

1.

1. (1) 由演绎定理, 需证:

$\neg A, B \rightarrow A \vdash \neg B$

1. $\neg A$ 假设

2. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ 定理6

3. $A \rightarrow \neg B$ 1,2 \rightarrow mp

4. $B \rightarrow A$ 假设

5. $\neg B \rightarrow \neg B$ 4,3 定理8

6. $(B \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg B$ 定理11

7. $\neg B$ 5,6 \rightarrow mp

(2) 由演绎定理只需证:
 $A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash C$

1. A 假设

2. $A \rightarrow B$ 假设

3. B 1,2 \rightarrow mp

4. $B \rightarrow C$ 假设

5. C 3,4 \rightarrow mp

13) 由演绎定理需证:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A$$

1. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理6

2. ~~A~~ $(A \rightarrow B) \rightarrow A$ 假设

3. $\neg A \rightarrow A$ 1, 2 定理8

4. $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ 定理9

5. A 3, 4 \vdash mp

14) 由演绎定理, 需证:

$$\neg(A \rightarrow B), B \vdash A$$

1. $\neg(A \rightarrow B)$ 假设

2. $\neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$ 公理及 \vdash mp

3. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理6

4. $(\neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow B)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow B)) \rightarrow A)$ 定理16

5. $(\neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow B)) \rightarrow A$ 3, 4 \vdash mp

6. A 2, 5 \vdash mp

2.

- $$\vdash_{PC} (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$$
- (1) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ 公理3
 - (2) $B \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ (2)前件互换定理2
 - (3) $((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B))$ 定理13
 - (4) $B \rightarrow (\neg A \rightarrow (\neg(\neg A \rightarrow \neg B)))$ (2)(3)定理8
 - (5) $\neg A \rightarrow (B \rightarrow (\neg(\neg A \rightarrow \neg B)))$ (4)前件互换定理2
 - (6) $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow (\neg(\neg A \rightarrow \neg B)))$ (5)公理2及 \vdash_{mp}
 - (7) $(\neg A \rightarrow (\neg(\neg A \rightarrow \neg B))) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ 公理3
 - (8) $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ (7)(6)定理8

(2) $\vdash_{PC} (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

1. $B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ 公理1
2. $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ 公理3
3. $B \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ 1,2三段论定理
4. $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ 前件互换定理

(三段论证明如下:

若 $\vdash A \rightarrow B$, $\vdash B \rightarrow C$, 则 $\vdash A \rightarrow C$

1. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 加后件定理

2. $B \rightarrow A \rightarrow B$ 已知

3. $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ 2.1 \vdash_{mp}

4. $B \rightarrow C$ 已知

5. $A \rightarrow C$ 4.3 \vdash_{mp}