哈工大 2019 年 春 季学期

《计算方法》期末试题答案

学号	QQ2842305604
姓名	资源分享站

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

一.（10 分）已知 $\sqrt{100}=10,\quad \sqrt{121}=11,\quad \sqrt{144}=12$，试利用插值法近似计算 $\sqrt{115}$.

分析 由题中已知条件本题可利用三点二次 Lagrange 插值，也可利用三点二次 Newton 插值，它们所得结果相同.

解 利用三点二次 Lagrange 插值.

记 $f(x)=\sqrt{x}, x_0=100, x_1=121, x_2=144, y_0=10, y_1=11,\quad y_2=12$， 则 $f(x)$ 的二次 Lagrange 插值多项式为

$$L_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$=10\times\frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)}+11\times\frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)}+12\times\frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)}$$

$$f(115)=\sqrt{155}\approx L_2(115)$$

$$=10\times\frac{(115-121)(115-144)}{(100-121)(100-144)}+11\times\frac{(115-100)(115-144)}{(121-100)(121-144)}$$

$$+12\times\frac{(115-100)(115-121)}{(144-100)(144-121)}\approx 10.722\,756$$

二.（10 分）确定求积公式 $\int_{-h}^{h}f(x)\mathrm{d}x\approx A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)$ 中的待定参数，使其代数精确度尽量高，并指明求积公式所具有代数精度.

解 求积分公式中含有三个待参数，即 A_{-1}，A_0，A_1.令求积公式对 $f(x)=1,x,x^2$ 精确成立，即

$$\begin{cases}A_{-1}+A_0+A_1=2h\\ -h(A_{-1}-A_1)=0\\ h^2(A_{-1}+A_1)=\dfrac{2}{3}h^3\end{cases}$$

解得 $A_{-1}=A_1=\frac{1}{3}h,\ \ A_0=\frac{4}{3}h$.所求公式至少具有 2 次代数精确度.又将 $f(x)=x^3,x^4$ 代入所确定的求积公式，有

$$\int_{-h}^{h}x^3\mathrm{d}x=0=\frac{h}{3}(-h)^3+\frac{h}{3}(h^3)$$

$$\int_{-h}^{h}x^4\mathrm{d}x=\frac{2}{5}h^5\neq\frac{h}{3}(-h)^4+\frac{h}{3}h^4$$

故 $\int_{-h}^{h}f(x)dx\approx\frac{h}{3}f(-h)+\frac{4h}{3}f(0)+\frac{h}{3}f(h)$ 具有 3 次代数精度.

三. (10 分).

应用牛顿法于方程 $x^3-a=0$，导出求立方根 $\sqrt[3]{a}$ 的迭代公式，并讨论其收敛性。

令 $f(x)=x^3-a$，迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-a}{3x_k^2}=\frac{2x_k^3+a}{3x_k^2}\text{。}$$

$\varphi(x)=\frac{2x^3+a}{3x^2}$，则 $\varphi'(x)=\frac{2}{3}+\frac{a}{3}\cdot(-2)x^{-3}$，所以 $\varphi'(a)=0$，

又 $\varphi''(x)=2ax^{-4}$，所以 $\varphi''(a)=2a^{-1/3}\neq0$，因此迭代格式为线性收敛。

四. （ 10 分 ）对方程组

$$\begin{cases}11x_1-3x_2-33x_3=1\\-22x_1+11x_2+x_3=0\\x_1-4x_2+2x_3=1\end{cases}$$

通过调整方程的次序，建立收敛的 Jacobi 迭代格式和 Gauss-Seidel 迭代格式.

分析 Jacobi 方法和 Gauss-Seidel 方法的收敛条件不止一种，首先应该考虑比较方便的充分条件. 观察此方程组可以发现，有几个系数绝对值较大，这使得经过调整方程组中各方程的次序后使方程组化为与它同解的对角占

优方程组，从而 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法均收敛.

解 将第二个方程调到第一行、第三个方程调到第二行、第一个方程调到第三行后有同解方程组

$$\begin{cases} -22x_1 + 11x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ 11x_1 - 3x_2 - 33x_3 = 1 \end{cases}$$

这是按行严格对角占优方程组，故 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法都一定收敛.

Jacobi 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}x_2^{(k)} + \frac{1}{22}x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_1^{(k)} + \frac{1}{2}x_3^{(k)} - \frac{1}{4} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{3}x_1^{(k)} - \frac{1}{11}x_2^{(k)} - \frac{1}{33} \end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}x_2^{(k)} + \frac{1}{22}x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_1^{(k+1)} + \frac{1}{2}x_3^{(k)} - \frac{1}{4} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{3}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{11}x_2^{(k+1)} - \frac{1}{33} \end{cases}$$

五． （10 分）

设 $A = \begin{bmatrix} -2019 & -9999 & -8888 \\ -9999 & -2013 & -7777 \\ -8888 & -7777 & -1920 \end{bmatrix}$， $x = (-8,-7,-6,-5)^T$，

求 $\|A\|_1, \|A\|_\infty, \|x\|_1, \|x\|_3, \|x\|_\infty$。

六．（10 分）

利用适当的迭代格式证明 $\lim\limits_{k\to\infty}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{k}=2$.

证明：考虑迭代格式 $\begin{cases} x_0=0 \\ x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}, \quad k=0,1,2,\cdots \end{cases}$，则 $x_1=\sqrt{2}$， $x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，……，

$x_k=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{k}$.

令 $\varphi(x)=\sqrt{2+x}$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}$.

当 $x\in[0,2]$ 时，$\varphi(x)\in[\varphi(0),\varphi(2)]=[\sqrt{2},2]\subset[0,2]$，并且 $\dfrac{1}{4}\le\varphi'(x)\le\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

因而迭代格式产生的序列收敛于方程 $x=\sqrt{2+x}$ 在 $[0,2]$ 内的唯一根 $x^*=2$.

七． （10 分）

取步长 h=0.4，写出用标准四阶 Runge-Kutta 方法求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\sin(x+y) \quad 1\le x\le 9 \\ y(1)=0 \end{cases}$$

的计算公式，并计算 $y(1.8)$的近似值，小数点后至少保留 6 位.

解 设 $f(x,y)=x\sin(x+y)$， $x_0=1, y_0=0, x_n=x_0+nh=1+0.4n$

$(n=0,1,2,\cdots,20)$

标准四阶 Runge-Kutta 公式为

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4) \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{h}{2}K_1) \\ K_3=f(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{h}{2}K_2) \\ K_4=f(x_n+h,y_n+hK_3) \end{cases}$$

代入 $f(x,y)=x\sin(x+y)$ 有

$$
\begin{cases}
y_{n+1}=y_n+\dfrac{0.4}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)\\
K_1=(1+0.4n)\sin(1+0.4n+y_n)\\
K_2=(1.2+0.4n)\sin(1.2+0.4n+y_n+0.2K_1)\\
K_3=(1.2+0.4n)\sin(1.2+0.4n+y_n+0.2K_2)\\
K_4=(1.4+0.4n)\sin(1.4+0.4n+y_n+0.4K_3)
\end{cases}
$$

由 $y_0=1$，计算得

$$
y(1.4)\approx 0.460\,389
$$
$$
y(1.8)\approx 0.911\,704
$$

八.(10 分)用直接三角分解法求解方程组

$$
\begin{cases}
2x_1+4x_2+2x_3+6x_4=9\\
4x_1+9x_2+6x_3+15x_4=23\\
2x_1+6x_2+9x_3+18x_4=22\\
6x_1+15x_2+18x_3+40x_4=47
\end{cases}
$$

解　方程组的系数矩阵和右端项分别为

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&4&2&6\\4&9&6&15\\2&6&9&18\\6&15&18&40\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}9\\23\\22\\47\end{bmatrix}
$$

（1）分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$ 得

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&&&\\2&1&&\\1&2&1&\\3&3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4&2&6\\&1&2&3\\&&3&6\\&&&1\end{bmatrix}
$$

（2）求解 $\boldsymbol{LY}=\boldsymbol{b}$，即

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 23 \\ 22 \\ 47 \end{bmatrix}$$

解得 $\boldsymbol{Y} = (9, 5, 3, -1)^T$

（3）求解 $\boldsymbol{UX}=\boldsymbol{Y}$ ， 即

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 3 & 6 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

解得 $\boldsymbol{X} = (0.5, 2, 3, -1)^T$