Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

ENCUENTRO 6.3

Sección 1.4: Funciones exponenciales

Funciones exponenciales

La función $f(x) = 2^x$ se llama una *función exponencial* porque la variable, x, es el exponente. No debe confundirse con la $g(x)$ de la función potencia $g(x) = x^2$, en la que la variable está en la base.

En general, una **función exponencial** es una de la forma

$$f(x) = a^x$$

donde a es una constante positiva. Recordemos el significado de esto.

Si $x = n$, donde n es un entero positivo, entonces

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

Las gráficas de los miembros de la familia de funciones $y = a^x$ se muestran en la figura 3 para varios valores de la base a. Tenga en cuenta que todas estas gráficas pasan por el mismo punto (0, 1) porque $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. Note también que cuando la base a se hace más grande, la función exponencial crece más rápidamente (para $x > 0$).

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

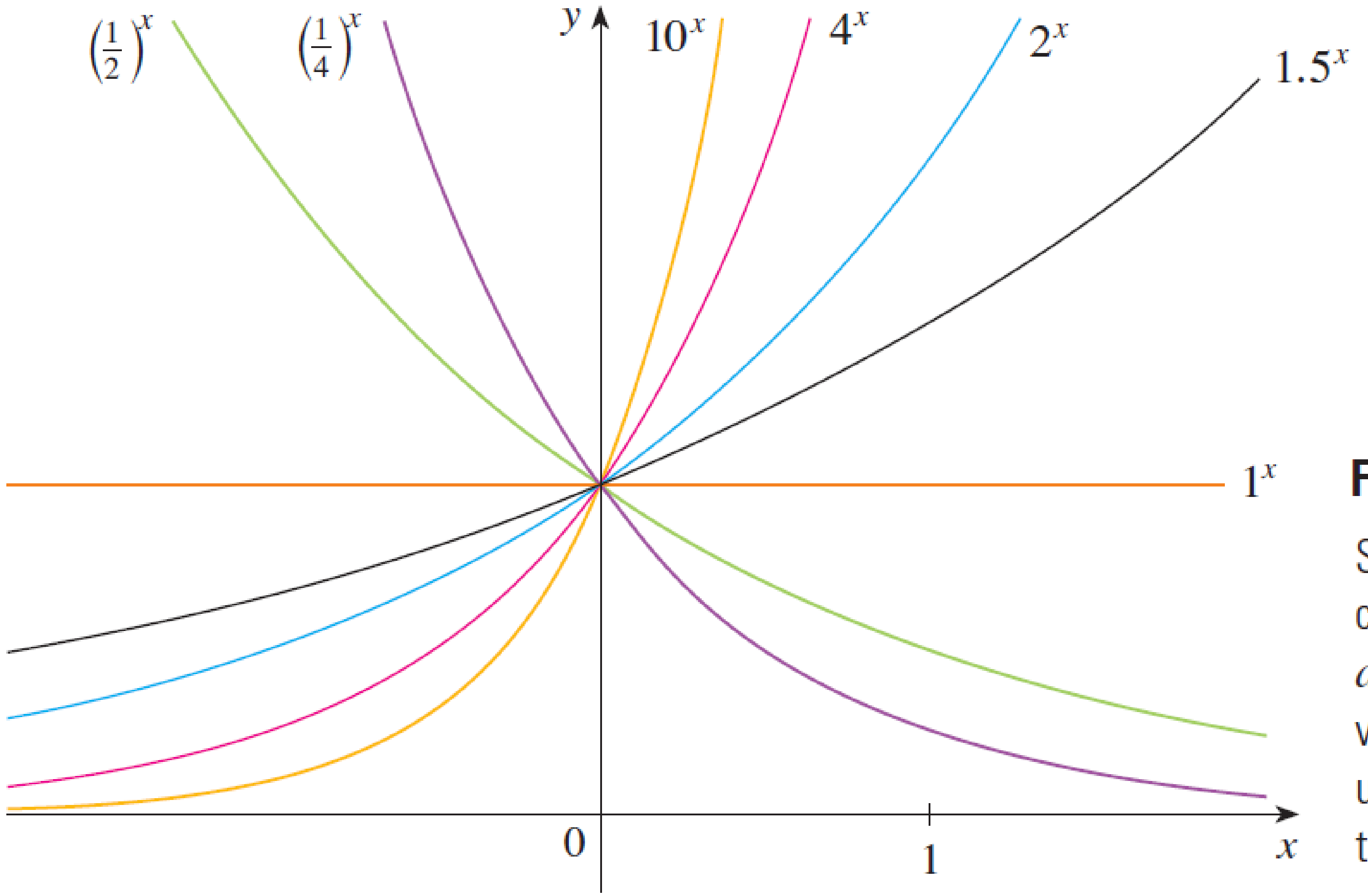


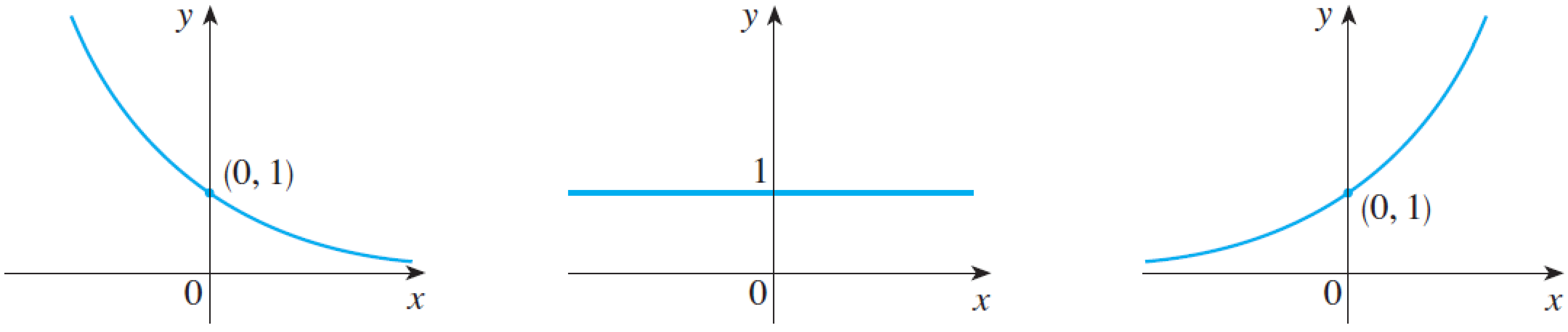
FIGURA 3

Si $0 < a < 1$, entonces a^x se aproxima a 0 cuando x es muy grande. Si $a > 1$, entonces a^x se aproxima a 0 cuando x disminuye al tomar valores negativos. En ambos casos el eje x es una asíntota horizontal. Estas cuestiones se tratan en la sección 2.6.

Puede verse en la figura 3 que existen básicamente tres tipos de funciones exponenciales $y = a^x$. Si $0 < a < 1$, la función exponencial decrece; si $a = 1$, es una constante, y si $a > 1$, crece. Estos tres casos se ilustran en la figura 4. Observe que si $a \neq 1$, entonces la función exponencial $y = a^x$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. Note también que, dado que $(1/a)^x = 1/a^x = a^{-x}$ es justamente la reflexión de la gráfica de $y = a^x$ sobre el eje y.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936



a) $y = a^x,\ 0 < a < 1$ b) $y = 1^x$ c) $y = a^x,\ a > 1$

FIGURA 4

Una de las razones de la importancia de la función exponencial se encuentra en las siguientes propiedades. Si x y y son números racionales, entonces estas leyes son bien conocidas del álgebra elemental. Puede demostrarse que seguirá siendo así para números reales x y y arbitrarios.

Leyes de los exponentes Si a y b son números positivos, y los números x y y son reales cualesquiera, entonces

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ **3.** $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

EJEMPLO 1 Grafique la función $y = 3 - 2^x$ y determine su dominio y rango.

SOLUCIÓN Primero reflejamos la gráfica de $y = 2^x$ [se muestran en las figuras 2 y 5a)] sobre el eje x para obtener la gráfica de $y = -2^x$ en la figura 5b). Después desplazamos 3 unidades hacia arriba la gráfica de $y = -2^x$ para obtener la gráfica de $y = 3 - 2^x$ en la figura 5c). El dominio es $\mathbb{R}$, y el rango es $(-\infty, 3)$.

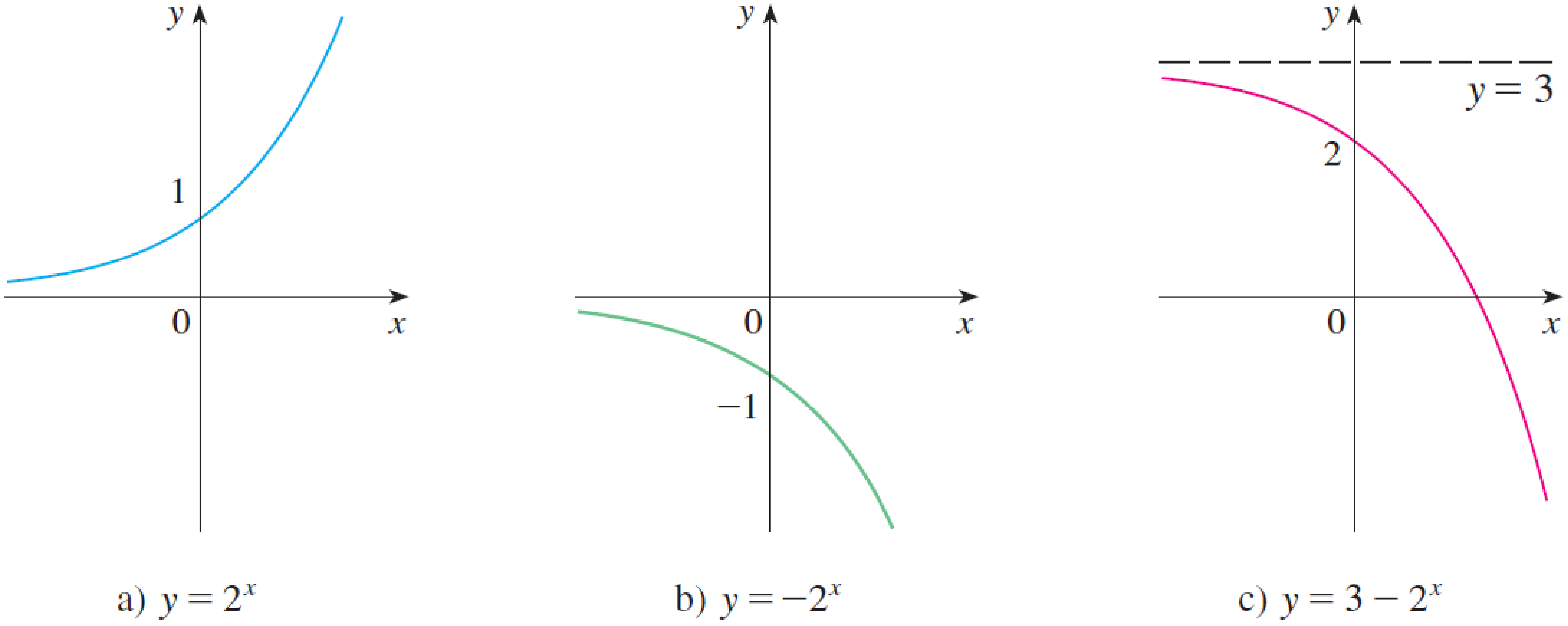


FIGURA 5

V **EJEMPLO 2** Utilice un dispositivo de graficación para comparar la función exponencial $f(x) = 2^x$ con la de la función potencia $g(x) = x^2$. ¿Cuál función crece más rápidamente cuando x es muy grande?

SOLUCIÓN La figura 6 muestra ambas funciones representadas gráficamente en el rectángulo de vista $[-2, 6]$ por $[0, 40]$. Vemos que las gráficas se intersectan tres veces, pero para $x > 4$ la gráfica de $f(x) = 2^x$ permanece por encima de la gráfica de $g(x) = x^2$. La figura 7 da una visión más global y muestra que para grandes valores de x, la función exponencial $y = 2^x$ crece mucho más rápidamente que la función potencia $y = x^2$.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

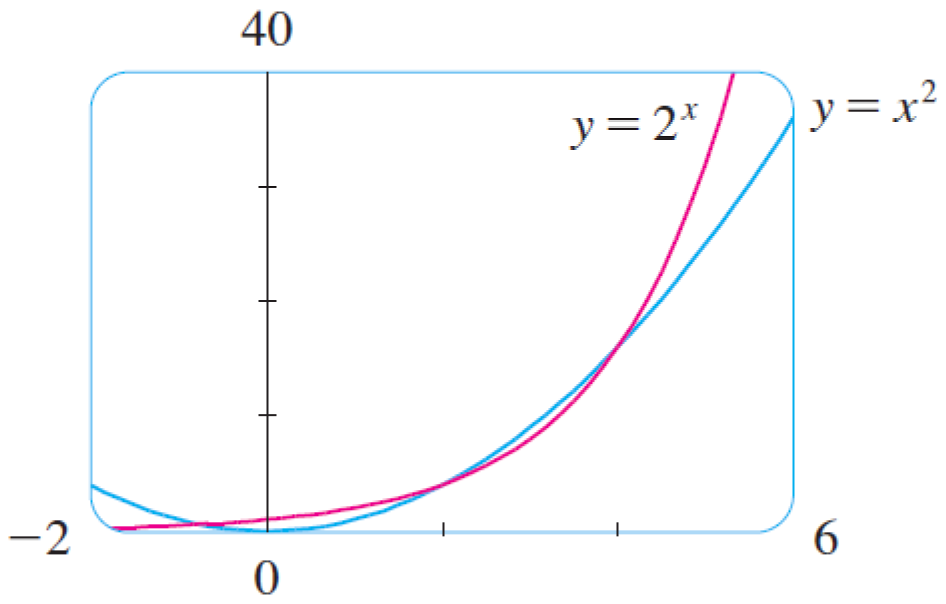


FIGURA 6

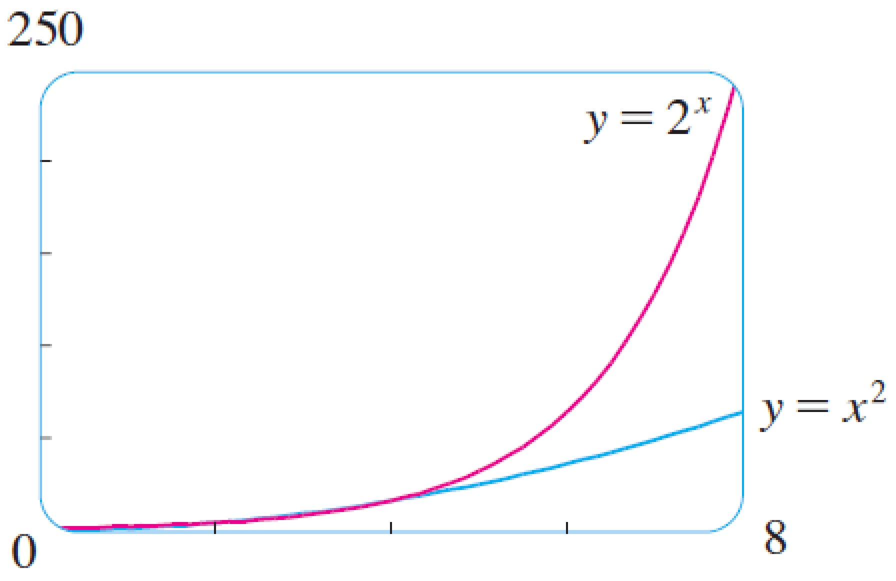


FIGURA 7

En el ejemplo 2 se muestra que $y = 2^x$ aumenta más rápidamente que $y = x^2$. Para demostrar lo rápido que $f(x) = 2^x$ aumenta, vamos a realizar el siguiente experimento mental. Supongamos que empezamos con un trozo de papel de una milésima de pulgada de espesor y lo doblamos por la mitad 50 veces. Cada vez que dobla el papel por la mitad, el grosor del papel se duplica, por lo que el grosor del papel resultante sería $2^{50}/1\,000$ pulgadas. ¿De qué grosor cree usted que es? ¡Más de 17 millones de millas!

Aplicaciones de las funciones exponenciales

La función exponencial ocurre con mucha frecuencia en los modelos matemáticos de las ciencias naturales y sociales. Aquí le indicamos brevemente cómo surge en la descripción del crecimiento de una población. En capítulos posteriores seguiremos estas y otras aplicaciones en mayor detalle.

En primer lugar, consideramos una población de bacterias en un medio nutritivo homogéneo. Supongamos que por muestreo de la población a ciertos intervalos se determina que la población se duplica cada hora. Si el número de bacterias en el tiempo t es $p(t)$, donde t se mide en horas, y la población inicial es $p(0) = 1\,000$, entonces tenemos

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1\,000$$

$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1\,000$$

$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1\,000$$

De este patrón, parece ser que, en general:

$$p(t) = 2^t \times 1\,000 = (1\,000)2^t$$

Esta función de la población es un múltiplo constante de la función exponencial $y = 2^t$, por lo que muestra el rápido crecimiento que hemos observado en las figuras 2 y 7. En condiciones ideales (espacio ilimitado, nutrición y la ausencia de enfermedad), este crecimiento exponencial es típico de lo que realmente ocurre en la naturaleza.

¿Qué pasa con la población humana? La tabla 1 muestra los datos de la población del mundo en el siglo XX, y en la figura 8 se muestra la gráfica de dispersión correspondiente.

TABLA 1

t	Población (millones)
0	1 650
10	1 750
20	1 860
30	2 070
40	2 300
50	2 560
60	3 040
70	3 710
80	4 450
90	5 280
100	6 080
110	6 870

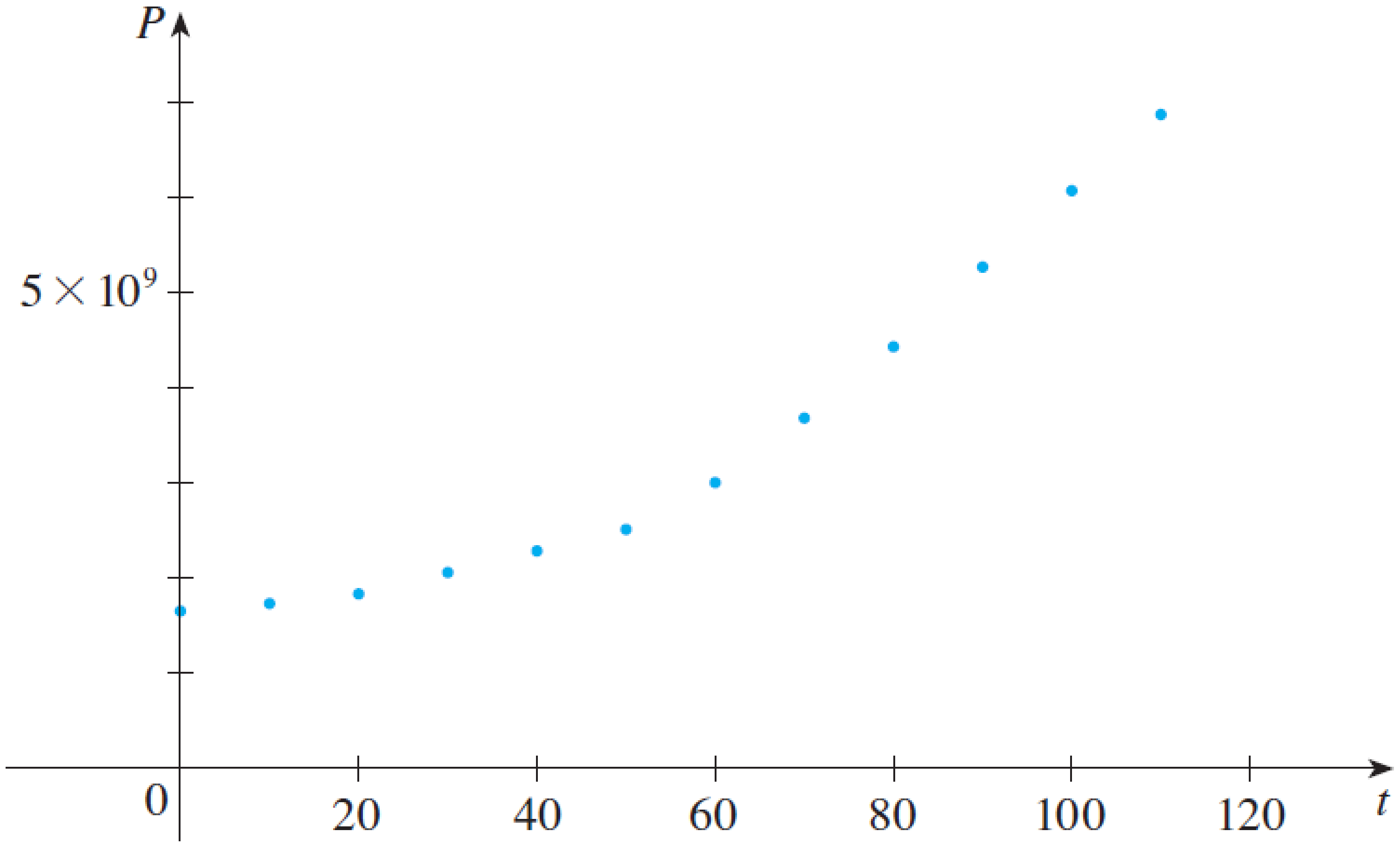


FIGURA 8 Gráfica de dispersión para el crecimiento de la población mundial

El patrón de los puntos de datos en la figura 8 sugiere un crecimiento exponencial, por eso usamos una calculadora graficadora con capacidad de regresión exponencial para aplicar el método de mínimos cuadrados y obtener el modelo exponencial

$$P = (1436.53) \cdot (1.01395)^t$$

donde $t = 0$ corresponde a 1900. La figura 9 muestra la gráfica de esta función exponencial junto con los puntos de datos originales. Vemos que la curva exponencial ajusta razonablemente bien en el conjunto de datos. El periodo de crecimiento relativamente lento de la población se explica por las dos Guerras Mundiales y la Gran Depresión de la década de 1930.

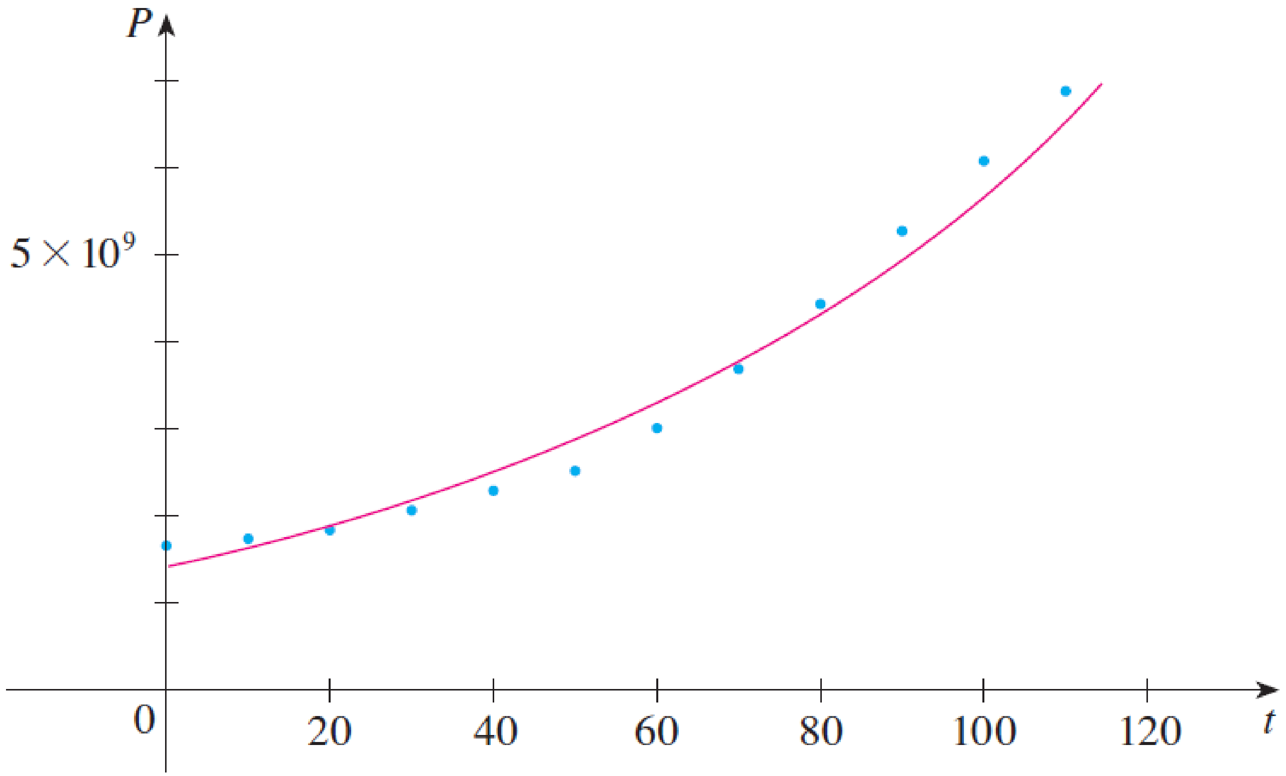


FIGURA 9
Modelo exponencial para el crecimiento de población

El número *e*

De todas las posibles bases para una función exponencial, hay una que es más conveniente para los fines del Cálculo. La elección de una base a está influida por la forma en que la gráfica de $y = a^x$ cruza el eje y. Las figuras 10 y 11 muestran las rectas tangentes a las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$ en el punto (0, 1). (Se definirán las rectas tangentes de manera precisa en la sección 2.7. Para los presentes fines, puede considerarse que la recta tangente a una gráfica exponencial en un punto es la recta que toca la gráfica sólo en ese punto.) Si medimos las pendientes de estas rectas tangentes en (0, 1), encontramos que $m \approx 0.7$ para $y = 2^x$ y $m \approx 1.1$ para $y = 3^x$.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

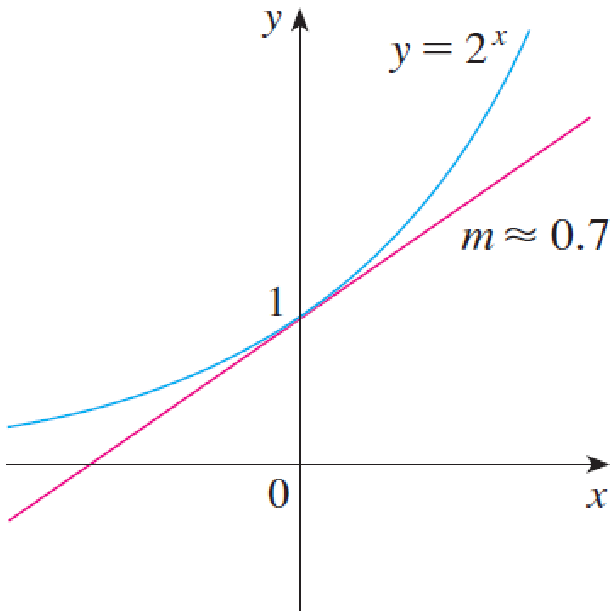


FIGURA 10

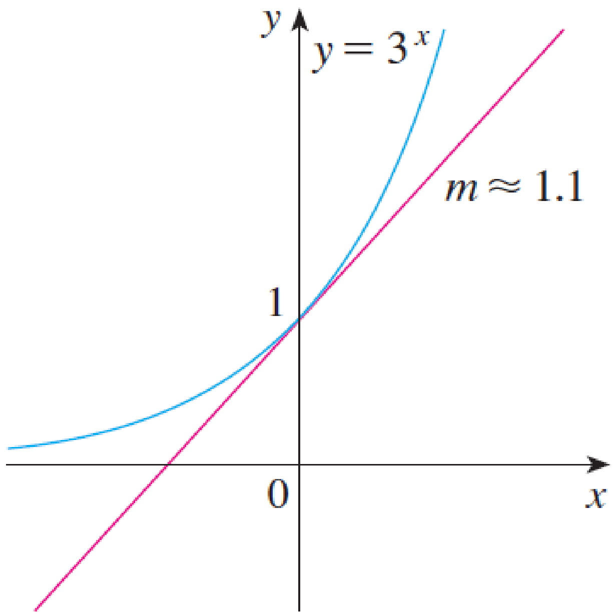


FIGURA 11

Comparado con su único rival π, *e* es la chica nueva del barrio. En tanto que π es más augusto y tiene un solemne pasado que se remonta a los babilonios, *e* no está tan lastrada por el peso de la historia. La constante *e* es juvenil y vibrante y siempre está presente cuando se trata de «crecimiento». Tanto si se trata de poblaciones, como de dinero u otras cantidades físicas, el crecimiento invariablemente implica a *e*.

Tomado de: Crilly, Tony. 50 cosas que hay que saber sobre matemáticas.

Resulta que, como veremos en el capítulo 3, algunas de las fórmulas del Cálculo quedarán muy simplificadas si elegimos la base a para la que la pendiente de la tangente de recta a $y = a^x$ en (0, 1) es *exactamente* 1. (Véase la figura 12.) De hecho, *existe* tal número y se denota con la letra e. (Esta notación fue elegida por el matemático suizo Leonhard Euler en 1727, probablemente porque es la primera letra de la palabra *exponencial*.) En vista de las figuras 10 y 11, no causa ninguna sorpresa que el número e se encuentre entre 2 y 3 y que la gráfica de $y = e^x$ se halle entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

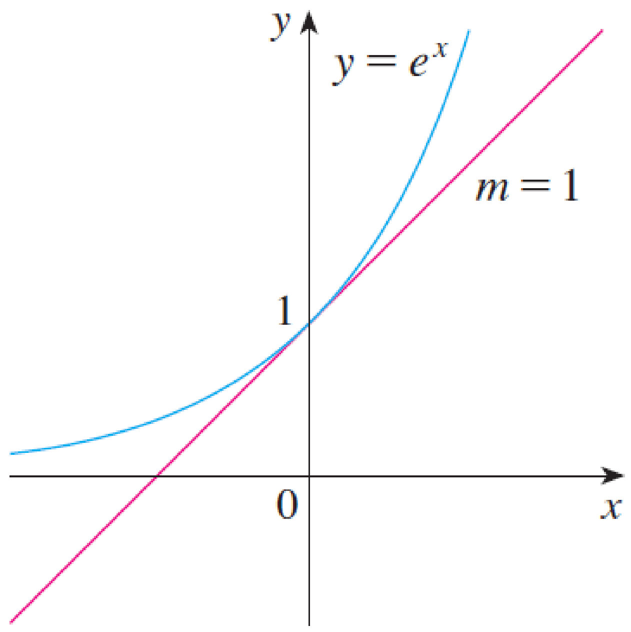
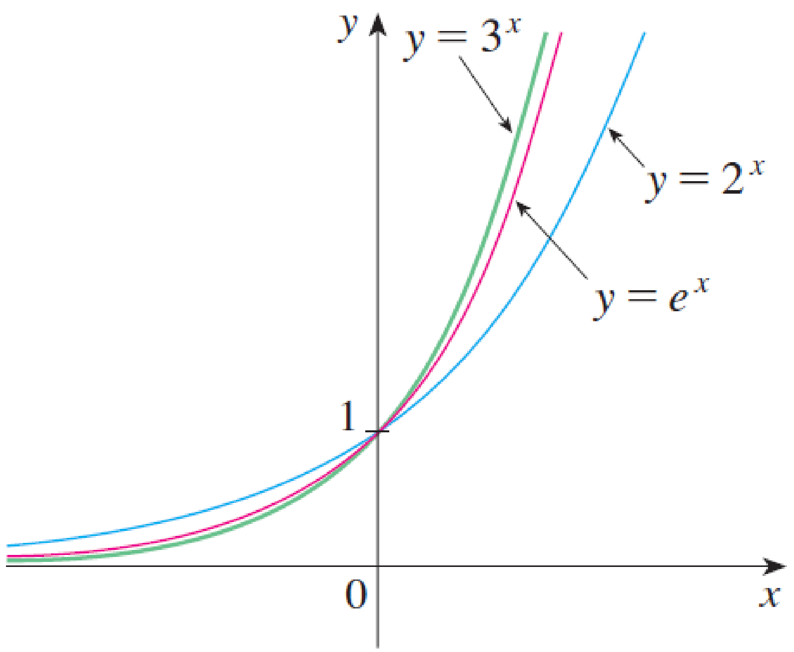


FIGURA 12

La función exponencial natural interseca al eje y con una pendiente igual a 1

A la función $f(x) = e^x$ la llamamos **función exponencial natural**.



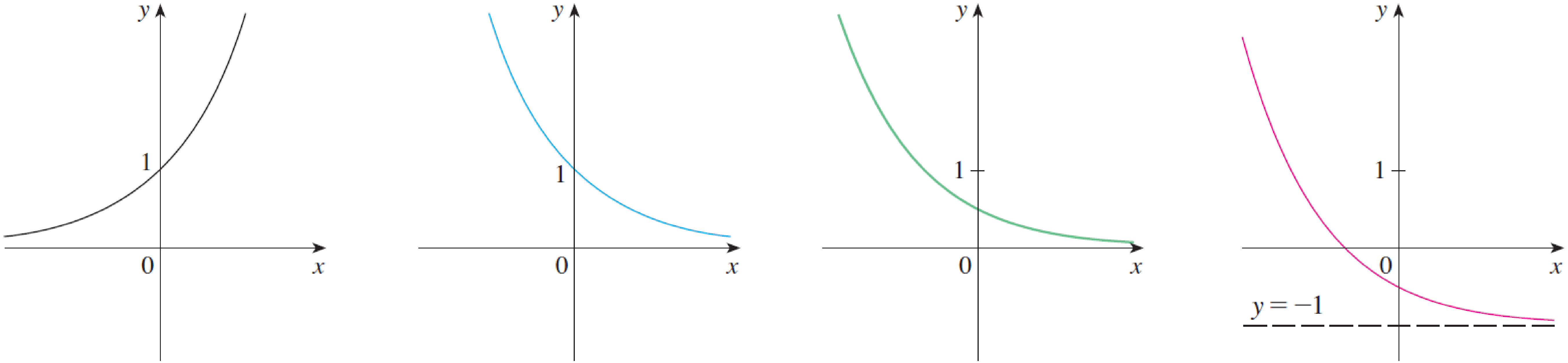
El valor de e, con una aproximación de cinco decimales, es $e \approx 2.71828$

V **EJEMPLO 3** Grafique la función $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ y establezca el dominio y el rango.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

SOLUCIÓN Empezamos con la gráfica de $y = e^x$ de las figuras 12 y 14a) y la reflejamos sobre el eje y para obtener la gráfica de $y = e^{-x}$ en la figura 14b). (Observe que la gráfica interseca el eje y con una pendiente de -1.) A continuación, se comprime la gráfica verticalmente por un factor de dos para obtener la gráfica de $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ en la figura 14c). Por último, se desplazará la gráfica hacia abajo una unidad para obtener la gráfica deseada en la figura 14d). El dominio es $\mathbb{R}$, y el rango es $(-1, \infty)$.



a) $y = e^x$ b) $y = e^{-x}$ c) $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ d) $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$

FIGURA 14

Ejercicios

11-16 Haga un bosquejo de la gráfica de cada una de las siguientes funciones. No utilice calculadora. Sólo utilice las gráficas en las figuras 3 y 13 y, si es necesario, las transformaciones de la sección 1.3.

11. $y = 10^{x+2}$

12. $y = (0.5)^x - 2$

13. $y = -2^{-x}$

14. $y = e^{|x|}$

15. $y = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$

16. $y = 2(1 - e^x)$

17. A partir de la gráfica de $y = e^x$, escriba la ecuación de la gráfica que resulta de

a) desplazarla 2 unidades hacia abajo

b) desplazarla 2 unidades a la derecha

c) reflejarla sobre el eje x

d) reflejarla sobre el eje y

e) reflejarla sobre el eje x y luego sobre el eje y

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

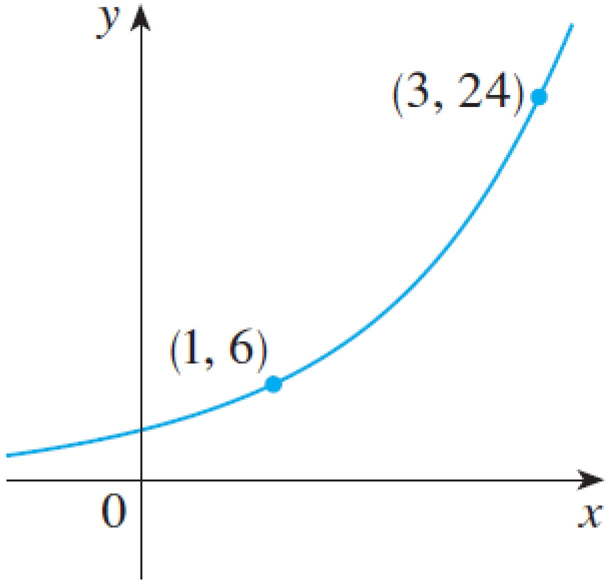
19-20 Encuentre el dominio de cada una de las siguientes funciones

19. a) $f(x) = \dfrac{1 - e^{x^2}}{1 - e^{1-x^2}}$ b) $f(x) = \dfrac{1 + x}{e^{\cos x}}$

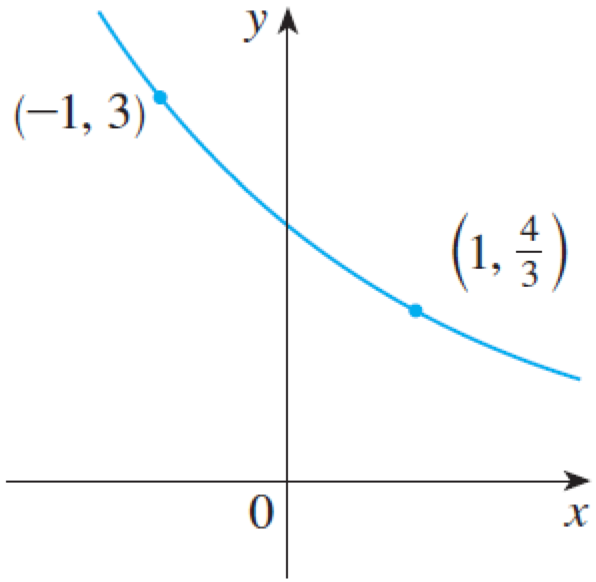
20. a) $g(t) = \text{sen}\,(e^{-t})$b) $g(t) = \sqrt{1 - 2^t}$

21-22 Encuentre la función exponencial $f(x) = Ca^x$ correspondiente a cada una de las siguientes gráficas:

21.



22.



23. Si $f(x) = 5^x$, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 5^x\left(\frac{5^h - 1}{h}\right)$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

29. Bajo condiciones ideales se sabe con certeza que una población de bacterias se duplica cada tres horas. Supongamos que inicialmente hay 100 bacterias.

a) ¿Cuál es el tamaño de la población después de 15 horas?
b) ¿Cuál es el tamaño de la población después de t horas?
c) Estime el tamaño de la población después de 20 horas.
d) Grafique la función de la población y estime el tiempo para que la población llegue a 50 000.

30. Un cultivo bacteriano se inicia con 500 bacterias y duplica su tamaño cada media hora.

a) ¿Cuántas bacterias hay después de 3 horas?
b) ¿Cuántas hay después de t horas?
c) ¿Cuántas hay después de 40 minutos?
d) Grafique la función de la población y estime el tiempo para que la población llegue a 100 000.

33. Demuestre que $f(x) = \dfrac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$ es una función impar.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín