Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

ENCUENTRO 6.1

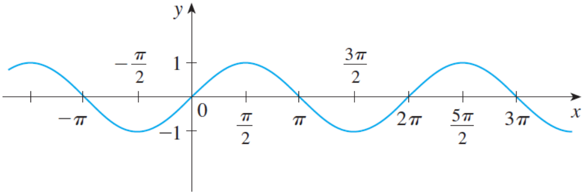
Continuación Sección 1.2:
Funciones esenciales: trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

REFERENCIAS

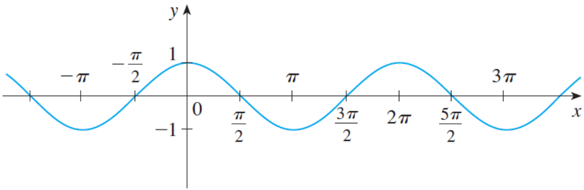
- Saberes previos
- Trabajo en el curso de Geometría Analítica

Funciones trigonométricas

La trigonometría y las funciones trigonométricas se repasan en la página de referencia 2 y también en el apéndice D. En Cálculo, por convención, siempre se utilizan medidas en radianes (excepto cuando se indique lo contrario). Por ejemplo, cuando utilizamos la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, se sobreentiende que sen x significa el seno de un ángulo cuya medida en radianes es x. Así, las gráficas de las funciones seno y coseno son como se muestra en la figura 18.



a) $f(x) = \operatorname{sen} x$



b) $g(x) = \cos x$

Observe que para las funciones seno y coseno el dominio es $(-\infty, \infty)$, y el rango es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Por tanto, para todos los valores de x, tenemos

$$\boxed{-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$$

o bien, en términos de valor absoluto,

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant 1 \qquad |\cos x| \leqslant 1$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

También, los ceros de la función seno se producen en los múltiplos enteros de π; es decir,

$$\operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{cuando} \qquad x = n\pi \qquad \text{donde} \qquad n \text{ es un entero}$$

Una propiedad importante de las funciones seno y coseno es que son funciones periódicas con periodo 2π. Esto significa que, para todos los valores de x,

$$\boxed{\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x}$$

La función tangente está relacionada con las funciones seno y coseno por la ecuación

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

y su gráfica se muestra en la figura 19. Está indefinida siempre que $\cos x = 0$, es decir, cuando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$ Su rango es $(-\infty, \infty)$. Observe que la función tangente tiene periodo π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \text{para toda } x$$

Ejercicio

Teniendo en cuenta las identidades básicas y el dominio de una función cociente hallar el dominio de

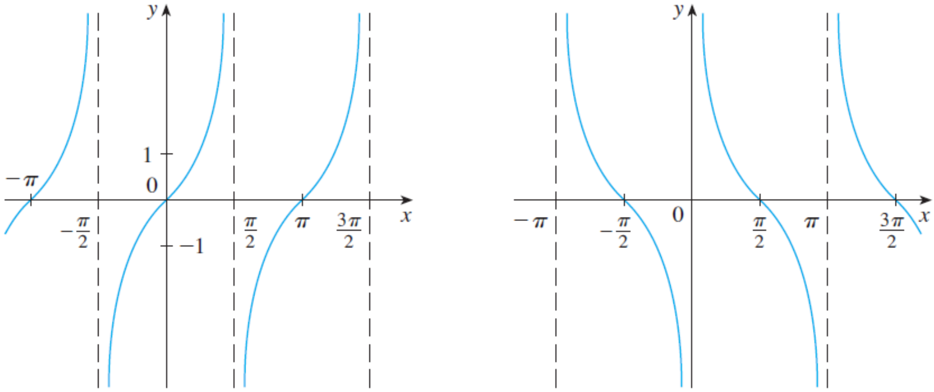
1. $y = \tan x$
2. $y = \cot x$
3. $y = \sec x$
4. $y = \csc x$

¿Cuál es el periodo de cada función?

Las gráficas de las cuatro funciones trigonométricas restantes se ilustran en la figura 15 y sus dominios se indican ahí. Note que tangente y cotangente tienen rango $(-\infty, \infty)$, mientras que cosecante y secante tienen rango $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Las cuatro funciones son periódicas: tangente y cotangente tienen periodo π, en tanto que cosecante y secante tienen periodo 2π.

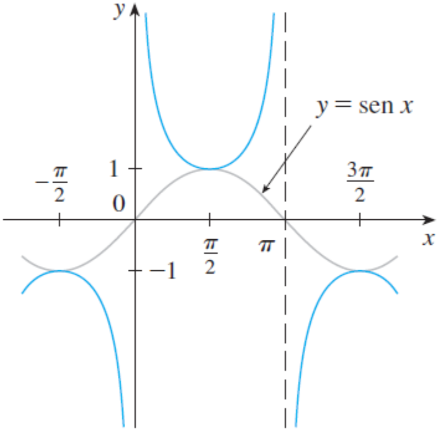
Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

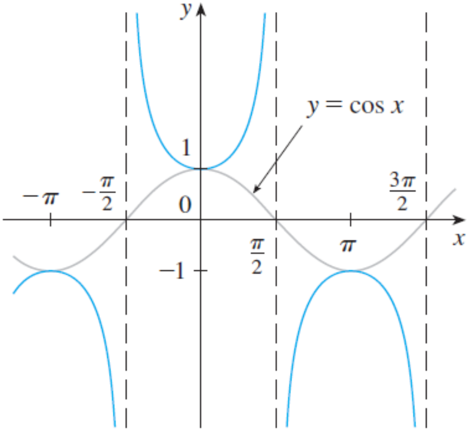


a) $y = \tan x$

b) $y = \cot x$



c) $y = \csc x$



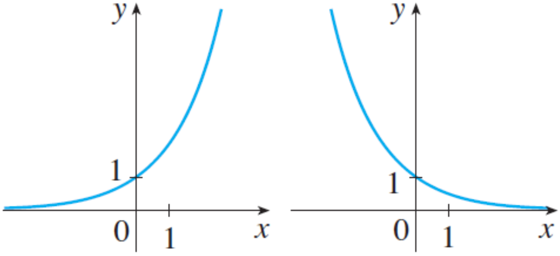
d) $y = \sec x$

Funciones exponenciales

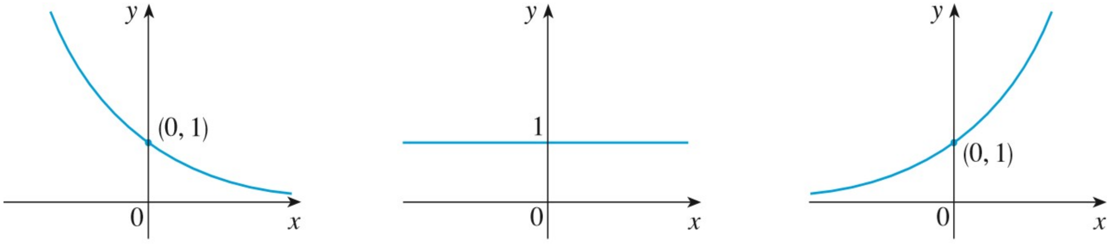
Una función de la forma $f(x) = a^x$, donde $a > 0$ y diferente de 1 se denomina una **función exponencial** (con base a). Todas las funciones exponenciales tienen dominio $(-\infty, \infty)$ y rango $(0, \infty)$ razón por la cual una función exponencial nunca toma el valor 0. Cuando la base a es igual a e (número de Euler), la función se llama **función exponencial natural**.

(Volveremos a ellas en la sección 1.4)

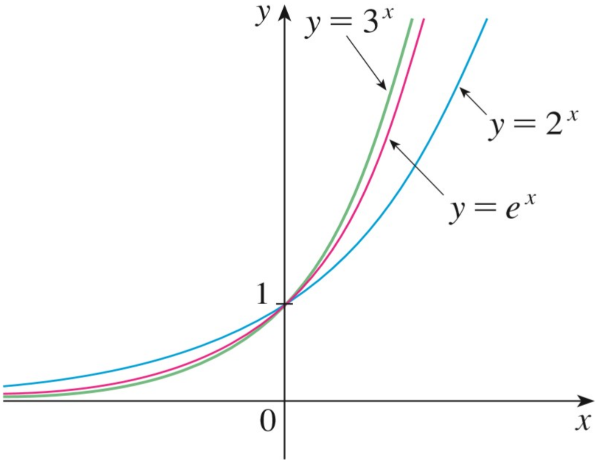
Veamos algunas gráficas y propiedades.



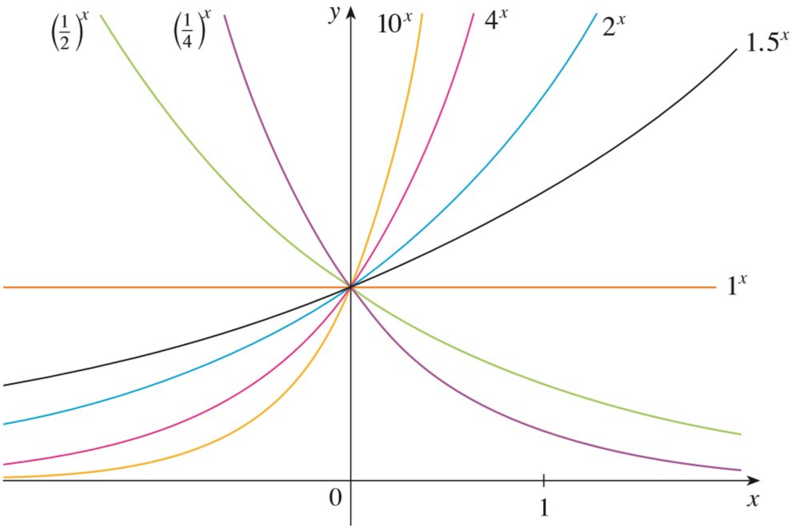
a) $y = 2^x$ b) $y = (0.5)^x$

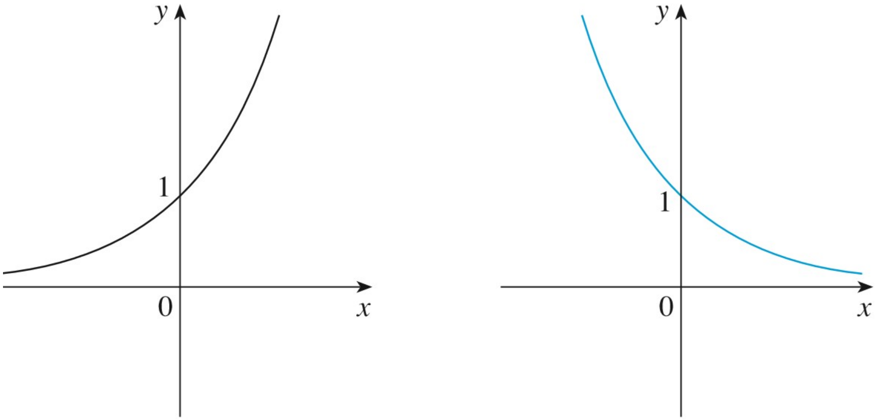


(a) $y = b^x$, $0 < b < 1$ (b) $y = 1^x$ (c) $y = b^x$, $b > 1$



y
$y = 3^x$
$y = 2^x$
$y = e^x$
1
0
x


$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
$\left(\frac{1}{4}\right)^x$
y
10^x
4^x
2^x
1.5^x
1^x
0
1
x



(a) $y = e^{x}$ (b) $y = e^{-x}$

Funciones logarítmicas

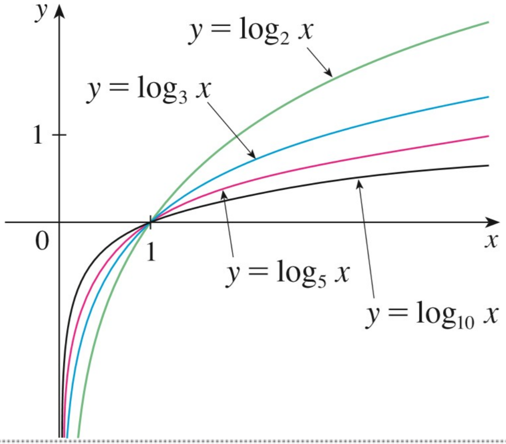
Son funciones de la forma $f(x) = \log_a x$, donde la base a es una constante positiva.

Las funciones logarítmicas son las inversas de las funciones exponenciales.

El dominio es $(0,\infty)$ y el rango es $(-\infty,\infty)$.

(Volveremos a ellas en la sección 1.5)

Veamos algunas gráficas y propiedades.



EJEMPLO Clasifique las siguientes funciones como uno de los tipos de funciones que hemos discutido.

a) $f(x) = 5^x$

b) $g(x) = x^5$

c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$

d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

SOLUCIÓN

a) $f(x) = 5^x$ es una función exponencial. (La x es el exponente.)

b) $g(x) = x^5$ es una función potencia. (La x es la base.) Podría considerarse como una función polinomial de grado 5.

c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ es una función algebraica.

d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$ es una función polinomial de grado 4.

Ejercicios

1-2 Clasifique cada función como una función potencia, función raíz, polinomial (establezca su grado), función racional, función algebraica, función trigonométrica, función exponencial o función logarítmica.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

1. a) $f(x) = \log_2 x$ b) $g(x) = \sqrt[4]{x}$

c) $h(x) = \dfrac{2x^3}{1 - x^2}$ d) $u(t) = 1 - 1.1t + 2.54t^2$

e) $v(t) = 5^t$ f) $w(\theta) = \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta$

2. a) $y = \pi^x$ b) $y = x^\pi$

c) $y = x^2(2 - x^3)$ d) $y = \tan t - \cos t$

e) $y = \dfrac{s}{1 + s}$ f) $y = \dfrac{\sqrt{x^3 - 1}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

5–6 Find the domain of the function.

5. $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$

6. $g(x) = \dfrac{1}{1 - \tan x}$

5. a) Encuentre una ecuación para la familia de funciones lineales con pendiente 2 y esboce varios miembros de la familia.
   b) Encuentre una ecuación para la familia de funciones lineales tal que $f(2) = 1$ y esboce varios miembros de la familia.
   c) ¿Qué función pertenece a ambas familias?

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

6. ¿Qué tienen en común todos los miembros de la familia de funciones lineales $f(x) = 1 + m(x + 3)$? Esboce varios miembros de la familia.

7. ¿Qué tienen en común todos los miembros de la familia de funciones lineales $f(x) = c - x$? Esboce varios miembros de la familia.

13. La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por la función lineal $F = \frac{9}{5}C + 32$.
   a) Trace la gráfica de esta función.
   b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa? ¿Cuál es la intersección con el eje F y qué representa?

ACTIVIDAD DEL ENCUENTRO

Emplear Geogebra y graficar cinco de las anteriores funciones

EJERCICIO 1

Encuentre el dominio de la función $f(x) = \frac{cosx}{1-senx}$

Solución:

Para que $f(x) \in \mathbb{R}$ $\quad 1 - senx \neq 0$

$1 - senx = 0 \qquad 1 = senx \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Dominio: $\left\{x/x \neq \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$

EJERCICIO 2

Encuentre el dominio de la función $g(x) = \frac{1}{1-tanx}$

Solución:

Para que $g(x) \in \mathbb{R}$ $\quad 1 - tanx \neq 0$

Además $tanx$ debe estar definida

$tanx = 1 \quad\quad x = \frac{\pi}{4} + n\pi$

Dominio: $\left\{x/x \neq \frac{\pi}{4} + n\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$

EJERCICIO 3

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

¿Qué tienen en común todos los miembros de la familia de funciones lineales $f(x) = 1 + m(x+3)$?

Solución:

$$f(x) = 1 + m(x+3)$$
$$f(x) - 1 = m\big(x - (-3)\big)$$

Comparando con: $y - y_0 = m(x - x_0)$ se concluye que la familia de funciones lineales pasa por $(-3,1)$

EJERCICIO 4

La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por la función lineal $F = \frac{9}{5}C + 32$

a) Trace la gráfica de esta función.

b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?

c) ¿Cuál es la intersección con el eje F y qué representa?

Solución:

b) $m = \frac{9}{5}$ representa que F incrementa $\frac{9}{5}$ por cada incremento de $1°\mathrm{C}$

c) El intercepto con el eje F es 32, representa la temperatura en $°\mathrm{F}$ correspondiente a 0 $°\mathrm{C}$

TAREA

1. Analizar los ejemplos de la sección 1.2 del texto guía.
2. Realizar los ejercicios 1 al 9 de la sección 1.2 del texto guía.
3. Graficar cada una de las funciones presentadas empleando *Geogebra*

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Graficar cada una de las funciones presentadas empleando *Geogebra*

REFERENCIA

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín