



**Universidad
Pontificia
Bolivariana**

Fundada en 1936

FUNCIONES

Sección 1.1: Función valor absoluto, función mayor entero. Simetrías, funciones pares e impares.

Funciones definidas por secciones

Una función segmentada o por tramos está formada por un número infinito o finito de funciones, es decir, consta de un número de “piezas” desconectadas o conectadas entre sí.

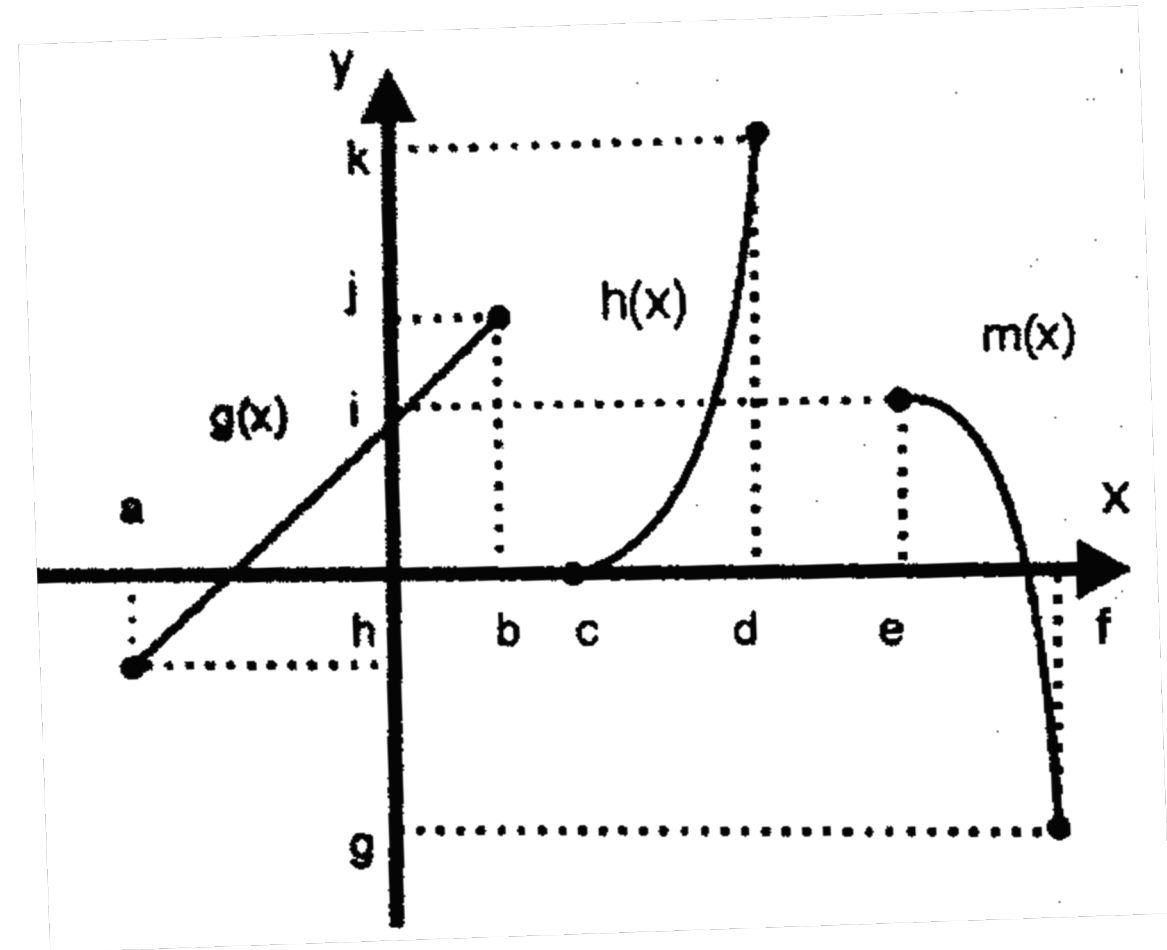
Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } a \leq x \leq b \\ h(x) & \text{si } c \leq x \leq d \\ m(x) & \text{si } e \leq x \leq f \end{cases}$$

Si $a \in \mathbb{R}^-$; $b, c, d, e, f \in \mathbb{R}^+$, con $a < b < c < d < e < f$

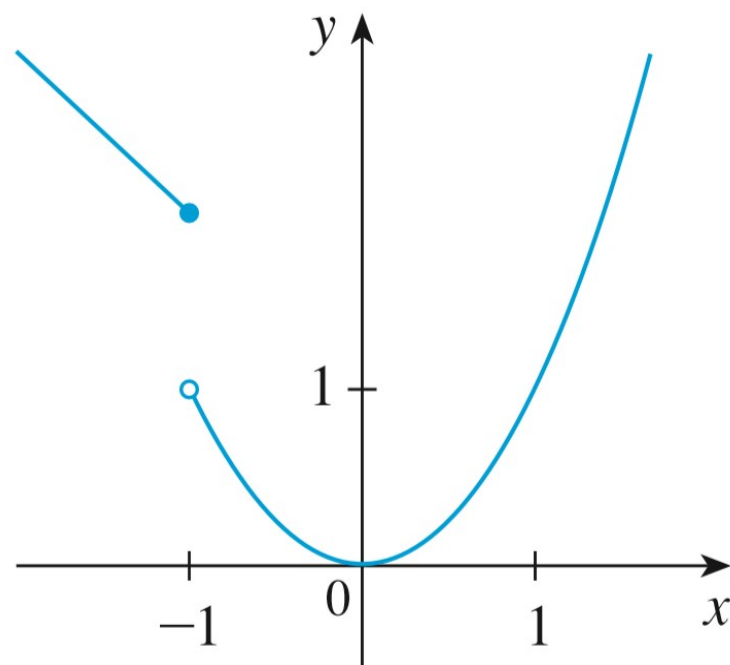
Donde el Dominio: $\text{Dom}_f = \text{Dom}_g \cup \text{Dom}_h \cup \text{Dom}_m$

y el Rango: $\text{Ran}_f = \text{Ran}_g \cup \text{Ran}_h \cup \text{Ran}_m$

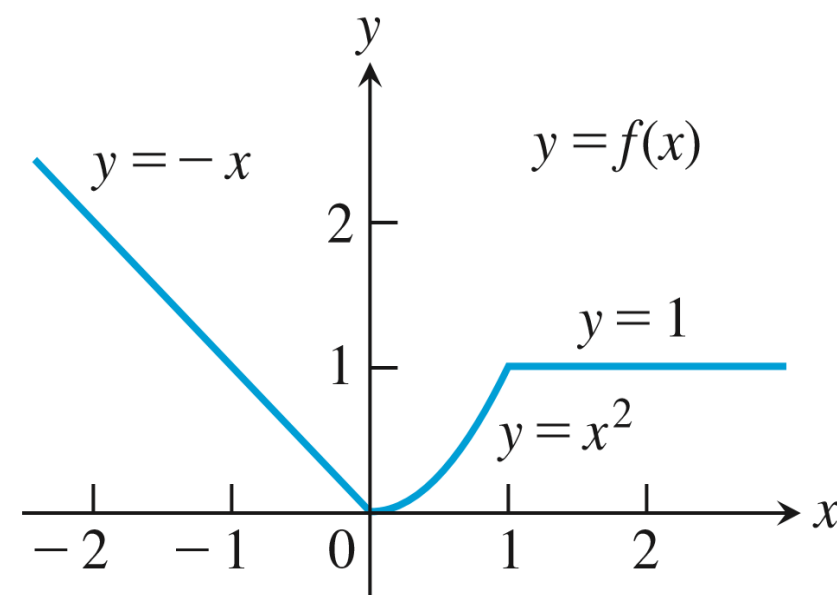


Ejemplos de funciones por tramos

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & x \leq -1 \\ x^2 & x > -1 \end{cases}$$

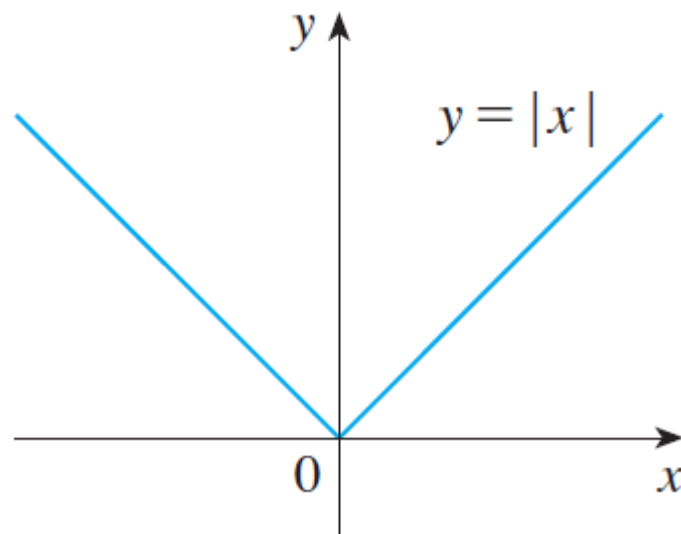


$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$



Función valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

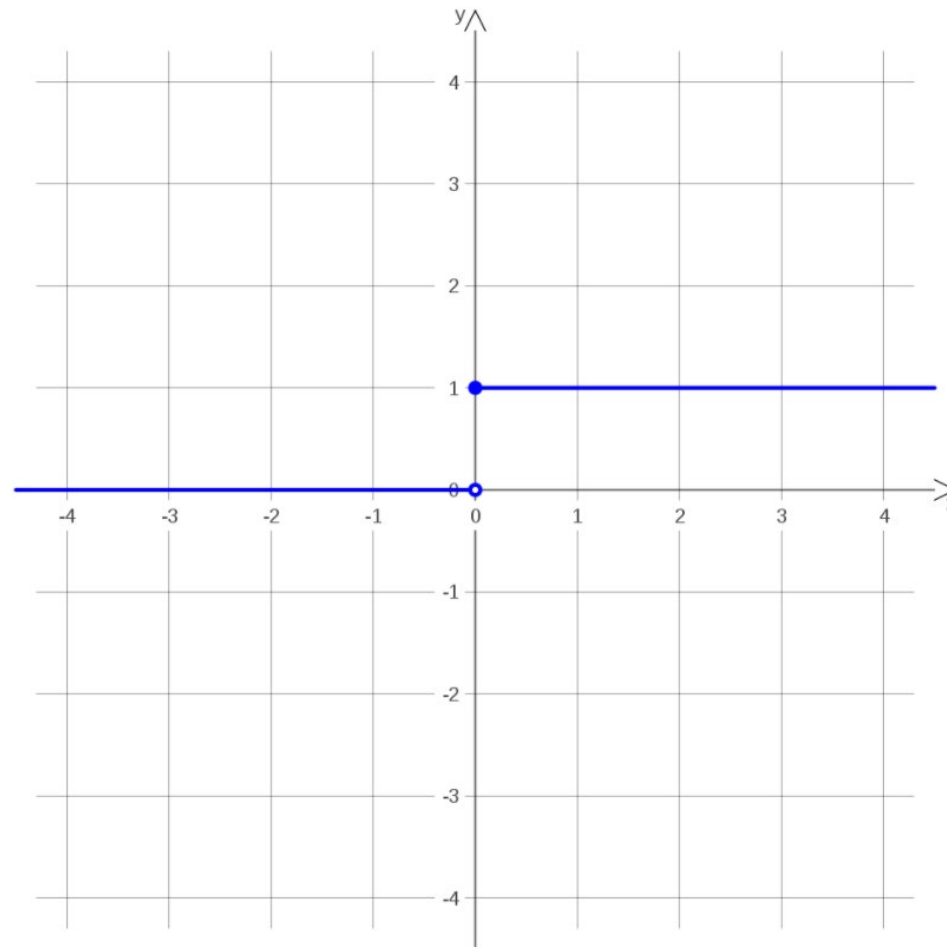


Dominio $|x| : \mathbb{R}$

Rango $|x| : \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Función escalonada (Escalón de Heaviside)

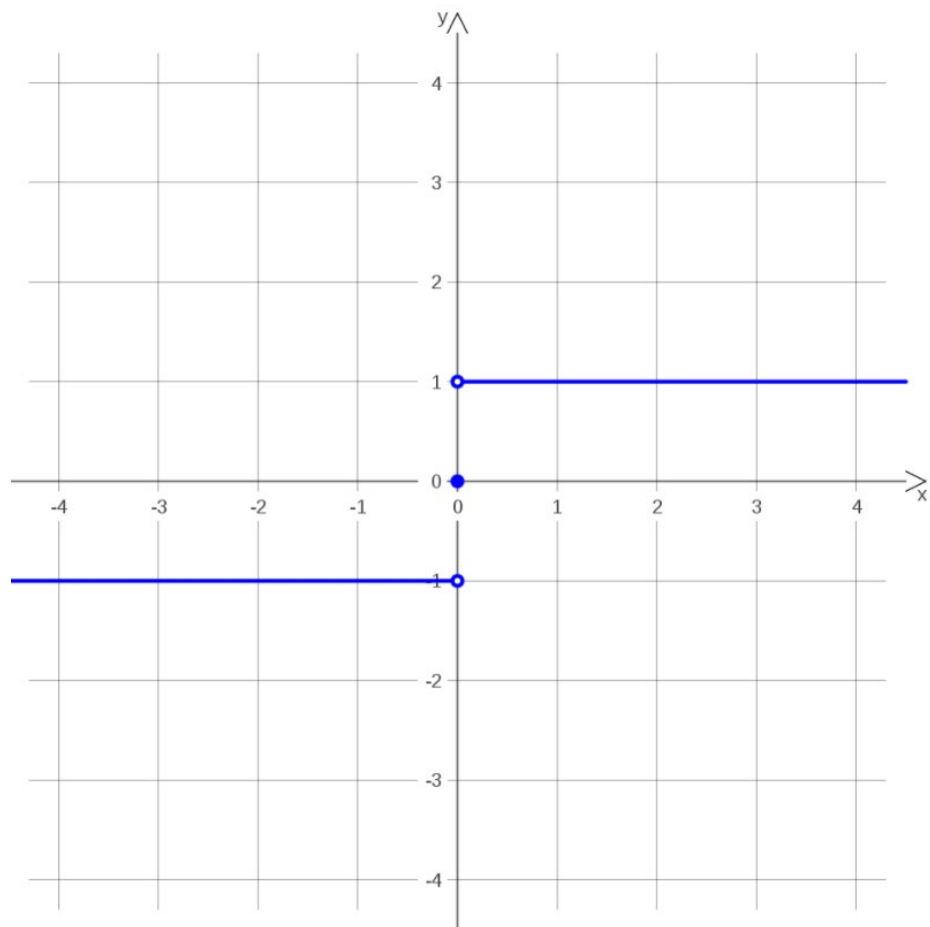
$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$



Dominio $\mu(x) : \mathbb{R}$
Rango $\mu(x) : \{0, 1\}$

Función signo

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



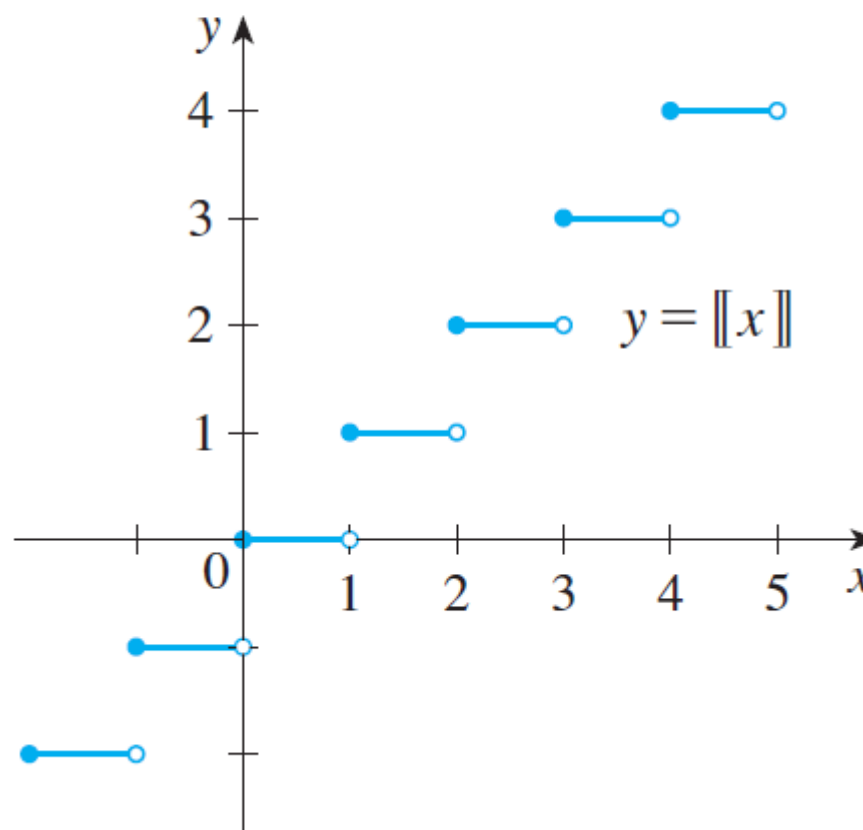
Dominio $\mu(x) : \mathbb{R}$

Rango $\mu(x) : \{-1, 0, 1\}$

Función mayor entero o entero mayor

$$\llbracket x \rrbracket = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ -3 & -3 \leq x < -2 \\ -2 & -2 \leq x < -1 \\ -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Otras notaciones para $\llbracket x \rrbracket$ son $[x]$ y $\lfloor x \rfloor$. En ocasiones, la función entero mayor se llama *función piso*.

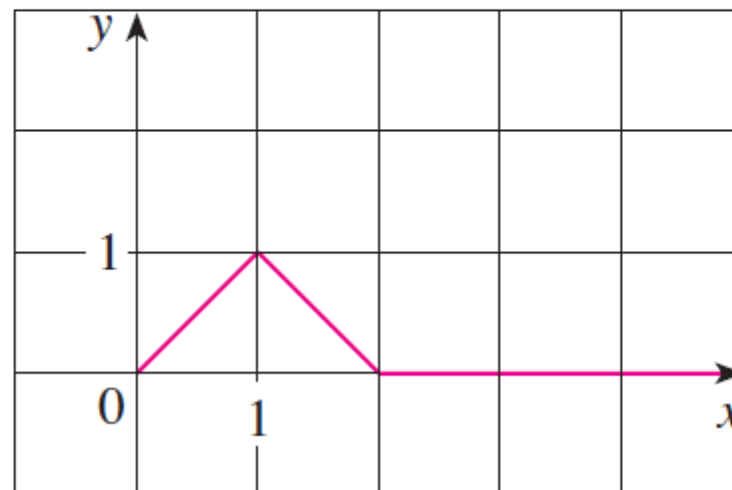


Dominio $\llbracket x \rrbracket : \mathbb{R}$
Rango $\llbracket x \rrbracket : \mathbb{Z}$

$$\llbracket x \rrbracket = n \text{ con } n \leq x < n + 1 \text{ y } n \in \mathbb{Z}$$

EJEMPLO 9

Encuentre una fórmula para la función f graficada en la figura 17.



SOLUCIÓN La recta que pasa por $(0, 0)$ y $(1, 1)$ tiene pendiente $m = 1$ e intersección con el eje y en $b = 0$, por lo que su ecuación es $y = x$. Así, por la parte de la gráfica de f que une a $(0, 0)$ con $(1, 1)$, tenemos

$$f(x) = x \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1$$

La recta que une a $(1, 1)$ y $(2, 0)$ tiene pendiente $m = -1$, por lo que su forma punto-pendiente es

$$y - 0 = (-1)(x - 2) \text{ o bien } y = 2 - x$$

Así tenemos

$$f(x) = 2 - x \quad \text{si } 1 < x \leq 2$$

También vemos que la gráfica de f coincide con el eje x para $x > 2$. Reuniendo esta información, tenemos la siguiente fórmula en tres secciones para f :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Forma punto-pendiente de la ecuación de la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Simetría

Si una función f satisface $f(-x) = f(x)$ para todo x en su dominio, entonces f es una **función par**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es par porque

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Si f satisface $f(-x) = -f(x)$ para cada x en su dominio, entonces f es una **función impar**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es impar porque

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

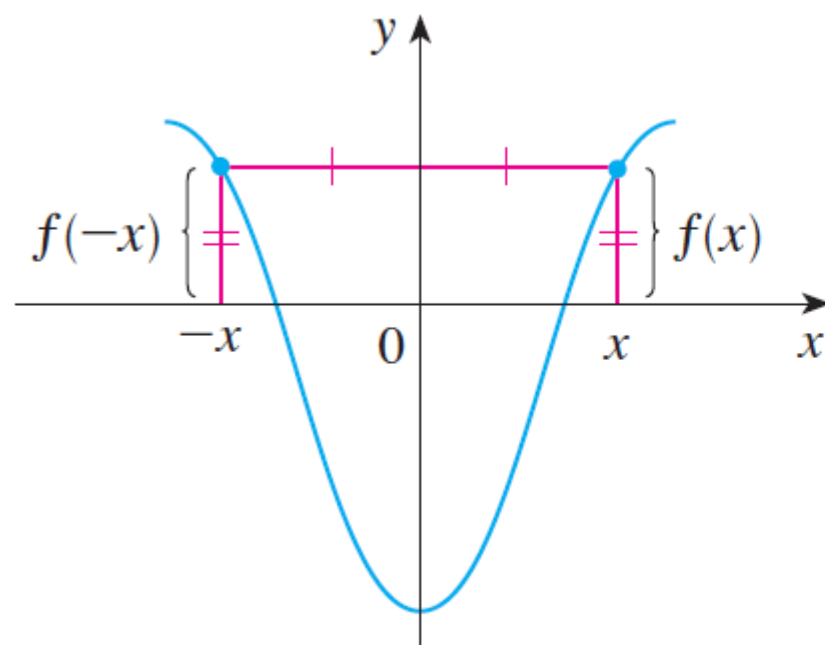


FIGURA 19 Una función par

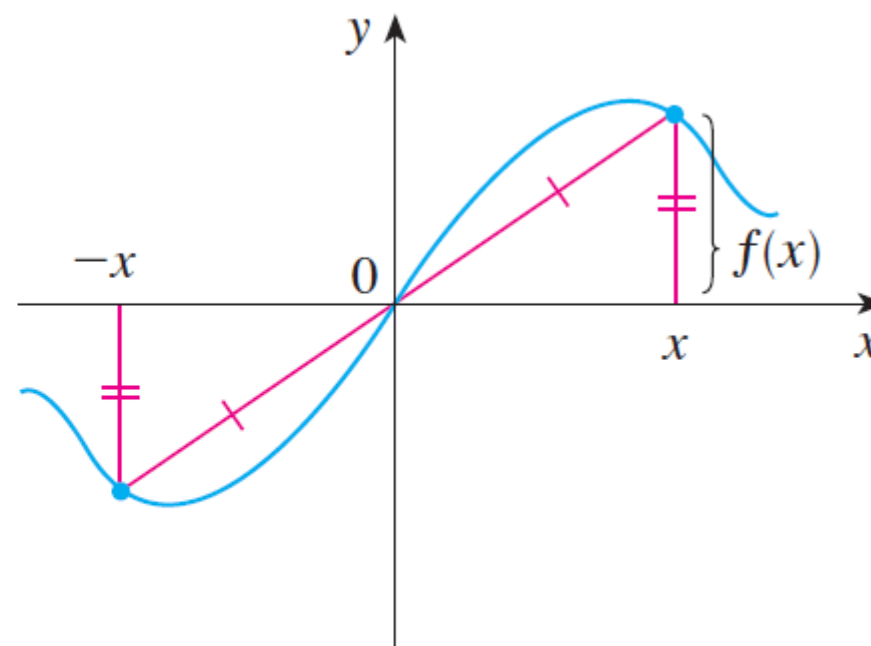


FIGURA 20 Una función impar

El significado geométrico de una función par es que su gráfica es simétrica respecto al eje y (véase la figura 19). Esto significa que si hemos dibujado la gráfica para $x \geq 0$, obtenemos toda la gráfica simplemente reflejándola respecto al eje y .

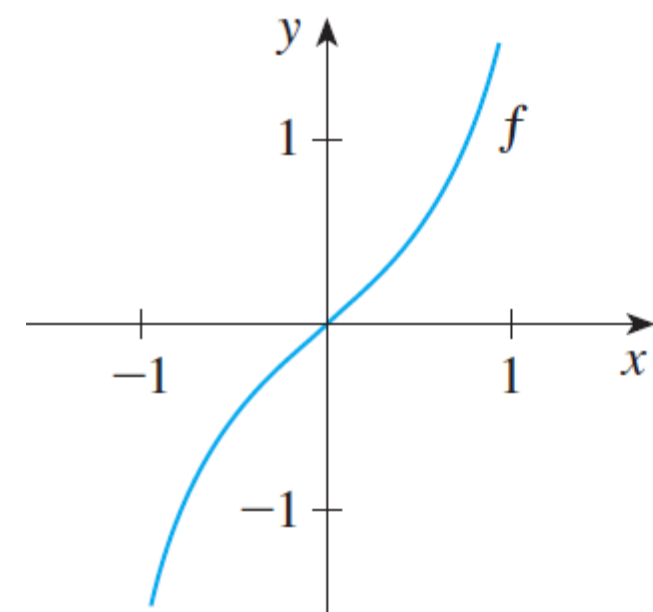
La gráfica de una función impar es simétrica en relación con el origen (véase la figura 20). Si ya tenemos la gráfica de f para $x \geq 0$, podemos obtener toda la gráfica rotando 180° esta porción en relación con el origen.

V EJEMPLO 11 Determine si cada una de las siguientes funciones es par, impar o ninguna de las dos.

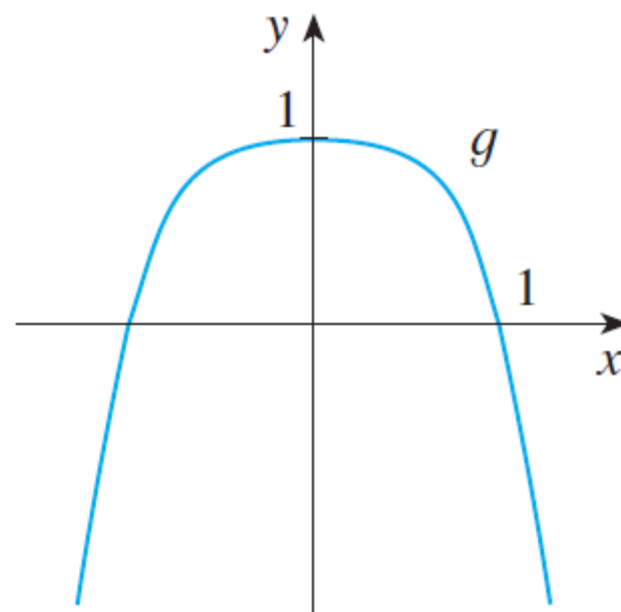
a) $f(x) = x^5 + x$

b) $g(x) = 1 - x^4$

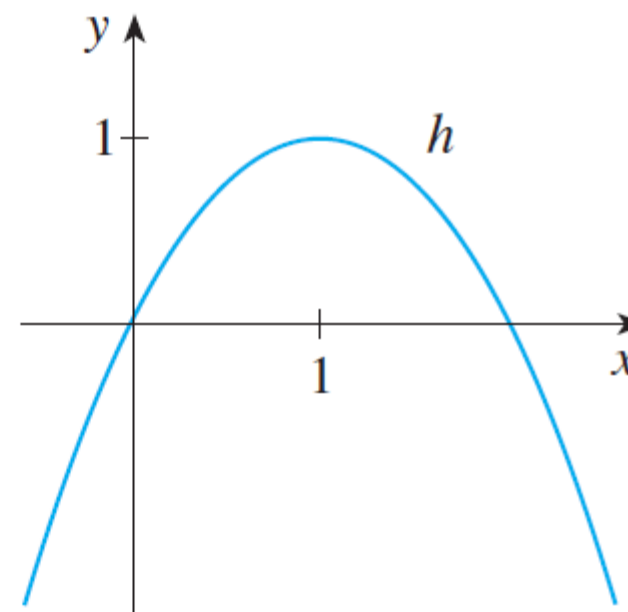
c) $h(x) = 2x - x^2$



a)



b)



c)

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f(-x) &= (-x)^5 + (-x) = (-1)^5 x^5 + (-x) \\ &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Por tanto, f es una función impar.

$$\text{b)} \quad g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$$

Así que g es par.

$$\text{c)} \quad h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$$

Como $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, concluimos que h no es par ni impar.

Ejercicios

39-50 Encuentre el dominio y grafique cada una de las siguientes funciones:

45. $G(x) = \frac{3x + |x|}{x}$

47. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}x & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

49. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

50. $f(x) = \begin{cases} x + 9 & \text{si } x < -3 \\ -2x & \text{si } |x| \leq 3 \\ -6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

46. $g(x) = |x| - x$

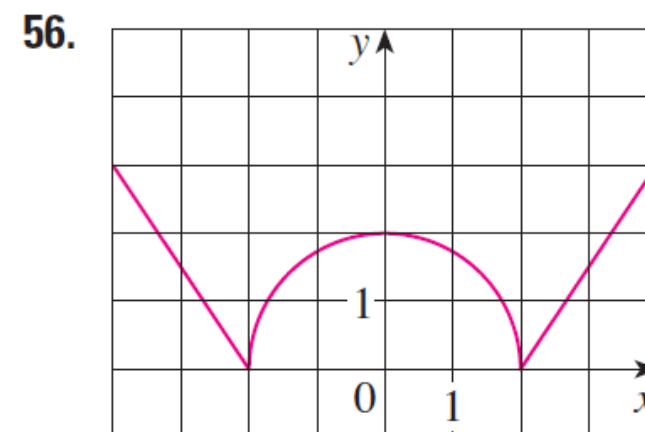
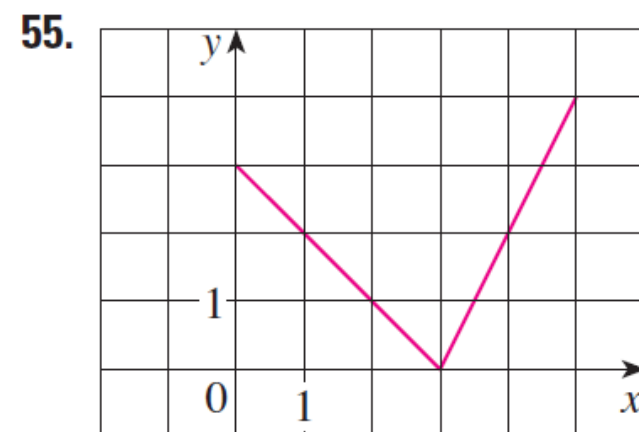
51-56 Encuentre una expresión para la función cuya gráfica es la curva dada.

51. El segmento de recta que une los puntos $(1, -3)$ y $(5, 7)$.

52. El segmento de recta que une los puntos $(-5, 10)$ y $(7, -10)$.

53. La mitad inferior de la parábola $x + (y - 1)^2 = 0$.

54. La mitad superior de la circunferencia $x^2 + (y - 2)^2 = 4$.



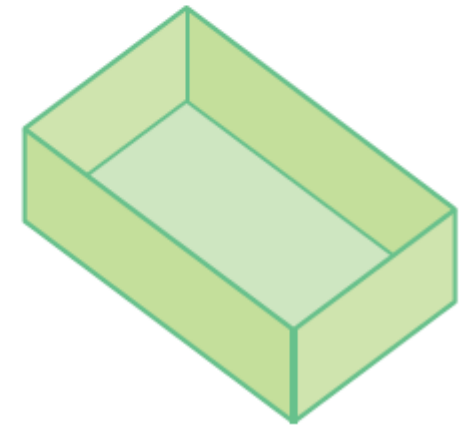
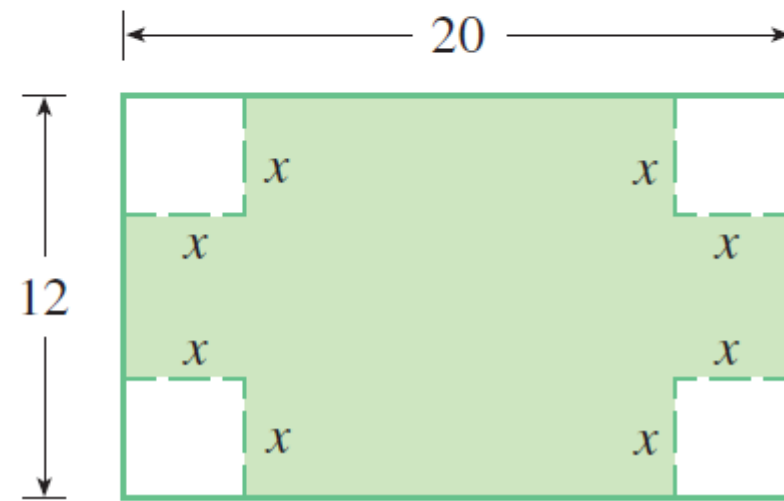
57-61 Encuentre una fórmula y su dominio para cada una de las siguientes funciones descritas.

- 57.** Un rectángulo tiene 20 m de perímetro. Exprese el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.
- 58.** Un rectángulo tiene 16 m^2 de área. Exprese el perímetro del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.
- 59.** Exprese el área de un triángulo equilátero, como función de la longitud de un lado.
- 60.** Exprese el área superficial de un cubo en función de su volumen.
- 61.** Una caja rectangular abierta con 2 m^3 de volumen tiene una base cuadrada. Exprese el área superficial de la caja en función de la longitud de uno de los lados de la base.
- 66.** Una compañía de electricidad cobra a sus clientes una tasa base de 10 dólares al mes, más 6 centavos de dólar por kilovatio-hora (kWh) por los primeros 1200 kWh y 7 centavos de dólar por kWh para todo uso sobre 1200 kWh. Exprese el costo mensual E en función de la cantidad x de electricidad utilizada. Después, grafique la función E para $0 \leq x \leq 2000$.

- 62.** Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 30 pies, exprese el área A de la ventana en función del ancho x de la ventana.

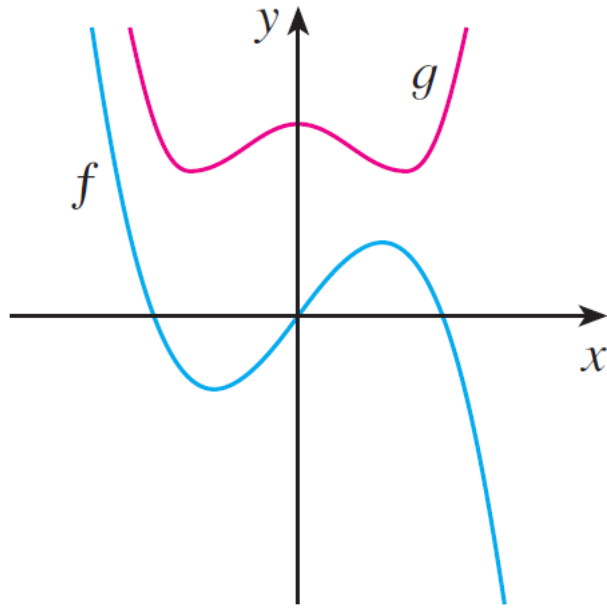


- 63.** Debe construirse una caja sin tapa, a partir de una hoja rectangular de cartón que tiene dimensiones de 12 por 20 pulgadas, recortando cuadrados iguales de lado x en cada una de las esquinas y plegando los lados como se ilustra en la figura. Exprese el volumen V de la caja en función de x .

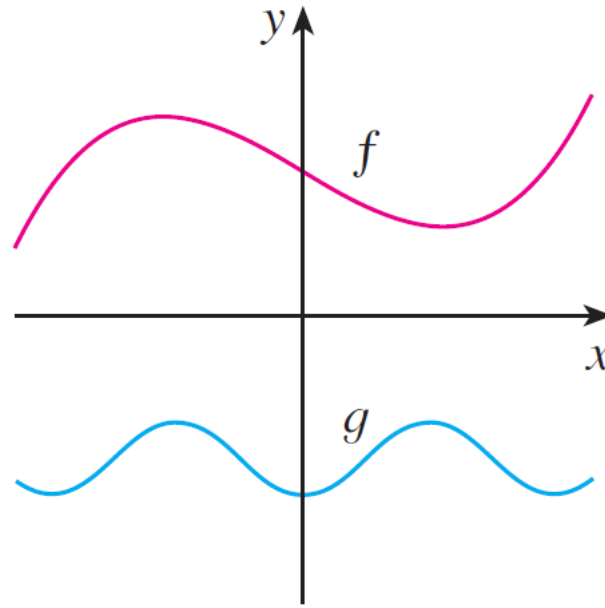


69-70 Se muestran las gráficas de f y g . Determine si cada función es par, impar o ninguna de las dos. Explique su razonamiento.

69.



70.



- 71.** a) Si el punto $(5, 3)$ está en la gráfica de una función par, ¿cuál otro punto también debe estar en la gráfica?
- b) Si el punto $(5, 3)$ está en la gráfica de una función impar, ¿cuál otro punto también debe estar en la gráfica?

73-78 Determine si f es par, impar o ninguna de las dos. Si tiene una calculadora graficadora, utilícela para verificar visualmente su respuesta.

73. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

74. $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$

75. $f(x) = \frac{x}{x + 1}$

76. $f(x) = x|x|$

77. $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$

78. $f(x) = 1 + 3x^3 - x^5$

REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning.
Octava edición, 2018.

Referencia en línea

<http://www.ebooks7-24.com.consultaremota.upb.edu.co/stage.aspx?il>



¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín