Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

ENCUENTRO 7.3

Sección 2.3: Cálculo de límites empleando las leyes de los límites, teorema de la compresión

Leyes de los límites Suponga que c es una constante y que los límites

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

existen. Entonces

1. $\displaystyle \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2. $\displaystyle \lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

3. $\displaystyle \lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$

4. $\displaystyle \lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

5. $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad \text{si } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$ donde n es un número entero positivo

7. $\lim_{x \to a} c = c$

8. $\lim_{x \to a} x = a$

9. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ donde n es un número entero positivo

10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ donde n es un número entero positivo

(Si n es par, suponemos que $a > 0$.)

11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ donde n es un número entero positivo

$\left[\text{Si } n \text{ es par, suponemos que } \lim_{x \to a} f(x) > 0.\right]$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Pasos para solucionar un límite:

1. Evaluar el límite e identificar qué clase de indeterminación presenta.

   Se podrían presentar indeterminaciones del tipo:

   $$\pm\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, +\infty-\infty, 0(\pm\infty), 1^{\pm\infty}, (\pm\infty)^0, 0^0$$

2. Factorizar, racionalizar, realizar un cambio de variable
3. Simplificar
4. Evaluar

Unicidad del límite:

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, entonces es único

EJEMPLO 2 Evalúe los siguientes límites y justifique cada paso

a) $\lim\limits_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$ b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

SOLUCIÓN

a)

$$\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) = \lim_{x \to 5} (2x^2) - \lim_{x \to 5} (3x) + \lim_{x \to 5} 4 \quad \text{(por las leyes 2 y 1)}$$

$$= 2 \lim_{x \to 5} x^2 - 3 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 \quad \text{(por la ley 3)}$$

$$= 2(5^2) - 3(5) + 4 \quad \text{(por las leyes 9, 8 y 7)}$$

$$= 39$$

b) Empezamos utilizando la ley 5, pero su uso está completamente justificado sólo en la etapa final cuando vemos que los límites del numerador y el denominador existen y el límite del denominador no es cero.

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \frac{\lim_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x \to -2} (5 - 3x)} \qquad \text{(por la ley 5)}$$

$$= \frac{\lim_{x \to -2} x^3 + 2 \lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 1}{\lim_{x \to -2} 5 - 3 \lim_{x \to -2} x} \qquad \text{(por las leyes 1, 2 y 3)}$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} \qquad \text{(por las leyes 9, 8 y 7)}$$

$$= -\frac{1}{11}$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

1. Dado que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 2} h(x) = 0$$

encuentre los límites que existen. Si el límite no existe, explique por qué.

a) $\lim_{x\to 2} [f(x) + 5g(x)]$

b) $\lim_{x\to 2} [g(x)]^3$

c) $\lim_{x\to 2} \sqrt{f(x)}$

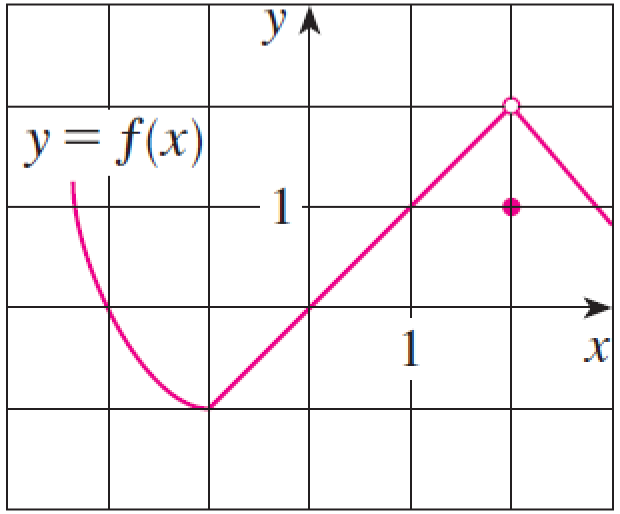
d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{3f(x)}{g(x)}$

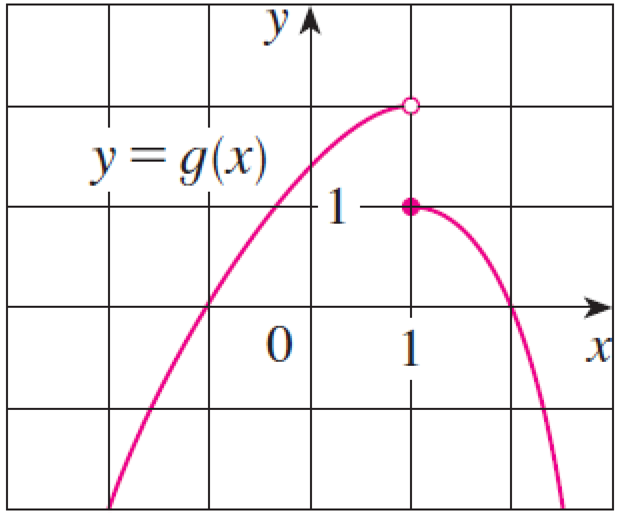
e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{g(x)}{h(x)}$

f) $\lim_{x\to 2} \dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

2. Las gráficas de f y g están dadas. Utilícelas para evaluar cada límite si es que existe. Si el límite no existe, explique por qué.





a) $\lim\limits_{x \to 2} [f(x) + g(x)]$

b) $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) + g(x)]$

c) $\lim\limits_{x \to 0} [f(x)g(x)]$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

e) $\lim\limits_{x \to 2} [x^3 f(x)]$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{3 + f(x)}$

3-9 Evalúe el límite y justifique cada paso indicando las leyes de los límites apropiadas.

3. $\lim_{x \to 3} (5x^3 - 3x^2 + x - 6)$

4. $\lim_{x \to -1} (x^4 - 3x)(x^2 + 5x + 3)$

5. $\lim_{t \to -2} \dfrac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}$

6. $\lim_{u \to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

7. $\lim_{x \to 8} (1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$

8. $\lim_{t \to 2} \left(\dfrac{t^2 - 2}{t^3 - 3t + 5} \right)^2$

9. $\lim_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2}}$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

10. a) ¿Cuál es el error en la siguiente ecuación?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

b) Considerando el inciso a), explique por qué la ecuación

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 3)$$

es correcta.

Propiedad de sustitución directa Si f es una función polinomial o una función racional y a está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 3 Encuentre $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. No podemos encontrar el límite por sustitución directa de $x = 1$ porque $f(1)$ no está definida. Tampoco podemos aplicar la ley del cociente porque el límite del denominador es 0. Ahora, necesitamos de un proceso algebraico preliminar. Factorizando el numerador como una diferencia de cuadrados:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

El numerador y el denominador tienen un factor común de $x - 1$. Cuando tomamos el límite cuando x tiende a 1, tenemos que $x \neq 1$ y, por tanto, $x - 1 \neq 0$. Así, podemos cancelar el factor común y calcular el límite como sigue:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} (x + 1) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

El límite en este ejemplo surgió en la sección 2.1 cuando intentamos hallar la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(1, 1)$.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

NOTA En el ejemplo 3 pudimos calcular el límite sustituyendo la función dada, $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$, por la función más sencilla, $g(x) = x + 1$, que posee el mismo límite. Esto es válido porque $f(x) = g(x)$, excepto cuando $x = 1$, y al calcular el límite cuando x tiende 1, no se considera qué sucede cuando x es en realidad *igual* a 1. En general, se tiene el siguiente hecho.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Si $f(x) = g(x)$ cuando $x \neq a$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$ siempre que el límite exista.

V EJEMPLO 5 Evalúe $\lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h}$.

SOLUCIÓN Si definimos

$$F(h) = \frac{(3+h)^2 - 9}{h},$$

entonces, como en el ejemplo 3, no podemos calcular $\lim_{h \to 0} F(h)$ poniendo $h = 0$, ya que $F(0)$ es indefinida. Pero si simplificamos algebraicamente a $F(h)$, encontramos que

$$F(h) = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

(Recuerde que consideramos sólo $h \neq 0$ cuando hacemos que h tienda a 0.) Así

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6$$

EJEMPLO 6 Encuentre $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

SOLUCIÓN No podemos aplicar inmediatamente la ley del cociente, ya que el límite del denominador es 0. Aquí, el álgebra preliminar consiste en la racionalización del numerador:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} &= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2+9}+3}{\sqrt{t^2+9}+3} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(t^2+9)-9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lim_{t\to 0}(t^2+9)}+3} \\
&= \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

11-32 Evalúe cada uno de los siguientes límites si éstos existen.

11. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$

12. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

13. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 5}$

14. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

15. $\lim\limits_{t\to -3} \dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

16. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

17. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(-5 + h)^2 - 25}{h}$

18. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

19. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x + 2}{x^3 + 8}$

20. $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^4 - 1}{t^3 - 1}$

21. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$

22. $\lim\limits_{u\to 2} \dfrac{\sqrt{4u + 1} - 3}{u - 2}$

23. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{x}}{4 + x}$

24. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^4 - 1}$

25. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + t} - \sqrt{1 - t}}{t}$

26. $\lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2 + t}\right)$

27. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$

28. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

29. $\lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \dfrac{1}{t}\right)$

30. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}$

31. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

32. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(x + h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Solución 20.

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^4-1}{t^3-1} \qquad F.I \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^4-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t^2+1)(t^2-1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{(t^2+1)(t+1)(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t^2+1)(t+1)}{(t^2+t+1)}=\frac{4}{3}$$

Solución 27.

$$\lim_{x\to 16}\frac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2} \qquad F.I\ \ \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 16}\frac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}=\lim_{x\to 16}\frac{(4-\sqrt{x})(4+\sqrt{x})}{x(16-x)(4+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 16}\frac{16-x}{x(16-x)(4+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{1}{x(4+\sqrt{x})}=\frac{1}{128}$$

Algunos límites se calculan mejor encontrando primero los límites por la izquierda y por la derecha. El siguiente teorema es un recordatorio de lo que se descubrió en la sección 2.2. Decimos que los límites por los dos lados existen si y sólo si ambos límites existen y son iguales.

1 Teorema $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

Cuando calculamos límites laterales, utilizamos el hecho de que las leyes de los límites también se cumplen para límites de este tipo.

EJEMPLO 7 Demuestre que $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

SOLUCIÓN Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Dado que $|x| = x$ para $x > 0$, tenemos

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Para $x < 0$ tenemos $|x| = -x$ así que

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

Por tanto, por el teorema 1

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0$$

El resultado del ejemplo 7 parece verosímil viendo la figura 3.

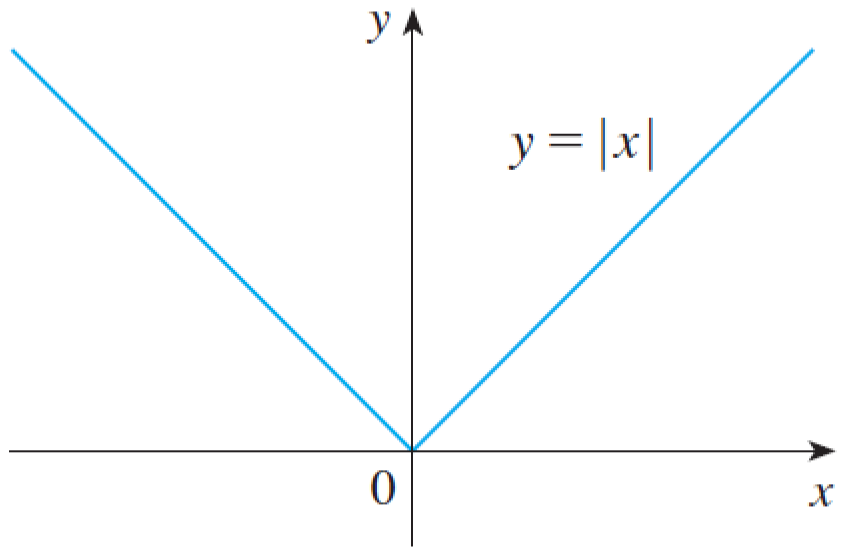


FIGURA 3

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

V **EJEMPLO 8** Demuestre que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

Puesto que los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes, se sigue, del teorema 1, que $\lim_{x \to 0} |x|/x$ no existe. La gráfica de la función $f(x) = |x|/x$ se muestra en la figura 4 y exhibe la coincidencia con los límites laterales que encontró.

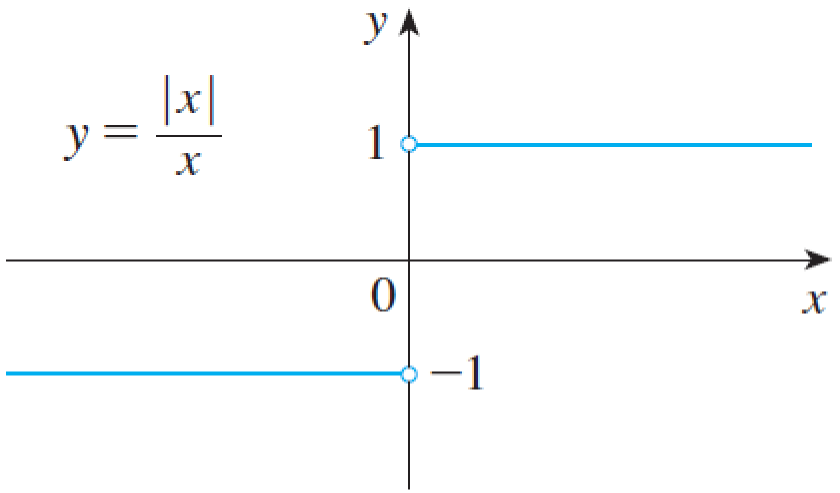


FIGURA 4

EJEMPLO 9 Si

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{si } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

determine si $\lim_{x\to 4} f(x)$ existe.

SOLUCIÓN Ya que $f(x) = \sqrt{x-4}$ para $x > 4$, tenemos

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \sqrt{x-4} = \sqrt{4-4} = 0$$

Dado que $f(x) = 8 - 2x$ para $x < 4$, tenemos

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (8 - 2x) = 8 - 2 \cdot 4 = 0$$

Los límites por la izquierda y por la derecha son iguales. Así que el límite existe y

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 0$$

La gráfica de f se muestra en la figura 5.

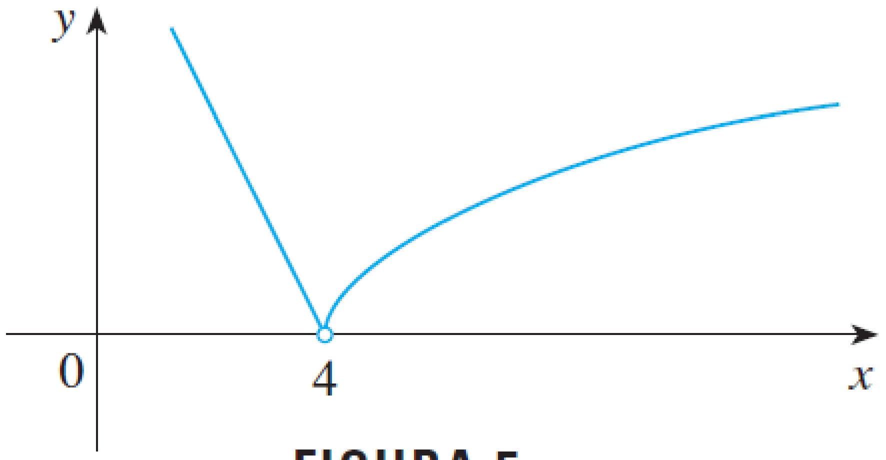


FIGURA 5

41-46 Encuentre cada uno de los siguientes límites si éstos existen. Si el límite no existe, explique por qué.

41. $\lim\limits_{x \to 3} (2x + |x - 3|)$

42. $\lim\limits_{x \to -6} \dfrac{2x + 12}{|x + 6|}$

43. $\lim\limits_{x \to 0.5^-} \dfrac{2x - 1}{|2x^3 - x^2|}$

44. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2 - |x|}{2 + x}$

45. $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|} \right)$

46. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|} \right)$

49. Sea $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$.

a) Encuentre

i) $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$ ii) $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$

b) ¿Existe $\lim_{x \to 2} g(x)$?

c) Trace la gráfica de g.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Solución 42.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

$$\lim_{x\to -6} \frac{2x+12}{|x+6|} \qquad |x+6| = \begin{cases} x+6 \;\; si \;\; x+6 \geq 0 & x \geq -6 \\ -(x+6) \;\; si \; x+6 \leq 0 & x \leq -6 \end{cases}$$

Para $x < -6$

$$\lim_{x\to -6^-} \frac{2x+12}{-(x+6)} = \lim_{x\to -6^-} \frac{2(x+6)}{-(x+6)} = \lim_{x\to -6^-} -2 = -2$$

Para $x \; > (-6)$

$$\lim_{x\to -6^+} \frac{2x+12}{x+6} = \lim_{x\to -6^+} \frac{2(x+6)}{(x+6)} = \lim_{x\to -6^+} 2 = 2$$

Por tanto $\lim_{x\to -6} \frac{2x+12}{|x+6|} \quad \nexists$

EJEMPLO 10 La **función entero mayor** está definida por $[\![x]\!]$ = el mayor entero que es menor que o igual a x. (Por ejemplo, $[\![4]\!] = 4$, $[\![4.8]\!] = 4$, $[\![\pi]\!] = 3$, $[\![\sqrt{2}\,]\!] = 1$, $[\![-\frac{1}{2}]\!] = -1$.) Demuestre que $\lim_{x\to 3} [\![x]\!]$ no existe.

SOLUCIÓN La gráfica de la función entero mayor se ilustra en la figura 6. Dado que $[\![x]\!] = 3$ para $3 \leqslant x < 4$, tenemos

$$\lim_{x\to 3^+} [\![x]\!] = \lim_{x\to 3^+} 3 = 3$$

Así que $[\![x]\!] = 2$ para $2 \leqslant x < 3$, tenemos

$$\lim_{x\to 3^-} [\![x]\!] = \lim_{x\to 3^-} 2 = 2$$

Ya que estos límites laterales no son iguales, $\lim_{x\to 3} [\![x]\!]$ no existe por el teorema 1.

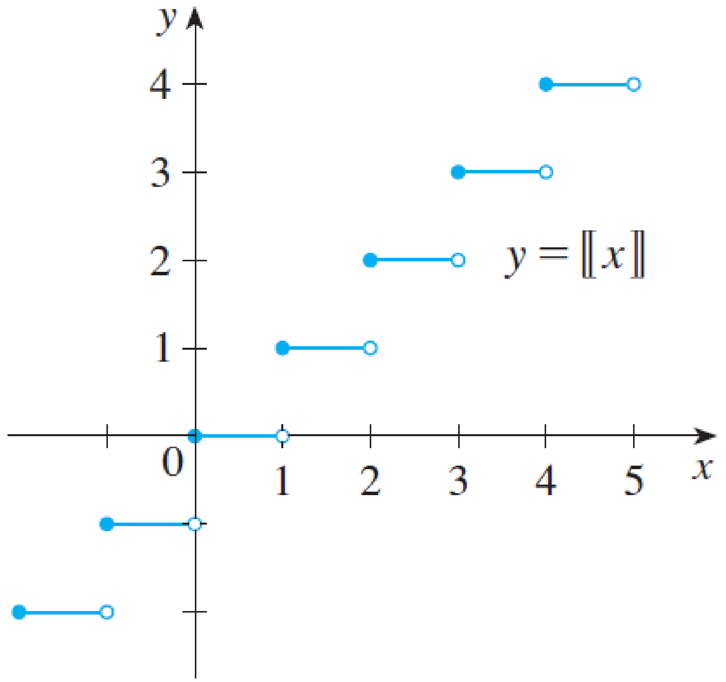


FIGURA 6
Función entero mayor

51. a) Si el símbolo $[\![\ ]\!]$ denota la función entero mayor definida en el ejemplo 10, evalúe:

i) $\lim_{x \to -2^+} [\![x]\!]$ ii) $\lim_{x \to -2} [\![x]\!]$ iii) $\lim_{x \to -2.4} [\![x]\!]$

b) Si n es un entero, evalúe

i) $\lim_{x \to n^-} [\![x]\!]$ ii) $\lim_{x \to n^+} [\![x]\!]$

c) ¿Para qué valores de a $\lim_{x \to a} [\![x]\!]$ existe?

52. Sea $f(x) = [\![\cos x]\!], -\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

a) Trace la gráfica de f.

b) Evalúe cada uno de los siguientes límites si existen.

i) $\lim_{x \to 0} f(x)$ ii) $\lim_{x \to (\pi/2)^-} f(x)$

iii) $\lim_{x \to (\pi/2)^+} f(x)$ iv) $\lim_{x \to \pi/2} f(x)$

c) ¿Para qué valores de a $\lim_{x \to a} f(x)$ existe?

53. Si $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$, muestre que $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe, pero no es igual a $f(2)$.

2 Teorema Si $f(x) \leqslant g(x)$ cuando x tiende a a (excepto posiblemente en $x = a$) y los límites de f y g existen cuando x tiende a a, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x)$$

3 El teorema de la compresión Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ cuando x tiende a a (excepto posiblemente en a) y

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

entonces

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

El teorema de la compresión, llamado a veces teorema del sándwich o del apretón, se ilustra en la figura 7. Se dice que si $g(x)$ se comprime entre $f(x)$ y $h(x)$ cerca de a, y si f y h tienen el mismo límite L en a, entonces g es forzada a tener el mismo límite L en a.

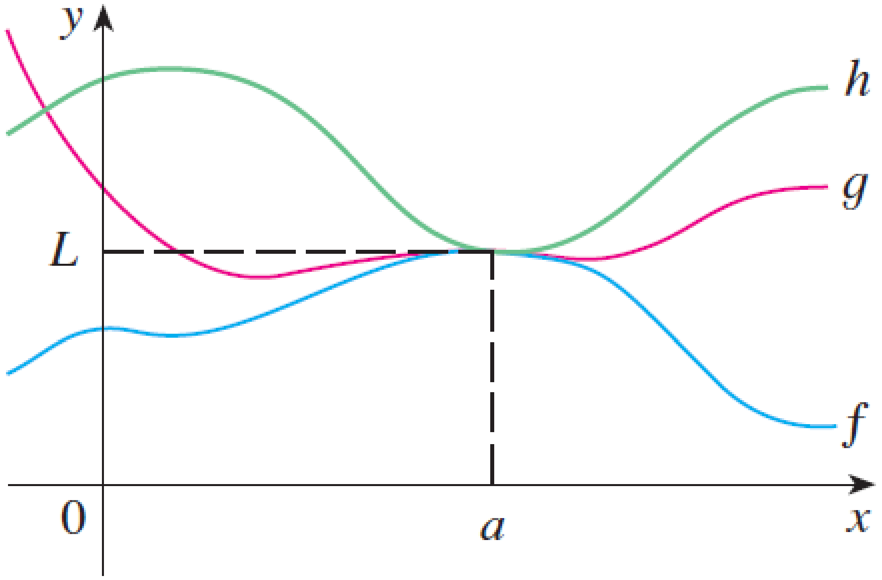


FIGURA 7

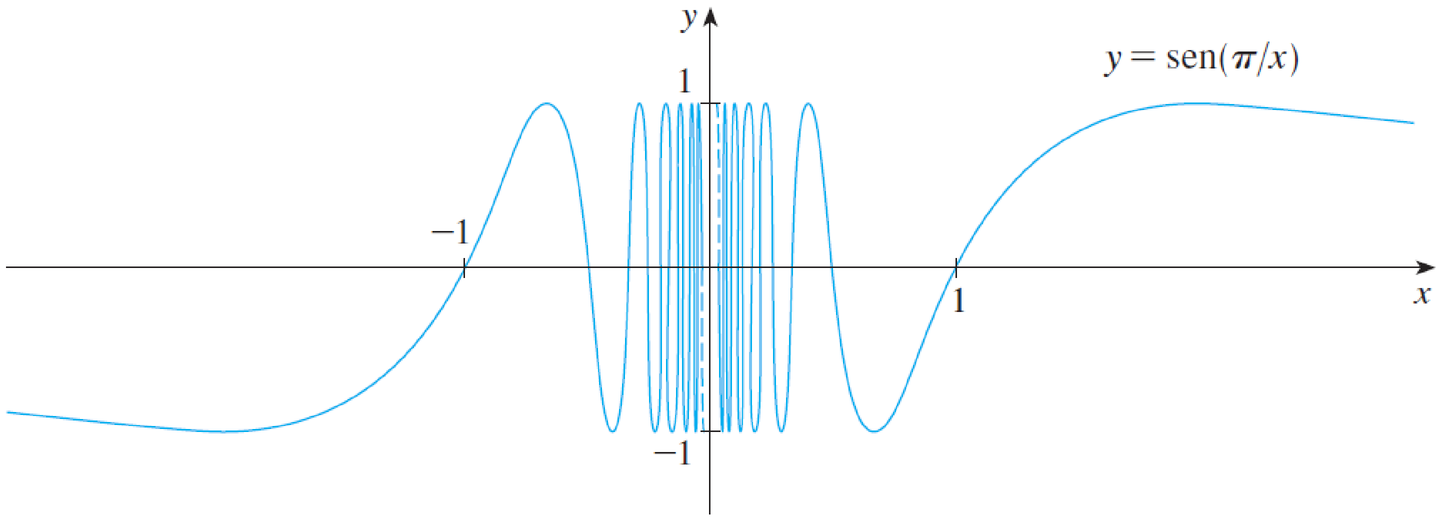
V **EJEMPLO 11** Demuestre que $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

SOLUCIÓN Primero note que **no podemos** utilizar

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

ya que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe (véase el ejemplo 4 en la sección 2.2).

En su lugar aplicamos el teorema de la compresión, así que tenemos que encontrar una función f menor que $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ y una función h mayor que g tal que $f(x)$ y $h(x)$ tiendan a 0.



Para hacer esto, utilizamos lo que sabemos de la función seno. Ya que el seno de cualquier número está entre -1 y 1, podemos afirmar que

$$\boxed{4} \qquad -1 \leqslant \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant 1$$

Cualquier desigualdad permanece válida cuando la multiplicamos por un número positivo. Sabemos que $x^2 \geqslant 0$ para toda x, así que multiplicando cada lado de la desigualdad en $\boxed{4}$ por x^2, obtenemos

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant x^2$$

como se ilustra en la figura 8. Sabemos que

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$$

Tomando $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ y $h(x) = x^2$ del teorema de la compresión, obtenemos

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$

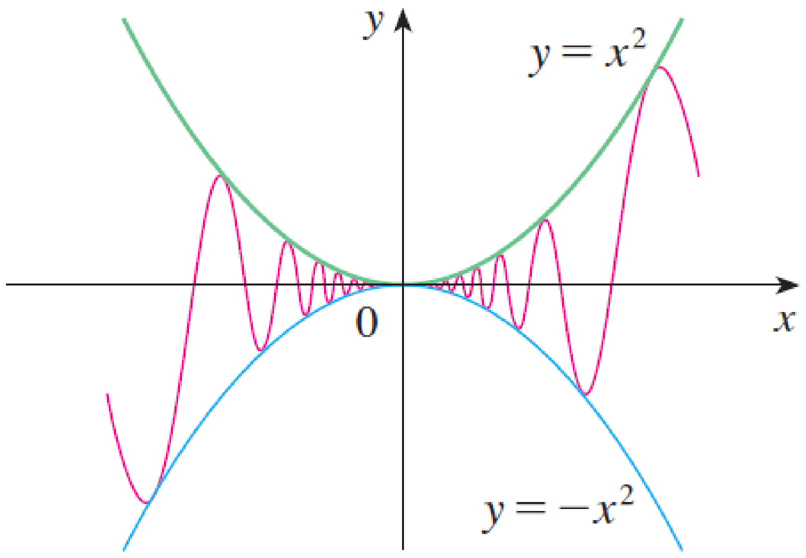


FIGURA 8
$y = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$

37. Si $4x - 9 \leqslant f(x) \leqslant x^2 - 4x + 7$ para $x \geqslant 0$, encuentre $\lim_{x \to 4} f(x)$.

38. Si $2x \leqslant g(x) \leqslant x^4 - x^2 + 2$ para toda x, evalúe $\lim_{x \to 1} g(x)$.

39. Demuestre que $\lim_{x \to 0} x^4 \cos \dfrac{2}{x} = 0$.

40. Demuestre que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0$.

57. Si $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$, encuentre $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Solución 39.

$$-1 \leq cos\frac{2}{x} \leq 1$$

$$-x^4 \leq x^4 cos\frac{2}{x} \leq x^4$$

$$\lim_{x \to 0} -x^4 = 0 \qquad \lim_{x \to 0} x^4 = 0$$

Por tanto $\lim_{x \to 0} x^4 cos\frac{2}{x} = 0$ Por teorema de la compresión.

REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín