Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

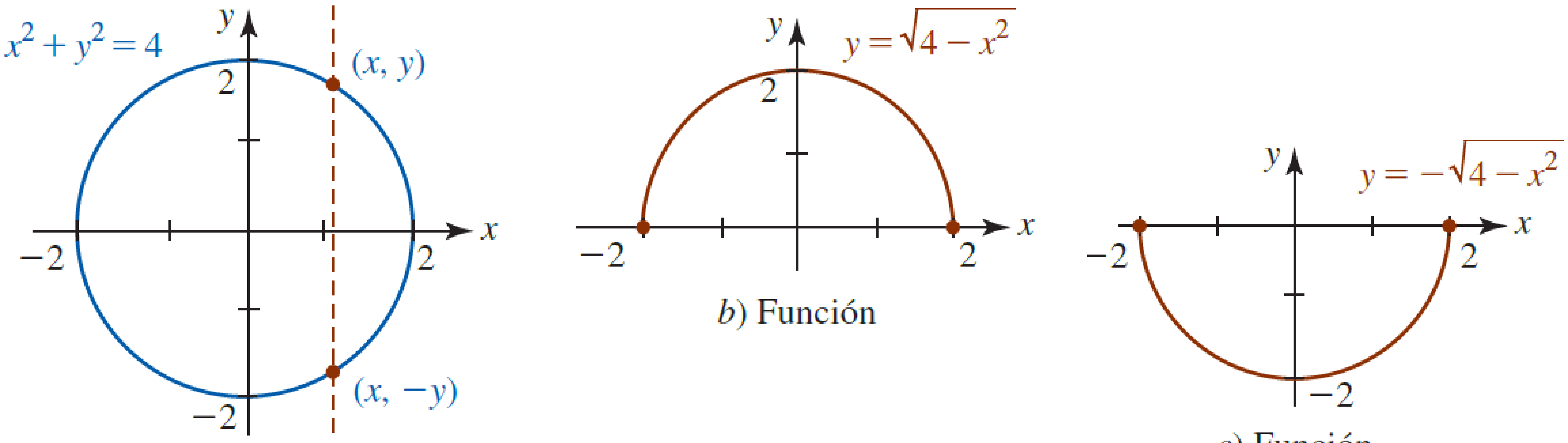
Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

ENCUENTRO 11.3

Sección 3.5: Derivación implícita

Funciones implícitas y explícitas Se dice que una función donde la variable dependiente se expresa sólo en términos de la variable independiente x, a saber, $y = f(x)$, es una **función explícita**. Por ejemplo, $y = \frac{1}{2}x^3 - 1$ es una función explícita. Por otra parte, se dice que una ecuación equivalente $2y - x^3 + 2 = 0$ define **implícitamente** la función, o que y es una **función implícita** de x. Acabamos de ver que la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ define implícitamente las dos funciones $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$.

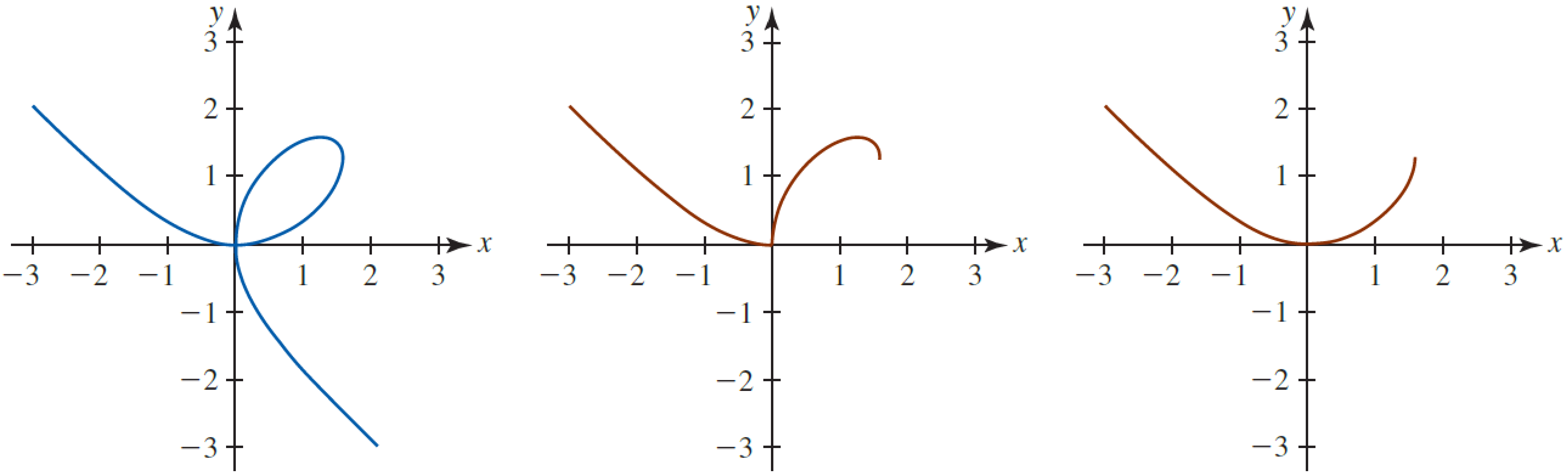


a) No es una función

b) Función

c) Función

La gráfica de la ecuación $x^3 + y^3 = 3xy$ que se muestra en la FIGURA es una curva famosa denominada **hoja de Descartes**.



a) Hoja *b*) Función *c*) Función

FIGURA Las porciones de la gráfica en *a*) que se muestran en rojo en *b*) y *c*) son gráficas de dos funciones implícitas de x

Por fortuna, no es necesario resolver una ecuación para y en términos de x a fin de hallar la derivada de y. En lugar de ello, aplicaremos el método de **derivación implícita**. Este método consiste en derivar ambos miembros de la ecuación respecto a x y después resolver la ecuación resultante para y'. En los ejemplos y ejercicios de esta sección, siempre se supone que la ecuación dada determina y implícitamente como una función derivable de x, de modo que puede aplicarse el método de derivación implícita.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Directrices para diferenciación implícita

i) Al diferenciar con respecto a x ambos miembros de la ecuación, use las reglas de diferenciación y considere a y como una función diferenciable de x. Para potencias del símbolo y, use (6).

ii) Agrupe todos los términos donde aparece dy/dx en el miembro izquierdo de la ecuación diferenciada. Mueva todos los otros términos al miembro derecho de la ecuación.

iii) Factorice dy/dx en todos los términos donde aparezca este término. Luego, despeje dy/dx.

EJEMPLO Uso de la diferenciación implícita

Encuentre dy/dx si $x^2 + y^2 = 4$.

Solución Se diferencian ambos miembros de la ecuación

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}\overset{\substack{\text{use la regla de potencias}\\ \downarrow}}{y^2} = \frac{d}{dx}4$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Al despejar la derivada obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

EJEMPLO La pendiente de una recta tangente

Encuentre las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$ en los puntos correspondientes a $x = 1$.

Solución Al sustituir $x = 1$ en la ecuación dada obtenemos $y^2 = 3$ o $y = \pm\sqrt{3}$. Por tanto, hay rectas tangentes en $(1, \sqrt{3})$ y $(1, -\sqrt{3})$. Aunque $(1, \sqrt{3})$ y $(1, -\sqrt{3})$ son puntos sobre la gráfica de dos funciones que pueden diferenciarse implícitamente, indicadas con colores diferentes en la FIGURA 3.6.3, (7) en el ejemplo 1 proporciona la pendiente correcta en cada número en el intervalo $(-2, 2)$. Tenemos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,\sqrt{3})} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-\sqrt{3})} = -\frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

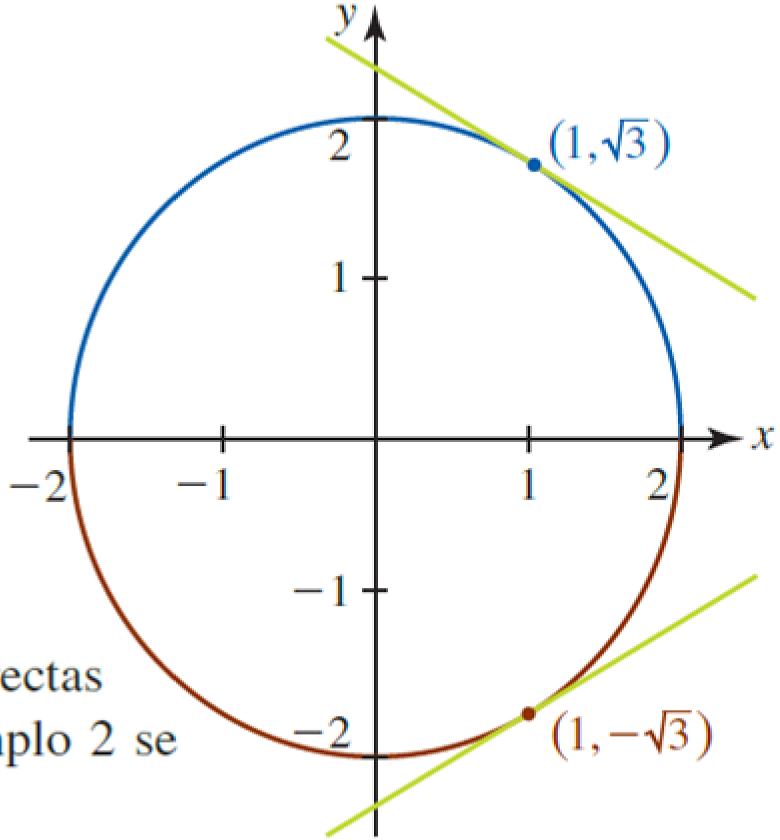


FIGURA 3.6.3 Las rectas tangentes en el ejemplo 2 se muestran en verde

EJEMPLO 2

a) Encuentre y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.

b) Halle la recta tangente al folium de Descartes $x^3 + y^3 = 6xy$, en el punto $(3, 3)$.

c) ¿En cuál punto en el primer cuadrante es horizontal la recta tangente?

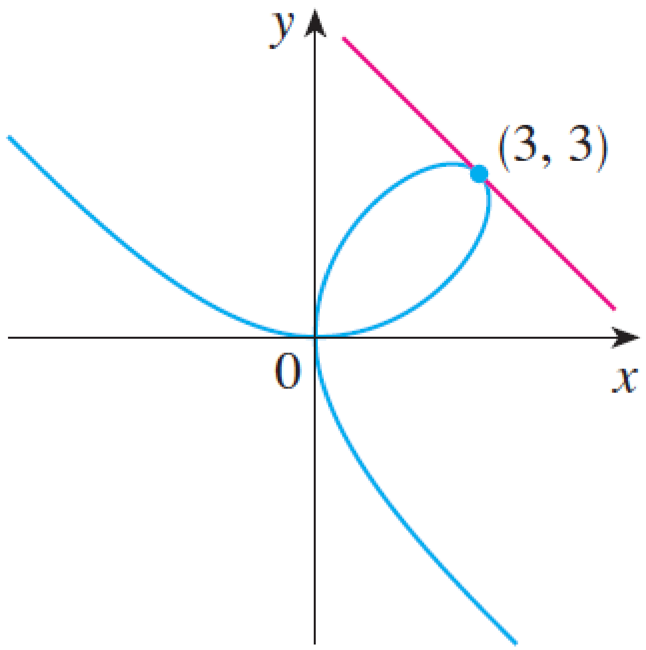


FIGURA 4

SOLUCIÓN

a) Si se derivan ambos miembros de $x^3 + y^3 = 6xy$ respecto a x, considerando a y como función de x, y usando la regla de la cadena en el término y^3, y la regla del producto en el término $6xy$, obtenemos

$$3x^2 + 3y^2y' = 6xy' + 6y$$

o bien

$$x^2 + y^2y' = 2xy' + 2y$$

Ahora resolvemos para y':

$$y^2y' - 2xy' = 2y - x^2$$

$$(y^2 - 2x)y' = 2y - x^2$$

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

b) Cuando $x = y = 3$,

$$y' = \frac{2 \cdot 3 - 3^2}{3^2 - 2 \cdot 3} = -1$$

un vistazo a la figura 4 confirma que éste es un valor razonable para la pendiente en (3, 3). De este modo, la ecuación de la recta tangente al folium en (3, 3) es

$$y - 3 = -1(x - 3) \quad \text{o bien} \quad x + y = 6$$

c) La recta tangente es horizontal si $y' = 0$. Si utilizamos la expresión para y' del inciso a), vemos que $y' = 0$ cuando $2y - x^2 = 0$ (siempre que $y^2 - 2x \neq 0$). Al sustituir $y = \frac{1}{2}x^2$en la ecuación de la curva, obtenemos

$$x^3 + \left(\tfrac{1}{2}x^2\right)^3 = 6x\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$$

lo cual se simplifica para quedar $x^6 = 16x^3$. Ya que $x \neq 0$ en el primer cuadrante, tenemos $x^3 = 16$. Si $x = 16^{1/3} = 2^{4/3}$, entonces $y = \frac{1}{2}(2^{8/3}) = 2^{5/3}$. Por tanto, la recta tangente es horizontal en $(2^{4/3}, 2^{5/3})$ lo cual es aproximadamente (2.5198, 3.1748). Al estudiar la figura 5, es claro que la respuesta es razonable.

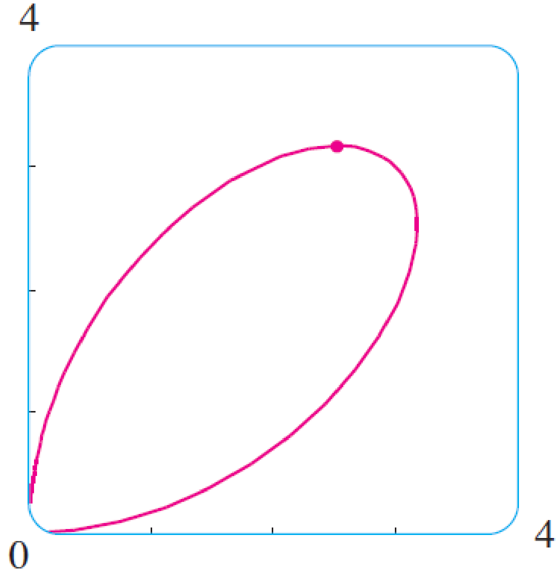


FIGURA 5

EJEMPLO 3 Encuentre y' si $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$.

SOLUCIÓN Si derivamos implícitamente respecto a x y consideramos que y es una función de x, obtenemos

$$\cos(x + y) \cdot (1 + y') = y^2(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(2yy')$$

(Note que en el lado izquierdo hemos aplicado la regla de la cadena y, en el derecho, la regla de la cadena y la regla del producto). Si agrupamos los términos que contienen a y', obtenemos

$$\cos(x + y) + y^2 \operatorname{sen} x = (2y \cos x)y' - \cos(x + y) \cdot y'$$

Por lo que

$$y' = \frac{y^2 \operatorname{sen} x + \cos(x + y)}{2y \cos x - \cos(x + y)}$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO 4 Hallar y'' si $x^4 + y^4 = 16$.

SOLUCIÓN Derivando la ecuación de manera implícita respecto a x, obtenemos

$$4x^3 + 4y^3y' = 0$$

Resolviendo para y'

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} \qquad \boxed{3}$$

Para hallar y'' derivamos esta expresión para y' aplicando la regla del cociente, considerando que y es una función de x:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right) = -\frac{y^3\,(d/dx)(x^3) - x^3\,(d/dx)(y^3)}{(y^3)^2}$$

$$= -\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3(3y^2y')}{y^6}$$

Si ahora sustituimos la ecuación 3 en esta expresión, obtenemos

$$y'' = -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\left(-\dfrac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}$$

$$= -\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = -\frac{3x^2(y^4 + x^4)}{y^7}$$

Pero los valores de x y y deben satisfacer la ecuación original $x^4 + y^4 = 16$, por lo que la respuesta se simplifica a

$$y'' = -\frac{3x^2(16)}{y^7} = -48\,\frac{x^2}{y^7}$$

La figura 10 muestra la gráfica de la curva $x^4 + y^4 = 16$ del ejemplo 4. Observe que es una versión extendida y achatada de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, por esta razón algunas veces se le llama *circunferencia gruesa*. Empieza muy escarpada a la izquierda, pero rápidamente se hace muy plana. Esto puede verse en la expresión

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} = -\left(\frac{x}{y}\right)^3$$

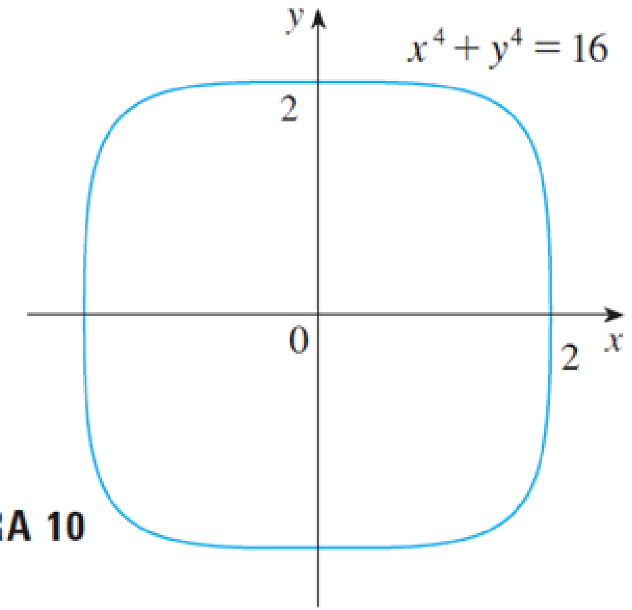


FIGURA 10

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO Uso de diferenciación implícita

Encuentre dy/dx si $x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x + 1$.

Solución

regla del producto aquí   regla de potencias (6) aquí

$$\frac{d}{dx}x^4 + \frac{d}{dx}x^2y^3 - \frac{d}{dx}y^5 = \frac{d}{dx}2x + \frac{d}{dx}1$$

$$4x^3 + x^2 \cdot 3y^2\frac{dy}{dx} + 2xy^3 - 5y^4\frac{dy}{dx} = 2 \leftarrow$$

factorice dy/dx de los términos segundo y cuarto

$$(3x^2y^2 - 5y^4)\frac{dy}{dx} = 2 - 4x^3 - 2xy^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 4x^3 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 5y^4}.$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Ejemplo

Demuestre por derivación implícita que la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0) es $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} y' = 0$$

$$y' = -\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}} = -\frac{x}{y}\frac{b^2}{a^2}$$

$$y'(x_0, y_0) = -\frac{x_0}{y_0}\frac{b^2}{a^2}$$

ERT: $(y - y_0) = -\frac{x_0}{y_0}\frac{b^2}{a^2}(x - x_0)$

$$(y - y_0) y_0 a^2 = -x_0 b^2 (x - x_0)$$
$$y y_0 a^2 - {y_0}^2 a^2 = -x x_0 b^2 + {x_0}^2 b^2$$
$$y y_0 a^2 + x x_0 b^2 = {x_0}^2 b^2 + {y_0}^2 a^2$$

$$\frac{y y_0 a^2 + x x_0 b^2}{a^2 b^2} = \frac{{x_0}^2 b^2 + {y_0}^2 a^2}{a^2 b^2}$$

$$\frac{y y_0}{b^2} + \frac{x x_0}{a^2} = \frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2}$$

$$\frac{y y_0}{b^2} + \frac{x x_0}{a^2} = 1$$

Ejemplo

Dos curvas son **ortogonales** si sus rectas tangentes son perpendiculares en cada punto de intersección. Demuestre que las familias dadas de curvas son **trayectorias ortogonales** entre sí; es decir, cualquier curva en una familia es ortogonal a cualquier curva en la otra familia.

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad ax + by = 0$$

(1) $x^2 + y^2 = r^2$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$y' = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

(2) $ax + by = 0$

$$a + by' = 0$$

$$y' = \frac{-a}{b}$$

Puntos de corte entre ambas curvas:

$$x^2 + \left(\frac{-ax}{b}\right)^2 = r^2$$

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2}x^2 = r^2$$

$$x^2\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) = r^2 \quad \rightarrow \quad x = \pm\frac{r}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}}; y = \mp\frac{a}{b}\frac{r}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}}$$

Con estos valores y en y' de (1): $y' = \frac{b}{a}$

$$y'(1) \times y'(2) = \frac{b}{a} \times \frac{-a}{b} = -1$$

Las curvas son ortogonales.

Derivadas de orden superior Por medio de diferenciación implícita determinamos dy/dx. Al diferenciar dy/dx con respecto a x obtenemos la segunda derivada d^2y/dx^2. Si la primera derivada contiene a y, entonces d^2y/dx^2 de nuevo contiene el símbolo dy/dx; esa cantidad puede eliminarse al sustituir su valor conocido. El siguiente ejemplo ilustra el método.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO Segunda derivada

Encuentre d^2y/dx^2 si $x^2 + y^2 = 4$.

Solución Por el ejemplo 1, ya sabemos que la primera derivada es $dy/dx = -x/y$. La segunda derivada es la derivada de dy/dx, de modo que por la regla del cociente:

al sustituir por dy/dx

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{y \cdot 1 - x \cdot \frac{dy}{dx}}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}.$$

Al observar que $x^2 + y^2 = 4$, es posible volver a escribir la segunda derivada como

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{y^3}.$$

EJEMPLO Reglas de la cadena y del producto

Encuentre dy/dx si $\operatorname{sen} y = y \cos 2x$.

Solución Por la regla de la cadena y la regla del producto obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\operatorname{sen} y &= \frac{d}{dx}\, y \cos 2x \\
\cos y \cdot \frac{dy}{dx} &= y(-\operatorname{sen} 2x \cdot 2) + \cos 2x \cdot \frac{dy}{dx} \\
(\cos y - \cos 2x)\frac{dy}{dx} &= -2y \operatorname{sen} 2x \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{2y \operatorname{sen} 2x}{\cos y - \cos 2x}.
\end{aligned}$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Ejercicios

5–20 Encuentre dy/dx por derivación implícita.

5. $x^2 - 4xy + y^2 = 4$

6. $2x^2 + xy - y^2 = 2$

7. $x^4 + x^2y^2 + y^3 = 5$

8. $x^3 - xy^2 + y^3 = 1$

9. $\dfrac{x^2}{x + y} = y^2 + 1$

10. $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$

11. $x^2y^2 + x \operatorname{sen} y = 4$

12. $1 + x = \operatorname{sen}(xy^2)$

13. $\sqrt{x + y} = x^4 + y^4$

14. $e^y \operatorname{sen} x = x + xy$

15. $e^{x/y} = x - y$

16. $xy = \sqrt{x^2 + y^2}$

17. $\tan^{-1}(x^2y) = x + xy^2$

18. $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x = 1$

19. $\operatorname{sen}(xy) = \cos(x + y)$

20. $\tan(x - y) = \dfrac{y}{1 + x^2}$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

1–4

(a) Encuentre y' por derivación implícita.

(b) Resuelva la ecuación explícita para y y derive para obtener y' en términos de x.

(c) Compruebe la coherencia de sus soluciones en los incisos (a) y (b) sustituyendo la expresión para y en su solución del inciso (a).

1. $xy + 2x + 3x^2 = 4$

2. $4x^2 + 9y^2 = 36$

3. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

4. $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} = 4$

21. Si $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$ y $f(1) = 2$, encuentre $f'(1)$.

22. Si $g(x) + x \operatorname{sen} g(x) = x^2$, determine $g'(0)$.

23–24 Considere y como la variable independiente y x como la variable dependiente y utilice la derivación implícita para calcular dx/dy.

23. $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$

24. $y \sec x = x \tan y$

25–32 Utilice la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

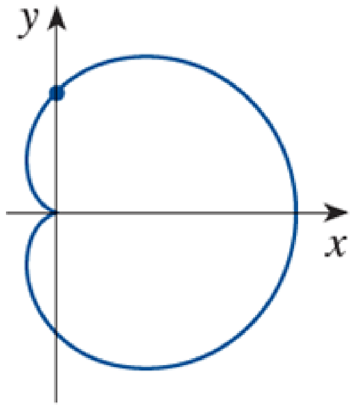
25. $y \operatorname{sen} 2x = x \cos 2y, \quad (\pi/2, \pi/4)$

26. $x^2 + xy + y^2 = 3, \quad (1, 1)$ (elipse)

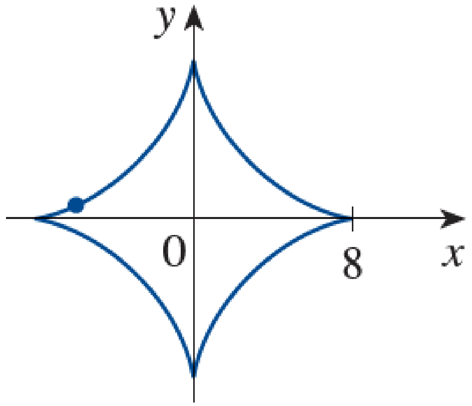
27. $x^2 - xy - y^2 = 1, \quad (2, 1)$ (hipérbola)

28. $x^2 + 2xy + 4y^2 = 12, \quad (2, 1)$ (elipse)

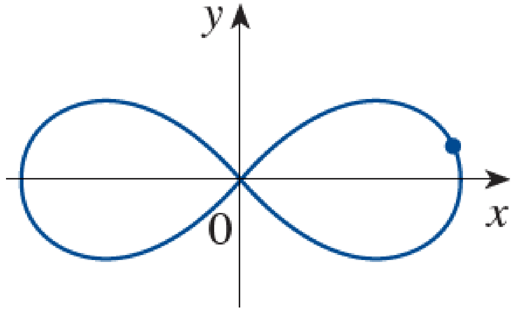
29. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$,
$\left(0, \frac{1}{2}\right)$, (cardioide)



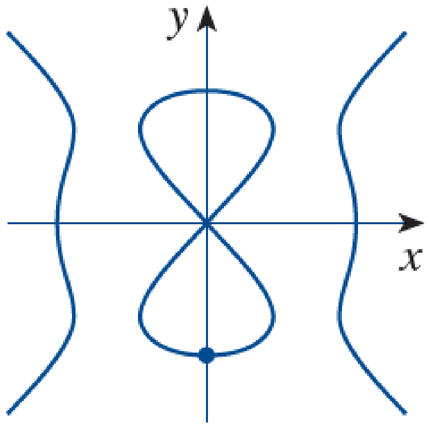
30. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$,
$\left(-3\sqrt{3}, 1\right)$, (astroide)



31. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$,
$(3, 1)$, (lemniscata)



32. $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$,
$(0, -2)$, (curva del diablo)



Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

33. (a) La curva con ecuación $y^2 = 5x^4 - x^2$ se llama **campila de Eudoxo**. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto (1, 2).

(b) Ilustre el inciso (a) trazando la gráfica de la curva y la recta tangente, en una pantalla común. (Si su dispositivo graficador puede trazar gráficas de curvas definidas implícitamente, entonces utilice esa capacidad. Si no es así, puede trazar esta curva trazando sus mitades superior e inferior por separado.)

34. (a) La curva con ecuación $y^2 = x^3 + 3x^2$ se llama **cúbica de Tschirnhausen**. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva, en el punto (1, −2).

(b) ¿En cuáles puntos esta curva tiene rectas tangentes horizontales?

(c) Ilustre los incisos (a) y (b) trazando la gráfica de la curva y las rectas tangentes en una pantalla común.

35–38 Determine y'' por derivación implícita.

35. $x^2 + 4y^2 = 4$

36. $x^2 + xy + y^2 = 3$

37. $\operatorname{sen} y + \cos x = 1$

38. $x^3 - y^3 = 7$

39. Si $xy + e^y = e$, encuentre el valor de y'' en el punto donde $x = 0$.

40. Si $x^2 + xy + y^3 = 1$, encuentre el valor de y''' en el punto donde $x = 1$.

Tarea: Consultar en qué consiste el Teorema de la Función Implícita

REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín