Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

ENCUENTRO 12.3

Sección 3.11: Funciones hiperbólicas, límites, funciones hiperbólicas inversas y sus derivadas.







Ciertas combinaciones pares e impares de las funciones exponenciales e^x y e^{-x} surgen tan a menudo en las matemáticas y sus aplicaciones que merecen recibir un nombre especial. En muchos aspectos son similares a las funciones trigonométricas y tienen la misma relación con la hipérbola que las funciones trigonométricas tienen con la circunferencia. Por esta razón, se les llama en forma colectiva **funciones hiperbólicas**, y de manera individual se les conoce como **seno hiperbólico**, **coseno hiperbólico**, y así sucesivamente

Universidad Pontificia Bolivariana

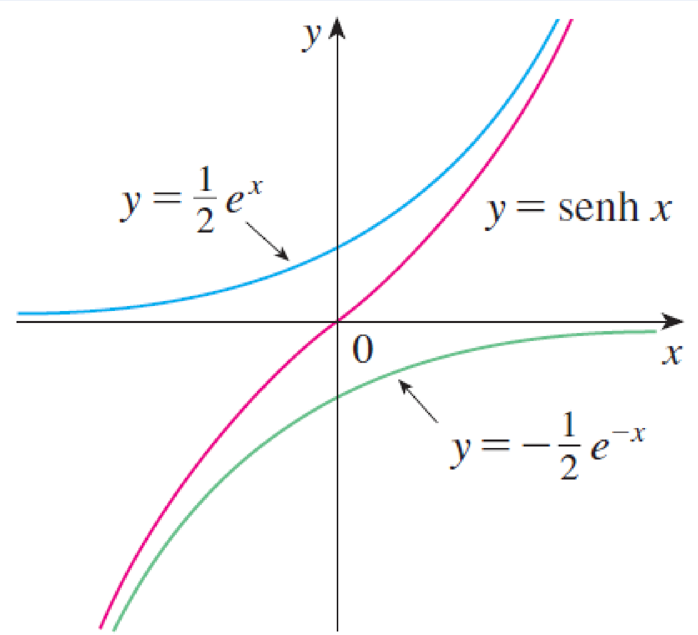
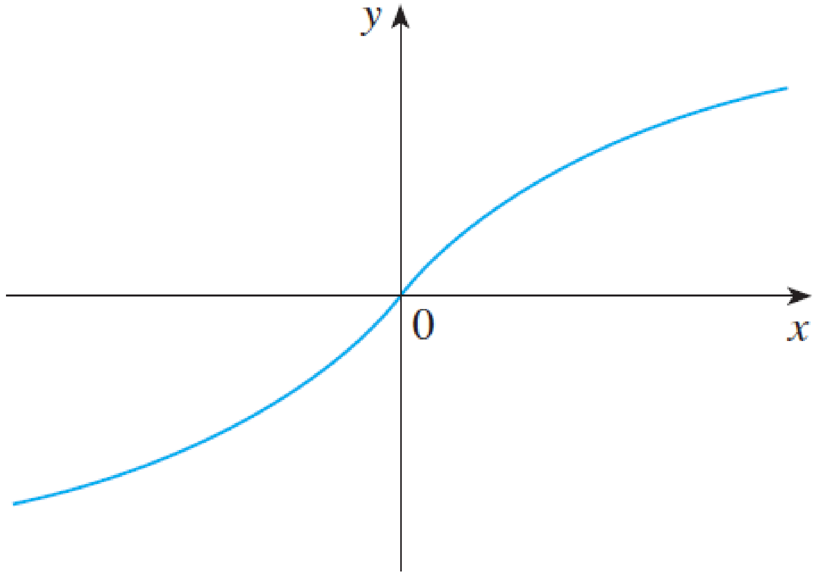
Fundada en 1936

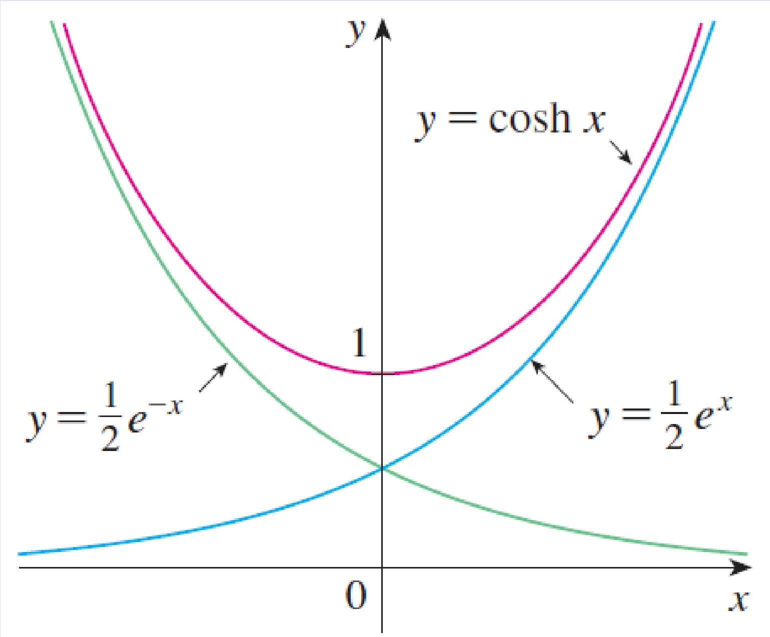
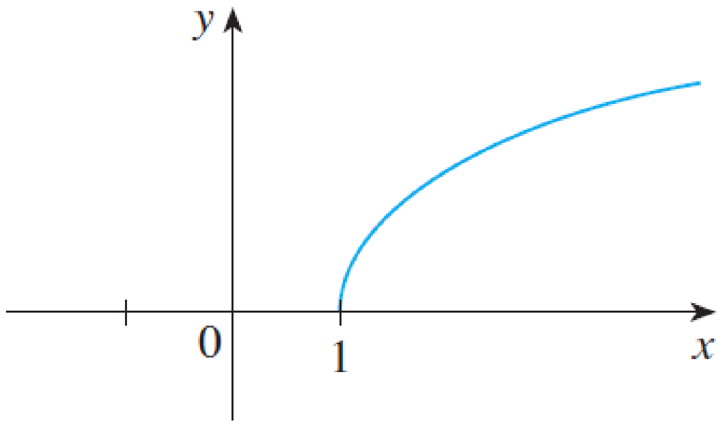
Definición de las funciones hiperbólicas

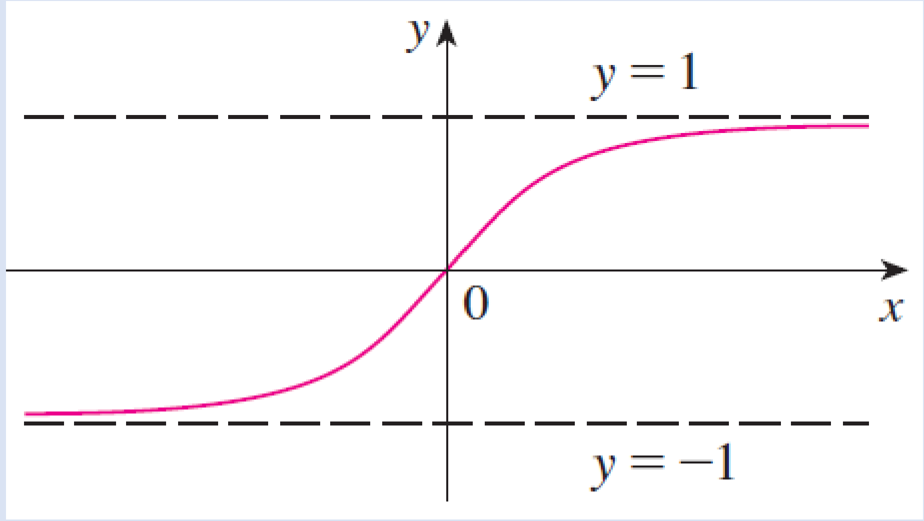
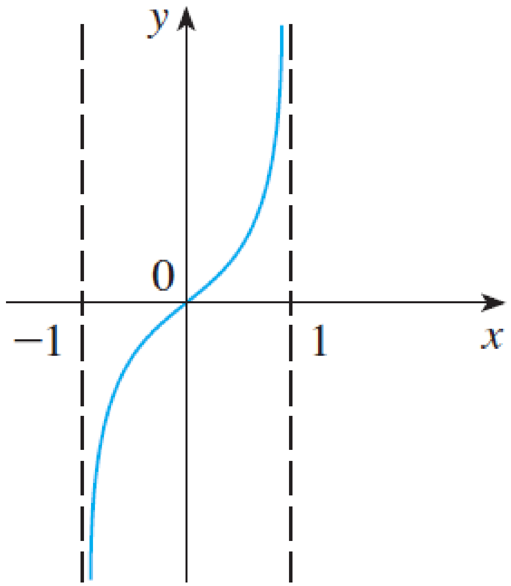
$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

Función hiperbólica	Dominio	Rango	Gráfica
$y = senhx$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$y = senh^{-1}x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	

Función hiperbólica	Dominio	Rango	Gráfica
$y = coshx$	$\mathbb{R}$	$[1, +\infty)$	
$y = cosh^{-1}x$	$[1, +\infty)$	$\mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$	

Función hiperbólica	Dominio	Rango	Gráfica
$y = tanhx$	$\mathbb{R}$	(-1, 1)	
$y = tanh^{-1}x$	$(-1, 1)$	$\mathbb{R}$	

Función hiperbólica	Dominio	Rango	Gráfica
$y = \coth x$			
$y = \coth^{-1} x$			

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Función hiperbólica	Dominio	Rango	Gráfica
$y = \operatorname{sech} x$			
$y = \operatorname{sech}^{-1} x$			

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Función hiperbólica	Dominio	Rango	Gráfica
$y = \mathrm{csch} x$			
$y = \mathrm{csch}^{-1} x$			

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Aplicaciones

Las aplicaciones en la ciencia y la ingeniería se tienen siempre que una entidad física como la luz, velocidad, electricidad o la radiactividad, se absorbe o se extingue en forma gradual, puesto que el decaimiento puede representarse mediante funciones hiperbólicas. La aplicación más famosa es el uso del coseno hiperbólico para describir la forma de un cable colgante. Puede demostrarse que si un cable pesado y flexible (como los que se usan para las líneas telefónicas o eléctricas) se tiende entre dos puntos a la misma altura, entonces el cable toma la forma de una curva con ecuación $y = c + a \cosh(x/a)$ que se denomina *catenaria* (véase la figura 4). (Esta palabra proviene de la palabra latina *catena* que significa "cadena".)

Otras aplicaciones de las funciones hiperbólicas aparecen en la descripción de las olas del mar: la velocidad de una ola con longitud L que se mueve a través de un cuerpo de agua con profundidad d se modela por la función

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad (véase la figura 5).

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

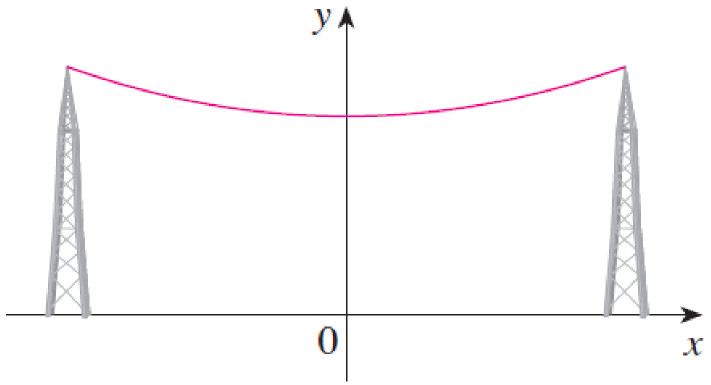


FIGURA 4
Catenaria $y = c + a \cosh(x/a)$

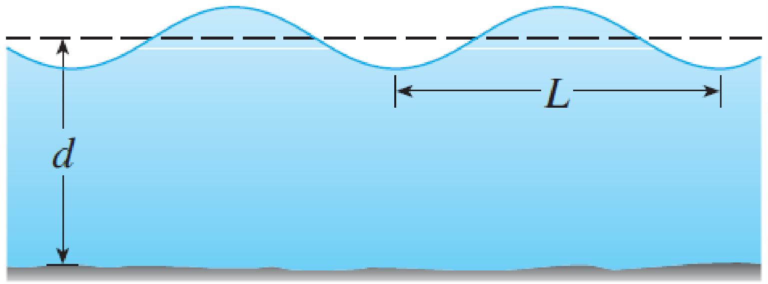


FIGURA 5
Ola oceánica idealizada

Las funciones hiperbólicas satisfacen un número de identidades que son similares a las muy bien conocidas identidades trigonométricas. A continuación se enlistan algunas de ellas.

Identidades hiperbólicas

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x \qquad \cosh(-x) = \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \qquad 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Ejercicios

Sección 3.11. 24, 30 al 45

1–6 Calcule el valor numérico de las expresiones siguientes.

1. (a) $\operatorname{senh} 0$ (b) $\cosh 0$

2. (a) $\tanh 0$ (b) $\tanh 1$

3. (a) $\cosh(\ln 5)$ (b) $\cosh 5$

4. (a) $\operatorname{senh} 4$ (b) $\operatorname{senh}(\ln 4)$

5. (a) $\operatorname{sech} 0$ (b) $\cosh^{-1} 1$

6. (a) $\operatorname{senh} 1$ (b) $\operatorname{senh}^{-1} 1$

23. Utilice las definiciones de las funciones hiperbólicas para determinar cada uno de los límites siguientes.

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} \tanh x$ (b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \tanh x$

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{senh} x$ (d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{senh} x$

(e) $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{sech} x$ (f) $\lim\limits_{x \to \infty} \coth x$

(g) $\lim\limits_{x \to 0^+} \coth x$ (h) $\lim\limits_{x \to 0^-} \coth x$

(i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{csch} x$ (j) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{senh} x}{e^x}$

20. Si $\tanh x = \frac{12}{13}$, calcule los valores de las otras funciones hiperbólicas en x.

21. Si $\cosh x = \frac{5}{3}$ y $x > 0$, calcule los valores de las otras funciones hiperbólicas en x.

Tarea: Complemente las siguientes tablas

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

V EJEMPLO 1 Demuestre que a) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ y b) $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$.

SOLUCIÓN

a) $$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

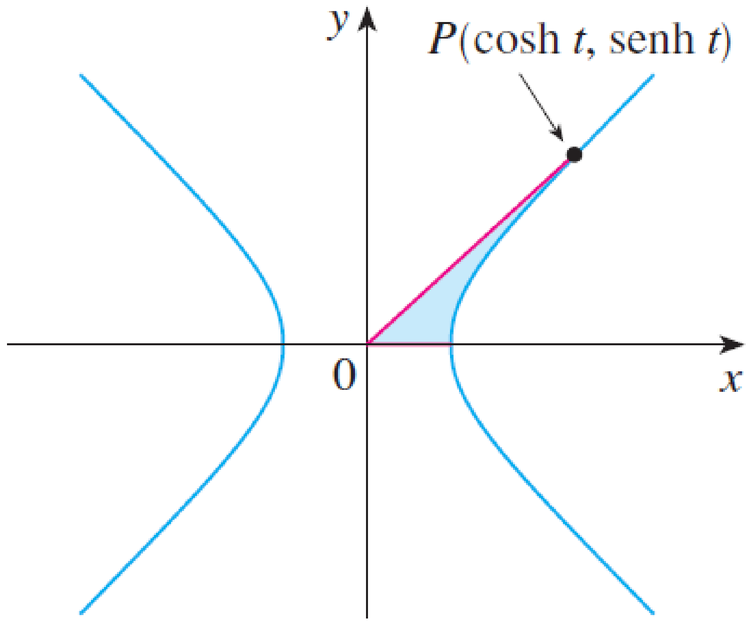
b) Empecemos con la identidad demostrada en el inciso (a):

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

Si dividimos los dos lados por $\cosh^2 x$, obtenemos

$$1 - \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

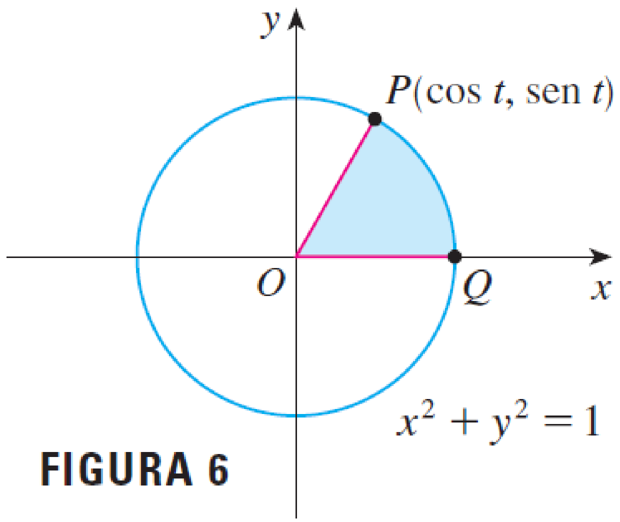
o bien $$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$



$x^2 - y^2 = 1$

FIGURA 7

Si t es cualquier número real, entonces el punto $P(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ queda en la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ porque $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$ y $\cosh t \geqslant 1$. Pero ahora t no representa la medida de un ángulo. Resulta que t representa el doble del área del sector hiperbólico sombreado de la figura 7, de la misma manera que en el caso trigonométrico t representa el doble del área del sector circular sombreado en la figura 6.



$x^2 + y^2 = 1$

FIGURA 6

Las derivadas de las funciones hiperbólicas son fáciles de calcular. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

En la tabla 1 siguiente se da una lista de las fórmulas de derivación de las funciones hiperbólicas. El resto de las demostraciones se dejan como ejercicios. Observe la similitud con las fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas, pero advierta que los signos son diferentes en algunos casos.

1 Derivadas de las funciones hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO 2 Cualquiera de estas reglas de derivación puede combinarse con la regla de la cadena. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}(\cosh\sqrt{x}) = \operatorname{senh}\sqrt{x}\cdot\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{\operatorname{senh}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Ejemplo:

Halle la derivada de: $f(x) = \frac{xsenh(^{x}/_{3})-\sqrt{9+x^2}}{Ln(1-x^2)}$

$$f'(x) = \frac{Ln(1-x^2)\left[xcosh(^{x}/_{3})\frac{1}{3} + senh(^{x}/_{3}) - \frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}}\right] - \left(xsenh(^{x}/_{3}) - \sqrt{9+x^2}\right)\frac{-2x}{1-x^2}}{\left(Ln(1-x^2)\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{3}cosh(^{x}/_{3}) + senh(^{x}/_{3}) - \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}}{Ln(1-x^2)} + \frac{2x\left(xsenh(^{x}/_{3}) - \sqrt{9+x^2}\right)}{\left(Ln(1-x^2)\right)^2(1-x^2)}$$

Funciones hiperbólicas inversas

De acuerdo con las figuras 1 y 3, senh x y tanh x son funciones uno a uno por lo que tienen funciones inversas denotadas por $\operatorname{senh}^{-1} x$ y $\tanh^{-1} x$. En la figura 2 se observa que cosh x no es uno a uno, pero que cuando queda restringida al dominio $[0, \infty)$ se transforma en uno a uno. La función coseno hiperbólico inversa se define como la inversa de esta función restringida.

2

$$y = \operatorname{senh}^{-1} x \iff \operatorname{senh} y = x$$

$$y = \cosh^{-1} x \iff \cosh y = x \quad \text{y} \quad y \geqslant 0$$

$$y = \tanh^{-1} x \iff \tanh y = x$$

Puesto que las funciones hiperbólicas se definen en términos de las funciones exponenciales, no sorprende que las funciones hiperbólicas inversas pueden expresarse en términos de logaritmos. En particular, se tiene que:

3 $$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

4 $$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad x \geqslant 1$$

5 $$\tanh^{-1} x = \tfrac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \qquad -1 < x < 1$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 3 Demuestre que $\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

SOLUCIÓN Sea $y = \operatorname{senh}^{-1}x$. En tal caso

$$x = \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

por lo que

$$e^y - 2x - e^{-y} = 0$$

o bien, si multiplicamos por e^y,

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

Esto es ni más ni menos que una ecuación cuadrática en e^y:

$$(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$$

Al resolver la ecuación cuadrática, obtenemos

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Observe que $e^y > 0$, pero $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ (porque $x < \sqrt{x^2 + 1}$). Así que el signo menos es inadmisible, por lo que tenemos que

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Por tanto,

$$y = \ln(e^y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

6 Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\coth^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Las funciones hiperbólicas inversas son derivables porque las funciones hiperbólicas también lo son. Las fórmulas de la tabla 6 pueden demostrarse por el método de las funciones inversas o mediante la derivación de las fórmulas 3, 4 y 5.

V EJEMPLO 4 Demuestre que $\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

SOLUCIÓN 1 Sea $y = \operatorname{senh}^{-1}x$. Entonces $\operatorname{senh} y = x$. Si se deriva esta ecuación en forma implícita respecto a x, obtenemos

$$\cosh y \frac{dy}{dx} = 1$$

Puesto que $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$ y $\cosh y \geqslant 0$, se tiene $\cosh y = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y}$, de modo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

SOLUCIÓN 2 De acuerdo con la ecuación 3 (demostrada en el ejemplo 3) se obtiene

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) &= \frac{d}{dx}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \\
&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\,\frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \\
&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\sqrt{x^2 + 1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}
\end{aligned}
$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

V **EJEMPLO 5** Determine $\dfrac{d}{dx}[\tanh^{-1}(\operatorname{sen} x)]$.

SOLUCIÓN Con la ayuda de la tabla 6 y de la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{d}{dx}[\tanh^{-1}(\operatorname{sen} x)] = \frac{1}{1 - (\operatorname{sen} x)^2}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)$$

$$= \frac{1}{1 - \operatorname{sen}^2 x}\cos x = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \sec x$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Ejemplos

Encuentre la derivada. Simplifique tanto como sea posible.

42. $y = x \tanh^{-1} x + \ln \sqrt{1 - x^2}$

$$y' = x\frac{1}{1-x^2} + tanh^{-1}x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$
$$y' = x\frac{1}{1-x^2} + tanh^{-1}x - \frac{x}{1-x^2}$$
$$y' = tanh^{-1}x$$

57. ¿En qué punto de la curva $y = \cosh x$ la tangente tiene pendiente 1?

$$y' = senhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} = 1$$

$$e^{2x} - 1 = 2e^x \rightarrow e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$$

Sea $t = e^x;\ t^2 - 2t - 1 = 0$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$t = e^x = 1 + \sqrt{2}; x = Ln\left(1 + \sqrt{2}\right); y = \sqrt{2}$$

Fundada en 1936

Ejemplo 55

a) Demuestre que cualquier función de la forma

$$y = A \operatorname{senh} mx + B \cosh mx$$

satisface la ecuación diferencial $y'' = m^2 y$.

$$y = Asenhmx + Bcoshmx$$
$$y' = Amcoshmx + Bmsenhmx$$
$$y'' = Am^2senhmx + Bm^2coshmx = m^2(Asenhmx + Bcoshmx) = m^2y$$

b) Determine $y = y(x)$ tal que $y'' = 9y$, $y(0) = -4$ y $y'(0) = 6$.

$$y'' = Am^2senhmx + Bm^2coshmx = 9y;\ m^2 = 9; m = \pm 3$$
$$y(0) = -4 = B$$
$$y'(0) = 6 = Am; A = \pm 2$$

Si m = 3; A = 2

$$y = 2senh3x - 4cosh3x$$

Si m = -3; A = -2

$$y = -2senh(-3x) - 4cosh(-3x) = 2senh3x - 4cosh3x$$

Ejemplo

Sea $y = coshx$. Hallar $y^{(6)}, y^{(n)}$

$$y' = senhx$$
$$y'' = coshx$$
$$y''' = senhx$$
$$y^{(4)} = coshx$$
$$y^{(5)} = senhx$$
$$y^{(6)} = coshx$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)} = \begin{cases} coshx & n \in par \\ senhx & n \in impar \end{cases}$$

Ejercicios

24. Demuestre las fórmulas dadas en la tabla 1 para las derivadas de las funciones (a) cosh, (b) tanh, (c) csch , (d) sech (e) coth.

30–45 Encuentre la derivada. Simplifique tanto como sea posible.

30. $f(x) = e^x \cosh x$

31. $f(x) = \tanh \sqrt{x}$

32. $g(x) = \operatorname{senh}^2 x$

33. $h(x) = \operatorname{senh}(x^2)$

34. $h(x) = \ln(\cosh x)$

35. $g(x) = \cosh(\ln x)$

36. $y = \operatorname{sech} x\,(1 + \ln \operatorname{sech} x)$

37. $y = e^{\cosh 3x}$

38. $f(t) = \dfrac{1 + \operatorname{senh} t}{1 - \operatorname{senh} t}$

39. $g(t) = t \coth \sqrt{t^2 + 1}$

40. $y = \operatorname{senh}(\cosh x)$

41. $G(x) = \dfrac{1 - \cosh x}{1 + \cosh x}$

43. $y = x \operatorname{senh}^{-1}(x/3) - \sqrt{9 + x^2}$

44. $y = \operatorname{sech}^{-1}(e^{-x})$

42. $y = x \tanh^{-1}x + \ln \sqrt{1 - x^2}$

45. $y = \coth^{-1}(\sec x)$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín