Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

ENCUENTRO 12.1

Sección 3.5: Derivada de funciones trigonométricas inversas

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\csc^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1 + x^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Recuerde la definición de la función arco seno:

$$y = \operatorname{sen}^{-1}x \quad \text{significa} \quad \operatorname{sen} y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Al derivar implícitamente $\operatorname{sen} y = x$ respecto a x, obtenemos

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Ahora $\cos y \geqslant 0$, debido a que $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, de modo que

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

De manera que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

El mismo método puede utilizarse para hallar una fórmula para la derivada de *cualquier* función inversa.

La fórmula para la derivada de la función arco tangente se obtiene de manera semejante. Si $y = \tan^{-1} x$, entonces $\tan y = x$. Si derivamos esta última ecuación implícitamente respecto a x, tenemos

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1 + x^2}}$$

En la figura 11 se muestra la gráfica de $f(x) = \tan^{-1} x$ y su derivada $f'(x) = 1/(1 + x^2)$. Observe que f es creciente y $f'(x)$ es siempre positiva. El hecho de que $\tan^{-1} x \to \pm\pi/2$ conforme $x \to \pm\infty$ se refleja en el hecho de que $f'(x) \to 0$ a medida que $x \to \pm\infty$.

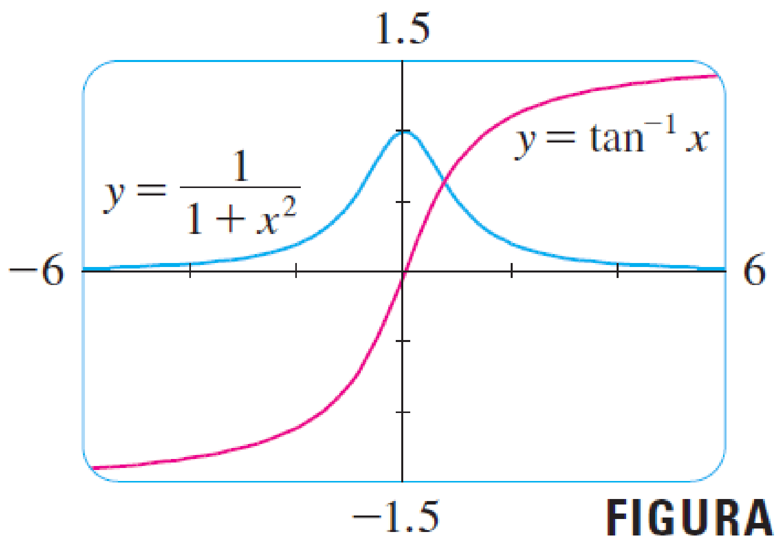


FIGURA 11

Tarea: Demostrar las otras derivadas de funciones trigonométricas inversas

Secante inversa: Para $|x| > 1$ y $0 \le y < \pi/2$ o $\pi/2 < y \le \pi$,

$$y = \sec^{-1} x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = \sec y.$$

Al diferenciar implícitamente la última ecuación obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y}. \tag{10}$$

Debido a las restricciones sobre y, tenemos $\tan y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2 - 1}$, $|x| > 1$. Por tanto, (10) se vuelve

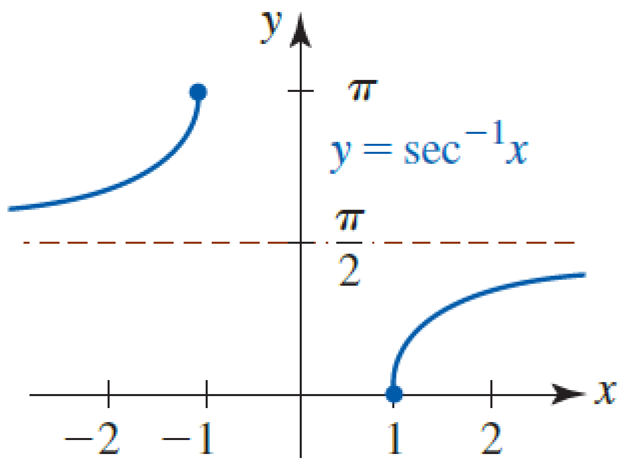
$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \pm\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}. \tag{11}$$

Es posible deshacernos del signo $\pm$ en (11) al observar en la figura 1.5.17*b*) que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = \sec^{-1} x$ es positiva para $x < 1$ y positiva para $x > 1$. Así, (11) es equivalente a

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \begin{cases} -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}, & x < -1 \\ \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}, & x > 1. \end{cases} \tag{12}$$

El resultado en (12) puede volver a escribirse en forma más breve usando el símbolo de valor absoluto:

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}. \tag{13}$$



b) $y = \sec^{-1} x$
dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
rango: $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$

FIGURA 1.5.17

Las fórmulas para las derivadas de $\csc^{-1} x$ y $\sec^{-1} x$ dependen de las definiciones que se apliquen para estas funciones.

V **EJEMPLO 5** Derive a) $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^{-1}x}$ y b) $f(x) = x \arctan\sqrt{x}$.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

SOLUCIÓN

a)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x)^{-1} = -(\operatorname{sen}^{-1}x)^{-2}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x)$$
$$= -\frac{1}{(\operatorname{sen}^{-1}x)^2\sqrt{1-x^2}}$$

b)
$$f'(x) = x\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\left(\tfrac{1}{2}x^{-1/2}\right) + \arctan\sqrt{x}$$
$$= \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} + \arctan\sqrt{x}$$

EJEMPLO 4 Derivada del seno inverso

Diferencie $y = \operatorname{sen}^{-1} 5x$.

Solución Con $u = 5x$, por la primera fórmula en (14) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - (5x)^2}} \cdot \frac{d}{dx}5x = \frac{5}{\sqrt{1 - 25x^2}}.$$

EJEMPLO 5 Derivada de la tangente inversa

Diferencie $y = \tan^{-1}\sqrt{2x + 1}$.

Solución Con $u = \sqrt{2x + 1}$, por la primera fórmula en (15) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1 + \left(\sqrt{2x + 1}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}(2x + 1)^{1/2}\\ &= \frac{1}{1 + (2x + 1)} \cdot \frac{1}{2}(2x + 1)^{-1/2} \cdot 2\\ &= \frac{1}{(2x + 2)\sqrt{2x + 1}}.\end{aligned}$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 6 Derivada de la secante inversa

Diferencie $y = \sec^{-1} x^2$.

Solución Para $x^2 > 1 > 0$, por la primera fórmula en (16) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{|x^2|\sqrt{(x^2)^2 - 1}} \cdot \frac{d}{dx}x^2 \\ &= \frac{2x}{x^2\sqrt{x^4 - 1}} = \frac{2}{x\sqrt{x^4 - 1}}. \end{aligned} \tag{17}$$

Con ayuda de un dispositivo para graficar obtenemos la gráfica de $y = \sec^{-1} x^2$ que se muestra en la FIGURA 3.7.3. Observe que (17) proporciona una pendiente positiva para $x > 1$ y una negativa para $x < -1$.

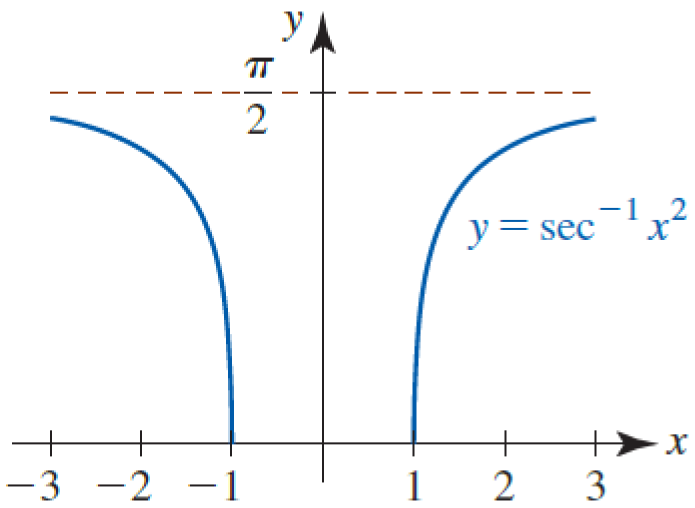


FIGURA 3.7.3 Gráfica de la función en el ejemplo 6

EJEMPLO 7 Recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 \cos^{-1} x$ en $x = -\frac{1}{2}$.

Solución Por la regla del producto y la segunda fórmula en (14):

$$f'(x) = x^2\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + 2x\cos^{-1} x.$$

Puesto que $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi/3$, al evaluar las dos funciones f y f' en $x = -\frac{1}{2}$ obtenemos:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \qquad \leftarrow \text{el punto de tangencia es } \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\pi}{6}\right)$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3}. \qquad \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\pi}{6}\right) \text{ es } -\tfrac{1}{2\sqrt{3}} - \tfrac{2\pi}{3}$$

Por la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, la ecuación sin simplificar de la recta tangente es

$$y - \frac{\pi}{6} = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Puesto que el dominio de $\cos^{-1} x$ es el intervalo $[-1, 1]$, el dominio de f es $[-1, 1]$. El rango correspondiente es $[0, \pi]$. La FIGURA 3.7.4 se obtuvo con ayuda de un dispositivo para graficar. ■

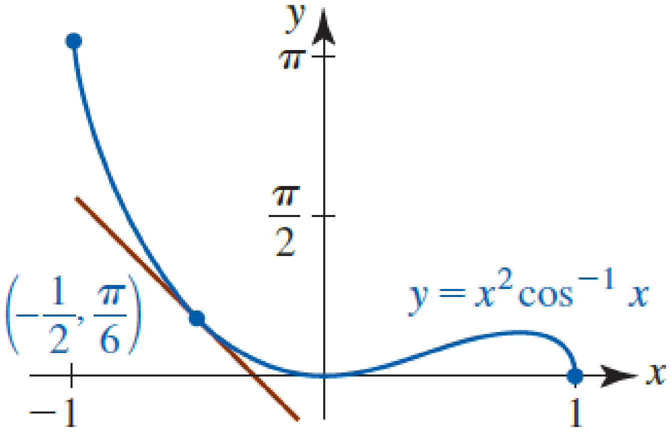


FIGURA 3.7.4 Recta tangente en el ejemplo 7

Ejemplos

Halle la derivada de cada una de las siguientes funciones. Simplifique donde sea posible.

52. $g(x) = \arccos \sqrt{x}$

$$g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

55. $h(t) = \cot^{-1}(t) + \cot^{-1}(1/t)$

$$h'(t) = \frac{-1}{1+t^2} + \frac{-1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2} \frac{-1}{t^2}$$

$$h'(t) = \frac{-1}{1+t^2} + \frac{t^2}{t^2+1} \frac{1}{t^2} = 0$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Ejemplos

57. $y = x\,\text{sen}^{-1}x + \sqrt{1 - x^2}$

$$y' = x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + sen^{-1}x + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)$$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + sen^{-1}x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y' = sen^{-1}x$$

(X) Sea $xy + cos^{-1}(xy^2) = 4$, encuentre $y' = \frac{dy}{dx}$

$$xy' + y - \frac{1}{\sqrt{1-(xy^2)^2}}(x2yy' + y^2) = 0$$

$$xy' + y - \frac{2xy}{\sqrt{1-x^2y^4}}y' - \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^4}} = 0$$

$$y' = \frac{\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^4}} - y}{x - \frac{2xy}{\sqrt{1-x^2y^4}}}$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Ejercicios

49–60 Determine la derivada de cada una de las funciones siguientes. Simplifique donde sea posible.

49. $y = \tan^{-1}\sqrt{x}$

50. $y = \sqrt{\tan^{-1}x}$

51. $y = \operatorname{sen}^{-1}(2x + 1)$

53. $F(x) = x \sec^{-1}(x^3)$

56. $R(t) = \operatorname{arcsen}(1/t)$

54. $y = \tan^{-1}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$

58. $y = \cos^{-1}(\operatorname{sen}^{-1}t)$

59. $y = \arccos\left(\dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ a > b > 0$

60. $y = \arctan\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

En los problemas 33 y 34, use diferenciación implícita para encontrar dy/dx.

33. $\tan^{-1}y = x^2 + y^2$

34. $\operatorname{sen}^{-1}y - \cos^{-1}x = 1$

En los problemas 35 y 36, demuestre que $f'(x) = 0$. Interprete el resultado.

35. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}x + \cos^{-1}x$

36. $f(x) = \tan^{-1}x + \tan^{-1}(1/x)$.

En los problemas 37 y 38, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x.

37. $y = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x}{2}; \quad x = 1$

38. $y = (\cos^{-1}x)^2; \quad x = 1/\sqrt{2}$

En los problemas 39 y 40, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x.

39. $f(x) = x\tan^{-1}x; \quad x = 1$

40. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x - 1); \quad x = \dfrac{1}{2}$

REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.

Zill, G., Cálculo trascendentes tempranas, Mc Graw Hill, cuarta edición.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín