

1. 已知函数 $\sin x$ 与 $\cos x$ 在 $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ 处的值, 利用线性插值求 $\sin \frac{\pi}{12}$ 的近似值; 2 次插值求 $\cos \frac{\pi}{5}$ 的近似值。

2. 设 x_0, x_1, \dots, x_n 为 $n+1$ 个互异的插值节点, $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$ 为 Lagrange 插值基函数, 证明:

$$(1) \sum_{j=0}^n l_j(x) \equiv 1$$

$$(2) \sum_{j=0}^n x_j^k l_j(x) \equiv x^k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$(3) \sum_{j=0}^n (x_j - x)^k l_j(x) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$(4) \sum_{j=0}^n l_j(0) x_j^k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1, 2, \dots, n \\ (-1)^n x_0 x_1 \cdots x_n & k = n+1 \end{cases}$$