2017 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.,
una Compañía de Cengage Learning, Inc.

Corporativo Santa Fe

Av. Santa Fe núm. 505, piso 12

Col. Cruz Manca, Santa Fe

C.P. 05349, México, D.F.

Cengage Learning® es una marca registrada
usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de
este trabajo amparado por la Ley Federal del
Derecho de Autor, podrá ser reproducida,
transmitida, almacenada o utilizada en
cualquier forma o por cualquier medio, ya sea
gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo,
pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado,
reproducción, escaneo, digitalización,
grabación en audio, distribución en internet,
distribución en redes de información o
almacenamiento y recopilación en sistemas
de información a excepción de lo permitido
en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal
del Derecho de Autor, sin el consentimiento
por escrito de la Editorial.

Traducido del libro *Precalculus: Mathematics
for Calculus*, Seventh Edition.

James Stewart, Lothar Redlin and Saleem Watson.

Publicado en inglés por Cengage Learning ©2016.

ISBN: 978-1-305-07175-9

Datos para catalogación bibliográfica:

Stewart, James, Lothar Redlin y Saleem Watson.

Precálculo. Matemáticas para el cálculo, 7a. ed.

ISBN: 978-607-526-279-6

Visite nuestro sitio en:

<http://latinoamerica.cengage.com>

PREFACIO ix

AL ESTUDIANTE xvi

PRÓLOGO: PRINCIPIOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS xvii

CAPÍTULO 1 FUNDAMENTOS 1

Resumen del capítulo 1

1.1 Números reales 2

1.2 Exponentes y radicales 13

1.3 Expresiones algebraicas 25

1.4 Expresiones racionales 36

1.5 Ecuaciones 45

1.6 Números complejos 59

1.7 Modelado con ecuaciones 65

1.8 Desigualdades 81

1.9 El plano coordenado; gráficas de ecuaciones; circunferencias 92

1.10 Rectas 106

1.11 Solución gráfica de ecuaciones y desigualdades 117

1.12 Modelos usando variaciones 122

Capítulo 1 Repaso 130

Capítulo 1 Examen 137

■ ENFOQUE SOBRE MODELADO Ajuste lineal de datos 139

CAPÍTULO 2 FUNCIONES 147

Resumen del capítulo 147

2.1 Funciones 148

2.2 Gráficas de funciones 159

2.3 Obtener información a partir de la gráfica de una función 170

2.4 Razón de cambio promedio de una función 183

2.5 Funciones lineales y modelos 190

2.6 Transformaciones de funciones 198

2.7 Combinación de funciones 210

2.8 Funciones uno a uno y sus inversas 219

Capítulo 2 Repaso 229

Capítulo 2 Examen 235

■ ENFOQUE SOBRE MODELADO Modelado con funciones 237

CAPÍTULO 3 FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES 245

Resumen del capítulo 245

3.1 Funciones y modelos cuadráticos 246

3.2 Funciones polinomiales y sus gráficas 254

3.3 División de polinomios 269

3.4 Ceros reales de polinomios 275

3.5 Ceros complejos y el teorema fundamental del álgebra 287

3.6 Funciones racionales 295

- 3.7** Desigualdades polinomiales y racionales 311
 Capítulo 3 Repaso 317
 Capítulo 3 Examen 323
- **ENFOQUE SOBRE MODELADO** Ajuste de datos a curvas con funciones polinomiales 325

CAPÍTULO 4 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS 329

- Resumen del capítulo 329
- 4.1** Funciones exponenciales 330
4.2 La función exponencial natural 338
4.3 Funciones logarítmicas 344
4.4 Leyes de logaritmos 354
4.5 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas 360
4.6 Modelado con funciones exponenciales 370
4.7 Escalas logarítmicas 381
 Capítulo 4 Repaso 386
 Capítulo 4 Examen 391
- **ENFOQUE SOBRE MODELADO** Ajuste de datos a curvas exponenciales y de potencia 392
- Examen acumulativo de repaso: capítulos 2, 3 y 4 se encuentran disponibles en línea.
 Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

CAPÍTULO 5 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: MÉTODO DE LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA 401

- Resumen del capítulo 401
- 5.1** La circunferencia unitaria 402
5.2 Funciones trigonométricas de números reales 409
5.3 Gráficas trigonométricas 419
5.4 Más gráficas trigonométricas 432
5.5 Funciones trigonométricas inversas y sus gráficas 439
5.6 Modelado de movimiento armónico 445
 Capítulo 5 Repaso 460
 Capítulo 5 Examen 465
- **ENFOQUE SOBRE MODELADO** Ajuste de datos a curvas senoidales 466

CAPÍTULO 6 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: MÉTODO DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO 471

- Resumen del capítulo 471
- 6.1** Medida de un ángulo 472
6.2 Trigonometría de triángulos rectángulos 482
6.3 Funciones trigonométricas de ángulos 491
6.4 Funciones trigonométricas inversas y triángulos rectángulos 501
6.5 La ley de senos 508
6.6 La ley de cosenos 516
 Capítulo 6 Repaso 524
 Capítulo 6 Examen 531
- **ENFOQUE SOBRE MODELADO** Topografía 533

CAPÍTULO 7 TRIGONOMETRÍA ANALÍTICA 537

Resumen del capítulo 537

- 7.1 Identidades trigonométricas 538
- 7.2 Fórmulas de adición y sustracción 545
- 7.3 Fórmulas de ángulo doble, semiángulo y producto a suma 553
- 7.4 Ecuaciones trigonométricas básicas 564
- 7.5 Más ecuaciones trigonométricas 570

Capítulo 7 Repaso 576

Capítulo 7 Examen 580

- **ENFOQUE SOBRE MODELADO** Ondas viajeras y estacionarias 581

Examen acumulativo de repaso: capítulos 5, 6 y 7 se encuentran disponibles en línea.

Ingresa a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

CAPÍTULO 8 COORDENADAS POLARES Y ECUACIONES PARAMÉTRICAS 587

Resumen del capítulo 587

- 8.1 Coordenadas polares 588
- 8.2 Gráficas de ecuaciones polares 594
- 8.3 Forma polar de números complejos: teorema de De Moivre 602
- 8.4 Curvas planas y ecuaciones paramétricas 611

Capítulo 8 Repaso 620

Capítulo 8 Examen 624

- **ENFOQUE SOBRE MODELADO** La trayectoria de un proyectil 625

CAPÍTULO 9 VECTORES EN DOS Y TRES DIMENSIONES 629

Resumen del capítulo 629

- 9.1 Vectores en dos dimensiones 630
- 9.2 El producto punto 639
- 9.3 Geometría de coordenadas en tres dimensiones 647
- 9.4 Vectores en tres dimensiones 653
- 9.5 El producto cruz 659
- 9.6 Ecuaciones de rectas y planos 666

Capítulo 9 Repaso 670

Capítulo 9 Examen 675

- **ENFOQUE SOBRE MODELADO** Campos vectoriales 676

Examen acumulativo de repaso: capítulos 8 y 9 se encuentran disponibles en línea.

Ingresa a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

CAPÍTULO 10 SISTEMAS DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES 679

Resumen del capítulo 679

- 10.1 Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas 680
- 10.2 Sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas 690
- 10.3 Matrices y sistemas de ecuaciones lineales 699
- 10.4 El álgebra de matrices 712
- 10.5 Inversas de matrices y ecuaciones matriciales 724
- 10.6 Determinantes y regla de Cramer 734
- 10.7 Fracciones parciales 745
- 10.8 Sistemas de ecuaciones no lineales 751
- 10.9 Sistemas de desigualdades 756

Capítulo 10 Repaso 766

Capítulo 10 Examen 773

- **ENFOQUE SOBRE MODELADO** Programación lineal 775

CAPÍTULO 11 SECCIONES CÓNICAS 781

- Resumen del capítulo 781
 - 11.1** Parábolas 782
 - 11.2** Elipses 790
 - 11.3** Hipérbolas 799
 - 11.4** Cónicas desplazadas 807
 - 11.5** Rotación de ejes 816
 - 11.6** Ecuaciones polares de las cónicas 824
 - Capítulo 11 Repaso 831
 - Capítulo 11 Examen 835
 - **ENFOQUE SOBRE MODELADO** Cónicas en arquitectura 836
- Examen acumulativo de repaso: capítulos 10 y 11 se encuentran disponibles en línea.
Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

CAPÍTULO 12 SUCESIONES Y SERIES 841

- Resumen del capítulo 841
- 12.1** Sucesiones y notación de sumatoria 842
- 12.2** Sucesiones aritméticas 853
- 12.3** Sucesiones geométricas 858
- 12.4** Matemáticas de finanzas 867
- 12.5** Inducción matemática 873
- 12.6** El teorema del binomio 879
- Capítulo 12 Repaso 887
- Capítulo 12 Examen 892
- **ENFOQUE SOBRE MODELADO** Modelado con sucesiones recursivas 893

CAPÍTULO 13 LÍMITES: UNA MIRADA PREVIA AL CÁLCULO 897

- Resumen del capítulo 897
 - 13.1** Hallar límites numérica y gráficamente 898
 - 13.2** Encontrar límites algebraicamente 906
 - 13.3** Rectas tangentes y derivadas 914
 - 13.4** Límites en el infinito; límites de sucesiones 924
 - 13.5** Áreas 931
 - Capítulo 13 Repaso 940
 - Capítulo 13 Examen 943
 - **ENFOQUE SOBRE MODELADO** Interpretaciones del área 944
- Examen acumulativo de repaso: capítulos 12 y 13 se encuentran disponibles en línea.
Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

El siguiente material se encuentra disponible en línea. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

APÉNDICE A Repaso de geometría
 APÉNDICE B Cálculos y cifras significativas
 APÉNDICE C Gráficas con una calculadora graficadora
 APÉNDICE D Uso de la calculadora graficadora TI-83/84
 RESPUESTAS
 ÍNDICE



© Blend Images/Alamy

1

Fundamentos

- 1.1 Números reales
- 1.2 Exponentes y radicales
- 1.3 Expresiones algebraicas
- 1.4 Expresiones racionales
- 1.5 Ecuaciones
- 1.6 Números complejos
- 1.7 Modelado con ecuaciones
- 1.8 Desigualdades
- 1.9 El plano coordenado;
gráficas de ecuaciones;
circunferencias
- 1.10 Rectas
- 1.11 Solución gráfica de
ecuaciones y
desigualdades
- 1.12 Modelos usando
variaciones

ENFOQUE SOBRE MODELADO

Ajuste lineal de datos

En este primer capítulo repasaremos los números reales, las ecuaciones y el plano coordenado. Es probable que el lector ya se encuentre familiarizado con estos conceptos, pero es útil ver de nuevo cómo funcionan estas ideas para resolver problemas y modelar (o describir) situaciones prácticas.

En el *Enfoque sobre modelado*, al final del capítulo, aprenderemos cómo hallar tendencias lineales en los datos y cómo utilizarlas para hacer predicciones sobre el futuro.

1.1 NÚMEROS REALES

■ Números reales ■ Propiedades de los números reales ■ Adición y sustracción ■ Multiplicación y división ■ La recta de números reales ■ Conjuntos e intervalos ■ Valor absoluto y distancia

En el mundo real usamos números para medir y comparar diferentes cantidades. Por ejemplo, medimos temperatura, longitud, altura, peso, presión, distancia, velocidad, aceleración, energía, fuerza, ángulos, edad, costos, etcétera. La figura 1 ilustra algunas situaciones en las que se utilizan números. Los números también nos permiten expresar relaciones entre cantidades diferentes, por ejemplo, las relaciones entre el radio y el volumen de una pelota, entre las millas conducidas y la gasolina utilizada, o entre el nivel educativo y el salario inicial.



FIGURA 1 Medidas con números reales

■ Números reales

Repasemos los tipos de números que conforman el sistema de números reales. Empecemos con los **números naturales**:

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

Los **enteros** constan de los números naturales junto con sus negativos y el 0:

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Construimos los **números racionales** al tomar cocientes de enteros. Entonces, cualquier número racional r se puede expresar como

$$r = \frac{m}{n}$$

donde m y n son enteros y $n \neq 0$. Como ejemplos tenemos

$$\frac{1}{2}, \quad -\frac{3}{7}, \quad 46 = \frac{46}{1}, \quad 0.17 = \frac{17}{100}$$

(Recuerde que una división entre 0 siempre se excluye, de modo que expresiones como $\frac{3}{0}$ y $\frac{0}{0}$ no están definidas.) También hay números reales, tales como $\sqrt{2}$, que no se pueden expresar como un cociente de enteros y, por tanto, se denominan **números irracionales**. Se puede demostrar, con diferentes grados de dificultad, que estos números también son irracionales:

$$\sqrt{3}, \quad \sqrt{5}, \quad \sqrt[3]{2}, \quad \pi, \quad \frac{3}{\pi^2}$$

Por lo general el conjunto de todos los números reales se denota con el símbolo \mathbb{R} . Cuando se usa la palabra *número* sin más detalle, queremos decir “número real”. La figura 2 es un diagrama de los tipos de números reales con los que trabajamos en este libro.

Todo número real tiene una representación decimal. Si el número es racional, entonces su correspondiente decimal es periódico. Por ejemplo,

$$\frac{1}{2} = 0.5000 \dots = 0.5\overline{0}$$

$$\frac{2}{3} = 0.6666 \dots = 0.\overline{6}$$

$$\frac{157}{495} = 0.3171717 \dots = 0.31\overline{7}$$

$$\frac{9}{7} = 1.285714285714 \dots = 1.\overline{285714}$$

Los diferentes tipos de números reales se inventaron para satisfacer necesidades específicas. Por ejemplo, los números naturales son necesarios para contar, los números negativos para describir deudas o temperaturas bajo cero, los números racionales para expresar conceptos como “medio galón de leche” y los números irracionales se usan para medir ciertas distancias como la diagonal de un cuadrado.

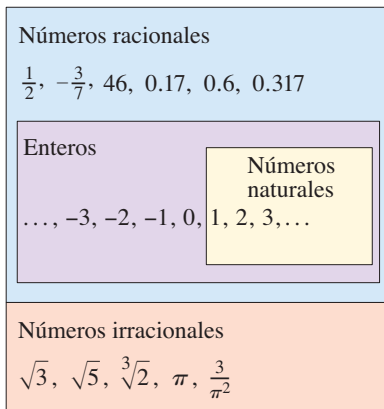


FIGURA 2 El sistema de números reales

Un número decimal periódico como

$$x = 3.5474747 \dots$$

es un número racional. Para convertirlo a un cociente de dos enteros, escribimos

$$\begin{array}{r} 1000x = 3547.47474747 \dots \\ 10x = 35.47474747 \dots \\ \hline 990x = 3512.0 \end{array}$$

Por tanto, $x = \frac{3512}{990}$. (La idea es multiplicar x por las potencias apropiadas de 10 y luego restar para eliminar la parte periódica.)

(La barra indica que la sucesión de dígitos se repite por siempre.) Si el número es irracional la representación decimal no es periódica:

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095 \dots \quad \pi = 3.141592653589793 \dots$$

Si detenemos la expansión decimal de cualquier número en cierto lugar obtenemos una aproximación al número. Por ejemplo, podemos escribir

$$\pi \approx 3.14159265$$

donde el símbolo \approx se lee “es aproximadamente igual a”. Cuantos más lugares decimales retengamos, mejor es nuestra aproximación.

■ **Propiedades de los números reales**

Todos sabemos que $2 + 3 = 3 + 2$, y $5 + 7 = 7 + 5$, y $513 + 87 = 87 + 513$, etc. En álgebra expresamos todos estos hechos (un infinito de ellos) si escribimos

$$a + b = b + a$$

donde a y b son dos números cualesquiera. En otras palabras, “ $a + b = b + a$ ” es una forma concisa de decir que “cuando sumamos dos números, el orden de adición no importa”. Este hecho se conoce como *Propiedad conmutativa* de la adición. De nuestra experiencia con números sabemos que las siguientes propiedades también son válidas.

| PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES | | |
|-----------------------------------|---|--|
| Propiedades | Ejemplo | Descripción |
| Propiedades conmutativas | | |
| $a + b = b + a$ | $7 + 3 = 3 + 7$ | Cuando sumamos dos números, el orden no importa. |
| $ab = ba$ | $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$ | Cuando multiplicamos dos números, el orden no importa. |
| Propiedades asociativas | | |
| $(a + b) + c = a + (b + c)$ | $(2 + 4) + 7 = 2 + (4 + 7)$ | Cuando sumamos tres números, no importa cuáles dos de estos sumamos primero. |
| $(ab)c = a(bc)$ | $(3 \cdot 7) \cdot 5 = 3 \cdot (7 \cdot 5)$ | Cuando multiplicamos tres números, no importa cuáles dos de estos multiplicamos primero. |
| Propiedad distributiva | | |
| $a(b + c) = ab + ac$ | $2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$ | Cuando multiplicamos un número por una suma de dos números obtenemos el mismo resultado que si multiplicáramos ese número por cada uno de los términos y luego sumáramos los resultados. |
| $(b + c)a = ab + ac$ | $(3 + 5) \cdot 2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$ | |

La propiedad distributiva es de importancia crítica porque describe la forma en que la adición y la multiplicación interaccionan una con otra.

La propiedad distributiva aplica siempre que multiplicamos un número por una suma. La figura 2 explica por qué funciona esta propiedad para el caso en el que todos los números sean enteros positivos, pero la propiedad es verdadera para cualquier número real a , b y c .

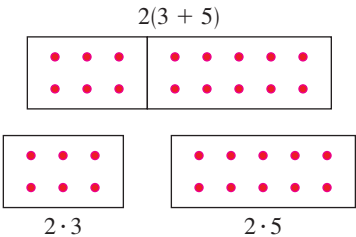


FIGURA 3 La propiedad distributiva

EJEMPLO 1 ■ Uso de la propiedad distributiva

a)

$$\begin{aligned} 2(x + 3) &= 2 \cdot x + 2 \cdot 3 \\ &= 2x + 6 \end{aligned}$$

Propiedad distributiva

Simplifique

b)


$$\begin{aligned} (a + b)(x + y) &= (a + b)x + (a + b)y \\ &= (ax + bx) + (ay + by) \\ &= ax + bx + ay + by \end{aligned}$$


Propiedad distributiva

Propiedad distributiva

Propiedad asociativa de la adición

En el último paso eliminamos el paréntesis porque, de acuerdo con la propiedad asociativa, no importa el orden de la adición.

 Ahora intente realizar el ejercicio 15

 No suponga que $-a$ es un número negativo. Que $-a$ sea negativo o positivo depende del valor de a . Por ejemplo, si $a = 5$, entonces $-a = -5$, un número negativo, pero si $a = -5$, entonces $-a = -(-5) = 5$ (propiedad 2), un número positivo.

■ Adición y sustracción

El número 0 es especial para la adición; recibe el nombre de **identidad aditiva** porque $a + 0 = a$ para cualquier número real a . Todo número real a tiene un **negativo**, $-a$, que satisface $a + (-a) = 0$. La **sustracción** es la operación que deshace a la adición; para sustraer un número de otro, simplemente sumamos el negativo de ese número. Por definición

$$a - b = a + (-b)$$

Para combinar números reales con números negativos usamos las siguientes propiedades.

| PROPIEDADES DE NEGATIVOS | |
|----------------------------|--------------------------------|
| Propiedad | Ejemplo |
| 1. $(-1)a = -a$ | $(-1)5 = -5$ |
| 2. $-(-a) = a$ | $-(-5) = 5$ |
| 3. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$ | $(-5)7 = 5(-7) = -(5 \cdot 7)$ |
| 4. $(-a)(-b) = ab$ | $(-4)(-3) = 4 \cdot 3$ |
| 5. $-(a + b) = -a - b$ | $-(3 + 5) = -3 - 5$ |
| 6. $-(a - b) = b - a$ | $-(5 - 8) = 8 - 5$ |

La propiedad 6 expresa el hecho intuitivo de que $a - b$ y $b - a$ son negativos entre sí. La propiedad 5 se usa a veces con más de dos términos:

$$-(a + b + c) = -a - b - c$$

EJEMPLO 2 ■ Uso de las propiedades de los negativos

Sean x , y y z números reales.

a)

$$-(x + 2) = -x - 2$$

Propiedad 5: $-(a + b) = -a - b$

b)

$$\begin{aligned} -(x + y - z) &= -x - y - (-z) \\ &= -x - y + z \end{aligned}$$

Propiedad 5: $-(a + b) = -a - b$

Propiedad 2: $-(-a) = a$

 Ahora intente realizar el ejercicio 23

■ Multiplicación y división

El número 1 es especial para la multiplicación; recibe el nombre de **identidad multiplicativa** porque $a \cdot 1 = a$ para cualquier número real a . Todo número real a diferente de cero tiene un **recíproco**, $1/a$, que satisface $a \cdot (1/a) = 1$. La **división** es la operación que deshace la multiplicación; para dividir entre un número multiplicamos por el recíproco de ese número. Si $b \neq 0$, entonces, por definición,

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Escribimos $a \cdot (1/b)$ simplemente como a/b . Nos referimos a a/b como el **cociente** entre a y b o como la **fracción** de a sobre b ; a es el **numerador** y b es el **denominador** (o **divisor**). Para combinar números reales mediante la operación de división usamos las siguientes propiedades.

| PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES | | |
|---|--|--|
| Propiedad | Ejemplo | Descripción |
| 1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ | $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$ | Para multiplicar fracciones multiplique numeradores y denominadores. |
| 2. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ | $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$ | Para dividir fracciones multiplique por el recíproco del divisor. |
| 3. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$ | $\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{2 + 7}{5} = \frac{9}{5}$ | Para sumar fracciones con el mismo denominador sume los numeradores. |
| 4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ | $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \frac{29}{35}$ | Para sumar fracciones con denominadores diferentes encuentre un común denominador y a continuación sume los numeradores. |
| 5. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ | $\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$ | Elimine números que sean factores comunes en numerador y denominador. |
| 6. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$ | $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, por tanto $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$ | Multiplicación cruzada. |

Para sumar fracciones con denominadores diferentes, por lo general no usamos la propiedad 4. En cambio reescribimos las fracciones de modo que tengan el mínimo denominador común que sea posible (a veces menor que el producto de los denominadores) y luego usamos la propiedad 3. Este denominador es el **Mínimo Común Denominador** (MCD) que se describe en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 ■ Uso del MCD para sumar fracciones

Evalúe: $\frac{5}{36} + \frac{7}{120}$

SOLUCIÓN Al factorizar cada denominador en factores primos se obtiene

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \quad \text{y} \quad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Encontramos el mínimo común denominador (MCD) al formar el producto de todos los factores presentes en estas factorizaciones usando la máxima potencia de cada factor. Entonces el MCD es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{5}{36} + \frac{7}{120} &= \frac{5 \cdot 10}{36 \cdot 10} + \frac{7 \cdot 3}{120 \cdot 3} && \text{Use el común denominador} \\ &= \frac{50}{360} + \frac{21}{360} = \frac{71}{360} && \text{Propiedad 3: Suma de fracciones con el mismo denominador} \end{aligned}$$

■ La recta de números reales

Los números reales se pueden representar por puntos sobre una recta, como se muestra en la figura 4. La dirección positiva (hacia la derecha) está indicada por una flecha. Escogemos un punto de referencia arbitrario O , llamado **origen**, que corresponde al número real 0. Dada cualquier unidad de medida conveniente, cada número positivo x está representado por el punto sobre la recta a una distancia de x unidades a la derecha del origen, y cada número negativo $-x$ está representado por el punto a x unidades a la izquierda del origen. El número asociado con el punto P se llama **coordenada de P** y la recta se llama **recta coordenada**, o **recta de los números reales**, o simplemente **recta real**. A veces identificamos el punto con su coordenada y consideramos que un número es un punto sobre la recta real.

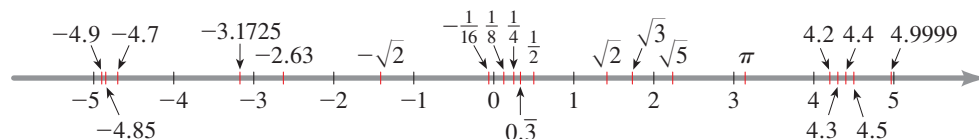


FIGURA 4 La recta real

Los números reales son *ordenados*. Decimos que a es **menor que b** y escribimos $a < b$ si $b - a$ es un número positivo. Geométricamente esto significa que a está a la izquierda de b en la recta numérica, o bien, lo que es lo mismo, podemos decir que b es **mayor que a** y escribimos $b > a$. El símbolo $a \leq b$ (o $b \geq a$) quiere decir que $a < b$ o que $a = b$ y se lee “ a es menor o igual a b ”. Por ejemplo, las siguientes son desigualdades verdaderas (véase la figura 5):

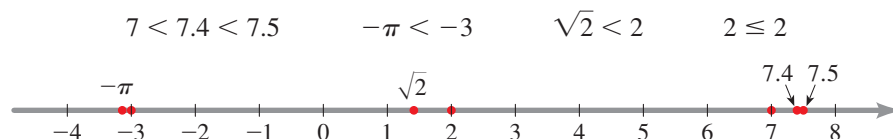


FIGURA 5

■ Conjuntos e intervalos

Un **conjunto** es una colección de objetos, y estos objetos se llaman **elementos** del conjunto. Si S es un conjunto, la notación $a \in S$ significa que a es un elemento de S , y $b \notin S$ quiere decir que b no es un elemento de S . Por ejemplo, si Z representa el conjunto de enteros, entonces $-3 \in Z$ pero $\pi \notin Z$.

Algunos conjuntos se pueden describir si sus elementos se colocan dentro de llaves. Por ejemplo, el conjunto A , que está formado por todos los enteros positivos menores que 7 se puede escribir como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

También podríamos escribir A en **notación constructiva de conjuntos** como

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero y } 0 < x < 7\}$$

que se lee “ A es el conjunto de todas las x tales que x es un entero y $0 < x < 7$ ”.



PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Números reales en el mundo real

Las medidas reales siempre implican unidades. Por ejemplo, generalmente medimos la distancia en pies, millas, centímetros o kilómetros. Algunas medidas implican diferentes tipos de unidades. Por ejemplo, la rapidez se mide en millas por hora o en metros por segundo. A menudo tenemos que convertir una medición de un tipo de unidad a otro. En este proyecto exploramos diferentes tipos de unidades utilizadas para diferentes propósitos y cómo convertir un tipo de unidad a otro. Se puede encontrar el proyecto en www.stewartmath.com.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

Si S y T son conjuntos, entonces su **unión** $S \cup T$ es el conjunto formado por todos los elementos que están en S o en T (o en ambos). La **intersección** de S y T es el conjunto $S \cap T$ formado por todos los elementos que están en S y T . En otras palabras, $S \cap T$ es la parte común de S y T . El **conjunto vacío**, denotado por \emptyset , es el conjunto que no contiene elementos.

EJEMPLO 4 ■ Unión e intersección de conjuntos

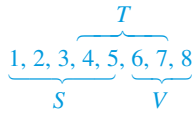
Si $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{4, 5, 6, 7\}$ y $V = \{6, 7, 8\}$ encuentre los conjuntos $S \cup T$, $S \cap T$ y $S \cap V$.

SOLUCIÓN

$$S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad \text{Todos los elementos en } S \text{ o } T$$

$$S \cap T = \{4, 5\} \quad \text{Elementos comunes a } S \text{ y } T$$

$$S \cap V = \emptyset \quad S \text{ y } V \text{ no tienen elementos en común}$$



Ahora intente realizar el ejercicio 41

Con frecuencia se presentan en cálculo ciertos conjuntos de números reales, llamados **intervalos**, y corresponden geoméricamente a segmentos de recta. Si $a < b$, entonces el **intervalo abierto** de a a b está formado por todos los números entre a y b y se denota con (a, b) . El **intervalo cerrado** de a a b incluye los puntos extremos y se denota con $[a, b]$. Usando la notación constructiva de conjuntos, podemos escribir

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \quad [a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

Observe que los paréntesis $()$ en la notación de intervalo y círculos abiertos en la gráfica de la figura 6 indican que los puntos extremos están *excluidos* del intervalo, mientras que los corchetes o paréntesis rectangulares $[]$ y los círculos sólidos de la figura 7 indican que los puntos extremos están *incluidos*. Los intervalos también pueden incluir un punto extremo, pero no el otro; o pueden extenderse hasta el infinito en una dirección o en ambas. La tabla siguiente es una lista de posibles tipos de intervalos.



FIGURA 6 El intervalo abierto (a, b)



FIGURA 7 El intervalo cerrado $[a, b]$

El símbolo ∞ (infinito) no representa un número. La notación (a, ∞) , por ejemplo, simplemente indica que el intervalo no tiene punto extremo a la derecha, pero se prolonga hasta el infinito en la dirección positiva.

| Notación | Descripción de conjunto | Gráfica |
|---------------------|--|---------|
| (a, b) | $\{x \mid a < x < b\}$ | |
| $[a, b]$ | $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ | |
| $[a, b)$ | $\{x \mid a \leq x < b\}$ | |
| $(a, b]$ | $\{x \mid a < x \leq b\}$ | |
| (a, ∞) | $\{x \mid a < x\}$ | |
| $[a, \infty)$ | $\{x \mid a \leq x\}$ | |
| $(-\infty, b)$ | $\{x \mid x < b\}$ | |
| $(-\infty, b]$ | $\{x \mid x \leq b\}$ | |
| $(-\infty, \infty)$ | \mathbb{R} (conjunto de todos los números) | |

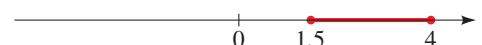
EJEMPLO 5 ■ Trazo de la gráfica de intervalos

Expresé cada intervalo en términos de desigualdades y, después, trace la gráfica del intervalo.

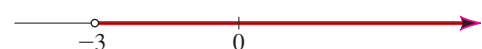
a) $[-1, 2) = \{x \mid -1 \leq x < 2\}$



b) $[1.5, 4] = \{x \mid 1.5 \leq x \leq 4\}$



c) $(-3, \infty) = \{x \mid -3 < x\}$



Ahora intente realizar el ejercicio 47

No hay número mínimo ni número máximo en un intervalo abierto

Cualquier intervalo contiene un número infinito de números; cualquier punto en la gráfica de un intervalo corresponde a un número real. En el intervalo cerrado $[0, 1]$, el número mínimo es 0 y el máximo es 1, pero el intervalo abierto $(0, 1)$ no contiene número mínimo ni máximo. Para ver esto observe que 0.01 es cercano a cero, pero 0.001 es más cercano, 0.0001 es todavía más cercano y así, sucesivamente. Siempre podemos encontrar un número en el intervalo $(0, 1)$ más cercano a cero que cualquier número dado. Como 0 no está en el intervalo, el intervalo no contiene un número mínimo. Del mismo modo, 0.99 es cercano a 1, pero 0.999 es más cercano y 0.9999 está aún más cercano y así, sucesivamente. Dado que 1 no está en el intervalo, el intervalo no tiene número máximo.

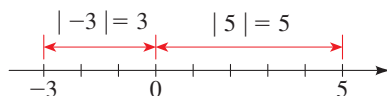
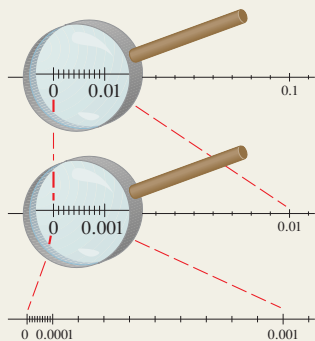


FIGURA 10

EJEMPLO 6 ■ Encontrar uniones e intersecciones de intervalos

Trace la gráfica de cada conjunto.

a) $(1, 3) \cap [2, 7]$ b) $(1, 3) \cup [2, 7]$

SOLUCIÓN

- a) La intersección de dos intervalos consta de los números que están en ambos intervalos. Por tanto

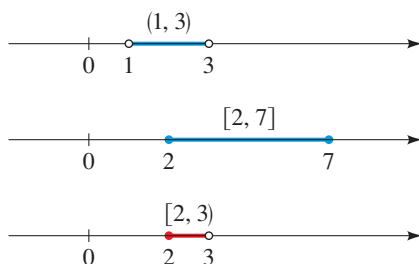
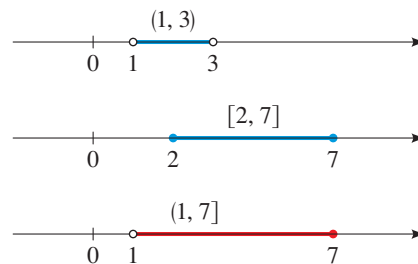
$$\begin{aligned}(1, 3) \cap [2, 7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \text{ y } 2 \leq x \leq 7\} \\ &= \{x \mid 2 \leq x < 3\} = [2, 3)\end{aligned}$$

Este conjunto se muestra en la figura 8.

- b) La unión de dos intervalos consta de los números que están en un intervalo o en el otro (o en ambos). Por tanto,

$$\begin{aligned}(1, 3) \cup [2, 7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \text{ o } 2 \leq x \leq 7\} \\ &= \{x \mid 1 < x \leq 7\} = (1, 7]\end{aligned}$$

Este conjunto se muestra en la figura 9.

FIGURA 8 $(1, 3) \cap [2, 7] = [2, 3)$ FIGURA 9 $(1, 3) \cup [2, 7] = (1, 7]$

Ahora intente realizar el ejercicio 61

■ Valor absoluto y distancia

El **valor absoluto** de un número a , denotado por $|a|$, es la distancia de a a 0 en la recta de números reales (véase la figura 10). La distancia es siempre positiva o cero, de modo que tenemos $|a| \geq 0$ para todo número a . Recordando que $-a$ es positivo cuando a es negativo, tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE VALOR ABSOLUTO

Si a es un número real, entonces el **valor absoluto** de a es

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 7 ■ Evaluación de valores absolutos de números

- a) $|3| = 3$
 b) $|-3| = -(-3) = 3$
 c) $|0| = 0$
 d) $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$ (como $3 < \pi \Rightarrow 3 - \pi < 0$)

Ahora intente realizar el ejercicio 67

Cuando trabajamos con valores absolutos utilizamos las propiedades siguientes:

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

| Propiedad | Ejemplo | Descripción |
|---|--|---|
| 1. $ a \geq 0$ | $ -3 = 3 \geq 0$ | El valor absoluto de un número siempre es positivo o cero. |
| 2. $ a = -a $ | $ 5 = -5 $ | Un número y su negativo tienen el mismo valor absoluto. |
| 3. $ ab = a b $ | $ -2 \cdot 5 = -2 5 $ | El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos. |
| 4. $\left \frac{a}{b}\right = \frac{ a }{ b }$ | $\left \frac{12}{-3}\right = \frac{ 12 }{ -3 }$ | El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos. |
| 5. $ a + b \leq a + b $ | $ -3 + 5 \leq -3 + 5 $ | Desigualdad del triángulo. |

¿Cuál es la distancia sobre la recta real entre los números -2 y 11 ? De la figura 11 vemos que la distancia es 13. Llegamos a esto si encontramos ya sea $|11 - (-2)| = 13$ o $|(-2) - 11| = 13$. De esta observación hacemos la siguiente definición (véase la figura 12).

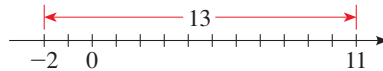


FIGURA 11

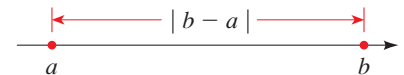


FIGURA 12 La longitud de un segmento de recta es $|b - a|$

DISTANCIA ENTRE PUNTOS SOBRE LA RECTA REAL

Si a y b son números reales, entonces la **distancia** entre los puntos a y b sobre la recta real es

$$d(a, b) = |b - a|$$

De la propiedad 6 de los números negativos se deduce que

$$|b - a| = |a - b|$$

Esto confirma que, como es de esperarse, la distancia de a a b es la misma distancia de b a a .

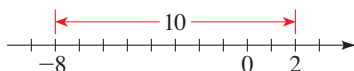


FIGURA 13

EJEMPLO 8 ■ Distancia entre puntos en la recta real

La distancia entre los números -8 y 2 es

$$d(a, b) = |2 - (-8)| = |-10| = 10$$

Podemos comprobar geoméricamente este cálculo, como se muestra en la figura 13.

 **Ahora intente realizar el ejercicio 75**

1.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

- Dé un ejemplo para cada uno de los siguientes enunciados:
 - Un número natural
 - Un entero que no sea número natural
 - Un número racional que no sea entero
 - Un número irracional
- Complete cada enunciado y mencione la propiedad de los números reales que haya empleado.
 - $ab =$ _____; propiedad _____
 - $a + (b + c) =$ _____; propiedad _____
 - $a(b + c) =$ _____; propiedad _____
- Expresé el conjunto de números como sigue, pero no incluya el 2 ni el 7:
 - En notación constructiva de conjuntos: _____
 - En notación de intervalos: _____
- El símbolo $|x|$ representa el _____ del número x . Si x no es 0, entonces el signo de $|x|$ siempre es _____.
- La distancia entre a y b en la recta real es $d(a, b) =$ _____.
Entonces la distancia entre -5 y 2 es _____.
- 6–8 ■ ¿Sí o no?** Si es *no*, explique. Suponga que a y b son números reales diferentes de cero.
 - ¿La suma de dos números racionales siempre es un número racional?
 - ¿La suma de dos números irracionales siempre es un número irracional?
 - ¿Es $a - b$ igual a $b - a$?
- Es $-2(a - 5)$ igual a $-2a - 10$?
- ¿La distancia entre cualesquier dos números reales diferentes siempre es positiva?
 - ¿La distancia entre a y b es igual a la distancia entre b y a ?

HABILIDADES

9–10 ■ Números reales Mencione los elementos del conjunto dado que sean

- números naturales
 - números enteros
 - números racionales
 - números irracionales
- $\{-1.5, 0, \frac{5}{2}, \sqrt{7}, 2.71, -\pi, 3.14, 100, -8\}$
 - $\{1.3, 1.3333 \dots, \sqrt{5}, 5.34, -500, 1\frac{2}{3}, \sqrt{16}, \frac{246}{579}, -\frac{20}{5}\}$
- 11–18 ■ Propiedades de los números reales** Expresé la propiedad de los números reales que se esté usando.
- $3 + 7 = 7 + 3$
 - $4(2 + 3) = (2 + 3)4$
 - $(x + 2y) + 3z = x + (2y + 3z)$

14. $2(A + B) = 2A + 2B$

15. $(5x + 1)3 = 15x + 3$

16. $(x + a)(x + b) = (x + a)x + (x + a)b$

17. $2x(3 + y) = (3 + y)2x$

18. $7(a + b + c) = 7(a + b) + 7c$

19–22 ■ Propiedades de los números reales Vuelva a escribir la expresión usando la propiedad dada de los números reales.

19. Propiedad conmutativa de adición, $x + 3 =$ _____

20. Propiedad asociativa de la multiplicación, $7(3x) =$ _____

21. Propiedad distributiva, $4(A + B) =$ _____

22. Propiedad distributiva, $5x + 5y =$ _____

23–28 ■ Propiedades de los números reales Utilice las propiedades de los números reales al escribir la expresión sin paréntesis.

23. $3(x + y)$

24. $(a - b)8$

25. $4(2m)$

26. $\frac{4}{3}(-6y)$

27. $-\frac{5}{2}(2x - 4y)$

28. $(3a)(b + c - 2d)$

29–32 ■ Operaciones aritméticas Realice las operaciones indicadas.

29. a) $\frac{3}{10} + \frac{4}{15}$

b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

30. a) $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$

b) $1 + \frac{5}{8} - \frac{1}{6}$

31. a) $\frac{2}{3}(6 - \frac{3}{2})$

b) $(3 + \frac{1}{4})(1 - \frac{4}{3})$

32. a) $\frac{2}{\frac{2}{3}} - \frac{\frac{2}{3}}{2}$

b) $\frac{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} + \frac{3}{15}}$

33–34 ■ Desigualdades Coloque el símbolo correcto ($<$, $>$, o $=$) en el espacio.

33. a) 3 _____ $\frac{7}{2}$ b) -3 _____ $-\frac{7}{2}$ c) 3.5 _____ $\frac{7}{2}$

34. a) $\frac{2}{3}$ _____ 0.67 b) $\frac{2}{3}$ _____ -0.67

c) $|0.67|$ _____ $|-0.67|$

35–38 ■ Desigualdades Diga si cada desigualdad es verdadera o falsa.

35. a) $-3 < -4$

b) $3 < 4$

36. a) $\sqrt{3} > 1.7325$

b) $1.732 \geq \sqrt{3}$

37. a) $\frac{10}{2} \geq 5$

b) $\frac{6}{10} \geq \frac{5}{6}$

38. a) $\frac{7}{11} \geq \frac{8}{13}$

b) $-\frac{3}{5} > -\frac{3}{4}$

39–40 ■ Desigualdades Escriba cada enunciado en términos de desigualdades.

39. a) x es positivo.

b) t es menor a 4.

c) a es mayor o igual a π .

d) x es menor a $\frac{1}{3}$ y mayor que -5 .

e) La distancia de p a 3 es, como máximo, 5.

40. a) y es negativa.
 b) z es mayor que 1.
 c) b es a lo más 8.
 d) w es positiva y menor o igual a 17.
 e) y está al menos a 2 unidades de π .

41–44 ■ Conjuntos Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad B = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$C = \{7, 8, 9, 10\}$$

41. a) $A \cup B$ b) $A \cap B$
 42. a) $B \cup C$ b) $B \cap C$
 43. a) $A \cup C$ b) $A \cap C$
 44. a) $A \cup B \cup C$ b) $A \cap B \cap C$

45–46 ■ Conjuntos Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{x \mid x \geq -2\} \quad B = \{x \mid x < 4\}$$

$$C = \{x \mid -1 < x \leq 5\}$$

45. a) $B \cup C$ b) $B \cap C$
 46. a) $A \cap C$ b) $A \cap B$



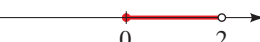
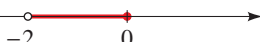
47–52 ■ Intervalos Exprese el intervalo en términos de desigualdades y luego trace la gráfica del intervalo.

47. $(-3, 0)$ 48. $(2, 8]$
 49. $[2, 8)$ 50. $[-6, -\frac{1}{2}]$
 51. $[2, \infty)$ 52. $(-\infty, 1)$

53–58 ■ Intervalos Exprese la desigualdad en notación de intervalos y después trace la gráfica del intervalo correspondiente.

53. $x \leq 1$ 54. $1 \leq x \leq 2$
 55. $-2 < x \leq 1$ 56. $x \geq -5$
 57. $x > -1$ 58. $-5 < x < 2$

59–60 ■ Intervalos Exprese cada conjunto en notación de intervalos.

59. a)  b) 
 60. a)  b) 

61–66 ■ Intervalos Trace la gráfica del conjunto.

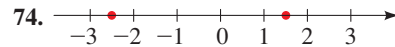
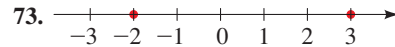
61. $(-2, 0) \cup (-1, 1)$ 62. $(-2, 0) \cap (-1, 1)$
 63. $[-4, 6] \cap [0, 8)$ 64. $[-4, 6) \cup [0, 8)$
 65. $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$ 66. $(-\infty, 6] \cap (2, 10)$

67–72 ■ Valor absoluto Evalúe cada expresión.

67. a) $|100|$ b) $|-73|$
 68. a) $|\sqrt{5} - 5|$ b) $|10 - \pi|$

69. a) $||-6| - |-4||$ b) $\frac{-1}{|-1|}$
 70. a) $|2 - |-12||$ b) $-1 - |1 - |-1||$
 71. a) $|(-2) \cdot 6|$ b) $|(-\frac{1}{3})(-15)|$
 72. a) $|\frac{-6}{24}|$ b) $|\frac{7-12}{12-7}|$

73–76 ■ Distancia Encuentre la distancia entre los números dados.



75. a) 2 y 17 b) -3 y 21 c) $\frac{11}{8}$ y $-\frac{3}{10}$
 76. a) $\frac{7}{15}$ y $-\frac{1}{21}$ b) -38 y -57 c) -2.6 y -1.8

HABILIDADES Plus

77–78 ■ Repetición de decimales Exprese cada decimal periódico como una fracción. (Véase la nota al margen en la página 3.)

77. a) $0.\overline{7}$ b) $0.\overline{28}$ c) $0.\overline{57}$
 78. a) $5.\overline{23}$ b) $1.\overline{37}$ c) $2.\overline{135}$

79–82 ■ Simplificación del valor absoluto Escriba la cantidad sin usar valor absoluto.

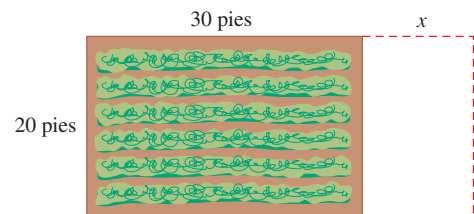
79. $|\pi - 3|$ 80. $|1 - \sqrt{2}|$
 81. $|a - b|$, donde $a < b$
 82. $a + b + |a - b|$, donde $a < b$

83–84 ■ Signos de números Sean a , b y c números reales tales que $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$. Determine el signo de cada expresión.

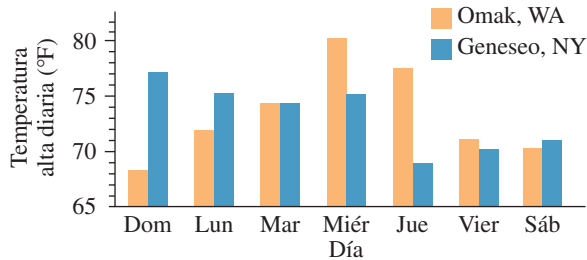
83. a) $-a$ b) bc c) $a - b$ d) $ab + ac$
 84. a) $-b$ b) $a + bc$ c) $c - a$ d) ab^2

APLICACIONES

85. **Área de un jardín** El jardín de legumbres de Mary mide 20 por 30 pies, de modo que su área es de $20 \times 30 = 600$ pies². Ella ha decidido agrandarlo como se muestra en la figura para que el área aumente a $A = 20(30 + x)$. ¿Qué propiedad de los números reales nos dice que la nueva área también se puede escribir como $A = 600 + 20x$?



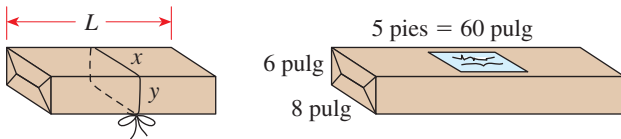
- 86. Variación de temperatura** La gráfica de barras muestra las altas temperaturas diarias para Omak, Washington y Geneseo, Nueva York, durante cierta semana en junio. Represente con T_O la temperatura en Omak y T_G la temperatura en Geneseo. Calcule $T_O - T_G$ y $|T_O - T_G|$ para cada día que se muestra. ¿Cuál de estos dos valores da más información?



- 87. Envío de un paquete por correo** La oficina de correos sólo aceptará paquetes para los cuales la longitud más la circunferencia no sea mayor de 108 pulgadas. Así, para el paquete de la figura debemos tener

$$L + 2(x + y) \leq 108$$

- a) ¿Aceptará la oficina de correos un paquete de 6 pulgadas de ancho, 8 pulgadas de profundidad y 5 pies de largo? ¿Y un paquete que mida 2 pies por 2 pies por 4 pies?
- b) ¿Cuál es la máxima longitud aceptable para un paquete que tiene una base cuadrada que mide 9 por 9 pulgadas?



DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN

- 88. DISCUSIÓN: Sumas y productos de números racionales e irracionales** Explique por qué la suma, la diferencia y el producto de dos números irracionales son números racionales. ¿El producto de dos números irracionales necesariamente es irracional? ¿Qué se puede decir de la suma?
- 89. DESCUBRIMIENTO ■ DEMOSTRACIÓN: Combinación de números racionales con números irracionales** ¿ $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ es racional o irracional? ¿ $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ es racional o irracional? Experimente con sumas y productos de otros números racionales e irracionales. Demuestre lo siguiente.
- a) La suma de un número racional r y un número irracional t es irracional.
- b) El producto de un número racional r y un número irracional t es irracional.

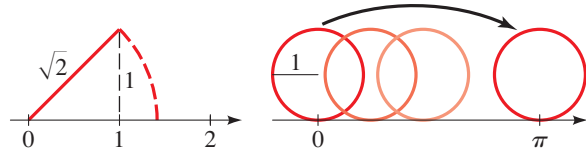
[Sugerencia: Para el inciso a), suponga que $r + t$ es un número racional q , es decir, $r + t = q$. Demuestre que esto conduce a una contradicción. Utilice un razonamiento similar para el inciso b).]

- 90. DESCUBRIMIENTO: Limitación del comportamiento de recíprocos** Complete las tablas siguientes. ¿Qué le ocurre al tamaño de la fracción $1/x$ cuando x aumenta? ¿Y cuando x disminuye?

| x | $1/x$ |
|-------|-------|
| 1 | |
| 2 | |
| 10 | |
| 100 | |
| 1 000 | |

| x | $1/x$ |
|-------|-------|
| 1.0 | |
| 0.5 | |
| 0.1 | |
| 0.01 | |
| 0.001 | |

- 91. DESCUBRIMIENTO: Ubicación de números irracionales en la recta real** Usando las siguientes figuras explique cómo localizar el punto $\sqrt{2}$ en una recta numérica. ¿Puede localizar $\sqrt{5}$ por medio de un método similar? ¿Cómo puede ayudarnos el círculo que se muestra en la figura para ubicar π en una recta numérica? Haga una lista de otros números irracionales que pueda ubicar en una recta numérica.



- 92. DEMOSTRACIÓN: Fórmulas de máximos y mínimos** Sea que $\text{máx}(a, b)$ denote el máximo y que $\text{mín}(a, b)$ denote el mínimo de los números reales a y b . Por ejemplo, $\text{máx}(2, 5) = 5$ y $\text{mín}(-1, -2) = -2$.

a) Demuestre que $\text{máx}(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}$.

b) Demuestre que $\text{mín}(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}$.

[Sugerencia: Considere casos y escriba estas expresiones sin el valor absoluto. Vea los ejercicios 81 y 82.]

- 93. REDACCIÓN: Números reales en el mundo real** Escriba un párrafo que describa diferentes situaciones del mundo real en las que se podrían usar números naturales, enteros, números racionales y números irracionales. Dé ejemplos para cada tipo de situación.
- 94. DISCUSIÓN: Operaciones conmutativa y no conmutativa** Hemos visto que la adición y la multiplicación son operaciones conmutativas.
- a) ¿La sustracción es conmutativa?
- b) ¿La división de números reales diferentes de cero es conmutativa?
- c) ¿Son conmutativas las acciones de ponerse calcetines y zapatos?
- d) ¿Son conmutativas las acciones de ponerse el sombrero y la chamarra?
- e) ¿Son conmutativas las acciones de lavar y secar la ropa?
- 95. DEMOSTRACIÓN: Desigualdad del triángulo** Demostraremos la propiedad 5 de los valores absolutos, la desigualdad del triángulo:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

- a) Verifique que la desigualdad de triángulo vale para $x = 2$ y $y = 3$, para $x = -2$ y $y = -3$ y para $x = -2$ y $y = 3$.
- b) Demuestre que la desigualdad del triángulo es verdadera para todos los números reales x y y . [Sugerencia: Considere casos.]

1.2 EXPONENTES Y RADICALES

■ Exponentes enteros ■ Reglas para trabajar con exponentes ■ Notación científica
 ■ Radicales ■ Exponentes racionales ■ Racionalización del denominador; forma estándar

En esta sección damos significado a expresiones como $a^{m/n}$ en las que el exponente m/n es un número racional. Para hacer esto necesitamos recordar algunos datos acerca de exponentes enteros, radicales y raíces n -ésimas.

■ Exponentes enteros


Normalmente, un producto de números idénticos se escribe en notación exponencial. Por ejemplo, $5 \cdot 5 \cdot 5$ se escribe como 5^3 . En general tenemos la siguiente definición.

NOTACIÓN EXPONENCIAL

Si a es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces la **n -ésima potencia** de a es

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

El número a se denomina **base**, y n se denomina **exponente**.

 Observe la diferencia entre $(-3)^4$ y -3^4 . En $(-3)^4$ el exponente se aplica al -3 , pero en -3^4 el exponente se aplica sólo al 3.

EJEMPLO 1 ■ Notación exponencial

- a) $(\frac{1}{2})^5 = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{32}$
 b) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$
 c) $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$

 Ahora intente realizar el ejercicio 17

Podemos expresar varias reglas útiles para trabajar con notación exponencial. Para descubrir la regla para multiplicación, multiplicamos 5^4 por 5^2 :

$$5^4 \cdot 5^2 = \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)}_{4 \text{ factores}} \underbrace{(5 \cdot 5)}_{2 \text{ factores}} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{6 \text{ factores}} = 5^6 = 5^{4+2}$$

Es evidente que para *multiplicar dos potencias de la misma base sumamos sus exponentes*. En general, para cualquier número real a y cualesquier enteros positivos m y n , tenemos

$$a^m a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{m \text{ factores}} \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m+n \text{ factores}} = a^{m+n}$$

Por tanto, $a^m a^n = a^{m+n}$.

Nos gustaría que esta regla fuera verdadera aun cuando m y n fueran 0 o enteros negativos. Por ejemplo, debemos tener

$$2^0 \cdot 2^3 = 2^{0+3} = 2^3$$

Pero esto puede ocurrir sólo si $2^0 = 1$. Igualmente, deseamos tener

$$5^4 \cdot 5^{-4} = 5^{4+(-4)} = 5^{4-4} = 5^0 = 1$$

y esto será cierto si $5^{-4} = 1/5^4$. Estas observaciones conducen a la siguiente definición.

EXPONENTES CERO Y NEGATIVO

Si $a \neq 0$ es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces

$$a^0 = 1 \quad \text{y} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

EJEMPLO 2 ■ Exponentes cero y negativos

a) $\left(\frac{4}{7}\right)^0 = 1$

b) $x^{-1} = \frac{1}{x^1} = \frac{1}{x}$

c) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

 **Ahora intente realizar el ejercicio 19**

■ Reglas para trabajar con exponentes


La familiaridad con las reglas siguientes es esencial para nuestro trabajo con exponentes y bases. En la tabla las bases a y b son números reales, y los exponentes m y n son enteros.

LEYES DE EXPONENTES

| Ley | Ejemplo | Descripción |
|---|--|--|
| 1. $a^m a^n = a^{m+n}$ | $3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$ | Para multiplicar dos potencias del mismo número sume los exponentes. |
| 2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ | $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$ | Para dividir dos potencias del mismo número reste los exponentes. |
| 3. $(a^m)^n = a^{mn}$ | $(3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$ | Para elevar una potencia a una nueva potencia multiplique los exponentes. |
| 4. $(ab)^n = a^n b^n$ | $(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$ | Para elevar un producto a una potencia eleve cada uno de los factores a la potencia. |
| 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ | $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2}$ | Para elevar un cociente a una potencia eleve el numerador y el denominador a la potencia. |
| 6. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ | $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$ | Para elevar una fracción a una potencia negativa invierta la fracción y cambie el signo del exponente. |
| 7. $\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$ | $\frac{3^{-2}}{4^{-5}} = \frac{4^5}{3^2}$ | Para mover un número elevado a una potencia del numerador al denominador o del denominador al numerador cambie el signo del exponente. |

Demostración de la ley 3 Si m y n son enteros positivos tenemos

$$\begin{aligned}
 (a^m)^n &= \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{m \text{ factores}}^n \\
 &= \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{m \text{ factores}} \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{m \text{ factores}} \cdots \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{m \text{ factores}} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ grupo de factores}} \\
 &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{mn \text{ factores}} = a^{mn}
 \end{aligned}$$

Los casos para los que $m \leq 0$ o $n \leq 0$ se pueden demostrar usando para ello la definición de exponentes negativos. 

Demostración de la ley 4 Si n es un entero positivo tenemos

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab) \cdots (ab)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ factores}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdots b)}_{n \text{ factores}} = a^n b^n$$

Aquí hemos empleado repetidamente las propiedades conmutativa y asociativa. Si $n \leq 0$, la ley 4 se puede demostrar usando la definición de exponentes negativos. ■

En los ejercicios 108 y 109 se le pide al lector demostrar las leyes 2, 5, 6 y 7.

EJEMPLO 3 ■ Uso de las leyes de exponentes

- a) $x^4 x^7 = x^{4+7} = x^{11}$ Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$
 b) $y^4 y^{-7} = y^{4-7} = y^{-3} = \frac{1}{y^3}$ Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$
 c) $\frac{c^9}{c^5} = c^{9-5} = c^4$ Ley 2: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
 d) $(b^4)^5 = b^{4 \cdot 5} = b^{20}$ Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$
 e) $(3x)^3 = 3^3 x^3 = 27x^3$ Ley 4: $(ab)^n = a^n b^n$
 f) $\left(\frac{x}{2}\right)^5 = \frac{x^5}{2^5} = \frac{x^5}{32}$ Ley 5: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$



Ahora intente realizar los ejercicios 29, 31 y 33

EJEMPLO 4 ■ Simplificación de expresiones con exponentes

Simplifique:

a) $(2a^3b^2)(3ab^4)^3$ b) $\left(\frac{x}{y}\right)^3 \left(\frac{y^2x}{z}\right)^4$

SOLUCIÓN

a) $(2a^3b^2)(3ab^4)^3 = (2a^3b^2)[3^3a^3(b^4)^3]$ Ley 4: $(ab)^n = a^n b^n$
 $= (2a^3b^2)(27a^3b^{12})$ Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$
 $= (2)(27)a^3a^3b^2b^{12}$ Se agrupan factores con la misma base
 $= 54a^6b^{14}$ Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

b) $\left(\frac{x}{y}\right)^3 \left(\frac{y^2x}{z}\right)^4 = \frac{x^3}{y^3} \frac{(y^2)^4 x^4}{z^4}$ Leyes 5 y 4
 $= \frac{x^3}{y^3} \frac{y^8 x^4}{z^4}$ Ley 3
 $= (x^3 x^4) \left(\frac{y^8}{y^3}\right) \frac{1}{z^4}$ Se agrupan factores con la misma base
 $= \frac{x^7 y^5}{z^4}$ Leyes 1 y 2



Ahora intente realizar los ejercicios 35 y 39

Cuando simplifique una expresión encontrará que muchos métodos diferentes conducirán al mismo resultado; siéntase libre de usar cualquiera de las reglas de exponentes para llegar a su propio método. En el ejemplo siguiente veremos cómo simplificar expresiones con exponentes negativos.

Las matemáticas en el mundo moderno

Aun cuando no notemos su presencia, las matemáticas permean casi todos los aspectos de la vida en el mundo moderno. Con el advenimiento de la tecnología moderna las matemáticas desempeñan una función cada vez mayor en nuestras vidas. Hoy en día es probable que usted haya despertado con la alarma de un reloj digital, enviado un mensaje de *e-mail* a través de internet, visto algún programa en TV de alta definición o la transmisión de un video, escuchado música en su teléfono celular, manejado un auto con inyección controlada digitalmente y quizás luego durmió en una habitación cuya temperatura estaba controlada por un termostato digital. En cada una de estas actividades las matemáticas intervienen en forma decisiva. En general una propiedad, por ejemplo, la intensidad o la frecuencia del sonido, el nivel de oxígeno en la emisión del escape de un auto, los colores en una imagen o la temperatura de su habitación son transformados en sucesiones de números por refinados algoritmos matemáticos. Estos datos numéricos, que suelen estar formados por muchos millones de bits (los dígitos 0 y 1), son transmitidos e reinterpretados. Trabajar con estas cantidades enormes de datos no fue posible sino hasta la invención de las computadoras, máquinas cuyos procesos lógicos fueron inventados por matemáticos.

Las aportaciones de las matemáticas en el mundo moderno no están limitadas a avances tecnológicos. Los procesos lógicos de las matemáticas se emplean ahora para analizar complejos problemas en ciencias sociales, políticas y biológicas en formas nuevas y sorprendentes. Los avances en matemáticas continúan y algunos de los más emocionantes se dieron tan sólo en la década pasada.

En otro libro, llamado *Mathematics in the Modern World*, se describe con más detalle el modo en que las matemáticas influyen en nuestras actividades diarias.

EJEMPLO 5 ■ Simplificación de expresiones con exponentes negativos

Elimine exponentes negativos y simplifique cada expresión.

$$a) = \frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2} \quad b) \left(\frac{y}{3z^3} \right)^{-2}$$

SOLUCIÓN

- a) Usamos la ley 7, que nos permite pasar un número elevado a una potencia del numerador al denominador (o viceversa) cambiando el signo del exponente.

$$\begin{aligned} \frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2} &= \frac{6s^{\cancel{-4}}}{2t^2\cancel{t^4}} \quad \text{Ley 7} \\ &= \frac{3s^3}{t^6} \quad \text{Ley 1} \end{aligned}$$

t⁻⁴ pasa al denominador y se convierte en t⁴

s⁻² pasa al numerador y se convierte en s²

- b) Usamos la ley 6, que nos permite cambiar el signo del exponente de una fracción al invertir la fracción.

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{3z^3} \right)^{-2} &= \left(\frac{3z^3}{y} \right)^2 \quad \text{Ley 6} \\ &= \frac{9z^6}{y^2} \quad \text{Leyes 5 y 4} \end{aligned}$$

 Ahora intente realizar el ejercicio 41

Notación científica

Los científicos usan notación exponencial como una forma compacta de escribir números muy grandes y números muy pequeños. Por ejemplo, la estrella más cercana, además del Sol, Proxima Centauri, está aproximadamente a 40 000 000 000 000 de km de distancia. La masa del átomo de hidrógeno es alrededor de 0.000000000000000000000000166 g. Estos números son difíciles de leer y escribir, de modo que los científicos por lo general los expresan en *notación científica*.

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Se dice que un número positivo x está escrito en **notación científica** si se expresa como sigue:

$$x = a \times 10^n \quad \text{donde} \quad 1 \leq a < 10 \text{ y } n \text{ es un entero}$$

Por ejemplo, cuando decimos que la distancia a la estrella Proxima Centauri es 4×10^{13} km, el exponente positivo 13 indica que el punto decimal se debe recorrer 13 lugares a la *derecha*:

$$4 \times 10^{13} = 40\,000\,000\,000\,000$$

Mueva el punto decimal 13 lugares a la derecha

Cuando decimos que la masa de un átomo de hidrógeno es 1.66×10^{-24} g el exponente -24 indica que el punto decimal debe moverse 24 lugares a la *izquierda*:

$$1.66 \times 10^{-24} = 0.000000000000000000000000166$$

Mueva el punto decimal 24 lugares a la izquierda



© Porojnicu Stelian/Shutterstock.com

3

Funciones polinomiales y racionales

- 3.1 Funciones y modelos cuadráticos
- 3.2 Funciones polinomiales y sus gráficas
- 3.3 División de polinomios
- 3.4 Ceros reales de polinomios
- 3.5 Ceros complejos y el teorema fundamental del álgebra
- 3.6 Funciones racionales
- 3.7 Desigualdades polinomiales y racionales

ENFOQUE SOBRE MODELADO

Ajuste de datos a curvas con funciones polinomiales

Las **funciones definidas por expresiones de polinomios** se denominan *funciones polinomiales*. Las gráficas de funciones polinomiales pueden tener numerosos crestas y valles. Esta propiedad las hace modelos apropiados para muchas situaciones prácticas. Por ejemplo, la propietaria de una fábrica observa que, si aumenta el número de trabajadores aumenta la productividad, pero si hay demasiados trabajadores entonces la productividad empieza a disminuir. Esta situación está modelada por una función polinomial de grado 2 (una función cuadrática). El crecimiento de muchas especies animales sigue un patrón predecible, empezando por un periodo de crecimiento rápido, seguido de un periodo de crecimiento lento y luego una etapa de crecimiento acelerado. Esta variabilidad del crecimiento se modela con un polinomio de grado 3.

En el *Enfoque sobre modelado* al final de este capítulo se exploran diferentes maneras de utilizar funciones polinómicas para modelar situaciones del mundo real.

3.1 FUNCIONES Y MODELOS CUADRÁTICOS

■ Trazar la gráfica de funciones cuadráticas usando la forma estándar ■ Valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas ■ Modelado con funciones cuadráticas

Las expresiones de polinomios están definidas en la sección 1.3.

Una función polinomial es una función que está definida por una expresión con polinomios. Entonces una **función polinomial de grado n** es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad a_n \neq 0$$

Ya hemos estudiado funciones polinomiales de grados 0 y 1. Estas son funciones de la forma $P(x) = a_0$ y $P(x) = a_1 x + a_0$, respectivamente, cuyas gráficas son rectas. En esta sección estudiamos funciones de grado 2 que reciben el nombre de funciones cuadráticas.

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Una **función cuadrática** es una función polinomial de grado 2. Entonces, una función cuadrática es una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$$

En esta sección veremos la forma en que las funciones cuadráticas modelan muchos fenómenos reales. Empecemos por analizar las gráficas de funciones cuadráticas.

■ Trazar la gráfica de funciones cuadráticas usando la forma estándar

Para una definición geométrica de parábolas, vea la sección 11.1.

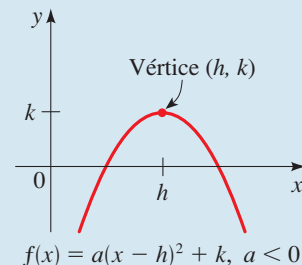
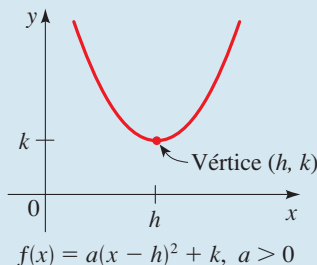
Si tomamos $a = 1$ y $b = c = 0$ en la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ obtenemos la función cuadrática $f(x) = x^2$ cuya gráfica es la parábola graficada en el ejemplo 1 de la sección 2.2. De hecho, la gráfica de cualquier función cuadrática es una **parábola**; puede obtenerse de la gráfica de $f(x) = x^2$ mediante las transformaciones dadas en la sección 2.6.

FORMA ESTÁNDAR DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede expresar en la **forma estándar**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

completando el cuadrado. La gráfica de f es una parábola con **vértice** (h, k) ; la parábola abre hacia arriba si $a > 0$ hacia abajo si $a < 0$.



EJEMPLO 1 ■ Forma estándar de una función cuadrática

Sea $f(x) = 2x^2 - 12x + 13$.

- Expresa f en forma estándar.
- Encuentre el vértice y las intersecciones x y y de f .
- Trace la gráfica de f .
- Encuentre el dominio y el rango de f .

En la sección 1.5 se estudió completar el cuadrado.

SOLUCIÓN

- a) Dado que el coeficiente de x^2 no es 1 debemos factorizar este coeficiente de los términos que contienen x antes de completar el cuadrado.

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 13$$

$$= 2(x^2 - 6x) + 13$$

$$= 2(x^2 - 6x + 9) + 13 - 2 \cdot 9$$

$$= 2(x - 3)^2 - 5$$

Factorice 2 de los términos en x
Complete el cuadrado: sume 9 dentro del paréntesis y reste $2 \cdot 9$ fuera del paréntesis
Factorice y simplifique

La forma estándar es $f(x) = 2(x - 3)^2 - 5$.

- b) De la forma estándar de f podemos ver que el vértice de f es $(3, -5)$. La intersección y es $f(0) = 13$. Para encontrar la intersección x hacemos $f(x) = 0$ y resolvemos la ecuación resultante. Se puede resolver una ecuación cuadrática con cualquiera de los métodos estudiados en la sección 1.5. En este caso se resuelve la ecuación usando la fórmula cuadrática.

$$0 = 2x^2 - 12x + 13$$

Haga $f(x) = 0$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 2 \cdot 13}}{4}$$

Encuentre x usando la fórmula cuadrática

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{10}}{2}$$

Simplifique

Entonces las intersecciones x son $x = (6 \pm \sqrt{10})/2$. Por lo que las intersecciones son aproximadamente 1.42 y 4.58.

- c) La forma estándar nos indica que se obtiene la gráfica de f al tomar la parábola $y = x^2$, desplazándola 3 unidades a la derecha, estirándola en un factor de 2 y moviéndola 5 unidades hacia arriba. En la figura 1 se presenta una gráfica de f , incluyendo las intersecciones x y y que se determinaron en el inciso b).
- d) El dominio de f es el conjunto de todos los números reales $(-\infty, \infty)$. De la gráfica se observa que el rango f es $[-5, \infty)$.

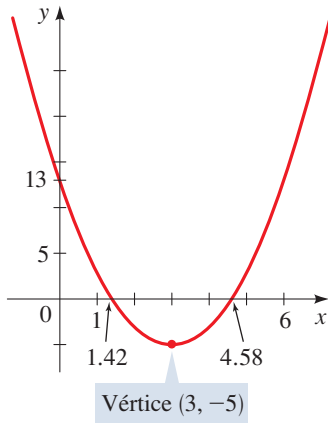


FIGURA 1 $f(x) = 2x^2 - 12x + 13$

Ahora intente realizar el ejercicio 15

Valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

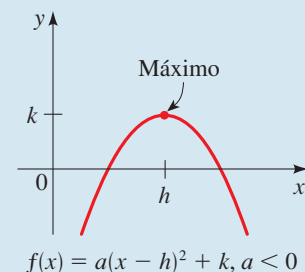
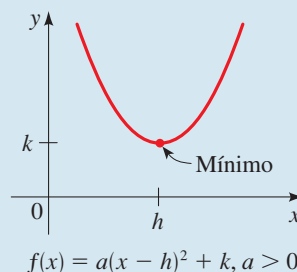
Si una función cuadrática tiene vértice (h, k) , entonces la función tiene un valor mínimo en el vértice si su gráfica abre hacia arriba, y valor máximo en el vértice si su gráfica abre hacia abajo. Por ejemplo, la función cuya gráfica está en la figura 1 tiene valor mínimo 5 cuando $x = 3$, porque el vértice $(3, 5)$ es el punto más bajo en la gráfica.

VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Sea f una función cuadrática con forma estándar $f(x) = a(x - h)^2 + k$. El valor máximo o mínimo de f se presenta en $x = h$.

Si $a > 0$, entonces el **valor mínimo** de f es $f(h) = k$.

Si $a < 0$, entonces el **valor máximo** de f es $f(h) = k$.



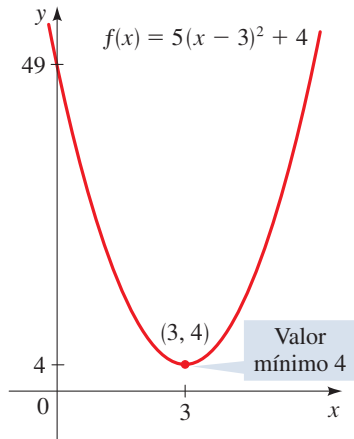


FIGURA 2

EJEMPLO 2 ■ Valor mínimo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = 5x^2 - 30x + 49$.

- Expresar f en forma estándar.
- Trace la gráfica de f .
- Encuentre el valor mínimo de f .

SOLUCIÓN

- a) Para expresar esta función cuadrática en forma estándar completamos el cuadrado.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 5x^2 - 30x + 49 \\
 &= 5(x^2 - 6x) + 49 \\
 &= 5(x^2 - 6x + 9) + 49 - 5 \cdot 9 \\
 &= 5(x - 3)^2 + 4
 \end{aligned}$$

Factorice 5 de los términos con x
Complete el cuadrado: sume 9 dentro del paréntesis, reste $5 \cdot 9$ fuera
Factorice y simplifique

- b) La gráfica es la parábola que tiene su vértice en $(3, 4)$ y abre hacia arriba como se muestra en la figura 2.
- c) Dado que el coeficiente de x^2 es positivo, f tiene un valor mínimo. El valor mínimo es $f(3) = 4$.

Ahora trate de hacer el ejercicio 27

EJEMPLO 3 ■ Valor máximo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = -x^2 + x + 2$.

- Expresar f en forma estándar.
- Trace la gráfica de f .
- Encuentre el valor máximo de f .

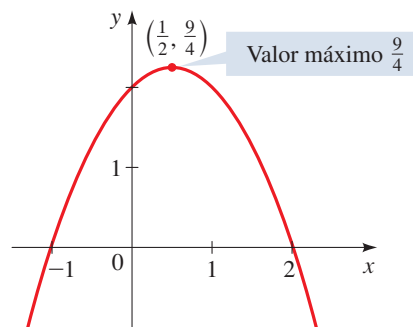
SOLUCIÓN

- a) Para expresar esta función cuadrática en forma estándar completamos el cuadrado.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -x^2 + x + 2 \\
 &= -(x^2 - x) + 2 \\
 &= -(x^2 - x + \frac{1}{4}) + 2 - (-1)\frac{1}{4} \\
 &= -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}
 \end{aligned}$$

Factorice -1 de los términos x
Complete el cuadrado: sume $\frac{1}{4}$ dentro del paréntesis, reste afuera $(-1)\frac{1}{4}$
Factorice y simplifique

- b) De la forma estándar vemos que la gráfica es una parábola que abre hacia abajo y tiene vértice $(\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$. En la figura 3 se traza la gráfica de f .

FIGURA 3 Gráfica de $f(x) = -x^2 + x + 2$

En el ejemplo 3 puede verificar que las intersecciones x de la parábola son -1 y 2 . Estas se obtienen resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.

- c) Puesto que el coeficiente de x^2 es negativo f tiene un valor máximo que es $f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$.

Ahora intente realizar el ejercicio 29

Expresar una función cuadrática en forma estándar nos ayuda a trazar su gráfica, así como a encontrar su valor máximo o mínimo. Si estamos interesados en encontrar el valor máximo o mínimo, entonces existe una fórmula para hacerlo. Esta fórmula se obtiene completando el cuadrado para la función cuadrática general como sigue.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

Factorice a de los términos x

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

Complete el cuadrado: al sumar $\frac{b^2}{4a^2}$ dentro del paréntesis, reste fuera

$$a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

Factorice

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Esta ecuación está en forma estándar con $h = -b/(2a)$ y $k = c - b^2/(4a)$. Dado que el valor máximo o mínimo se presenta en $x = h$, tenemos el siguiente resultado.

VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

El valor máximo o mínimo de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Si $a > 0$, entonces el **valor mínimo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Si $a < 0$, entonces el **valor máximo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

EJEMPLO 4 ■ Encontrar valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

Encuentre el valor máximo o mínimo de estas funciones cuadráticas.

a) $f(x) = x^2 + 4x$

b) $g(x) = -2x^2 + 4x - 5$

SOLUCIÓN

a) Esta es una función cuadrática con $a = 1$ y $b = 4$. Entonces, el valor máximo o mínimo se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$$

Dado que $a > 0$, la función tiene el valor *mínimo*

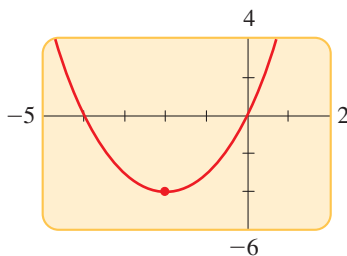
$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) = -4$$

b) Esta es una función cuadrática con $a = -2$ y $b = 4$. Entonces, el valor máximo o mínimo se presenta en

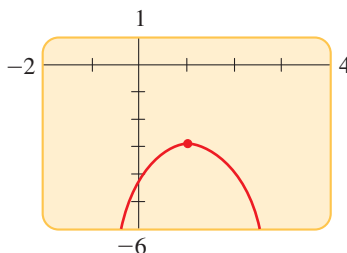
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = 1$$

Como $a < 0$, la función tiene el valor *máximo*

$$f(1) = -2(1)^2 + 4(1) - 5 = -3$$



El valor mínimo ocurre en $x = -2$.



El valor máximo ocurre en $x = 1$.

 **Ahora intente realizar los ejercicios 35 y 37**

■ Modelado con funciones cuadráticas

Estudiamos algunos ejemplos de fenómenos reales que son modelados por funciones cuadráticas. Estos ejemplos y los ejercicios de *Aplicaciones* para esta sección presentan parte de la variedad de situaciones que de manera natural son modelados por funciones cuadráticas.

EJEMPLO 5 ■ Rendimiento máximo en kilometraje de un automóvil

La mayor parte de los autos dan su mejor rendimiento en kilometraje cuando corren a una velocidad relativamente baja. El rendimiento M para cierto auto nuevo está modelado por la función

$$M(s) = -\frac{1}{28}s^2 + 3s - 31 \quad 15 \leq s \leq 70$$

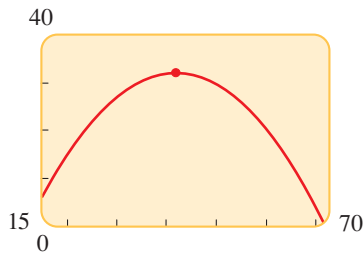
donde s es la rapidez en mi/h y M se mide en mi/gal. ¿Cuál es el mejor rendimiento del auto y a qué velocidad se obtiene?

SOLUCIÓN La función M es una función cuadrática con $a = -\frac{1}{28}$ y $b = 3$. Entonces, su valor máximo ocurre cuando

$$s = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2(-\frac{1}{28})} = 42$$

El valor máximo es $M(42) = -\frac{1}{28}(42)^2 + 3(42) - 31 = 32$. Por tanto, el mejor rendimiento del auto es de 32 mi/gal, cuando está corriendo a 42 mi/h.

 **Ahora intente realizar el ejercicio 55**



El rendimiento máximo de gasolina ocurre a 42 mi/h.

EJEMPLO 6 ■ Maximizar ingresos por venta de boletos

Un equipo de hockey juega en una cancha que tiene capacidad para 15 000 espectadores. Con el precio del boleto a 14 dólares, el promedio de asistencia en juegos recientes ha sido de 9 500. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, el promedio de asistencia aumenta en 1 000.

- Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio de boletos.
- Encuentre el precio que lleve al máximo el ingreso por venta de boletos.
- ¿Qué precio del boleto es tan alto que nadie asiste y por tanto no se generan ingresos?

SOLUCIÓN

- Expresar verbalmente el modelo.** El modelo que buscamos es una función que da el ingreso para cualquier precio del boleto:

$$\text{ingreso} = \text{precio del boleto} \times \text{asistencias}$$



PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Ley de Torricelli

Evangelista Torricelli (1608-1647) es mejor conocido por su invención del barómetro. También descubrió que la rapidez con la que un fluido sale del fondo de un tanque se relaciona con la altura del líquido en el tanque (un principio que ahora se llama Ley de Torricelli). En este proyecto llevamos a cabo un experimento simple para recolectar datos de la rapidez del agua que se escapa por un agujero en la parte inferior de una botella grande de refresco. Luego encontramos una expresión algebraica para la ley de Torricelli ajustando una función cuadrática a los datos que se obtuvieron. Usted puede encontrar el proyecto en www.stewartmath.com.*

* Este material se encuentra disponible en inglés.

Elegir la variable. Hay dos cantidades que varían: el precio del boleto y la asistencia. Dado que la función que buscamos depende del precio, hacemos que

$$x = \text{precio del boleto}$$

Luego, expresamos la asistencia en términos de x .

| Verbalmente | En álgebra |
|--|-----------------------|
| Precio del boleto | x |
| Cantidad que baja el precio del boleto | $14 - x$ |
| Aumento en asistencia | $1000(14 - x)$ |
| Asistencia | $9500 + 1000(14 - x)$ |

Formular el modelo. El modelo que buscamos es la función R que da el ingreso para un determinado precio de boleto x .

$$\text{ingreso} = \text{precio del boleto} \times \text{asistencias}$$

$$R(x) = x \times [9500 + 1000(14 - x)]$$

$$R(x) = x(23500 - 1000x)$$

$$R(x) = 23500x - 1000x^2$$

- b) Utilizar el modelo.** Dado que R es función cuadrática con $a = -1000$ y $b = 23500$, el máximo se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{23500}{2(-1000)} = 11.75$$

Por tanto, el precio de boleto de 11.75 dólares da el máximo ingreso.

- c) Utilizar el modelo.** Deseamos encontrar el precio del boleto por el que $R(x) = 0$.

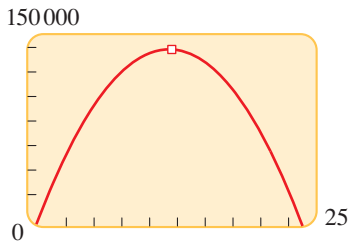
$$23500x - 1000x^2 = 0 \quad \text{Haga que } R(x) = 0$$

$$23.5x - x^2 = 0 \quad \text{Divida entre 1000}$$

$$x(23.5 - x) = 0 \quad \text{Factorice}$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 23.5 \quad \text{Despeje } x$$

Por tanto, de acuerdo con este modelo, el precio del boleto de 23.50 dólares es simplemente demasiado alto; a ese precio, nadie irá a ver jugar a su equipo. (Desde luego, el ingreso también es cero si el precio del boleto es cero.)



La asistencia máxima ocurre cuando el precio del boleto es de 11.75 dólares.

Ahora intente realizar el ejercicio 65

3.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

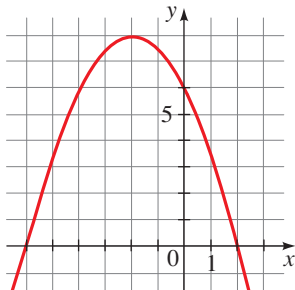
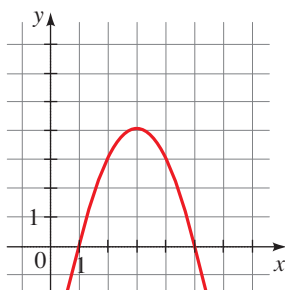
- Para poner la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ en forma estándar completamos el _____.
- La función cuadrática $f(x) = a(x - h)^2 + k$ está en forma estándar.
 - La gráfica de f es una parábola con vértice (____, ____).
 - Si $a > 0$ la gráfica de f abre hacia _____. En este caso $f(h) = k$ es el valor _____ de f .
- Si $a < 0$ la gráfica de f abre hacia _____. En este caso $f(h) = k$ es el valor _____ de f .
- La gráfica de $f(x) = 3(x - 2)^2 - 6$ es una parábola que abre hacia _____, con su vértice en (____, ____), y $f(2) =$ _____ es el valor (mínimo/máximo) _____ de f .
- La gráfica de $f(x) = -3(x - 2)^2 - 6$ es una parábola que abre hacia _____, con su vértice en (____, ____), y $f(2) =$ _____ es el valor (mínimo/máximo) _____ de f .

HABILIDADES

5–8 ■ Gráficas de funciones cuadráticas Se da la gráfica de una función cuadrática f . **a)** Encuentre las coordenadas del vértice y las intersecciones x y y . **b)** Encuentre el valor máximo o mínimo de f . **c)** Encuentre el dominio y rango de f .

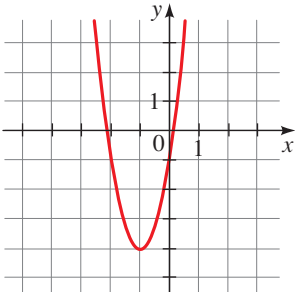
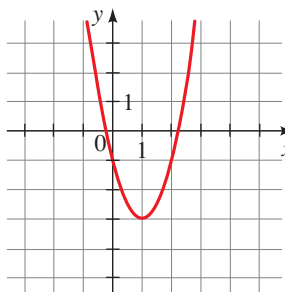
5. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

6. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$



7. $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$

8. $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$



9–24 ■ Trazar la gráfica de funciones cuadráticas Se da una función cuadrática. **a)** Exprese f en la forma estándar. **b)** Encuentre su vértice y sus intersecciones x y y de f . **c)** Trace una gráfica de f . **d)** Encuentre el dominio y rango de f .

9. $f(x) = x^2 - 2x + 3$

10. $f(x) = x^2 + 4x - 1$

11. $f(x) = x^2 - 6x$

12. $f(x) = x^2 + 8x$

13. $f(x) = 3x^2 + 6x$

14. $f(x) = -x^2 + 10x$

15. $f(x) = x^2 + 4x + 3$

16. $f(x) = x^2 - 2x + 2$

17. $f(x) = -x^2 + 6x + 4$

18. $f(x) = -x^2 - 4x + 4$

19. $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$

20. $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$

21. $f(x) = 2x^2 - 20x + 57$

22. $f(x) = 2x^2 + 12x + 10$

23. $f(x) = -4x^2 - 12x + 1$

24. $f(x) = 3x^2 + 2x - 2$

25–34 ■ Valores máximos y mínimos Se da una función cuadrática. **a)** Exprese la función cuadrática en forma estándar. **b)** Trace su gráfica. **c)** Encuentre los valores máximo o mínimo de f .

25. $f(x) = x^2 + 2x - 1$

26. $f(x) = x^2 - 8x + 8$

27. $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$

28. $f(x) = 5x^2 + 30x + 4$

29. $f(x) = -x^2 - 3x + 3$

30. $f(x) = 1 - 6x - x^2$

31. $g(x) = 3x^2 - 12x + 13$

32. $g(x) = 2x^2 + 8x + 11$

33. $h(x) = 1 - x - x^2$

34. $h(x) = 3 - 4x - 4x^2$

35–44 ■ Fórmula para los valores máximos y mínimos Encuentre los valores máximos o mínimos de la función.

35. $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$

36. $f(x) = 3 - 4x - x^2$

37. $f(t) = -3 + 80t - 20t^2$

38. $f(x) = 6x^2 - 24x - 100$

39. $f(s) = s^2 - 1.2s + 16$

40. $g(x) = 100x^2 - 1500x$

41. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$

42. $f(x) = -\frac{x^2}{3} + 2x + 7$

43. $f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2$

44. $g(x) = 2x(x - 4) + 7$



45–46 ■ Valores máximos y mínimos Se da una función cuadrática. **a)** Utilice un dispositivo para trazar gráficas para encontrar los valores máximos o mínimos de la función cuadrática f , redondeada a dos decimales. **b)** Encuentre los valores máximos o mínimos exactos de f , y compárelos con sus respuestas del inciso **a)**.

45. $f(x) = x^2 + 1.79x - 3.21$

46. $f(x) = 1 + x - \sqrt{2}x^2$

HABILIDADES Plus

47–48 ■ Encontrar funciones cuadráticas Determine una función f cuya gráfica es una parábola con el vértice dado y que pasa por el punto dado.

47. Vértice $(2, -3)$; punto $(3, 1)$

48. Vértice $(-1, 5)$; punto $(-3, -7)$

49. Máximo de un polinomio de cuarto grado Determine el valor máximo de la función

$$f(x) = 3 + 4x^2 - x^4$$

[Sugerencia: Haga que $t = x^2$.]

50. Mínimo de un polinomio de sexto grado Determine el valor mínimo de la función

$$f(x) = 2 + 16x^3 + 4x^6$$

[Sugerencia: Haga que $t = x^3$.]

APLICACIONES

51. Altura de una pelota Si una pelota es lanzada directamente hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de t segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

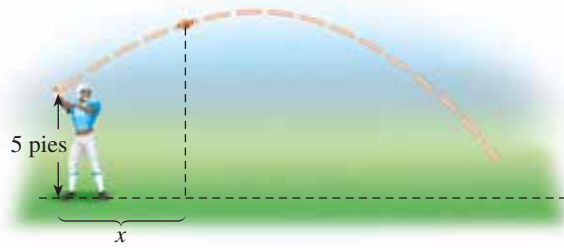
52. Trayectoria de un balón Un balón es lanzado por un campo desde una altura de 5 pies sobre el suelo, a un ángulo de 45° con la horizontal, a una velocidad de 20 pies/s. Puede deducirse por principios físicos que la trayectoria del balón está modelada por la función

$$y = -\frac{32}{(20)^2}x^2 + x + 5$$

donde x es la distancia en pies que el balón ha recorrido horizontalmente.

a) Encuentre la máxima altura alcanzada por el balón.

- b) Encuentre la distancia horizontal que el balón ha recorrido cuando cae al suelo.



- 53. Ingresos** Un fabricante encuentra que el ingreso generado por vender x unidades de cierta mercancía está dado por la función $R(x) = 80x - 0.4x^2$, donde el ingreso $R(x)$ se mide en dólares. ¿Cuál es el ingreso máximo, y cuántas unidades deben fabricarse para obtener este máximo?

- 54. Ventas** Un vendedor de bebidas gaseosas en una conocida playa analiza sus registros de ventas y encuentra que, si vende x latas de gaseosa en un día, su utilidad (en dólares) está dada por

$$P(x) = -0.001x^2 + 3x - 1800$$

¿Cuál es su utilidad máxima por día, y cuántas latas debe vender para obtener una utilidad máxima?

- 55. Publicidad** La efectividad de un anuncio comercial por televisión depende de cuántas veces lo ve una persona. Después de algunos experimentos, una agencia de publicidad encontró que, si la efectividad E se mide en una escala de 0 a 10, entonces

$$E(n) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{90}n^2$$

donde n es el número de veces que una persona ve un anuncio comercial determinado. Para que un anuncio tenga máxima efectividad, ¿cuántas veces debe verlo una persona?

- 56. Productos farmacéuticos** Cuando cierto medicamento se toma oralmente, la concentración del medicamento en el flujo sanguíneo del paciente después de t minutos está dada por $C(t) = 0.06t - 0.0002t^2$, donde $0 \leq t \leq 240$ y la concentración se mide en mg/L. ¿Cuándo se alcanza la máxima concentración de suero, y cuál es esa máxima concentración?

- 57. Agricultura** El número de manzanas producidas por cada árbol en una huerta de manzanos depende de la densidad con la que estén plantados los árboles. Si n árboles se plantan en un acre de terreno, entonces cada árbol produce $900 - 9n$ manzanas. Por tanto, el número de manzanas producidas por acre es

$$A(n) = n(900 - 9n)$$

¿Cuántos árboles deben plantarse por acre para obtener la máxima producción de manzanas?



- 58. Agricultura** En cierto viñedo se encuentra que cada una de las vides produce aproximadamente 10 libras de uvas en una temporada cuando están plantadas alrededor de 700 vides por acre. Por cada vid individual que se planta la producción disminuye alrededor de 1 por ciento. Por tanto, el número de libras de uvas producidas por acre está modelado por

$$A(n) = (700 + n)(10 - 0.01n)$$

donde n es el número de vides adicionales. Encuentre el número de vides que deben plantarse para llevar al máximo la producción de uvas.

- 59–62 ■ Máximos y mínimos** Use las fórmulas de esta sección para dar una solución alternativa al problema indicado en *Enfoque sobre modelado: modelado con funciones* en las páginas 237–244.

59. Problema 21

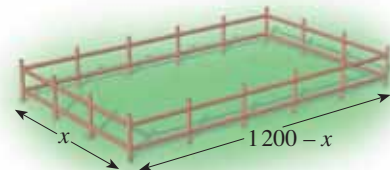
60. Problema 22

61. Problema 25

62. Problema 24

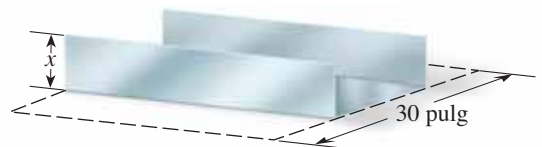
- 63. Cercar un corral para caballos** Carol tiene 2400 pies de cerca para cercar un corral rectangular para caballos.

- a) Encuentre una función que modele el área del corral en términos del ancho x del corral.
b) Encuentre las dimensiones del rectángulo que lleve al máximo el área del corral.



- 64. Hacer un canal para agua de lluvia** Un canal para agua de lluvia se forma doblando hacia arriba los lados de una lámina metálica rectangular de 30 pulgadas de ancho, como se muestra en la figura.

- a) Encuentre una función que modele el área de sección transversal del canal en términos de x .
b) Encuentre el valor de x que lleve al máximo el área de la sección transversal del canal.
c) ¿Cuál es la máxima área de sección transversal del canal?



- 65. Ingresos en un estadio** Un equipo de béisbol juega en un estadio con capacidad para 55 000 espectadores. Con el precio del boleto en 10 dólares, el promedio de asistencia en recientes partidos ha sido de 27 000 personas. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, la asistencia aumentará en 3000 personas.
- a) Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio del boleto.
b) Encuentre el precio que maximiza los ingresos por la venta de boletos.
c) ¿Qué precio del boleto será tan alto como para no generar ingresos?

- 66. Maximizar utilidades** Una sociedad observadora de aves en cierta comunidad hace y vende sencillos comederos para las aves para recaudar dinero para sus actividades de conservación. Los materiales para cada alimentador cuestan 6 dólares, y la sociedad vende un promedio de 20 por semana a \$10 cada uno. La sociedad ha estado considerando elevar el precio, de modo que lleva a cabo un estudio y encuentra que, por cada dólar de aumento, pierde 2 ventas por semana.
- Encuentre una función que modele las utilidades semanales en términos del precio por comedero.
 - ¿Qué precio debe tener cada comedero para maximizar las utilidades? ¿Cuáles son las utilidades máximas semanales?

**DISCUSIÓN ■ DESCUBRIMIENTO ■
DEMOSTRACIÓN ■ REDACCIÓN**

- 67. DESCUBRIMIENTO: Vértice y puntos de intersección x** Sabemos que la gráfica de la función cuadrática $f(x) = (x - m)(x - n)$ es una parábola. Trace una gráfica aproximada del aspecto que tendría esa parábola. ¿Cuáles son los puntos de intersección x de la gráfica de f ? ¿Puede el lector saber de su gráfica cuál es la coordenada x del vértice en términos de m y n ? (Use la simetría de la parábola.) Confirme su respuesta al desarrollar y usar las fórmulas de esta sección.

3.2 FUNCIONES POLINOMIALES Y SUS GRÁFICAS

■ Funciones polinomiales ■ Trazar la gráfica de funciones polinomiales básicas ■ Gráficas de funciones polinomiales: comportamiento final ■ Uso de ceros para trazar la gráfica de polinomios ■ Forma de la gráfica cerca de un cero ■ Máximos y mínimos locales de funciones polinomiales

■ Funciones polinomiales

En esta sección estudiamos funciones polinomiales de cualquier grado. Pero antes de trabajar con estas debemos agregar cierta terminología.

FUNCIONES POLINOMIALES

Una **función polinomial de grado n** es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

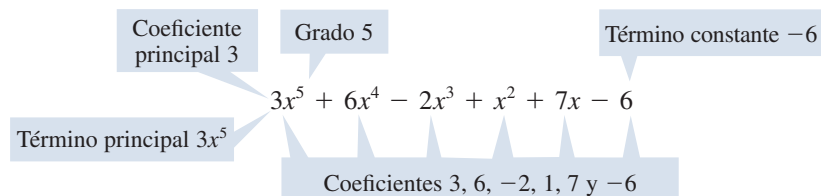
donde n es un entero no negativo y $a_n \neq 0$.

Los números $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ se llaman **coeficientes** del polinomio.

El número a_0 es el **coeficiente constante** o **término constante**.

El número a_n , el coeficiente de la mayor potencia, es el **coeficiente principal** y el término $a_n x^n$ es el **término principal**.

Con frecuencia nos referimos a funciones polinomiales simplemente como *polinomios*. El siguiente polinomio tiene grado 5, coeficiente principal 3 y término constante -6 .



La tabla lista algunos ejemplos más polinomios.

| Polinomio | Grado | Término principal | Término constante |
|---------------------------|-------|-------------------|-------------------|
| $P(x) = 4x - 7$ | 1 | $4x$ | -7 |
| $P(x) = x^2 + x$ | 2 | x^2 | 0 |
| $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 10$ | 3 | $2x^3$ | 10 |
| $P(x) = -5x^4 + x - 2$ | 4 | $-5x^4$ | -2 |

Si un polinomio tiene exactamente un solo término, entonces se llama **monomio**. Por ejemplo, $P(x) = x^3$ y $Q(x) = -6x^5$ son monomios.

■ Trazar la gráfica de funciones polinomiales básicas

Las funciones polinomiales más sencillas son los monomios $P(x) = x^n$, cuyas gráficas se muestran en la figura 1. Como indica la figura, la gráfica de $P(x) = x^n$ tiene la misma forma general que la gráfica de $y = x^2$ cuando n es par y la misma forma general que la gráfica de $y = x^3$ cuando n es impar. Sin embargo, conforme el grado n se hace más grande, las gráficas se hacen más planas alrededor del origen y más pronunciadas en otros lugares.

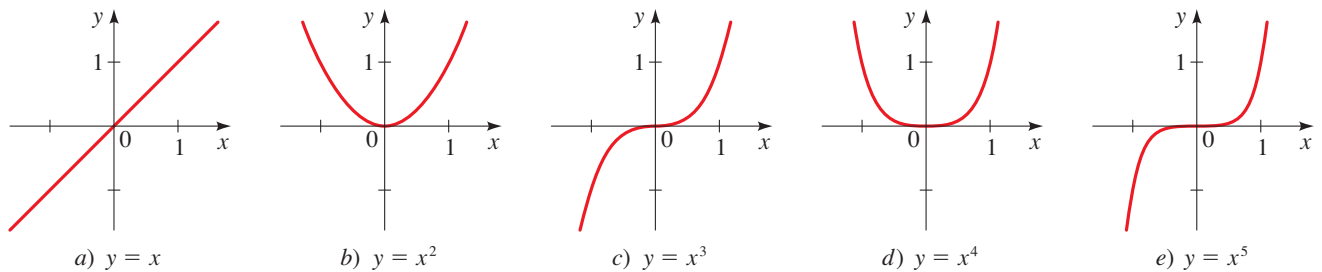


FIGURA 1 Gráficas de monomios

EJEMPLO 1 ■ Transformaciones de monomios

Trace las gráficas de las funciones siguientes.

- a) $P(x) = -x^3$ b) $Q(x) = (x - 2)^4$
 c) $R(x) = -2x^5 + 4$

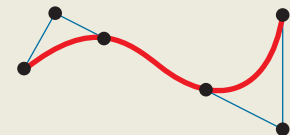
Las matemáticas en el mundo moderno

Curvas paramétricas



Una curva paramétrica es una larga tira de madera que se curva al mismo tiempo que se mantiene fija en ciertos puntos. En el pasado los constructores de barcos empleaban curvas paramétricas para crear la forma curva del casco de un bote y también se usan para hacer las curvas de un piano, de un violín o la boca de salida de una tetera.

Los matemáticos descubrieron que se pueden obtener formas de curvas paramétricas al unir piezas de polinomios. Por ejemplo, se puede hacer que la gráfica de un polinomio cúbico se ajuste a puntos dados si se ajustan los coeficientes del polinomio (vea el ejemplo 10, página 265).



Las curvas obtenidas en esta forma reciben el nombre de curvas paramétricas cúbicas. En los modernos programas de diseño por computadora, como Adobe Illustrator® o Microsoft Paint®, se puede trazar una curva al fijar dos puntos y luego usar el ratón para arrastrar uno o más puntos de ancla. Mover los puntos de ancla significa ajustar los coeficientes de un polinomio cúbico.

- SOLUCIÓN** Usamos las gráficas de la figura 1 y las transformamos usando las técnicas de la sección 2.6.
- a) La gráfica de $P(x) = -x^3$ es la reflexión de la gráfica de $y = x^3$ en el eje x , como se muestra en la figura 2a).
 - b) La gráfica de $Q(x) = (x - 2)^4$ es la gráfica de $y = x^4$ desplazada 2 unidades a la derecha, como se muestra en la figura 2b).
 - c) Empezamos con la gráfica de $y = x^5$. La gráfica de $y = -2x^5$ se obtiene estirando la gráfica verticalmente y reflejándola en el eje x (vea la gráfica azul punteada de la figura 2c)). Por último, la gráfica de $R(x) = -2x^5 + 4$ se obtiene al desplazar 4 unidades hacia arriba (vea la gráfica roja en la figura 2c)).

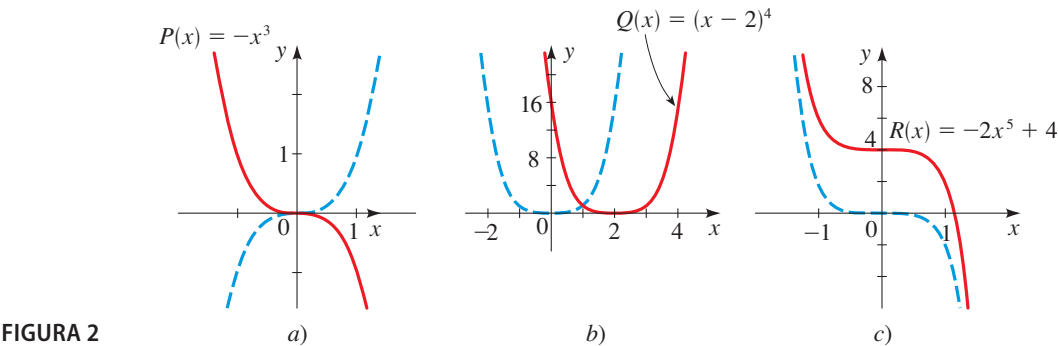


FIGURA 2

 Ahora intente realizar el ejercicio 5

■ Gráficas de funciones polinomiales: comportamiento final

Las gráficas de polinomios de grado 0 o 1 son rectas (secciones 1.10 y 2.5) y las gráficas de polinomios de grado 2 son parábolas (sección 3.1). Mientras mayor sea el grado de un polinomio más complicada puede ser su gráfica. No obstante, la gráfica de una función polinomial es **continua**. Esto significa que la gráfica no tiene puntos singulares ni huecos (vea la figura 3). Además, la gráfica de una función polinomial es una curva suave; esto es, no tiene esquinas ni puntos agudos (cúspides) como se muestra en la figura 3.

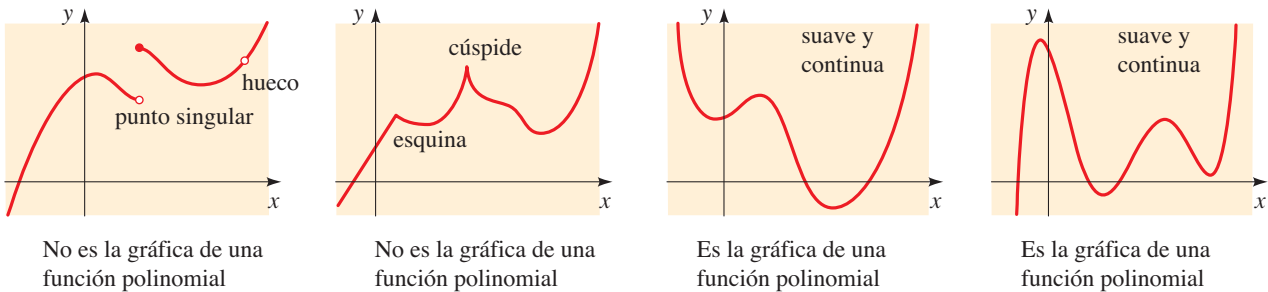


FIGURA 3

El dominio de una función polinomial es el conjunto de todos los números reales, por lo que podemos trazar sólo una pequeña parte de la gráfica. Sin embargo, para valores de x fuera de la parte de la gráfica que hemos dibujado podemos describir el comportamiento de la gráfica.

El **comportamiento final** de un polinomio es una descripción de lo que pasa cuando x se hace grande en la dirección positiva o negativa. Para describir el comportamiento final utilizamos la siguiente **notación de flecha**.

| Símbolo | Significado |
|-------------------------|---|
| $x \rightarrow \infty$ | x se aproxima a infinito, es decir, x crece sin límite |
| $x \rightarrow -\infty$ | x se aproxima a infinito negativo, es decir, x decrece sin límite |

Por ejemplo, el monomio $y = x^2$ en la figura 1b) tiene el siguiente comportamiento final.

$$y \rightarrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow \infty \quad y \quad y \rightarrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow -\infty$$

El monomio $y = x^3$ en la figura 1c) tiene el siguiente comportamiento final.

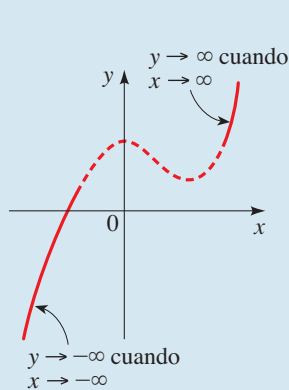
$$y \rightarrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow \infty \quad y \quad y \rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow -\infty$$

Para cualquier polinomio *el comportamiento final está determinado por el término que contiene la mayor potencia de x* , porque cuando x es grande los otros términos son relativamente insignificantes en magnitud. El cuadro siguiente muestra los cuatro posibles tipos de comportamiento final, con base en la potencia superior y el signo de su coeficiente.

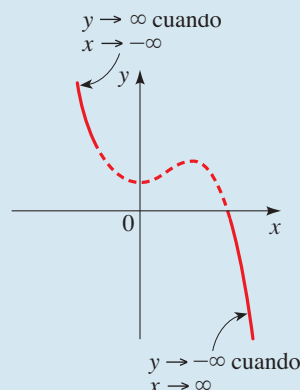
COMPORTAMIENTO FINAL DE POLINOMIOS

El comportamiento final del polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ está determinado por el grado n y el signo del coeficiente principal a_n , como se indica en las gráficas siguientes.

P tiene grado impar

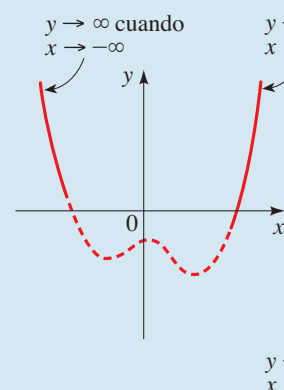


Coeficiente principal positivo

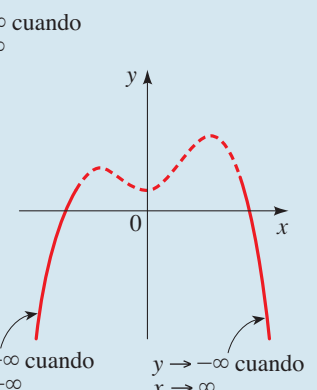


Coeficiente principal negativo

P tiene grado par



Coeficiente principal positivo



Coeficiente principal negativo

EJEMPLO 2 ■ Comportamiento final de un polinomio

Determine el comportamiento final del polinomio

$$P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 4x - 7$$

SOLUCIÓN El polinomio P tiene grado 4 y coeficiente principal -2 . Por tanto, P tiene grado *par* y coeficiente principal *negativo*, de modo que tiene el siguiente comportamiento final.

$$y \rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow \infty \quad y \quad y \rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow -\infty$$

La gráfica de la figura 4 muestra el comportamiento final de P .

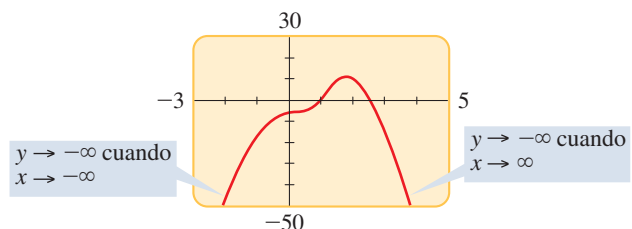


FIGURA 4 $P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 4x - 7$

EJEMPLO 3
Comportamiento final de un polinomio

- a) Determine el comportamiento final del polinomio $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$.
- b) Confirme que P y su término principal $Q(x) = 3x^5$ tienen el mismo comportamiento final al trazar la gráfica de estas funciones juntas.

SOLUCIÓN

- a) Dado que P tiene grado impar y coeficiente principal positivo tiene el siguiente comportamiento final.
- $$y \rightarrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow \infty \qquad y \rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow -\infty$$
- b) La figura 5 muestra las gráficas de P y Q en rectángulos de vista progresivamente más grandes. Mientras más grande sea el rectángulo de vista más se parecen las gráficas. Esto confirma que tienen el mismo comportamiento final.

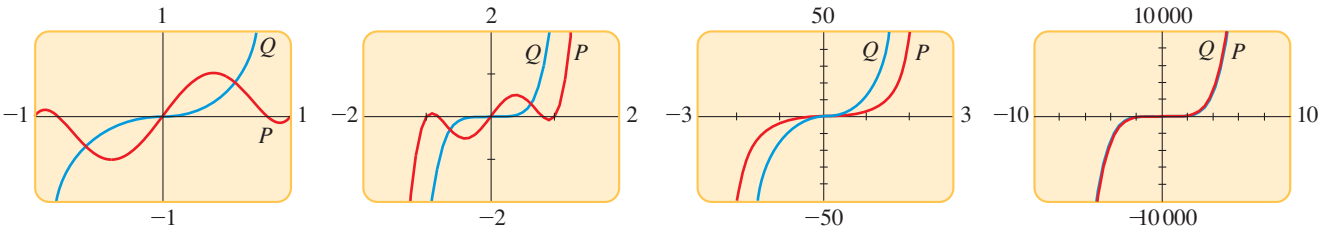


FIGURA 5
 $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$
 $Q(x) = 3x^5$

Ahora intente realizar el ejercicio 45

Para ver algebraicamente por qué P y Q del ejemplo 3 tienen el mismo comportamiento final factorice P como sigue y compárelo con Q .

$$P(x) = 3x^5 \left(1 - \frac{5}{3x^2} + \frac{2}{3x^4} \right) \qquad Q(x) = 3x^5$$

Cuando x es grande, los términos $5/(3x^2)$ y $2/(3x^4)$ están cercanos a 0 (vea el ejercicio 83 en la página 12). Entonces, para x grande, tenemos

$$P(x) \approx 3x^5(1 - 0 - 0) = 3x^5 = Q(x)$$

Por tanto, cuando x es grande, P y Q tienen aproximadamente los mismos valores. También podemos ver esto numéricamente si hacemos una tabla como la siguiente.

| x | $P(x)$ | $Q(x)$ |
|-----|-------------|-------------|
| 15 | 2 261 280 | 2 278 125 |
| 30 | 72 765 060 | 72 900 000 |
| 50 | 936 875 100 | 937 500 000 |

Por el mismo razonamiento podemos demostrar que el comportamiento final de cualquier polinomio está determinado por su término principal.

Uso de ceros para trazar la gráfica de polinomios

Si P es una función polinomial, entonces c se denomina **cerro** o raíz de P si $P(c) = 0$. En otras palabras, los ceros de P son las soluciones de la ecuación polinomial $P(x) = 0$. Observe que si $P(c) = 0$, entonces la gráfica de P tiene un punto de intersección x en $x = c$, de modo que los puntos de intersección x de la gráfica son los ceros de la función.

Precálculo. Matemáticas para el cálculo, séptima edición proporciona a los estudiantes las herramientas necesarias para prepararlos en esta materia. El estudiante de cálculo requiere no sólo conocimientos técnicos, sino también una clara comprensión de los conceptos y es por ello que esta obra promueve que la *comprensión conceptual* y los *conocimientos técnicos* vayan de la mano y se refuercen entre sí.

Sus alumnos aprenderán a valorar el poder y la utilidad de las matemáticas para *modelar* el mundo real, ya que todos los temas que conforman este texto están encaminados a alcanzar dicho objetivo, además de estar organizados de tal forma que abarcan diferentes estilos de enseñanza. En particular, cada tema se presenta algebraicamente, gráficamente, numéricamente y verbalmente enfatizando las relaciones entre cada tipo de representación.

El propósito de esta séptima edición de *Precálculo. Matemáticas para el cálculo* es reafirmar la utilidad del libro como herramienta de enseñanza para los profesores y, para los estudiantes, como herramienta de aprendizaje.