《计算方法》期末试题答案

学号	QQ2842305604
姓名	资源分享站

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									

注意行为规范 遵守考场纪律

主管领导审核签字

一.（10 分）当 x=1，-1，2 时，f（x）=0，-3，4，求 f（x）的二次插值多项式。

解：

$$x_0=1,x_1=-1,x_2=2,$$
$$f(x_0)=0,f(x_1)=-3,f(x_2)=4;$$
$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=-\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$$
$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{1}{6}(x-1)(x-2)$$
$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{1}{3}(x-1)(x+1)$$

则二次拉格朗日插值多项式为

$$L_2(x)=\sum_{k=0}^{2}y_kl_k(x)$$
$$=-3l_0(x)+4l_2(x)$$
$$=-\frac{1}{2}(x-1)(x-2)+\frac{4}{3}(x-1)(x+1)$$
$$=\frac{5}{6}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{7}{3}$$

二.（10 分）高斯消去法解方程组

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3=6 & (\mathrm{I})\\ 3x_1+5x_2+2x_3=5 & (\mathrm{II})\\ 4x_1+3x_2+30x_3=32 & (\mathrm{III})\end{cases}$$

把方程（I）乘（$-\frac{3}{2}$）后加到方程（II）上去，把方程（I）乘（$-\frac{4}{2}$）后加到方程（III）上去，即可消去方程（II）、（III）中的 x_1，得同解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 & \text{(I)} \\ 0.5x_2 - 4x_3 = -4 & \text{(II)} \\ -3x_2 + 22x_3 = 20 & \text{(III)} \end{cases}$$

将方程（II）乘（$\frac{3}{0.5}$）后加于方程（III），得同解方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 & \text{(I)} \\ 0.5x_2 - 4x_3 = -4 & \text{(II)} \\ -2x_3 = -4 & \text{(III)} \end{cases}$$

由回代公式（3.5）得 $x_3 = 2$ $x_2 = 8$ $x_1 = -13$

三. (10 分). 求三个不同的节点 x_1，x_2，x_3 和常数 c 使求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx c[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2)] \qquad (1)$$

具有尽可能高的代数精度.

解 不妨设 $x_0<x_1<x_2$.

本题有 4 个待定参数 c, x_0, x_1, x_2，令求积公式对 $f(x)=1, x, x^2, x^3$ 精确成立，即有

$$\begin{cases} 3c = 2 & (2) \\ c(x_0 + x_1 + x_2) = 0 & (3) \\ c(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) = \frac{2}{3} & (4) \\ c(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3) = 0 & (5) \end{cases}$$

由（2）得

$$c = \frac{2}{3}$$

于是（3）~（5）变为

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 0 & (6) \\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1 & (7) \\ x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0 & (8) \end{cases}$$

由（6）得

$$x_1 = -(x_0 + x_2) \qquad （9）$$

将其代入（7）和（8）得

$$\begin{cases} x_0^2 + (x_0 + x_2)^2 + x_2^2 = 1 \\ x_0^3 - (x_0 + x_2)^3 + x_2^3 = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_0^2 + x_0 x_2 + x_2^2 = \dfrac{1}{2} & (10) \\ x_0 x_2 (x_0 + x_2) = 0 & (11) \end{cases}$$

由（11）得，$x_0=0$ 或 $x_2=0$ 或 $x_0+x_2=0$.

当 $x_0=0$ 时，由（10）得 $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$，再由（9）得 $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$，与 $x_0<x_1$ 矛盾；

当 $x_2=0$ 时，由（10）得 $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$，再由（9）得 $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$，与 $x_1<x_2$ 矛盾；

当 $x_0+x_2=0$ 时，由（10）得 $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$， $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$，再由（9）得 $x_1=0$.

综上要使求积公式（1）至少具有 3 次代数精度当且仅当取

$$c = \frac{2}{3}, \quad x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

此时求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{2}{3}\left[f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] \tag{12}$$

将 $f(x)=x^4$ 代入（12）有 $\int_{-1}^{1} x^4\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\neq\frac{2}{3}\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4+0^4+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4\right]=\frac{1}{3}$.所以求积公式（12）的代数精度为 3.

四．（ 10 分 ）

$$\begin{cases} x_1+ax_2+ax_3=b_1 \\ 4ax_1+x_2=b_2 \\ ax_1+x_3=b_3 \end{cases}$$

（1） 分别写出 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的计算公式，

（2） 用迭代收敛的充要条件给出这两种迭代法都收敛的 a 的取值范围。

解：由方程组得，

$$\begin{gathered} x_1 = -ax_2 - ax_3 + b_1 \\ x_2 = -4ax_1 + b_2 \\ x_3 = -ax_1 + b_3 \end{gathered}$$

从而，Jacobi 迭代格式为：

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -ax_2^{(k)} - ax_3^{(k)} + b_1 \\ x_2^{(k+1)} &= -4ax_1^{(k)} + b_2 \quad , \quad k = 0,1,2,\cdots. \\ x_3^{(k+1)} &= -ax_1^{(k)} + b_3 \end{aligned}$$

迭代矩阵为：$B = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ -4a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix}$

设$|\lambda I - B| = 0$，求得，$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sqrt{5}\,|a|, \lambda_3 = -\sqrt{5}\,|a|$，故 $\rho(B) = \sqrt{5}\,|a|$。

另由 Jacobi 迭代格式，得 Gauss-Seidel 迭代格式为：

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -ax_2^{(k)} - ax_3^{(k)} + b_1 \\ x_2^{(k+1)} &= 4a^2 x_2^{(k)} + 4a^2 x_3^{(k)} - 4ab_1 + b_2 \text{，} \quad k = 0,1,2,\cdots. \\ x_3^{(k+1)} &= a^2 x_2^{(k)} + a^2 x_3^{(k)} - ab_1 + b_3 \end{aligned}$$

迭代矩阵为：$G = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ 0 & 4a^2 & 4a^2 \\ 0 & a^2 & a^2 \end{pmatrix}$

设$|\lambda I - G| = 0$， 求得，$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 5a^2$，故 $\rho(G) = 5a^2$。

另外，应保证方程组的系数矩阵非奇异，解得，$a \neq \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$。由迭代收敛的充要条件得，

Jacobi 迭代收敛$\Leftrightarrow |a| < \frac{\sqrt{5}}{5}$；Gauss-Seidel 迭代收敛$\Leftrightarrow |a| < \frac{\sqrt{5}}{5}$。

故，使得两种迭代法都收敛的 a 的取值范围是相同的：$|a| < \frac{\sqrt{5}}{5}$。

五． （10 分）

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，求 $\|A\|_1,\|A\|_\infty,\|A\|_F,\|A\|_2$。

六．（10 分）

依次用n=8的复化梯形公式、n=4的复化辛普森公式计算

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

解:首先计算出所需各节点的函数值,n=8时，

$$h=\frac{1}{8}=0.125$$

由复化梯形公式可得如下计算公式：

$$\begin{aligned} T_8 &= \frac{1}{16}\big[f(0)+2f(0.125)+2f(0.25)+2f(0.375)+2f(0.5) \\ &\quad +2f(0.625)+2f(0.75)+2f(0.875)+f(1)\big] \\ &= 0.9456909 \end{aligned}$$

由复化辛普森公式可得如下计算公式

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{1}{24}\big[f(0)+f(1)+2(f(0.25)+f(0.5)+f(0.75)) \\ &\quad +4(f(0.125)+f(0.375)+f(0.625)+f(0.875))\big] \\ &= 0.9460832 \end{aligned}$$

（积分准确值I=0.9460831）

七． （10 分）

取步长 $h=0.2$，用标准 4 阶 Runge-Kutta 公式：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2) \\ k_3 = hf(x_n + h/2, y_n + k_2/2) \\ k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{cases}$$

求初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + \dfrac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ **的数值解** y_1, y_2**，结果保留小数点后 2 位。**

八.（10 分）

用最小二乘法求一个形如 $y = ax^2 + b$ 的经验公式，使它与下列数据拟合

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

解： 取 $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x^2$，

拟合函数为 $y = b\varphi_0(x) + a\varphi_1(x) = b + ax^2$

法方程为：

$$\begin{cases} 5b + 5327a = 271.4 \\ 5327a + 7277699b = 369321.5 \end{cases}$$

得： $a = 0.050351, b = 0.9726045$

拟合函数为 $y = 0.0500351x^2 + 0.9726045$

哈工大软件分享中心

群号：626648181

扫一扫二维码，加入群聊。

哈工大 2 年 秋 季学期

《计算方法》期末试题答案

学号	QQ2842305604
姓名	资源分享站

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

一.（10 分）设 $f(x)=x^4$，试用 Lagrange 插值余项定理写出以−1，0，1，2 为插值节点的三次插值多项式.

解 设 $f(x)$以−1，0，1，2 为插值节点的三次 Lagrange 插值多项式为 $L_3(x)$，由 Lagrange 插值余项定理有

$$R_3(x)=f(x)-L_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)$$

$$=(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)$$

因而

$$L_3(x)=f(x)-(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)$$
$$=x^4-x(x+1)(x-1)(x-2)=2x^3+x^2-2x$$

二.（10 分）确定 $\int_0^h f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+\alpha h^2[f'(0)-f'(h)]$ 中的待定参数，使其代数精确度尽量高，并指明求积公式所具有代数精度.

分析 求解这类题目，一般都应按照求积公式代数精度的定义去作.即先列出参数满足的代数方程组，解出这些待定参数，然后用所确定的求积公式判断所具有的代数精度.

解

求积公式中只含有一个待定参数α，当 $f(x)=1$，x 时，有

$$\int_0^h 1\mathrm{d}x=\frac{h}{2}[1+1]+0$$

$$\int_0^h x\mathrm{d}x = \frac{h}{2}[0+h] + \alpha h^2(1-1)$$

故令 $f(x)=x^2$ 时求积公式精确成立，即

$$\int_0^h x^2 dx = \frac{h}{2}[0+h^2] + \alpha h^2[2\times 0 - 2h]$$

解得 $\alpha = \frac{1}{12}$.

将 $f(x)=x^3$ 代入上述确定的求积公式，有

$$\int_0^h x^3 dx = \frac{h}{2}[0+h^3] + \frac{h^2}{12}[0-3h^2]$$

这说明求积公式至少具有 3 次代数精确度.再令 $f(x)=x^4$，代入求积公式时有

$$\int_0^h x^4 dx \neq \frac{h}{2}[0+h^4] + \frac{h^2}{12}[0-4h^3]$$

故所建立求积公式具有 3 次代数精度.

三. (10 分). 求形如 $y=a\mathrm{e}^{bx}$（a，b 为常数且 a>0）的经验公式，使它能和下表数据相似合：

x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

分析 经验公式 $y=a\mathrm{e}^{bx}$ 不是多项式，应设法将其变为多项式，本题可通过取对数的办法将 $y=a\mathrm{e}^{bx}$ 变为 $\ln y=\ln a+bx$，若令 $\bar{y}=\ln y,\quad A=\ln a$，则有 $\bar{y}=A+bx$，通过直线拟合的最小二乘法求出 $\bar{y}=A+bx$ 后，再变回 $y=a\mathrm{e}^{bx}$ 即可.

解 对经验公式 $y=a\mathrm{e}^{bx}$ 两边取对数，得

$$\ln y=\ln a+bx$$

作变换 $\bar{y}=\ln y,\quad A=\ln a$，则有 $\bar{y}=A+bx$，为了用最小二乘法求出 A、b，需将（x_i, y_i）转化为 $(x_i,\bar{y}_i)$，现将转化数值表列出：

x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
$\bar{y}_i$	1.629	1.756	1.876	2.008	2.135

$N=5,\quad \sum_{i=1}^{5}x_i=7.5,\quad \sum_{i=1}^{5}x_i^2=11.875,\quad \sum_{i=1}^{5}\bar{y}_i=9.404,\quad \sum_{i=1}^{5}x_i\bar{y}_i=14.422$

故有正则方程组

$$\begin{cases}5A\quad+7.5b=9.404\\7.5A+11.875b=14.422\end{cases}$$

解得 A=1.122 4，b=0.505 6，a=e^A=3.072，于是得最小二乘拟合曲线

$$y=3.072\mathrm{e}^{0.505\,6x}$$

四．（ 10 分 ）对方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=1\\x_1+x_2+x_3=2\\2x_1+x_2+x_3=3\end{cases}$$

分别讨论用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解的收敛性.

分析 一般要证明某一种迭代法是收敛的，可利用学过的多种充分条件，也可用充要条件，但若要证明某一种迭代法是发散的，则只能用充要条件. 观察本题的系数阵的特点，它既不严格对角占优，也不正定对称，因此应首先分别写出 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵 $\boldsymbol{B}$，可利用迭代法收敛的充要条件，即通过谱半径 $\rho(\boldsymbol{B})$ 是否小于 1 来判定收敛性.

解 由迭代法的基本收敛定理 7．1 知，迭代法是否收敛等价于迭代矩阵

的谱半径 $\rho(\boldsymbol{B})$ 是否小于 1，为此，下面先分别求迭代矩阵.

由系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & & \\ 1 & 0 & \\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 2 & -2\\ & 0 & 1\\ & & 0\end{bmatrix}$$
$$=\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}$$

所以 $$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}0 & & \\ 1 & 0 & \\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}0 & 2 & -2\\ & 0 & 1\\ & & 0\end{bmatrix}$$

则 Jacobi 迭代法的迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}_J=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

其特征方程为

$$\left|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_J\right|=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & -2\\ 1 & \lambda & 1\\ 2 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3=0$$

因此有 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，即 $\rho(\boldsymbol{B}_J)=0<1$，所以 Jacobi 迭代法收敛.

而对于 Gauss-Seidel 迭代法，由

$$\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

容易求得 $$(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

则 Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}_G = -(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

其特征方程为

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}_G| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)^2 = 0$$

因此有 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$，即 $\rho(\boldsymbol{B}_G) = 2 > 1$，所以 Gauss-Seidel 迭代法发散.

五．（10 分）

设 $A = \begin{bmatrix} -2120 & -9999 & -8888 \\ -9999 & -2020 & -7777 \\ -8888 & -7777 & -1920 \end{bmatrix}$，$x = (-8,-7,-6,-5)^T$，

求 $\|\boldsymbol{A}\|_1, \|\boldsymbol{A}\|_\infty, \|\boldsymbol{x}\|_1, \|\boldsymbol{x}\|_2, \|\boldsymbol{x}\|_\infty$。

六．（10 分）

取步长 $h = 0.2$，**用标准 4 阶 Runge-Kutta 公式：**

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2) \\ k_3 = hf(x_n + h/2, y_n + k_2/2) \\ k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{cases}$$

求初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y + x + 1, \quad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的数值解 y_1, y_2，**结果保留小数点后 4 位。**

七.(10 分)

利用适当的迭代格式证明 $\lim\limits_{k\to\infty}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{k}=2$.

证明：考虑迭代格式 $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{k+1} = \sqrt{2+x_k}, \quad k=0,1,2,\cdots \end{cases}$，则 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，……，

$$x_k = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{k}.$$

令 $\varphi(x)=\sqrt{2+x}$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}$.

当 $x\in[0,2]$ 时，$\varphi(x)\in[\varphi(0),\varphi(2)]=\left[\sqrt{2},2\right]\subset[0,2]$，并且 $\dfrac{1}{4}\le\varphi'(x)\le\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

因而迭代格式产生的序列收敛于方程 $x=\sqrt{2+x}$ 在 $[0,2]$ 内的唯一根 $x^*=2$.

八. (10 分)

应用牛顿法于方程 $x^n-a=0(a>0)$，试导出求 $x=\sqrt[n]{a}$ 的迭代公式

解：令 $f(x)=x^n-a$，则 $x=\sqrt[n]{a}$ 为方程 $f(x)=x^n-a=0$ 的根，且 $f^{'}(x)=nx^{n-1}$

故求 $x=\sqrt[n]{a}$ 的牛顿迭代格式为 $\quad x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^n-a}{nx_k^{n-1}}=(1-\dfrac{1}{n})x_k+\dfrac{a}{nx_k^{n-1}}$.

因为 $f(0)=-a<0$，由 $f(x)$ 的连续性知，在 0 点的邻域内存在一点 $x_L>0$，使 $f(x_L)<0$，又取 $x_R=(1+a)$，则 $f(x_R)>0$. 在 $[x_L,x_R]$ 上，$f^{'}(x)=nx^{n-1}\ne0$，$f^{''}(x)=n(n-1)x^{n-2}$ 不变号，取初始值 x_0 满足 $f(x_0)f^{''}(x_0)>0$，则牛顿迭代序列收敛于 $f(x)=x^n-a$ 的根，即 $x=\sqrt[n]{a}$

HIT大物实验交流群2019

扫一扫二维码，加入群聊。