Universidad Pontificia Bolivariana

Escuela de Ingeniería
Centro de Ciencia Básica

CÁLCULO DIFERENCIAL

Guía teórica – Límites

Teoremas:

Si L, M, a y c son números reales y $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$, entonces:

1. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, entonces es único
2. $\lim\limits_{x\to a} mx+b = ma+b$
3. $\lim\limits_{x\to a} c = c$
4. Si $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$, entonces: $\lim\limits_{x\to c} P(x)=P(c)=a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + ... + a_0$
5. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = L \pm M$
6. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x) = LM$
7. $\lim\limits_{x\to a}[cf(x)] = \lim\limits_{x\to a} c \lim\limits_{x\to a} f(x) = cL$
8. $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M \neq 0$
9. Si P(x) y Q(x) son polinomios y Q(c) ≠ 0, entonces: $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(c)}{Q(c)}$
10. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$
11. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ con $\begin{cases} L>0 & Si\ n\ es\ par \\ L\in\Re & Si\ n\ es\ impar \end{cases}$ y con f(x) bien definida en la raíz.
12. **Teorema de la compresión, del emparedado o de la estricción:**

    Si $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$
13. Si $f(x)\leq g(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Pasos para solucionar un límite:

1. Evaluar el límite e identificar que clase de indeterminación presenta (se podrían presentar indeterminaciones del tipo: $\pm\dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}, +\infty-\infty, 0(\pm\infty), 1^{\pm\infty}, (\pm\infty)^0, 0^0$
2. Factorizar, racionalizar, realizar un cambio de variable
3. Simplificar
4. Evaluar

Operaciones con infinitos:

1. $\pm\infty \pm a = \pm\infty$, $\forall$ a $\in \Re$
2. $+\infty + \infty = +\infty$, $-\infty - \infty = -\infty$
3. $a(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & si\ a > 0 \\ \mp\infty & si\ a < 0 \end{cases}$
4. $(+\infty)^n = +\infty$, $\forall$ n $\in$ Q^+
5. $(-\infty)^{1/n} = -\infty$, $\forall$ n $\in$ Z impares
6. $(-\infty)^n = \begin{cases} +\infty & n \in \mathrm{N}\ par \\ -\infty & n \in \mathrm{N}\ impar \end{cases}$
7. $a^{+\infty} = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$
8. $a^{-\infty} = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$

Límites laterales:

$\underset{x\to a}{Lim}\, f(x) = L$

sii $\underset{x\to a^+}{Lim}\, f(x) = \underset{x\to a^-}{Lim}\, f(x) = L$

Límites al infinito:

Son de la forma $\underset{x\to\pm\infty}{Lim}\, f(x) = L$, L $\in \Re$

Límites infinitos:

Son de la forma $\underset{x\to a}{Lim}\, f(x) = \pm\infty$

Límites infinitos al infinito:

Son de la forma $\underset{x\to\pm\infty}{Lim}\, f(x) = \pm\infty$

Límites exponenciales y logarítmicos:

1. $\underset{x\to 0}{Lim}(1+x)^{1/x} = e$
2. $\underset{x\to\pm\infty}{Lim}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$
3. $\underset{x\to a}{Lim}\log_a|f(x)| = \log_a\left|\underset{x\to a}{Lim}\, f(x)\right|$, con f(x) bien definida.
4. $\underset{x\to a}{Lim}[f(x)]^{g(x)} = \left[\underset{x\to a}{Lim}\, f(x)\right]^{\underset{x\to a}{Lim}\, g(x)} = L^M$, con L^M bien definida.

Límites trigonométricos:

1. $\underset{x\to 0}{Lim}\dfrac{senx}{x} = 1 \Rightarrow \underset{x\to 0}{Lim}\dfrac{1-\cos x}{x} = 0$
2. $\underset{x\to\pm\infty}{Lim}\, senx = r \in [-1,1]$
3. $\underset{x\to\pm\infty}{Lim}\, \cos x = r \in [-1,1]$

Asíntotas:

1. Verticales:

La recta x = a es una asíntota vertical de y = f(x) si verifica al menos: $\underset{x\to a^+}{Lim}\, f(x) = \pm\infty$ ó $\underset{x\to a^-}{Lim}\, f(x) = \pm\infty$

2. Horizontales:

La recta y = b es una asíntota horizontal de y = f(x) si verifica: $\underset{x\to+\infty}{Lim}\, f(x) = b$ ó $\underset{x\to-\infty}{Lim}\, f(x) = b$

3. Oblicuas:

La recta y = mx + b es una asíntota oblicua y = f(x) si: $\underset{x\to\pm\infty}{Lim}[f(x) - (mx+b)] = 0$, donde $m = \underset{x\to\pm\infty}{Lim}\dfrac{f(x)}{x}$, $b = \underset{x\to\pm\infty}{Lim}[f(x) - mx]$