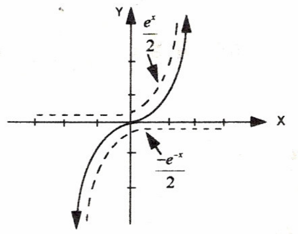
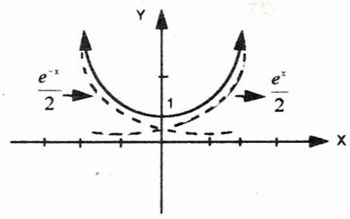
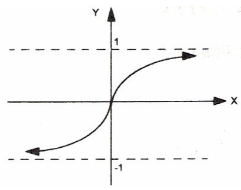
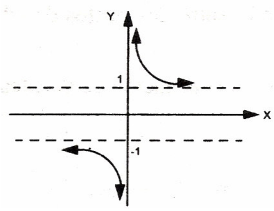
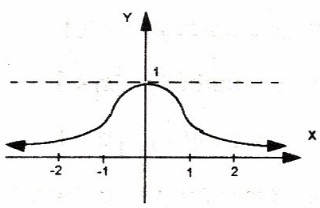
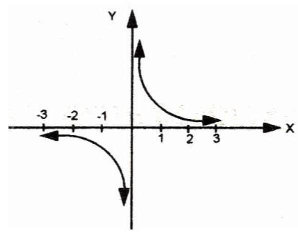
Escuela de Ingeniería
Centro de Ciencia Básica

Cálculo Diferencial

Guía teórica

Funciones Hiperbólicas

Son combinaciones especiales de la función exponencial natural que surgen con frecuencia en la matemática.

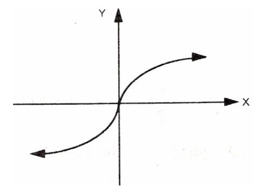
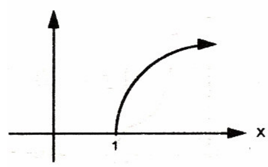
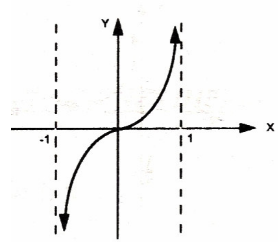
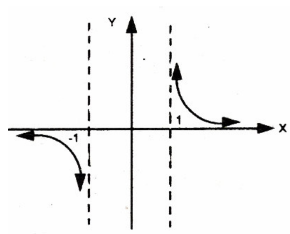
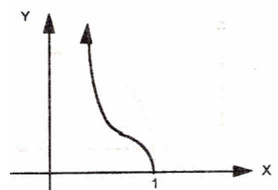
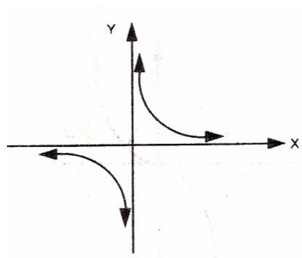
Funciones Hiperbólicas		
Definición	**Dominio / Rango**	**Representación Gráfica**
$senhx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	Dominio: $\Re$ Rango: $\Re$	
$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	Dominio: $\Re$ Rango: [1, +∞)	
$\tanh x = \dfrac{senhx}{\cosh x}$	Dominio: $\Re$ Rango: (-1, 1)	
$\coth x = \dfrac{\cosh x}{senhx}$	Dominio: $\Re$ - {0} Rango: (-∞, -1) U (1, +∞)	
$\sec hx = \dfrac{1}{\cosh x}$	Dominio: $\Re$ Rango: (0, 1]	
$\csc hx = \dfrac{1}{senhx}$	Dominio: $\Re$ - {0} Rango: $\Re$ - {0}	

Escuela de Ingeniería
Centro de Ciencia Básica

Cálculo Diferencial

Guía teórica

Funciones Hiperbólicas

Funciones Hiperbólicas Inversas			
Definición	**Representación como logaritmo natural**	**Dominio / Rango**	**Representación Gráfica**
$y = senh^{-1}x$ $x = senhy$	$senh^{-1}x = Ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$	Dominio: $\Re$ Rango: $\Re$	
$y = \cosh^{-1} x$ $x = \cosh y$ $x \geq 1$	$\cosh^{-1} x = Ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right); x \geq 1$	Dominio: [1, +∞) Rango: $\Re^+$ U {0}	
$y = \tanh^{-1} x$ $x = \tanh y$ $\lvert x \rvert < 1$	$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right); \lvert x \rvert < 1$	Dominio: (-1, 1) Rango: $\Re$	
$y = \coth^{-1} x$ $x = \coth y$ $\lvert x \rvert > 1$	$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right); \lvert x \rvert > 1$	Dominio: (-∞, -1) U (1, +∞) Rango: $\Re$	
$y = \sec h^{-1}x$ $x = \sec hy$ $0 < x \leq 1$	$\sec h^{-1}x = Ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right); 0 < x \leq 1$	Dominio: (0, 1] Rango: $\Re^+$ U {0}	
$y = \csc h^{-1}x$ $x = \csc hy$ $x \neq 0$	$\csc h^{-1}x = Ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}\right); x \neq 0$	Dominio: $\Re$ - {0} Rango: $\Re$ - {0}	

Escuela de Ingeniería
Centro de Ciencia Básica

Cálculo Diferencial

Guía teórica

Funciones Hiperbólicas

Aplicaciones:

- La gráfica de la función $f(x)=\frac{k}{2}\left(e^{cx}+e^{-cx}\right)=k\cosh(cx)$ donde *k* y *c* son constantes reales, se llama catenaria y representa la forma que adopta un cable flexible homogéneo e inelástico tendido entre dos puntos debido a la acción de su peso. En general: $y=a+k\cosh\left(\frac{x}{k}\right)$
- En la formulación de una ecuación que describa las olas del mar. En general: $v=\sqrt{\frac{gL}{2\pi}}\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$ con:
  v: velocidad; *L*: longitud de la ola; *d*: profundidad; *g*: aceleración debida a la gravedad

Identidades:

- $\cosh^2 x-senh^2 x=1$
- $1-\tanh^2 x=\sec h^2 x$
- $\coth^2 x-1=\csc h^2 x$
- $senh(-x)=-senhx$ (función impar)
- $\cosh(-x)=\cosh x$ (función par)
- $\cosh x+senhx=e^x$
- $\cosh x-senhx=e^{-x}$
- $senh(x\pm y)=senhx\cosh y\pm\cosh xsenhy$
- $\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm senhxsenhy$
- $senh(2x)=2senhx\cosh x$
- $\cosh(2x)=\cosh^2 x+senh^2 x=1+2senh^2 x=2\cosh^2 x-1$
- $senh\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{\cosh x-1}{2}}$
- $\cosh\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{\cosh x+1}{2}}$

Derivadas:
Si U es una función diferenciable de x:

- $\frac{d}{dx}(senhu)=\cosh uu'$
- $\frac{d}{dx}(\cosh u)=senhuu'$
- $\frac{d}{dx}(\tanh u)=\sec h^2uu'$
- $\frac{d}{dx}(\csc hu)=-\csc hu\coth uu'$
- $\frac{d}{dx}(\sec hu)=-\sec hu\tanh uu'$
- $\frac{d}{dx}(\coth u)=-\csc h^2uu'$
- $\frac{d}{dx}(senh^{-1}u)=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}u'$
- $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}u)=\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}u'$
- $\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}u)=\frac{1}{1-u^2}u'$
- $\frac{d}{dx}(\csc h^{-1}u)=\frac{-1}{|u|\sqrt{u^2+1}}u'$
- $\frac{d}{dx}(\sec h^{-1}u)=\frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}}u'$
- $\frac{d}{dx}(\coth^{-1}u)=\frac{1}{1-u^2}u'$

Bibliografía:

Texto guía: Stewart, James. Cálculo. Trascendentes tempranas. Sexta edición.