Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

ENCUENTRO 9.2

Sección 2.7: Derivadas y razones de cambio. Definición de recta tangente. Velocidades. Razones de cambio.

Tangentes

Si una curva C tiene la ecuación $y = f(x)$ y quiere usted hallar la recta tangente a C en el punto $P(a, f(a))$, entonces considere un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calcule la pendiente de la recta secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Después, acerque Q a P a lo largo de la curva C, haciendo que x tienda a a. Si m_{PQ} tiende un número m, entonces definimos la *tangente t* como la recta que pasa por P con pendiente m. (Esto equivale a decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante PQ cuando Q tiene a P. (Véase la figura 1.)

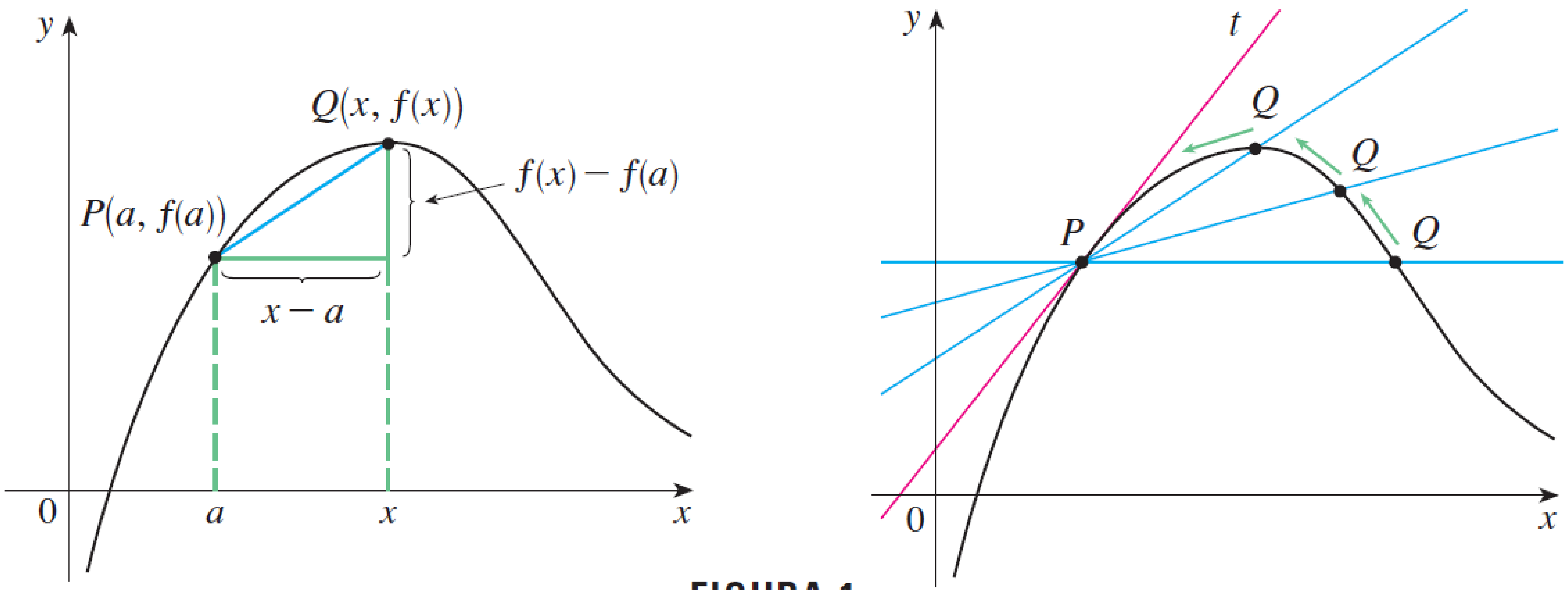


FIGURA 1

1 Definición La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre que este límite exista.

V **EJEMPLO 1** Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$, en el punto $P(1,1)$.

SOLUCIÓN En este caso, $a = 1$ y $f(x) = x^2$, de modo que la pendiente es

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Con la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, se encuentra que la ecuación de la recta tangente en $(1,\ 1)$ es

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{o bien} \quad y = 2x - 1$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Forma punto-pendiente para una recta que pasa por el punto $(x_1,\ y_1)$ con pendiente m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

A veces se hace referencia a la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto como la **pendiente de la curva** en el punto. La idea es que si se acerca lo suficiente al punto, la curva parece una línea recta. En la figura 2 se ilustra este procedimiento para la curva $y = x^2$ del ejemplo 1. Cuanto más se acerque, tanto más la parábola se parece a una recta. En otras palabras, la curva casi se vuelve indistinguible de su recta tangente.

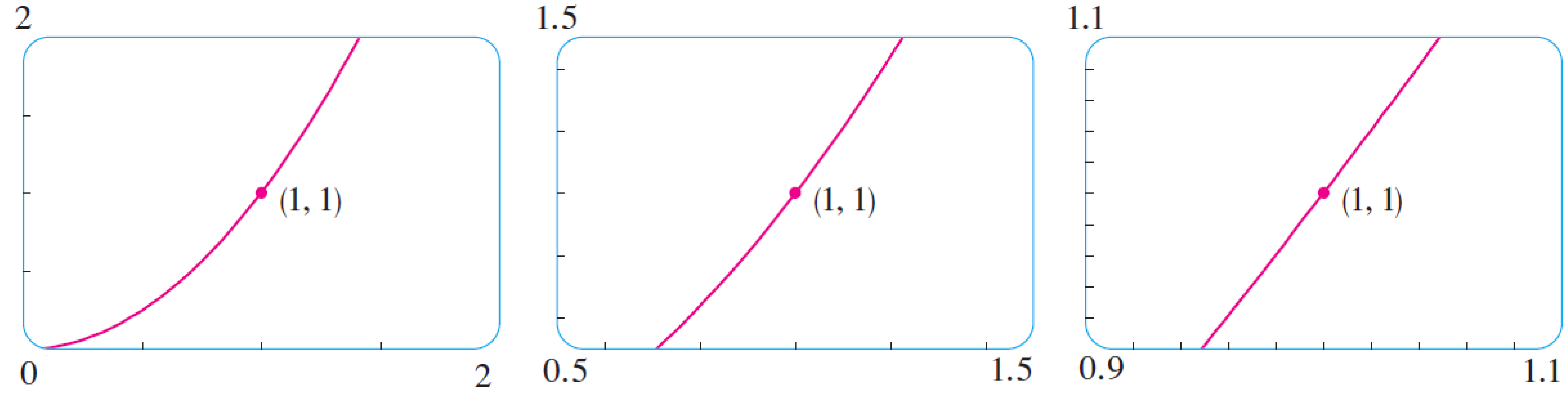


FIGURA 2 Acercamiento hacia el punto (1, 1) sobre la parábola $y = x^2$

Existe otra expresión para la pendiente de la recta tangente que a veces es más fácil de usar. Si $h = x - a$, en este caso $x = a + h$, entonces la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

(Véase la figura 3, donde se ilustra el caso $h > 0$ y Q está a la derecha de P. Sin embargo, si $h < 0$, Q estaría a la izquierda de P.)

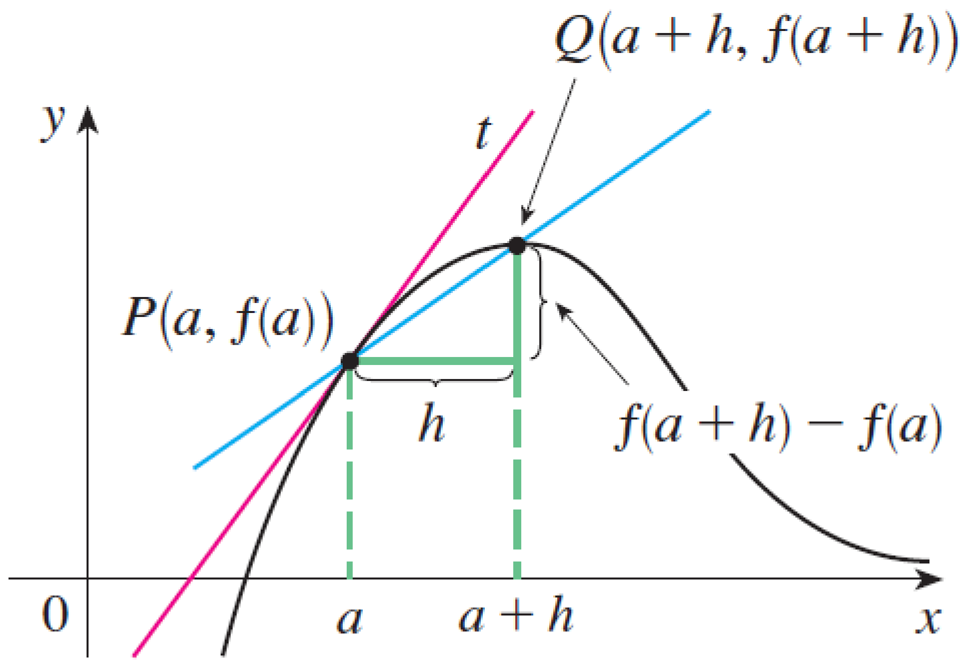


FIGURA 3

2 $$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

EJEMPLO 2 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la hipérbola $y = 3/x$, en el punto $(3, 1)$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 3/x$. Entonces, la pendiente de la tangente en $(3, 1)$ es

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3}{3+h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3-(3+h)}{3+h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(3+h)} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{3+h} = -\frac{1}{3}$$

En consecuencia, la ecuación de la tangente en el punto $(3, 1)$ es

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

la cual se simplifica a $$x + 3y - 6 = 0$$

En la figura 4 se muestra la hipérbola y su tangente.

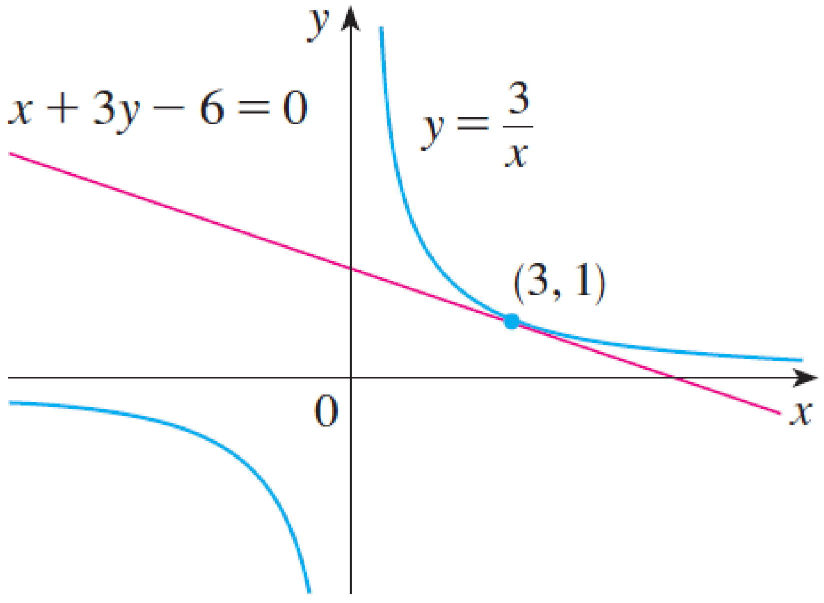


FIGURA 4

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Velocidades

En general, suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, de acuerdo con una ecuación del movimiento $s = f(t)$, donde s es el desplazamiento (distancia dirigida) del objeto respecto al origen, en el tiempo t. La función f que describe el movimiento se conoce como **función posición** del objeto. En el intervalo de tiempo $t = a$ hasta $t = a + h$, el cambio en la posición es $f(a + h) - f(a)$. (Véase la figura 5.) La velocidad promedio en este intervalo de tiempo es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

que es lo mismo que la pendiente de la recta secante PQ en la figura 6.

Suponga ahora que calcula las velocidades promedio sobre intervalos de tiempo $[a, a + h]$ más y más cortos. En otras palabras, haga que h tienda a 0. Como en el ejemplo de la pelota que cae, se definió la **velocidad** (o **velocidad instantánea**) $v(a)$ en el instante $t = a$ como el límite de estas velocidades promedio:

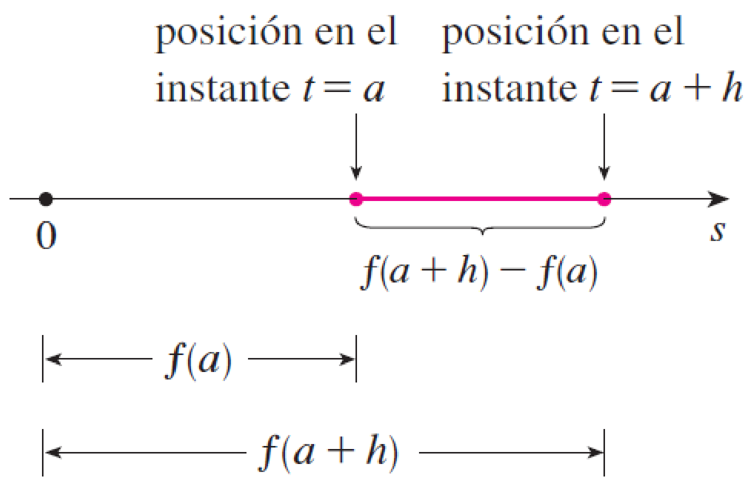
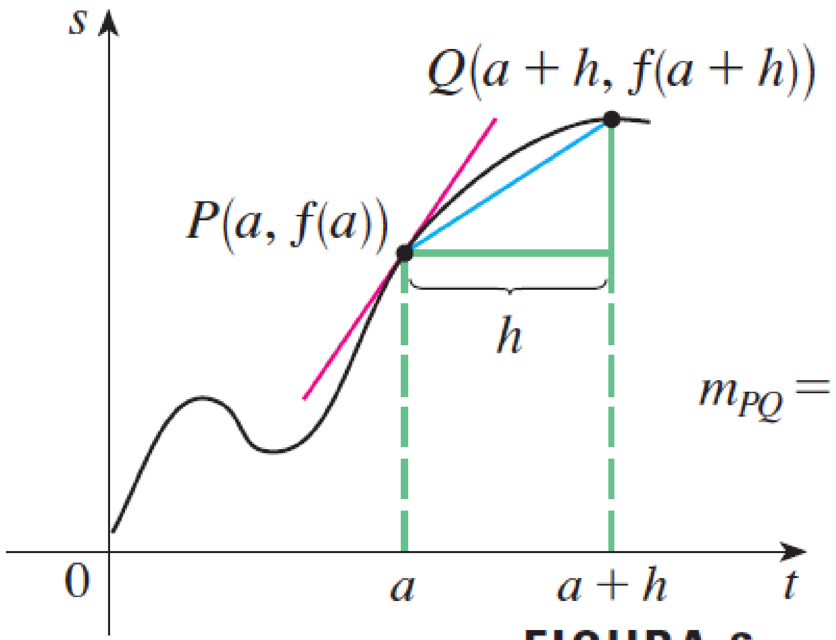


FIGURA 5



$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \text{velocidad promedio}$$

FIGURA 6

Suponga ahora que calcula las velocidades promedio sobre intervalos de tiempo $[a, a + h]$ más y más cortos. En otras palabras, haga que h tienda a 0. Como en el ejemplo de la pelota que cae, se definió la **velocidad** (o **velocidad instantánea)** $v(a)$ en el instante $t = a$ como el límite de estas velocidades promedio:

3

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Esto significa que la velocidad en el instante $t = a$ es igual a la pendiente de la recta tangente en P. (Compare las ecuaciones 2 y 3.)

V **EJEMPLO 3** Suponga que se deja caer una pelota desde la plataforma superior de observación de la Torre CN, a 450 m sobre el nivel del suelo.

a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota después de 5 segundos?

b) ¿Con qué rapidez cae cuando choca contra el suelo?

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

SOLUCIÓN Necesita usted hallar la velocidad cuando $t = 5$ y cuando la pelota golpea el suelo, de tal manera que es conveniente iniciar la búsqueda de la velocidad en un tiempo general $t = a$. Empleando la ecuación de movimiento $s = f(t) = 4.9t^2$, se tiene

$$v(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4.9(a+h)^2 - 4.9a^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4.9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4.9(2ah + h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 4.9(2a + h) = 9.8a$$

a) La velocidad después de 5 s es $v(5) = (9.8)(5) = 49\,\text{m/s}$.

b) Puesto que la plataforma de observación está a 450 m sobre el nivel del suelo, la pelota chocará contra el suelo en el instante t_1, cuando $s(t_1) = 450$; es decir,

$$4.9t_1^2 = 450$$

Esto da

$$t_1^2 = \frac{450}{4.9} \qquad \text{y} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 9.6\ \text{s}$$

Por tanto, la velocidad de la pelota cuando choca contra el suelo es

$$v(t_1) = 9.8t_1 = 9.8\sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 94\ \text{m/s}$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

4 **Definición** La **derivada de una función** f **en un número** $x = a$, denotada por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

Si se escribe $x = a + h$, entonces $h = x - a$ y h tiende a 0 si y sólo si x tiende a a. En consecuencia, una manera equivalente de expresar la definición de la derivada, como vimos en la búsqueda de rectas tangentes, es

5

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

V **EJEMPLO 4** Encuentre la derivada de la función $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número $x = a$.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

SOLUCIÓN De la definición 4 se tiene

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \to 0} (2a + h - 8) \\
&= 2a - 8
\end{aligned}$$

Ecuación de la Recta Tangente (ERT)

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Definimos la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ como la recta que pasa por P y tiene pendiente m, dada por la ecuación 1 o 2. Ya que, por la definición 4, ésta es la misma que la derivada $f'(a)$, podemos decir lo siguiente.

La recta tangente a $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ es la recta que pasa por $(a, f(a))$ cuya pendiente es igual a $f'(a)$, la derivada de f en $x = a$.

Si utilizamos la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, podemos escribir la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$:

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

V EJEMPLO 5 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 8x + 9$ en el punto $(3, -6)$.

SOLUCIÓN Del ejemplo 4 sabemos que la derivada de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número $x = a$ es $f'(a) = 2a - 8$. En consecuencia, la pendiente de la recta tangente en $(3, -6)$ es $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$. En estos términos, la ecuación de la recta tangente que se muestra en la figura 7, es

$$y - (-6) = (-2)(x - 3) \quad \text{o bien} \quad y = -2x$$

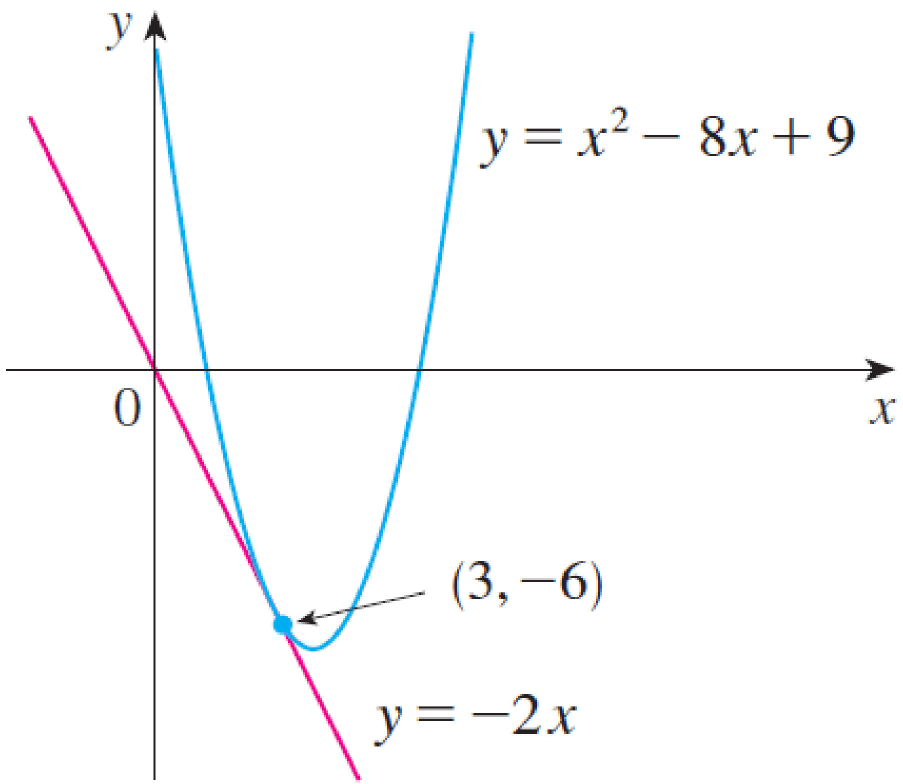


FIGURA 7

Razones de cambio

Suponga que y es una cantidad que depende de otra cantidad x. Así, y es una función de x y lo expresamos como $y = f(x)$. Si x cambia de x_1 a x_2, entonces el cambio en x (también conocido como **incremento** de x) es

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

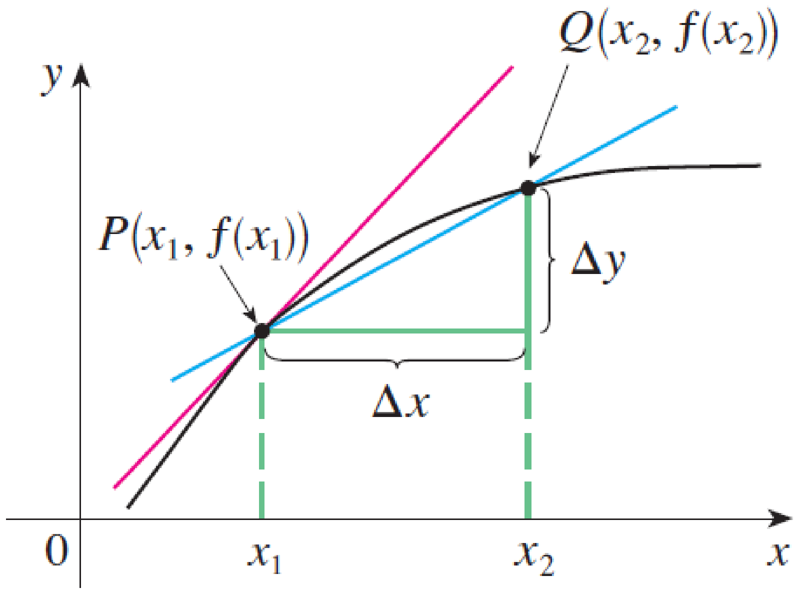
se llama **razón de cambio promedio de y respecto a x** sobre el intervalo $[x_1, x_2]$, y puede interpretarse como la pendiente de la recta secante PQ en la figura 8.

Por analogía con la velocidad, considere la razón de cambio promedio en intervalos cada vez más pequeños haciendo que x_2 tienda a x_1 y, por tanto, hacer que Δx tienda a 0. El límite de estas razones de cambio promedio se llama **razón de cambio (instantánea) de y respecto a x** en $x = x_1$, lo cual se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $P(x_1, f(x_1))$:

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

$$\boxed{6} \qquad \text{Razón de cambio instantánea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



razón de cambio promedio $= m_{PQ}$

razón de cambio instantánea $=$
pendiente de la recta tangente en P

FIGURA 8

Reconocemos este límite como la derivada $f'(x_1)$.

Sabemos que una interpretación de la derivada $f'(a)$ es como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ cuando $x = a$. Ahora tenemos una segunda interpretación:

> La derivada $f'(a)$ es la razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ respecto a x cuando $x = a$.

El vínculo con la primera interpretación es que si dibuja la curva $y = f(x)$, entonces la razón de cambio instantánea es la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto donde $x = a$. Esto significa que cuando la derivada es grande (y, en consecuencia, la curva es escarpada, como en el punto P de la figura 9), los valores de y cambian rápidamente. Cuando la derivada es pequeña, la curva es relativamente plana (como en el punto Q), y el valor de y cambia lentamente.

En particular, si $s = f(t)$ es la función posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta, entonces $f'(a)$ es la razón de cambio del desplazamiento s respecto al tiempo t. En otras palabras, $f'(a)$ *es la velocidad de la partícula en el tiempo* $t = a$. La **rapidez** de la partícula es el valor absoluto de la velocidad, es decir, $|f'(a)|$.

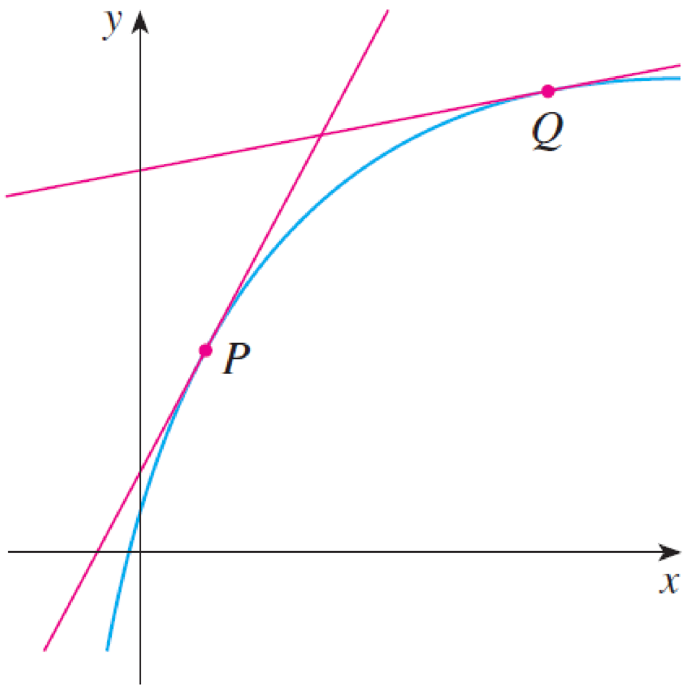


FIGURA 9
Los valores de y cambian rápidamente en P y lentamente en Q.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

V **EJEMPLO 6** Un fabricante produce un rollo de un tejido con ancho fijo. El costo de producir x yardas de este tejido es de $C = f(x)$ dólares.

a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?

b) En términos prácticos, ¿qué significa decir que $f'(1\,000) = 9$?

c) ¿Cuál piensa que es más grande $f'(50)$ o $f'(500)$? ¿Qué hay respecto a $f'(5\,000)$?

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

SOLUCIÓN

a) La derivada $f'(x)$ es la razón de cambio instantánea de C respecto a x, es decir, $f'(x)$ significa la razón de cambio del costo de producción respecto al número de yardas producidas. (Los economistas llaman a esta rapidez de cambio *costo marginal*. Esta idea se analiza en más detalle en las secciones 3.7 y 4.7.)

Ya que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

las unidades para $f'(x)$ son las mismas que las unidades para el cociente de diferencias $\Delta C/\Delta x$. Puesto que ΔC se mide en dólares y Δx en yardas, las unidades para $f'(x)$ son dólares por cada yarda.

b) El enunciado de que $f'(1\,000) = 9$ significa que, después de fabricar 1 000 yardas de tejido, la cantidad a la cual se incrementa el costo de producción es de 9 dólares/yarda. (Cuando $x = 1\,000$, C se incrementa 9 veces tan rápido como x.)

Dado que $\Delta x = 1$ es pequeño si se le compara con $x = 1000$, podría usarse la aproximación

$$f'(1\,000) \approx \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\Delta C}{1} = \Delta C$$

y decimos que el costo de fabricación de las 1000 yardas (o de la 1 001) es de casi 9 dólares.

c) La razón a la cual se incrementa el costo de producción (por cada yarda) probablemente es inferior cuando $x = 500$ que cuando $x = 50$ (el costo de fabricación de la yarda 500 es menor que el costo de la yarda 50) debido a la escala económica. (El fabricante hace más eficiente el uso de los costos de producción fijos.) De manera que

$$f'(50) > f'(500)$$

Pero, conforme se expande la producción, el resultado de la operación a gran escala será ineficiente y con eso los costos de horas extra de trabajo. En estos términos, es posible que la razón de incremento de costos empezarán con el tiempo a subir. De este modo, es posible que suceda que

$$f'(5\,000) > f'(500)$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

V **EJEMPLO 7** Sea $D(t)$ la deuda nacional de EU en el tiempo t. La tabla en el margen proporciona valores aproximados de esta función siempre que se estime a fin de año, en miles de millones de dólares, desde 1980 hasta 2005. Interprete y estime el valor de $D'(1990)$.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

t	$D(t)$
1980	930.2
1985	1 945.9
1990	3 233.3
1995	4 974.0
2000	5 674.2
2005	7 932.7

SOLUCIÓN La derivada $D'(1990)$ significa la razón de cambio de D respecto a t cuando $t = 1990$, es decir, la razón de incremento de la deuda nacional en 1990.

De acuerdo con la ecuación 5,

$$D'(1990) = \lim_{t \to 1990} \frac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$$

Así que calculamos y tabulamos los valores del cociente de diferencias (la razón de cambio promedio) como sigue.

t	$\dfrac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$
1980	230.31
1985	257.48
1995	348.14
2000	244.09
2005	313.29

A partir de esta tabla vemos que $D'(1990)$ se localiza en alguna parte entre 257.48 y 348.14 miles de millones de dólares por cada año. [En este caso, está haciendo la suposición razonable de que la deuda no fluctuará de manera errática entre 1980 y el 2000.] Se estima que la razón de incremento de la deuda nacional de EU en 1990 fue el promedio de estos números, específicamente

$$D'(1990) \approx 303 \text{ miles de millones de dólares por cada año.}$$

Otro método sería una gráfica de la función deuda y estimar la pendiente de la recta tangente cuando $t = 1990$.

Ejercicios

3. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = 4x - x^2$ en el punto $(1, 3)$
(i) usando la definición 1 (ii) usando la ecuación 2
(b) Encuentre la ecuación de la recta tangente del inciso (a).
(c) Trace la gráfica de la parábola y la recta tangente. Como verificación de su trabajo, haga un acercamiento hacia el punto $(1, 3)$ hasta que la parábola y la recta tangente sean indistinguibles.

4. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x - x^3$ en el punto $(1, 0)$
(i) usando la definición 1 (ii) usando la ecuación 2
(b) Encuentre la ecuación de la recta tangente del inciso (a).
(c) Trace la curva y la recta tangente en rectángulos de vista cada vez más pequeños centrados en $(1, 0)$ hasta que parezcan coincidir la curva y la recta.

5–8 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las curvas siguientes en el punto dado.

5. $y = 4x - 3x^2, \quad (2, -4)$

6. $y = x^3 - 3x + 1, \quad (2, 3)$

7. $y = \sqrt{x}, \quad (1, 1)$

8. $y = \dfrac{2x + 1}{x + 2}, \quad (1, 1)$

9. (a) Determine la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 3 + 4x^2 - 2x + 3$ en el punto donde $x = a$.
(b) Determine las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos $(1, 5)$ y $(2, 3)$.
(c) Trace la gráfica de la curva y ambas rectas tangentes en una misma pantalla.

20. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = g(x)$ en $x = 5$ si $g(5) = -3$ y $g'(5) = 4$.

21. Si una ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto donde $a = 2$ es $y = 4x - 5$, encuentre $f(2)$ y $f'(2)$.

24. Trace la gráfica de una función g para la cual $g(0) = g(2) = g(4) = 0$, $g'(1) = g'(3) = 0$, $g'(0) = g'(4) = 1$, $g'(2) = -1$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

25. Trace la gráfica de una función g que es continua en su dominio $(-5, 5)$ y donde $g(0) = 1$, $g'(0) = 1$, $g'(-2) = 0$, $\lim_{x\to-5^+} g(x) = \infty$ y $\lim_{x\to5^-} g(x) = 3$.

26. Trace la gráfica de una función f donde el dominio es $(-2, 2)$, $f'(0) = -2$, $\lim_{x\to2^-} f(x) = \infty$, f es continua en todos los números dentro de su dominio excepto en ±1, y f es impar.

27. Si $f(x) = 3x^2 - x^3$, encuentre $f'(1)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - x^3$ en el punto $(1, 2)$.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

28. Si $g(x) = x^4 - 2$ encuentre $g'(1)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 - 2$ en el punto $(1, -1)$.

29. (a) Si $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, encuentre $F'(2)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 5x/(1 + x^2)$ en el punto $(2, 2)$.

(b) Ilustre el inciso (a) al trazar la gráfica de la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

30. (a) Si $G(x) = 4x^2 - x^3$, encuentre $G'(a)$ y utilícela para encontrar las rectas tangentes a la curva $y = 4x^2 - x^3$ en los puntos $(2, 8)$ y $(3, 9)$.

(b) Ilustre el inciso (a) al trazar la gráfica de la curva y las rectas tangentes en la misma pantalla.

31–36 Encuentre $f'(a)$.

31. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

32. $f(t) = 2t^3 + t$

33. $f(t) = \dfrac{2t + 1}{t + 3}$

34. $f(x) = x^{-2}$

35. $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

36. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1 - x}}$

REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín