Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

ENCUENTRO 16.1

Sección 4.5: Resumen de trazado de curvas

Resumen de trazado de curvas

Guía para el trazado de curvas

En la siguiente lista se intenta proponer directrices que sirvan de guía para dibujar una curva $y = f(x)$ a mano. No todos los elementos de la lista son relevantes para cada función. (Por ejemplo, una curva dada puede no tener una asíntota o poseer simetría.) Pero las directrices proporcionan toda la información que usted necesita para hacer un trazo que muestre los aspectos más importantes de la función.

A. Dominio A menudo resulta útil comenzar por determinar el dominio D de f; es decir, el conjunto de valores de x para los cuales $f(x)$ está definida.

B. Intersección La intersección en y es $f(0)$ y esto nos indica dónde la curva cruza con el eje y. Para encontrar las intersecciones con el eje x, hacemos $y = 0$ y resolvemos para x. (Puede omitirse este paso si la ecuación es difícil de resolver.)

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

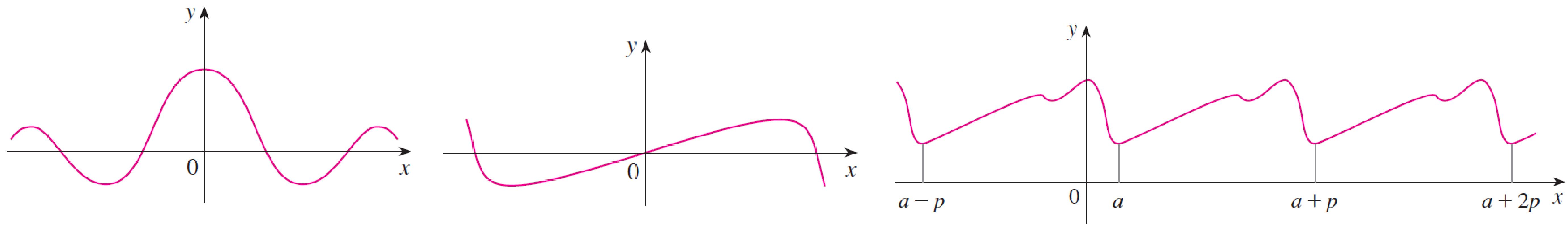
Guía para el trazado de curvas

C. Simetría

i) Si $f(-x) = f(x)$ para toda x en D, es decir, la ecuación de la curva no se modifica cuando x se sustituye por $-x$, entonces f es una **función par** y la curva es simétrica respecto al eje y. Esto significa que nuestro trabajo se reduce a la mitad. Si conocemos la parte de la curva donde $x \geqslant 0$, entonces sólo necesitamos reflejar respecto al eje y, para obtener la curva completa .

ii) Si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en D, entonces f es una **función impar** y la curva es simétrica respecto al origen. Una vez más, podemos obtener la curva completa si conocemos la parte de la curva donde $x \geqslant 0$. [Gire 180° alrededor del origen].

iii) Si $f(x + p) = f(x)$ para toda x en D, donde p es una constante positiva, entonces f se llama **función periódica** y el número p más pequeño se llama **periodo**.



a) Función par: simetría por reflexión

b) Función impar: simetría por rotación

Función periódica: simetría traslacional

Guía para el trazado de curvas

D. Asíntotas

i) *Asíntotas horizontales*. Recuerde que si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, entonces la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$. Si resulta que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (o $-\infty$), entonces no tenemos una asíntota a la derecha, pero sigue siendo información útil para trazar la curva.

ii) *Asíntotas verticales*. Recuerde que la recta $x = a$ es una asíntota vertical si al menos una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

$$\boxed{1} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

(Para funciones racionales puede usted localizar las asíntotas verticales igualando el denominador a 0 después de cancelar los factores comunes. Pero para otras funciones no se aplica este método.) Además, en el trazado de la curva es muy útil saber exactamente cuál de las afirmaciones en $\boxed{1}$ es verdadera. Si $f(a)$ no está definida, pero a es un extremo del dominio de f, entonces debe calcular $\lim_{x\to a^-} f(x)$ o $\lim_{x\to a^+} f(x)$, sea este límite infinito o no.

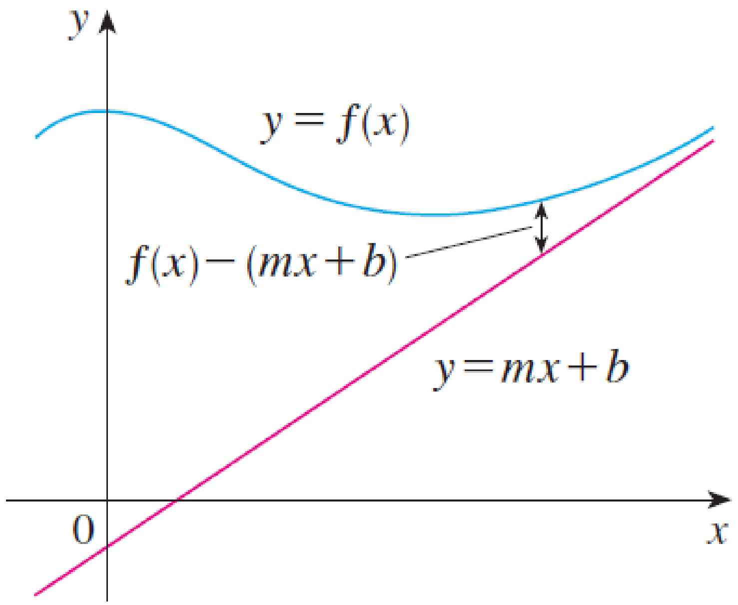
Guía para el trazado de curvas

iii) *Asíntotas inclinadas.*

Algunas curvas tienen asíntotas que son *oblicuas*; esto es, no son horizontales ni verticales. Si

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

entonces la recta $y = mx + b$ se llama **asíntota inclinada** (oblicua) porque la distancia vertical entre la curva $y = f(x)$ y la recta $y = mx + b$ tiende a cero.
(Existe una situación similar si hacemos $x \longrightarrow -\infty$.) Para funciones racionales, las asíntotas inclinadas se producen cuando el grado del numerador es uno más que el grado del denominador. En tal caso la ecuación de la asíntota oblicua puede encontrarse por división larga.



Guía para el trazado de curvas

E. Intervalos donde la función es creciente o decreciente Utilice la prueba C y D. Obtenga $f'(x)$ y encuentre los intervalos en los que $f'(x)$ es positiva (f es creciente) y los intervalos en los que $f'(x)$ es negativa (f es decreciente).

F. Valores mínimo y máximo locales Encuentre los números críticos de f [los números c donde $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existen]. Después utilice la prueba de la primera derivada. Si f' cambia de positiva a negativa en un número crítico c, entonces $f(c)$ es un máximo local. Si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces $f(c)$ es un mínimo local. Aunque es generalmente preferible utilizar la prueba de la primera derivada, puede utilizar la prueba de la segunda derivada si $f'(c) = 0$ y $f''(c) \neq 0$. Entonces $f''(c) > 0$ implica que $f(c)$ es un mínimo local, mientras que $f''(c) < 0$ implica que $f(c)$ es un máximo local.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Guía para el trazado de curvas

G. Concavidad y puntos de inflexión Obtenga $f''(x)$ y utilice la prueba de la concavidad. La curva es cóncava hacia arriba donde $f''(x) > 0$ y cóncava hacia abajo donde $f''(x) < 0$. Los puntos de inflexión se localizan donde cambia de dirección la concavidad.

H. Trace la curva Utilizando la información de los apartados A-G, trace la gráfica. Dibuje las asíntotas como rectas discontinuas. Ubique las intersecciones, puntos máximos y mínimos y puntos de inflexión. Después, haga que la curva pase por estos puntos, creciendo y decreciendo de acuerdo con E, con concavidades de acuerdo con G y acercándose a las asíntotas. Si se desea precisión adicional cerca de cualquier punto, puede calcular el valor de la derivada allí. La recta tangente indica la dirección en que avanza la curva.

V **EJEMPLO 1** Utilice la guía para trazar la gráfica de $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.

A. El dominio es

$$\{x \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \mid x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

B. Las intersecciones en x y en y son, ambas, 0.

C. Ya que $f(-x) = f(x)$, la función f es par. La curva es simétrica respecto al eje y.

D. $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{1 - 1/x^2} = 2$$

Por tanto, la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.

Puesto que el denominador es 0 cuando $x = \pm 1$, obtenemos los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty$$

Por ende, las rectas $x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales.

E.
$$f'(x) = \frac{4x(x^2 - 1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

Ya que $f'(x) > 0$ cuando $x < 0$ $(x \neq -1)$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > 0$ $(x \neq 1)$, f es creciente sobre $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$ y decreciente sobre $(0, 1)$ y $(1, \infty)$.

F. El único número crítico es $x = 0$. Dado que f' cambia de positiva a negativa en $x = 0$, $f(0) = 0$ es un máximo local por la prueba de la primera derivada.

G.
$$f''(x) = \frac{-4(x^2 - 1)^2 + 4x \cdot 2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

Puesto que $12x^2 + 4 > 0$ para toda x, tenemos

$$f''(x) > 0 \iff x^2 - 1 > 0 \iff |x| > 1$$

y $f''(x) < 0 \iff |x| < 1$. Así, la curva es cóncava hacia arriba sobre los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$ y cóncava hacia abajo sobre $(-1, 1)$. No hay puntos de inflexión ya que $x = 1$ y $x = -1$ no están en el dominio de f.

H. Utilizando la información de E-G, terminamos el trazo de la figura 6.

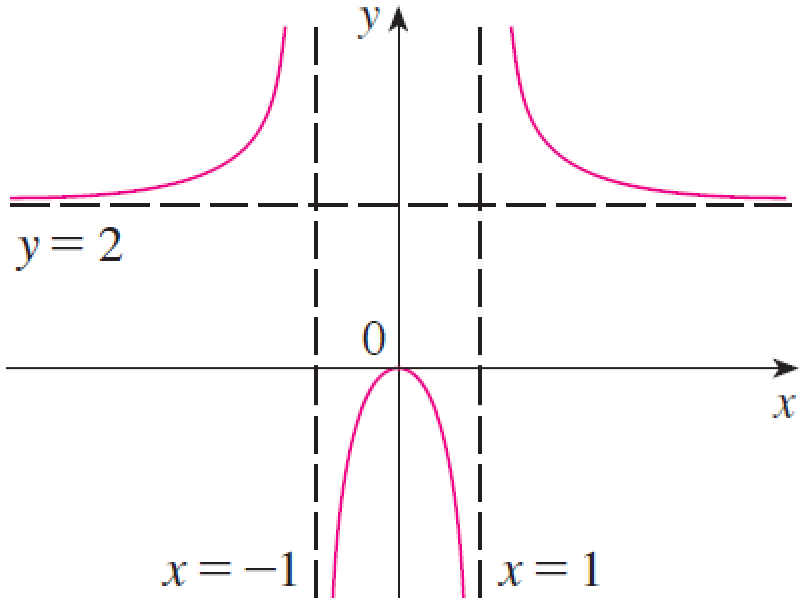


FIGURA 6
Trazo final de $y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$.

A. Dominio: $\{x \mid x + 1 > 0\} = \{x \mid x > -1\} = (-1, \infty)$

B. Las intersecciones en x y en y son ambas 0.

C. Simetría: ninguna

D. Dado que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = \infty$$

no hay asíntotas horizontales. Ya que $\sqrt{x+1} \to 0$ conforme $x \to -1^+$ y $f(x)$ es siempre positiva, tenemos

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = \infty$$

y, por tanto, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

E. $$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x+1} - x^2 \cdot 1/(2\sqrt{x+1})}{x+1} = \frac{x(3x+4)}{2(x+1)^{3/2}}$$

Vemos que $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$ (note que $-\frac{4}{3}$ no está en el dominio de f), así que el único número crítico es $x = 0$. Ya que $f'(x) < 0$ cuando $-1 < x < 0$ y $f'(x) > 0$ cuando $x > 0$, f es decreciente sobre $(-1, 0)$ y decreciente sobre $(0, \infty)$.

F. Puesto que $f'(0) = 0$ y f' cambia de negativa a positiva en $x = 0$, $f(0) = 0$ es un mínimo local (y absoluto) por la prueba de la primera derivada.

G. $$f''(x) = \frac{2(x+1)^{3/2}(6x+4) - (3x^2+4x)3(x+1)^{1/2}}{4(x+1)^3} = \frac{3x^2+8x+8}{4(x+1)^{5/2}}$$

Note que el denominador siempre es positivo. El numerador es la cuadrática $3x^2 + 8x + 8$, que siempre es positiva porque su discriminante es $b^2 - 4ac = -32$, que es negativo, y el coeficiente de x^2 es positivo. Así $f''(x) > 0$ para toda x en el dominio de f, lo que significa que f es cóncava hacia arriba sobre $(-1, \infty)$ y no hay punto de inflexión.

H. El trazo de la curva aparece en la figura 7.

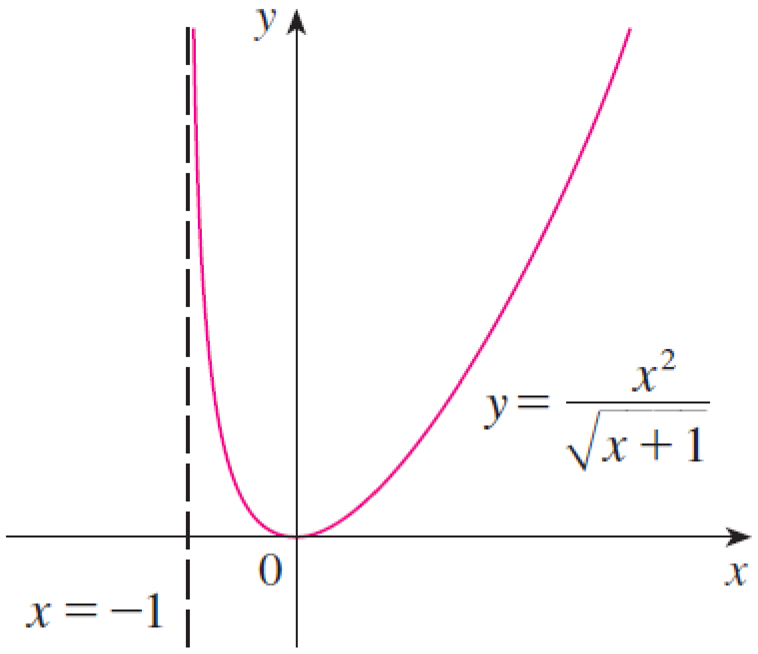


FIGURA 7

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

V **EJEMPLO 3** Trace la gráfica de $f(x) = xe^x$.

A. El dominio es $\mathbb{R}$.

B. Las intersecciones en x y en y son ambas 0.

C. Simetría: ninguna

D. Ya que tanto x como e^x son muy grandes conforme $x \to \infty$, tenemos que $\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$. Sin embargo, a medida que $x \to -\infty$, $e^x \to 0$, así que tenemos un producto indeterminado que requiere la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} (-e^x) = 0$$

Así, el eje x es una asíntota horizontal.

E.
$$f'(x) = xe^x + e^x = (x + 7)e^x$$

Ya que e^x siempre es positiva, vemos que $f'(x) > 0$ cuando $x + 1 > 0$, y $f'(x) < 0$ cuando $x + 1 < 0$. Así que f es creciente sobre $(-1, \infty)$ y decreciente sobre $(-\infty, -1)$.

F. Ya que $f'(-1) = 0$ y f' cambia de negativa a positiva en $x = -1$, $f(-1) = -e^{-1}$ es un mínimo local (y absoluto).

G.
$$f''(x) = (x + 1)e^x + e^x = (x + 2)e^x$$

Ya que $f''(x) > 0$ si $x > -2$ y $f''(x) < 0$ si $x < -2$, f es cóncava hacia arriba sobre $(-2, \infty)$ y cóncava hacia abajo sobre $(-\infty, -2)$. El punto de inflexión es $(-2, -2e^{-2})$.

H. Con toda esta información trazamos la curva de la figura 8.

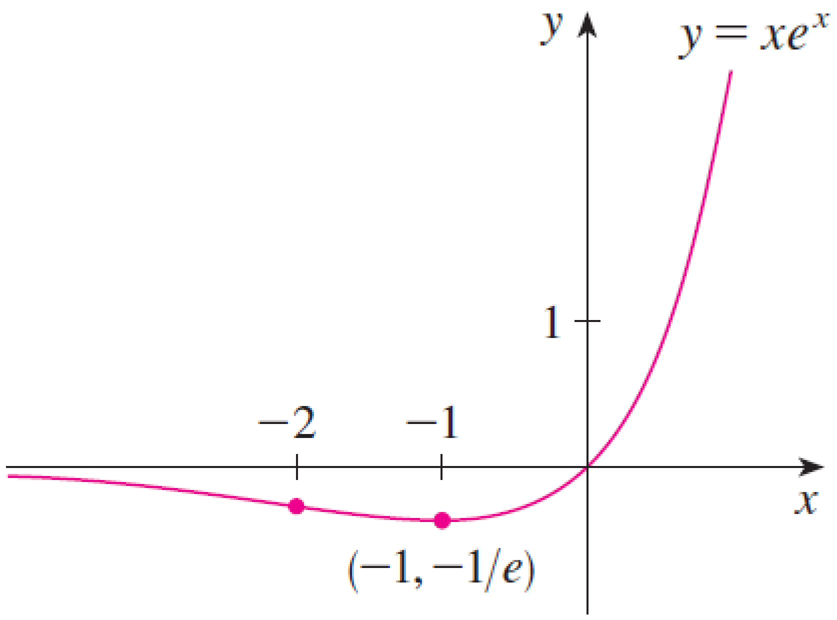


FIGURA 8

EJEMPLO 4 Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$.

A. El dominio es $\mathbb{R}$.

B. La intersección en y es $f(0) = \frac{1}{2}$. Las intersecciones en x se localizan donde $\cos x = 0$, esto es, $x = (2n + 1)\pi/2$, donde n es un entero.

C. f no es par ni impar, pero $f(x + 2\pi) = f(x)$ para toda x, por lo que f es periódica con periodo 2π. Así, en lo siguiente, necesitamos considerar sólo $0 \leqslant x \leqslant 2x$ y después extender la curva por traslación en la parte H.

D. Asíntotas: ninguna

E.
$$f'(x) = \frac{(2 + \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x) - \cos x\,(\cos x)}{(2 + \operatorname{sen} x)^2} = -\frac{2 \operatorname{sen} x + 1}{(2 + \operatorname{sen} x)^2}$$

Así, $f'(x) > 0$ cuando $2 \operatorname{sen} x + 1 < 0 \iff \operatorname{sen} x < -\frac{1}{2} \iff 7\pi/6 < x < 11\pi/6$. Por tanto, f es creciente sobre $(7\pi/6, 11\pi/6)$ y decreciente sobre $(0, 7\pi/6)$ y $(11\pi/6, 2\pi)$.

F. Del apartado E y la prueba de la primera derivada, vemos que el valor mínimo local es $f(7\pi/6) = -1/\sqrt{3}$ y el valor máximo local es $f(11\pi/6) = 1/\sqrt{3}$.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

G. Si utilizamos la regla del cociente otra vez y simplificamos; obtenemos

$$f''(x) = -\frac{2 \cos x\,(1 - \operatorname{sen} x)}{(2 + \operatorname{sen} x)^3}$$

Debido a que $(2 + \operatorname{sen} x)^3 > 0$ y $1 - \operatorname{sen} x \geqslant 0$ para toda x, sabemos que $f''(x) > 0$ cuando $\cos x < 0$, esto es, $\pi/2 < x < 3\pi/2$. Así que f es cóncava hacia arriba sobre $(\pi/2, 3\pi/2)$ y cóncava hacia abajo sobre $(0, \pi/2)$ y $(3\pi/2, 2\pi)$. Los puntos de inflexión son $(\pi/2, 0)$ y $(3\pi/2, 0)$.

H. La gráfica de la función restringida a $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ se muestra en la figura 9. Después, la extendemos utilizando la periodicidad, para completar la gráfica de la figura 10.

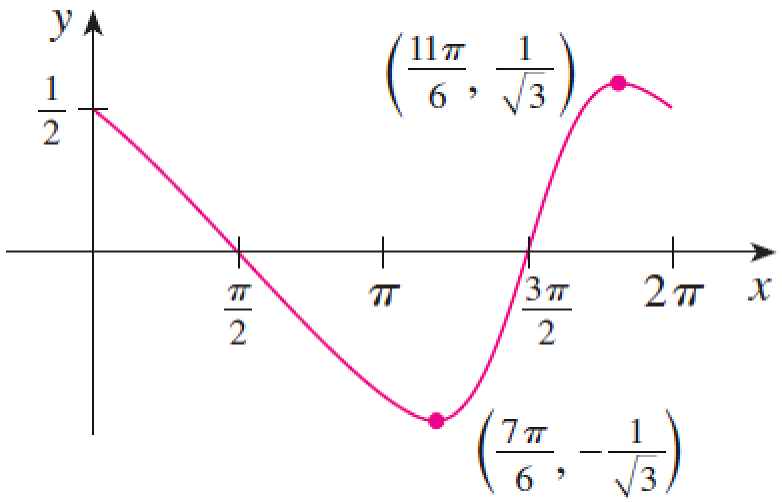


FIGURA 9

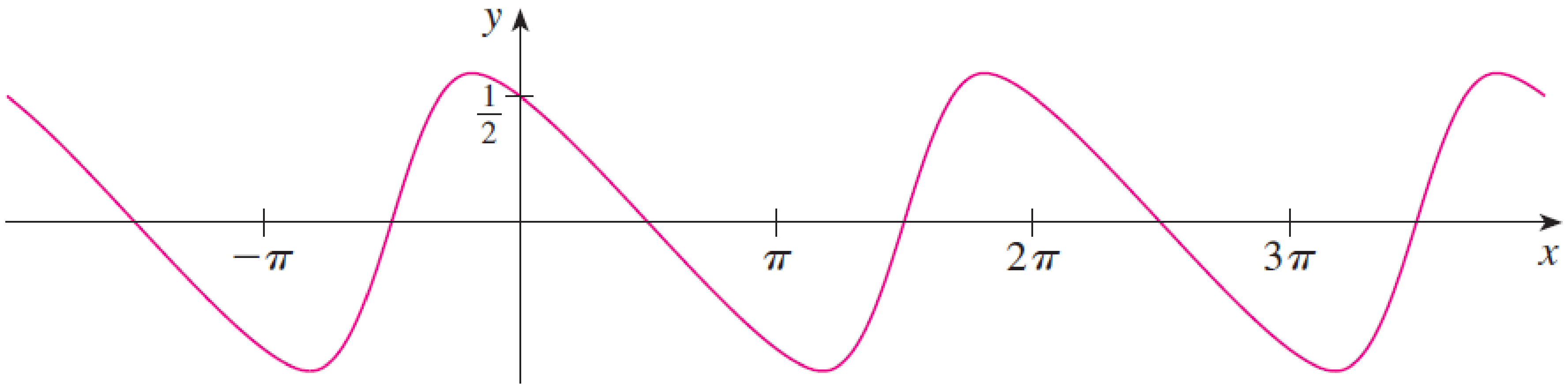


FIGURA 10

EJEMPLO 5 Trace la gráfica de $y = \ln(4 - x^2)$.

A. El dominio es

$$\{x \mid 4 - x^2 > 0\} = \{x \mid x^2 < 4\} = \{x \mid |x| < 2\} = (-2, 2)$$

B. La intersección en y es $f(0) = \ln 4$. Para encontrar la intersección con x, hacemos

$$y = \ln(4 - x^2) = 0$$

Sabemos que $\ln 1 = 0$, así que tenemos $4 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 3$ y, por tanto, las intersecciones en x son $\pm\sqrt{3}$.

C. Ya que $f(-x) = f(x)$, f es par y la curva es simétrica respecto al eje y.

D. Buscamos asíntotas verticales en los extremos del dominio. Como $4 - x^2 \to 0^+$ conforme $x \to 2^-$ y también a medida que $x \to -2^+$, tenemos

$$\lim_{x\to 2^-} \ln(4 - x^2) = -\infty \qquad \lim_{x\to -2^+} \ln(4 - x^2) = -\infty$$

Así, las rectas $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales.

E.
$$f'(x) = \frac{-2x}{4 - x^2}$$

Dado que $f'(x) > 0$ cuando $-2 < x < 0$ y $f'(x) < 0$ cuando $0 < x < 2$, f es creciente sobre $(-2, 0)$ y decreciente sobre $(0, 2)$.

F. El único número crítico es $x = 0$. Como f' cambia de positiva a negativa en $x = 0$, $f(0) = \ln 4$ es un máximo local por la prueba de la primera derivada.

G.
$$f''(x) = \frac{(4 - x^2)(-2) + 2x(-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{-8 - 2x^2}{(4 - x^2)^2}$$

Ya que $f''(x) < 0$ para toda x, la curva es cóncava hacia abajo sobre $(-2, 2)$ y no tiene punto de inflexión.

H. Con toda esta información, trazamos la curva en la figura 11.

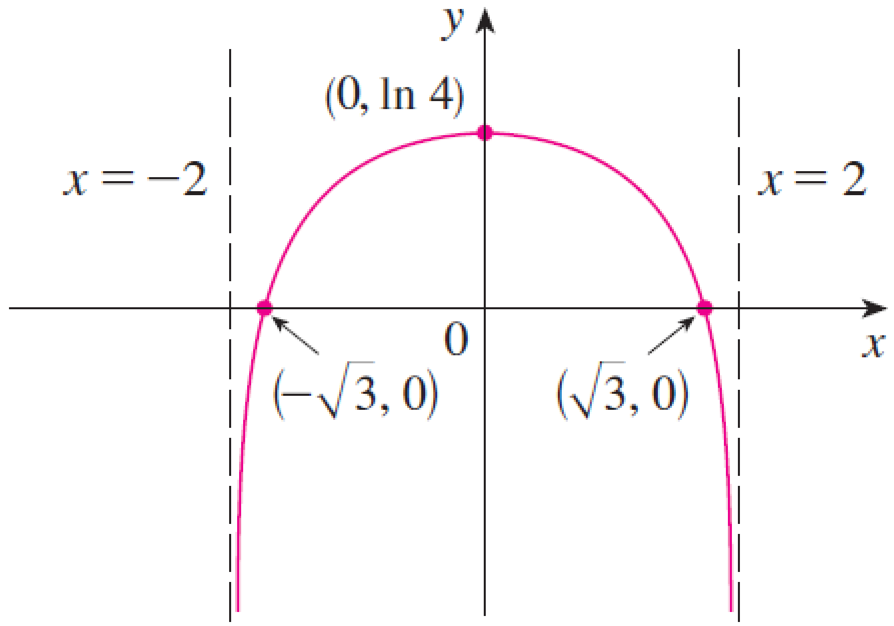


FIGURA 11
$y = \ln(4 - x^2)$

V EJEMPLO 6 Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

A. El dominio es $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

B. Las intersecciones en x y en y son ambas 0.

C. Puesto que $f(-x) = -f(x)$, f es impar y su gráfica es simétrica respecto al origen.

D. Ya que $x^2 + 1$ nunca es 0, no hay asíntotas verticales. Ya que $f(x) \to \infty$ conforme $x \to \infty$ y $f(x) \to -\infty$ a medida que $x \to -\infty$ no hay asíntotas horizontales. Pero la división larga da

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$f(x) - x = -\frac{x}{x^2 + 1} = -\frac{\dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{1}{x^2}} \to 0 \quad \text{conforme } x \to \pm\infty$$

Así que la recta $y = x$ es una asíntota oblicua.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

E. $$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

Dado que $f'(x) > 0$ para toda x (excepto 0), f es creciente sobre $(-\infty, \infty)$.

F. Aunque $f'(0) = 0$, f' no cambia de signo en $x = 0$, así que no hay máximo ni mínimo local.

G. $$f''(x) = \frac{(4x^3 + 6x)(x^2+1)^2 - (x^4 + 3x^2) \cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(3 - x^2)}{(x^2+1)^3}$$

Ya que $f''(x) = 0$ cuando $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{3}$, podemos elaborar la siguiente tabla:

Intervalo	x	$3 - x^2$	$(x^2+1)^3$	$f''(x)$	Concavidad de f
$x < -\sqrt{3}$	$-$	$-$	$+$	$+$	Hacia arriba sobre $(-\infty, -\sqrt{3})$
$-\sqrt{3} < x < 0$	$-$	$+$	$+$	$-$	Hacia abajo sobre $(-\sqrt{3}, 0)$
$0 < x < \sqrt{3}$	$+$	$+$	$+$	$+$	Hacia arriba sobre $(0, \sqrt{3})$
$x > \sqrt{3}$	$+$	$-$	$+$	$-$	Hacia abajo sobre $(\sqrt{3}, \infty)$

Los puntos de inflexión son $(-\sqrt{3}, -\frac{3}{4}\sqrt{3})$, $(0, 0)$ y $(\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3})$.

H. La gráfica de f se muestra en la figura 13.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

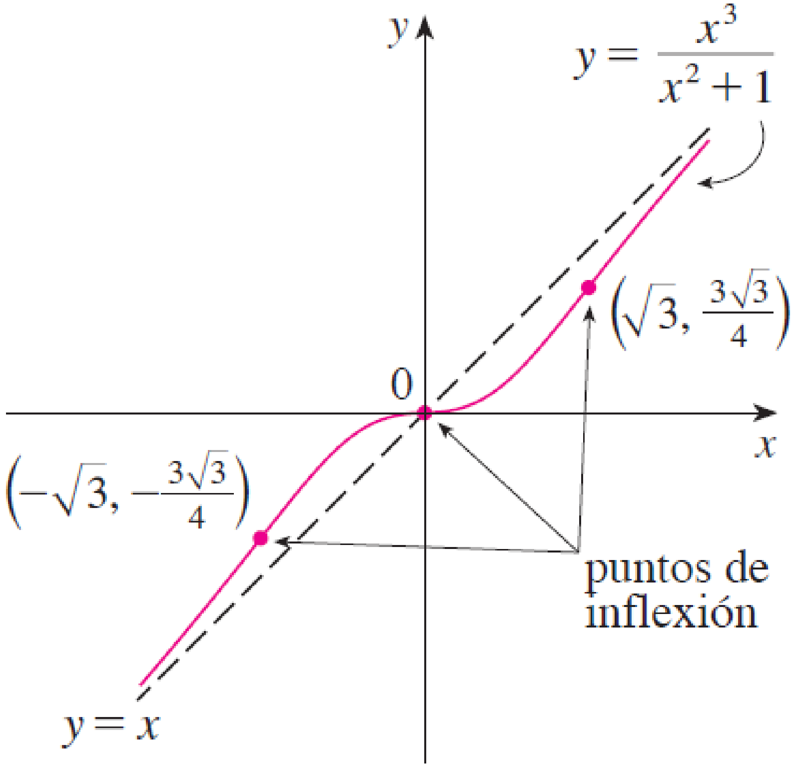
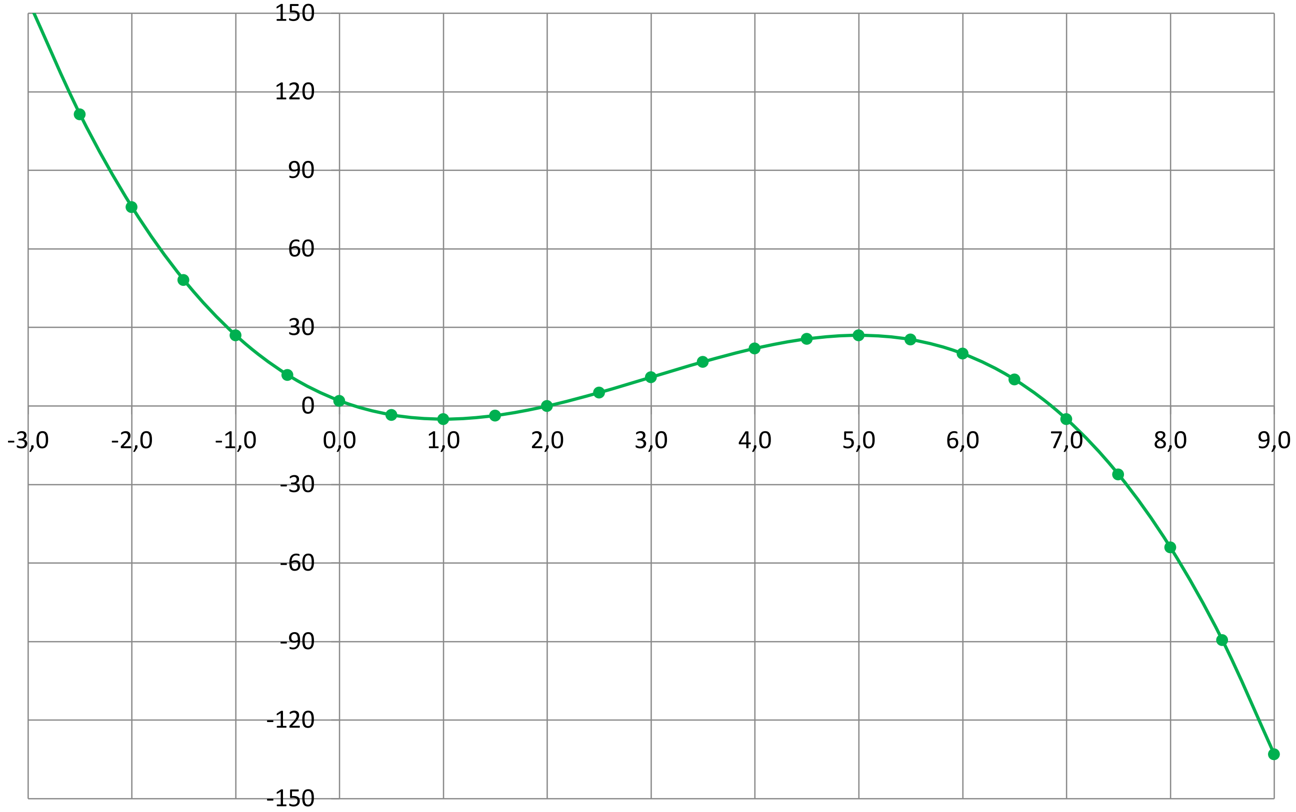


FIGURA 13

Ejemplo

Utilice la guía de esta sección para trazar la curva siguiente:

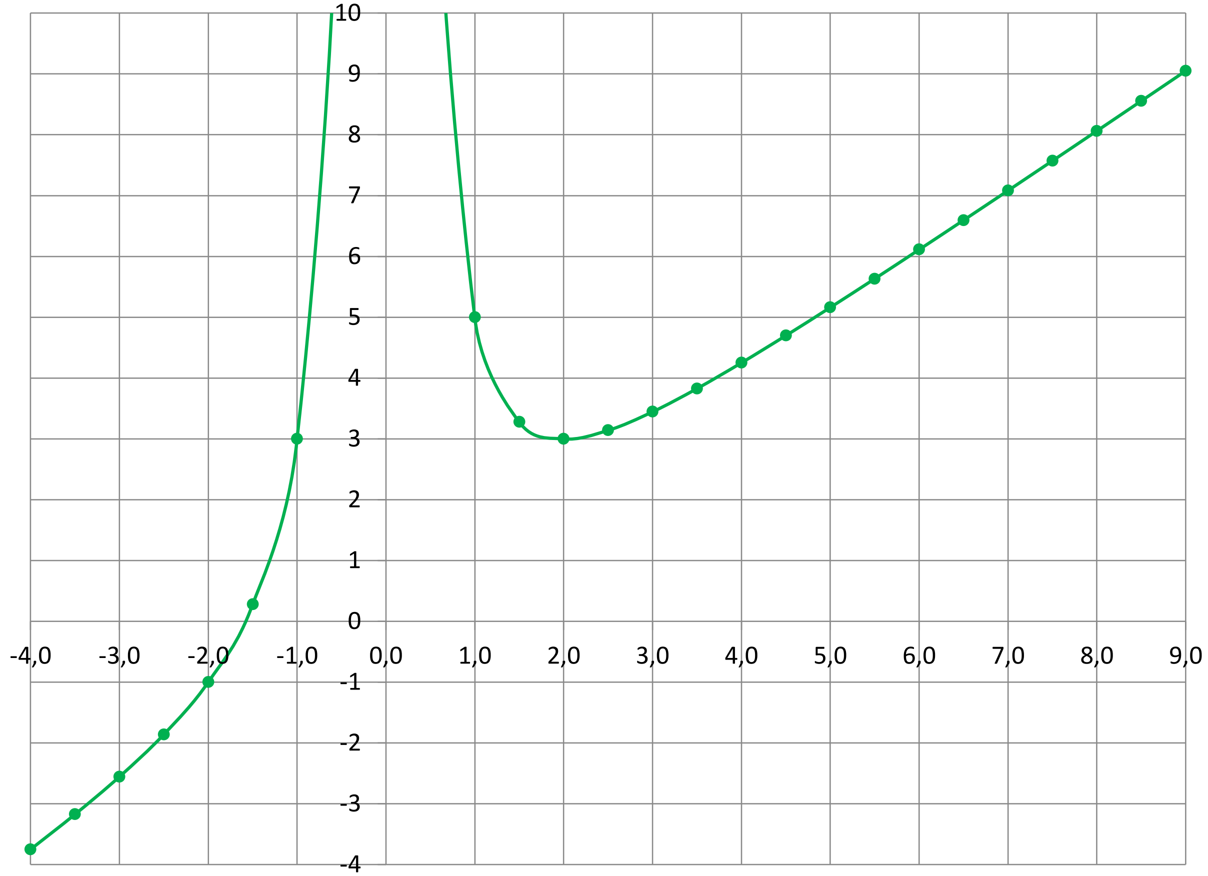
$$y = 2 - 15x + 9x^2 - x^3$$



Ejemplo

Utilice la guía de esta sección para trazar la curva siguiente.
En el apartado D encuentre la ecuación de la asíntota inclinada.

$$y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

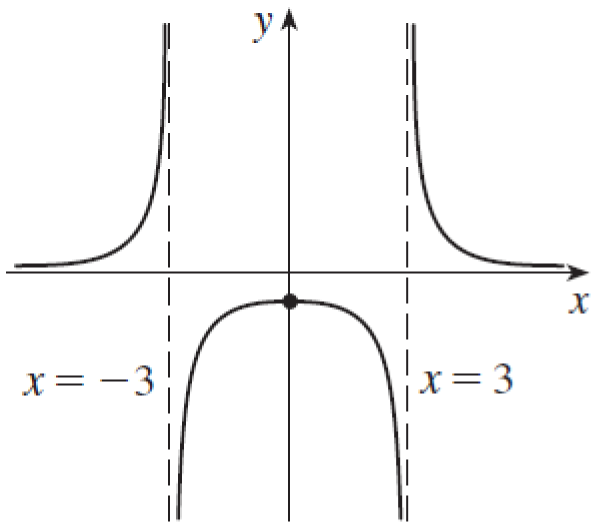


Ejemplo

Utilice la guía de esta sección para trazar la curva siguiente: $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

A. $\{x \mid x \neq \pm 3\}$ B. y-int $-\frac{1}{9}$
C. Sobre el eje y D. VA $x = \pm 3$, HA $y = 0$
E. Inc sobre $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$;
dec sobre $(0, 3)$, $(3, \infty)$
F. Loc máx $f(0) = -\frac{1}{9}$
G. CU sobre $(-\infty, -3)$, $(3, \infty)$;
CD sobre $(-3, 3)$
H. Ver gráfica a la derecha.



Ejemplo

Utilice la guía de esta sección para trazar la curva siguiente: $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

A. $\mathbb{R}$ B. y-int 0; x-int 0

C. Cerca del origen

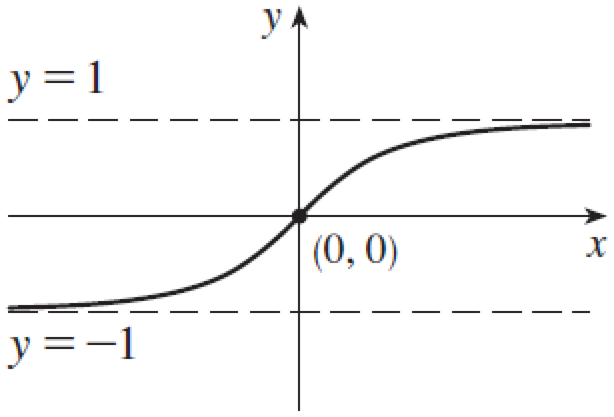
D. HA $y = \pm 1$

E. Inc sobre $(-\infty, \infty)$ F. Ninguno

G. CU sobre $(-\infty, 0)$;

CD sobre $(0, \infty)$; IP $(0, 0)$

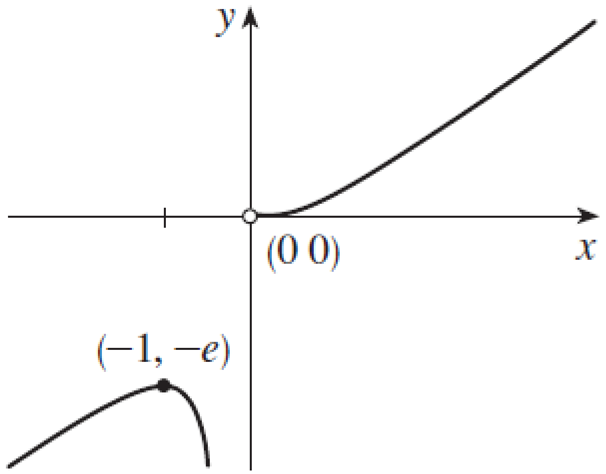
H. Ver gráfica a la derecha.



Ejemplo

Utilice la guía de esta sección para trazar la curva siguiente: $y = xe^{-1/x}$

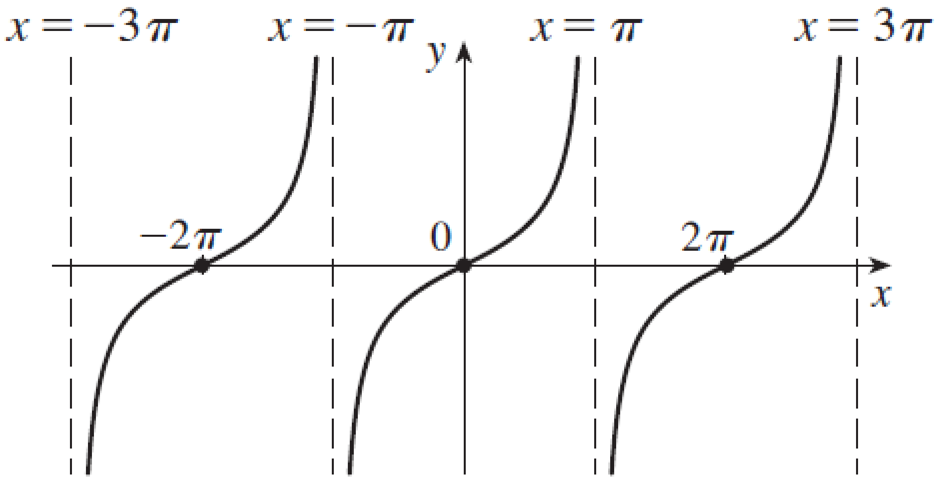
A. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
B. Ninguno C. Ninguna D. VA $x = 0$
E. Inc sobre $(-\infty, -1)$, $(0, \infty)$;
dec sobre $(-1, 0)$
F. Loc máx $f(-1) = -e$
G. CU sobre $(0, \infty)$; CD sobre $(-\infty, 0)$
H. Ver gráfica a la derecha.



Ejemplo

Utilice la guía de esta sección para trazar la curva siguiente: $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

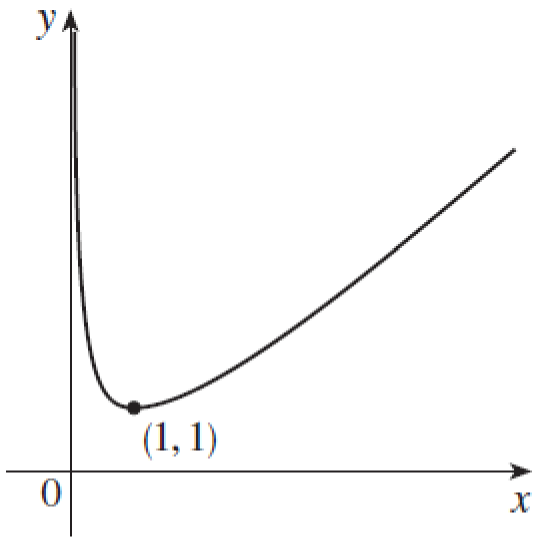
A. Todos reales excepto $(2n + 1)\pi$ (n un entero)
B. y-int 0; x-int $2n\pi$
C. sobre el origen, periodo2π
D. VA $x = (2n + 1)\pi$
E. Inc sobre $((2n - 1)\pi, (2n + 1)\pi)$ F. Ninguno
G. CU sobre $(2n\pi, (2n + 1)\pi)$; CD sobre $((2n - 1)\pi, 2n\pi)$; IP $(2n\pi, 0)$
H.



Ejemplo

Utilice la guía de esta sección para trazar la curva siguiente: $y = x - \ln x$

A. $(0, \infty)$ B. Ninguno
C. Ninguna D. VA $x = 0$
E. Inc sobre $(1, \infty)$; dec sobre $(0, 1)$
F. Loc mín $f(1) = 1$
G. CU sobre $(0, \infty)$
H. Ver gráfica a la derecha.



Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Ejercicios

Utilice la guía de esta sección para trazar cada una de las curvas siguientes:

1. $y = x^3 + 3x^2$

5. $y = x(x - 4)^3$

7. $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x$

11. $y = \dfrac{x - x^2}{2 - 3x + x^2}$

13. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

15. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 9}$

25. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

29. $y = x - 3x^{1/3}$

40. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$

51. $y = xe^{-1/x}$

52. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

65. $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$

68. $y = \dfrac{x^3}{(x + 1)^2}$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín