Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

ENCUENTRO 8.3

Sección 2.5: Límite de la función compuesta, teorema del valor intermedio

Otra manera de combinar las funciones continuas f y g para obtener una nueva función continua es formar la función compuesta $f \circ g$. Este hecho es una consecuencia del siguiente teorema.

8 Teorema Si f es continua en b, y $\lim_{x \to a} g(x) = b$, entonces $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$.

En otras palabras,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

Este teorema expresa que puede moverse un símbolo de límite a través de un símbolo de función si la función es continua y el límite existe. En otras palabras, puede invertirse el orden de estos dos símbolos.

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle \lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$.

SOLUCIÓN Ya que arcsen es una función continua, aplicamos el teorema 8:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) &= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) \\
&= \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1:

$$\lim_{t\to 0}\left[\tan\left(1-\frac{\text{sent}}{\text{t}}\right)\right]$$

Solución:

Por el límite de la función compuesta.

$$= \tan\left[\lim_{t\to 0}\left(1-\frac{\text{sent}}{\text{t}}\right)\right]$$

$$= \tan[1-1] = \tan(0) = 0$$

Ejemplo 2:

$$\lim_{t\to -5}\sqrt[3]{\left(\frac{x^2-25}{x+5}\right)}$$

Solución:

Por el límite de la función compuesta.

$$= \sqrt[3]{\lim_{t\to -5}\left(\frac{(x+5)(x-5)}{x+5}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{t\to -5}(x-5)}$$

$$= \sqrt[3]{-10}$$

$$= -\sqrt[3]{10}$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Ejemplo 3:

$$\lim_{x\to 0}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi+tanx}{tanx-2secx}\right)\right]$$

Solución:

Por el límite de la función compuesta.

$$= sen\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi+tanx}{tanx-2secx}\right)\right]$$

$$= sen\left[\frac{\pi+tan0}{tan0-2sec0}\right] = sen\left[\frac{\pi+0}{0-2}\right]$$

$$= sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -sen\frac{\pi}{2} = -1$$

Ejemplo 4:

$$\lim_{x\to 1}\left[\ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)\right]$$

Solución:

Por el límite de la función compuesta.

$$= ln\left[\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)\right]$$

Al calcular el límite, da la indeterminación de $0/0$ y por lo tanto el límite se puede escribir como:

$$ln\left[\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right)\right] = ln\left[\lim_{x\to 1}(x+1)\right] = ln2$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Ejemplo 5:

$$\lim_{x\to 2}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x^2-4}{3x^2-6x}\right)\right]$$

Solución:

Por el limite de la función compuesta.

$$= tan^{-1}\left[\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{3x^2-6x}\right)\right]$$

Al calcular el límite, da la indeterminación de $0/0$ y por lo tanto el limite se puede escribir como:

$$\tan^{-1}\left[\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x+2)(x-2)}{3x(x-2)}\right)\right] = \tan^{-1}\left[\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{3x}\right)\right] = \tan^{-1}\left(\frac{2+2}{6}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

9 Teorema Si g es continua en $x = a$ y f es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en $x = a$.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

A menudo, este teorema se expresa de manera informal diciendo: "una función continua de una función continua es una función continua".

V EJEMPLO 9 ¿En dónde son continuas las siguientes funciones?

a) $h(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ b) $F(x) = \ln(1 + \cos x)$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

SOLUCIÓN

a) Tenemos $h(x) = f(g(x))$, donde

$$g(x) = x^2 \qquad \text{y} \qquad f(x) = \operatorname{sen} x$$

Ahora g es continua sobre $\mathbb{R}$ puesto que es una función polinomial, y f también es continua para toda x. Por consiguiente, $h = f \circ g$ es continua sobre $\mathbb{R}$ por el teorema 9.

b) Con base en el teorema 7, sabemos que $f(x) = \ln x$ es continua y $g(x) = 1 + \cos x$ es continua (porque tanto $y = 1$ como $y = \cos x$ son continuas). Por tanto, del teorema 9, $F(x) = f(g(x))$ es continua siempre que esté definida. Ahora bien, $\ln(1 + \cos x)$ está definida cuando $1 + \cos x > 0$. De este modo, no está definido cuando $\cos x = -1$, y esto sucede cuando $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ Así, F tiene discontinuidades cuando x es un múltiplo impar de π y es continua sobre los intervalos entre estos valores (véase la figura 7).

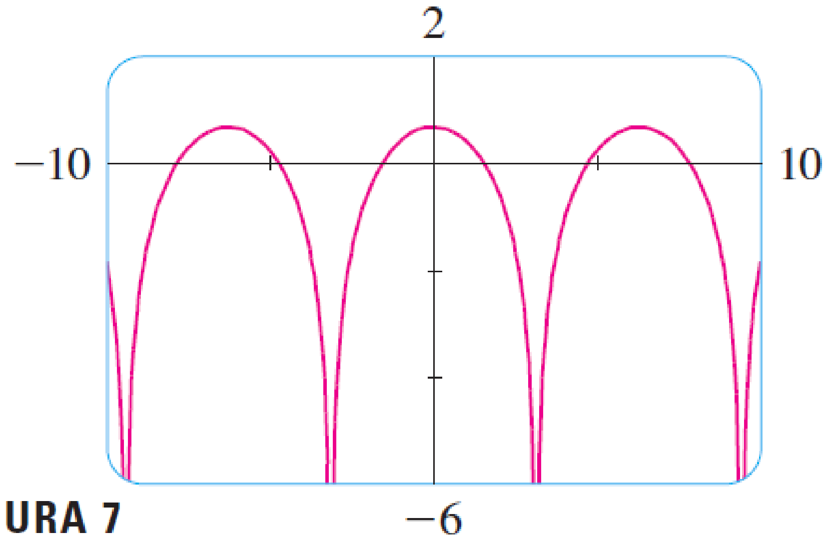


FIGURA 7
$y = \ln(1 + \cos x)$

Ejemplo 6:

Sea $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$, $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$

Analizar la continuidad de $(f \circ g)(x)$ en $x = 0$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Solución:

i) ¿$g(x)$ es continua en $x = 0$?

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 = \lim_{x \to 0^-} x = g(0) = 0$$

de donde se concluye que $g(x)$ es continua en $x = 0$

ii) ¿$f(x)$ es continua en $g(0) = 0$?

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x+|x|}{2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x+x}{2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{2} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x+|x|}{2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x-x}{2} = 0$$

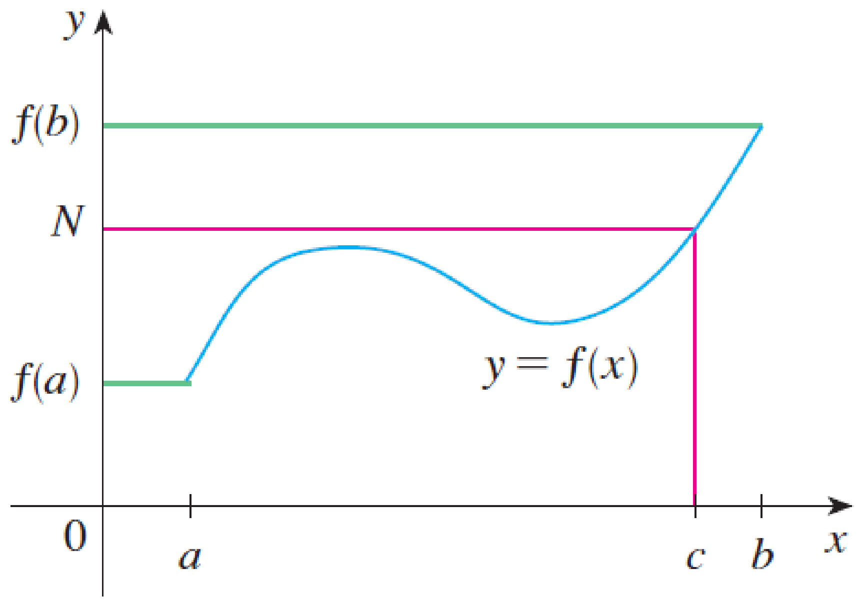
$$f\big(g(0)\big) = 0$$

de donde se concluye que $f(x)$ es continua en $g(0) = 0$

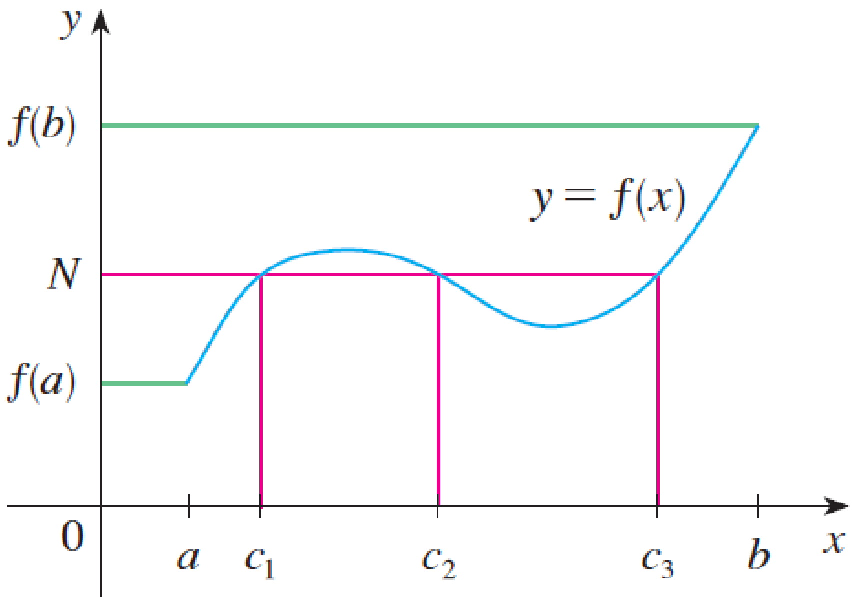
De i) y ii) se concluye que $(f \circ g)(x)$ es continua en $x = 0$

10 Teorema del valor intermedio Suponga que f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea N cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, donde $f(a) \neq f(b)$. Entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = N$.

El teorema del valor intermedio establece que una función continua toma todos los valores intermedios entre los valores de la función $f(a)$ y $f(b)$. Este hecho se ilustra en la figura 8. Observe que el valor N puede tomarse una vez [como en la parte a)] o más de una vez [como en la parte b)].



a)



b)

FIGURA 8

Si piensa en una función continua como en una función cuya gráfica no tiene huecos o rupturas, es fácil creer que el teorema del valor intermedio es verdadero. En términos geométricos, señala que si se da cualquier recta horizontal $y = N$ entre $y = f(a)$ y $y = f(b)$, como en la figura 9, entonces la gráfica de f no puede saltar la recta: debe intersecar $y = N$ en alguna parte.

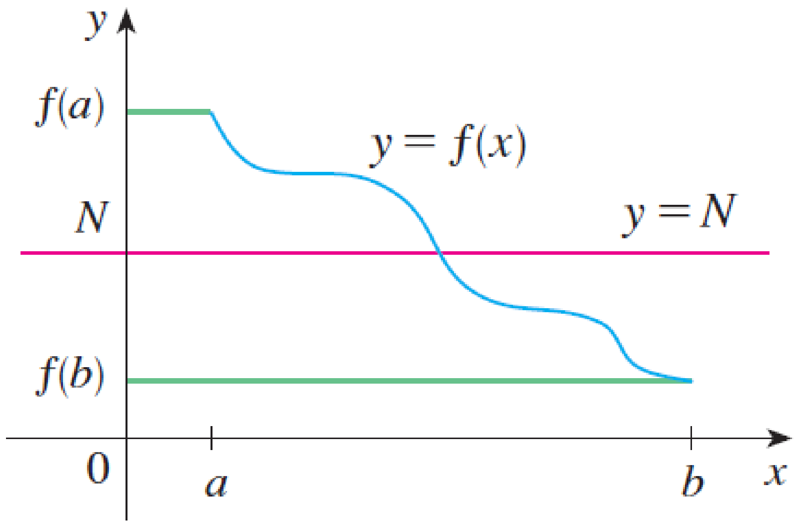


FIGURA 9

Es importante que la función f del teorema 10 sea continua. En general, el teorema del valor intermedio no se cumple para las funciones discontinuas (véase el ejercicio 48).

Un uso del teorema del valor intermedio es en la búsqueda de las raíces de ecuaciones, como en el ejemplo siguiente.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

V **EJEMPLO 10** Demuestre que existe una raíz de la ecuación

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

entre 1 y 2.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Buscamos una solución de la ecuación dada; es decir, un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. Por tanto, tomando $a = 1$, $b = 2$ y $N = 0$ en el teorema 10, tenemos

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$

y

$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

Así, $f(1) < 0 < f(2)$; es decir, $N = 0$ es un número entre $f(1)$ y $f(2)$. Ahora bien, f es continua porque es polinomial, de modo que el teorema del valor intermedio afirma que existe un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. En otras palabras, la ecuación $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ tiene por lo menos una raíz c en el intervalo $(1, 2)$.

De hecho, podemos localizar con mayor precisión una raíz aplicando de nuevo el teorema del valor intermedio. Puesto que

$$f(1.2) = -0.128 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1.3) = 0.548 > 0$$

una raíz debe estar entre 1.2 y 1.3. Una calculadora da, por ensayo y error,

$$f(1.22) = -0.007008 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1.23) = 0.056068 > 0$$

así que la raíz está en el intervalo $(1.22, 1.23)$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Podemos utilizar una calculadora graficadora o computadora para ilustrar el uso del teorema del valor intermedio en el ejemplo 10. La figura 10 muestra la gráfica de f en el rectángulo de vista $[-1, 3]$ por $[-3, 3]$, y puede usted ver que la gráfica cruza el eje x entre 1 y 2. La figura 11 muestra el resultado de un acercamiento en un rectángulo de vista $[1.2, 1.3]$ por $[-0.2, 0.2]$.

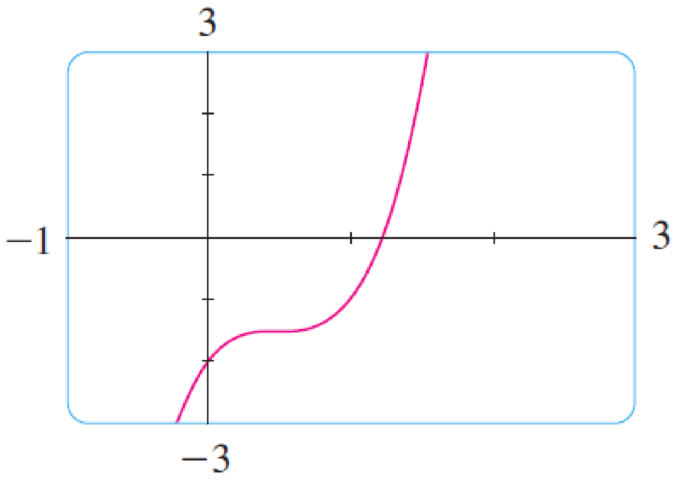


FIGURA 10

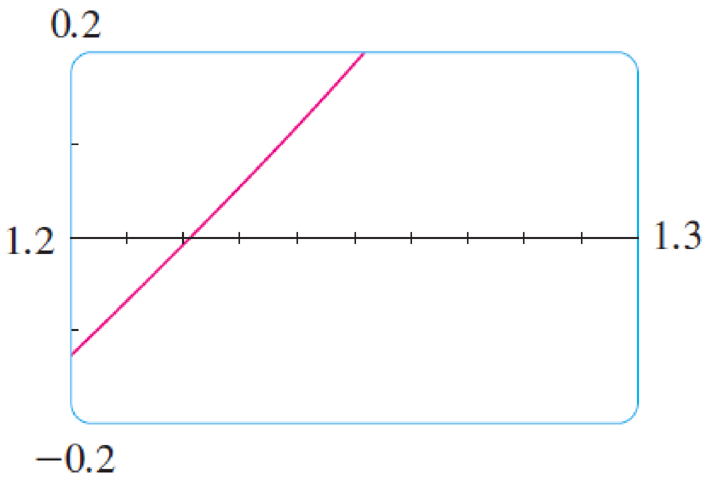


FIGURA 11

De hecho, el teorema del valor intermedio desempeña un importante papel en el modo en que funcionan estos dispositivos de graficación. Una computadora calcula un número finito de puntos de la gráfica y activa los píxeles que contienen estos puntos calculados. Se supone que la función es continua y toma todos los valores intermedios entre dos puntos consecutivos. La computadora une los píxeles activando aquellos intermedios.

35-38 Utilice la continuidad para evaluar cada uno de los siguientes límites.

35. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{5+\sqrt{x}}{\sqrt{5+x}}$

36. $\lim\limits_{x\to \pi} \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$

37. $\lim\limits_{x\to 1} e^{x^2-x}$

38. $\lim\limits_{x\to 2} \arctan\left(\dfrac{x^2-4}{3x^2-6x}\right)$

51-54 Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz en cada una de las ecuaciones dadas en el intervalo especificado.

51. $x^4 + x - 3 = 0, \quad (1, 2)$

52. $\sqrt[3]{x} = 1 - x, \quad (0, 1)$

53. $e^x = 3 - 2x, \quad (0, 1)$

54. $\operatorname{sen} x = x^2 - x, \quad (1, 2)$

67. Demuestre que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua sobre $(-\infty, \infty)$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

Ejercicios:

1. Sea $f(x) = \operatorname{sen}x;\ g(x) = x - \operatorname{sen}x.$
   Analizar la continuidad de $(f^\circ g)(x)$ en $x = \pi$

2. Sea $f(x) = \operatorname{sen}x;\ g(x) = \frac{\pi}{2}\cos(\tan x).$
   Analizar la continuidad de $(f^\circ g)(x)$ en $x = 0$

3. Sea $f(x) = x^2,\ g(x) = \begin{cases} -4 & x \leq 0 \\ |x-4| & x > 0 \end{cases}$
   A. Analizar la continuidad de $(f^\circ g)(x)$ en $x =$
   B. Analizar la continuidad de $(g^\circ f)(x)$ en $x = 0$

REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín