Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EXPRESIONES RACIONALES

- Dominio de una expresión algebraica
- Simplificación de expresiones racionales
- Multiplicación y división de expresiones racionales
- Suma y resta de expresiones racionales
- Fracciones compuestas
- Racionalización del denominador o el numerador
- Evitar errores comunes
- División de polinomios

El cociente de dos expresiones algebraicas se denomina **expresión fraccionaria.** A continuación veamos algunos ejemplos:

$$\frac{2x}{x-1} \qquad \frac{\sqrt{x}+3}{x+1} \qquad \frac{y-2}{y^2+4}$$

Una **expresión racional** es una expresión fraccionaria donde el numerador y el denominador son polinomios. Por ejemplo, las siguientes son expresiones racionales:

$$\frac{2x}{x-1} \qquad \frac{x}{x^2+1} \qquad \frac{x^3-x}{x^2-5x+6}$$

▼ Dominio de una expresión algebraica

En general, una expresión algebraica puede no estar definida para todos los valores de la variable. El **dominio** de una expresión algebraica es el conjunto de números reales que se permite tenga la variable. La tabla al margen de esta página da algunas expresiones básicas y sus dominios.

Expresión	Dominio
$\dfrac{1}{x}$	$\{x \mid x \neq 0\}$
$\sqrt{x}$	$\{x \mid x \geq 0\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\{x \mid x > 0\}$

EJEMPLO 1 | Hallar el dominio de una expresión

Encuentre los dominios de las siguientes expresiones.

(a) $2x^2 + 3x - 1$ **(b)** $\dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}$ **(c)** $\dfrac{\sqrt{x}}{x - 5}$

SOLUCIÓN

(a) Este polinomio está definido para toda x. Entonces, el dominio es el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales.

(b) Primero factorizamos el denominador.

$$\frac{x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x}{(x - 2)(x - 3)}$$

El denominador sería 0 si $x = 2$ o $x = 3$

Como el denominador es cero cuando $x = 2$ o 3, la expresión no está definida para estos números. El dominio $\{x \mid x \neq 2 \text{ y } x \neq 3\}$.

(c) $\dfrac{\sqrt{x}}{x - 5}$

SOLUCIÓN

(c) Para que el numerador esté definido, debemos tener $x \geq 0$. Tampoco podemos dividir entre 0, de modo que $x \neq 5$.

Asegúrese de tener $x \geq 0$ para tomar la raíz cuadrada

$$\frac{\sqrt{x}}{x - 5}$$

El denominador sería 0 si $x = 5$

Entonces, el dominio es $\{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 5\}$.

5-12 ■ Encuentre el dominio de la expresión.

5. $4x^2 - 10x + 3$

6. $-x^4 + x^3 + 9x$

7. $\dfrac{2x + 1}{x - 4}$

8. $\dfrac{2t^2 - 5}{3t + 6}$

9. $\sqrt{x + 3}$

10. $\dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$

11. $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - x - 2}$

12. $\dfrac{\sqrt{2x}}{x + 1}$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Simplificación de expresiones racionales

Para **simplificar expresiones racionales**, factorizamos el numerador y el denominador y usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\boxed{\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}}$$

Esto nos permite **cancelar** factores comunes del numerador y el denominador.

EJEMPLO 2 | Simplificación de expresiones racionales por cancelación

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Simplifique: $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$

SOLUCIÓN

$(x + 2)(x - 1)$

$-1 + 2 = 1$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + \underbrace{x}_{1} - 2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 2)} \qquad \text{Factorice}$$

$$= \frac{x + 1}{x + 2} \qquad \text{Cancele factores comunes}$$

13-22 ■ Simplifique la expresión racional.

13. $\dfrac{3(x+2)(x-1)}{6(x-1)^2}$

14. $\dfrac{4(x^2-1)}{12(x+2)(x-1)}$

15. $\dfrac{x-2}{x^2-4}$

16. $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$

17. $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+5x+4}$

18. $\dfrac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}$

19. $\dfrac{y^2+y}{y^2-1}$

20. $\dfrac{y^2-3y-18}{2y^2+5y+3}$

21. $\dfrac{2x^3-x^2-6x}{2x^2-7x+6}$

22. $\dfrac{1-x^2}{x^3-1}$

Multiplicación y división de expresiones racionales

Para **multiplicar expresiones racionales,** usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

Esto dice que para multiplicar dos fracciones multiplicamos sus numeradores y multiplicamos sus denominadores.

EJEMPLO 3 | Multiplicación de expresiones racionales

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Ejecute la multiplicación indicada y simplifique: $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+8x+16}\cdot\dfrac{3x+12}{x-1}$

SOLUCIÓN Primero factorizamos.

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2+8x+16}\cdot\frac{3x+12}{x-1}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+4)^2}\cdot\frac{3(x+4)}{x-1}$$ Factorice

$$=\frac{3(x-1)(x+3)(x+4)}{(x-1)(x+4)^2}$$ Propiedad de fracciones

$$=\frac{3(x+3)}{x+4}$$ Cancele factores comunes

$2\cdot x\cdot 4$

$=8x$

Para **dividir expresiones racionales**, usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

Esto dice que para dividir una fracción entre otra fracción, invertimos el divisor y multiplicamos.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO 4 | División de expresiones racionales

Ejecute la división indicada y simplifique:

$$\frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6} = \frac{x-4}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2-3x-4}$$ Invierta y multiplique

$$= \frac{(x-4)(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+2)(x-4)(x+1)}$$ Factorice

$$= \frac{x+3}{(x-2)(x+1)}$$ Cancele factores comunes

■ Ejecute la multiplicación o división y simplifique.

27. $\dfrac{t-3}{t^2+9}\cdot\dfrac{t+3}{t^2-9}$

28. $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x}\cdot\dfrac{x^3+x^2}{x^2-2x-3}$

29. $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2+3x+2}\cdot\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9}$

30. $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{2x^2-xy-y^2}{x^2-xy-2y^2}$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

■ Ejecute la multiplicación o división y simplifique.

34. $\dfrac{4y^2 - 9}{2y^2 + 9y - 18} \div \dfrac{2y^2 + y - 3}{y^2 + 5y - 6}$

35. $\dfrac{\dfrac{x^3}{x+1}}{\dfrac{x}{x^2 + 2x + 1}}$

36. $\dfrac{\dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 1}}{\dfrac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 + x - 2}}$

37. $\dfrac{x/y}{z}$

38. $\dfrac{x}{y/z}$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Suma y resta de expresiones racionales

Para **sumar o restar expresiones racionales,** primero encontramos un denominador común y a continuación usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A + B}{C}$$

Aun cuando funcionará cualquier denominador común, es mejor usar el **mínimo común denominador** (MCD)

Nota: Para obtener el mínimo común denominador (MCD), se pueden factorizar los denominadores y el MCD es el producto de los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

Evite hacer el siguiente error:

$$\frac{A}{B+C} \cancel{=} \frac{A}{B} + \frac{A}{C}$$

Por ejemplo, si hacemos $A = 2$, $B = 1$ y $C = 1$, entonces vemos el error:

$$\frac{2}{1+1} \stackrel{?}{=} \frac{2}{1} + \frac{2}{1}$$

$$\frac{2}{2} \stackrel{?}{=} 2 + 2$$

$$1 \stackrel{?}{=} 4 \quad \text{Error!}$$

EJEMPLO 5 | Sumar y restar expresiones racionales

Ejecute las operaciones indicadas y simplifique:

(a) $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{x}{x+2}$

SOLUCIÓN

(a) Aquí el MCD es simplemente el producto de $(x-1)(x+2)$. → MCD multi y div

$$\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+2} = \frac{3(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$ Escriba fracciones usando el MCD

$$= \frac{3x + 6 + x^2 - x}{(x-1)(x+2)}$$ Sume fracciones

$$= \frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x+2)}$$ Combine los términos del numerador

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

(b) $\dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$

SOLUCIÓN

(b) El MCD de $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ y $(x+1)^2$ es $(x-1)(x+1)^2$.

$$\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{(x+1)^2}$$ Factorice

$$= \frac{(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$ Combine fracciones usando el MCD

$$= \frac{x + 1 - 2x + 2}{(x-1)(x+1)^2}$$ Propiedad Distributiva

$$= \frac{3 - x}{(x-1)(x+1)^2}$$ Combine los términos del numerador

■ Ejecute la adición o sustracción y simplifique.

56. $\dfrac{x}{x^2 - x - 6} - \dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{2}{x - 3}$

57. $\dfrac{1}{x^2 + 3x + 2} - \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$

58. $\dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{2}{(x + 1)^2} + \dfrac{3}{x^2 - 1}$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Fracciones compuestas

Una **fracción compuesta** es una fracción en la que el numerador, el denominador, o ambos, son expresiones fraccionarias.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 6 | Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{\dfrac{x}{y} + 1}{1 - \dfrac{y}{x}}$

SOLUCIÓN 1 Combinamos los términos del numerador en una sola fracción. Hacemos lo mismo con el denominador. A continuación invertimos y multiplicamos.

$$\frac{\dfrac{x}{y}+1}{1-\dfrac{y}{x}}=\frac{\dfrac{x+y}{y}}{\dfrac{x-y}{x}}=\frac{x+y}{y}\cdot\frac{x}{x-y}$$

$$=\frac{x(x+y)}{y(x-y)}$$

SOLUCIÓN 2 Encontramos el MCD de todas las fracciones en la expresión y, a continuación, lo multiplicamos por el numerador y denominador. En este ejemplo, el MCD de todas las fracciones es xy. Por lo tanto

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

$$\frac{\frac{x}{y}+1}{1-\frac{y}{x}} = \frac{\frac{x}{y}+1}{1-\frac{y}{x}} \cdot \frac{xy}{xy}$$ Multiplique numerador y denominador por xy

$$= \frac{x^2+xy}{xy-y^2}$$ Simplifique

$$= \frac{x(x+y)}{y(x-y)}$$ Factorice

EJEMPLO 7 | Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h}$

SOLUCIÓN Empezamos por combinar las fracciones del numerador usando un denominador común.

$$\frac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h}=\frac{\dfrac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h}$$ Combine fracciones del numerador

$$=\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}\cdot\frac{1}{h}$$ Propiedad 2 de fracciones (invierta divisor y multiplicar)

$$=\frac{a-a-h}{a(a+h)}\cdot\frac{1}{h}$$ Propiedad Distributiva

$$=\frac{-h}{a(a+h)}\cdot\frac{1}{h}$$ Simplifique

$$=\frac{-1}{a(a+h)}$$ Propiedad 5 de fracciones (cancele factores comunes)

EJEMPLO 8 | Simplificación de una fracción compuesta

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Simplifique: $$\frac{(1+x^2)^{1/2} - x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2}$$

SOLUCIÓN 1 Factorice $(1+x^2)^{-1/2}$ del numerador.

$$\frac{(1+x^2)^{1/2} - x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} = \frac{(1+x^2)^{-1/2}[(1+x^2) - x^2]}{1+x^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

SOLUCIÓN 2 Como $(1 + x^2)^{-1/2} = 1/(1 + x^2)^{1/2}$ es una fracción, podemos eliminar todas las fracciones al multiplicar numerador y denominador por $(1 + x^2)^{1/2}$.

$$\frac{(1 + x^2)^{1/2} - x^2(1 + x^2)^{-1/2}}{1 + x^2} = \frac{(1 + x^2)^{1/2} - x^2(1 + x^2)^{-1/2}}{1 + x^2} \cdot \frac{(1 + x^2)^{1/2}}{(1 + x^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{(1 + x^2) - x^2}{(1 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}$$

■ Simplifique la expresión fraccionaria compuesta.

65. $\dfrac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-1} + y^{-1}}$

66. $\dfrac{x^{-1} + y^{-1}}{(x + y)^{-1}}$

67. $1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{x}}$

68. $1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + x}}$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Racionalización del denominador o el numerador

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Dada una expresión fraccionaria con radicales en el denominador, **racionalizar el denominador** en tal expresión consiste en multiplicarla y dividirla por un factor adecuado, de manera que se **eliminen los radicales en el denominador**.

- Si el denominador es de la forma $\sqrt{a}$, para racionalizar el denominador multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{a}$. Así

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} . \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{\sqrt{a}}{a}.$$

- Si el denominador es de la forma $\sqrt[n]{a^m}$, $m < n$ y $a > 0$, para racionalizar el denominador multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$. Así

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} . \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}.$$

Racionalización del denominador o el numerador

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

- Si el denominador es de la forma $a+b\sqrt{c}$, para racionalizar el denominador multiplicamos numerador y denominador por $a-b\sqrt{c}$, llamado el **conjugado de** $a+b\sqrt{c}$. De esta forma

$$\frac{1}{a+b\sqrt{c}}=\frac{1}{a+b\sqrt{c}}\cdot\frac{a-b\sqrt{c}}{a-b\sqrt{c}}=\frac{a-b\sqrt{c}}{(a+b\sqrt{c})\,(a-b\sqrt{c})}=\frac{a-b\sqrt{c}}{a^2-b^2c}.$$

De manera similar, **racionalizar el numerador** en fracciones cuyo numerador contiene radicales es eliminar los radicales del numerador. Para ello se procede como en la racionalización del denominador.

EJEMPLO 9 | Racionalización del denominador

Racionalización del denominador: $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

SOLUCIÓN Multiplicamos numerador y denominador por el radical conjugado de $1+\sqrt{2}$, que es $1-\sqrt{2}$.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

Multiplique numerador y denominador por el radical conjugado

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2}$$

Fórmula 1 de productos notables

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2}-1$$

EJEMPLO 10 | Racionalización del numerador

Racionalice el numerador: $\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$

SOLUCIÓN Multiplicamos numerador y denominador por el radical conjugado $\sqrt{4+h}+2$.

$$\frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2}$$

Multiplique numerador y denominador por el radical conjugado

$$= \frac{(\sqrt{4+h})^2 - 2^2}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$

Fórmula 1 de Productos Notables

$$= \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$

$$= \frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$$

Propiedad 5 de fracciones (cancele factores comunes)

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

81-86 ■ Racionalice el denominador.

81. $\dfrac{1}{2 - \sqrt{3}}$

82. $\dfrac{2}{3 - \sqrt{5}}$

83. $\dfrac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{7}}$

84. $\dfrac{1}{\sqrt{x} + 1}$

85. $\dfrac{y}{\sqrt{3} + \sqrt{y}}$

86. $\dfrac{2(x - y)}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

87-92 ■ Racionalice el numerador.

87. $\dfrac{1-\sqrt{5}}{3}$

88. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$

89. $\dfrac{\sqrt{r}+\sqrt{2}}{5}$

90. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$

91. $\sqrt{x^2+1}-x$

92. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Evitar errores comunes

No cometa el error de aplicar propiedades de la multiplicación a la operación de adición. Muchos de los errores comunes en álgebra son por esta razón. La tabla siguiente indica varias propiedades de la multiplicación e ilustra el error al aplicarlas a la adición.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Propiedad correcta de multiplicación	Error común con la adición
$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$	$(a+b)^2 \cancel{=} a^2 + b^2$
$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad (a, b \geq 0)$	$\sqrt{a+b} \cancel{=} \sqrt{a} + \sqrt{b}$
$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b \quad (a, b \geq 0)$	$\sqrt{a^2 + b^2} \cancel{=} a + b$
$\dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a \cdot b}$	$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \cancel{=} \dfrac{1}{a+b}$
$\dfrac{ab}{a} = b$	$\dfrac{a+b}{a} \cancel{=} b$
$a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$	$a^{-1} + b^{-1} \cancel{=} (a+b)^{-1}$

69-74 ■ Simplifique la expresión fraccionaria. (Expresiones como éstas aparecen en cálculo.)

69. $$\frac{\dfrac{1}{1+x+h} - \dfrac{1}{1+x}}{h}$$

70. $$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h}$$

71. $$\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}$$

72. $$\frac{(x+h)^3 - 7(x+h) - (x^3 - 7x)}{h}$$

73. $$\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}$$

74. $$\sqrt{1 + \left(x^3 - \frac{1}{4x^3}\right)^2}$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

75-80 ■ Simplifique la expresión. (Este tipo de expresión aparece en cálculo cuando se usa la "regla del cociente".)

75. $\dfrac{3(x+2)^2(x-3)^2-(x+2)^3(2)(x-3)}{(x-3)^4}$

76. $\dfrac{2x(x+6)^4-x^2(4)(x+6)^3}{(x+6)^8}$

77. $\dfrac{2(1+x)^{1/2}-x(1+x)^{-1/2}}{x+1}$

78. $\dfrac{(1-x^2)^{1/2}+x^2(1-x^2)^{-1/2}}{1-x^2}$

79. $\dfrac{3(1+x)^{1/3}-x(1+x)^{-2/3}}{(1+x)^{2/3}}$

80. $\dfrac{(7-3x)^{1/2}+\frac{3}{2}x(7-3x)^{-1/2}}{7-3x}$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

División de polinomios

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Si $P(x)$ y $D(x)$ son polinomios tales que el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el grado de $D(x)$ y si $D(x) \neq 0$, entonces existen polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)},$$

con el grado de $R(x)$ menor que el grado de $D(x)$.

Los polinomios $P(x)$ y $D(x)$ se llaman **dividendo** y **divisor** respectivamante, $Q(x)$ es el **cociente** y $R(x)$ es el **residuo.**

Si en la ecuación anterior, multiplicamos en ambos lados por $D(x)$ obtenemos la ecuación equivalente

$$P(x) = D(x).Q(x) + R(x).$$

Ejemplo

Divida $5x^3 - 2x + 1$ entre $x + 1$.

Solución

En este caso, $P(x) = 5x^3 - 2x + 1$ es el dividendo y $D(x) = x + 1$ es el divisor. Para hallar el cociente $Q(x)$ y el residuo $R(x)$ se procede así:

- Se ordenan ambos polinomios con respecto a las potencias de x y si falta alguna potencia se agrega con coeficiente 0. En este caso, sólo falta agregar $0x^2$ al dividendo y la división se indica así:

$$5x^3 + 0x^2 - 2x + 1 \;\; \underline{\big|\; x + 1 \;}$$

- Para obtener el primer término del cociente, se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor. En este caso, $\dfrac{5x^3}{x} = 5x^2$ (Éste será el primer término del cociente).

$$
\begin{array}{l|l}
5x^3 + 0x^2 - 2x + 1 & x+1 \\ \cline{2-2}
 & 5x^2
\end{array}
$$

- Se multiplica el divisor por el primer término del cociente: $(x+1)\,5x^2 = 5x^3 + 5x^2$ y este resultado se resta del dividendo:

$$
\begin{array}{r|l}
\cancel{5x^3} + 0x^2 - 2x + 1 & x+1 \\ \cline{2-2}
-\cancel{5x^3} - 5x^2 \qquad\qquad & 5x^2 \\ \cline{1-1}
-5x^2 - 2x + 1 &
\end{array}
$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

- Se repite el procedimiento anterior, considerando el polinomio del último renglón, $-5x^2 - 2x + 1$, como dividendo:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
5\cancel{x}^3 & +0x^2 & -2x & +1 & x+1 \\
\cline{5-5}
-5\cancel{x}^3 & -5x^2 & & & 5x^2 - 5x + 3 \\
\cline{1-4}
 & -5\cancel{x}^2 & -2x & +1 & \\
\cline{2-4}
 & 5\cancel{x}^2 & +5x & & \\
\cline{2-4}
 & & 3x & +1 & \\
\cline{3-4}
 & & -3x & -3 & \\
\cline{3-4}
 & & & -2 &
\end{array}
$$

$\frac{-5x^2}{x} = -5x$

$\frac{3x}{x} = 3$

- El proceso termina cuando el polinomio que se obtiene en el último renglón es de menor grado que el divisor. En este caso, como el divisor es un polinomio de grado 1 y el polinomio del último renglón es de grado 0, el proceso de división terminó y ecribimos el resultado así:

$x+1$

$$\frac{5x^3 - 2x + 1}{x + 1} = 5x^2 - 5x + 3 + \frac{-2}{x + 1},$$

Este resultado también se puede escribir, después de multiplicar ambos lados de la ecuación anterior por $x + 1$, como

$$5x^3 - 2x + 1 = (x + 1)(5x^2 - 5x + 3) - 2.$$

determine el cociente y el residuo si se divide $f(x)$ entre $p(x)$.

$$f(x) = x^5 - x^4 + x^2 - x,$$

$$p(x) = x^3 - x^2 + x.$$

División sintética

La división sintética es un método rápido para dividir polinomios cuando el divisor es de la forma $x - c$, con c un número real.

Ejemplo 6.5

Divida $x^4 - 3x^2 + 2x - 5$ entre $x + 2$, usando división sintética.

Solución

- Sólo se escriben los coeficientes del dividendo y el valor de c (en este caso $c = -2$). Si falta alguna potencia de x se escribe 0 como coeficiente.

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & -5 & -2 \\ \hline \end{array}$$

$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

- Se traza una línea horizontal debajo de los coeficientes del polinomio, dejando un espacio, se escribe el primer coeficiente 1, debajo de la línea, se multiplica por c $(1 \times -2 = -2)$ y el resultado se escribe en el espacio intermedio, debajo del segundo coeficiente y se suman estos dos números $(0 + (-2) = -2)$. El resultado se multiplica por c y se suma al tercer coeficiente. Se repite este proceso hasta terminar los coeficientes del dividendo.

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & -5 & -2 \\ \cline{6-6} & -2 & 4 & -2 & 0 & \\ \cline{1-5} 1 & -2 & 1 & 0 & -5 & \end{array}$$

$$\underbrace{1 \quad -2 \quad 1 \quad 0}_{\text{Coeficientes del cociente}} \quad \underbrace{-5}_{\text{Residuo}}$$

- El residuo es el último número del último renglón ($R(x) = -5$) y el cociente es el polinomio de un grado menor que el dividendo y cuyos coeficientes son los números del último renglón, excepto el último (En este caso, $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x + 0$).

  Escribimos:

$$\frac{x^4 - 3x^2 + 2x - 5}{x + 2} = x^3 - 2x^2 + x + \frac{-5}{x + 2}$$

  o equivalentemente

$$x^4 - 3x^2 + 2x - 5 = (x + 2)(x^3 - 2x^2 + x) - 5.$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Para cada una de las divisiones señaladas, calcule el cociente y el residuo correspondientes. Utilice en cada literal la regla de Ruffini (división sintética).

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

(a) $\dfrac{3x^3 + 7x^2 + 6x - 1}{x + 9}$.

(b) $\dfrac{x^4 + x + 1}{x - 1}$.

El siguiente teorema muestra la forma en que la división sintética se puede usar para evaluar funciones polinomiales fácilmente.

TEOREMA DEL RESIDUO

Si la función polinomial $P(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es el valor $P(c)$.

DEMOSTRACIÓN Si el divisor del Algoritmo de División es de la forma $x - c$ para algún número real c, entonces el residuo debe ser constante (porque el grado del residuo es menor que el grado del divisor). Si a esta constante la llamamos r, entonces

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + r$$

Sustituyendo x por c en esta ecuación, obtenemos $P(c) = (c - c) \cdot Q(x) + r = 0 + r = r$, esto es, $P(c)$ es el residuo r. ■

EJEMPLO 4 | Uso del Teorema del Residuo para hallar el valor de una función polinomial

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Sea $P(x) = 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 7x + 3$.

(a) Encuentre el cociente y residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x + 2$.

(b) Use el Teorema del Residuo para hallar $P(-2)$.

SOLUCIÓN

(a) Como $x + 2 = x - (-2)$, la división sintética para este problema toma la siguiente forma.

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
-2 & 3 & 5 & -4 & 0 & 7 & 3 \\
 & & -6 & 2 & 4 & -8 & 2 \\
\hline
 & 3 & -1 & -2 & 4 & -1 & 5
\end{array}
$$

El residuo es 5, por lo que $P(-2) = 5$

El cociente es $3x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 1$, y el residuo es 5.

(b) Por el Teorema del Residuo, $P(-2)$ es el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x - (-2) = x + 2$. De la parte (a) el residuo es 5, por lo que $P(-2) = 5$.

39-51 ■ Use división sintética y el Teorema del Residuo para evaluar $P(c)$.

39. $P(x) = 4x^2 + 12x + 5, \quad c = -1$

40. $P(x) = 2x^2 + 9x + 1, \quad c = \frac{1}{2}$

41. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 6, \quad c = 2$

42. $P(x) = x^3 - x^2 + x + 5, \quad c = -1$

43. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7, \quad c = -2$

El siguiente teorema dice que los *ceros* de polinomiales corresponden a *factores*; utilizamos este dato en la Sección 3.2 para graficar funciones polinomiales.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

TEOREMA DEL FACTOR

c es cero de P si y sólo si $x - c$ es un factor de $P(x)$.

DEMOSTRACIÓN Si $P(x)$ se factoriza como $P(x) = (x - c) \cdot Q(x)$, entonces

$$P(c) = (c - c) \cdot Q(c) = 0 \cdot Q(c) = 0$$

Inversamente, si $P(c) = 0$, entonces por el Teorema del Residuo

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + 0 = (x - c) \cdot Q(x)$$

de modo que $x - c$ es un factor de $P(x)$. ∎

EJEMPLO 5 | Factorizar una función polinomial usando el Teorema del Factor

Sea $P(x) = x^3 - 7x + 6$. Demuestre que $P(1) = 0$ y use este dato para factorizar $P(x)$ completamente.

SOLUCIÓN Sustituyendo, vemos que $P(1) = 1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 0$. Por el Teorema del Factor esto significa que $x - 1$ es un factor de $P(x)$. Usando división sintética o larga

, vemos que

$$
\begin{aligned}
P(x) &= x^3 - 7x + 6 && \text{Polinomial dada} \\
&= (x-1)(x^2 + x - 6) && \text{Vea al margen} \\
&= (x-1)(x-2)(x+3) && \text{Factorice la cuadrática } x^2 + x - 6
\end{aligned}
$$

53-56 ■ Use el Teorema del Factor para demostrar que $x - c$ es un factor de $P(x)$ para el (los) valor(es) dado(s) de c.

53. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1, \quad c = 1$

54. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10, \quad c = 2$

55. $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 6x - 5, \quad c = \frac{1}{2}$

56. $P(x) = x^4 + 3x^3 - 16x^2 - 27x + 63, \quad c = 3, -3$

57-58 ■ Demuestre que el (los) valor(es) dado(s) de c son ceros de $P(x)$, y encuentre todos los otros ceros de $P(x)$.

57. $P(x) = x^3 - x^2 - 11x + 15, \quad c = 3$

58. $P(x) = 3x^4 - x^3 - 21x^2 - 11x + 6, \quad c = \frac{1}{3}, -2$

Universidad Pontificia Bolivariana

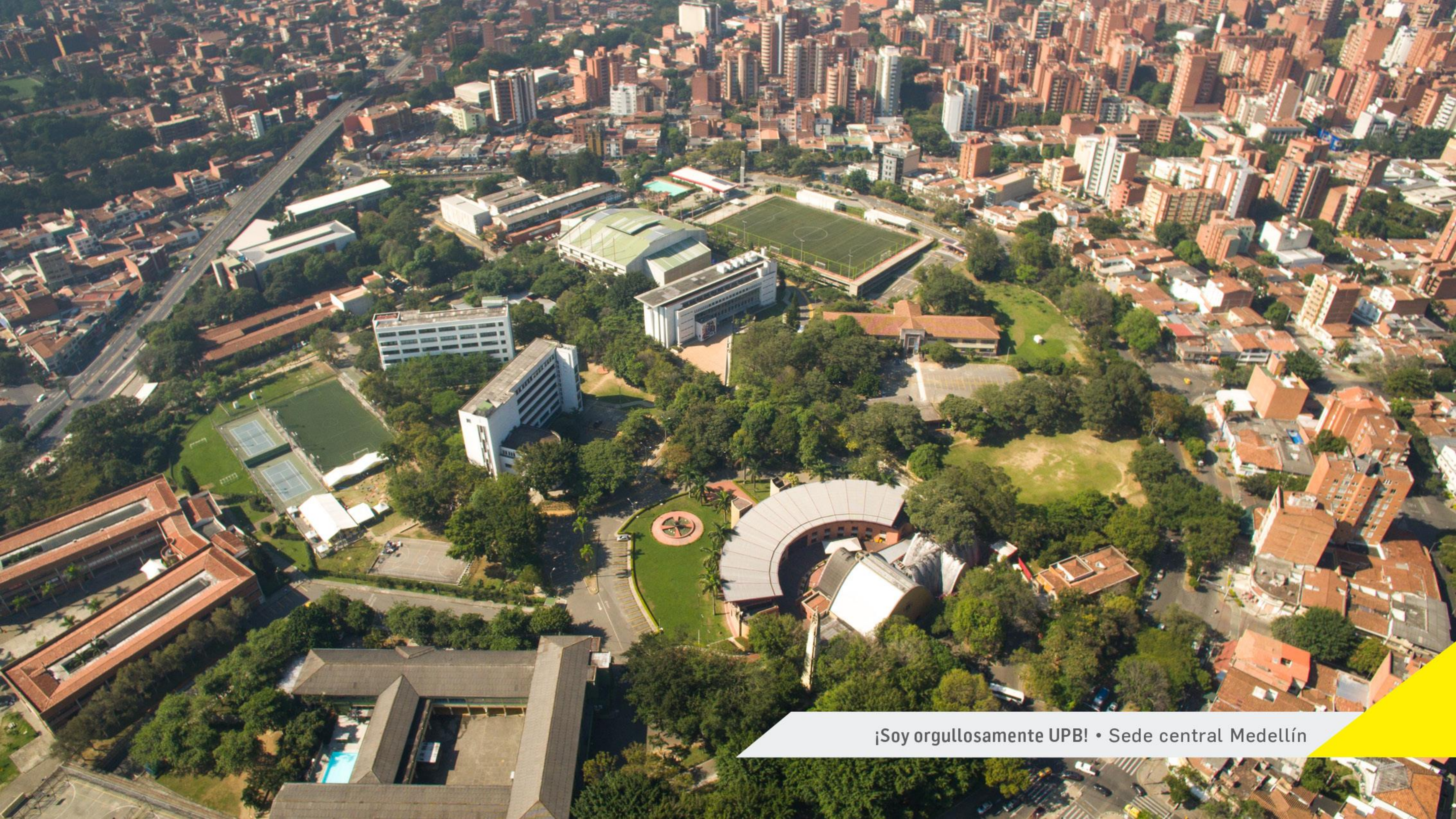
Fundada en 1936

REFERENCIA

Stewart, J., Precálculo Matemáticas para el Cálculo, Cengage Learning, séptima edición.

Referencia en línea

http://www.ebooks7-24.com.consultaremota.upb.edu.co/stage.aspx?il


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín