Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

ENCUENTRO 16.3

Sección 4.7: Problemas de optimización (Parte 2)

Directrices para resolver problemas de optimización

i) Lea el problema con atención; luego léalo de nuevo.
ii) Elabore un dibujo cuando sea posible; hágalo sencillo.
iii) Introduzca variables (en su dibujo, en caso de haber alguna) y observe cualquier restricción entre las variables.
iv) Use todas las variables necesarias para establecer la función objetivo. Si usa más de una variable, aplique la restricción para reducir la función a una variable.
v) Note el intervalo en que está definida la función. Determine todos los números críticos.
vi) Si la función objetivo es continua y está definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces compruebe los extremos en puntos frontera. Si el extremo deseado no ocurre en un punto frontera, debe ocurrir en un número crítico en el intervalo abierto (a, b).
vii) Si la función objetivo está definida sobre un intervalo que no es cerrado, entonces es necesario aplicar una prueba de la derivada en cada número crítico en ese intervalo.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO Alcance máximo

Cuando se ignora la resistencia del aire, el alcance horizontal R de un proyectil está dado por

$$R(\theta) = \frac{v_0^2}{g}\text{sen } 2\theta, \tag{4}$$

donde v_0 es la velocidad inicial constante, g es la aceleración de la gravedad y θ es el ángulo de elevación o salida. Encuentre el alcance máximo del proyectil.

Solución Como modelo físico del problema puede imaginarse que el proyectil es una bala de cañón. Vea la FIGURA 4.8.1. Para ángulos θ mayores que $\pi/2$, la bala de cañón mostrada en la figura debe salir hacia atrás. Por tanto, tiene sentido físico restringir la función en (4) al intervalo cerrado $[0, \pi/2]$. A partir de

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{v_0^2}{g}2 \cos 2\theta$$

se observa que $dR/d\theta = 0$ cuando $\cos 2\theta = 0$ o $2\theta = \pi/2$, de modo que el único número crítico en el intervalo abierto $(0, \pi/2)$ es $\pi/4$. Al evaluar la función en los puntos finales y el número crítico obtenemos

$$R(0) = 0, \quad R(\pi/4) = \frac{v_0^2}{g}, \quad R(\pi/2) = 0.$$

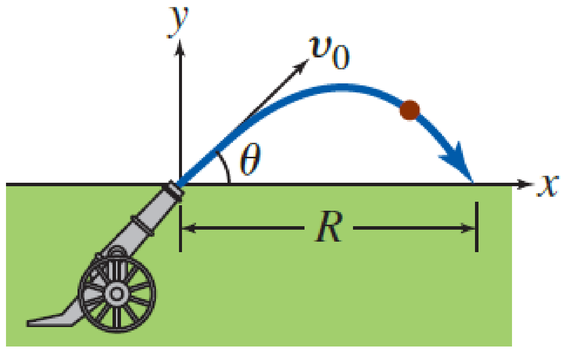


FIGURA 4.8.1 Bala de cañón en el ejemplo 1

Puesto que $R(\theta)$ es continua sobre el intervalo cerrado $[0, \pi/2]$, estos valores indican que el alcance mínimo es $R(0) = R(\pi/2) = 0$ y que el alcance máximo es $R(\pi/4) = v_0^2/g$. En otras palabras, para lograr la distancia máxima, el proyectil debe ser lanzado a un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. ■

Si las balas de cañón en el ejemplo 1 se disparan con la velocidad inicial v_0 pero con ángulos de elevación variables θ diferentes de 45°, entonces sus alcances horizontales son menores que $R_{\text{máx}} = v_0^2/g$. Al analizar la función en (4) se observa que obtenemos el mismo alcance horizontal para ángulos complementarios como 20° y 70°, y 30° y 60°. Vea la FIGURA 4.8.2. Si se toma en cuenta la resistencia del aire, el alcance de todos los proyectiles es más corto que v_0^2/g, aunque se hayan disparado a un ángulo de elevación de 45°.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

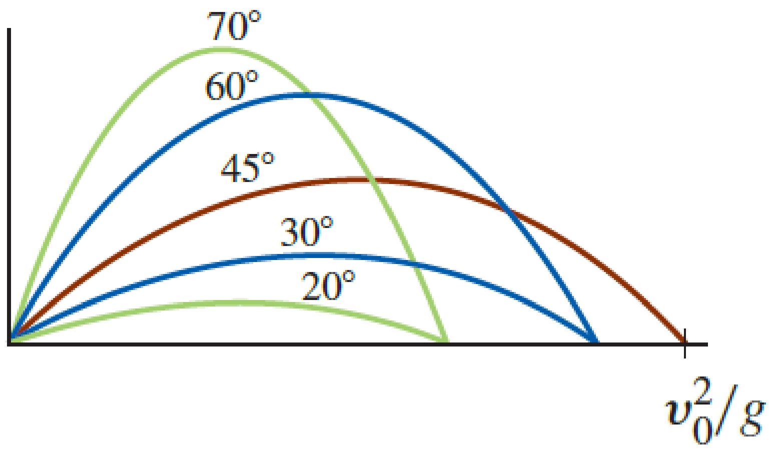


FIGURA 4.8.2 Mismo alcance para ángulos complementarios

EJEMPLO Volumen máximo

Un canalón para agua de 20 pies de longitud tiene extremos en forma de triángulos isósceles cuyos lados miden 4 pies de longitud. Determine la dimensión a través del extremo triangular de modo que el volumen del canalón sea máximo. Encuentre el volumen máximo.

Solución El canalón con la dimensión desconocida x se muestra en la FIGURA 4.8.3. El volumen V del canalón es

$$V = (\text{área del extremo triangular}) \times (\text{longitud}).$$

Por la FIGURA 4.8.4 y el teorema de Pitágoras, el área del extremo triangular como una función de x es $\frac{1}{2}x\sqrt{16 - x^2/4}$. En consecuencia, el volumen del canalón como una función de x, la función objetivo, es

$$V(x) = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}x\sqrt{16 - \frac{1}{4}x^2}\right) = 5x\sqrt{64 - x^2}.$$

La función $V(x)$ sólo tiene sentido sobre el intervalo cerrado $[0, 8]$. (¿Por qué?)

Al tomar la derivada y simplificar se obtiene

$$V'(x) = -10\frac{x^2 - 32}{\sqrt{64 - x^2}}.$$

Aunque $V'(x) = 0$ para $x = \pm 4\sqrt{2}$, el único número crítico en el intervalo abierto $(0, 8)$ es $4\sqrt{2}$. Puesto que la función $V(x)$ es continua sobre $[0, 8]$, sabemos por el teorema 4.3.3 que $V(0) = V(8) = 0$ debe ser su mínimo absoluto. Entonces, el máximo absoluto de $V(x)$ debe ocurrir cuando el ancho a través de la parte superior del canalón es $4\sqrt{2} \approx 5.66$ pies. El volumen máximo es $V(4\sqrt{2}) = 160$ pies^3.

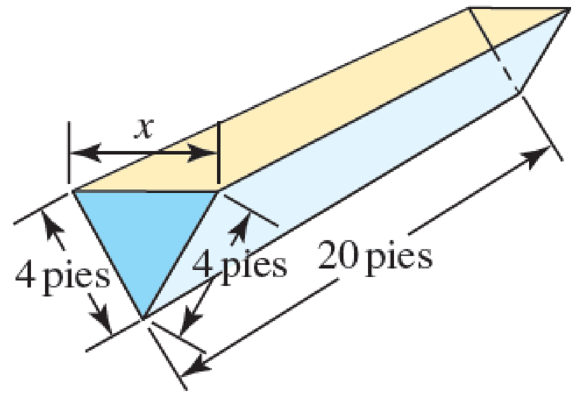


FIGURA 4.8.3 Canalón de agua

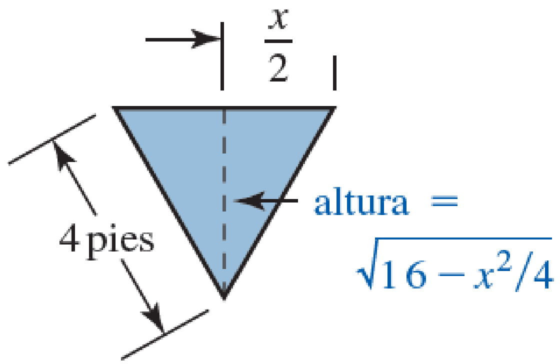


FIGURA 4.8.4 Extremo triangular del canalón

Nota: A menudo un problema puede resolverse en más de una forma. En retrospectiva, usted debe comprobar que la solución del ejemplo es ligeramente “más limpia” si la dimensión a través de la parte superior del extremo del canalón se identifica como $2x$ en vez de como x. En efecto, como se muestra en el siguiente ejemplo, el ejemplo puede resolverse usando una variable completamente distinta.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO Solución alterna del ejemplo

Como se muestra en la FIGURA 4.8.5, θ denota el ángulo entre la vertical y uno de los lados. A partir de trigonometría de triángulos rectángulos, la altura y la base del extremo triangular son $4 \cos \theta$ y $8 \operatorname{sen} \theta$, respectivamente. Cuando V se expresa como una función de θ obtenemos $(\frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}) \times (\text{longitud})$, o bien,

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \tfrac{1}{2}(4\cos\theta)(8\operatorname{sen}\theta)\cdot 20 \\ &= 320 \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ &= 160(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta) \\ &= 160\operatorname{sen}2\theta, \qquad \leftarrow \text{fórmula de doble ángulo} \end{aligned}$$

donde $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Al proceder como en el ejemplo 1, encontramos que el valor máximo $V = 160$ pies^3 ocurre en $\theta = \pi/4$. La dimensión a través de la parte superior del canalón, o la base del triángulo isósceles, es $8 \operatorname{sen}(\pi/4) = 4\sqrt{2}$ pies. ■

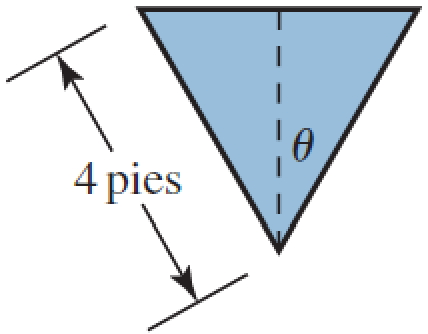


FIGURA 4.8.5 Extremo triangular del canalón

EJEMPLO Tiempo mínimo

Una mujer en el punto P sobre una isla desea llegar a una población situada en el punto S sobre una playa recta en tierra firme. El punto P está a 9 millas del punto más próximo Q sobre la playa y la población en el punto S está a 15 millas de Q. Vea la FIGURA 4.8.8. Si la mujer rema un bote a razón de 3 mi/h hacia un punto R en tierra, luego camina el resto del camino hacia S a razón de 5 mi/h, determine dónde debe desembarcar en la playa a fin de minimizar el tiempo total de viaje.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

$$T = tiempo\ de\ remado + tiempo\ caminando.$$

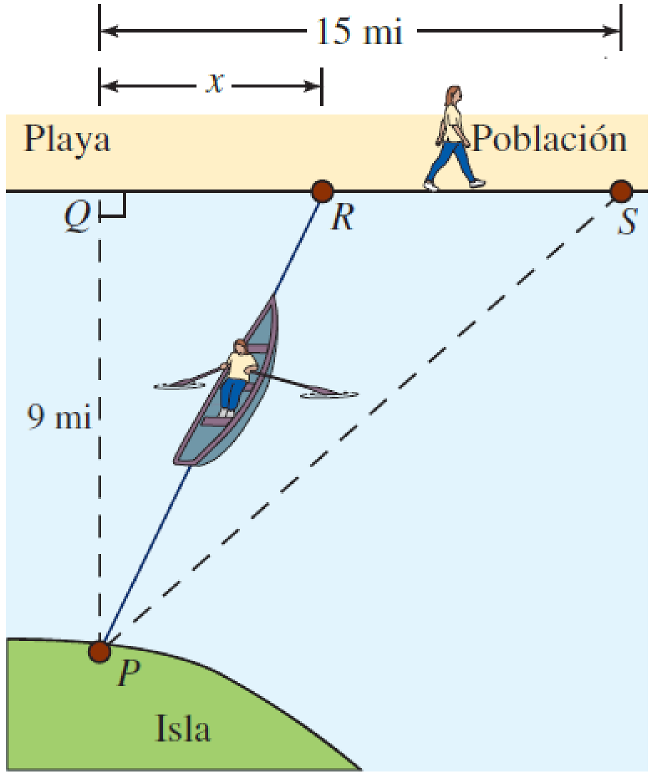


FIGURA 4.8.8 Mujer que se desplaza en el ejemplo

$$T = \frac{\sqrt{81+x^2}}{3} + \frac{15-x}{5}$$

La función está definida en el intervalo cerrado [0,15]

$$T' = \left(\frac{1}{6}\right)\frac{1}{\sqrt{81+x^2}}(2x) - \frac{1}{5} \qquad T' = \frac{x}{3\sqrt{81+x^2}} - \frac{1}{5}$$

Igualando esta derivada a cero y despejando x: $\frac{x}{3\sqrt{81+x^2}} = \frac{1}{5}$ $\qquad \frac{x^2}{81+x^2} = \frac{9}{25}$

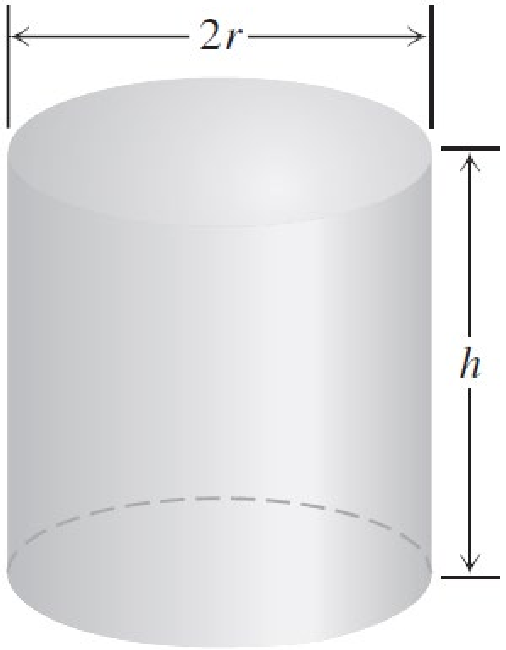
$$25x^2 = 729 + 9x^2 \qquad 16x^2 = 729 \qquad x = \frac{27}{4}$$

$T(0) = 6h$ $\qquad T\left(\frac{27}{4}\right)=5.4h$ $\qquad T(15)=5.83$ El tiempo de viaje mínimo ocurre

cuando $x = \frac{27}{4} = 6.75\ millas.$

Ejemplo

Se le ha pedido diseñar una lata con capacidad de un litro que tenga la forma de un cilindro circular recto. ¿Qué dimensiones harán que se utilice la menor cantidad de material?



Volumen de la lata: Si r y h se miden en centímetros, entonces el volumen de la lata en centímetros cúbicos es: $\pi r^2 h = 1000$ $\quad 1litro = 1000cm^3$

Área de la superficie de la lata: $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \qquad A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) \qquad A = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

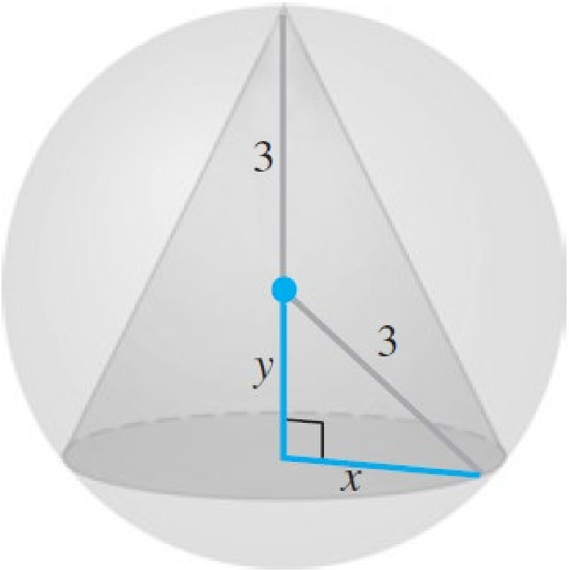
$$A' = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} \qquad 0 = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} \qquad \frac{2000}{r^2} = 4\pi r \qquad 2000 = 4\pi r^3$$

$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5.42$ $\qquad A'' = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$ $\quad$ Al evaluar r en A'' da positivo y el valor de $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$

es un mínimo $\quad h = \frac{1000}{\pi r^2} \qquad h \approx 10.84cm$

Ejemplo

Determine el volumen del cono circular recto más grande que se puede inscribir en una esfera de radio 3.



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad h = y + 3 \qquad r = x \qquad r^2 + y^2 = 9 \qquad V = \left(\frac{1}{3}\pi\right)(9 - y^2)(y + 3)$

$V = \left(\frac{1}{3}\pi\right)(9y + 27 - y^3 - 3y^2) \qquad V = 3\pi y + 9\pi - \left(\frac{1}{3}\pi\right)y^3 - \pi y^2$

$V' = 3\pi - \pi y^2 - 2\pi y \qquad 0 = 3\pi - \pi y^2 - 2\pi y \qquad 0 = y^2 + 2y - 3$

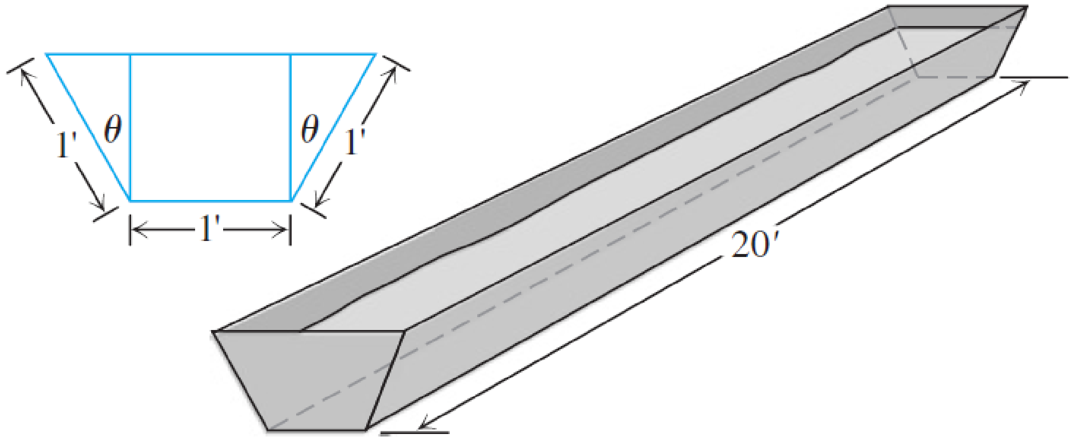
$0 = (y + 3)(y - 1) \qquad y = -3 \qquad y = 1 \qquad V'' = -2\pi y - 2\pi$ Al evaluar V'' en $y = 1$ el

Resultado es negativo por tanto el volumen en ese punto es máximo.

$V = \left(\frac{1}{3}\pi\right)(8)(4) = \left(\frac{32}{3}\pi\right)$ unidades cúbicas.

Ejemplo

El comedero de la figura se debe hacer con las dimensiones que se muestran. Solamente se puede variar el ángulo θ. ¿Qué valor de θ maximizará el volumen del comedero?



El volumen se hace máximo cuando se hace máxima el área de la sección transversal.

$$\acute{A}rea\ del\ trapecio = \frac{1}{2}(B+b)h \qquad A = \frac{1}{2}(1+2sen\theta+1)cos\theta \qquad A = \frac{1}{2}(2+2sen\theta)cos\theta \qquad 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

$$A' = -sen\theta + sen\theta(-sen\theta) + cos\theta(cos\theta) \qquad A' = -sen\theta - sen^2\theta + cos^2\theta \qquad A' = -sen\theta - sen^2\theta + (1-sen^2\theta)$$

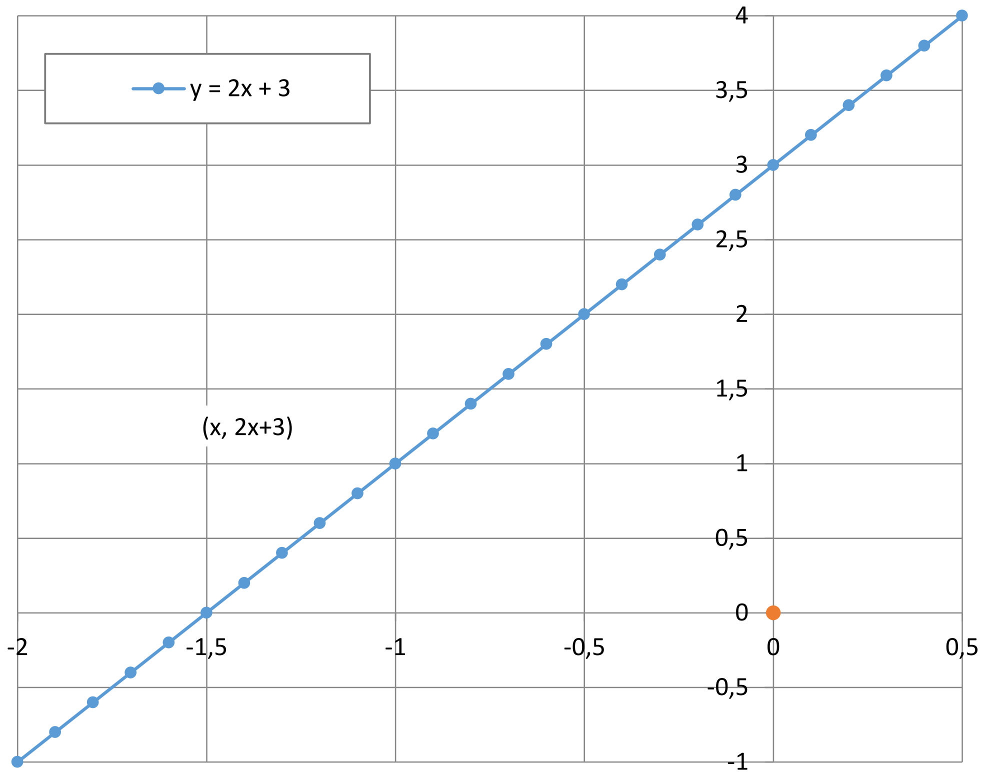
$$A' = -sen\theta - 2sen^2\theta + 1 \qquad 0 = -sen\theta - 2sen^2\theta + 1 \qquad 0 = 2sen^2\theta + sen\theta - 1$$

$$sen\theta = -1 \qquad sen\theta = \frac{1}{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$A'' = -cos\theta - 4sen\theta cos\theta$ evaluada en $\theta = \frac{\pi}{6}$ da negativa. Por tanto el área transversal es máxima y el volumen máximo.

Ejemplo

21. Encuentre el punto sobre la recta $y = 2x + 3$ que está más cerca del origen.



$$d = \sqrt{(2x+3)^2 + x^2}$$

$$d' = \frac{2(2x+3)2 + 2x}{2\sqrt{(2x+3)^2 + x^2}}$$

$$= \frac{4x + 6 + x}{\sqrt{(2x+3)^2 + x^2}}$$

$C1D: \quad d' > 0 \quad \rightarrow \qquad 5x + 6 > 0$

$x > -6/5$

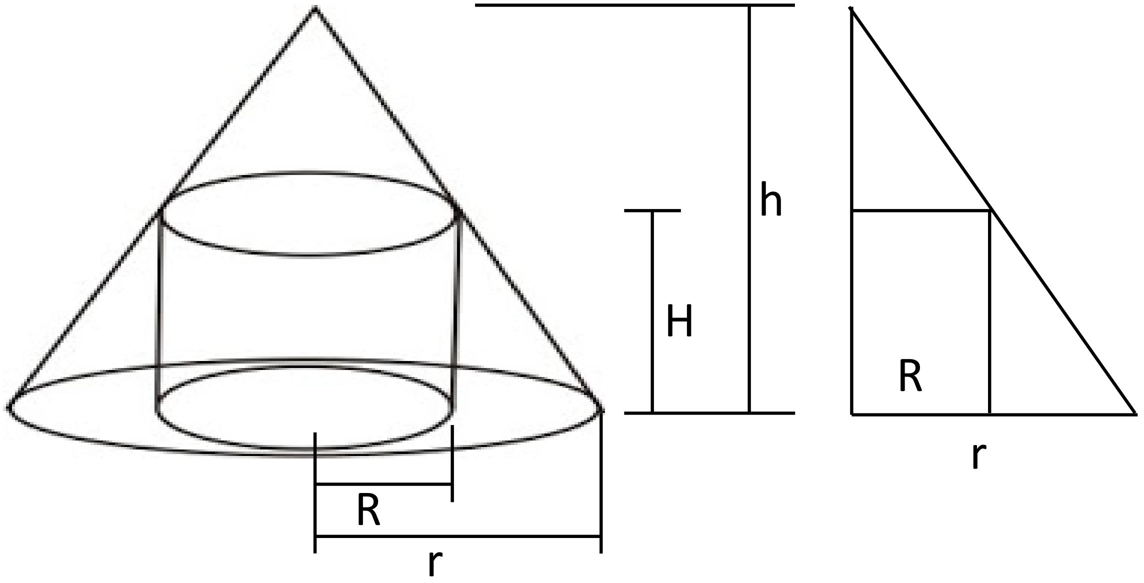
-------- +++++

-6/5

En x $= -\frac{6}{5}, y = 2\left(\frac{-6}{5}\right) + 3 = \frac{3}{5}$ existe un mínimo de d

Ejemplo

32. Busque el cilindro de mayor volumen posible que se puede inscribir en un cono de altura h y radio de la base r.



$$\frac{h}{r} = \frac{h-H}{R} \quad \rightarrow \quad H = h - \frac{Rh}{r}$$

$$Vcilindro = \pi R^2 H = \pi R^2 \left(h - \frac{Rh}{r}\right)$$

$$Vcilindro = \pi R^2 h - \pi \frac{R^3 h}{r}$$

$$V'cilindro = 2\pi R h - 3\pi \frac{R^2 h}{r} = \pi R h \left(2 - \frac{3R}{r}\right)$$

$$C2D: \quad V'cilindro = 0 \quad \rightarrow \quad R = 0;\ R = \frac{2r}{3}$$

$$V''cilindro = 2\pi h - 6\pi \frac{Rh}{r}$$

$V''cilindro(R=0) > 0$, en $R = 0$ hay un mínimo de Vcilindro

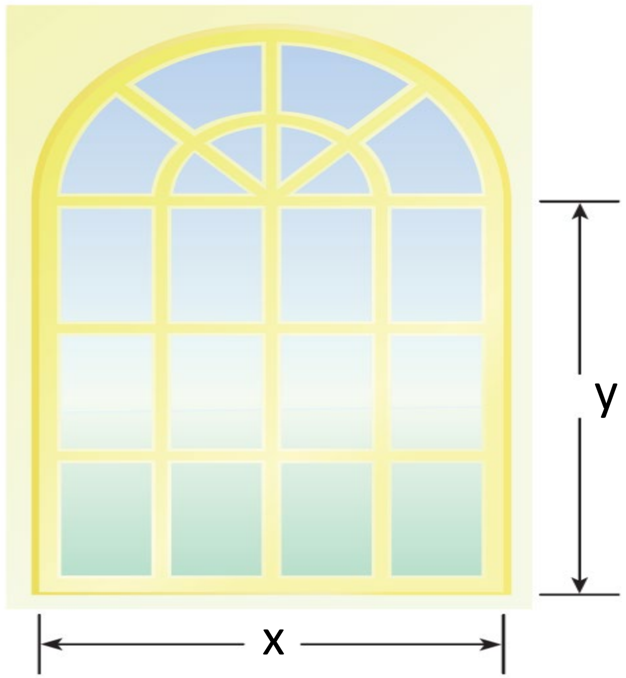
$V''cilindro\left(R = \frac{2r}{3}\right) < 0$, en $R = \frac{2r}{3}$ hay un máximo de Vcilindro

$$H = h - \frac{h}{r} \times \frac{2r}{3} = \frac{h}{3}$$

$$Vcilindro = \pi \left(\frac{2r}{3}\right)^2 \frac{h}{3} = \frac{4\pi r^2 h}{27}$$

Ejemplo

34. Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo rematado por un semicírculo. (Así, el diámetro del semicírculo es igual al ancho del rectángulo. Véase el ejercicio 1.1.62.) Si el perímetro de la ventana es de 10 m, encuentre las dimensiones de la ventana para que sea admitida la mayor cantidad posible de luz.



$$Psemic = \frac{2\pi r}{2};\quad r = \frac{x}{2};\quad Psemic = \frac{\pi x}{2}$$

$$P = Psemic + x + 2y = 10$$

$$\frac{\pi x}{2} + x + 2y = 10 \quad \rightarrow \quad y = 5 - \frac{\frac{\pi}{2}+1}{2}x$$

$$A = \frac{\pi r^2}{2} + xy = \frac{\pi x^2}{8} + xy = \frac{\pi x^2}{8} + 5x - \frac{\pi+2}{4}x^2$$

$$A' = \frac{\pi}{4}x + 5 - \frac{\pi+2}{2}x$$

$$C2D:\ \ A' = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{5}{\frac{\pi+2}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{20}{\pi+4}$$

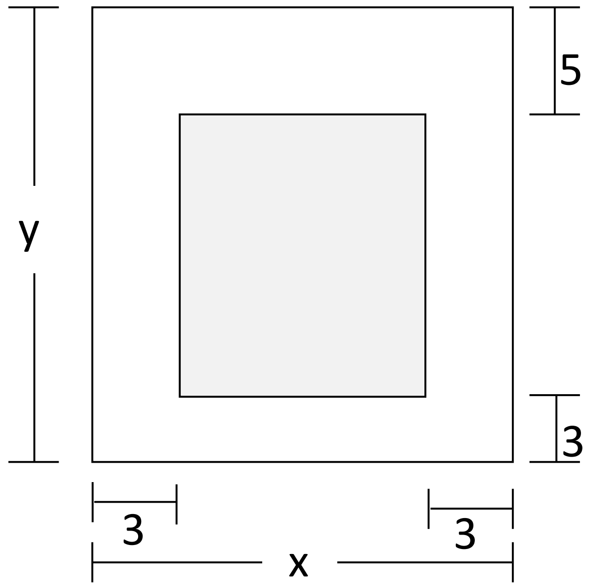
$$A'' = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi+2}{2} = -\frac{\pi+4}{4} < 0$$

En x = $\frac{20}{\pi+4}$ m existe un máximo de A

y = $\frac{10}{\pi+4}$ m

Ejemplo

36. Un cartel debe tener un área de 900 cm² con márgenes de 3 cm en la parte inferior y laterales, y un margen de 5 cm en la parte superior. ¿Qué dimensiones darán la mayor área de impresión?



$$xy = 900 \quad \rightarrow \quad y = \frac{900}{x}$$

$$Aimp = (x-6)(y-8) = (x-6)\left(\frac{900}{x} - 8\right)$$

$$Aimp = 948 - 8x - \frac{5400}{x}$$

$$A'imp = -8 + \frac{5400}{x^2} = \frac{-8(x^2 - 675)}{x^2}$$

$$A'imp = \frac{-8\left(x - 15\sqrt{3}\right)\left(x + 15\sqrt{3}\right)}{x^2}$$

$$C2D: \quad A'imp = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm 15\sqrt{3}$$

$$A'imp\ no\ existe\ en\ x = 0$$

$$A''imp = -\frac{10800}{x^3} \qquad A''imp\left(15\sqrt{3}\right) < 0$$

$$A''imp\left(-15\sqrt{3}\right) > 0$$

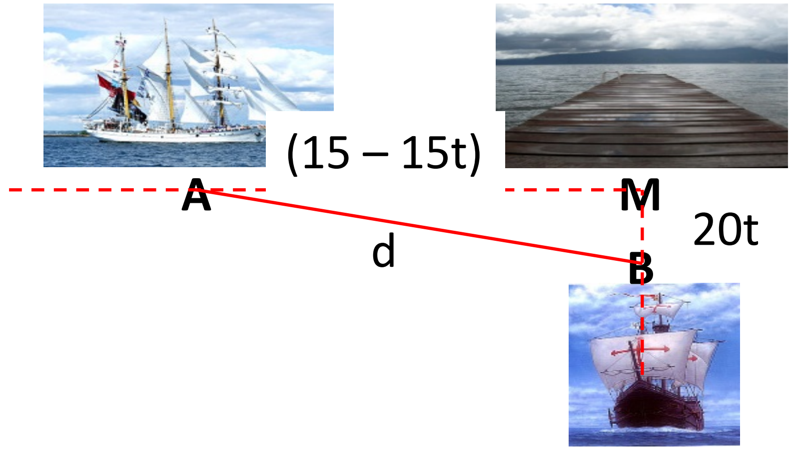
En x $=15\sqrt{3}$ cm existe un máximo de Aimp

y $=20\sqrt{3}$ cm

Ejemplo

48. Un barco sale de un muelle a las 14:00 horas y viaja hacia el sur a una velocidad de 20 km/h. Otro barco ha estado dirigiéndose hacia el este a 15 km/h y llega al mismo muelle a las 15:00 horas. ¿A qué hora estuvieron los dos barcos más cerca uno del otro?

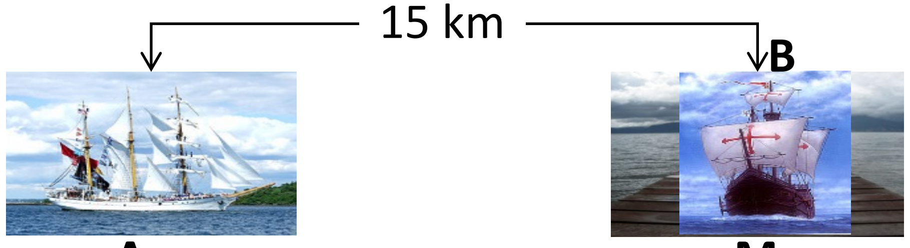
En un punto intermedio



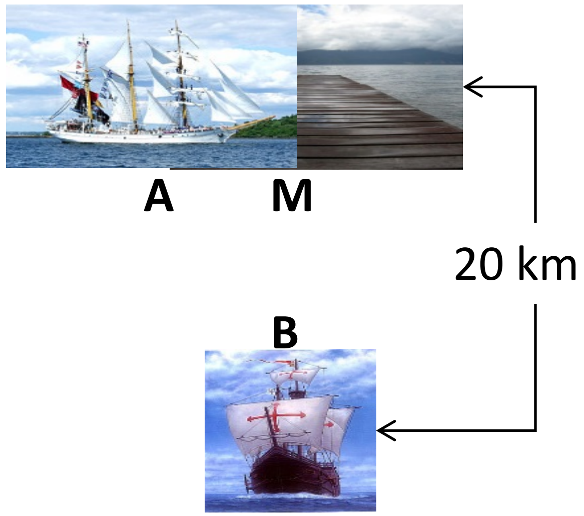
Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

A las 14:00 horas



A las 15:00 horas



$$d = \sqrt{(15 - 15t)^2 + (20t)^2}$$

$$d' = \frac{-2(15 - 15t)15 + 2(20t)20}{2\sqrt{(15 - 15t)^2 + (20t)^2}} = \frac{-225 + 225t + 400t}{\sqrt{(15 - 15t)^2 + (20t)^2}}$$

$C1D: \quad d' > 0 \quad \rightarrow \qquad 625t > 225$

$t > 9/25$

-------- +++++

9/25

En t = $\frac{9}{25}$ h existe un mínimo de d

$$t = \frac{9}{25}\text{h} \times \frac{60\text{ min}}{1\text{ h}} = 21 + 0{,}6\text{min} \times \frac{60\text{ s}}{1\text{ min}} = 21\text{ min } 36\text{ s}$$

A las 14:21:36 se encontraron más cerca

Aplicaciones en negocios y economía

En la sección 3.7 hemos introducido la idea de costo marginal. Recuerde que si $C(x)$, la **función costo**, es el costo de producir x unidades de un determinado producto, entonces el **costo marginal** es la tasa de cambio de C respecto a x. En otras palabras, la función costo marginal es la derivada, $C'(x)$, de la función costo.

Ahora consideremos la comercialización. Sea $p(x)$ el precio por unidad que la empresa puede cobrar si vende x unidades. Entonces p se llama **función demanda** (o **función de precio**) y esperaríamos que sea una función de x decreciente. Si x unidades son vendidas y el precio por unidad es de $p(x)$, entonces el ingreso (*revenue*, en inglés) total es

$$R(x) = xp(x)$$

y R se llama **función ingreso**. La derivada R' de la función ingreso se llama **función ingreso marginal** y es la tasa de cambio de ingreso respecto al número de unidades vendidas.

Si se venden x unidades, entonces la utilidad (*profit*, en inglés) total es

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

y P se llama **función utilidad**. La **función utilidad marginal** es P', la derivada de la función utilidad. En los ejercicios 57-62, se le pide que utilice las funciones costo marginal, ingreso y utilidad para minimizar los costos y maximizar los ingresos y utilidades.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

V EJEMPLO 6 Una tienda ha estado vendiendo 200 reproductores de discos Blu-ray por semana a \$350 cada uno. Un estudio de mercado indica que por cada \$10 de descuento ofrecido a los compradores, el número de unidades vendidas se incrementará en 20 a la semana. Encuentre la función demanda y la función ingreso. ¿Qué tan grande debe ser el descuento que ofrezca la tienda para maximizar sus ingresos?

SOLUCIÓN Si x es el número de reproductores Blu-ray vendidos por semana, entonces el aumento semanal de ventas es $x - 200$. Por cada aumento de 20 unidades vendidas, el precio se reduce por \$10. Por tanto, por cada unidad adicional vendida, la disminución del precio será $\frac{1}{20} \times 10$, y la función demanda es

$$p(x) = 350 - \tfrac{10}{20}(x - 200) = 450 - \tfrac{1}{2}x$$

La función ingreso es

$$R(x) = xp(x) = 450x - \tfrac{1}{2}x^2$$

Dado que $R'(x) = 450 - x$, vemos que $R'(x) = 0$ cuando $x = 450$. Este valor de x da un máximo absoluto por la prueba de la primera derivada (o simplemente al observar que la gráfica de R es una parábola que abre hacia abajo). El precio correspondiente es

$$p(450) = 450 - \tfrac{1}{2}(450) = 225$$

y el descuento es $350 - 225 = 125$. Por tanto, para maximizar el ingreso, la tienda debe ofrecer un descuento de \$125.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Ejemplo

60. (a) Demuestre que si la utilidad $P(x)$ es un máximo, entonces el ingreso marginal es igual al costo marginal.

(b) Si $C(x) = 16\,000 + 500x - 1.6x^2 + 0.004x^3$ es la función de costo y $p(x) = 1\,700 - 7x$ es la función de demanda, encuentre el nivel de producción que maximiza la utilidad.

$$P(x) = R(x) - C(x) \qquad P(x): profit\ (utilidad)$$

$$R(x) = xP(x): \ revenue\ (ingreso)$$

$$C(x): costo$$

$$P(x) = 1700x - 7x^2 - 16000 - 500x + 1{,}6x^2 - 0{,}004x^3$$

$$P´(x) = 1700 - 14x - 500 + 3{,}2x - 0{,}012x^2 = -0{,}012x^2 - 10{,}8x + 1200$$

$$C2D: \quad P´(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{10{,}8 \pm \sqrt{(-10{,}8)^2 - 4(-0{,}012)(1200)}}{2(-0{,}012)}$$

$$x1 = -1000; \quad x2 = 100$$

$$P´´(x) = -0{,}024x - 10{,}8$$

$P´´(-1000) > 0$, existe un mínimo de P

$P´´(100) < 0$, existe un máximo de P

Ejercicios

19. Si el granjero en el ejercicio 18 quiere incluir 150 metros cuadrados de terreno, ¿qué dimensiones minimizarán el costo de la cerca?

22. Determine el punto sobre la curva $y = \sqrt{x}$ que está más cerca del punto (3, 0).

27. Encuentre las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en un triángulo equilátero de lado L si uno de los lados del rectángulo se encuentra sobre la base del triángulo.

31. Determine el cilindro de mayor volumen posible que se puede inscribir en una esfera de radio r.

33. Encuentre el cilindro circular recto de mayor superficie que se puede inscribir en una esfera de radio r.

35. Los márgenes superior e inferior de un cartel son de 6 cm y los márgenes de los lados de 4 cm. Si el área de impresión sobre el cartel se fija en 384 cm^2, encuentre las dimensiones del cartel con la menor área.

42. Un recipiente para beber, en forma de cono, se diseña para contener 27 cm^3 de agua. Encuentre la altura y el radio del cono que utilizará la menor cantidad de papel.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

37. Un pedazo de alambre de 10 m de largo está cortado en dos piezas. Una pieza está doblada en forma de cuadrado y la otra de un triángulo equilátero. (a) ¿Cómo se debe cortar el alambre para que el área total encerrada sea un máximo?, (b) ¿un mínimo?

44. Un objeto con masa m es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda atada al objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con un plano, entonces la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu m g}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde μ es una constante denominada coeficiente de fricción. ¿Para qué valor de θ es F más pequeña?

45. Si se conecta una resistencia de R ohms a través de una batería de E volts con resistencia interna de r ohms, entonces la potencia (en watts) en la resistencia externa es

$$P = \frac{E^2R}{(R + r)^2}$$

Si E y r son fijos, pero R varía, ¿cuál es el valor máximo de la potencia?

49. Resuelva el problema en el ejemplo 4 si el río es de 5 km de ancho y el punto B está a solo 5 km río abajo de A.

51. Una refinería de petróleo se encuentra en la orilla norte de un río recto que tiene 2 km de ancho. Se debe construir una tubería desde la refinería a tanques de almacenamiento situados en la orilla sur del río, 6 km al este de la refinería. El costo de colocación de tubería es $\$400\,000/\text{km}$ sobre la tierra a un punto P a la orilla norte y $\$800\,000/\text{km}$ bajo el río a los tanques. Para minimizar el costo de la tubería, ¿dónde se debe ubicar P?

52. Suponga que la refinería en el ejercicio 51 está situada a 1 km al norte del río. ¿Dónde debe estar ubicado P?

61. Un equipo de béisbol juega en un estadio con capacidad para 55 000 espectadores. Con el precio de las entradas a \$10, la asistencia promedio había sido de 27 000. Cuando los precios se redujeron a \$8, la asistencia promedio subió a 33 000.

(a) Encuentre la función de demanda, suponiendo que es lineal.

(b) ¿Cómo se deben establecer los precios de las entradas para maximizar los ingresos?

62. Durante los meses de verano, Terry hace y vende collares en la playa. El verano pasado vendió los collares a \$10 cada uno y sus ventas promedio fueron de 20 por día. Cuando aumentó el precio por \$1, encontró que el promedio disminuyó dos ventas por día.

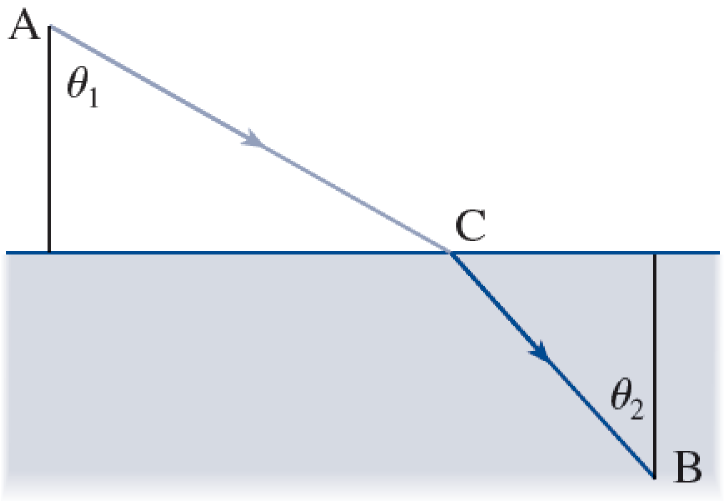
(a) Encuentre la función de demanda, suponiendo que es lineal.

(b) Si el material para cada collar le cuesta a Terry \$6, ¿qué precio de venta debe maximizar su utilidad?

71. Sea v_1 la velocidad de la luz en el aire y v_2 la velocidad de la luz en el agua. De acuerdo con el principio de Fermat, un rayo de luz viajará desde un punto A en el aire a un punto B en el agua por una trayectoria ACB que minimiza el tiempo de recorrido. Demuestre que

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

donde θ_1 (el ángulo de incidencia) y θ_2 (el ángulo de refracción) son como se muestra. Esta ecuación se conoce como la ley de Snell.



63. Un comerciante ha estado vendiendo 1200 tablets a la semana a $350 cada una. Un estudio de mercado indica que, por cada $10 de descuento ofrecido al comprador, el número de tablets vendidas se incrementará en 80 por semana.

(a) Encuentre la función de demanda.

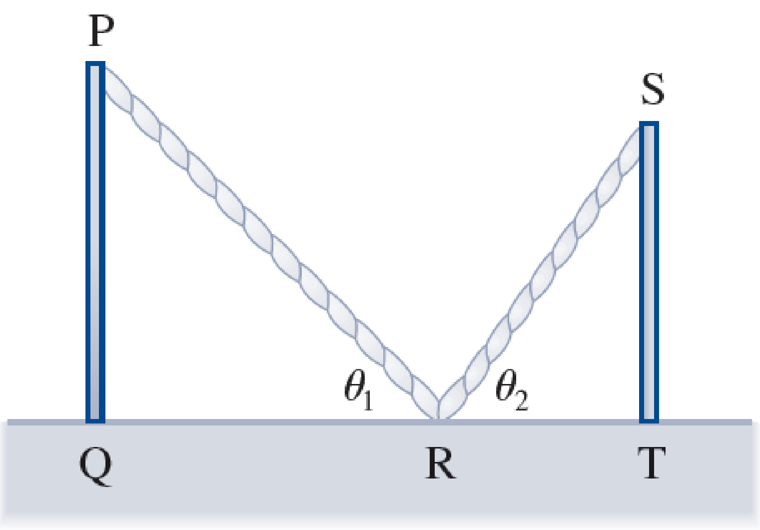
(b) ¿Cuál debe ser el precio para maximizar los ingresos?

(c) Si la función de costo semanal del comerciante es

$$C(x) = 35\,000 + 120x$$

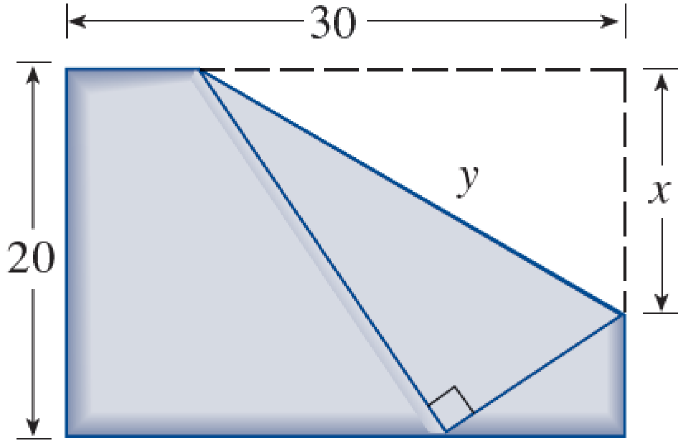
¿qué precio se debería elegir para maximizar sus ganancias?

72. Dos postes verticales PQ y ST están asegurados por una cuerda PRS que van desde la parte superior del primer poste a la parte superior del segundo poste como en la figura. Demuestre que la longitud más corta de esa cuerda se produce cuando $\theta_1 = \theta_2$.



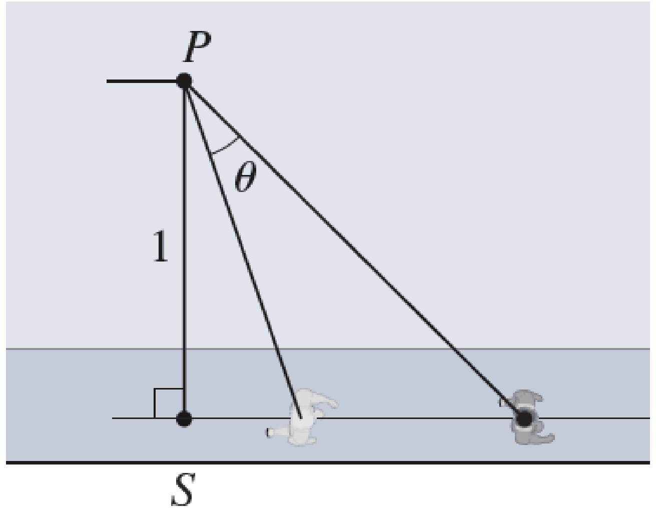
Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

73. Se pliega la esquina superior derecha de un pedazo de papel de 30 cm por 20 cm, como en la figura, sobre la orilla inferior. ¿Cómo debería usted plegarla para minimizar la longitud del pliegue? En otras palabras, ¿cómo se elige x para minimizar y?

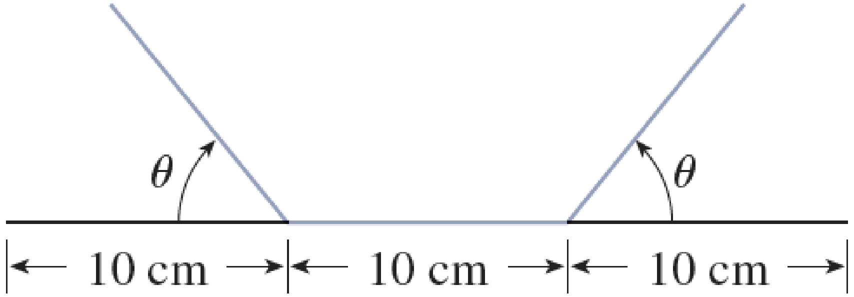


75. Un observador se encuentra en un punto P a una unidad de una pista. Dos corredores comienzan en el punto S en la figura y corren a lo largo de la pista. Un atleta corre tres veces más rápido que el otro. Encuentre el valor máximo del ángulo de vista del observador θ entre los corredores.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936



76. Se desea construir una caída de agua de lluvia utilizando una hoja de metal de 30 cm de ancho, plegando hasta un tercio a cada lado de la hoja con un ángulo θ. ¿Cómo se debe elegir θ de manera que el canal conduzca la cantidad máxima de agua?



REFERENCIA

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín