Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

ENCUENTRO 14.1

Sección 3.10: Aproximaciones lineales y diferenciales

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Fundada en 1936

Fundada en 1936

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Aproximaciones lineales

Hemos visto que una curva se encuentra muy cerca de su recta tangente cerca del punto de tangencia. De hecho, al realizar un acercamiento hacia el punto en la gráfica de una función derivable, observamos que la gráfica se parece cada vez más a su recta tangente. (Véase la figura 2 en la sección 2.7.) Esta observación es la base de un método para hallar valores aproximados de funciones.

La idea es que puede resultar fácil calcular un valor $f(a)$ de una función, pero difícil (si no es que imposible) calcular valores cercanos de f. Por tanto, recurrimos a los valores calculados fácilmente de la función lineal L cuya gráfica es la recta tangente de f en $(a, f(a))$. (Véase la figura 1.)

En otras palabras, utilizamos la recta tangente en $(a, f(a))$ como una aproximación a la curva $y = f(x)$ cuando x está cerca de a. Una ecuación para la recta tangente es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

y la aproximación

$$\boxed{1} \qquad f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

se conoce con el nombre de **aproximación lineal** o **aproximación de la recta tangente** de f en a. A la función lineal cuya gráfica es esta recta tangente, es decir,

$$\boxed{2} \qquad L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

se le llama **linealización** de f en a.

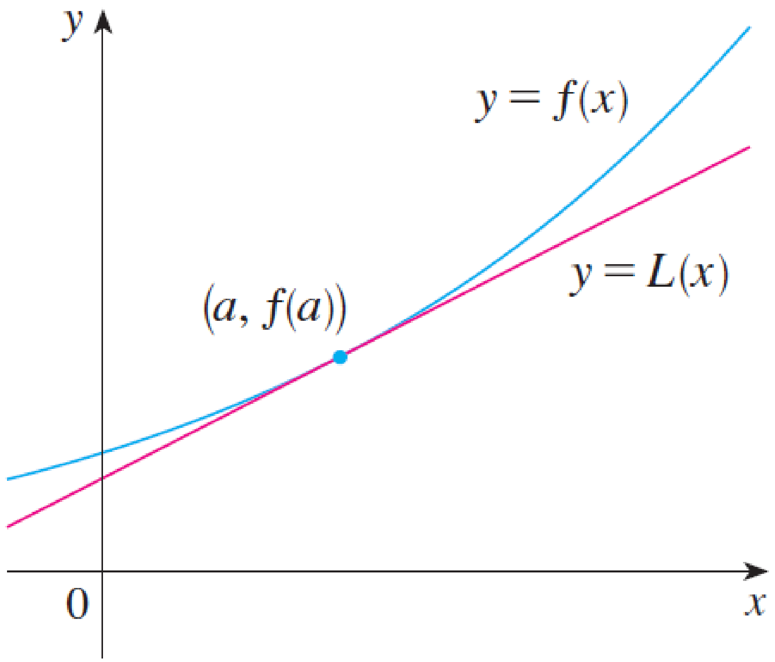


FIGURA 1

POLINOMIOS DE TAYLOR

La aproximación por medio de una recta tangente de $L(x)$ es la mejor aproximación de primer grado (lineal) a $f(x)$ cerca de $x = a$ porque $f(x)$ y $L(x)$ tienen la misma razón de cambio (derivada) en $x = a$.

En lugar de quedar conforme con una aproximación lineal o con una cuadrática para $f(x)$, cerca de $x = a$, intente hallar mejores aproximaciones con polinomios de grado más alto. Busque un polinomio de n-ésimo grado

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

tal que T_n y sus n primeras derivadas tengan los mismos valores en $x = a$ como f y sus n primeras derivadas. Derive repetidas veces y haga $x = a$ para demostrar que estas condiciones se satisfacen si $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, $c_2 = \frac{1}{2}f''(a)$ y, en general,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

donde $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot k$. El polinomio resultante

$$\boxed{T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n}$$

Se llama **polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f centrado en $x = a$.**

Diferenciales

Las ideas detrás de las aproximaciones lineales se formulan en ocasiones en la terminología y la notación de *diferenciales*. Si $y = f(x)$, donde f es una función derivable, entonces la **diferencial** dx es una variable independiente; esto es, dx es cualquier número real. La **diferencial** dy es entonces definida en términos de dx mediante la ecuación

$$dy = f'(x)dx \tag{3}$$

Así que dy es una variable dependiente: depende de los valores de x y dx. Si a dx se le da un valor específico, y x se considera como algún número específico en el dominio de f, entonces se determina el valor numérico de dy.

En la figura 5 se muestra el significado geométrico de los diferenciales. Sean $P(x, f(x))$ y $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ puntos sobre la gráfica de f, y sea $dx = \Delta x$. El cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

La pendiente de la recta tangente PR es la derivada $f'(x)$. Por consiguiente, la distancia dirigida de S a R es $f'(x)dx = dy$. Por tanto, dy representa la cantidad que la recta tangente se levanta o cae (el cambio en la linealización), mientras que Δy representa la cantidad que la curva $y = f(x)$ se levanta o cae cuando x cambia en una cantidad dx.

Si $dx \neq 0$, podemos dividir ambos lados de la ecuación 3 entre dx para obtener

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Antes hemos visto ecuaciones similares, pero ahora el lado izquierdo puede interpretarse en forma genuina como una razón de diferenciales.

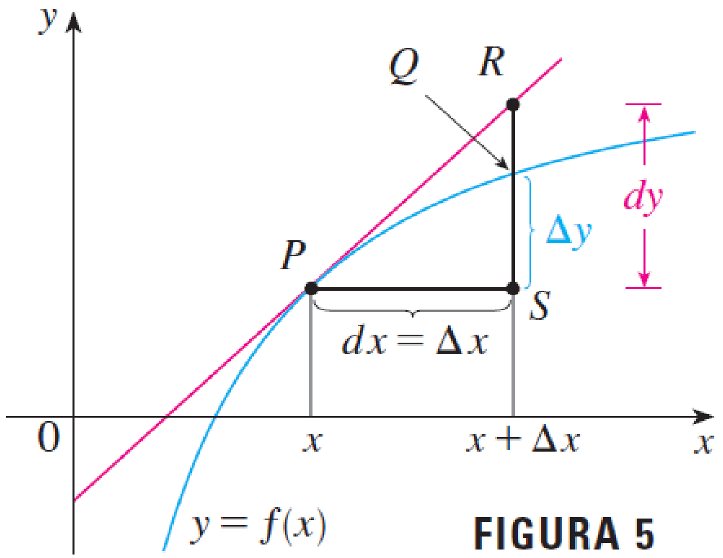


FIGURA 5

V EJEMPLO 1 Encuentre la linealización de la función $f(x) = \sqrt{x+3}$ en $a = 1$ y úsela para obtener una aproximación de los números $\sqrt{3.98}$ y $\sqrt{4.05}$. ¿Estas aproximaciones son sobreestimaciones o subestimaciones?

SOLUCIÓN La derivada de $f(x) = (x+3)^{1/2}$ es

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(x+3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

y tenemos que $f(1) = 2$ y $f'(1) = \frac{1}{4}$. Si ponemos estos valores en la ecuación 2, la linealización es

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 2 + \tfrac{1}{4}(x-1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

La aproximación lineal correspondiente $\boxed{1}$ es

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4} \qquad \text{(cuando } x \text{ está cerca de 1)}$$

En particular, tenemos que

$$\sqrt{3.98} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{0.98}{4} = 1.995 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{4.05} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{1.05}{4} = 2.0125$$

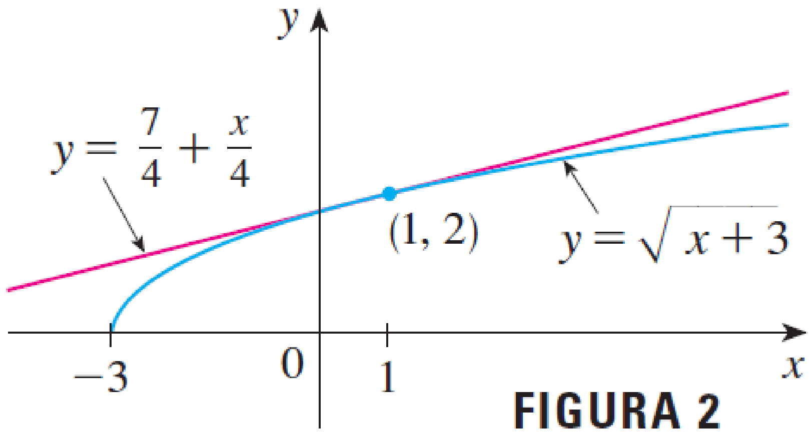


FIGURA 2

En la figura 2 se ilustra la aproximación lineal. En efecto, la recta tangente es una buena aproximación a la función dada cuando x esta cerca de 1. También vemos que las aproximaciones son sobreestimaciones porque la recta tangente se encuentra por arriba de la curva.

Por supuesto, una calculadora podría dar aproximaciones para $\sqrt{3.98}$ y $\sqrt{4.05}$, pero la aproximación lineal da una aproximación *sobre todo un intervalo*.

	x	De $L(x)$	Valor real
$\sqrt{3.9}$	0.9	1.975	1.97484176 . . .
$\sqrt{3.98}$	0.98	1.995	1.99499373 . . .
$\sqrt{4}$	1	2	2.00000000 . . .
$\sqrt{4.05}$	1.05	2.0125	2.01246117 . . .
$\sqrt{4.1}$	1.1	2.025	2.02484567 . . .
$\sqrt{5}$	2	2.25	2.23606797 . . .
$\sqrt{6}$	3	2.5	2.44948974 . . .

EJEMPLO 2 ¿Para cuáles valores de x la aproximación lineal

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

es exacta con una diferencia menor que 0.5? ¿Qué puede decir de una exactitud con una diferencia menor que 0.1?

SOLUCIÓN Una exactitud con una diferencia menor que 0.5 significa que las funciones deben diferir en menos de 0.5:

$$\left| \sqrt{x+3} - \left(\frac{7}{4} + \frac{x}{4} \right) \right| < 0.5$$

De modo equivalente, podríamos escribir

$$\sqrt{x+3} - 0.5 < \frac{7}{4} + \frac{x}{4} < \sqrt{x+3} + 0.5$$

Esto expresa que la aproximación lineal debe encontrarse entre las curvas que se obtienen al desplazar la curva $y = \sqrt{x+3}$ hacia arriba y hacia abajo en una cantidad de 0.5. En la figura 3 se muestra la recta tangente $y = (7 + x)/4$ que interseca la curva superior $y = \sqrt{x+3} + 0.5$ en P y en Q. Al hacer un acercamiento y usar el cursor, en la computadora estimamos que la coordenada x de P se aproxima a -2.66, y la coordenada x de Q es más o menos 8.66. Así, con base en la gráfica, la aproximación

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

es exacta con una diferencia menor que 0.5 cuando $-2.6 < x < 8.6$. (Se ha redondeado para quedar dentro del margen de seguridad).

De manera análoga, en la figura 4 vemos que la aproximación es exacta con una diferencia menor que 0.1 cuando $-1.1 < x < 3.9$.

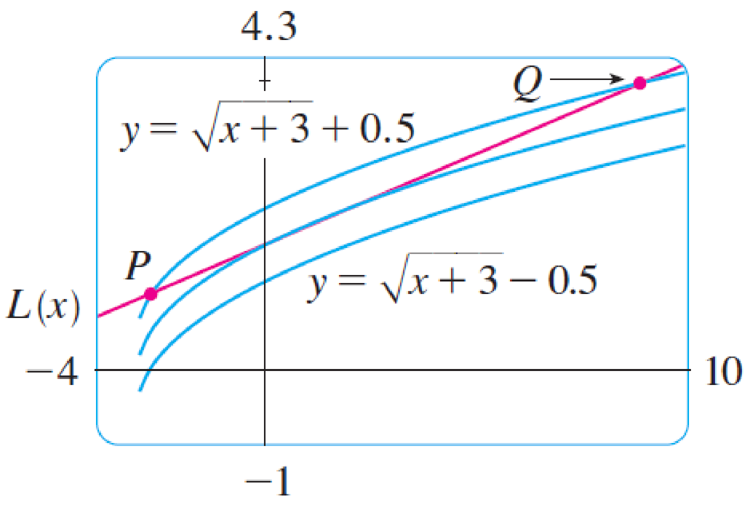


FIGURA 3

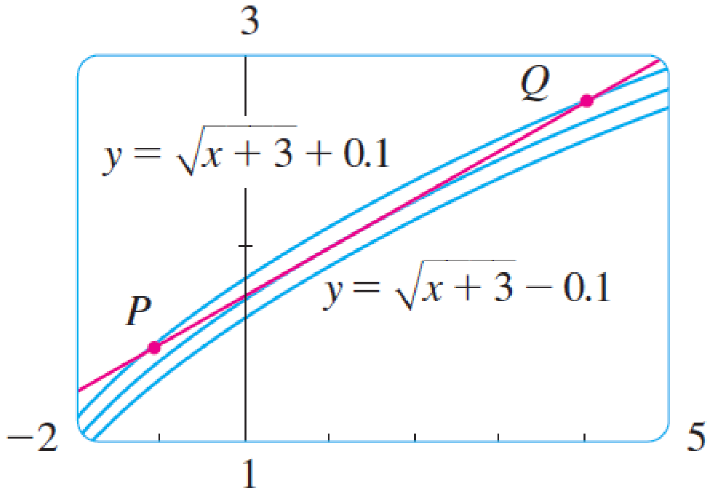


FIGURA 4

EJEMPLO 3 Determinación de una linealización para la función coseno

Encontrar una linealización de $f(x) = \cos x$ en $x = \pi/2$ (figura 3.50).

Solución Como $f(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ y $f'(\pi/2) = -\operatorname{sen}(\pi/2) = -1$, tenemos

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) \\ &= 0 + (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -x + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

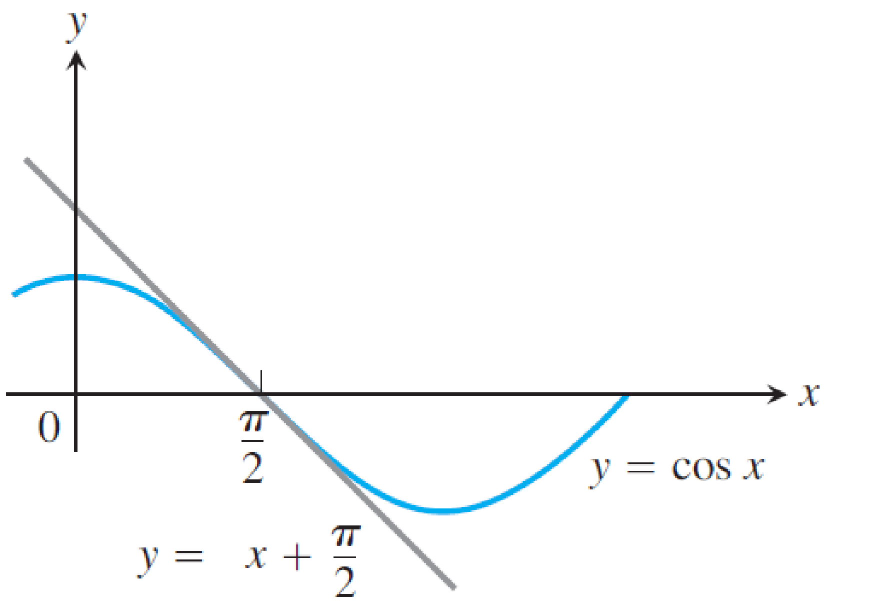


FIGURA 3.50 La gráfica de $f(x) = \cos x$ y su linealización en $x = \pi/2$. Cerca de $x = \pi/2$, $\cos x \approx -x + (\pi/2)$ (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Compare los valores de Δy y dy si $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ y x cambia a) de 2 a 2.05 y b) de 2 a 2.01.

SOLUCIÓN

a) Tenemos que

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 2(2) + 1 = 9$$

$$f(2.05) = (2.05)^3 + (2.05)^2 - 2(2.05) + 1 = 9.717625$$

$$\Delta y = f(2.05) - f(2) = 0.717625$$

En general,
$$dy = f'(x)\,dx = (3x^2 + 2x - 2)\,dx$$

Cuando $x = 2$ y $dx = \Delta x = 0.05$, esto se transforma en

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0.05 = 0.7$$

b)
$$f(2.01) = (2.01)^3 + (2.01)^2 - 2(2.01) + 1 = 9.140701$$

$$\Delta y = f(2.01) - f(2) = 0.140701$$

Cuando $dx = \Delta x = 0.01$,

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]\,0.01 = 0.14$$

La figura 6 muestra la función del ejemplo 3 y una comparación de dy y Δy cuando $a = 2$. El rectángulo de vista es $[1.8, 2.5]$ por $[6, 18]$.

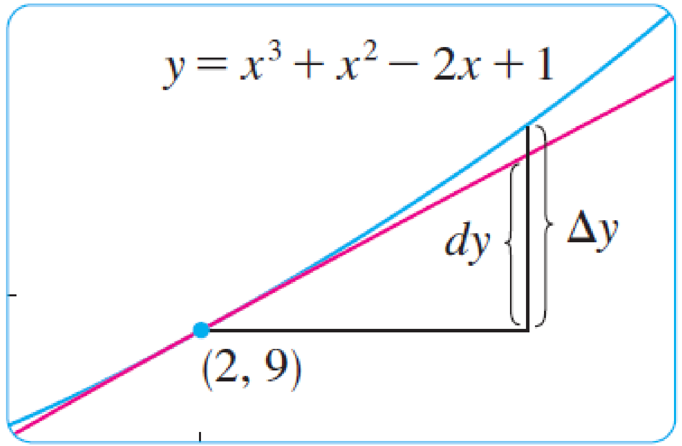


FIGURA 6

Observe que, en el ejemplo 3, la aproximación $\Delta y \approx dy$ mejora a medida que Δx se hace más pequeña. Observe también que es más fácil calcular dy que Δy. En el caso de funciones más complicadas, sería imposible calcular exactamente Δy. En estos casos, la aproximación mediante diferenciales es especialmente útil.

En la notación de diferenciales, la aproximación lineal $\boxed{1}$ puede escribirse como

$$f(a + dx) \approx f(\mathrm{a}) + dy$$

Por ejemplo, para la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$ del ejemplo 1, tenemos que

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{dx}{2\sqrt{x + 3}}$$

Si $a = 1$ y $dx = \Delta x = 0.05$, entonces

$$dy = \frac{0.05}{2\sqrt{1 + 3}} = 0.0125$$

y $$\sqrt{4.05} = f(1.05) \approx f(1) + dy = 2.0125$$

igual a lo que halló en el ejemplo 1.

Nuestro ejemplo final ilustra el uso de diferenciales al estimar los errores que ocurren debido a mediciones aproximadas.

EJEMPLO 4 Aproximación por diferenciales

Use $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,dx$ para aproximar $(2.01)^3$.

Solución Primero se identifica la función $f(x) = x^3$. Deseamos calcular el valor aproximado de $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$ cuando $x = 2$ y $\Delta x = 0.01$. Así, por $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)\,dx$,

$$dy = 3x^2 dx = 3x^2 \Delta x.$$

Por tanto,

$$(x + \Delta x)^3 \approx x^3 + 3x^2 \Delta x.$$

Con $x = 2$ y $\Delta x = 0.01$, la fórmula precedente proporciona la aproximación

$$(2.01)^3 \approx 2^3 + 3(2)^2(0.01) = 8.12.$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Ejemplos propuestos

6. Encuentre la aproximación lineal de la función $g(x) = \sqrt[3]{1+x}$ en $a = 0$ y utilícela para hacer una aproximación a los números $\sqrt[3]{0.95}$ y $\sqrt[3]{1.1}$. Ilustre trazando la gráfica de g y la recta tangente.

$$L(x) = g(a) + g'(a)(x-a)$$

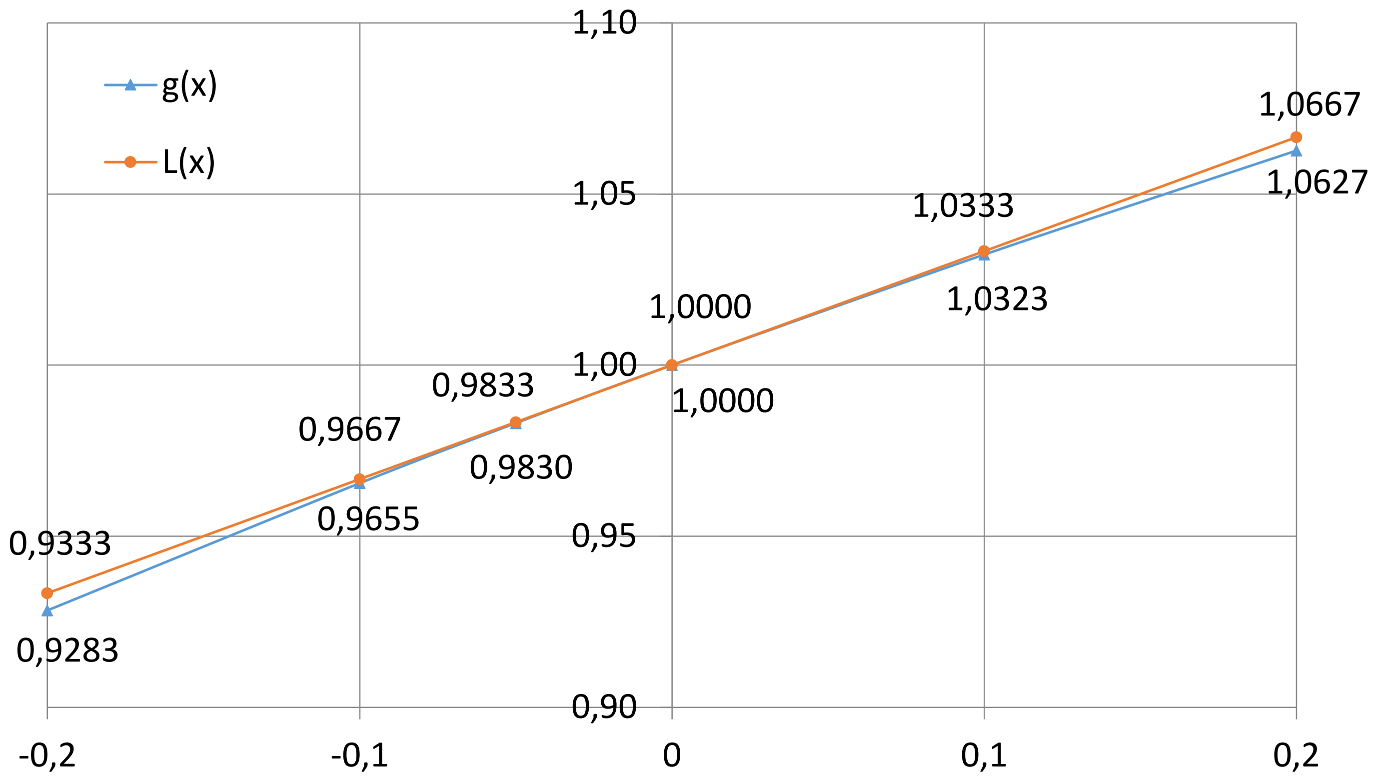
$$g(x) = \sqrt[3]{1+x} \qquad g(0) = 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3} \qquad g'(0) = \frac{1}{3}$$

$$L(x) = 1 + \frac{x}{3}$$

$$\sqrt[3]{0{,}95} = \sqrt[3]{1-0{,}05} \approx 1 + \frac{-0{,}05}{3} = 0{,}98\widehat{33}$$

$$\sqrt[3]{1{,}1} = \sqrt[3]{1+0{,}1} \approx 1 + \frac{0{,}1}{3} = 1{,}0\widehat{33}$$



Ejemplos propuestos

7–10 Compruebe la aproximación lineal dada en $a = 0$. Luego determine los valores de x para los cuales la aproximación lineal es exacta hasta un valor menor que 0.1.

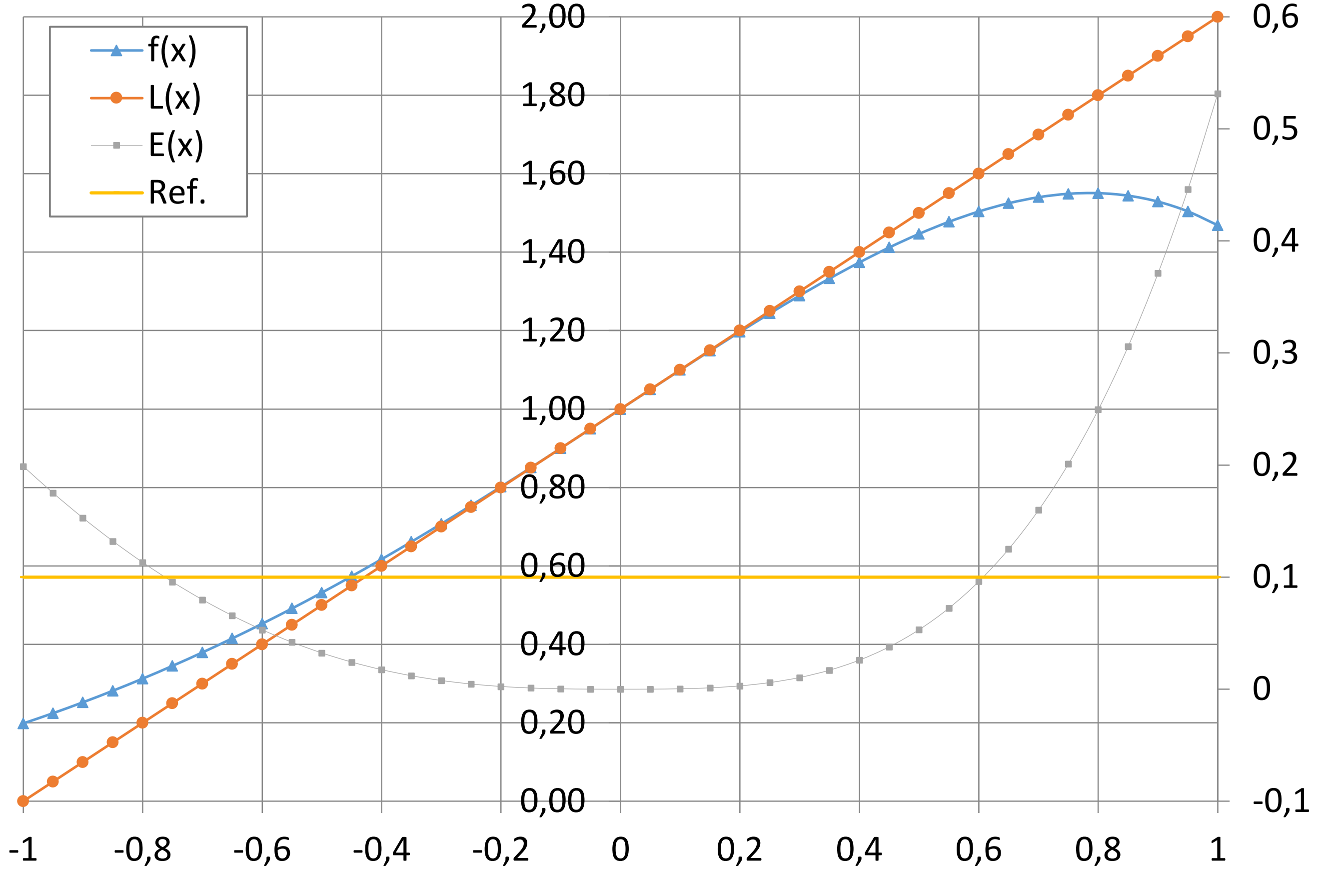
10. $e^x \cos x \approx 1 + x$

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$f(x) = e^x cosx \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -e^x senx + e^x cosx \qquad f'(0) = 1$$

$$L(x) = 1 + x$$



Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Ejemplos propuestos

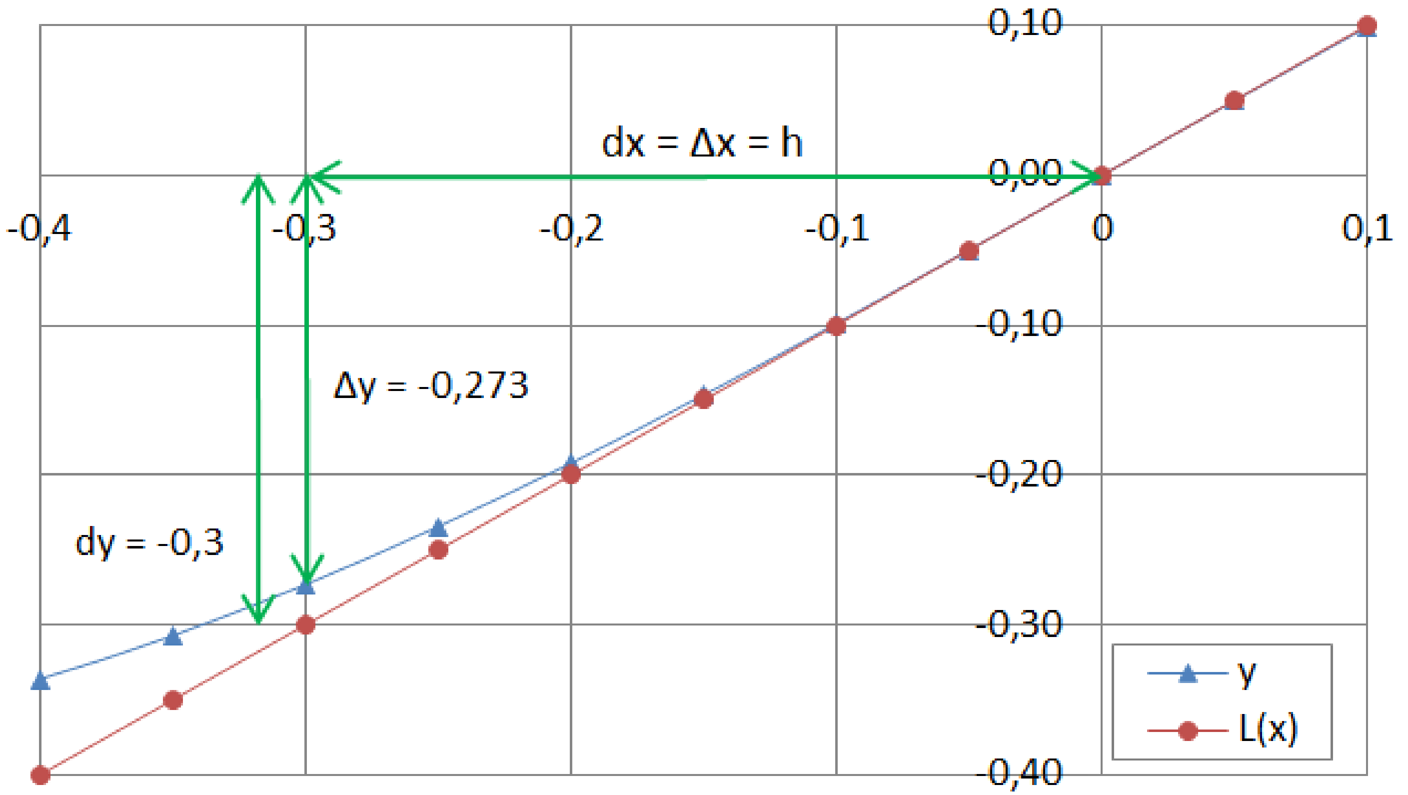
19–22 Calcule Δy y dy para los valores dados de x y $dx = \Delta x$. Luego trace un diagrama como el de la figura 5 en el que se muestren los segmentos de recta con longitudes dx, dy y Δy.

20. $y = x - x^3, \quad x = 0, \quad \Delta x = -0.3$

$$xi = 0$$
$$xf = -0{,}3$$
$$\Delta x = -0{,}3$$
$$\Delta y = f(-0{,}3) - f(0)$$
$$\Delta y = (-0{,}3) - (-0{,}3)^3 - 0$$
$$\Delta y = -0{,}273$$

$$dy = f'(x)dx$$
$$dy = (1 - 3x^2)\Delta x$$
$$dy = (1 - 3(0)^2)(-0{,}3)$$
$$dy = -0{,}3$$

$$L(x) = y(0) + y'(0)(x - 0)$$
$$L(x) = 0 + 1(x - 0)$$
$$L(x) = x$$



Ejercicios

1–4 Encuentre la linealización $L(x)$ de la función en a.

1. $f(x) = x^3 - x^2 + 3, \quad a = -2$

2. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/6$

3. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4$

4. $f(x) = 2^x, \quad a = 0$

5. Encuentre la aproximación lineal a la función $f(x) = \sqrt{1 - x}$ en $a = 0$ y úsela para hacer una aproximación a los números $\sqrt{0.9}$ y $\sqrt{0.99}$. Ilustre trazando la gráfica de f y la recta tangente.

7–10 Compruebe la aproximación lineal dada en $a = 0$. Luego determine los valores de x para los cuales la aproximación lineal es exacta hasta un valor menor que 0.1.

7. $\ln(1 + x) \approx x$

8. $\tan x \approx x$

9. $1/(1 + 2x)^4 \approx 1 - 8x$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

19–22 Calcule Δy y dy para los valores dados de x y $dx = \Delta x$. Luego trace un diagrama como el de la figura 5 en el que se muestren los segmentos de recta con longitudes dx, dy y Δy.

19. $y = x^2 - 4x, \quad x = 3, \quad \Delta x = 0.5$

21. $y = \sqrt{x - 2}, \quad x = 3, \quad \Delta x = 0.8$

22. $y = e^x, \quad x = 0, \quad \Delta x = 0.5$

42. En la página 431 de *Physics: Calculus*, 2a. ed., por Eugene Hecht (Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2000), al derivar la fórmula $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ para el período de un péndulo de longitud L, el autor obtiene la ecuación $a_T = -g \operatorname{sen} \theta$ para la aceleración tangencial del péndulo. Luego dice "para ángulos pequeños, el valor de θ en radianes está muy cerca del valor de sen θ; difieren menos que 2% hasta alrededor de 20°".

(a) Compruebe la aproximación lineal en 0 para la función seno:

$$\operatorname{sen} x \approx x$$

(b) Utilice un dispositivo graficador para determinar los valores de x para los cuales sen x y x difieren menos de 2%. Luego compruebe la afirmación de Hecht convirtiendo de radianes a grados.

REFERENCIA

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.

¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín