哈工大 2018 年 秋 季学期

《计算方法》期末试题答案

学号	QQ2842305604
姓名	资源分享站

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									

注意行为规范 遵守考场纪律

主管领导审核签字

一.（10 分）设 $f(x)=2014x^4+2013x^2+2012$，试用插值多项式余项公式写出以-2，-1，0，1 为节点的三次插值多项式。

解 因为 f-P$_3$= $\frac{4!\cdot 2014}{4!}\cdot(x+2)(x+1)x(x-1)$ 所以

$$P_3(x)=2014x^4+2013x^2+2012$$
$$-\frac{4!\cdot 2014}{4!}\cdot(x+2)(x+1)x(x-1)$$

二.（10 分）试确定两点高斯求积公式 $\int_{-10}^{8} f(x)dx = B_1 f(x_1)+B_2 f(x_2)$的求积节点 $\boldsymbol{x_1, x_2}$ 及求积系数 $\boldsymbol{B_1, B_2}$。

三. (10 分). 试导出计算 $\sqrt[3]{c}\,(c>0)$ 的牛顿迭代公式，对初值 $\boldsymbol{x_0=3}$，计算 $\sqrt[3]{\boldsymbol{14}}$（要求计算到 x_4），结果保留到小数点后 4 位。

解：牛顿迭代格式为：$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-c}{3x_k^2}=\frac{2x_k^3+c}{3x_k^2}$

因为 $f(0)=-c<0$，由 $f(x)$ 的连续性知，在 0 点的邻域内存在一点 $x_L>0$，使 $f(x_L)<0$，又取 $x_R=1+c>0$，则 $f(x_R)>0$. 在 $[x_L,x_R]$ 上，$f'(x)=3x^2>0$，$f''(x)=6x>0$，不变号，取初始值 x_0 满足 $f(x_0)f''(x_0)>0$，则上述牛顿迭代序列收敛于 $f(x)=x^3-c=0$ 的根.

四. （ 10 分 ） 试对方程组

$$\begin{cases} x_1+8x_2-20x_3=10 \\ -18x_1+5x_2+2x_3=8 \\ 4x_1+16x_2-2x_3=15 \end{cases}$$

建立收敛的雅可比（Jacobi）迭代格式，并取初值 $x^{(0)}=(0,0,0)'$，计算到 $x^{(3)}$。结果保留到小数点后 4 位。

五．（10 分）

设 $A=\begin{bmatrix} -2017 & -9999 & -8888 \\ -9999 & -2013 & -7777 \\ -8888 & -7777 & -1920 \end{bmatrix}$， $x=(-8,-7,-6,-5)^T$，

求 $\|A\|_1, \|A\|_\infty, \|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$。

六.（10 分）

取步长 $h=0.2$，用标准 4 阶 Runge-Kutta 公式：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+(k_1+2k_2+2k_3+k_4)/6 \\ k_1=hf(x_n,y_n) \\ k_2=hf(x_n+h/2, y_n+k_1/2) \\ k_3=hf(x_n+h/2, y_n+k_2/2) \\ k_4=hf(x_n+h, y_n+k_3) \end{cases}$$

求初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=-y+x+1, \quad 0\le x\le 1 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

的数值解 y_1, y_2, y_3, y_4，结果保留小数点后 4 位。

七. （10 分）

利用适当的迭代格式证明 $\lim\limits_{k\to\infty}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{k}=2$.

证明：考虑迭代格式 $\begin{cases} x_0=0 \\ x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}, \quad k=0,1,2,\cdots \end{cases}$，则 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，……，

$x_k=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{k}$.

令 $\varphi(x)=\sqrt{2+x}$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}$.

当 $x\in[0,2]$ 时，$\varphi(x)\in[\varphi(0),\varphi(2)]=[\sqrt{2},2]\subset[0,2]$，并且 $\dfrac{1}{4}\le\varphi'(x)\le\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

因而迭代格式产生的序列收敛于方程 $x=\sqrt{2+x}$ 在 $[0,2]$ 内的唯一根 $x^*=2$.

八.（10 分）

给定函数 $f(x)$，设对一切 $x, f'(x)$ 存在且 $0<m\le f'(x)\le M$，试证明：对于 $0<\lambda<\dfrac{2}{M}$ 的任意 λ，迭代过程 $x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$ 均收敛于 $f(x)=0$ 的根 α .

分析 此迭代过程可看作

$x_{k+1}=\varphi(x_k), \quad \varphi(x)=x-\lambda f(x)$. 这样，要判断该迭代过程收敛，需对 $|\varphi'(x)|$ 进行考察，进而得出应有的结论.

证 设方程 $f(x)=0$ 的等价形式为

$x=x-\lambda f(x)$

则

$\varphi(x)=x-\lambda f(x)$， $|\varphi'(x)|=|1-\lambda f'(x)|$

因为 $0<m\le f'(x)\le M$， $0<\lambda<\dfrac{2}{M}$，

所以

$$0<\lambda m\le\lambda f'(x)\le\lambda M<2$$

$$-2<-\lambda f'(x)<0$$

$$-1<1-\lambda f'(x)<1,\quad \left|1-\lambda f'(x)\right|<1$$

因此迭代格式收敛于 $f(x)=0$ 的根 α