Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

ENCUENTRO 9.1

Sección 2.6: Límites al infinito, asíntotas horizontales y verticales.
Límites infinitos en el infinito.
Sección 4.5: asíntotas oblicuas.

DE LOS ANTERIORES ENCUENTROS
RECORDAR

Pasos para solucionar un límite:

1. Evaluar el límite e identificar qué clase de indeterminación presenta.

   Se podrían presentar indeterminaciones del tipo:

   $$\pm\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, +\infty-\infty, 0(\pm\infty), 1^{\pm\infty}, (\pm\infty)^0, 0^0$$

2. Factorizar, racionalizar, realizar un cambio de variable
3. Simplificar
4. Evaluar

Operaciones con infinitos:

1. $\pm\infty \pm a = \pm\infty$, $\forall$ a $\in \Re$
2. $+\infty + \infty = +\infty$, $-\infty - \infty = -\infty$
3. $a(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & si\ a > 0 \\ \mp\infty & si\ a < 0 \end{cases}$
4. $(+\infty)^n = +\infty$, $\forall$ n $\in$ Q⁺
5. $(-\infty)^{1/n} = -\infty$, $\forall$ n $\in$ Z impares
6. $(-\infty)^n = \begin{cases} +\infty & n \in \mathrm{N}\ par \\ -\infty & n \in \mathrm{N}\ impar \end{cases}$
7. $a^{+\infty} = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$
8. $a^{-\infty} = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

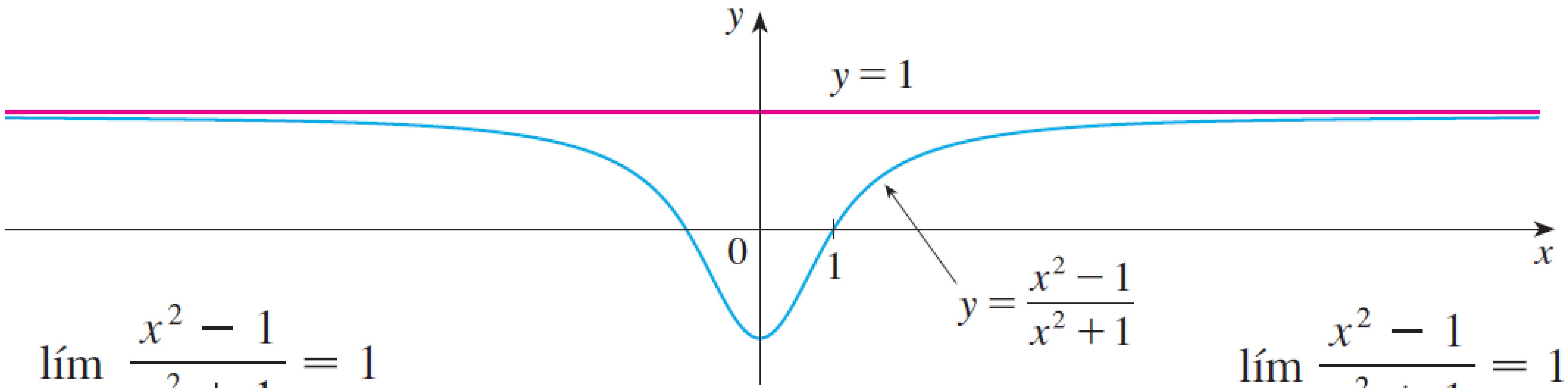
Límites al infinito

Empecemos por investigar el comportamiento de la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

a medida que x se hace grande. La tabla al margen da valores de esta función con una aproximación de seis decimales, y en la figura 1 se ha trazado la gráfica de f por medio de la computadora.

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 2	0.600000
± 3	0.800000
± 4	0.882353
± 5	0.923077
± 10	0.980198
± 50	0.999200
± 100	0.999800
$\pm 1\,000$	0.999998



$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

FIGURA 1

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

1 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden aproximarse arbitrariamente a L tanto como desee, eligiendo a x suficientemente grande.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

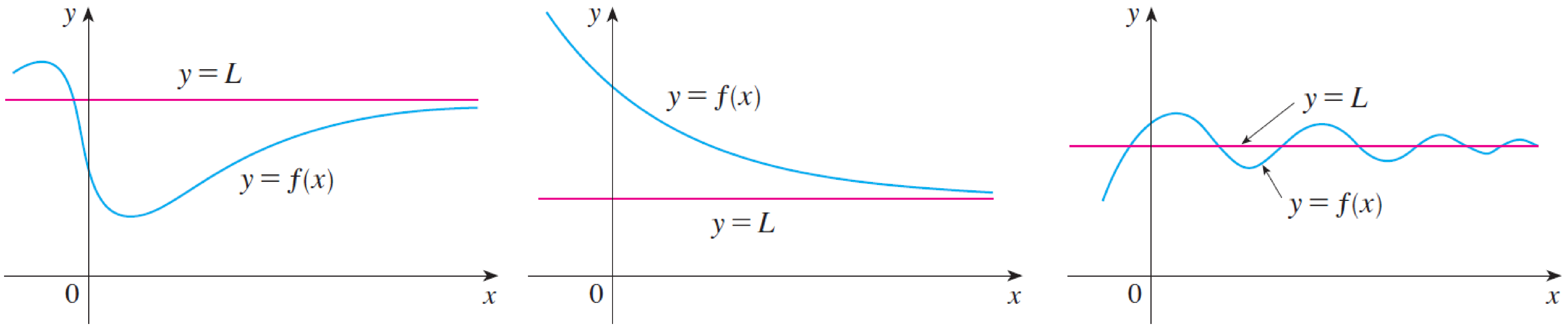


FIGURA 2

Ejemplos que ilustran $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

2 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente cercanos a L haciendo que x sea negativa y suficientemente grande en magnitud.

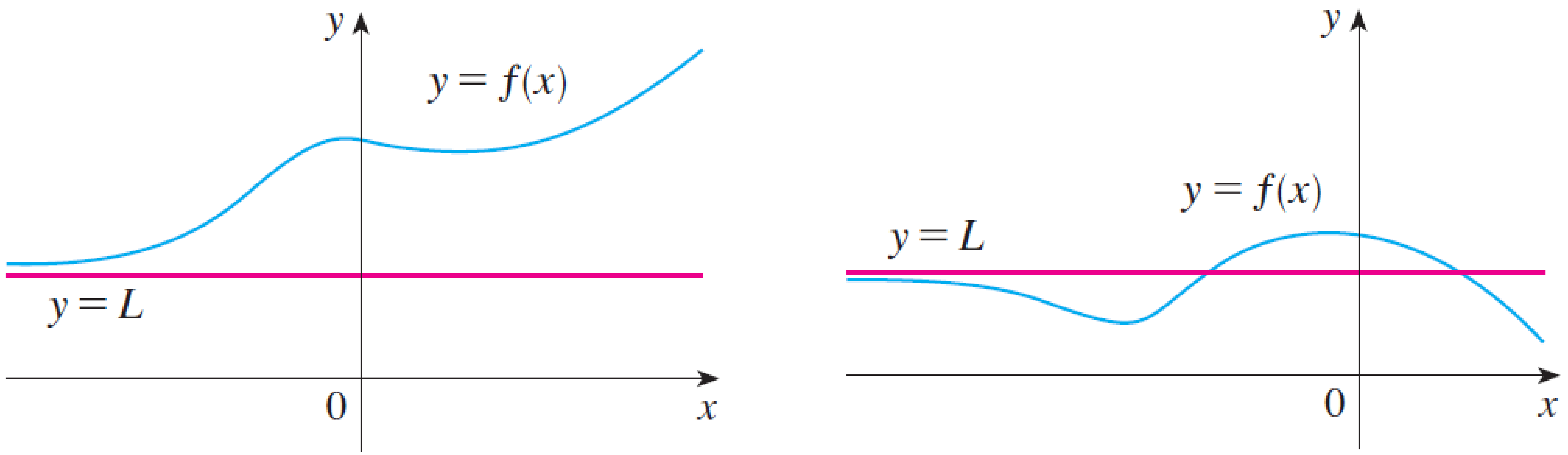


FIGURA 3

Ejemplos que ilustran $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

Pasos para resolver límites al infinito

i) Si al evaluar el límite aparece una indeterminación de la forma ∞/∞, se recomienda dividir numerador y denominador por la variable de mayor exponente en el denominador.

Notas:

- Si $x \to +\infty$, recordar que $\sqrt{x^2} = |x| = x$
- Si $x \to -\infty$, recordar que $\sqrt{x^2} = |x| = -x$
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x), Q(x) \in Pn$ puede ocurrir que
  - i) El límite sea cero si $grado\ P(x) < grado\ Q(x)$
  - ii) El límite no exista o sea $\pm\infty$ si $grado\ P(x) > grado\ Q(x)$
  - iii) El límite sea el coeficiente que acompaña a la variable de mayor grado si $grado\ P(x) = grado\ Q(x)$

ii) Si al evaluar el límite se presenta una indeterminación de la forma $+\infty - \infty$, podría ser útil multiplicar y dividir por la conjugada.

asíntotas horizontales

3 **Definición** La recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Por ejemplo, la curva que se ilustra en la figura 1 tiene a la recta $y = 1$ como asíntota horizontal porque

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Un ejemplo de una curva con dos asíntotas horizontales es $y = \tan^{-1}x$. (Véase la figura 4.) En efecto,

4
$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1}x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to \infty} \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

de modo que las rectas $y = -\pi/2$ y $y = \pi/2$ son asíntotas horizontales. (Esto se sigue del hecho de que las rectas $x = \pm\pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica de $y = \tan x$.)

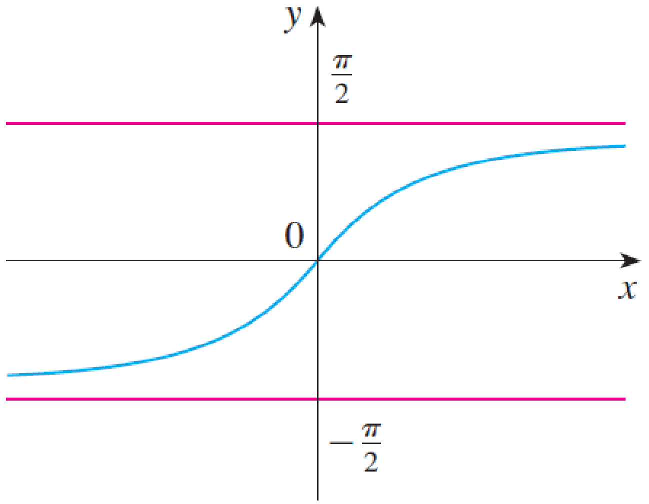


FIGURA 4
$y = \tan^{-1}x$

EJEMPLO 1 Encuentre los límites infinitos, los límites en el infinito y las asíntotas para la función f cuya gráfica se muestra en la figura 5.

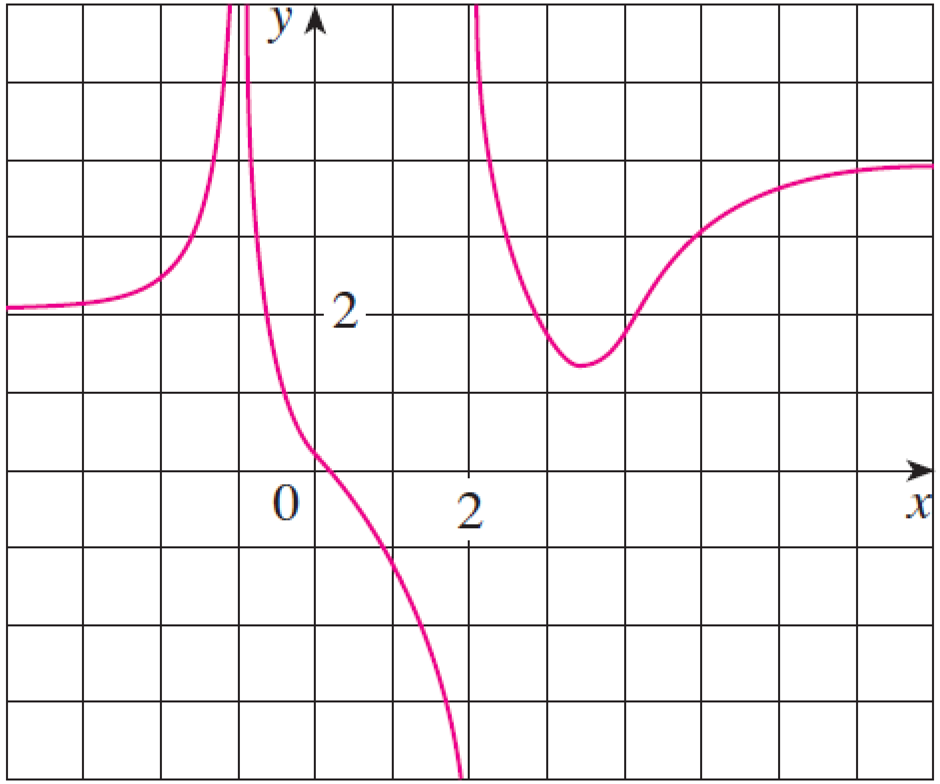


FIGURA 5

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

SOLUCIÓN Vemos que los valores de $f(x)$ se vuelven grandes cuando $x \to -1$ por ambos lados, así que

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$$

Advierta que $f(x)$ se hace negativo grande en magnitud cuando x tiende a 2 por la izquierda, pero grande positivo cuando x tiende a 2 por la derecha. De este modo,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$$

Del comportamiento de estos límites, las dos rectas $x = -1$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

Cuando x es muy grande, parece que $f(x)$ tiende a 4. Pero, a medida que x decrece a través de valores negativos, $f(x)$ tiende a 2. Por tanto,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

Esto significa que tanto $y = 4$ como $y = 2$ son asíntotas horizontales.

Universidad Pontificia Bolivariana

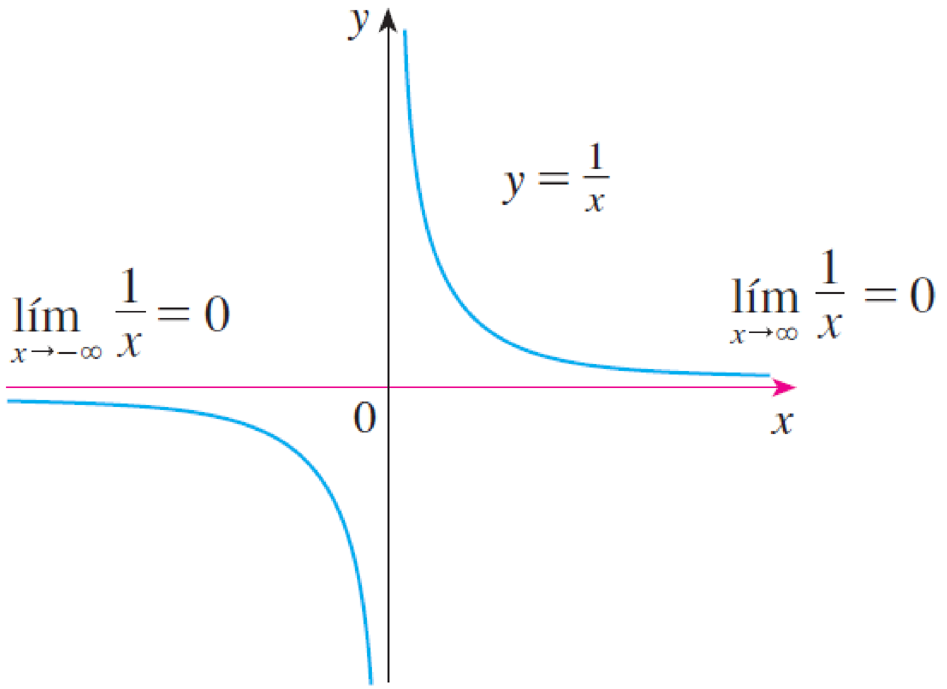
Fundada en 1936

5 Teorema Si $r > 0$ es un número racional, entonces

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Si $r > 0$ es un número racional tal que x^r está definida para toda x, entonces

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$



V **EJEMPLO 3** Evalúe

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

e indique cuáles propiedades de los límites se utilizaron en cada paso.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

SOLUCIÓN Cuando x es muy grande, tanto numerador como denominador son muy grandes, así que no es obvio qué pasa con su cociente. Necesitamos hacer algo de álgebra preliminar.

Para evaluar el límite en el infinito de cualquier función racional, primero dividimos el numerador y el denominador por la potencia mayor de x que hay en el denominador. (Suponemos que $x \neq 0$, ya que estamos interesados sólo en valores muy grandes de x). En este caso, la potencia mayor del denominador es x^2, así que tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5x^2 + 4x + 1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)}$$ (por la ley de los límites 5)

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 3 - \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} - 2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 5 + 4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}$$ (por las leyes 1, 2 y 3)

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0}$$ (por la ley 7 y el teorema 5)

$$= \frac{3}{5}$$

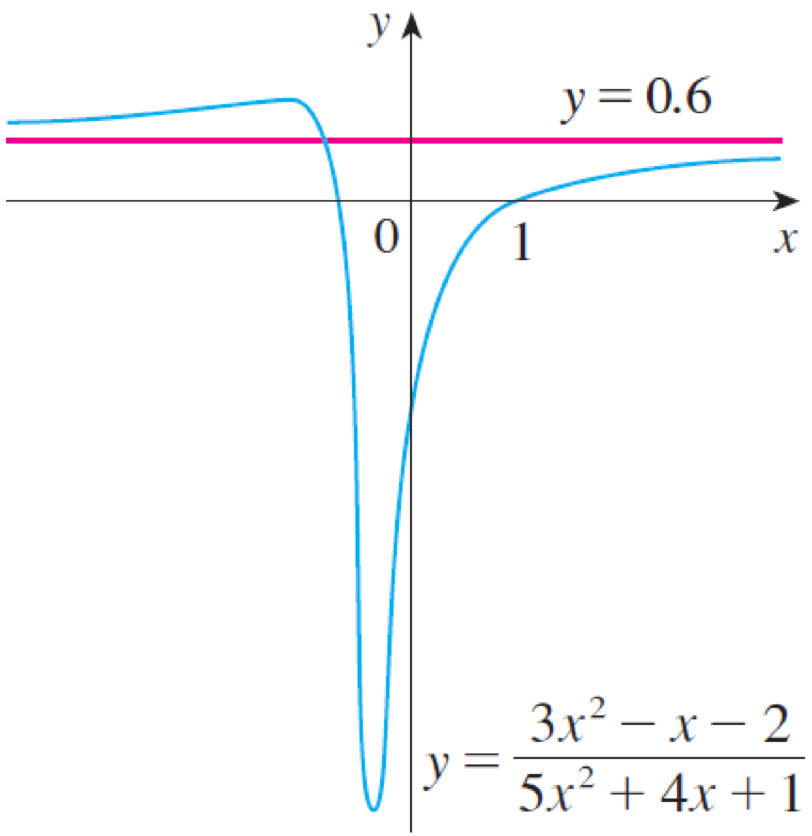


FIGURA 7

Un cálculo semejante muestra que el límite cuando $x \to -\infty$ también es $\frac{3}{5}$. En la figura 7 se ilustran los resultados de estos cálculos mostrando cómo la gráfica de la función racional dada se aproxima a la asíntota horizontal $y = \frac{3}{5}$.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 4 Encuentre la asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

SOLUCIÓN Al dividir entre x tanto el numerador como el denominador y aplicar las propiedades de los límites, tenemos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{3 - \dfrac{5}{x}} \qquad \left(\text{ya que } \sqrt{x^2} = x \text{ para } x > 0\right)$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x \to \infty} \left(3 - \dfrac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{x \to \infty} 2 + \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x \to \infty} 3 - 5 \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x}} = \frac{\sqrt{2 + 0}}{3 - 5 \cdot 0} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Por tanto, la recta $y = \sqrt{2}/3$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

En el cálculo del límite conforme $x \to -\infty$, debemos recordar que para $x < 0$, tenemos $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Así que cuando dividimos el numerador entre x, para $x < 0$ obtenemos

$$\frac{1}{x}\sqrt{2x^2+1} = -\frac{1}{\sqrt{x^2}}\sqrt{2x^2+1} = -\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} = \frac{-\sqrt{2+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}}{3-5\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Así que la recta $y = -\sqrt{2}/3$ también es una asíntota horizontal.

Es probable que haya una asíntota vertical cuando el denominador, $3x-5$, es 0; esto es, cuando $x = \frac{5}{3}$. Si x esta cerca de $\frac{5}{3}$ y $x > \frac{5}{3}$, entonces el denominador está cerca de 0 y $3x-5$ es positivo. El numerador $\sqrt{2x^2+1}$ es siempre positivo, así que $f(x)$ es positivo. Por tanto,

$$\lim_{x\to(5/3)^+}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \infty$$

Si x está cerca de $\frac{5}{3}$, pero $x < \frac{5}{3}$, entonces $3x-5 < 0$, así que $f(x)$ es negativo grande. Así,

$$\lim_{x\to(5/3)^-}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = -\infty$$

La asíntota vertical es $x = \frac{5}{3}$. Las tres asíntotas se muestran en la figura 8.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

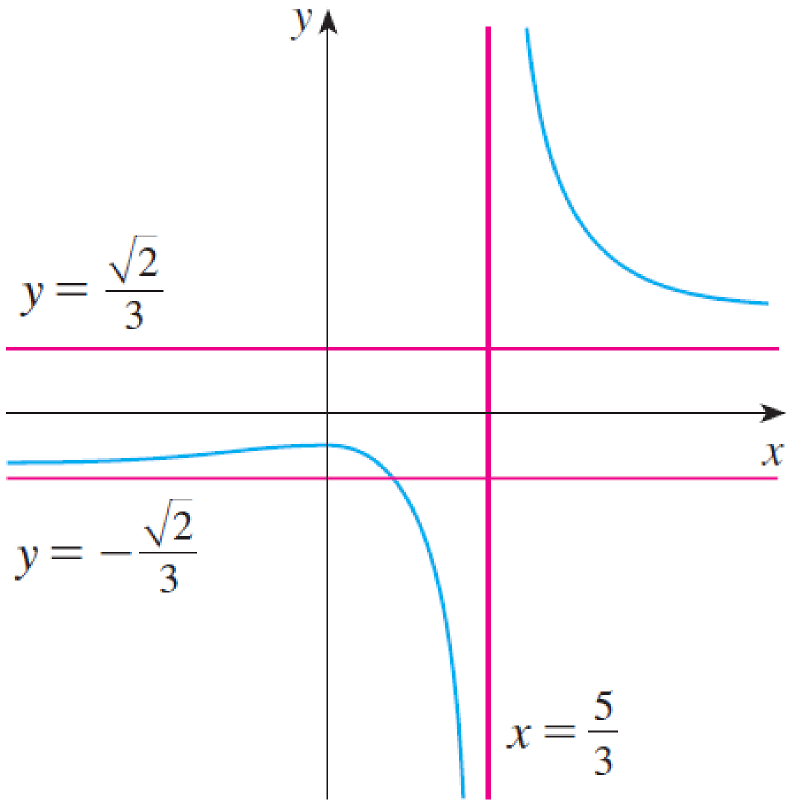


FIGURA 8

$$y = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$$

EJEMPLO 5 Calcule $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

SOLUCIÓN Ya que tanto $\sqrt{x^2+1}$ como x son muy grandes cuando x es grande, es difícil ver qué pasa con su diferencia, así que utilizamos el álgebra para reescribir la función. Primero multiplicamos el numerador y el denominador por el radical conjugado:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

Observe que el denominador de esta última expresión $\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ resulta muy grande cuando $x\to\infty$ (más grande que x). Así que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

La figura 9 ilustra este resultado.

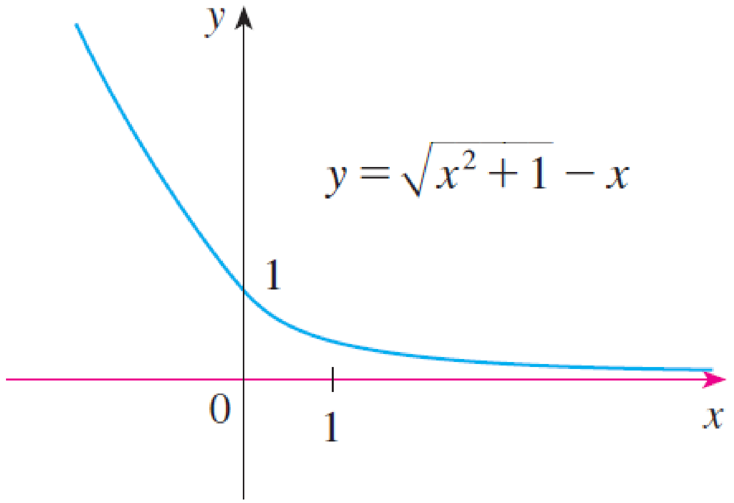


FIGURA 9

EJEMPLO 6 Evalúe el $\lim_{x\to 2^+} \arctan\left(\frac{1}{x-2}\right)$.

SOLUCIÓN Si hacemos $t = 1/(x-2)$, sabemos que $t \to \infty$ cuando $x \to 2^+$. Por tanto, por la segunda ecuación en $\boxed{4}$, tenemos

$$\lim_{x\to 2^+} \arctan\left(\frac{1}{x-2}\right) = \lim_{t\to\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$$

V **EJEMPLO 7** Evalúe $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}$.

SOLUCIÓN Si hacemos $t = 1/x$, sabemos que $t \to -\infty$ cuando $x \to 0^-$. Por tanto, por $\boxed{6}$,

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t\to -\infty} e^t = 0$$

6 $$\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$$

EJEMPLO 8 Evalúe $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Conforme x crece, los valores de $\operatorname{sen} x$ oscilan infinitamente entre 1 y -1, así que no se aproximan a ningún número definido, por lo que $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ no existe.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Límites infinitos en el infinito

La notación

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

se utiliza para indicar que los valores de $f(x)$ se hacen más grandes cuando x se hace muy grande. Un significado similar está asociado con los siguientes símbolos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

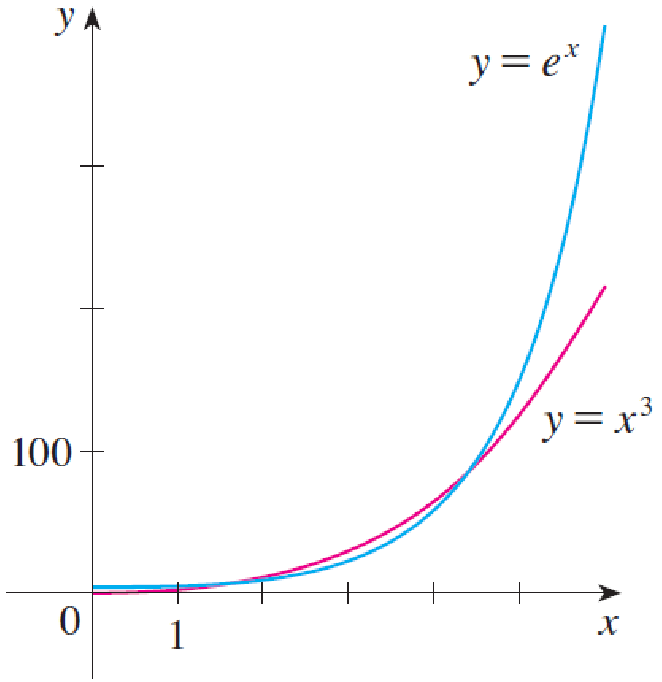


FIGURA 12
e^x es mucho más grande que x^3 cuando x es muy grande.

EJEMPLO 9 Encuentre $\lim_{x \to \infty} x^3$ y $\lim_{x \to -\infty} x^3$.

SOLUCIÓN Cuando x se hace más grande, x^3 también se hace grande. Por ejemplo,

$$10^3 = 1\,000 \qquad 100^3 = 1\,000\,000 \qquad 1\,000^3 = 1\,000\,000\,000$$

De hecho, podemos hacer x^3 tan grande como queramos tomando x suficientemente grande. Por esta razón, podemos escribir

$$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$$

Del mismo modo, cuando x es muy grande negativo, también lo es x^3. Así que

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Estos límites establecidos también pueden verse en la gráfica de $y = x^3$ en la figura 11.

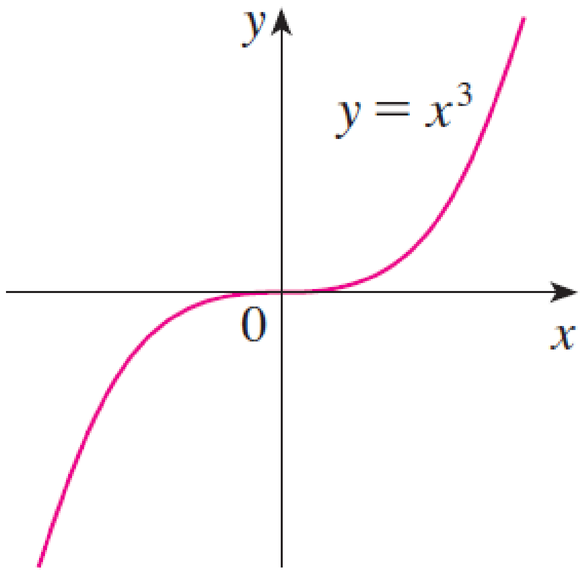


FIGURA 11
$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO 10 Encuentre $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 - x)$.

SOLUCIÓN Sería un **error** escribir

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x^2 - \lim_{x \to \infty} x = \infty - \infty$$

Las leyes de los límites no pueden aplicarse a límites infinitos porque ∞ no es un número ($\infty - \infty$ no puede definirse). Sin embargo, *podemos* escribir

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x(x - 1) = \infty$$

debido a que tanto x como $x - 1$ se hacen arbitrariamente grandes y, por tanto, también su producto.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 11 Encuentre $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + x}{3 - x}$.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 3, dividimos el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x en el denominador, que es justamente x:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x + 1}{\dfrac{3}{x} - 1} = -\infty$$

ya que $x + 1 \to \infty$ y $3/x - 1 \to -1$ conforme $x \to \infty$.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

V EJEMPLO 12 Trace la gráfica de $y = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$ encontrando las intersecciones y sus límites cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

SOLUCIÓN La intersección con el eje y es $f(0) = (-2)^4(1)^3(-1) = -16$ y las intersecciones con el eje x, $x = 2, -1, 1$ se encuentran haciendo $y = 0$. Note que puesto que $(x - 2)^4$ es positivo, la función no cambia de signo en 2; así que la gráfica no cruza el eje x en 2. La gráfica interseca el eje x en -1 y 1.

Cuando x es un número positivo muy grande, todos los factores son muy grandes, así que

$$\lim_{x \to \infty} (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1) = \infty$$

Cuando x es un número negativo muy grande, el primero de los factores es un número positivo muy grande y los factores segundo y tercero son negativos muy grandes, así que

$$\lim_{x \to -\infty} (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1) = \infty$$

Combinando esta información, obtenemos el esbozo de la gráfica de la figura 13.

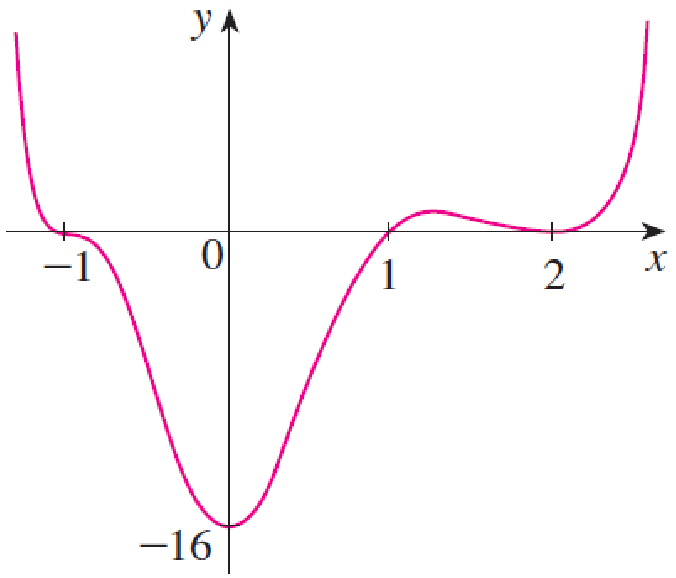


FIGURA 13
$y = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Límites infinitos:

Son de la forma $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

Límites al infinito:

Son de la forma $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$, L $\in \Re$

Límites infinitos al infinito:

Son de la forma $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Asíntotas oblicuas o inclinadas

Algunas curvas tienen asíntotas que son *oblicuas*; esto es, no son horizontales ni verticales. Si

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

entonces la recta $y = mx + b$ se llama **asíntota inclinada** (oblicua) porque la distancia vertical entre la curva $y = f(x)$ y la recta $y = mx + b$ tiende a cero, como en la figura 12. (Existe una situación similar si hacemos $x \to -\infty$.) Para funciones racionales, las asíntotas inclinadas se producen cuando el grado del numerador es uno más que el grado del denominador. En tal caso la ecuación de la asíntota oblicua puede encontrarse por división larga como en el siguiente ejemplo.

Asíntota oblicua o inclinada: La recta y = mx + b es una asíntota oblicua

si: $\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(mx+b)\right]=0$, donde $\displaystyle m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$, $\displaystyle b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]$

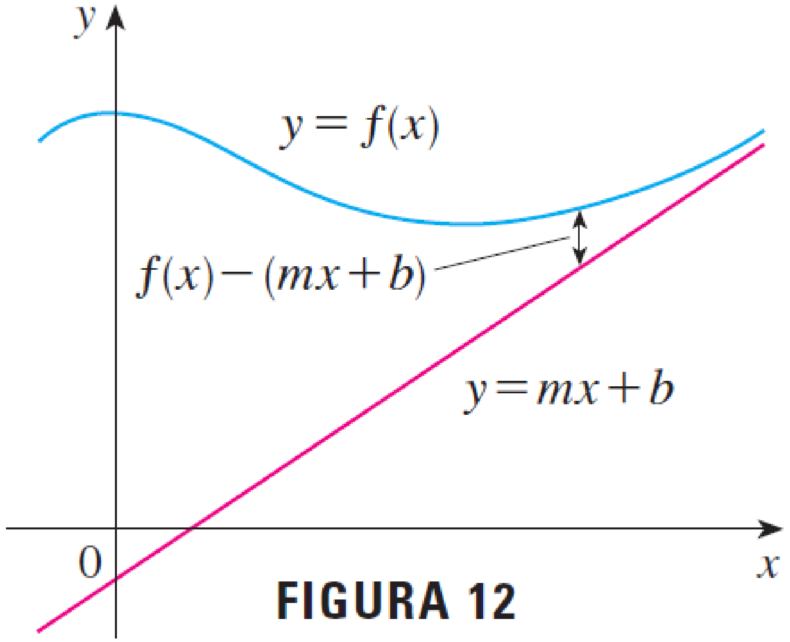


FIGURA 12

Ejemplo:

Encuentre las asíntotas oblicuas para: $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

Solución 1:

Para funciones racionales, las asíntotas inclinadas se producen cuando el grado del numerador es uno más que el grado del denominador. En tal caso la ecuación de la asíntota oblicua puede encontrarse por división de polinomios.

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$f(x) - x = -\frac{x}{x^2 + 1} = -\frac{\dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{1}{x^2}} \to 0 \quad \text{conforme } x \to \pm\infty$$

Así que la recta $y = x$ es una asíntota oblicua.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Solución 2:

La recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicuas si:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (mx + b)] = 0$$

Donde:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3+x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{x^2+1} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3 - x^3 - x}{x^2+1}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-x}{x^2+1}\right] = 0$$

Obteniendo que la asíntota oblicua es: $y = x$

Asíntotas verticales:

La recta x = a es una asíntota vertical de y = f(x) si verifica al menos:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \text{ o } \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Asíntotas horizontales:

La recta y = b es una asíntota horizontal de y = f(x) si verifica:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = b \text{ o } \lim_{x\to -\infty} f(x) = b$$

Asíntotas oblicuas o inclinadas:

La recta y = mx + b es una asíntota oblicua y = f(x) si:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \left[f(x) - (mx+b)\right] = 0 \, ,$$

donde $m = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \; b = \lim_{x\to \pm\infty} \left[f(x) - mx\right]$

Ejercicios

1. Explique con sus propias palabras el significado de cada uno de los siguientes límites

a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 5$ b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$

2. a) ¿Puede la gráfica de $y = f(x)$ intersecar una asíntota vertical? ¿Puede intersecar una asíntota horizontal? Ilustre trazando gráficas.

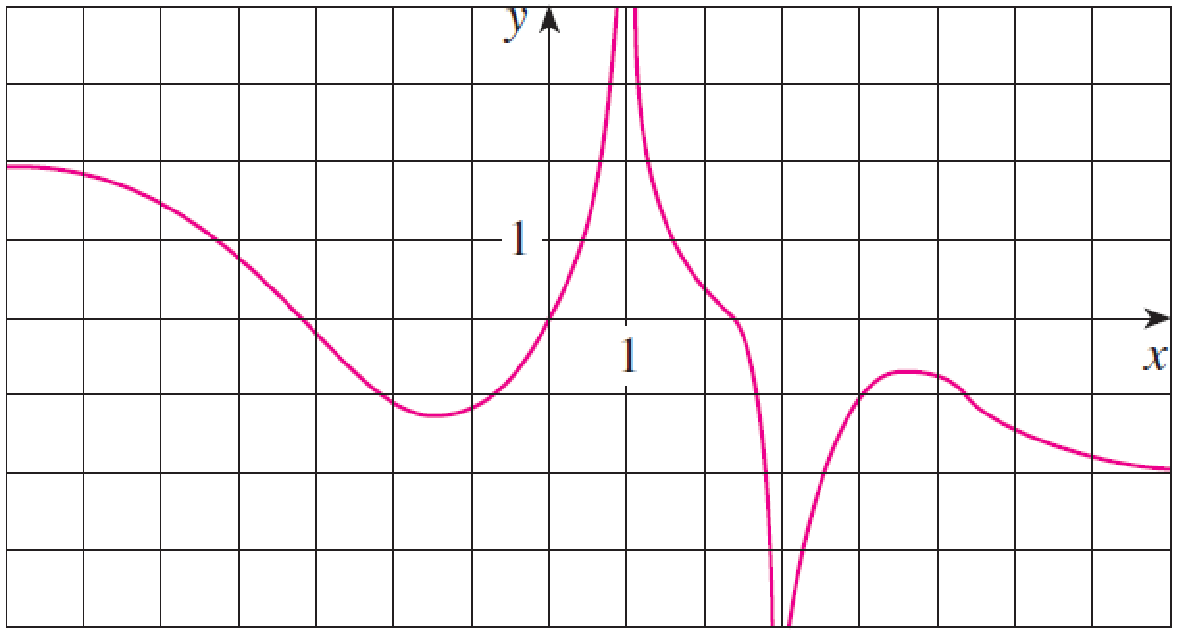
b) ¿Cuántas asíntotas horizontales puede tener la gráfica de $y = f(x)$? Trace gráficas que muestren las posibilidades.

3. Para la función f cuya gráfica está dada, establezca lo siguiente:

a) $\lim_{x \to \infty} f(x)$ b) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

c) $\lim_{x \to 1} f(x)$ d) $\lim_{x \to 3} f(x)$

e) Las ecuaciones de las asíntotas



5–10 Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones dadas.

5. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 5, \quad \lim\limits_{x\to \infty} f(x) = -5$

6. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty,$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 0, \quad f(0) = 0$

7. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0,$
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

8. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 3, \quad \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty,$ f es impar

9. $f(0) = 3, \quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 4, \quad \operatorname*{lií}\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2,$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \infty,$
$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 3$

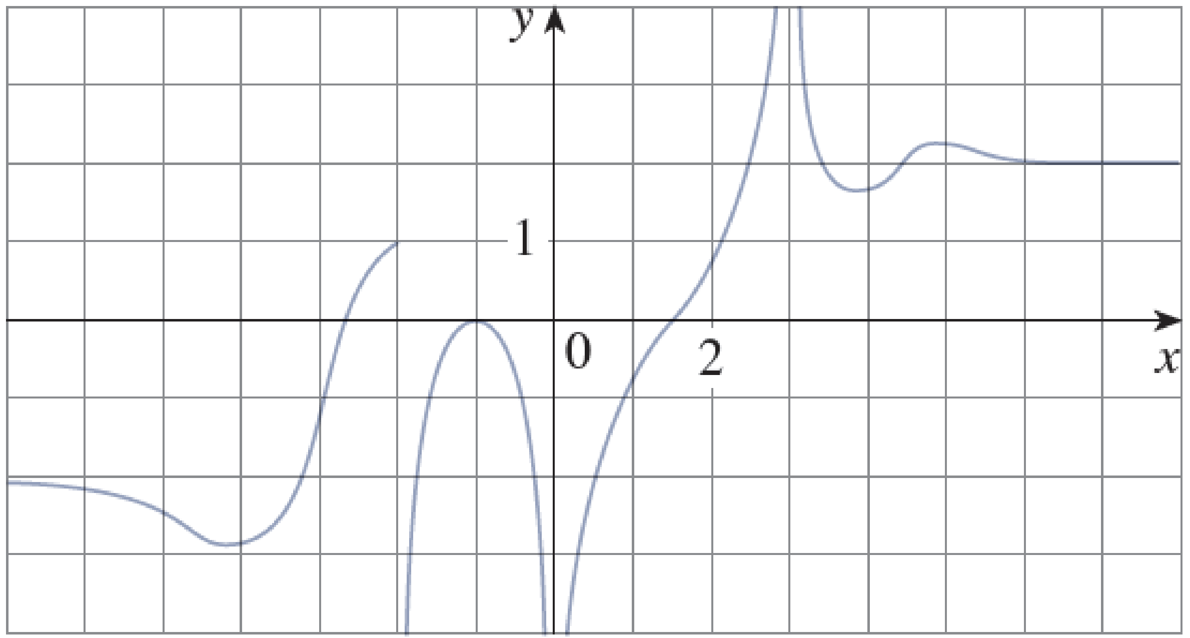
10. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 2, \quad f(0) = 0,$ f es par

4. Para la función g cuya gráfica está dada, determine lo siguiente.

(a) $\lim\limits_{x\to \infty} g(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

(e) $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)$ (f) Las ecuaciones de las asíntotas



15–42 Encuentre el límite o demuestre que no existe.

15. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x+3}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x-x^2}{2x^2-7}$

19. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t}+t^2}{2t-t^2}$

21. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$

23. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+4x^6}}{2-x^3}$

25. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+3x^2}}{4x-1}$

27. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)$

28. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+3x}+2x\right)$

16. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{x-4}$

18. $\displaystyle\lim_{y\to\infty} \frac{2-3y^2}{5y^2+4y}$

20. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{t-t\sqrt{t}}{2t^{3/2}+3t-5}$

22. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$

24. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+4x^6}}{2-x^3}$

26. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x+3x^2}{4x-1}$

34. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1+x^6}{x^4+1}$

38. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2+1}$

29. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$

30. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(x+\sqrt{x^2+2x}\right)$

31. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-3x^2+x}{x^3-x+2}$

33. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x^2+2x^7)$

35. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \arctan(e^x)$

37. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1-e^x}{1+2e^x}$

39. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (e^{-2x}\cos x)$

41. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} [\ln(1+x^2)-\ln(1+x)]$

42. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} [\ln(2+x)-\ln(1+x)]$

13. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-7}{5x^2+x-3}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{9x^3+8x-4}{3-5x+x^3}}$

32. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (e^{-x}+2\cos 3x)$

36. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}}$

40. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \tan^{-1}(\ln x)$

47–52 Encuentre las asíntotas horizontal y vertical de cada curva. Si tiene un dispositivo de graficación, verifique su trabajo al trazar la gráfica de la curva y determinando las asíntotas.

47. $y = \dfrac{5 + 4x}{x + 3}$

48. $y = \dfrac{2x^2 + 1}{3x^2 + 2x - 1}$

49. $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$

50. $y = \dfrac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$

51. $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$

52. $y = \dfrac{2e^x}{e^x - 5}$

61–64 Encuentre la ecuación de la asíntota inclinada en cada una de las funciones dadas. No trace la gráfica de la curva.

61. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

62. $y = \dfrac{4x^3 - 10x^2 - 11x + 1}{x^2 - 3x}$

63. $y = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{x^2 - x - 2}$

64. $y = \dfrac{-6x^4 + 2x^3 + 3}{2x^3 - x}$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

60–64 Determine los límites cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$. Utilice esta información junto con las intersecciones para trazar la gráfica como en el ejemplo 12.

60. $y = 2x^3 - x^4$

61. $y = x^4 - x^6$

62. $y = x^3(x + 2)^2(x - 1)$

63. $y = (3 - x)(1 + x)^2(1 - x)^4$

64. $y = x^2(x^2 - 1)^2(x + 2)$

65. (a) Utilice el teorema de la compresión para evaluar $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

(b) Trace la gráfica de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$. ¿Cuántas veces cruza la gráfica la asíntota?

REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín