Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

ENCUENTRO 14.3

Sección 4.1: Valores máximos y mínimos, teorema de los valores extremos, extremos locales, teorema de Fermat, punto crítico, método del intervalo cerrado.

Valores máximos y mínimos

Algunas de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial son los *problemas de optimización*, en los cuales se requiere encontrar la manera óptima (la mejor) para hacer algo. Algunos ejemplos de los problemas que resolveremos en este capítulo son.

- ¿Cuál debe ser la forma de una lata que minimice los costos de fabricación?
- ¿Cuá1 es la aceleración máxima de un trasbordador espacial? (Ésta es una importante pregunta para los astronautas que tienen que soportar los efectos de la aceleración.)
- ¿Cuál es el radio de una tráquea contraída que expele aire del modo más rápido al toser?
- ¿Qué ángulo deben formar los vasos sanguíneos al ramificarse, de modo que se minimice la energía consumida por el corazón al bombear la sangre?

Estos problemas pueden reducirse a encontrar los valores máximo o mínimo de una función. Para empezar, primero explicaremos exactamente lo que son estos valores.

En la figura 1, se muestra la gráfica de una función en la que el punto más alto es $(3, 5)$. En otras palabras, el valor más grande de f es $f(3) = 5$. Por otro lado, el valor más pequeño es $f(6) = 2$. Decimos que $f(3) = 5$ es el *máximo absoluto* de f y $f(6) = 2$ es el *mínimo absoluto*. En general, usamos la siguiente definición:

1 Definición Sea c un número en el dominio D de una función f. Entonces $f(c)$ es el

- valor **máximo absoluto** de f sobre D si $f(c) \geqslant f(x)$ para toda x en D.
- valor **mínimo absoluto** de f sobre D si $f(c) \leqslant f(x)$ para toda x en D.

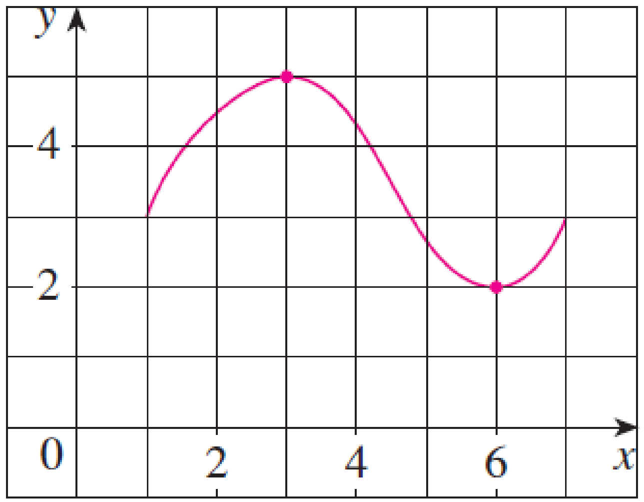


FIGURA 1

Un máximo o mínimo absolutos se les llama a veces máximo o mínimo **global**. Los valores máximo y mínimo de f se llaman **valores extremos** de f.

La figura 2 muestra la gráfica de una función f con máximo absoluto en $x = d$ y mínimo absoluto en $x = a$. Observe que $(d, f(d))$ es el punto más alto sobre la gráfica y $(a, f(a))$ es el punto más bajo. En la figura 2, si consideramos sólo valores de x cercanos a b [p. ej., si restringimos nuestra atención al intervalo (a, c)], entonces $f(b)$ es el más grande de estos valores de $f(x)$ y se llama *valor máximo local* de f. Por otro lado, $f(c)$ se llama valor *mínimo local* de f porque $f(c) \leqslant f(x)$ para x cercana a c [en el intervalo (b, d), por ejemplo]. La función f también tiene un mínimo local en $x = e$. En general, tenemos la siguiente definición.

$\boxed{2}$ **Definición** El número $f(c)$ es un

- valor **máximo local** de f si $f(c) \geqslant f(x)$ cuando x está cerca de c.
- valor **mínimo local** de f si $f(c) \leqslant f(x)$ cuando x está cerca de c.

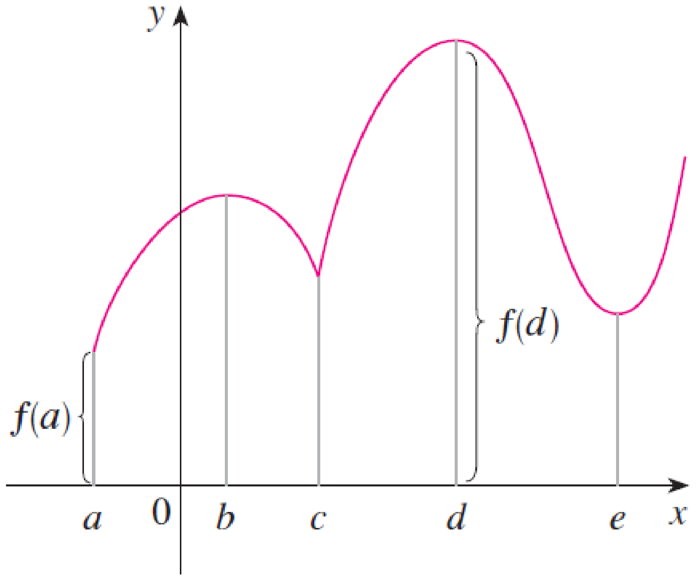


FIGURA 2
Mínimo absoluto $f(a)$, máximo absoluto $f(d)$, mínimos locales $f(c)$, $f(e)$, máximos locales $f(b)$, $f(d)$

En la definición 2 (y en otros lugares), si decimos que algo es cierto **cerca** de c, queremos decir que es cierto en algún intervalo abierto que contiene a c. Por ejemplo, en la figura 3 vemos que $f(4) = 5$ es un mínimo local porque es el menor valor de f en el intervalo I. No es el mínimo absoluto porque $f(x)$ tiene valores menores cuando x está cerca de 12 (en el intervalo de K, por ejemplo). De hecho $f(12) = 3$ es un mínimo local y el mínimo absoluto. De modo similar, $f(8) = 7$ es un máximo local, pero no el máximo absoluto porque f toma valores más grandes cerca de 1.

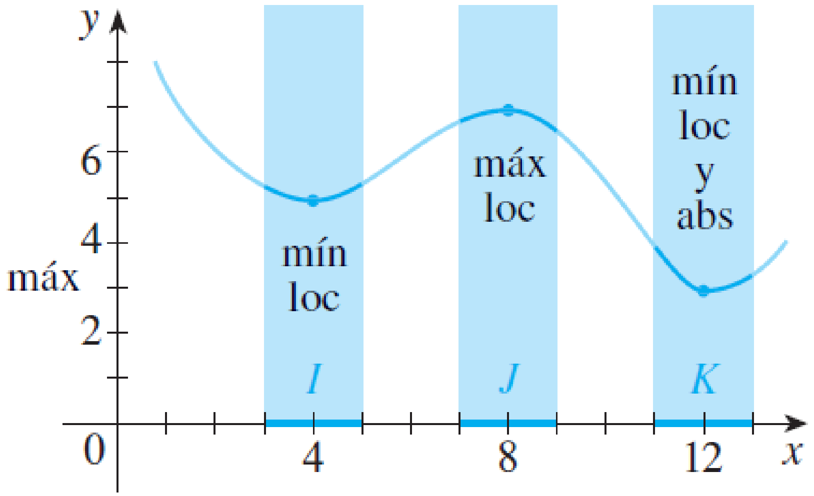


FIGURA 3

EJEMPLO 1 La función $f(x) = \cos x$ toma su valor máximo (local y absoluto) igual a 1, infinitas veces, ya que $\cos 2n\pi = 1$ para cualquier entero n y $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ para todo x. Del mismo modo, $\cos(2n + 1)\pi = -1$ es su valor mínimo, donde n es cualquier entero.

EJEMPLO 2 Si $f(x) = x^2$, entonces $f(x) \geqslant f(0)$ porque $x^2 \geqslant 0$ para toda x. Por tanto, $f(0) = 0$ es el valor mínimo absoluto (y local) de f. Esto corresponde al hecho de que el origen es el punto más bajo sobre la parábola $y = x^2$. (Véase la figura 4.) Sin embargo, no existe el punto más alto sobre la parábola, por lo que esta función no tiene valor máximo.

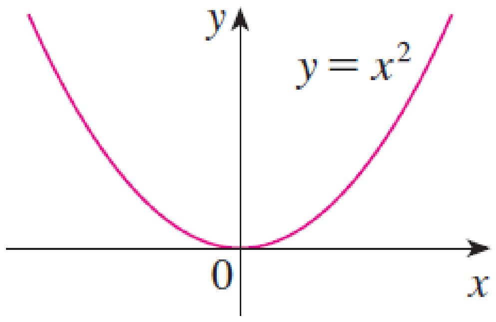


FIGURA 4

Valor mínimo $= 0$. No hay máximo

EJEMPLO 3 En la gráfica de la función $f(x) = x^3$, que se muestra en la figura 5, se ve que no tiene valor máximo absoluto ni valor mínimo absoluto. De hecho, tampoco posee valores extremos locales.

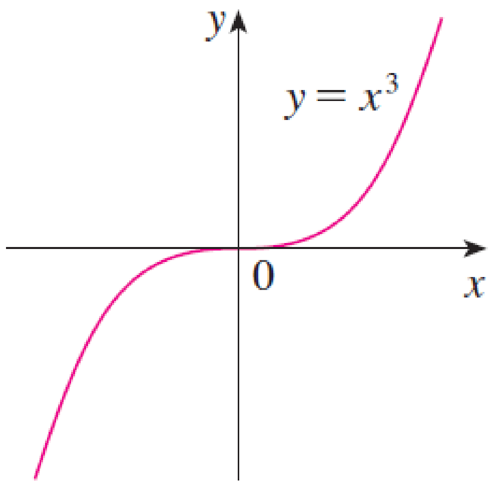


FIGURA 5

No hay mínimo ni máximo

V **EJEMPLO 4** La gráfica de la función

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 4$$

se muestra en la figura 6. Podemos observar que $f(1) = 5$ es un máximo local, en tanto que el máximo absoluto es $f(-1) = 37$. (Este máximo absoluto no es un máximo local porque se presenta en un punto extremo.) Asimismo, $f(0) = 0$ es un mínimo local y $f(3) = -27$ es un mínimo tanto local como absoluto. Observe que f no tiene valor local ni máximo absoluto en $x = 4$.

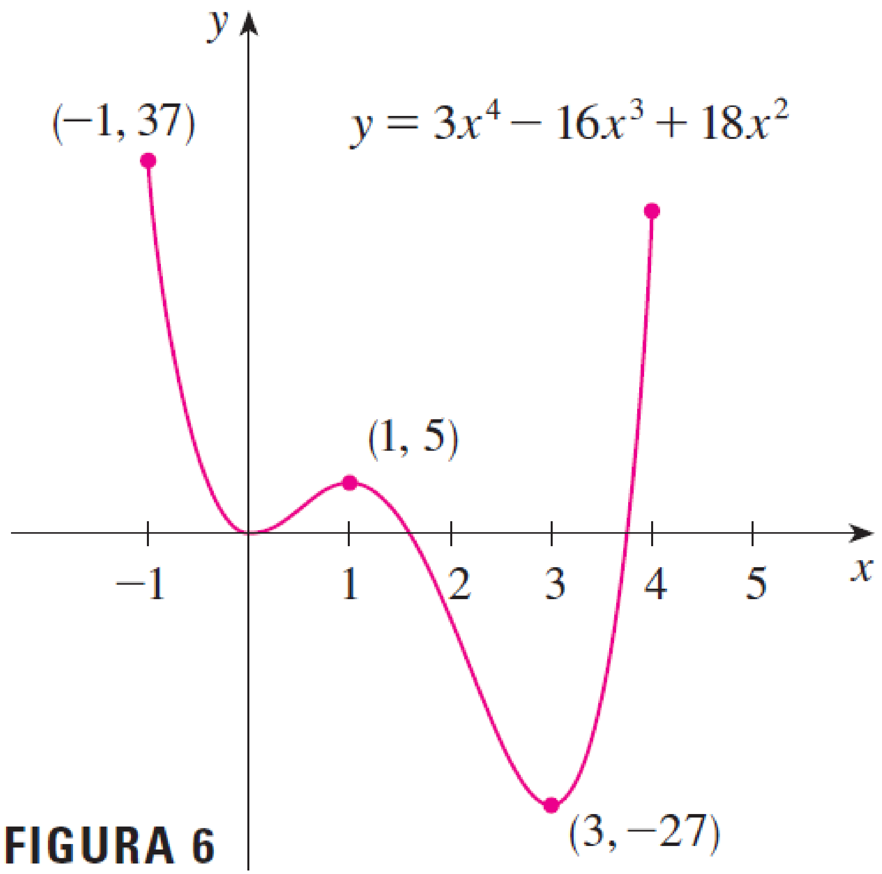


FIGURA 6

En el teorema siguiente se dan las condiciones con que se garantiza que una función posea valores extremos.

3 Teorema del valor extremo Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en $[a, b]$.

En la figura 7 se ilustra el teorema del valor extremo. Observe que un valor extremo se puede tomar más de una vez.

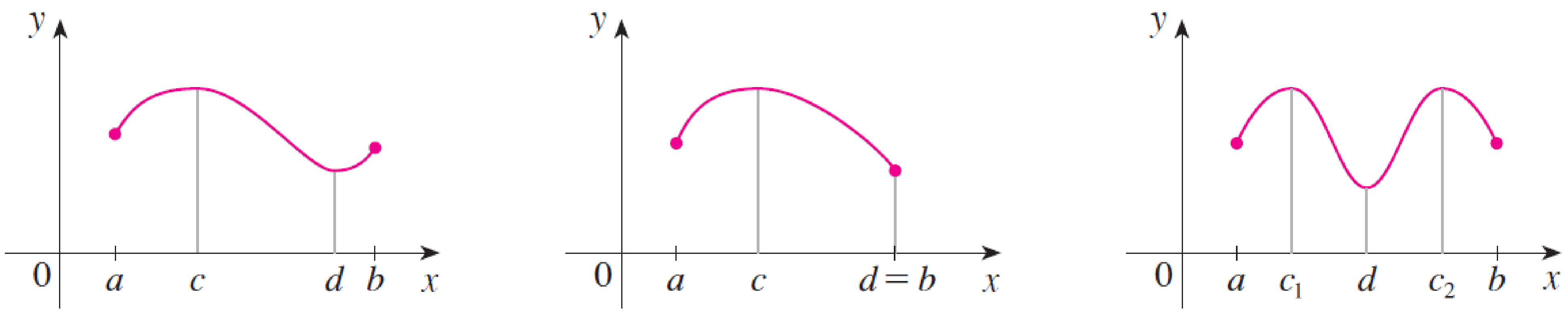


FIGURA 7

En las figuras 8 y 9 se muestra que una función no tiene que poseer valores extremos si no se satisface cualquiera de las dos hipótesis (continuidad o intervalo cerrado) del teorema del valor extremo.

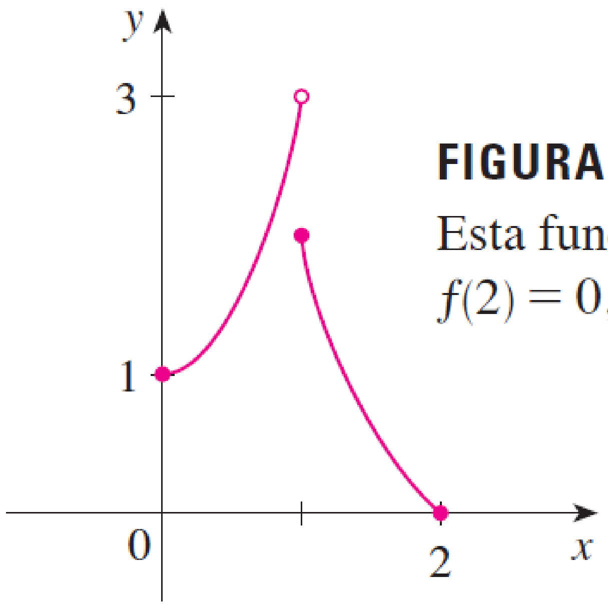


FIGURA 8
Esta función tiene un valor mínimo $f(2) = 0$, pero no tiene valor máximo.

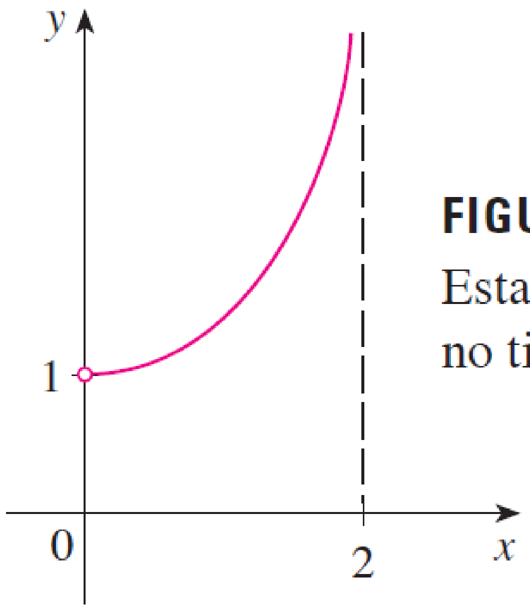


FIGURA 9
Esta función continua g no tiene máximo ni mínimo.

La función f, cuya gráfica se muestra en la figura 8, está definida sobre el intervalo cerrado $[0, 2]$, pero no tiene valor máximo. (Observe que el rango de f es $[0, 3)$. La función toma valores arbitrariamente cercanos a 3, pero nunca alcanza el valor 3.) Esto no contradice el teorema del valor extremo porque f no es continua. [Sin embargo, una función discontinua *pudiera* tener valores máximo y mínimo.

La función g que se muestra en la figura 9 es continua sobre el intervalo abierto $(0, 2)$, pero no tiene valor máximo ni mínimo. [El rango de g es $(1, \infty)$. La función toma valores arbitrariamente grandes.] Esto no contradice el teorema del valor extremo porque el intervalo $(0, 2)$ no es cerrado.

El teorema del valor extremo señala que una función continua sobre un intervalo cerrado tiene un valor máximo y uno mínimo, pero no indica cómo hallarlos. Empecemos por buscar valores extremos locales.

En la figura 10 se muestra la gráfica de una función f con un máximo local en $x = c$ y un mínimo local en $x = d$. Parece que en los puntos máximo y mínimo la recta tangente es horizontal y, por consiguiente, tiene pendiente 0. Sabemos que la derivada es la pendiente de la recta tangente, de modo que parece que $f'(c) = 0$ y $f'(d) = 0$. En el teorema siguiente se afirma que esto siempre se cumple para las funciones derivables.

4 Teorema de Fermat Si f tiene un máximo o un mínimo local en $x = c$, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$

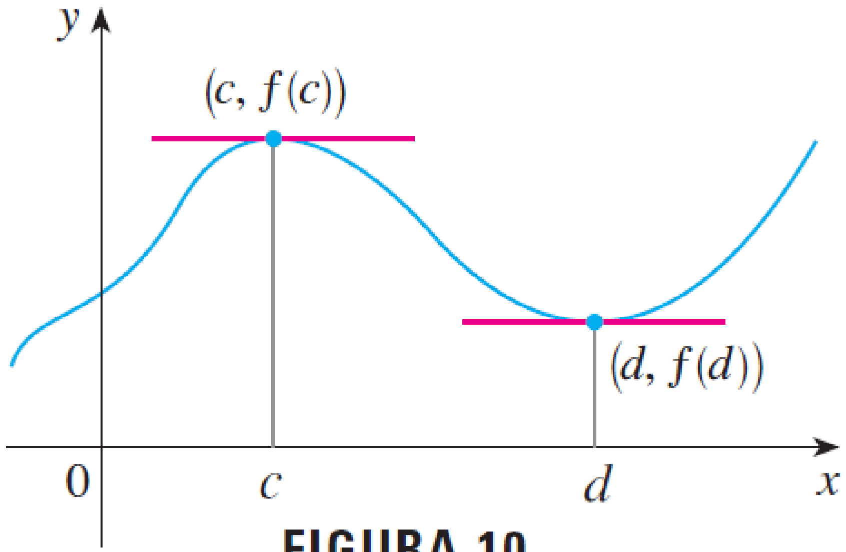


FIGURA 10

Los ejemplos siguientes advierten contra la interpretación excesiva del teorema de Fermat. No podemos esperar localizar valores extremos haciendo simplemente $f'(x) = 0$ y resolviendo para x.

EJEMPLO 5 Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$, de modo que $f'(0) = 0$. Pero f no tiene máximo o mínimo en $x = 0$, como puede ver en la gráfica de la figura 11. (0 bien, observe que $x^3 > 0$ para $x > 0$, pero $x^3 < 0$ para $x < 0$. El hecho de que $f'(0) = 0$ sólo significa que la curva $y = x^3$ tiene una recta tangente horizontal en $(0, 0)$. En lugar de tener un máximo o un mínimo en $(0, 0)$, allí cruza la curva su recta tangente horizontal.

EJEMPLO 6 La función $f(x) = |x|$ muestra un valor mínimo (local y absoluto) en $x = 0$, pero ese valor no puede determinarse haciendo $f'(x) = 0$ porque, como ya se demostró en el ejemplo 5 de la sección 2.8, $f'(0)$ no existe (véase la figura 12).

PRECAUCIÓN Los ejemplos 5 y 6 demuestran que debe ser cuidadoso al aplicar el teorema de Fermat. El ejemplo 5 demuestra que aun cuando $f'(c) = 0$, no necesariamente hay un máximo o un mínimo en $x = c$. (En otras palabras, el inverso del teorema de Fermat es en general falso.) Además, podría haber un valor extremo aun cuando $f'(c)$ no exista, (como en el ejemplo 6).

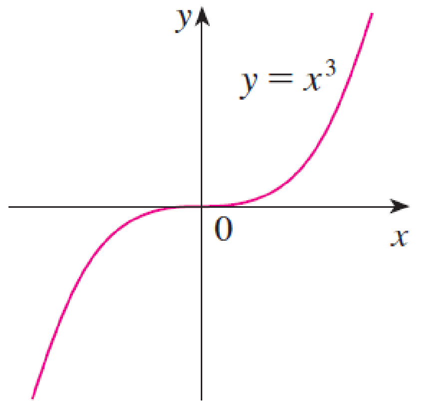


FIGURA 11
Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(0) = 0$, pero f no tiene máximo ni mínimo.

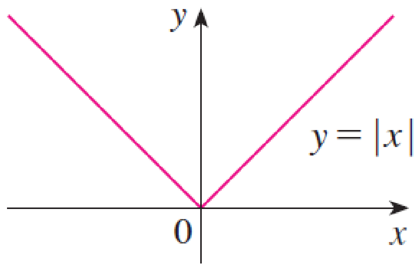


FIGURA 12
Si $f(x) = |x|$, entonces $f(0) = 0$ es un valor mínimo, pero $f'(0)$ no existe.

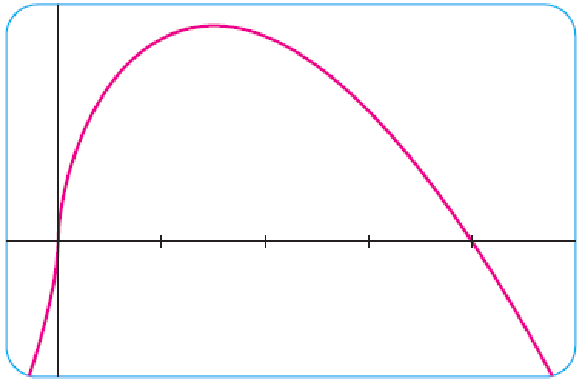
El teorema de Fermat sugiere en realidad que, por lo menos, debe *empezar* a buscar los valores extremos de f en los números $x = c$, donde $f'(c) = 0$ o donde $f'(c)$ no existe. Estos números reciben un nombre especial.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

6 Definición Un **número crítico** de una función f es un número $x = c$ en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

V EJEMPLO 7 Encuentre los números críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

SOLUCIÓN La regla del producto nos da



$$f'(x) = x^{3/5}(-1) + (4 - x)\left(\tfrac{3}{5}x^{-2/5}\right) = -x^{3/5} + \frac{3(4 - x)}{5x^{2/5}}$$

$$= \frac{-5x + 3(4 - x)}{5x^{2/5}} = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$$

[Se obtienen los mismos valores escribiendo primero $f(x) = 4x^{3/5} - x^{8/5}$.] Así que $f'(x) = 0$ si $12 - 8x = 0$; es decir $x = \frac{3}{2}$ y $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$. Por tanto, los números críticos son $\frac{3}{2}$ y 0.

$\boxed{7}$ Si f tiene un máximo o un mínimo local en $x = c$, entonces c es un número crítico de f.

Para hallar un máximo o un mínimo absolutos de una función continua sobre un intervalo cerrado, observe que o es un extremo local [en cuyo caso, por $\boxed{7}$, se presenta en un número crítico] o se presenta en uno de los puntos extremos del intervalo. De este modo, el siguiente procedimiento de tres pasos siempre funciona.

Método del intervalo cerrado Para hallar los valores máximo y mínimo *absolutos* de una función continua f sobre un intervalo cerrado $[a, b]$:

1. Encuentre los valores de f en los números críticos de f en (a, b).
2. Halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño, el valor mínimo absoluto.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

V EJEMPLO 8 Encuentre los valores absolutos máximo y mínimo de la función

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$$

SOLUCIÓN Dado que f es continua sobre $\left[-\tfrac{1}{2}, 4\right]$, podemos utilizar el teorema del intervalo cerrado:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Puesto que $f'(x)$ existe para toda x, los únicos valores críticos de f ocurren cuando $f'(x) = 0$; esto es, en $x = 0$ o $x = 2$. Observe que cada uno de estos números críticos está en el intervalo $\left(-\tfrac{1}{2}, 4\right)$. Los valores de f en estos números críticos son

$$f(0) = 1 \qquad f(2) = -3$$

Los valores de f en los puntos extremos del intervalo son

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8} \qquad f(4) = 17$$

Comparando estos cuatro números, vemos que el valor máximo absoluto es $f(4) = 17$ y el valor mínimo absoluto es $f(2) = -3$.

Tenga en cuenta que, en este ejemplo, el máximo absoluto ocurre en un extremo del intervalo, mientras que el mínimo absoluto ocurre en un número crítico. La gráfica de f se esboza en la figura 14.

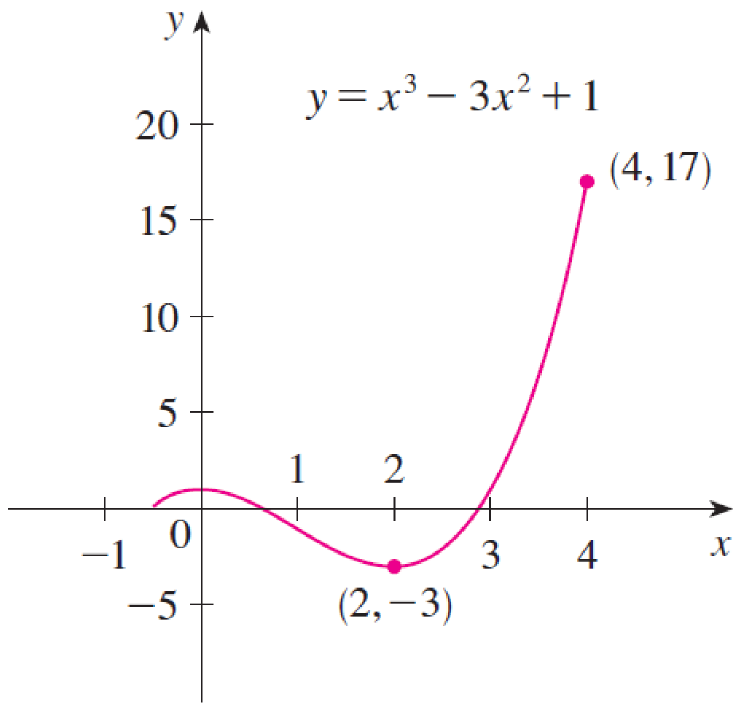


FIGURA 14

EJEMPLO 9

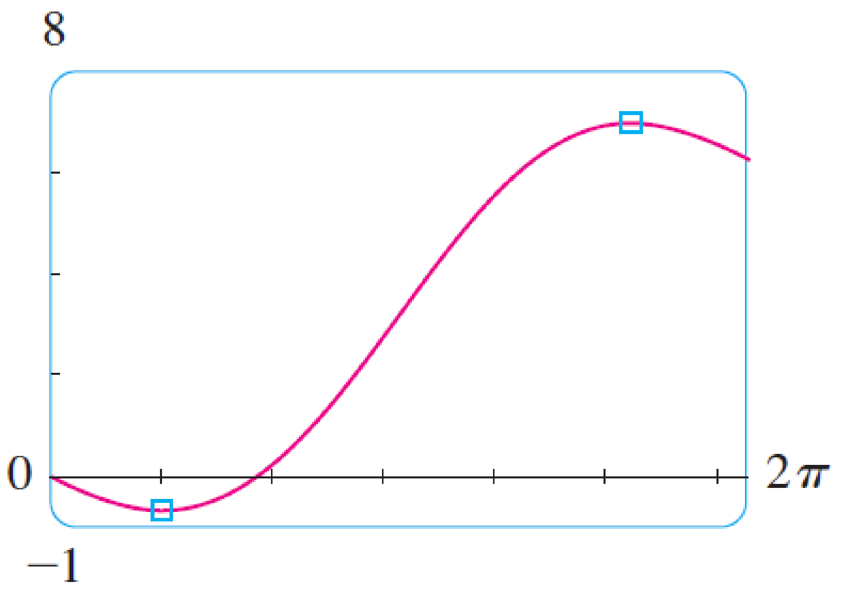
Utilice el cálculo para encontrar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = x - 2 \text{ sen } x$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

SOLUCIÓN

La función $f(x) = x - 2 \text{ sen } x$ es continua en $[0, 2\pi]$. Debido a que $f'(x) = 1 - 2 \cos x$, tenemos que $f'(x) = 0$ cuando $\cos x = \frac{1}{2}$ y esto ocurre cuando $x = \pi/3$ o bien $5\pi/3$. Los valores de f en estos números críticos son

$$f(\pi/3) = \frac{\pi}{3} - 2 \text{ sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0.684853$$

y
$$f(5\pi/3) = \frac{5\pi}{3} - 2 \text{ sen } \frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6.968039$$



Los valores de f en los puntos extremos son

$$f(0) = 0 \quad \text{y} \quad f(2\pi) = 2\pi \approx 6.28$$

Comparando estos cuatro números y utilizando el método del intervalo cerrado, vemos que el valor mínimo absoluto es $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$ y el máximo valor absoluto es $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3}$.

EJEMPLO 10 El telescopio espacial *Hubble* fue puesto en operación el 24 de abril de 1990, por el transbordador espacial *Discovery*. Un modelo para la velocidad del transbordador durante esta misión, desde el lanzamiento en $t = 0$ hasta que los cohetes auxiliares de combustible sólido se desprenden en $t = 126$ s, está dado por

$$v(t) = 0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083$$

(en pies por segundo). Con este modelo, estime los valores máximo y mínimo absolutos de la *aceleración* del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares.

SOLUCIÓN No de la función velocidad dada, se nos pide hallar los valores extremos, sino de la función aceleración. Así que primero tenemos que derivar para encontrar la aceleración:

$$a(t) = v'(t) = \frac{d}{dt}(0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083)$$

$$= 0.003906t^2 - 0.18058t + 23.61$$

Ahora aplicamos el método del intervalo cerrado a la función continua a en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant 126$. Su derivada es $a'(t) = 0.007812t - 0.18058$

El único número crítico ocurre cuando $a'(t) = 0$: $t_1 = \dfrac{0.18058}{0.007812} \approx 23.12$

Evaluando $a(t)$ en el número crítico y en los puntos extremos del intervalo, tenemos

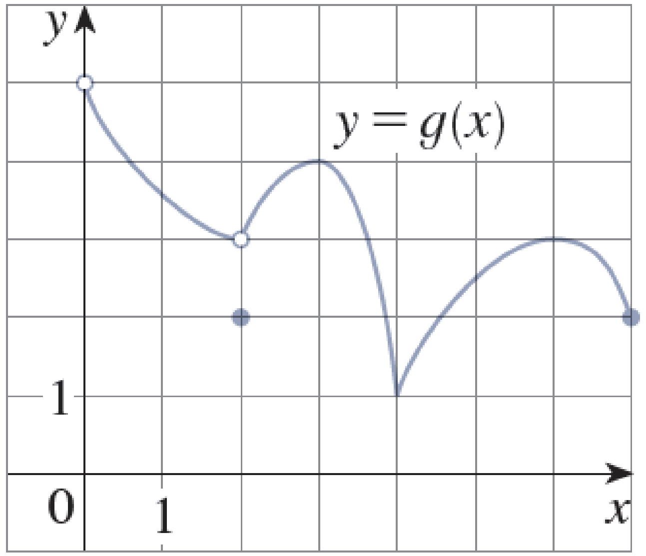
$$a(0) = 23.61 \qquad a(t_1) \approx 21.52 \qquad a(126) \approx 62.87$$

Así que la aceleración máxima es aproximadamente 62.87 pies/s^2, y la aceleración mínima es aproximadamente 21.52 pies/s^2.

Ejemplos propuestos

Utilice la gráfica para establecer los valores máximos y mínimos absolutos y locales de la función.

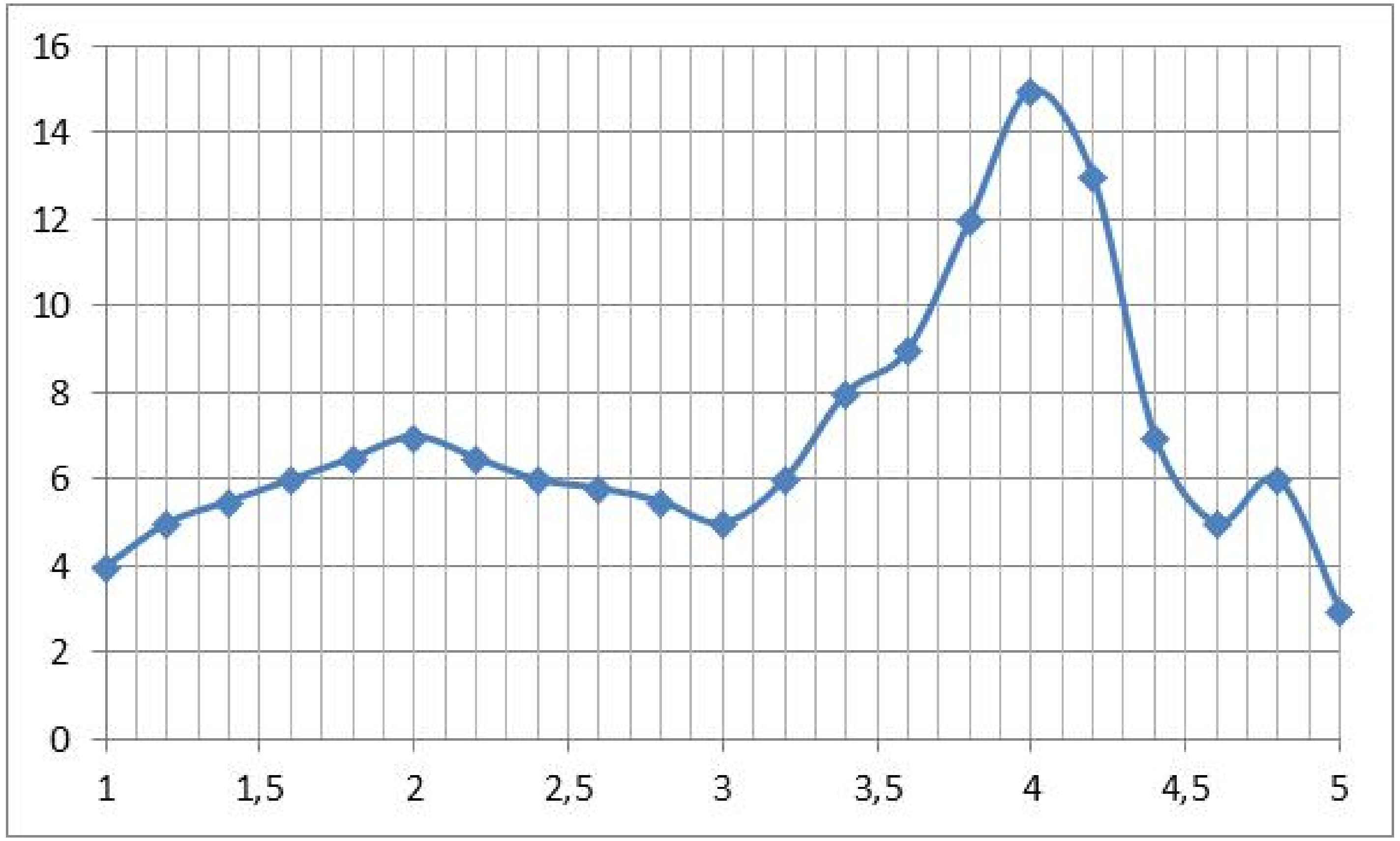
6.



Ejemplos propuestos

Trace la gráfica de una función f que es continua sobre [1, 5] y tiene las propiedades dadas.

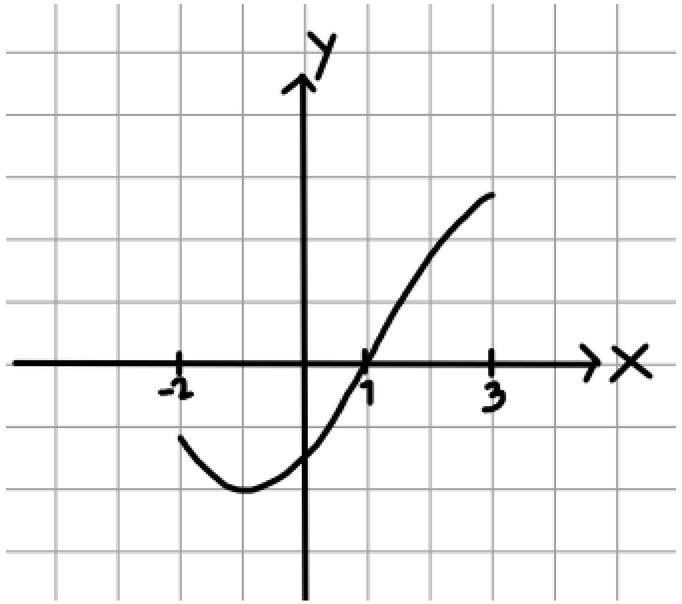
8. Máximo absoluto en 4, mínimo absoluto en 5, máximo local en 2, mínimo local en 3



Ejemplos propuestos

Esboce la gráfica de una función f que sea continua en [-2, 3], que tenga mínimo absoluto en $x = -1$, máximo absoluto en $x = 3$, y que $f(1) = 0$

Solución

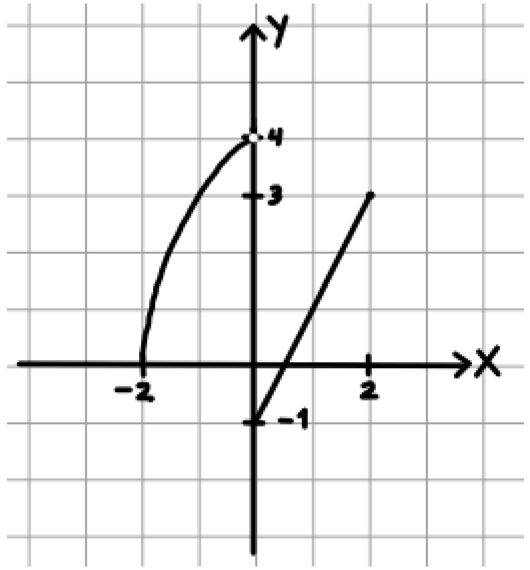


Ejemplos propuestos

Analice si la función $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & si\ -2 \leq x < 0 \\ 2x - 1 & si\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ tiene máximo y mínimo absoluto en el intervalo [−2, 2]

Solución

Veamos si f es continua en [−2, 2]. Como f está formada por funciones polinómicas, las cuales son continuas en todos los reales, basta con analizar la continuidad en x = 0.



a. $f(0) = -1$

b. $\lim_{x \to 0^-} 4 - x^2 = 4$

c. $\lim_{x \to 0^+} 2x - 1 = -1$

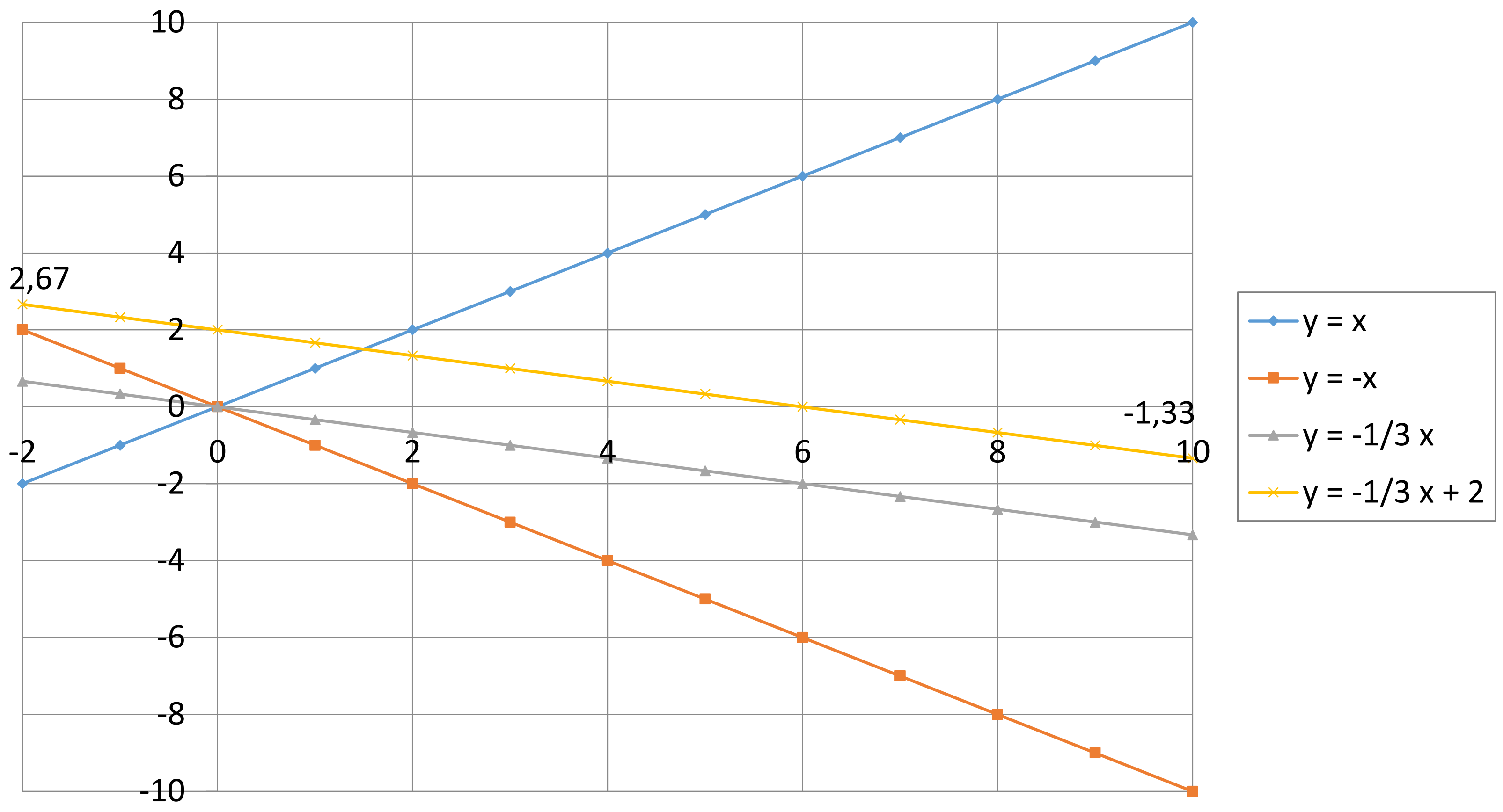
De lo anterior se concluye que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe, por tanto f no es continua en x = 0, entonces no es continua en el intervalo cerrado [−2, 2], y así el teorema del valor extremo no garantiza la existencia de los máximos y mínimos.

f tiene un mínimo absoluto en x = 0.
El mínimo absoluto es $f(0) = -1$. f no tiene un máximo absoluto en [−2, 2].

Ejemplos propuestos

Trace a mano la gráfica de f y utilícela para encontrar los valores máximos y mínimos, absolutos y locales de f. (Utilice las gráficas y transformaciones de las secciones 1.2 y 1.3.)

16. $f(x) = 2 - \frac{1}{3}x, \quad x \geqslant -2$



Ejemplos propuestos

Determine los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de f en el intervalo dado.

48. $f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad [0, 3]$

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \text{ en } [0,3]$$
$$f(x) \text{es continua en } [0,3] \in \mathbb{R}$$

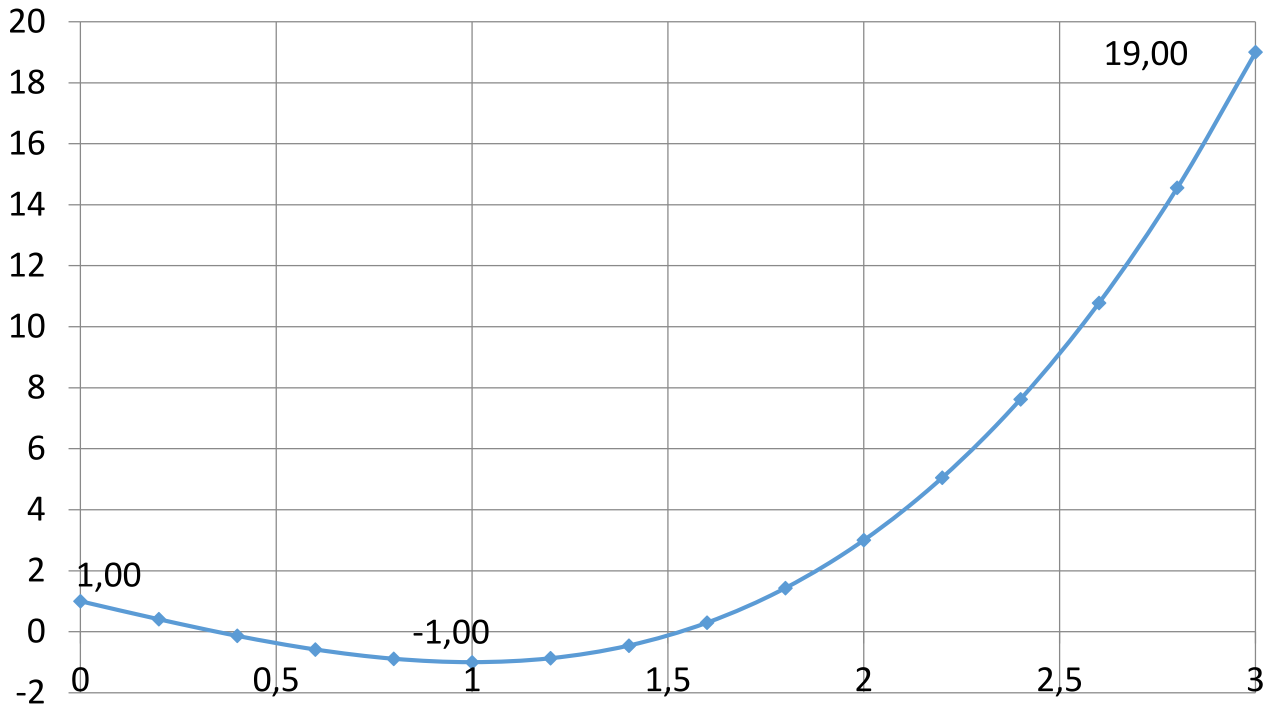
$$f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$f'(x) = 0 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$$

$$x = 1, y = -1 \text{ es un punto crítico}$$
$$x = -1, y = 3 \text{ no es un punto crítico}$$

En los extremos del intervalo

$$\mathrm{x} = 0, \mathrm{y} = 1$$
$$\mathrm{x} = 3; \mathrm{y} = 19$$

Máximo absoluto en $(3, 19)$
Mínimo absoluto en $(1, -1)$



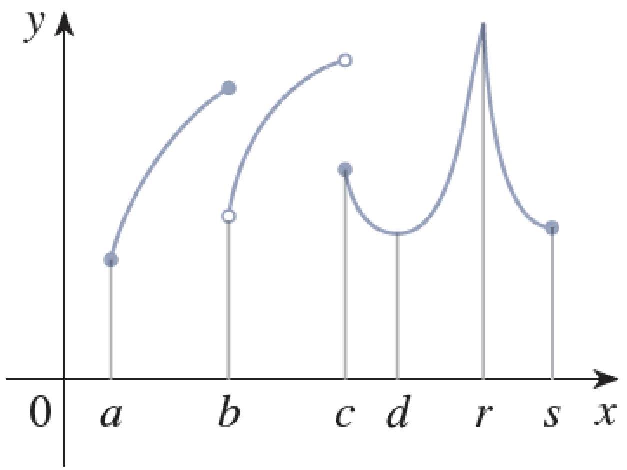
Ejercicios

2. Suponga que f es una función continua definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$.

(a) ¿Qué teorema garantiza la existencia de un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto de f?

(b) ¿Qué pasos daría para encontrar los valores máximo y mínimo?

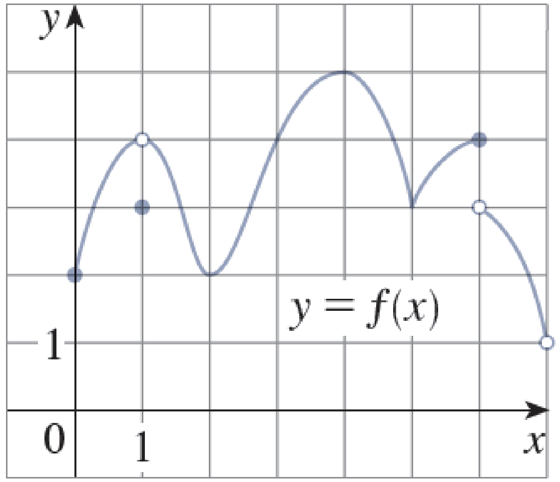
4. Para cada uno de los números a, b, c, d, r y s, indique si la función cuya gráfica se muestra, tiene un máximo o mínimo absolutos, un máximo o mínimo locales, o ni un máximo ni un mínimo.



Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

5. Utilice la gráfica para establecer los valores máximos y mínimos absolutos y locales de la función.



7–10 Trace la gráfica de una función f que es continua sobre $[1, 5]$ y tiene las propiedades dadas.

7. Máximo absoluto en 5, mínimo absoluto en 2, máximo local en 3, mínimos locales en 2 y 4

9. Mínimo absoluto en 3, máximo absoluto en 4, máximo local en 2

Ejercicios

15–28 Trace a mano la gráfica de f y utilícela para encontrar los valores máximos y mínimos, absolutos y locales de f. (Utilice las gráficas y transformaciones de las secciones 1.2 y 1.3.)

24. $f(x) = |x|$

25. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

27. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 2 - 3x & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 4 - 2x & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

29–44 Determine los números críticos de la función.

35. $g(y) = \dfrac{y - 1}{y^2 - y + 1}$

36. $h(p) = \dfrac{p - 1}{p^2 + 4}$

37. $h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$

38. $g(x) = \sqrt[3]{4 - x^2}$

39. $F(x) = x^{4/5}(x - 4)^2$

40. $g(\theta) = 4\theta - \tan\theta$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

47–62 Determine los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de f en el intervalo dado.

50. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, \quad [-3, 5]$

53. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad [0.2, 4]$

54. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}, \quad [0, 3]$

57. $f(t) = 2\cos t + \operatorname{sen} 2t, \quad [0, \pi/2]$

59. $f(x) = x^{-2}\ln x, \quad \left[\frac{1}{2}, 4\right]$

60. $f(x) = xe^{x/2}, \quad [-3, 1]$

Ejercicios

70. Después de que se toma una tableta de antibiótico, la concentración del antibiótico en el torrente sanguíneo se modela por la función

$$C(t) = 8(e^{-0.4t} - e^{-0.6t})$$

donde el tiempo t se mide en horas y C se mide en $\mu g/mL$. ¿Cuál es la concentración máxima de antibiótico durante las primeras 12 horas?

71. Entre 0 °C y 30 °C, el volumen V (en centímetros cúbicos) de 1 kg de agua a una temperatura T está dado aproximadamente por la fórmula

$$V = 999.87 - 0.06426T + 0.0085043T^2 - 0.0000679T^3$$

Encuentre la temperatura a la cual el agua tiene su densidad máxima.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

72. Un objeto con masa m se arrastra a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a través de una cuerda atada al objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, entonces la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu m g}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde μ es una constante positiva llamado el *coeficiente de fricción* y donde $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Demuestre que F es minimizada cuando $\tan \theta = \mu$.

REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín