CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

ENCUENTRO 11.1

Sección 3.3: Derivadas de funciones trigonométricas

Derivadas de las funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

Nota: Identifique que los signos menos van con las derivadas de las “cofunciones”, es decir coseno, cosecante y cotangente.

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x}$$

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h) - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\operatorname{sen} x \cdot \frac{\cos h - 1}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(\cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right) \\
&= \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \\
&= \operatorname{sen} x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

$\operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\cos x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h} \\
&= \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \\
&= \cos x \cdot 0 - \operatorname{sen} x \cdot 1 \\
&= -\operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) \\
&= \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x\,(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
\end{aligned}$$

Tarea: Encontrar la derivada de la función tangente utilizando la definición de la derivada

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x}$$

$\sec x = 1/\cos x$. En consecuencia, es posible usar otra vez la regla del cociente para encontrar la derivada de la función secante:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}1 - 1 \cdot \dfrac{d}{dx}\cos x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{0 - (-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x} = \sec x \tan x$$

Tarea: Encontrar la derivada de la función secante utilizando la definición de la derivada

Tarea:

Demostrar que:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x}$$

Adicionalmente, encontrar ambas derivadas utilizando la definición de la derivada

EJEMPLO Regla del producto

Diferencie $y = x^2 \operatorname{sen} x$.

Solución La regla del producto junto con (4) da

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x^2 \frac{d}{dx} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx} x^2 \\ &= x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

EJEMPLO Regla del cociente

Diferencie $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \sec x}$.

Solución Por la regla del cociente, (4) y (9),

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(2 + \sec x) \dfrac{d}{dx} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \dfrac{d}{dx}(2 + \sec x)}{(2 + \sec x)^2} \\ &= \frac{(2 + \sec x) \cos x - \operatorname{sen} x\, (\sec x \tan x)}{(2 + \sec x)^2} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \sec x \cos x = 1 \text{ y} \\ \operatorname{sen} x(\sec x \tan x) = \operatorname{sen}^2 x / \cos^2 x \end{array} \\ &= \frac{1 + 2\cos x - \tan^2 x}{(2 + \sec x)^2}.\end{aligned}$$

EJEMPLO Segunda derivada

Encuentre la segunda derivada de $f(x) = \sec x$.

Solución la primera derivada es

$$f'(x) = \sec x \tan x.$$

Para obtener la segunda derivada, ahora es necesario usar la regla del producto

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sec x \frac{d}{dx} \tan x + \tan x \frac{d}{dx} \sec x \\ &= \sec x (\sec^2 x) + \tan x (\sec x \tan x) \\ &= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x. \end{aligned}$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 2 Derive $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \tan x}$. ¿Para cuáles valores de x la gráfica de f tiene una recta tangente horizontal?

SOLUCIÓN Por la regla del cociente se tiene que

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(1 + \tan x)\dfrac{d}{dx}(\sec x) - \sec x\dfrac{d}{dx}(1 + \tan x)}{(1 + \tan x)^2} \\
&= \frac{(1 + \tan x)\sec x \tan x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2} \\
&= \frac{\sec x\,(\tan x + \tan^2 x - \sec^2 x)}{(1 + \tan x)^2} \\
&= \frac{\sec x\,(\tan x - 1)}{(1 + \tan x)^2}
\end{aligned}
$$

En la simplificación de la respuesta hemos utilizado la identidad $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$.

Ya que $\sec x$ nunca es 0, $f'(x) = 0$ cuando $\tan x = 1$, y esto sucede cuando $x = n\pi + \pi/4$, donde n es un entero (véase la figura 4).

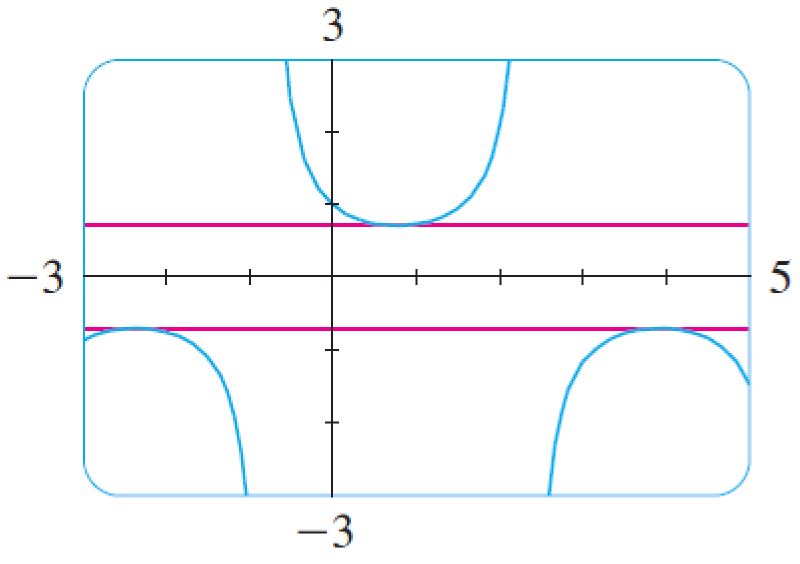


FIGURA 4
Las rectas tangentes horizontales del ejemplo 2

EJEMPLO 4 Hallar la vigésima séptima derivada de cos x.

SOLUCIÓN Las primeras derivadas de $f(x) = \cos x$ son como sigue:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\operatorname{sen} x \\
f''(x) &= -\cos x \\
f'''(x) &= \operatorname{sen} x \\
f^{(4)}(x) &= \cos x \\
f^{(5)}(x) &= -\operatorname{sen} x
\end{aligned}
$$

Observamos que las derivadas sucesivas ocurren en un ciclo de longitud 4 y, en particular, $f^{(n)}(x) = \cos x$ cada vez que n es un múltiplo de 4. En consecuencia,

$$f^{(24)} = \cos x$$

y, derivando tres veces más, se tiene

$$f^{(27)} = \operatorname{sen} x$$

V EJEMPLO 3 Un objeto que se encuentra en el extremo de un resorte vertical se desplaza hacia abajo 4 cm mas allá de su posición en reposo, para estirar el resorte, y se deja en libertad en el instante $t = 0$. (Véase la figura 5 y observe que la dirección hacia abajo es positiva.) Su posición en el instante t es

$$s = f(t) = 4 \cos t$$

Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t y úselas para analizar el movimiento del objeto.

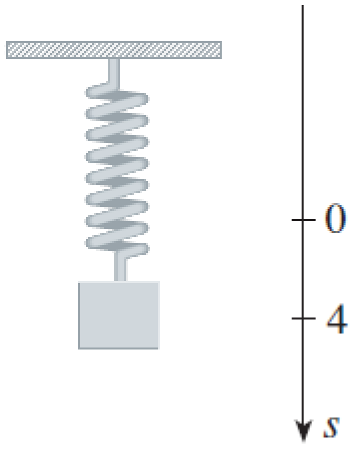


FIGURA 5

SOLUCIÓN La velocidad y la aceleración son

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4 \cos t) = 4 \frac{d}{dt}(\cos t) = -4 \operatorname{sen} t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-4 \operatorname{sen} t) = -4 \frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t) = -4 \cos t$$

El objeto oscila desde el punto más bajo ($s = 4$cm) hasta el punto más alto ($s = -4$cm). El periodo de la oscilación es 2π, el periodo de cos t.

La rapidez es $|v| = 4 |\operatorname{sen} t|$, la cual es máxima cuando $|\operatorname{sen} t| = 1$; es decir, cuando $\cos t = 0$. De modo que el objeto se mueve con la mayor rapidez cuando pasa por su posición de equilibrio ($s = 0$). Su rapidez es 0 cuando $\operatorname{sen} t = 0$; esto es, en los puntos alto y bajo.

La aceleración $a = -4 \cos t = 0$ cuando $s = 0$. Alcanza la magnitud máxima en los puntos alto y bajo. Observe la gráfica en la figura 6.

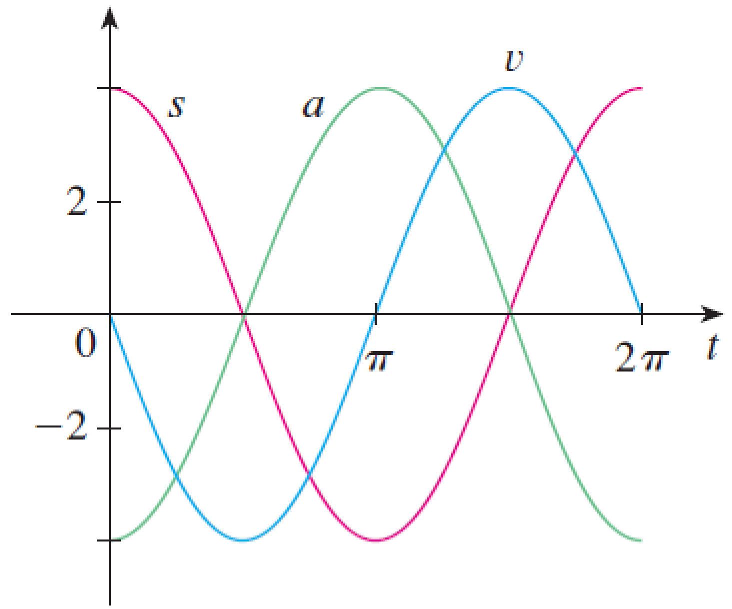


FIGURA 6

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO Regla del producto

Diferencie $y = \cos^2 x$.

Solución Una forma de diferenciar esta función es reconocerla como un producto: $y = (\cos x)(\cos x)$. Luego, por la regla del producto y (5),

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \cos x \frac{d}{dx} \cos x + \cos x \frac{d}{dx} \cos x \\ &= \cos x(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(-\operatorname{sen} x) \\ &= -2 \operatorname{sen} x \cos x.\end{aligned}$$

En la siguiente sección veremos que hay un procedimiento alterno para diferenciar una potencia de una función.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Ejercicios

1–16 Derive cada una de las funciones siguientes:

1. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$

2. $f(x) = x \cos x + 2 \tan x$

3. $f(x) = e^x \cos x$

4. $y = 2 \sec x - \csc x$

5. $g(t) = t^3 \cos t$

6. $g(t) = 4 \sec t + \tan t$

7. $h(\theta) = \csc \theta + e^\theta \cot \theta$

8. $y = e^u(\cos u + cu)$

9. $y = \dfrac{x}{2 - \tan x}$

10. $y = \operatorname{sen} \theta \cos \theta$

11. $f(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta}$

12. $y = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

13. $y = \dfrac{t \operatorname{sen} t}{1 + t}$

14. $y = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \tan t}$

15. $f(\theta) = \theta \cos \theta \operatorname{sen} \theta$

16. $f(t) = te^t \cot t$

29. Si $H(\theta) = \theta \operatorname{sen} \theta$, determine $H'(\theta)$y $H''(\theta)$.

30. Si $f(t) = \sec t$, determine $f''(\pi/4)$.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

21–24 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las curvas siguientes, en el punto dado.

21. $y = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad (0, 1)$

22. $y = e^x \cos x, \quad (0, 1)$

23. $y = \cos x - \operatorname{sen} x, \quad (\pi, -1)$

24. $y = x + \tan x, \quad (\pi, \pi)$

31. (a) Utilice la regla del cociente para derivar la función

$$f(x) = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$$

(b) Simplifique la expresión para $f(x)$ expresándola en términos de sen x y cos x, y enseguida determine $f'(x)$.

(c) Demuestre que sus respuestas a los incisos (a) y (b) son equivalentes.

32. Suponga $f(\pi/3) = 4$ y $f'(\pi/3) = -2$, y sea $g(x) = f(x)\text{sen}\, x$ y $h(x) = (\cos x)/f(x)$. Determine
(a) $g'(\pi/3)$ (b) $h'(\pi/3)$

33–34 ¿Para qué valores de x la gráfica de f tiene una recta tangente horizontal?

33. $f(x) = x + 2\,\text{sen}\, x$

34. $f(x) = e^x \cos x$

51–52 Encuentre la derivada que se muestra, mediante la búsqueda de las primeras derivadas y observando el patrón que aparece.

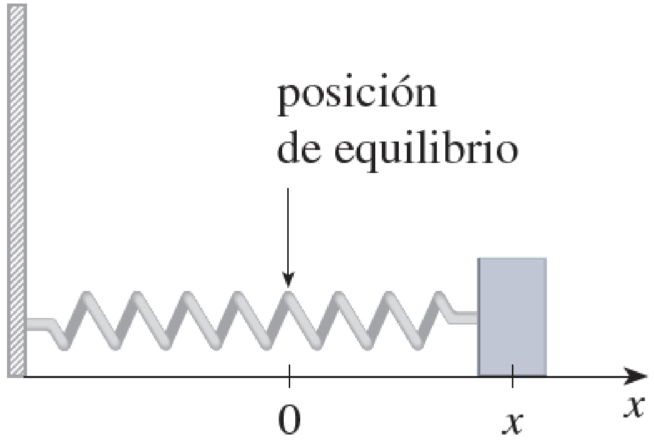
51. $\dfrac{d^{99}}{dx^{99}}(\text{sen}\, x)$

52. $\dfrac{d^{35}}{dx^{35}}(x\,\text{sen}\, x)$

53. Encuentre constantes A y B tales que la función $y = A\,\text{sen}\, x + B\cos x$ satisface la ecuación diferencial $y'' + y' - 2y = \text{sen}\, x$.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

35. Una masa en un resorte vibra horizontalmente sobre una superficie lisa y nivelada (véase la figura). Su ecuación de movimiento es $x(t) = 8\,\text{sen}\, t$, donde t está en segundos y x en centímetros.
(a) Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t.
(b) Encuentre la posición, la velocidad y la aceleración de la masa en el instante $t = 2\pi/3$. ¿En qué dirección se desplaza en ese instante?



REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín