

1.

1. (1) 由演绎定理, 需证:

$$\neg A, B \rightarrow A \vdash \neg B$$

1. $\neg A$ 假设
2. $A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理6
3. $A \rightarrow B$ 1,2 \rightarrow mp
4. $B \rightarrow A$ 假设
5. $A \rightarrow B$ 4,3 定理8
6. $(B \rightarrow B) \rightarrow B$ 定理11
7. $\neg B$ 5,6 \rightarrow mp

(2) 由演绎定理, 需证:

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash C$$

1. A 假设
2. $A \rightarrow B$ 假设
3. $B \rightarrow C$ 假设
4. $A \rightarrow C$ 2,3 定理8
5. C 1,4 \rightarrow mp

(3) 由演绎定理, 需证:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A$$

1. $A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理6
2. $A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A$ 假设
3. $\neg A \rightarrow A$ 1,2 定理8
4. $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ 定理9
5. A 3,4 \rightarrow mp

(4) 由演绎定理, 需证:

$$\neg(A \rightarrow B), B \vdash A$$

1. $\neg(A \rightarrow B)$ 假设
2. $\neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$ 公理1及 \rightarrow mp
3. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理6
4. $(\neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow B) \rightarrow A)$ 定理16
5. $(\neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow B)) \rightarrow A$ 3,4 \rightarrow mp
6. A 2,5 \rightarrow mp

2.

$\vdash_{PC} (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$

- (1) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ 公理3
- (2) $B \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ (2) 前件互换定理2
- (3) $((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B))$ 定理13
- (4) $B \rightarrow (\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B))$ (2)(3) 定理8
- (5) $\neg A \rightarrow (B \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B))$ (4) 前件互换定理2
- (6) $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B))$ (5) 公理2及 \rightarrow mp
- (7) $(\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ 公理3
- (8) $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ (7)(6) 定理8

(2) $\vdash_{PC1} (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

1. $B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ 公理 1
2. $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ 公理 3
3. $B \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ 1,2 三段论定理
4. $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ 前件互换定理

(三段论证明如下:

若 $\vdash A \rightarrow B$, $\vdash B \rightarrow C$, 则 $\vdash A \rightarrow C$

1. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 加后件定理
2. $B \rightarrow A \rightarrow B$ 已知
3. $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ 2.1 \vdash_{mp}
4. $B \rightarrow C$ 已知
5. $A \rightarrow C$ 4.3 \vdash_{mp}