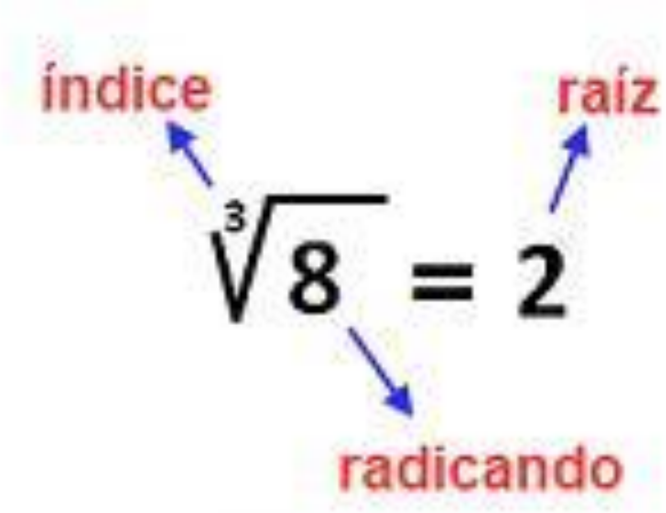
Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

RADICACIÓN



- Radicales
- Exponentes racionales
- Racionalización del denominador

Radicales

Sabemos lo que 2^n significa siempre que n sea un entero. Para dar significado a una potencia, por ejemplo $2^{4/5}$, cuyo exponente es un número racional, necesitamos estudiar radicales.

El símbolo $\sqrt{\ }$ significa "la raíz positiva de". Entonces

$$\sqrt{a} = b \quad \text{significa que} \quad b^2 = a \quad \text{y} \quad b \geq 0$$

Como $a = b^2 \geq 0$, el símbolo $\sqrt{a}$ tiene sentido sólo cuando $a \geq 0$. Por ejemplo,

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{porque} \quad 3^2 = 9 \quad \text{y} \quad 3 \geq 0$$

Para tener en cuenta:

Es cierto que el número 9 tiene dos raíces cuadradas, 3 y -3, pero la notación $\sqrt{9}$ está reservada para la raíz cuadrada *positiva* de 9 (a veces llamada *raíz cuadrada principal* de 9). Si deseamos tener la raíz negativa, debemos escribir $-\sqrt{9}$, que es -3.

Las raíces cuadradas son casos especiales de las raíces n. La raíz n de x es el número que, cuando se eleva a la n potencia, dará x.

DEFINICIÓN DE UNA RAÍZ *n*

Si n es cualquier entero positivo, entonces la **raíz *n* principal** de a se define como sigue:

$$\sqrt[n]{a} = b \qquad \text{significa que} \quad b^n = a$$

Si n es par, debemos tener $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Exponentes racionales

Para definir lo que significa *exponente racional*, o bien, lo que es lo mismo, un *exponente fraccionario*, como por ejemplo $a^{1/3}$, necesitamos usar radicales. Para dar significado al símbolo $a^{1/n}$ de forma que sea consistente con las Leyes de Exponentes, tendríamos que tener

$$(a^{1/n})^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

Entonces, por la definición de la raíz n,

$$\boxed{a^{1/n} = \sqrt[n]{a}}$$

En general, definimos exponentes racionales como sigue:

DEFINICIÓN DE EXPONENTES RACIONALES

Para cualquier exponente racional m/n en sus términos más elementales, donde m y n son enteros y $n > 0$, definimos

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \text{o lo que es equivalente} \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si n es par, entonces requerimos que $a \geq 0$.

EJEMPLO:

a) $\sqrt[4]{625} = 5$ ya que $5^4 = 625$.

b) $\sqrt[3]{-27} = -3$ ya que $(-3)^3 = -27$.

c) $\sqrt[4]{-81}$ no está definida puesto que 4 es par, y $-81 < 0$.

Importante: Si $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$.

$\sqrt{3^2} = 3$, pero $\sqrt{(-3)^2} \neq -3$, porque $-3 < 0$, de hecho $\sqrt{(-3)^2} = 3 = |-3|$.

PROPIEDADES DE RAÍCES *n*

Propiedad	Ejemplo
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{2}{3}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5, \quad \sqrt[5]{2^5} = 2$
5. $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ si n es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = \lvert -3 \rvert = 3$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 8 | Simplificación de expresiones con raíces *n*

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

(a) $\sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{x^3 x}$ Factorice el cubo más grande

$= \sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{x}$ Propiedad 1: $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$

$= x\sqrt[3]{x}$ Propiedad 4: $\sqrt[3]{a^3} = a$

(b) $\sqrt[4]{81x^8y^4} = \sqrt[4]{81}\sqrt[4]{x^8}\sqrt[4]{y^4}$ Propiedad 1: $\sqrt[4]{abc} = \sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}\sqrt[4]{c}$

$= 3\sqrt[4]{(x^2)^4}\,|y|$ Propiedad 5: $\sqrt[4]{a^4} = |a|$

$= 3x^2|y|$ Propiedad 5: $\sqrt[4]{a^4} = |a|,\ |x^2| = x^2$

EJEMPLO 10 | Uso de la definición de exponentes racionales

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

(a) $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$

(b) $8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ Solución alternativa: $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

(c) $125^{-1/3} = \dfrac{1}{125^{1/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{1}{5}$

(d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \dfrac{1}{x^{4/3}} = x^{-4/3}$

EJEMPLO 11 | Uso de las leyes de exponentes con exponentes racionales

(a) $a^{1/3}a^{7/3} = a^{8/3}$ Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

(b) $\dfrac{a^{2/5}a^{7/5}}{a^{3/5}} = a^{2/5+7/5-3/5} = a^{6/5}$ Ley 1, Ley 2: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(c) $(2a^3b^4)^{3/2} = 2^{3/2}(a^3)^{3/2}(b^4)^{3/2}$ Ley 4: $(abc)^n = a^n b^n c^n$

$= (\sqrt{2})^3 a^{3(3/2)} b^{4(3/2)}$ Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$

$= 2\sqrt{2}a^{9/2}b^6$

(d) $\left(\dfrac{2x^{3/4}}{y^{1/3}}\right)^3 \left(\dfrac{y^4}{x^{-1/2}}\right) = \dfrac{2^3(x^{3/4})^3}{(y^{1/3})^3} \cdot (y^4 x^{1/2})$ Leyes 5, 4 y 7

$= \dfrac{8x^{9/4}}{y} \cdot y^4 x^{1/2}$ Ley 3

$= 8x^{11/4}y^3$ Leyes 1 y 2

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO 12 | Simplificación al escribir radicales como exponentes racionales

(a) $(2\sqrt{x})(3\sqrt[3]{x}) = (2x^{1/2})(3x^{1/3})$ Definición de exponentes racionales

$= 6x^{1/2+1/3} = 6x^{5/6}$ Ley 1

(b) $\sqrt{x\sqrt{x}} = (xx^{1/2})^{1/2}$ Definición de exponentes racionales

$= (x^{3/2})^{1/2}$ Ley 1

$= x^{3/4}$ Ley 3

II. Expresiones exponenciales de la forma $a^{\frac{m}{n}}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n > 0$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Sean $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. Definimos $a^{\frac{m}{n}}$ por

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}},$$

siempre que la expresión del lado derecho esté definida.

EJEMPLO:

a) $\left(\dfrac{4}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{25}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{25^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \dfrac{5}{2}.$

b) $\left(\dfrac{-27}{64}\right)^{\frac{2}{3}} = \dfrac{(-27)^{\frac{2}{3}}}{(64)^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{(\sqrt[3]{-27})^2}{(\sqrt[3]{64})^2} = \dfrac{(-3)^2}{4^2} = \dfrac{9}{16}.$

Racionalización del denominador

A veces es útil eliminar el radical en un denominador al multiplicar el numerador y el denominador por una expresión apropiada. Este procedimiento se denomina **racionalización del denominador.** Si el denominador es de la forma $\sqrt{a}$, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{a}$. Al hacer esto multiplicamos por 1 la cantidad dada, de modo que no cambiamos su valor. Por ejemplo,

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Nótese que el denominador de la última fracción no contiene radical. En general, si el denominador es de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$, entonces multiplicar el numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ racionalizará el denominador, porque (para $a > 0$)

$$\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO 13 | Racionalización de denominadores

Esto es igual a 1

(a) $$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(b) $$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$$

(c) $$\sqrt[7]{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[7]{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[7]{a^2}} \frac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^5}} = \frac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^7}} = \frac{\sqrt[7]{a^5}}{a}$$

RESOLVER:

75. **(a)** $\sqrt[3]{y\sqrt{y}}$ **(b)** $\sqrt{\dfrac{16u^3v}{uv^5}}$

76. **(a)** $\sqrt{s\sqrt{s^3}}$ **(b)** $\sqrt[3]{\dfrac{54x^2y^4}{2x^5y}}$

89-92 ■ Racionalice el denominador.

89. **(a)** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ **(b)** $\sqrt{\dfrac{2}{x}}$ **(c)** $\sqrt{\dfrac{x}{3}}$

92. **(a)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$ **(b)** $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b^2}}$ **(c)** $\dfrac{1}{c^{3/7}}$

EJEMPLO 9 | Combinación de radicales

(a) $\sqrt{32} + \sqrt{200} = \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{100 \cdot 2}$ Factorice los cuadrados más grandes

$= \sqrt{16}\sqrt{2} + \sqrt{100}\sqrt{2}$ Propiedad 1: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$= 4\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$ Propiedad Distributiva

(b) Si $b > 0$, entonces

$\sqrt{25b} - \sqrt{b^3} = \sqrt{25}\sqrt{b} - \sqrt{b^2}\sqrt{b}$ Propiedad 1: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$= 5\sqrt{b} - b\sqrt{b}$ Propiedad 5, $b > 0$

$= (5 - b)\sqrt{b}$ Propiedad Distributiva

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Evite el siguiente error:

$$\sqrt{a+b} \cancel{=} \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Por ejemplo, si hacemos $a = 9$ y $b = 16$, entonces vemos el error:

$$\sqrt{9+16} \stackrel{?}{=} \sqrt{9} + \sqrt{16}$$

$$\sqrt{25} \stackrel{?}{=} 3 + 4$$

$$5 \stackrel{?}{=} 7 \quad \text{Error!}$$

29-34 ■ Simplifique la expresión.

29. $\sqrt{32} + \sqrt{18}$

30. $\sqrt{75} + \sqrt{48}$

31. $\sqrt[5]{96} + \sqrt[5]{3}$

32. $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3}$

33. $\sqrt{16x} + \sqrt{x^5}$

34. $\sqrt[3]{2y^4} - \sqrt[3]{y}$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

REFERENCIA

Stewart, J., Precálculo Matemáticas para el Cálculo, Cengage Learning, séptima edición.

Referencia en línea

http://www.ebooks7-24.com.consultaremota.upb.edu.co/stage.aspx?il


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín