哈工大 2016 年 春 季学期

《计算方法》期末试题答案

学号	QQ2842305604
姓名	资源分享站

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

一．（10 分）

设分段多项式 $S(x)=\begin{cases} x^3+x^2 & 0\le x\le 1 \\ 2x^3+bx^2+cx-1 & 1\le x\le 2 \end{cases}$ 是以 $0,1,2$ 为节点的三次样条函数，试确定系数 b,c 的值.

解 由 $S(1)=2$ 得 $2+b+c-1=2$，$\therefore b+c=1$；

$S'(x)=\begin{cases} 3x^2+2x & 0<x<1 \\ 6x^2+2bx+c & 1<x<2 \end{cases}$，由 $S'(1)=5$ 得 $6+2b+c=5$，$\therefore 2b+c=-1$；

联立两方程，得 $b=-2, c=3$，

且此时 $S''(x)=\begin{cases} 6x+2 & 0<x<1 \\ 12x+2b & 1<x<2 \end{cases}$，$S''_-(1)=8=S''_+(1)$，

$S(x)$ 是以 $0,1,2$ 为节点的三次样条函数.

二.（10 分）用最小二乘法求形如 $y=a+bx^2$ 的多项式，使与下列数据相拟合：

x	19	25	31	38	44
y	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

解 拟合曲线中的基函数为 $\varphi_0(x)=1$，$\varphi_0(x)=x^2$，

其法方程组为 $\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \end{pmatrix}$，

其中 $(\varphi_0,\varphi_0)=5$，$(\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)=5327$，$(\varphi_1,\varphi_1)=7277699$，$(f,\varphi_0)=271.4$，

$(f,\varphi_1)=369321.5$，解之得 $\begin{cases} a=\dfrac{532}{547}=0.9726 \\ b=\dfrac{285}{5696}=0.05 \end{cases}$，$\therefore y=0.9726+0.05x^2$.

三. (10 分).

确定下列求积公式中的特定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度：

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h);$$

令 $f(x)=1$，则 $2h = A_{-1} + A_0 + A_1$

令 $f(x)=x$，则 $0 = -A_{-1}h + A_1 h$

令 $f(x)=x^2$，则 $\frac{2}{3}h^3 = h^2 A_{-1} + h^2 A_1$

从而解得 $\begin{cases} A_0 = \frac{4}{3}h \\ A_1 = \frac{1}{3}h \\ A_{-1} = \frac{1}{3}h \end{cases}$

令 $f(x)=x^3$，则 $\int_{-h}^{h} f(x)dx = \int_{-h}^{h} x^3 dx = 0$ $\quad A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h) = 0$

故 $\int_{-h}^{h} f(x)dx = A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$ 成立。令 $f(x)=x^4$，则

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = \int_{-h}^{h} x^4 dx = \frac{2}{5}h^5$$

$$A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h) = \frac{2}{3}h^5$$

故此时，$\int_{-h}^{h} f(x)dx \neq A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$

故 $\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$

具有 3 次代数精度。

四．（10 分） 已知数据表

x	1.1	1.3	1.5
e^x	3.0042	3.6693	4.4817

试分别用辛甫生法与复化梯形法计算积分$\int_{1.1}^{1.5} e^x dx$．

解 辛甫生法

$$\int_{1.1}^{1.5} e^x dx \approx \frac{1.5-1.1}{6}(3.0042+4\times 3.6693+4.4817)=1.47754;$$

复化梯形法

$$\int_{1.1}^{1.5} e^x dx \approx \frac{0.2}{2}(3.0042+2\times 3.6693+4.4817)=1.48245.$$

五．（10 分）

设 $A=\begin{bmatrix} -2014 & -9999 & -8888 \\ -9999 & -2013 & -7777 \\ -8888 & -7777 & -2012 \end{bmatrix}$， $x=(-9,-8,-7,-6)^T$，

求 $\|A\|_1,\|A\|_\infty,\|x\|_1,\|x\|_2,\|x\|_\infty$。

六．（10 分） 分别用雅可比迭代与高斯-塞德尔迭代求解下列方程组：

$$\begin{cases} x_1+5x_2-3x_3=2 \\ 5x_1-2x_2+x_3=4 \\ 2x_1+x_2-5x_3=-11 \end{cases}$$

（2）其雅可比迭代格式为 $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 2 - 5x_2^{(k)} + 3x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = -2 + \dfrac{5}{2}x_1^{(k)} + \dfrac{1}{2}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{11}{5} + \dfrac{2}{5}x_1^{(k)} + \dfrac{1}{5}x_2^{(k)} \end{cases}$，取初始向量 $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，迭代发散；

其高斯-塞德尔迭代格式为 $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 2 - 5x_2^{(k)} + 3x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = -2 + \dfrac{5}{2}x_1^{(k+1)} + \dfrac{1}{2}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{11}{5} + \dfrac{2}{5}x_1^{(k+1)} + \dfrac{1}{5}x_2^{(k+1)} \end{cases}$，取初始向量 $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，迭代发散.

七. （10 分）

用欧拉方法求解初值问题 $y' = ax + b$， $y(0) = 0$：

（1） 试导出近似解 y_n 的显式表达式；

解 （1）其显示的 Euler 格式为：

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) = y_{n-1} + h\cdot(ax_{n-1} + b)$$

故 $y_{n-1} = y_{n-2} + h\cdot(ax_{n-2} + b)$

……

$y_1 = y_0 + h\cdot(ax_0 + b)$

将上组式子左右累加，得

$$y_n = y_0 + ah(x_0 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1}) + nhb$$
$$= ah(0 + h + 2h \cdots + (n-2)h + (n-1)h) + nhb$$
$$= ah^2 n(n-1)/2 + nhb$$

八. （10 分） 考察求解方程 $12-3x+2\cos x=0$ 的迭代法 $x_{k+1}=4+\frac{2}{3}\cos x_k$

（1） （1） 证明它对于任意初值 x_0 均收敛；

（2） 证明它具有线性收敛性；

证 （1）迭代函数为 $g(x)=4+\frac{2}{3}\cos x$，

$\forall x\in(-\infty,+\infty)$， $g(x)\in(-\infty,+\infty)$；

又 $|g'(x)|=\left|-\frac{2}{3}\sin x\right|\le\frac{2}{3}<1$，

由压缩映像原理知 $\forall x_0$， $x_{k+1}=4+\frac{2}{3}\cos x_k$ 均收敛；

（2）$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*}=g'(x^*)=-\frac{2}{3}\sin x^*\neq 0$（否则，若 $\sin x^*=0$，则 $x^*=m\pi,\ m\in Z$

不满足方程），所以迭代 $x_{k+1}=4+\frac{2}{3}\cos x_k$ 具有线性收敛速度；