Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

ENCUENTRO 10.3

Sección 3.2: Reglas del producto y el cociente

Regla del producto

Por analogía con las reglas de la suma y la diferencia, podría tener la tentación de suponer —como Leibniz lo hizo hace tres siglos— que la derivada de un producto es el producto de las derivadas. Sin embargo, puede ver que esta suposición es errónea al considerar un ejemplo particular. Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Por tanto, la regla de la potencia da $f'(x) = 1$ y $g'(x) = 2x$. Pero $(fg)(x) = x^3$, de modo que $(fg)'(x) = 3x^2$. Así que, $(fg)' \neq f'g'$. La formula correcta fue descubierta por Leibniz (poco tiempo después de su falso inicio) y se llama regla del producto.

Regla del producto Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

En notación con apóstrofos:

$$(fg)' = fg' + gf'$$

DEMOSTRACIÓN Sea $G(x) = f(x)g(x)$. Entonces por la definición de la derivada junto con algo de manipulación algebraica:

$$G'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) \overbrace{- f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x)}^{\text{cero}} - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \to 0} g(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Debido a que f es diferenciable en x, es continua ahí y entonces $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$. Además, $\lim_{h \to 0} g(x) = g(x)$. Por tanto, la última ecuación se vuelve

$$G'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \qquad \blacksquare$$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 1

a) Si $f(x) = xe^x$, encuentre $f'(x)$.

b) Halle la n-ésima derivada, $f^{(n)}(x)$.

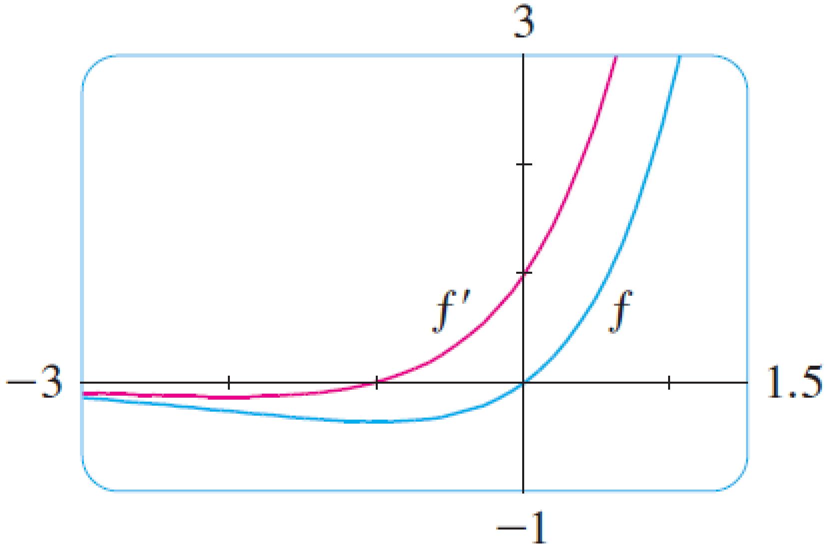
SOLUCIÓN

a) Por la regla del producto se tiene que

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x)$$

$$= x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x)$$

$$= xe^x + e^x \cdot 1 = (x+1)e^x$$



b) Aplicando a regla del producto una segunda vez, se obtiene

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[(x+1)e^x]$$

$$= (x+1)\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x+1)$$

$$= (x+1)e^x + e^x \cdot 1 = (x+2)e^x$$

Las siguientes aplicaciones de la regla del producto dan

$$f'''(x) = (x+3)e^x \qquad f^{(4)}(x) = (x+4)e^x$$

De hecho, cada derivada sucesiva agrega otro término e^x, así que

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$$

EJEMPLO 2 Derive la función $f(t) = \sqrt{t}\,(a + bt)$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

SOLUCIÓN 1 Utilizando la regla del producto, tenemos que

$$f'(t) = \sqrt{t}\,\frac{d}{dt}(a + bt) + (a + bt)\frac{d}{dt}(\sqrt{t})$$

$$= \sqrt{t} \cdot b + (a + bt) \cdot \tfrac{1}{2}t^{-1/2}$$

$$= b\sqrt{t} + \frac{a + bt}{2\sqrt{t}} = \frac{a + 3bt}{2\sqrt{t}}$$

SOLUCIÓN 2 Si primero utilizamos las leyes de los exponentes para reescribir $f(t)$, entonces podemos proceder directamente sin utilizar la regla del producto.

$$f(t) = a\sqrt{t} + bt\sqrt{t} = at^{1/2} + bt^{3/2}$$

$$f'(t) = \tfrac{1}{2}at^{-1/2} + \tfrac{3}{2}bt^{1/2}$$

lo cual es equivalente a la respuesta dada en la solución 1.

El ejemplo 2 muestra que a veces es más fácil simplificar un producto de funciones antes de derivar que utilizar directamente la regla del producto.
En el ejemplo 1, sin embargo, la regla del producto es sólo un posible método.

EJEMPLO 3 Si $f(x) = \sqrt{x}\, g(x)$, donde $g(4) = 2$ y $g'(4) = 3$, encuentre $f'(4)$.

SOLUCIÓN Aplicando la regla del producto, tenemos que

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\, g(x)\right] = \sqrt{x}\, \frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right]$$

$$= \sqrt{x}\, g'(x) + g(x) \cdot \tfrac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$= \sqrt{x}\, g'(x) + \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$$

Así que

$$f'(4) = \sqrt{4}\, g'(4) + \frac{g(4)}{2\sqrt{4}} = 2 \cdot 3 + \frac{2}{2 \cdot 2} = 6.5$$

EJEMPLO Producto de tres funciones

Diferencie $y = (4x + 1)(2x^2 - x)(x^3 - 8x)$.

Solución Los dos primeros factores se identifican como la "primera función":

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{(4x+1)(2x^2-x)}^{\text{primera}}\overbrace{\frac{d}{dx}(x^3-8x)}^{\text{derivada de la segunda}} + \overbrace{(x^3-8x)}^{\text{segunda}}\overbrace{\frac{d}{dx}(4x+1)(2x^2-x)}^{\text{derivada de la primera}}.$$

Observe que para encontrar la derivada de la primera función es necesario aplicar la regla del producto por segunda ocasión:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (4x+1)(2x^2-x)\cdot(3x^2-8) + (x^3-8x)\cdot\overbrace{[(4x+1)(4x-1)+(2x^2-x)\cdot 4]}^{\text{De nuevo la regla del producto}} \\ &= (4x+1)(2x^2-x)(3x^2-8) + (x^3-8x)(16x^2-1) + 4(x^3-8x)(2x^2-x).\end{aligned}$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

EJEMPLO Recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = (1 + \sqrt{x})(x - 2)$ en $x = 4$.

Solución Antes de tomar la derivada, $\sqrt{x}$ volvemos a escribirla como $x^{1/2}$. Luego, por la regla del producto (3),

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (1 + x^{1/2})\frac{d}{dx}(x - 2) + (x - 2)\frac{d}{dx}(1 + x^{1/2}) \\ &= (1 + x^{1/2}) \cdot 1 + (x - 2) \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} \\ &= \frac{3x + 2\sqrt{x} - 2}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Al evaluar la función dada y su derivada en $x = 4$ obtenemos:

$$y(4) = (1 + \sqrt{4})(4 - 2) = 6 \quad \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (4, 6)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4} = \frac{12 + 2\sqrt{4} - 2}{2\sqrt{4}} = \frac{7}{2}. \quad \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } (4, 6) \text{ es } \tfrac{7}{2}$$

Por la forma punto-pendiente, la recta tangente es

$$y - 6 = \frac{7}{2}(x - 4) \qquad \text{o bien,} \qquad y = \frac{7}{2}x - 8.$$

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Regla del cociente

Regla del cociente Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

En notación con apóstrofos:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $G(x) = f(x)/g(x)$. Entonces

$$G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)f(x+h) \overbrace{- g(x)f(x) + g(x)f(x)}^{\text{cero}} - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x)\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0} g(x) \cdot \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim\limits_{h\to 0} f(x) \cdot \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}{\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) \cdot \lim\limits_{h\to 0} g(x)}.$$

Puesto que se supone que todos los límites existen, la última línea es lo mismo que

$$G'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

V **EJEMPLO 4** Sea $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$. Entonces

$$y' = \frac{(x^3 + 6)\dfrac{d}{dx}(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}(x^3 + 6)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(x^3 + 6)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(2x^4 + x^3 + 12x + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2}$$

Podemos utilizar un dispositivo de graficación para verificar que la respuesta al ejemplo 4 es verosímil. En la figura 3 se muestran las gráficas de la función del ejemplo 4 y su derivada. Note que cuando y crece con rapidez (cerca de -2), y' es grande. Y cuando y crece con lentitud, y' está cercana a 0.

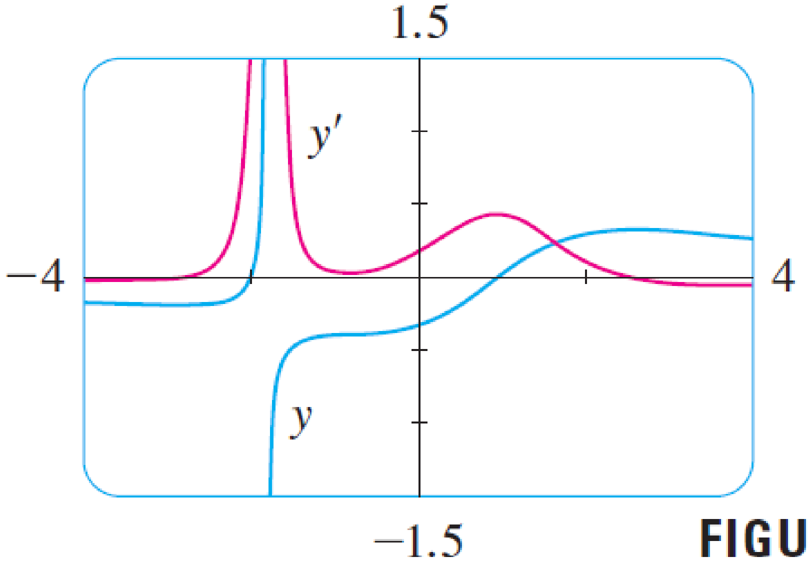


FIGURA 3

V **EJEMPLO 5** Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x/(1 + x^2)$ en el punto $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$.

SOLUCIÓN De acuerdo con la regla del cociente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + x^2)\dfrac{d}{dx}(e^x) - e^x\dfrac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{(1 + x^2)e^x - e^x(2x)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{e^x(1 - x)^2}{(1 + x^2)^2}$$

De modo que la pendiente de la recta tangente en $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$$

Esto significa que la recta tangente en $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$ es horizontal, y su ecuación es $y = \frac{1}{2}e$. [Véase la figura 4. Advierta que la función es creciente y cruza su recta tangente en $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$.]

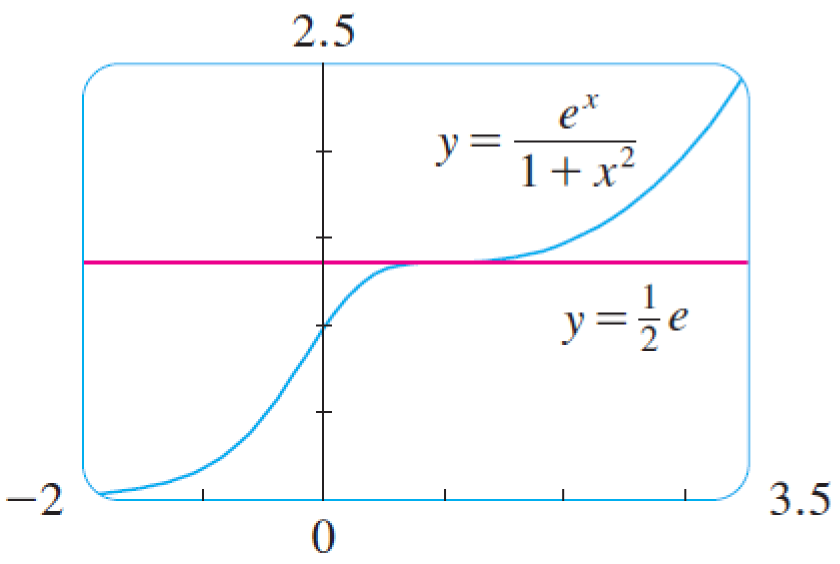


FIGURA 4

NOTA No use la regla del cociente *cada* vez que vea un cociente. A veces es más fácil reescribir un cociente en una forma que sea más sencilla para los fines de derivación. Por ejemplo, aun cuando es posible derivar la función

$$F(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}$$

aplicando la regla del cociente, es más fácil dividir primero y escribir la función como

$$F(x) = 3x + 2x^{-1/2}$$

antes de derivar.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO Reglas del producto y el cociente

Encuentre los puntos sobre la gráfica de $y = \dfrac{(x^2+1)(2x^2+1)}{3x^2+1}$ donde la recta tangente es horizontal.

Solución Se empieza con la regla del cociente y luego se usa la regla del producto al diferenciar el numerador:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2+1)\cdot \overbrace{\frac{d}{dx}[(x^2+1)(2x^2+1)]}^{\text{Regla del producto aquí}} - (x^2+1)(2x^2+1)\cdot \frac{d}{dx}(3x^2+1)}{(3x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(3x^2+1)[(x^2+1)4x + (2x^2+1)2x] - (x^2+1)(2x^2+1)6x}{(3x^2+1)^2} \quad \leftarrow \text{se multiplica por el numerador}$$

$$= \frac{12x^5+8x^3}{(3x^2+1)^2}.$$

En un punto donde la recta tangente es horizontal, debe tenerse $dy/dx = 0$. La derivada que acaba de encontrarse sólo puede ser 0 cuando el numerador satisface

$$12x^5 + 8x^3 = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad x^3(12x^2+8) = 0. \tag{5}$$

En (5), debido a que $12x^2 + 8 \neq 0$ para todos los números reales x, debe tenerse $x = 0$. Al sustituir este número en la función obtenemos $y(0) = 1$. La recta tangente es horizontal en la intersección con el eje y, el punto $(0, 1)$.

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

Tabla de fórmulas de derivación

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \qquad \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g' \qquad (f-g)' = f' - g'$$

$$(fg)' = fg' + gf' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

Ejercicios

1. Encuentre la derivada de $f(x) = (1 + 2x^2)(x - x^2)$ de dos maneras: aplicando la regla del producto y efectuando primero la multiplicación. ¿Sus respuestas son equivalentes?

2. Encuentre la derivada de la función

$$F(x) = \frac{x^4 - 5x^3 + \sqrt{x}}{x^2}$$

en dos maneras diferentes: utilizando la regla del cociente y simplificando primero. Demuestre que sus respuestas son equivalentes. ¿Cuál método prefiere?

3–26 Derive.

3. $f(x) = (3x^2 - 5x)e^x$

4. $g(x) = (x + 2\sqrt{x})\, e^x$

5. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 + x}$

7. $g(x) = \dfrac{3x - 1}{2x + 1}$

8. $f(t) = \dfrac{2t}{4 - t^2}$

9. $H(u) = (u - \sqrt{u})(u + \sqrt{u})$

10. $J(v) = (v^3 - 2v)(v^{-4} + v^{-2})$

11. $F(y) = \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$

12. $f(z) = (1 - e^z)(z + e^z)$

13. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - 1}$

14. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2 + x}$

15. $y = \dfrac{t^3 + 3t}{t^2 - 4t + 3}$

16. $y = \dfrac{1}{t^3 + 2t^2 - 1}$

17. $y = \dfrac{v^3 - 2v\sqrt{v}}{v}$

18. $h(r) = \dfrac{ae^r}{b + e^r}$

19. $y = \dfrac{s - \sqrt{s}}{s^2}$

20. $y = (z^2 + e^z)\sqrt{z}$

21. $f(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t}}{t - 3}$

22. $V(t) = \dfrac{4 + t}{te^t}$

23. $f(x) = \dfrac{x^2 e^x}{x^2 + e^x}$

24. $F(t) = \dfrac{At}{Bt^2 + Ct^3}$

25. $f(x) = \dfrac{A}{B + Ce^x}$

26. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

27–30 Determine $f'(x)$ y $f''(x)$ de cada una de las funciones siguientes.

27. $f(x) = (x^3 + 1)e^x$

28. $f(x) = \sqrt{x}\,e^x$

29. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + e^x}$

30. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

31–32 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto especificado.

31. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$, $(1, 0)$

32. $y = \dfrac{1 + x}{1 + e^x}$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

33–34 Determine las ecuaciones de las rectas tangentes y de las rectas normales a cada una de las curvas dadas en el punto que se especifica.

33. $y = 2xe^x$, $(0, 0)$

34. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$, $(1, 1)$

41. Si $f(x) = x^2/(1 + x)$, determine $f''(1)$.

42. Si $g(x) = x/e^x$, determine $g^{(n)}(x)$.

43. Suponga que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ y $g'(5) = 2$. Encuentre los valores siguientes

(a) $(fg)'(5)$ (b) $(f/g)'(5)$ (c) $(g/f)'(5)$

44. Suponga que $f(4) = 2$, $g(4) = 5$, $f'(4) = 6$ y $g'(4) = -3$. Encuentre $h'(4)$.

(a) $h(x) = 3f(x) + 8g(x)$ (b) $h(x) = f(x)g(x)$

(c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (d) $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x) + g(x)}$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

45. Si $f'(x) = e^x g(x)$, donde $g(0) = 2$ y $g'(0) = 5$, determine $f'(0)$.

46. Si $h(2) = 4$ y $h'(2) = -3$, encuentre

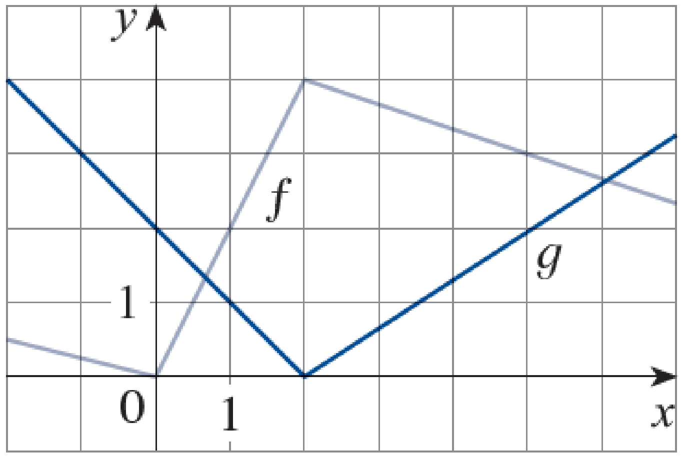
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\bigg|_{x=2}$$

47. Si $g(x) = xf(x)$, donde $f(3) = 4$ y $f'(3) = -2$, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g en el punto donde $x = 3$.

48. Si $f(2) = 10$ y $f'(x) = x^2 f(x)$ para toda x, encuentre $f''(2)$.

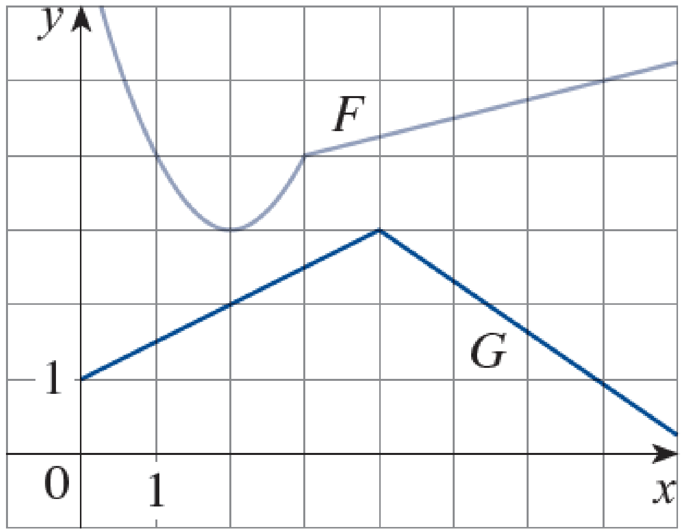
49. Si f y g son las funciones cuyas gráficas se ilustran, sean $u(x) = f(x)g(x)$ y $v(x) = f(x)/g(x)$.

(a) Encuentre $u'(1)$.   (b) Encuentre $v'(5)$.



50. Sea $P(x) = F(x)G(x)$ y $Q(x) = F(x)/G(x)$, donde F y G son las funciones cuyas gráficas se muestran

(a) Encuentre $P'(2)$.   (b) Encuentre $Q'(7)$.



51. Si g es una función derivable, encuentre una expresión para la derivada de cada una de las funciones siguientes.

(a) $y = xg(x)$

(b) $y = \dfrac{x}{g(x)}$

(c) $y = \dfrac{g(x)}{x}$

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

52. Si f es una función derivable, encuentre una expresión para la derivada de cada una de las funciones siguientes.

(a) $y = x^2 f(x)$

(b) $y = \dfrac{f(x)}{x^2}$

(c) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$

(d) $y = \dfrac{1 + xf(x)}{\sqrt{x}}$

53. ¿Cuántas rectas tangentes a la curva $y = x/(x + 1)$ pasan por el punto $(1, 2)$? ¿En qué puntos toca la curva estas rectas tangentes?

54. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$y = \frac{x - 1}{x + 1}$$

que sean paralelas a la recta $x - 2y = 2$.

55. Encuentre $R'(0)$, donde

$$R(x) = \frac{x - 3x^3 + 5x^5}{1 + 3x^3 + 6x^6 + 9x^9}$$

Sugerencia: en vez de encontrar primero $R'(x)$, sea $f(x)$ el numerador y $g(x)$ el denominador de $R(x)$ y calcule $R'(0)$ usando $f(0)$, $f'(0)$, $g(0)$ y $g'(0)$.

REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín