

11)

1. $\neg A \rightarrow A; A \vdash A$ (E)
2. $\neg A \rightarrow A; \neg A \vdash \neg A$ (E)
3. $\neg A \rightarrow A; \neg A \vdash \neg A \rightarrow A$ (E)
4. $\neg A \rightarrow A; \neg A \vdash A$ 2,3 ($\rightarrow -$)
5. $\neg A \rightarrow A \vdash A$ 1,4 ($-$) ~~$\neg E$~~
6. $\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ 5 ($\rightarrow +$)

(3)

- | | |
|--|----------------|
| 1. $(A \vee B) \rightarrow C; A \vdash A$ (E) | 8. $A \wedge$ |
| 2. $(A \vee B) \rightarrow C; A \vdash A \vee B$ (V+) | 9. $A \wedge$ |
| 3. $(A \vee B) \rightarrow C; A \vdash (A \vee B) \rightarrow C$ (E) | 10. $A \wedge$ |
| 4. $(A \vee B) \rightarrow C; A \vdash C$ 2,3 ($\rightarrow -$) | 11. $A \wedge$ |
| 5. $(A \vee B) \rightarrow C \vdash (A \rightarrow C)$ ($\rightarrow +$) | 12. $A \wedge$ |
| 6. $(A \vee B) \rightarrow C; B \vdash B$ (E) | 13. $A \wedge$ |
| 7. $(A \vee B) \rightarrow C; B \vdash A \vee B$ (V+) | 14. \vdash |
| 8. $(A \vee B) \rightarrow C; B \vdash (A \vee B) \rightarrow C$ (E) | 15. \vdash |
| 9. $(A \vee B) \rightarrow C; B \vdash C$ 7,8 ($\rightarrow -$) | |
| 10. $(A \vee B) \rightarrow C \vdash B \rightarrow C$ | |
| 11. $(A \vee B) \rightarrow C \vdash (B \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow C)$ 5,10 ($\wedge +$) | |
| 12. $\vdash ((A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow C))$ 11 ($\rightarrow +$) | |
| 13. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C); A \vee B; A \vdash A$ (E) | |
| 14. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C); A \vee B; A \vdash (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$ (E) | |
| 15. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C); A \vee B; A \vdash A \rightarrow C$ 14 ($\wedge -$) | |
| 16. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C); A \vee B; A \vdash C$ 13,15 ($\rightarrow -$) | |
| 17. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C); A \vee B; B \vdash B$ (E) | |
| 18. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C); A \vee B; B \vdash (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$ (E) | |
| 19. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C); A \vee B; B \vdash B \rightarrow C$ 18 ($\wedge -$) | |
| 20. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C); A \vee B; B \vdash C$ 17,19 ($\rightarrow -$) | |
| 21. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C); A \vee B \vdash A \vee B$ (E) | |
| 22. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C); A \vee B \vdash C$ 16,20,21 (V-) | |
| 23. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \vdash (A \vee B) \rightarrow C$ 22 ($\rightarrow +$) | |
| 24. $\vdash ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$ 23 ($\rightarrow +$) | |
| 25. $\vdash ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$ 12,24 ($\leftrightarrow +$) | |

- (5) 1. $\neg(A \rightarrow B); \neg A; A \vdash A$ (E)
2. $\neg(A \rightarrow B); \neg A; A \vdash \neg A$ (E)
3. $\neg(A \rightarrow B); \neg A; A \vdash B$ 1,2 (\neg -)
4. $\neg(A \rightarrow B); \neg A \vdash A \rightarrow B$ 3 (\rightarrow +))
5. $\neg(A \rightarrow B); \neg A \vdash \neg(A \rightarrow B)$ (E)
6. $\neg(A \rightarrow B) \vdash \neg\neg A$ 4,5 (\neg +))
7. $\neg(A \rightarrow B) \vdash A$ 6 (\neg \neg-)
8. ~~$\neg(A \rightarrow B); A \vdash B$~~ $\neg(A \rightarrow B); A; B \vdash B$ (E)
9. $\neg(A \rightarrow B); B \vdash A \rightarrow B$ 8 (\rightarrow +))
10. $\neg(A \rightarrow B); B \vdash \neg(A \rightarrow B)$ (E)
11. $\neg(A \rightarrow B) \vdash \neg B$ 9,10 (\neg +))
12. $\neg(A \rightarrow B) \vdash A \wedge \neg B$ 7,11 (\wedge +))
13. $\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)$ 12 (\rightarrow +))
14. $A \wedge \neg B; A \rightarrow B \vdash A \wedge \neg B$ (E)
15. $A \wedge \neg B; A \rightarrow B \vdash A$ 14 (\wedge -)
16. $A \wedge \neg B; A \rightarrow B \vdash \neg B$ 14 (\wedge -)
17. $A \wedge \neg B; A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B$
18. $A \wedge \neg B; A \rightarrow B \vdash B$ 15,17 (\rightarrow -)
19. $A \wedge \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$ 16,18 (\neg +))
20. $\vdash (A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$ 19 (\rightarrow +))
21. $\vdash (A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg(A \rightarrow B)$ 13,20 (\leftrightarrow +))

(7)

1. $A \wedge B \vdash A \wedge B$ (E)
2. $A \wedge B \vdash A$ 1 (\wedge -)
3. $A \wedge B \vdash B$ 2 (\wedge -)
4. $A \wedge B \vdash \neg A \vee B$ 3 (\vee +
5. $A \wedge B \vdash A \wedge (\neg A \vee B)$ 2, 4 (\wedge +
6. $\vdash (A \wedge B) \rightarrow (A \wedge (\neg A \vee B))$ 5 (\rightarrow +
7. $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash \text{~~A~~ (~~A~~)}$ (E)
 $A \wedge (\neg A \vee B)$
8. $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash A$ 7 (\wedge -)
9. $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash \neg A \vee B$ 7 (\wedge -)
10. $A \wedge (\neg A \vee B); \neg A \vdash \neg A$ (E)
11. $A \wedge (\neg A \vee B); \neg A \vdash A \wedge (\neg A \vee B)$ (E)
12. $A \wedge (\neg A \vee B); \neg A \vdash A$ 11. (\wedge -)
13. $A \wedge (\neg A \vee B); \neg A \vdash B$ 10, 12 (\vee -)
14. $A \wedge (\neg A \vee B); B \vdash B$ (E)
15. $A \wedge (\neg A \vee B); \vdash B$ 9, 13, 14 (\vee -)
16. $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash A \wedge B$ 8, 15 (\wedge +
17. $\vdash (A \wedge (\neg A \vee B)) \rightarrow (A \wedge B)$ 16 (\rightarrow +
18. $\vdash (A \wedge (\neg A \vee B)) \leftrightarrow (A \wedge B)$ 6, 17 (\leftrightarrow +