Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

ENCUENTRO 12.2

Sección 3.6: Derivada de funciones logarítmicas. Derivación logarítmica. El número e como un límite.

Derivadas de funciones logarítmicas

En esta sección utilizaremos la derivación implícita para hallar las derivadas de las funciones logarítmicas $y = \log_a x$ y, en particular, de la función logaritmo natural $y = \ln x$.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

1

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $y = \log_a x$. Entonces $a^y = x$

Si mediante la fórmula $\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$ derivamos esta ecuación de manera implícita respecto a x, obtenemos

$$a^y(\ln a)\frac{dy}{dx} = 1$$

y, por consiguiente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

Si en la fórmula 1 ponemos $a = e$, entonces el factor $\ln a$ en el lado derecho se convierte en $\ln e = 1$ y se obtiene la fórmula para la derivada de la función logarítmica natural $\log_e x = \ln x$:

2

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

Si se comparan las fórmulas 1 y 2, se evidencia una de las razones principales por la que se usan los logaritmos naturales (logaritmos con base e) en el Cálculo. La fórmula de derivación es más sencilla cuando $a = e$, porque $\ln e = 1$.

V EJEMPLO 1 Derive $y = \ln(x^3 + 1)$.

SOLUCIÓN Para utilizar la regla de la cadena, hacemos $u = x^3 + 1$. Entonces $y = \ln u$, de modo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{x^3 + 1}(3x^2) = \frac{3x^2}{x^3 + 1}$$

En general, si combinamos la fórmula 2 con la regla de la cadena como en el ejemplo 1, obtenemos

3 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}} \quad \text{o bien} \quad \boxed{\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)}}$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO 2 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Utilizando $\boxed{3}$, se tiene que

$$\frac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x = \cot x$$

EJEMPLO 3 Derive $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

SOLUCIÓN En esta ocasión el logaritmo es la función interior, de modo que la regla de la cadena da

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO 4 Derive $f(x) = \log_{10}(2 + \operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Si usamos la fórmula 1 con $a = 10$, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \log_{10}(2 + \operatorname{sen} x) \\ &= \frac{1}{(2 + \operatorname{sen} x) \ln 10} \frac{d}{dx}(2 + \operatorname{sen} x) \\ &= \frac{\cos x}{(2 + \operatorname{sen} x) \ln 10} \end{aligned}$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 5 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$.

SOLUCIÓN 1

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}}\,\frac{d}{dx}\,\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$$

$$= \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,\frac{\sqrt{x-2}\cdot 1-(x+1)\left(\frac{1}{2}\right)(x-2)^{-1/2}}{x-2}$$

$$= \frac{x-2-\frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)}$$

SOLUCIÓN 2 Si primero simplificamos la función dada aplicando las leyes de los logaritmos, entonces la derivación se vuelve más fácil:

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} = \frac{d}{dx}\left[\ln(x+1)-\tfrac{1}{2}\ln(x-2)\right]$$

$$= \frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

(Esta respuesta puede dejarse como está, pero si usara un denominador común, vería que da la misma respuesta en la solución 1).

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

V EJEMPLO 6 Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \ln|x|$:

SOLUCIÓN Puesto que

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

se sigue que

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Así, $f'(x) = 1/x$ para todo $x \neq 0$.

Vale la pena recordar el resultado del ejemplo 6:

4
$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}}$$

En la figura 2 se muestra la gráfica de la función $f(x) = \ln|x|$ del ejemplo 6 y la de su derivada $f'(x) = 1/x$. Note que cuando x es pequeño, la gráfica de $y = \ln|x|$ está inclinada y, por consiguiente, $f'(x)$ es grande (positiva o negativa).

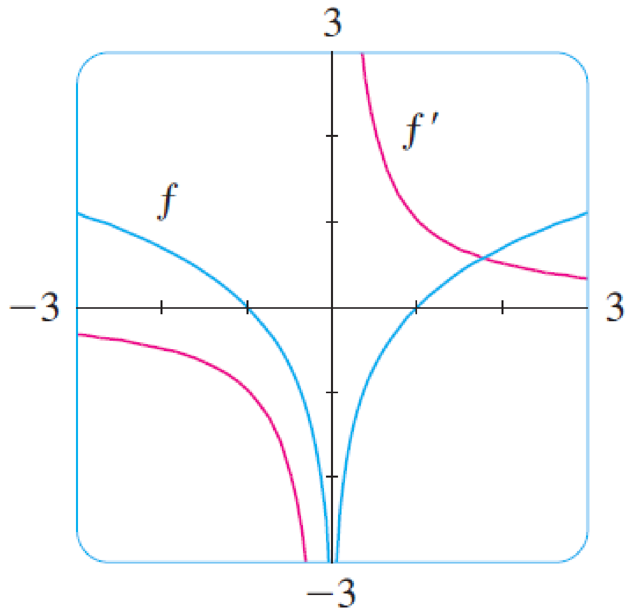

FIGURA 2

Ejemplos

Halle la derivada de cada una de las siguientes funciones. Simplifique donde sea posible.

12. $h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

$$h'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}}2x\right)$$

$$h'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\left(\frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)$$

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

18. $y = \ln(\csc x - \cot x)$

$$y' = \frac{1}{cscx - cotx}(-cscxcotx + csc^2x)$$

$$y' = \frac{csc(-cotx + cscx)}{cscx - cotx} = cscx$$

21. $y = \tan[\ln(ax + b)]$

$$y' = sec^2[Ln(ax + b)]\frac{1}{ax + b}a$$

22. $y = \log_2(x \log_5 x)$

$$y = \frac{Ln\left(x\frac{Lnx}{Ln5}\right)}{Ln2}$$

$$y' = \frac{1}{Ln2}\frac{1}{x\frac{Lnx}{Ln5}}\left(x\frac{1}{xLn5} + \frac{Lnx}{Ln5}\right)$$

$$y' = \frac{Ln5}{Ln2}\frac{1}{xLnx}\left(\frac{1}{Ln5} + \frac{Lnx}{Ln5}\right)$$

$$y' = \frac{1 + Lnx}{Ln2xLnx}$$

Ejemplos

Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $y = Ln(e^x + e^{2x})$ en $(0, Ln2)$

$$y = Ln(e^x + e^{2x})$$

$$y' = \frac{e^x + 2e^{2x}}{e^x + e^{2x}}$$

$$y'(0) = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$$

ERT: $(y - Ln2) = \frac{3}{2}(x - 0)$

$$y = \frac{3}{2}x + Ln2$$

Sea $f(x) = log_{10}(x^2 - x) + \sqrt{sen\sqrt{x}}$, encuentre $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2 - x)Ln10}(2x - 1) + \frac{1}{2\sqrt{sen\sqrt{x}}} cos\sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{(x^2 - x)Ln10} + \frac{cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{sen\sqrt{x}}}$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Ejemplo

Encuentre una fórmula para $f^{(n)}(x)$, siendo $f(x) \ = \ Ln\ (x \ + \ 1)$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$$

$$f''(x) = (-1)(x+1)^{-2}$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(x+1)^{-3}$$

$$f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)(x+1)^{-4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x+1)^n}$$

Ejercicios

2–22 Derive la función.

2. $f(x) = x \ln x - x$

3. $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$

4. $f(x) = \ln(\operatorname{sen}^2 x)$

5. $f(x) = \sqrt[5]{\ln x}$

6. $f(x) = \ln \sqrt[5]{x}$

7. $f(x) = \log_{10}(1 + \cos x)$

8. $f(x) = \log_{10}\sqrt{x}$

9. $g(x) = \ln(xe^{-2x})$

10. $g(t) = \sqrt{1 + \ln t}$

11. $F(t) = (\ln t)^2 \operatorname{sen} t$

13. $g(x) = \ln\left(x\sqrt{x^2 - 1}\right)$

14. $P(v) = \dfrac{\ln v}{1 - v}$

15. $F(s) = \ln \ln s$

16. $y = \ln|1 + t - t^3|$

17. $T(z) = 2^z \log_2 z$

19. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

20. $H(z) = \ln \sqrt{\dfrac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$

23–26 Encuentre y' y y'' en cada una de las funciones siguientes.

23. $y = \sqrt{x} \ln x$

24. $y = \dfrac{\ln x}{1 + \ln x}$

25. $y = \ln|\sec x|$

26. $y = \ln(1 + \ln x)$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

27–30 Derive f y encuentre el dominio de f.

27. $f(x) = \dfrac{x}{1 - \ln(x - 1)}$

28. $f(x) = \sqrt{2 + \ln x}$

29. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

30. $f(x) = \ln \ln \ln x$

31. Si $f(x) = \ln(x + \ln x)$, determine $f'(1)$.

32. Si $f(x) = \cos(\ln x^2)$, determine $f'(1)$.

33–34 Determine la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

33. $y = \ln(x^2 - 3x + 1)$, $(3, 0)$

34. $y = x^2 \ln x$, $(1, 0)$

Derivación logarítmica

Con frecuencia, el cálculo de derivadas de funciones complicadas que comprenden productos, cocientes o potencias puede simplificarse tomando logaritmos. El método que se aplica en el ejemplo siguiente se llama **derivación logarítmica**.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Pasos en la derivación logarítmica

1. Tomar logaritmos naturales de ambos lados de una ecuación $y = f(x)$ y utilizar las leyes de los logaritmos para simplificar.
2. Derivar implícitamente respecto a x.
3. Resolver la ecuación resultante para y'.

Ejemplo

Dada $h(x) = [u(x)]^{v(x)}$. Hallar $h'(x)$

$$Lnh(x) = v(x)Lnu(x)$$

$$\frac{1}{h(x)}h'(x) = v(x)\frac{1}{u(x)}u'(x) + v'(x)Lnu(x)$$

$$h'(x) = h(x)\left[\frac{v(x)u'(x)}{u(x)} + v'(x)Lnu(x)\right]$$

$$h'(x) = [u(x)]^{v(x)}\left[\frac{v(x)u'(x)}{u(x)} + v'(x)Lnu(x)\right]$$

$$h'(x) = v(x)[u(x)]^{v(x)-1}u'(x) + v'(x)Lnu(x)[u(x)]^{v(x)}$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO 7 Derive $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

SOLUCIÓN Tome logaritmos de ambos miembros de la ecuación y aplique las leyes de los logaritmos, para simplificar:

$$\ln y = \tfrac{3}{4}\ln x + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$$

Al derivar implícitamente respecto a x, resulta que

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - 5\cdot\frac{3}{3x+2}$$

Al resolver para dy/dx, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Puesto que tenemos una expresión explícita para y, podemos sustituir y escribir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Si no hubiéramos utilizado la derivación logarítmica en el ejemplo 7, habríamos tenido que aplicar tanto la regla del cociente como la regla del producto. El proceso de cálculo habría sido horrendo.

Ejemplos

Utilice la derivación logarítmica para hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones.

39. $y = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6$

$$Lny = Ln(2x+1)^5 + Ln(x^4-3)^6$$
$$Lny = 5Ln(2x+1) + 6Ln(x^4-3)$$
$$\frac{1}{y}y' = \frac{5}{2x+1}2 + \frac{6}{x^4-3}4x^3$$
$$y' = (2x+1)^5(x^4-3)^6\left[\frac{10}{2x+1} + \frac{24x^3}{x^4-3}\right]$$

40. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2}(x^2 + 1)^{10}$

$$Lny = Ln\sqrt{x} + Lne^{x^2} + Ln(x^2+1)^{10}$$
$$Lny = \frac{1}{2}Lnx + x^2 + 10Ln(x^2+1)$$
$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2x} + 2x + \frac{10}{x^2+1}2x$$
$$y' = \sqrt{x}e^{x^2}(x^2+1)^{10}\left[\frac{1}{2x} + 2x + \frac{20x}{x^2+1}\right]$$

Regla de la potencia Si n es cualquier número real y $f(x) = x^n$, entonces

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

DEMOSTRACIÓN Sea $y = x^n$. Utilizando la derivación logarítmica:

$$\ln|y| = \ln|x|^n = n\ln|x| \qquad x \neq 0$$

Por tanto,

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}$$

así que,

$$y' = n\frac{y}{x} = n\frac{x^n}{x} = nx^{n-1}$$

Debe distinguir con cuidado la regla de la potencia $[(x^n)' = nx^{n-1}]$, donde la base es variable y el exponente constante, de la regla para derivar funciones exponenciales $[(a^x)' = a^x \ln a]$, donde la base es constante y el exponente es variable.

En general, se tienen cuatro casos para exponentes y bases:

Base constante, exponente constante 1

1. $$\frac{d}{dx}(a^b) = 0 \qquad (a \text{ y } b \text{ son constantes})$$

Base variable, exponente constante 2

2. $$\frac{d}{dx}[f(x)]^b = b[f(x)]^{b-1}f'(x)$$

Base constante, exponente variable 3

3. $$\frac{d}{dx}[a^{g(x)}] = a^{g(x)}(\ln a)g'(x)$$

Base variable, exponente variable 4

4. Para hallar $(d/dx)[f(x)]^{g(x)}$, podemos aplicar la derivación logarítmica, como en el ejemplo que sigue.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

V **EJEMPLO 8** Derive $y = x^{\sqrt{x}}$.

SOLUCIÓN 1 Dado que la base y el exponente son variables, utilizamos la derivación logarítmica:

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\,\ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} + (\ln x)\,\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = y\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\right)$$

SOLUCIÓN 2 Otro método es escribir $x^{\sqrt{x}} = (e^{\ln x})^{\sqrt{x}}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}\,\ln x}\right) = e^{\sqrt{x}\,\ln x}\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\,\ln x\right)$$

$$= x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\right) \qquad \text{(como en la solución 1)}$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

La figura 3 ilustra el ejemplo 8 mostrando las gráficas de $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ y su derivada.

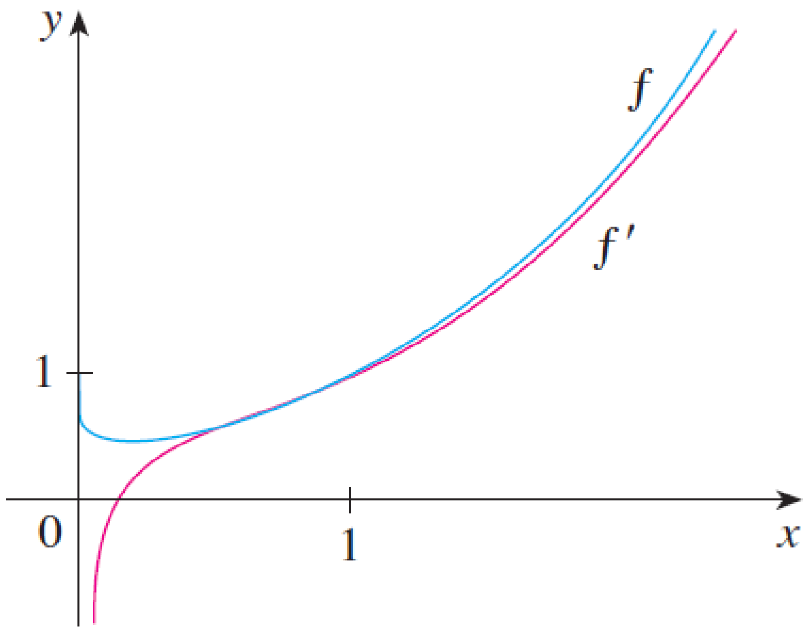

FIGURA 3

Ejemplos

Utilice la derivación logarítmica para hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones.

44. $y = x^{\cos x}$

$$Lny = cosxLnx$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{cosx}{x} - senxLnx$$

$$y' = x^{cosx}\left[\frac{cosx}{x} - senxLnx\right]$$

$$y' = x^{cosx-1}cosx - x^{cosx}senxLnx$$

48. $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$

$$Lny = LnxLnsenx$$

$$\frac{1}{y}y' = Lnx\frac{1}{senx}cosx + Lnsenx\frac{1}{x}$$

$$y' = (senx)^{Lnx}\left[cotxLnx + \frac{Lnsenx}{x}\right]$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Ejercicios

39–50 Utilice la derivación logarítmica para determinar la derivada de la función.

41. $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^4+1}}$

42. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2-x}(x+1)^{2/3}$

43. $y = x^x$

46. $y = \left(\sqrt{x}\right)^x$

45. $y = x^{\operatorname{sen} x}$

47. $y = (\cos x)^x$

49. $y = (\tan x)^{1/x}$

50. $y = (\ln x)^{\cos x}$

51. Encuentre y' si $y = \ln(x^2 + y^2)$.

52. Determine y' si $x^y = y^x$.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

El número e como un límite

Hemos demostrado que si $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x) = 1/x$. Debido a esto, $f'(1) = 1$. Utilizaremos este hecho para expresar el número e como un límite.

A partir de la definición de derivada como un límite, tenemos que

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x)$$

$$= \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x}$$

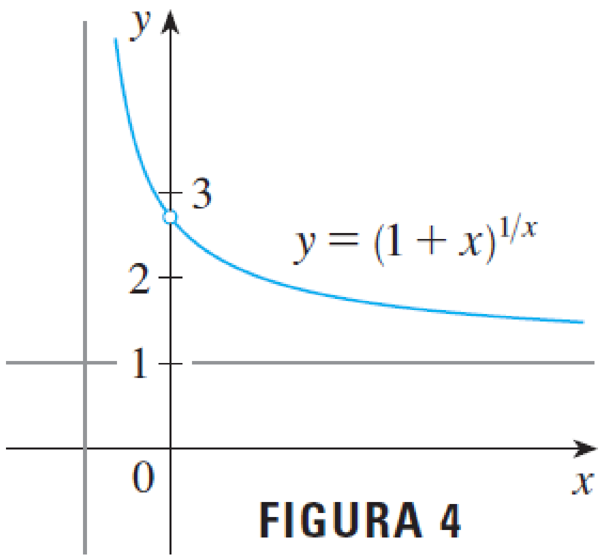

FIGURA 4

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Ya que $f'(1) = 1$, tenemos

$$\lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x} = 1$$

Luego, por el teorema 2.5.8 y la continuidad de la función exponencial, tenemos que

$$e = e^1 = e^{\lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x \to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}$$

5 $$\boxed{e = \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}}$$

Si hacemos $n = 1/x$ en la fórmula 5, entonces $n \to \infty$ cuando $x \to 0^+$ y, por consiguiente, una expresión alternativa para e es

6 $$\boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín