Principios para la resolución de problemas

No hay reglas sólidas o inmediatas que aseguren el éxito en la resolución de problemas. Sin embargo, es posible delinear algunos pasos generales en el proceso de resolución de problemas y de dar algunos principios que pueden ser útiles en la resolución de algunos de ellos. Estos pasos y principios no hacen otra cosa que explicitar el sentido común y se han adaptado del libro de George Polya *How To Solve It*.

1 COMPRENDA EL PROBLEMA

El primer paso es leer el problema y asegurarse de que lo comprende claramente. Plantéese las siguientes preguntas:

¿Cuál es la incógnita?
¿Cuáles son las cantidades que se conocen?
¿Cuáles son las condiciones dadas?

Para muchos problemas, es útil

dibujar un diagrama

y ubicar en el diagrama las cantidades dadas y las requeridas.

Por lo general, es necesario

introducir una notación adecuada

En la elección de los símbolos para las incógnitas, a menudo usamos letras como a, b, c, m, n, x o y, aunque en algunos casos es mejor usar las iniciales de las cantidades involucradas como símbolos sugerentes; por ejemplo, V para el volumen o t para tiempo.

2 PIENSE EN UN PLAN

Es importante encontrar una conexión entre la información dada y la desconocida, lo que le permitirá calcular las incógnitas. A menudo es útil preguntarse a sí mismo de manera explícita: "¿Cómo relaciono lo conocido con lo desconocido?" Si usted no ve una conexión inmediata, las siguientes ideas pueden serle útiles en la concepción de un plan.

Intente reconocer algo conocido Relacione la situación dada con los conocimientos previos. Observe lo desconocido y trate de recordar un problema más conocido que cuente con una incógnita similar.

Intente reconocer patrones Algunos problemas se resuelven mediante el reconocimiento de algún tipo de patrón que está ocurriendo. El patrón puede ser geométrica, numérica o algebraica. Si usted puede ver la regularidad o repetición en un problema, podría ser capaz de conjeturar el patrón y probarlo.

Utilice analogías Trate de pensar en un problema análogo, es decir, un problema similar, un problema relacionado, pero que sea más fácil de resolver que el problema original. Si usted puede resolver el problema similar, pero más sencillo, entonces podría dar con las claves que necesita para resolver el problema original, que es más difícil. Por ejemplo, si un problema involucra cantidades muy grandes, podría intentar primero resolver un problema similar con cifras más pequeñas. O si el problema está inmerso en la geometría en tres dimensiones, puede buscarse un problema geométrico similar en dos dimensiones. O si el problema inicial es de carácter general, puede empezar con un caso particular.

Introduzca algo extra A veces puede ser necesario introducir algo nuevo, un apoyo auxiliar para ayudar a hacer la conexión entre lo dado y lo desconocido. Por ejemplo, en un problema donde un diagrama es útil, lo auxiliar podría ser una nueva línea trazada en el diagrama. En un problema más algebraico, podría ser una nueva incógnita relacionada con la original.

Establezca casos A veces puede tener que dividir un problema en varios casos y dar un argumento diferente para cada uno de los casos. Por ejemplo, a menudo tenemos que utilizar esta estrategia al tratar con valores absolutos.

Trabaje hacia atrás En algunas ocasiones es útil imaginar que el problema está resuelto y trabajar hacia atrás, paso a paso, hasta llegar a los datos proporcionados. Entonces usted puede revertir sus pasos y construir una solución al problema original. Este procedimiento es comúnmente utilizado en la resolución de ecuaciones. Por ejemplo, en la resolución de la ecuación $3x - 5 = 7$, suponga que x es un número que satisface $3x - 5 = 7$ y trabaje hacia atrás. Sumamos 5 a cada lado de la ecuación y luego dividimos ambos lados entre 3 para obtener $x = 4$. Como cada uno de estos pasos puede revertirse, hemos resuelto el problema.

Establezca metas parciales En un problema complejo a menudo es útil establecer objetivos parciales (en los que la situación deseada se cumple con sólo en algunas partes del problema). Si primero puede llegar a estos objetivos parciales, entonces podemos construir conclusiones sobre ellos para llegar a nuestra meta final.

Razonamiento indirecto Con frecuencia es apropiado atacar en forma indirecta un problema. En el uso de la demostración por contradicción para demostrar que P implica Q, suponemos que P es cierta y Q es falsa y tratamos de ver por qué esto no puede suceder. De alguna manera, tenemos que utilizar esta información y llegar a una contradicción de lo que sabemos que es verdadero.

Inducción matemática En la demostración de proposiciones que involucran un entero positivo n, es frecuentemente útil usar el siguiente principio.

Principio de inducción matemática Sea S_n una proposición acerca del entero positivo n. Supongamos que

1. S_1 es verdadera.
2. S_{k+1} es verdadera cuando S_k es verdadera.

Entonces S_n es verdadera para todos los enteros positivos n.

Esto es razonable porque, dado que S_1 es verdadera, se deduce de la condición 2 (con $k = 1$) que la S_2 es verdadera. Luego, utilizando la condición 2 con $k = 2$, vemos que S_3 es verdadera. Una vez más, con la condición 2, esta vez con $k = 3$, tenemos que S_4 es verdadera. Este procedimiento puede seguirse indefinidamente.

3 EJECUTE EL PLAN

En el paso 2 se ideó un plan. Para llevar a cabo ese plan tenemos que verificar cada etapa de éste y escribir los detalles que demuestran que cada etapa es correcta.

4 MIRE EN RETROSPECTIVA

Después de haber completado nuestra solución, es conveniente revisarla, en parte para ver si no se han cometido errores en la solución y en parte para ver si podemos pensar una manera más fácil de resolver el problema. Otra razón para mirar hacia atrás es familiarizarnos con el método de solución, lo que puede ser útil para resolver un problema en el futuro. Descartes dijo: "Cada problema que resolví se convirtió en una regla que sirvió después para resolver otros problemas."

Estos principios de la resolución de problemas se ilustran en los siguientes ejemplos. Intente resolverlos antes de mirar las soluciones. Consulte estos principios de resolución de problemas si se queda atascado. Usted puede encontrar útil referirse a esta sección de vez en cuando al resolver los ejercicios en los restantes capítulos de este libro.

EJEMPLO 1 Exprese la hipotenusa h de un triángulo rectángulo con un área de $25\,m^2$ en función de su perímetro P.

RP Comprenda el problema

SOLUCIÓN Primero clasifique la información mediante la identificación de la incógnita y los datos:

Incógnita: hipotenusa h

Datos: perímetro P, área de $25\,m^2$

RP Dibuje un diagrama

Dibujar un diagrama como el de la figura 1 puede ser de gran ayuda.

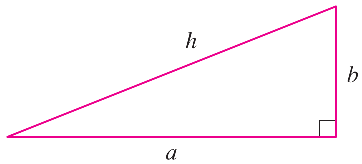

FIGURA 1

RP Relacione los datos con las incógnitas

RP Introduzca algo extra

Para establecer la relación entre las incógnitas y los datos, introduzca dos variables adicionales a y b, que representan las longitudes de los otros dos lados del triángulo. Esto nos permite expresar la condición dada, y es que, dado que el triángulo es rectángulo, por el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

El resto de relaciones entre las variables se obtienen al escribir las expresiones para el área y el perímetro:

$$25 = \tfrac{1}{2}ab \qquad P = a + b + h$$

Ya que P está dado, ahora tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas a, b y h:

$$\boxed{1} \qquad h^2 = a^2 + b^2$$

$$\boxed{2} \qquad 25 = \tfrac{1}{2}ab$$

$$\boxed{3} \qquad P = a + b + h$$

RP Relacione con algo conocido

A pesar de que tiene el número correcto de ecuaciones, no son fáciles de resolver en una forma sencilla. Pero si usamos la estrategia de resolución de problemas tratando de reconocer algo conocido, entonces podemos resolver estas ecuaciones por un método más fácil. Observe el lado derecho de las ecuaciones 1, 2 y 3. ¿Estas expresiones le recuerdan algo familiar? Tenga en cuenta que contienen los ingredientes de una fórmula conocida:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Con esta idea, expresamos $(a + b)^2$ de dos maneras. De las ecuaciones 1 y 2 tenemos

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = h^2 + 4(25)$$

De la ecuación 3 tenemos

$$(a + b)^2 = (P - h)^2 = P^2 - 2Ph + h^2$$

Así

$$h^2 + 100 = P^2 - 2Ph + h^2$$

$$2Ph = P^2 - 100$$

$$h = \frac{P^2 - 100}{2P}$$

Esta es la expresión requerida para h en función de P.