

# 数据库系统

哈尔滨工业大学（深圳）

# 第14讲 函数依赖及其公理定理



# 函数依赖及其公理/定理

## 基本内容

1. 函数依赖
2. 完全函数依赖与传递函数依赖
3. 关于函数依赖的公理和定理
4. 函数依赖集的最小覆盖

## 重点与难点

- 一组概念：函数依赖、部分函数依赖和完全函数依赖、传递函数依赖、候选键、非主属性、逻辑蕴涵、闭包、属性闭包、覆盖、最小覆盖等
- 关于函数依赖的公理和定理，相关的证明
- 求属性闭包的算法、求最小覆盖的算法



# 函数依赖

## [Definition] 函数依赖:

设 $R(U)$ 是属性集合 $U=\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 上的一个关系模式， $X, Y$ 是 $U$ 上的两个子集，若对 $R(U)$ 的任意一个可能的关系 $r$ ， $r$ 中不可能有两个元组满足在 $X$ 中的属性值相等而在 $Y$ 中的属性值不等，则称“ $X$ 函数决定 $Y$ ”或“ $Y$ 函数依赖于 $X$ ”，记作 $X \rightarrow Y$ 。

示例： $U = \{\text{学号}, \text{姓名}, \text{年龄}, \text{班号}, \text{班长}, \text{课号}, \text{成绩}\}$

- 学号  $\rightarrow$  { 姓名, 年龄 }
- 班号  $\rightarrow$  班长
- { 学号, 课号 }  $\rightarrow$  成绩

设计关系模式时，除给出属性全集外，还需给出数据依赖集合

注：函数依赖的分析取决于对问题领域的限定和分析，取决于对业务规则的正确理解。例如：问题领域中，学生是没有重名的，则有：“年龄”和“家庭住址”都函数依赖于“姓名”。而在另一个问题领域中，学生是有重名的，则上述函数依赖是不成立的。



# 函数依赖

示例：下表中函数依赖有哪些呢？

属性A	属性B	属性C
1	2	3
4	2	3
5	3	3

属性A	属性B	属性C	属性D
a1	b1	c1	d1
a1	b2	c1	d2
a2	b2	c2	d2
a2	b3	c2	d3
a3	b3	c2	d4



## 函数依赖

示例：下表就是问题领域, 则存在的函数依赖有哪些呢?

✓ 下表存在的函数依赖有:  $A \rightarrow B$ ,  $B \rightarrow C$

属性A	属性B	属性C
1	2	3
4	2	3
5	3	3

✓ 下表存在的函数依赖有:  $A \rightarrow C$ ,  $D \rightarrow B$

属性A	属性B	属性C	属性D
a1	b1	c1	d1
a1	b2	c1	d2
a2	b2	c2	d2
a2	b3	c2	d3
a3	b3	c2	d4



## 函数依赖的特性

- (1) 对  $X \rightarrow Y$ ，但  $Y \not\subset X$ ，则称  $X \rightarrow Y$  为 **非平凡的函数依赖**；
- (2) 若  $X \rightarrow Y$ ，则任意两个元组，若  $X$  上值相等，则  $Y$  上值必然相等，则称  $X$  为决定因素；
- (3) 若  $X \rightarrow Y$ ， $Y \rightarrow X$ ，则记作  $X \leftrightarrow Y$ ；
- (4) 若  $Y$  不函数依赖于  $X$ ，则记作  $X \not\rightarrow Y$ ；
- (5)  $X \rightarrow Y$ ，有基于模式  $R$  的，则要求对任意的关系  $r$  成立；有基于具体关系  $r$  的，则要求对某一关系  $r$  成立；
- (6) 如一关系  $r$  的某属性集  $X$ ， $r$  中根本没有  $X$  上相等的两个元组存在，则  $X \rightarrow Y$  恒成立；



# 函数依赖

练习：请分析下列属性集上的函数依赖

- 学生(学号, 姓名, 班级, 课号, 课程名, 成绩, 教师, 教师职务)
- 员工(员工码, 姓名, 出生日期, 联系电话, 最后学历, 毕业学校, 培训日期, 培训内容)
- 图书(书号, 书名, 出版日期, 出版社, 书架号, 房间号)
- 客户(客户号, 客户名称, 类别, 联系电话, 产品编码, 产品名称, 数量, 要货日期)





# 函数依赖

练习：请分析下列属性集上的函数依赖

● 学生(学号, 姓名, 班级, 课号, 课程名, 成绩, 教师, 教师职务)

✓学号  $\rightarrow$  {姓名, 班级}; 课号  $\rightarrow$  课程名; {学号, 课号}  $\rightarrow$  成绩

✓教师  $\rightarrow$  教师职务

✓{班级, 课号}  $\rightarrow$  教师

{班级, 课号}  $\rightarrow$  教师;  
课号  $\rightarrow$  教师;  
{学号, 课号}  $\rightarrow$  教师 究竟选哪一个取  
决于对问题领域的理解

● 客户(客户号, 客户名称, 类别, 联系电话, 产品编码, 产品名称, 数量, 要货日期)

✓客户号  $\rightarrow$  {客户名称, 类别}

✓产品编码  $\rightarrow$  产品名称

✓{客户号, 产品编码, 要货日期}  $\rightarrow$  数量

本质上,函数依赖  
是对属性之间取值  
的一种约束,  
是一种数据依赖



# 完全函数依赖与传递函数依赖

[Definition] 部分或完全函数依赖：

在 $R(U)$ 中，若 $X \rightarrow Y$ 并且对于 $X$ 的任何真子集 $X'$ 都有 $X' \not\rightarrow Y$ ，则称 $Y$ 完全函数依赖于 $X$ ，记为： $X \xrightarrow{f} Y$ ，否则称 $Y$ 部分函数依赖于 $X$ ，记为： $X \xrightarrow{p} Y$

示例： $U = \{\text{学号}, \text{姓名}, \text{年龄}, \text{班号}, \text{班长}, \text{课程号}, \text{成绩}\}$

- $\{\text{学号}, \text{课程号}\} \xrightarrow{f} U$
- $\{\text{学号}, \text{课程号}\} \xrightarrow{p} \text{姓名}$
- $\{\text{学号}, \text{课程号}\} \xrightarrow{f} \text{成绩}$



# 完全函数依赖与传递函数依赖

## 练习：分析下列模式的完全或部分函数依赖

- 学生(学号, 姓名, 班级, 课号, 课程名, 成绩, 教师, 教师职务)
- 员工(员工码, 姓名, 出生日期, 联系电话, 最后学历, 毕业学校, 培训日期, 培训内容)
- 图书(书号, 书名, 出版日期, 出版社, 书架号, 房间号)
- 客户(客户号, 客户名称, 类别, 联系电话, 产品编码, 产品名称, 数量, 要货日期)
- 学生(学号, 姓名, 系号, 系主任)



# 完全函数依赖与传递函数依赖

## 练习：分析下列模式的完全或部分函数依赖

- 学生(学号, 姓名, 班级, 课号, 课程名, 成绩, 教师, 教师职务)
  - {学号, 课号}  $\xrightarrow{f}$  U; 但 {学号, 课号}  $\xrightarrow{p}$  姓名
  - {学号, 课号}  $\xrightarrow{p}$  课程名
- 员工(员工码, 姓名, 出生日期, 联系电话, 最后学历, 毕业学校, 培训日期, 培训内容)
  - {员工码, 培训日期}  $\xrightarrow{f}$  U;
  - {员工码, 培训日期}  $\xrightarrow{p}$  { 姓名, 出生日期 };
- 图书(书号, 书名, 出版日期, 出版社, 书架号, 房间号)
- 客户(客户号, 客户名称, 类别, 联系电话, 产品编码, 产品名称, 数量, 要货日期)
- 学生(学号, 姓名, 系号, 系主任)



# 完全函数依赖与传递函数依赖

## [Definition] 传递函数依赖

在 $R(U)$ 中，若 $X \rightarrow Y$ ， $Y \rightarrow Z$  且  $Y \not\subseteq X, Z \not\subseteq Y, Z \not\subseteq X, Y \not\rightarrow X$ ，则称 $Z$ 传递函数依赖于 $X$ 。

示例： $U = \{\text{学号}, \text{姓名}, \text{年龄}, \text{班号}, \text{班长}, \text{课号}, \text{成绩}\}$

□ 学号  $\rightarrow$  班号；班号  $\rightarrow$  班长

□ 学号  $\rightarrow$  班长

注：“班长”是传递依赖于“学号”的。

示例：学生(学号，姓名，系号，系主任)

□ 学号  $\rightarrow$  系号；系号  $\rightarrow$  系主任

□ 学号  $\rightarrow$  系主任

注：“系主任”是传递依赖于“学号”的。

**传递依赖存在着非受控冗余！**

学号	姓名	班级	班主任	班主任职称
2003510101	张三	035101	张林	讲师
2003510102	李四	035101	张林	讲师
2003510103	王五	035101	张林	讲师
2003510104	李六	035101	张林	讲师
2003510105	张四	035101	张林	讲师
2003510106	张五	035101	张林	讲师
2003510107	张小三	035101	张林	讲师
2003510108	张小四	035101	张林	讲师
2003510109	李小三	035101	张林	讲师
2003510110	李小四	035101	张林	讲师
2003520201	周三	035202	郑东	副教授
2003520202	赵四	035202	郑东	副教授
2003520203	赵五	035202	郑东	副教授
2003520204	赵六	035202	郑东	副教授
2003520205	钱四	035202	郑东	副教授
2003520206	强五	035202	郑东	副教授
2003520207	梁小三	035202	郑东	副教授
2003520208	梁小四	035202	郑东	副教授
2003520209	王小三	035202	郑东	副教授
2003520210	王小四	035202	郑东	副教授



# 完全函数依赖与传递函数依赖

## 练习：分析下列模式的传递函数依赖

- 商店(商店, 商品, 商品经营部, 经营部经理)
  - {商店, 商品} → 商品经营部 ; {商店, 商品经营部} → 经营部经理
  - {商店, 商品} → 经营部经理
- 学生(学号, 姓名, 班级, 班主任, 课号, 课程名, 成绩, 教师, 教师职务)
  - 学号 → 班级 ; 班级 → 班主任 ; {学号, 课号} → 教师 ; 教师 → 教师职务
  - 学号 → 班主任 ; {学号, 课号} → 教师职务
- 员工(员工码, 姓名, 部门, 部门经理)
  - 员工码 → 部门 ; 部门 → 部门经理
  - 员工码 → 部门经理
- 图书(书号, 书名, 出版日期, 出版社, 书架号, 房间号, 管理员)
- 客户(客户号, 客户名称, 类别, 联系电话, 产品编码, 产品名称, 数量, 要货日期)



# 函数依赖相关的几个重要概念

## [Definition] 候选键

设 $K$ 为 $R(U)$ 中的属性或属性组合，若 $K \xrightarrow{f} U$ ，则称 $K$ 为 $R(U)$ 上的**候选键** (Candidate Key)。

**说明：**

- (1) 可任选一候选键作为 $R$ 的**主键** (Primary Key)；
- (2) 包含在任一候选键中的属性称**主属性** (Prime Attribute), 其他属性称**非主属性**；
- (3) 若 $K$ 是 $R$ 的一个候选键， $S \supset K$ ，则称 $S$ 为 $R$ 的一个超键 (Super Key)。

**示例：**  $U = \{\text{学号}, \text{姓名}, \text{年龄}, \text{班号}, \text{班长}, \text{课号}, \text{成绩}\}$

**□**  $\{\text{学号}, \text{课号}\} \xrightarrow{f} U$



# 函数依赖相关的几个重要概念

## 练习：找候选键与非主属性

- 学生(学号, 年龄, 家庭住址, 课程号, 成绩, 教师, 教师职务)

候选键是??，非主属性是??

- 邮编(城市名, 街道名, 邮政编码)

候选键是??，非主属性是??

- 商店(商店, 商品, 商品经营部, 商品经营部经理)

候选键是??，非主属性是??

- 学生(学号, 姓名, 所属系别, 系主任)

候选键是??，非主属性是??

找候选键需  
要先找出函  
数依赖集合





## 函数依赖相关的几个重要概念

### [Definition] 逻辑蕴涵

设  $F$  是关系模式  $R(U)$  中的一个函数依赖集合， $X, Y$  是  $R$  的属性子集，如果从  $F$  中的函数依赖能够推导出  $X \rightarrow Y$ ，则称  $F$  逻辑蕴涵  $X \rightarrow Y$ ，或称  $X \rightarrow Y$  是  $F$  的逻辑蕴涵。记作  $F \models X \rightarrow Y$ 。

说明：

□ 设  $F$  是关系模式  $R(U)$  的函数依赖集， $X \rightarrow Y$  是一个函数依赖，若对  $R$  中的每个满足  $F$  的关系  $r$ ，能够用逻辑推理的方法推出  $r$  也满足  $X \rightarrow Y$ ，则称  $F \models X \rightarrow Y$ 。



# 函数依赖相关的几个重要概念

## [Definition]闭包

被 $F$ 逻辑蕴涵的所有函数依赖集合称为 $F$ 的闭包(**Closure**)，记作  $F^+$ 。

说明：

□若 $F^+ = F$ ，则说 $F$ 是一个全函数依赖族(函数依赖完备集)。



# 关于函数依赖的公理和定理

## [Armstrong's Axioms A1~A3]

设 $R(U)$ 是属性集 $U=\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 上的一个关系模式， $F$ 为 $R(U)$ 的一组函数依赖，记为 $R(U, F)$ ，则有如下规则成立：

□[A1]自反律(Reflexivity rule)：若 $Y \subseteq X \subseteq U$ ，则 $X \rightarrow Y$ 被 $F$ 逻辑蕴涵。

□[A2]增广律(Augmentation rule)：若 $X \rightarrow Y \in F$ ，且 $Z \subseteq U$ ，则 $XZ \rightarrow YZ$ 被 $F$ 逻辑蕴涵。

□[A3]传递律(Transitivity rule)：若 $X \rightarrow Y \in F$ ，且 $Y \rightarrow Z$ ，则 $X \rightarrow Z$ 被 $F$ 逻辑蕴涵。



## 关于函数依赖的公理和定理

[引理2]由Armstrong 's Axiom可推出如下结论：

- (a)合并律(Union Rule)：若 $X \rightarrow Y$ 且 $X \rightarrow Z$ , 则 $X \rightarrow YZ$ 。
- (b)伪传递律(Pseudo Transitivity)：若 $X \rightarrow Y$ 且 $WY \rightarrow Z$ , 则 $XW \rightarrow Z$ 。
- (c)分解律(Decomposition Rule)：若 $X \rightarrow Y$ 且 $Z \subseteq Y$ , 则 $X \rightarrow Z$ 。

[引理 3]如果  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是属性，则  $X \rightarrow A_1, A_2, \dots, A_n$  当且仅当对每个  $A_i$  有  $X \rightarrow A_i (1 \leq i \leq n)$ 。

证明略。

关于属性组合的  
函数依赖与单一  
属性的函数依赖  
有什么关系？



# 关于函数依赖的公理和定理

## [Definition] 属性(集)闭包

对  $R(U, F)$ ,  $X \subseteq U$ ,  $U = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ , 令 :

$X^+_F = \{A_i \mid \text{用Armstrong Axiom A1,A2,A3可从F导出} X \rightarrow A_i\}$

称  $X^+_F$  为  $X$  关于  $F$  的属性(集)闭包。

注：显然  $X \subseteq X^+_F$ 。

[引理4]  $X \rightarrow Y$ ，当且仅当  $Y \subseteq X^+_F$

证明：<首先证明必要性：若  $X \rightarrow Y$ ，则定有  $Y \subseteq X^+_F$ >

因为  $X \rightarrow Y$ ，由分解律，若  $A_i \in Y$ ，则  $X \rightarrow A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )，所以  $Y \subseteq X^+_F$ 。

<再证明充分性：若  $Y \subseteq X^+_F$ ，则定有  $X \rightarrow Y$ >

因为  $Y \subseteq X^+_F$ ，按属性闭包定义，对  $\forall A_i \in Y$ ，有  $X \rightarrow A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )；再由合并律，可以推出  $X \rightarrow Y$ 。证毕。



## 函数依赖集的最小覆盖

### [Definition] 覆盖(Cover)

对 $R(U)$ 上的两个函数依赖集合 $F$ 、 $G$ ，如果 $F^+ = G^+$ ，则称 $F$ 和 $G$ 是等价的，也称 $F$ 覆盖 $G$ 或者 $G$ 覆盖 $F$ 。



## 函数依赖集的最小覆盖

**[Algorithm]** 计算一属性集关于一组函数依赖的属性闭包。

**Input :** 有限属性集合 $U$ ,  $U$ 上的函数依赖集合 $F$ , 及 $U$ 的子集 $X$

**Output :**  $X$ 关于 $F$ 的属性闭包 $X^+$ , 记为 $X^+_F$ 。

**Method :** 按下列规则递归计算属性序列 $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots$

1. 令 $X^{(0)}=X$ ,  $i=0$

2.  $B = \{A \mid (\exists V)(\exists W)(V \rightarrow W \in F \wedge V \subseteq X^{(i)} \wedge A \subseteq W)\}$

3.  $X^{(i+1)} = B \cup X^{(i)}$

4. If  $X^{(i+1)} \neq X^{(i)}$  then  $i=i+1$ ; goto 2.

5.  $X^+_F = X^{(i)}$ , 算法终止。

**示例 :** 已知  $R(U, F)$ ,  $U=\{A, B, C, D, E\}$ ,  $F=\{AB \rightarrow C, B \rightarrow D, C \rightarrow E, EC \rightarrow B, AC \rightarrow B\}$ 。求 :  $(AB)^+_F$

解 : (1)  $X^{(0)} = \{A, B\}$

(2) 由  $AB \rightarrow C, B \rightarrow D$  :  $X^{(1)} = X^{(0)} \cup \{C, D\} = \{A, B, C, D\}$

(3) 由  $C \rightarrow E, AC \rightarrow B$  :  $X^{(2)} = X^{(1)} \cup \{E\} = \{A, B, C, D, E\}$

(4) 由  $EC \rightarrow B$  :  $X^{(3)} = X^{(2)} \cup \phi = \{A, B, C, D, E\}$

(5) 因为  $X^{(3)} = X^{(2)}$  , 所以  $(AB)^+_F = \{A, B, C, D, E\}$ 。



## 函数依赖集的最小覆盖

**[引理6]** 每个函数依赖集**F**可被一个其右端至多有一个属性的函数依赖之集**G**覆盖。

证明：依据引理6， $G = \{ X \rightarrow A \mid X \rightarrow Y \in F \wedge A \in Y \}$  要证 $F^+$ 与 $G^+$ 等价，由引理5，只需证 $F \subseteq G^+ \wedge G \subseteq F^+$  因为 $X \rightarrow Y \in F$ ， $A \in Y$ 可以由Armstrong公理的自反律可推出 $X \rightarrow A$ ，所以 $G \subseteq F^+$

又因为若 $Y = A_1 A_2 \dots A_n$ ，则G中的 $X \rightarrow A_1$ ， $X \rightarrow A_2$ ，...， $X \rightarrow A_n$ ，由Armstrong公理的合并律可以推出 $X \rightarrow Y$ ，所以 $F \subseteq G^+$ 。最终依据引理5，可导出 $F^+ = G^+$ 。证毕。





# 函数依赖集的最小覆盖

## [Definition]最小覆盖

若F满足以下条件，则称F为最小覆盖(minimal Cover)或最小依赖集(minimal set of Functional Dependency)：

- 1) F中每个函数依赖的右部是单个属性；
- 2) 对任何 $X \rightarrow A \in F$ , 有 $F - \{ X \rightarrow A \}$ 不等价于F；
- 3) 对任何 $X \rightarrow A \in F$ ,  $Z \subset X$ ,  $(F - \{ X \rightarrow A \}) \cup \{ Z \rightarrow A \}$ 不等价于F。

为什么  
要求最  
小覆盖？

怎样求  
最小覆  
盖？

# 总结

