

1. 用 Romberg 方法计算积分 $\int_0^{0.8} e^{-x^2} dx$ ，要求误差不超过 10^{-5} 。

2. 对于初值问题 $\begin{cases} y' = y, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 1, \end{cases}$ 用 Euler 法，梯形法及经典 4 阶 RK 法进行计算，分别取步长 $h = 0.1, 0.2, 0.5$ ，试比较：用同样的步长，哪个方法的精度最好；对同一种方法取不同的步长计算，哪个结果最好？准确解为 $y = e^x$ 。

3. 证明对任意参数 t ，如下 Runge-Kutta 方法是二阶的：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_2 + K_3) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + t h, y_n + t h K_1) \\ K_3 = f(x_n + (1-t) h, y_n + (1-t) h K_1) \end{cases}$$