Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

CÁLCULO DIFERENCIAL

Centro de Ciencia Básica

Universidad Pontificia Bolivariana

ENCUENTRO 14.2

Sección 3.10: Aproximaciones lineales y diferenciales

Aproximaciones lineales y diferenciales

Incremento en y $\Delta y = f(x_o + h) - f(x_o)$

Incremento en x $\Delta x = x_f - x_i$ $\therefore$ f: final ; i: inicial

Si $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \approx dy$

$\Delta x = h = dx$

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = f'(x_o)$$

$dy = f'(x_o).dx$ $dy = f'(x_o).\Delta x$ $dy = f'(x_o).h$

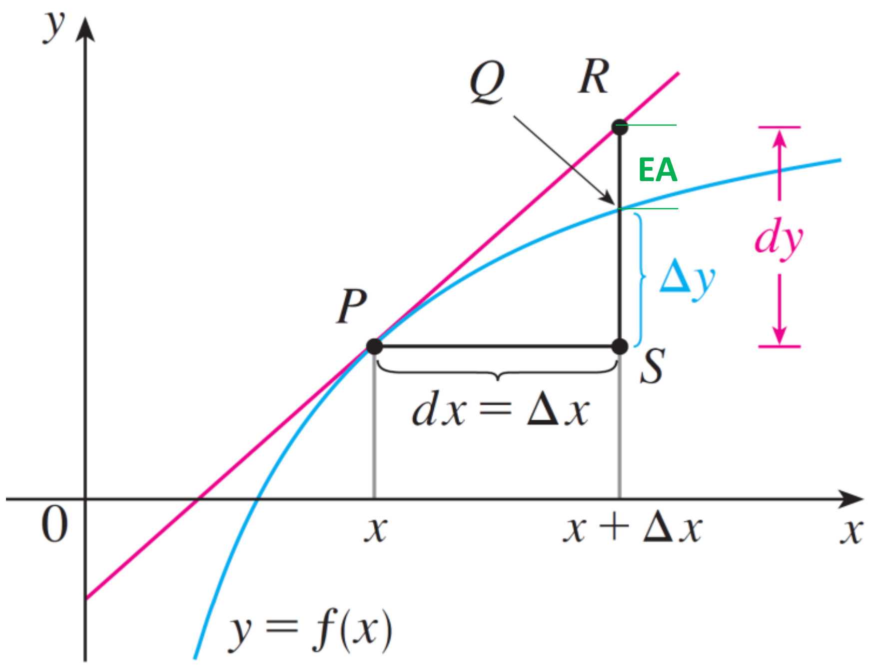
$f(x_o + h) - f(x_o) \approx f'(x_o).h$

$f(x_o + h) \approx f'(x_o).h + f(x_o)$

Error absoluto $E.A. = |\Delta y - dy|$

Error relativo a y: $\frac{dy}{y}$

Porcentaje de error relativo $\frac{dy}{y} * 100\%$



Una aproximación lineal importante para raíces y potencias es

$$(1 + x)^k \approx 1 + kx \qquad (x \text{ cercano a } 0;\ k \text{ cualquier número})$$

Esta aproximación, buena para valores de x suficientemente cercanos a cero, tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, cuando x es pequeña,

$$\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \qquad k = 1/2$$

$$\frac{1}{1 - x} = (1 - x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1 + x \qquad k = -1;\ \text{reemplazar } x \text{ por } -x.$$

$$\sqrt[3]{1 + 5x^4} = (1 + 5x^4)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}\left(5x^4\right) = 1 + \frac{5}{3}x^4 \qquad k = 1/3;\ \text{reemplazar } x \text{ por } 5x^4.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-1/2} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 \qquad k = -1/2;\ \text{reemplazar } x \text{ por } -x^2.$$

La aproximación $(1 + x)^k \approx 1 + kx$

15. Demuestre que la linealización de $f(x) = (1 + x)^k$ en $x = 0$ es $L(x) = 1 + kx$.

Ejemplo propuesto

Escriba una fórmula diferencial que estime el cambio en el volumen de una esfera cuando el radio cambia de r_0 a $r_0 + dr$.

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi {r_0}^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi (r_0 + dr)^3$$

$$dV = \frac{4}{3}\pi (r_0 + dr)^3 - \frac{4}{3}\pi {r_0}^3$$

$$dV = \frac{4}{3}\pi \left[(r_0 + dr)^3 - {r_0}^3\right]$$

$$dV = \frac{4}{3}\pi \left[{r_0}^3 \left(1 + \frac{dr}{r_0}\right)^3 - {r_0}^3\right]$$

De acuerdo con la aproximación: $(1 + x)^k \approx 1 + kx$

$$dV \approx \frac{4}{3}\pi \left[{r_0}^3 \left(1 + 3\frac{dr}{r_0}\right) - {r_0}^3\right]$$

$$dV \approx \frac{4}{3}\pi \left[{r_0}^3 + 3{r_0}^2\, dr - {r_0}^3\right]$$

$$dV \approx \frac{4}{3}\pi \left[3{r_0}^2\, dr\right]$$

$$dV \approx 4\pi {r_0}^2\, dr$$

Ejemplo propuesto

Escriba una fórmula diferencial que estime el cambio en el volumen de un cilindro circular recto cuando el radio cambia de r_0 a $r_0 + dr$ y la altura no cambia.

$$V_0 = \pi {r_0}^2\ h$$
$$V = \pi(r_0 + dr)^2\ h$$
$$dV = \pi(r_0 + dr)^2\ h - \pi {r_0}^2\ h$$
$$dV = \pi h\left[(r_0 + dr)^2 - {r_0}^2\right]$$
$$dV = \pi h\left[{r_0}^2\left(1 + \frac{dr}{r_0}\right)^2 - {r_0}^2\right]$$

De acuerdo con la aproximación: $(1 + x)^k \approx 1 + kx$

$$dV \approx \pi h\left[{r_0}^2\left(1 + 2\frac{dr}{r_0}\right) - {r_0}^2\right]$$
$$dV \approx \pi h\left[{r_0}^2 + 2r_0 dr - {r_0}^2\right]$$

$$dV \approx 2\pi h r_0 dr$$

EJEMPLO 6 Estimación con diferenciales

El radio r de un círculo crece de $a = 10$ m a 10.1 m (figura 3.52). Usar dA para estimar el crecimiento del área A del círculo. Estimar el área del círculo agrandado y comparar la estimación con el área real.

Solución Como $A = \pi r^2$, el incremento estimado es

$$dA = A'(a)\, dr = 2\pi a\, dr = 2\pi(10)(0.1) = 2\pi \text{ m}^2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A(10 + 0.1) &\approx A(10) + 2\pi \\ &= \pi(10)^2 + 2\pi = 102\pi. \end{aligned}$$

El área del círculo de radio 10.1 m es aproximadamente 102π m^2.

El área real es

$$\begin{aligned} A(10.1) &= \pi(10.1)^2 \\ &= 102.01\pi \text{ m}^2. \end{aligned}$$

El error en nuestra estimación es 0.01π m^2, que es la diferencia $\Delta A - dA$. ■

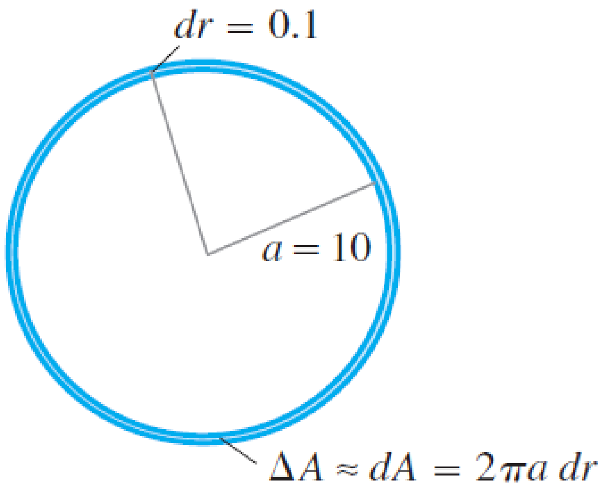


FIGURA 3.52 Cuando dr es pequeño en comparación con a, como sucede cuando $dr = 0.1$ y $a = 10$, la diferencial $dA = 2\pi a\, dr$ da una manera de estimar el área del círculo con radio $r = a + dr$ (ejemplo 6).

En el ejemplo 6 encontramos que

$$\Delta A = \pi(10.1)^2 - \pi(10)^2 = (102.01 - 100)\pi = (\underbrace{2\pi}_{dA} + \underbrace{0.01\pi}_{\text{error}}) \text{ m}^2$$

de manera que el error de aproximación es $\Delta A - dA = \epsilon\, \Delta r = 0.01\pi$ y $\epsilon = 0.01\pi/\Delta r = 0.01\pi/0.1 = 0.1\pi$ m.

EJEMPLO 7 Determinación de la profundidad de un pozo

Queremos calcular la profundidad en un pozo a partir de la ecuación $s = 16t^2$ midiendo el tiempo que tarda una roca pesada en golpear el agua en el fondo del pozo. ¿Qué tan sensible serán sus cálculos si se comete un error de 0.1 seg en la medida del tiempo?

Solución El tamaño de ds en la ecuación

$$ds = 32t\,dt$$

depende de qué tan grande es t. Si $t = 2$ seg, el cambio causado por $dt = 0.1$ es más o menos de

$$ds = 32(2)(0.1) = 6.4 \text{ pies}.$$

Tres segundos después, en $t = 5$ seg, el cambio causado por el mismo dt es

$$ds = 32(5)(0.1) = 16 \text{ pies}.$$

Para el error dado en la medida del tiempo, la profundidad estimada del pozo difiere de la profundidad real en una distancia que se incrementa a medida que el tiempo que tarda la roca en pegar en el agua del fondo del pozo es mayor. ■

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

EJEMPLO 8 Desbloqueo de arterias

Al final de la década de 1830 el fisiólogo francés Jean Poiseuille descubrió la fórmula que usamos hoy en día para predecir cuánto se tiene que expandir el radio de una arteria parcialmente obstruida para restaurar el flujo normal. Esta fórmula,

$$V = kr^4,$$

dice que el volumen V del fluido que corre por una cañería o tubo pequeño en una unidad de tiempo a presión constante, es una constante por el radio del tubo elevado a la cuarta potencia. ¿Cómo afecta a V un crecimiento de 10% de r?

Solución Las diferenciales de V y r se relacionan mediante la ecuación

$$dV = \frac{dV}{dr}\,dr = 4kr^3\,dr.$$

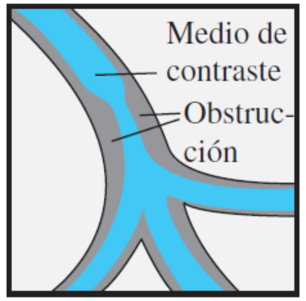
El cambio relativo en V es

$$\frac{dV}{V} = \frac{4kr^3\,dr}{kr^4} = 4\,\frac{dr}{r}.$$

El cambio relativo en V es 4 veces el cambio relativo en r; de manera que un crecimiento de 10% en r producirá 40% de crecimiento en el flujo. ■

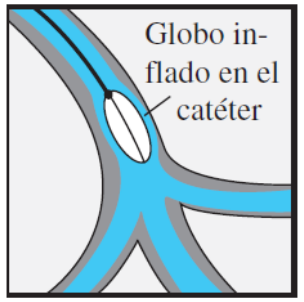
Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936



Angiografía

Se inyecta un medio de contraste en la arteria parcialmente obstruida para hacer visible el interior bajo los rayos X. Esto revela la localización y severidad de la obstrucción.



Angioplastía

Un globo colocado en la punta del catéter es inflado dentro de la arteria para dilatarla en el lugar obstruido.

V EJEMPLO 4 Se midió el radio de una esfera y se encontró que es 21 cm con un posible error en la medición de cuanto mucho 0.05 cm. ¿Cuál es el error máximo al usar este valor del radio para calcular el volumen de la esfera?

Universidad Pontificia Bolivariana
Fundada en 1936

SOLUCIÓN Si el radio de la esfera es r, entonces el volumen es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Si el error en el valor medido de r se denota por medio de $dr = \Delta r$, entonces el error correspondiente en el valor calculado de V es ΔV, el cual puede aproximarse mediante el diferencial

$$dV = 4\pi r^2\, dr$$

Cuando $r = 21$ y $dr = 0.05$, esto se convierte en

$$dV = 4\pi(21)^2\, 0.05 \approx 277$$

El error máximo en el volumen calculado es de alrededor de 277 cm^3.

NOTA Si bien el posible error en el ejemplo 4 puede parecer bastante grande, el **error relativo** ofrece un mejor panorama del error; se calcula dividiendo el error entre el volumen total:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2\, dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\,\frac{dr}{r}$$

Por esto, el error relativo en el volumen es aproximadamente tres veces el error relativo en el radio. En el ejemplo 4, el error relativo en el radio es $dr/r = 0.05/21 \approx 0.0024$ y produce un error relativo de alrededor de 0.007 en el volumen. Los errores pueden expresarse asimismo como **errores de porcentaje** de 0.24% en el radio y 0.7% en el volumen.

EJEMPLO 5 Aproximación por diferenciales

La arista de un cubo mide 30 cm con un error posible de ± 0.02 cm. ¿Cuál es el máximo error posible aproximado en el volumen del cubo?

Solución El volumen de un cubo es $V = x^3$, donde x es la longitud de la arista. Si Δx representa el error en la longitud de la arista, entonces el error correspondiente en el volumen es

$$\Delta V = (x + \Delta x)^3 - x^3.$$

Para simplificar la situación se utiliza la diferencial $dV = 3x^2\,dx = 3x^2\Delta x$ como una aproximación a ΔV. Así, para $x = 30$ y $\Delta x = \pm 0.02$ el máximo error aproximado es

$$dV = 3(30)^2(\pm 0.02) = \pm 54 \text{ cm}^3. \qquad \blacksquare$$

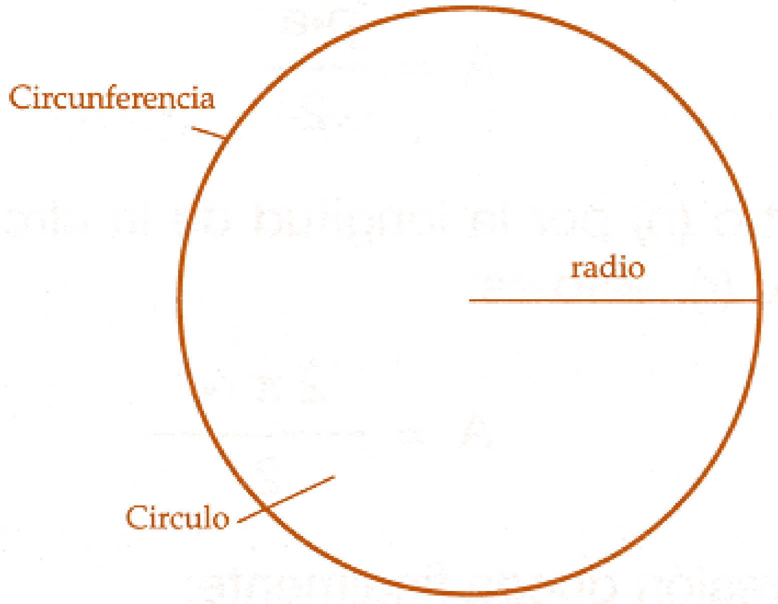
En el ejemplo 5, un error de alrededor de 54 cm^3 en el volumen para un error de 0.02 cm en la longitud de la arista parece considerable. Sin embargo, observe que si el error relativo (6) es $\Delta V/V$, entonces el error relativo *aproximado* es dV/V. Cuando $x = 30$ y $V = (30)^3 = 27\,000$, el error porcentual máximo es $\pm 54/27\,000 = \pm 1/500$, y el error porcentual máximo es aproximadamente de sólo $\pm 0.2\%$.

Ejemplos propuestos

34. Se da el radio de un disco circular como de 24 cm, con un error máximo en la medición de 0.2 cm.

(a) Utilice diferenciales para estimar el error máximo en el área calculada del disco.

(b) ¿Cuál es el error relativo? ¿Cuál es el porcentaje de error?



$r = 24\ cm \qquad dr = 0{,}2\ cm$

$$A = \pi r^2$$
$$dA = 2\pi r dr$$
$$dA = 2\pi \times 24 \times 0{,}2 = 30{,}16\ cm^2$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{2\pi r dr}{\pi r^2} = \frac{2dr}{r} = \frac{2 \times 0{,}2}{24} = 0{,}01\widehat{66}$$

$$\%\frac{dA}{A} = 1,\widehat{66}\%$$

Ejemplos propuestos

36. Utilice diferenciales para estimar la cantidad de pintura necesaria para aplicar una mano de 0.05 cm de espesor a un domo hemisférico que tiene un diámetro de 50 m.

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$dV = \frac{2}{3}\pi 3r^2 dr = 2\pi r^2 dr$$

$$dV = 2\pi (25\ m)^2 \times 0{,}05\ cm \times \frac{1\ m}{100\ cm}$$
$$= 1{,}963\ m^3$$

Universidad Pontificia Bolivariana

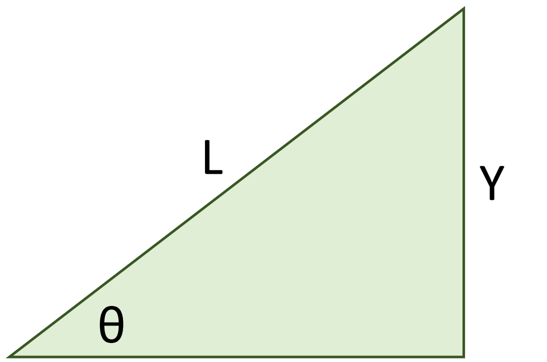
Fundada en 1936

Ejemplos propuestos

38. Se sabe que un lado de un triángulo rectángulo es de 20 cm de longitud, y se mide el ángulo opuesto como 30º, con un posible error de $\pm 1°$.

(a) Utilice diferenciales para estimar el error al calcular la longitud de la hipotenusa.

(b) ¿Cuál es el porcentaje de error?



$$y = 20\ cm$$
$$\theta = 30°$$
$$d\theta = \pm 1° \times \frac{\pi rad}{180°} = \pm\frac{\pi}{180}$$

(a) $sen\theta = \frac{y}{L} \quad \rightarrow \quad L = \frac{y}{sen\theta} = ycsc\theta$

$$dL = -ycsc\theta cot\theta d\theta$$

$$dL = -20csc30°cot30°\left(\pm\frac{\pi}{180}\right)$$

$$dL = \mp 20 \times 2 \times \sqrt{3} \times \frac{\pi}{180}$$

$$dL = \mp 1{,}21\ cm$$

(b) $\%\frac{dL}{L} = \frac{-ycsc\theta cot\theta d\theta}{ycsc\theta}$
$= -cot\theta d\theta \times 100\%$

$$\%\frac{dL}{L} = \mp 3{,}02\%$$

Ejercicios

33. Se encontró que la arista de un cubo es 30 cm, con un posible error en la medición de 0.1 cm. Utilice diferenciales para estimar el error máximo posible, el error relativo y el porcentaje de error al calcular (a) el volumen del cubo y (b) el área superficial del cubo.

35. La circunferencia de una esfera se midió como 84 cm, con un posible error de 0.5 cm.

(a) Use diferenciales para calcular el error máximo en el área superficial calculada. ¿Cuál es el error relativo?

(b) Utilice diferenciales para calcular el error máximo en el volumen calculado. ¿Cuál es el error relativo?

37. (a) Utilice diferenciales para determinar una fórmula para el volumen aproximado de un cascarón cilíndrico de altura h, radio interno r y espesor Δr.

(b) ¿Cuál es el error que hay al utilizar la fórmula del inciso (a)?

39. Si una corriente I pasa a través de un resistor con resistencia R, la ley de Ohm establece que la caída de voltaje es $V = RI$. Si V es constante y R se mide con un cierto error, utilice diferenciales para demostrar que el cálculo de I es aproximadamente el mismo (en magnitud) que el error relativo en R.

105. Una ventana tiene la forma de un cuadrado coronado por un semicírculo. La base de la ventana se mide como si tuviera un ancho de 60 cm, con un posible error de 0.1 cm. Utilice diferenciales para estimar el máximo error posible al calcular el área de la ventana.

Universidad Pontificia Bolivariana

Fundada en 1936

REFERENCIA

Stewart, J., Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, Cengage Learning. Octava edición, 2018.


¡Soy orgullosamente UPB! • Sede central Medellín