计算方法实验报告

姓名：王铭

学号：190110509

院系：计算机

专业：计算机

班级：1901105 班

实验报告二

题目（摘要）

用 Romberg 积分法列出 T-数表，根据 T-数表来计算积分 $\int_a^b f(x)dx$ ，并进行误差比较并确定最终的结果。

前言：（目的和意义）

实验目的：使用龙贝格(Romberg)积分法计算积分 $\int_a^b f(x)dx$ 。

意义:在实际应用中,除了少数能够使用牛顿莱布尼茨公式解决的简单积分问题,遇到更多的是无法寻找到原函数或是能够找到原函数但原函数较为复杂,导致积分难以计算的情况。这种情况下，我们可以使用近似值来估计积分。Romberg 积分法就是其中一种方法，它可以加快收敛速度，且根据其 T-数表，可以判断近似值的误差。

数学原理

计算 T-数表：

用T_m^k表示 T-数表中的元素，其中 k 表示对区间进行2^k次划分，m 表示在每个小区间上使用多少个点估计积分值，如当$m=1$时表示使用复化的梯形公式来近似积分值。

对 T 数表的第一列元素，用以下两个公式计算：

$$T_{2n}=\frac{1}{2}(T_n+U_n)$$

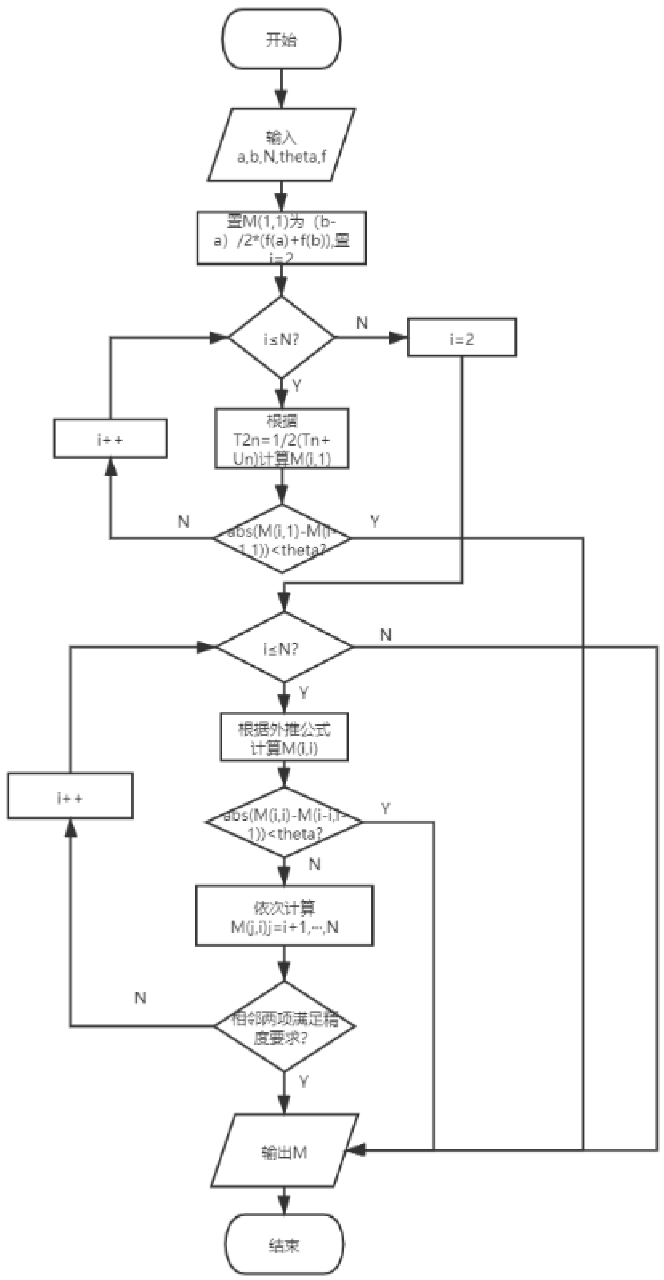
$$U_n=h\sum_{k=0}^{n-1}x_{k+\frac{1}{2}}$$

根据第一列的值向后进行外推，使用下列公式计算：

$$T_m^k=\frac{4^m\times T_{m-1}^{k+1}-T_{m-1}^k}{4^m-1}$$

由于每一列和每一对角线方向上的T_i^i均收敛，用相邻两项的差来估计误差，当计算出相邻两项的差小于给定的误差时，可以判断结果已经收敛，此时停止计算。

程序设计流程


开始
输入
a,b,N,theta,f
置M(1,1)为（b-a）/2*(f(a)+f(b)),置i=2
i≤N?
N
i=2
Y
根据
T2n=1/2(Tn+Un)计算M(i,1)
i++
N
abs(M(i,1)-M(i-1,1))<theta?
Y
i≤N?
N
Y
根据外推公式
计算M(i,i)
i++
abs(M(i,i)-M(i-i,i-1))<theta?
Y
N
依次计算
M(j,i)j=i+1,…,N
N
相邻两项满足精度要求?
Y
输出M
结束

实验结果、结论与讨论

实验结果截图：

1.1

$\int_0^1 x^2 e^x dx$，取 N=6，精度 theta=1e-6

输出停机标志，并返回矩阵 M

```
>> vpa(Romberg(a,b,N,theta,f),10)
停机

ans =

[ 1.359140914,            0,            0, 0, 0, 0]
[ 0.885660616, 0.7278338499,            0, 0, 0, 0]
[0.7605963324, 0.7189082379, 0.7183131972, 0, 0, 0]
[ 0.728890177, 0.7183214585, 0.7182823399, 0, 0, 0]
[0.7209357789, 0.7182843129, 0.7182818365, 0, 0, 0]
[0.7189454326, 0.7182819839,            0, 0, 0, 0]
```

故结果为 0.7182818365

1.2

$\int_1^3 e^x \sin x dx$，取 N=6，精度 theta=1e-6

输出停机标志，并返回矩阵 M

```
>> vpa(Romberg(a,b,N,theta,f),10)
停机

ans =

[ 5.12182642,           0,           0, 0, 0, 0]
[9.279762907, 10.66574174,           0, 0, 0, 0]
[10.52055428, 10.93415141, 10.95204539, 0, 0, 0]
[10.84204347, 10.94920653,  10.9502102, 0, 0, 0]
[10.92309389,  10.9501107, 10.95017097, 0, 0, 0]
[10.94339842,  10.9501666, 10.95017033, 0, 0, 0]
```

结果为 10.95017033

1.3

$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$，取 N=6，精度 theta=1e-6

输出停机标志，并返回矩阵 M

```
>> vpa(Romberg(a,b,N,theta,f),10)
停机

ans =

[          3.0,            0,  0,  0,  0,  0]
[          3.1,  3.133333333,  0,  0,  0,  0]
[3.131176471,  3.141568627,  0,  0,  0,  0]
[3.138988494,  3.141592502,  0,  0,  0,  0]
[3.140941612,  3.141592651,  0,  0,  0,  0]
[3.141429893,            0,  0,  0,  0,  0]
```

结果为 3.141592651

1.4

$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$, 取 N=6，精度 theta=1e-6

输出停机标志，并返回矩阵 M

```
>> vpa(Romberg(a,b,N,theta,f),10)
停机

ans =

[          0.75,             0,  0,  0,  0,  0]
[0.7083333333,  0.6944444444,  0,  0,  0,  0]
[0.6970238095,  0.6932539683,  0,  0,  0,  0]
[0.6941218504,  0.6931545307,  0,  0,  0,  0]
[0.6933912022,  0.6931476528,  0,  0,  0,  0]
[0.6932082083,  0.6931472103,  0,  0,  0,  0]
```

结果为 0.6931472103

实验结果

实验的四个题目均在给定精度内收敛，可以作为积分的近似值。

思考题

由结果矩阵 M 知，二分次数越大，精度越高。

实验报告三

题目（摘要）

利用标准四阶 Runge-Kutta 方法求解给定的微分方程初值方程

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y), a \le x \le b \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

前言：（目的和意义）

目的：采用 Runge-Kutta 方法用离散点上的解值 $y(x_i)$ 来近似 y_i。

意义：Runge-Kutta 法不求解微分方程的通项或近似表达式，通过选取步长 h，求解一系列离散值来近似真实值。而标准的四阶 Runge-Kutta 方法的误差为 $O(h^5)$，在一定误差范围的要求下，可以采用近似值来解决现实生活中遇到的难以求解或较为求解过程繁琐的的微分方程问题，且该方法可以通过编程利用计算机实现，求解速度快。

数学原理

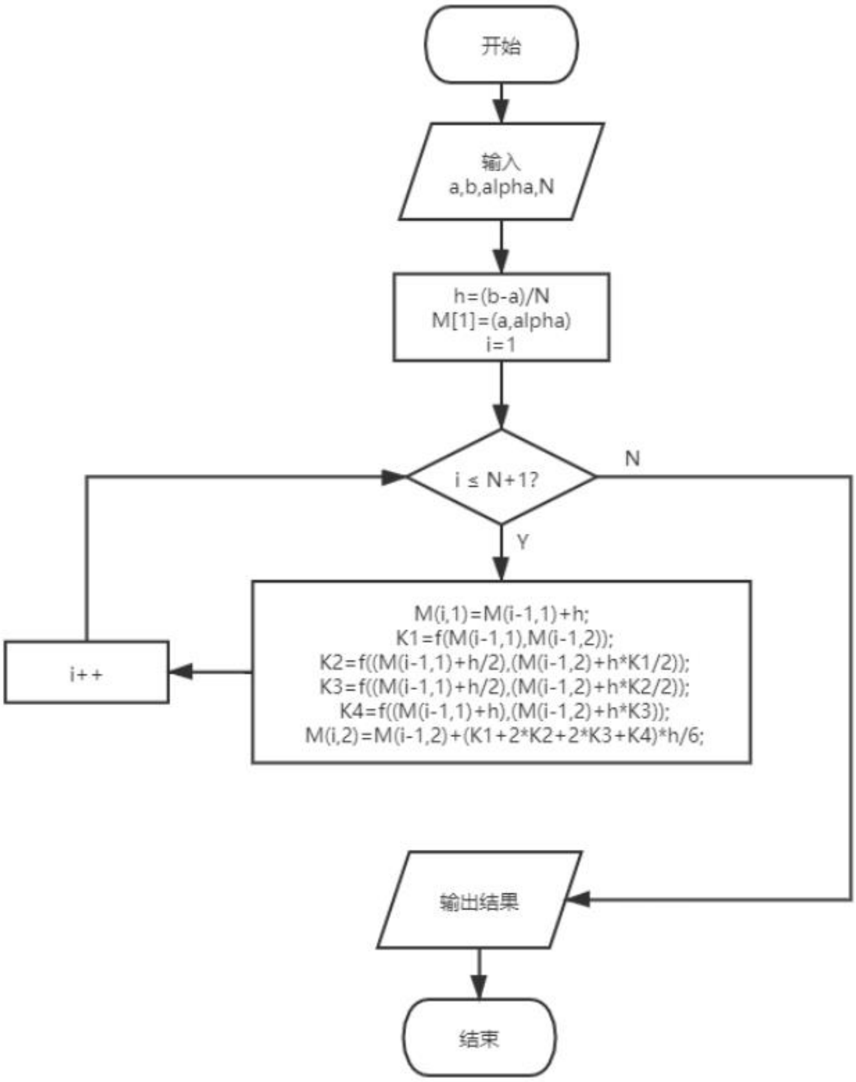
取$h=\frac{b-a}{N}$

利用递推式$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)$，其中：

$$\begin{cases} K_1=hf(x_n,y_n) \\ K_2=hf(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{K_1}{2}) \\ K_3=hf(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{K_2}{2}) \\ K_4=hf(x_n+h,y_n+K_3) \end{cases}$$

利用该式一直递推到(x_n,y_n)即可得到$x_i=i\times h+x_0(i=1,\cdots,N)$处的函数近似值。

程序设计流程


开始
输入
a,b,alpha,N
h=(b-a)/N
M[1]=(a,alpha)
i=1
i ≤ N+1?
N
Y
M(i,1)=M(i-1,1)+h;
K1=f(M(i-1,1),M(i-1,2));
K2=f((M(i-1,1)+h/2),(M(i-1,2)+h*K1/2));
K3=f((M(i-1,1)+h/2),(M(i-1,2)+h*K2/2));
K4=f((M(i-1,1)+h),(M(i-1,2)+h*K3));
M(i,2)=M(i-1,2)+(K1+2*K2+2*K3+K4)*h/6;
i++
输出结果
结束

实验结果、结论与讨论

实验结果

题目 1.1

$$\frac{dy}{dx}=x+y,0\le x\le 1,N=5$$

$$y_0=-1$$

结果为：

```
ans =

         0   -1.0000
    0.2000   -1.2000
    0.4000   -1.4000
    0.6000   -1.6000
    0.8000   -1.8000
    1.0000   -2.0000
```

N=10 时，结果为：

```
ans =

         0   -1.0000
    0.1000   -1.1000
    0.2000   -1.2000
    0.3000   -1.3000
    0.4000   -1.4000
    0.5000   -1.5000
    0.6000   -1.6000
    0.7000   -1.7000
    0.8000   -1.8000
    0.9000   -1.9000
    1.0000   -2.0000
```

N=20 时，结果为：

```
ans =

         0   -1.0000
    0.0500   -1.0500
    0.1000   -1.1000
    0.1500   -1.1500
    0.2000   -1.2000
    0.2500   -1.2500
    0.3000   -1.3000
    0.3500   -1.3500
    0.4000   -1.4000
    0.4500   -1.4500
    0.5000   -1.5000
    0.5500   -1.5500
    0.6000   -1.6000
    0.6500   -1.6500
    0.7000   -1.7000
    0.7500   -1.7500
    0.8000   -1.8000
    0.8500   -1.8500
    0.9000   -1.9000
    0.9500   -1.9500
    1.0000   -2.0000
```

此微分方程的解析解为 $y=-x-1$，误差较小。

题目 1.2

$$\frac{dy}{dx}=-y^2, 0\le x\le 1, N=5$$

$$y_0=1$$

结果为：

```
ans =

         0    1.0000
    0.2000    0.8333
    0.4000    0.7143
    0.6000    0.6250
    0.8000    0.5556
    1.0000    0.5000
```

N=10 时，结果为：

```
ans =

         0    1.0000
    0.1000    0.9091
    0.2000    0.8333
    0.3000    0.7692
    0.4000    0.7143
    0.5000    0.6667
    0.6000    0.6250
    0.7000    0.5882
    0.8000    0.5556
    0.9000    0.5263
    1.0000    0.5000
```

N=20 时，结果为：

```
ans =

         0    1.0000
    0.0500    0.9524
    0.1000    0.9091
    0.1500    0.8696
    0.2000    0.8333
    0.2500    0.8000
    0.3000    0.7692
    0.3500    0.7407
    0.4000    0.7143
    0.4500    0.6897
    0.5000    0.6667
    0.5500    0.6452
    0.6000    0.6250
    0.6500    0.6061
    0.7000    0.5882
    0.7500    0.5714
    0.8000    0.5556
    0.8500    0.5405
    0.9000    0.5263
    0.9500    0.5128
    1.0000    0.5000
```

此微分方程的解析解为 $y=\dfrac{1}{x+1}$，误差较小

题目 2. 1

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x}y+x^2e^x,1\le x\le 3,N=5$$
$$y_0=0$$

结果为

```
ans =

    1.0000         0
    1.4000    2.6139
    1.8000   10.7763
    2.2000   30.4917
    2.6000   72.5856
    3.0000  156.2252
```

N=10 时，结果为：

```
ans =

    1.0000         0
    1.2000    0.8664
    1.4000    2.6197
    1.6000    5.7199
    1.8000   10.7920
    2.0000   18.6809
    2.2000   30.5216
    2.4000   47.8324
    2.6000   72.6345
    2.8000  107.6089
    3.0000  156.2983
```

N=20 时，结果为：

当N=10时，结果为：

ans =

1.0000	0
1.1000	0.3459
1.2000	0.8666
1.3000	1.6072
1.4000	2.6203
1.5000	3.9676
1.6000	5.7209
1.7000	7.9638
1.8000	10.7935
1.9000	14.3229
2.0000	18.6829
2.1000	24.0250
2.2000	30.5244
2.3000	38.3835
2.4000	47.8359
2.5000	59.1510
2.6000	72.6389
2.7000	88.6566
2.8000	107.6143
2.9000	129.9833
3.0000	156.3048

该问题的解析解为 $y = x^2(e^x - e)$，误差较小。

题目 2.2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(y^2 + y), 1 \le x \le 3, N = 5$$
$$y_0 = -2$$

结果为：

ans =

1.0000	-2.0000
1.4000	-1.5540
1.8000	-1.3836
2.2000	-1.2934
2.6000	-1.2375
3.0000	-1.1995

当 N=10 时，结果为：

```
ans =

    1.0000   -2.0000
    1.2000   -1.7142
    1.4000   -1.5555
    1.6000   -1.4545
    1.8000   -1.3846
    2.0000   -1.3333
    2.2000   -1.2941
    2.4000   -1.2631
    2.6000   -1.2381
    2.8000   -1.2174
    3.0000   -1.2000
```

N=20 时，结果为：

```
ans =

    1.0000   -2.0000
    1.1000   -1.8333
    1.2000   -1.7143
    1.3000   -1.6250
    1.4000   -1.5556
    1.5000   -1.5000
    1.6000   -1.4545
    1.7000   -1.4167
    1.8000   -1.3846
    1.9000   -1.3571
    2.0000   -1.3333
    2.1000   -1.3125
    2.2000   -1.2941
    2.3000   -1.2778
    2.4000   -1.2632
    2.5000   -1.2500
    2.6000   -1.2381
    2.7000   -1.2273
    2.8000   -1.2174
    2.9000   -1.2083
    3.0000   -1.2000
```

该问题的解析解为 $y=\frac{2x}{1-2x}$，误差较小

题目 3.1

$$\frac{dy}{dx}=-20(y-x^2)+2x, 0\le x\le 1, N=5$$

$$y_0=\frac{1}{3}$$

结果为：

```
ans =

   1.0e+03 *

         0    0.0003
    0.0002    0.0018
    0.0004    0.0088
    0.0006    0.0437
    0.0008    0.2173
    0.0010    1.0843
```

当 N=10 时，结果为：

```
ans =

         0    0.3333
    0.1000    0.1228
    0.2000    0.0793
    0.3000    0.1048
    0.4000    0.1666
    0.5000    0.2539
    0.6000    0.3630
    0.7000    0.4927
    0.8000    0.6426
    0.9000    0.8125
    1.0000    1.0025
```

当 N=20 时，结果为：

```
ans =

         0    0.3333
    0.0500    0.1276
    0.1000    0.0569
    0.1500    0.0402
    0.2000    0.0467
    0.2500    0.0651
    0.3000    0.0910
    0.3500    0.1229
    0.4000    0.1602
    0.4500    0.2026
    0.5000    0.2501
    0.5500    0.3026
    0.6000    0.3601
    0.6500    0.4226
    0.7000    0.4901
    0.7500    0.5626
    0.8000    0.6401
    0.8500    0.7226
    0.9000    0.8101
    0.9500    0.9026
    1.0000    1.0001
```

该问题的解析解为 $y=x^2+\frac{1}{3}e^{-20x}$，误差较小。

题目 3.2

$$\frac{dy}{dx}=-20y+20\sin x+\cos x, 0\le x\le 1, N=5$$
$$y_0=1$$

结果为：

```
ans =

   1.0e+03 *

         0    0.0010
    0.0002    0.0052
    0.0004    0.0254
    0.0006    0.1255
    0.0008    0.6253
    0.0010    3.1238
```

当 N=10 时，结果为：

```
ans =

         0    1.0000
    0.1000    0.4331
    0.2000    0.3097
    0.3000    0.3323
    0.4000    0.4014
    0.5000    0.4831
    0.6000    0.5654
    0.7000    0.6440
    0.8000    0.7167
    0.9000    0.7825
    1.0000    0.8405
```

当 N=20 时，结果为：

```
ans =

         0    1.0000
    0.0500    0.4250
    0.1000    0.2405
    0.1500    0.2022
    0.2000    0.2184
    0.2500    0.2548
    0.3000    0.2983
    0.3500    0.3439
    0.4000    0.3898
    0.4500    0.4351
    0.5000    0.4795
    0.5500    0.5227
    0.6000    0.5646
    0.6500    0.6052
    0.7000    0.6442
    0.7500    0.6816
    0.8000    0.7173
    0.8500    0.7513
    0.9000    0.7833
    0.9500    0.8134
    1.0000    0.8414
```

该问题的解析解为 $y=e^{-20x}+\sin x$，当 N=5 时误差较大，N=10 和 N=20 时误差较小

题目 3.3

$$\frac{dy}{dx}=-20(y-e^{x}\sin x)+e^{x}(\sin x+\cos x),0\le x\le 1,N=5$$

$$y_0=0$$

结果为：

```
ans =

         0         0
    0.2000    0.2986
    0.4000    0.9272
    0.6000    2.8355
    0.8000   10.7109
    1.0000   47.9414
```

当 N=10 时，结果为：

```
ans =

         0         0
    0.1000    0.1121
    0.2000    0.2451
    0.3000    0.4018
    0.4000    0.5841
    0.5000    0.7938
    0.6000    1.0324
    0.7000    1.3010
    0.8000    1.6003
    0.9000    1.9305
    1.0000    2.2912
```

当 N=20 时，结果为：

```
ans =

         0         0
    0.0500    0.0526
    0.1000    0.1104
    0.1500    0.1737
    0.2000    0.2427
    0.2500    0.3178
    0.3000    0.3990
    0.3500    0.4867
    0.4000    0.5811
    0.4500    0.6823
    0.5000    0.7906
    0.5500    0.9061
    0.6000    1.0290
    0.6500    1.1594
    0.7000    1.2974
    0.7500    1.4432
    0.8000    1.5966
    0.8500    1.7579
    0.9000    1.9268
    0.9500    2.1034
    1.0000    2.2875
```

该问题的解析解为 $y = e^x \sin x$，当 N=5 时误差较大，N=10 和 N=20 时误差较小

实验结果

实验结果与微分方程的解析解基本相同，但当 N=5 时，带 sinx 和 cosx 等导数变化剧烈的函数值时，由于步长较长，易导致产生较大误差，当 N 取 10 和 20 时，误差较小。

讨论

①数值解和解析解基本相同，因为使用了标准四阶 Runge-Kutta 方法，而该方法的误差为 O(h^5)。

②通过对比 N 为 5,10,20，显然 N 越大越精确。N 越大，步长越小，故计算的误差越小。

③N 较小时会导致误差较大，因为 N 较小时，步长较大,sinx 和 cosx 导数变化较剧烈，导致 $|y_{n+1} - y_n|$ 变化较大，产生较大误差。

实验报告四

题目（摘要）

利用牛顿迭代法求方程$f(x)=0$的近似根。

前言：（目的和意义）

目的：利用牛顿迭代法求实际问题中无法得到准确解的方程。

意义：实际生活中遇到的某些方程如超越方程无法求其精确解，可以利用牛顿迭代法在给定的精度下求出其近似解来代替精确解。

数学原理

牛顿迭代法的计算公式为:

$$x_0 = \alpha$$

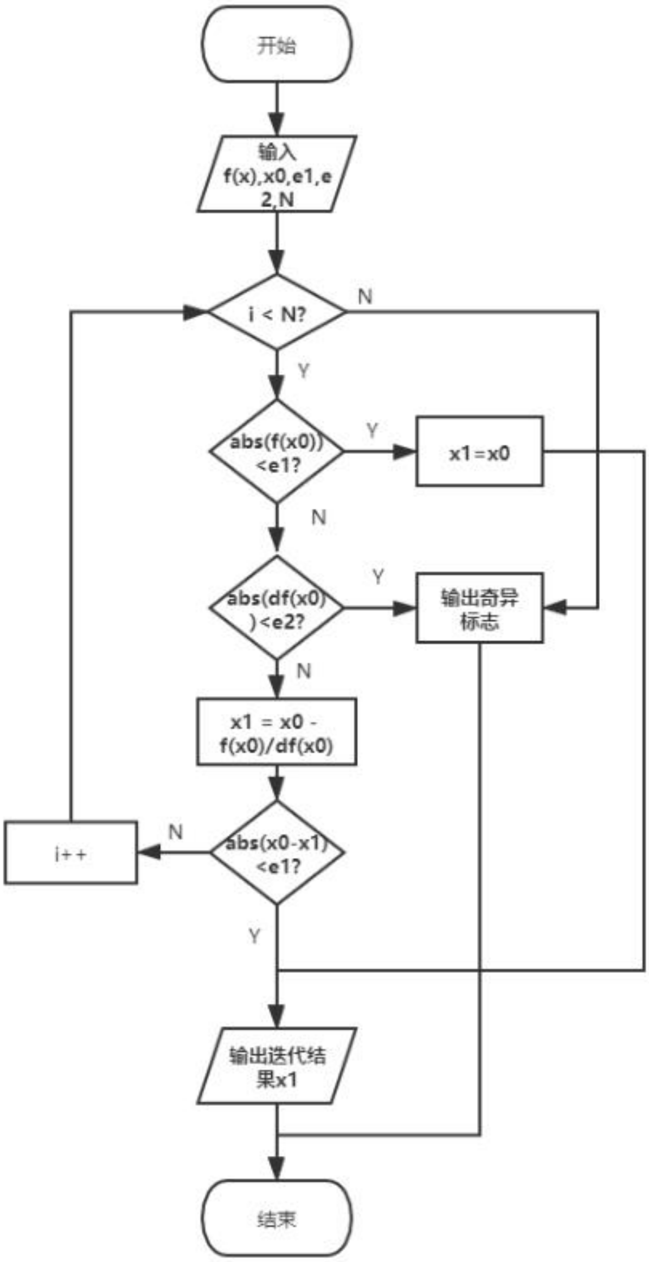
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$n = 0,1,\cdots$$

牛顿迭代法有局部收敛性，在其精确解x^*的某一满足收敛性要求的邻域O（x^*,δ）内取一点x_0,根据牛顿迭代公式可得到收敛于x^*的迭代序列$\{x_n\}$，且收敛速度为 2 阶的；若$f(x) \in C^m[a,b], f(x) = f'(x^*) =\cdots= f^{(m-1)}(x^*) = 0$, 且$f^{(m)}(x^*) \neq 0$ $(m > 1)$, 则对充分小的$\delta>0$, 当$\alpha \in O$（x^*,δ）时，由牛顿迭代法的收敛速度是 1 阶的。

程序设计流程

流程图：



每次迭代时先判断$f(x_0)$是否满足精度要求，满足则直接输出，否则判断$f'(x_0)$是否小于e_2，若是则输出奇异标志，否则进行迭代。迭代结束后根据$|x_1-x_0|$来估计误差是否满足要求，若满足则返回迭代值，否则进行下一次迭代。

实验结果、结论与讨论

程序运行结果截图：

问题 1：

（1）

```
>> f = cos(x) - x

f =

cos(x) - x

>> vpa(Newton(f,pi/4,1e-6,1e-4,20),10)

ans =

0.7390851781
```

（2）

```
>> f = exp(-x)-sin(x)

f =

exp(-x) - sin(x)

>> vpa(Newton(f,0.6,1e-6,1e-4,10),10)

ans =

0.5885327428
```

问题 2：

（1）

```
>> f = x - exp(-x)

f =

x - exp(-x)

>> vpa(Newton(f,0.5,1e-6,1e-4,10),10)

ans =

0.567143165
```

（2）

```
>> f = x^2-2*x*exp(-x)+exp(-2*x)

f =

exp(-2*x) - 2*x*exp(-x) + x^2

>> vpa(Newton(f,0.5,1e-6,1e-4,20),10)

ans =

0.5666057041
```

结论

该实验的四个函数均能够从x_0迭代，并最终收敛到根值，且都输出了在满足所给精度条件下根的近似值。

思考题

①由于牛顿迭代法的局部收敛性，在选择初值x_0时应使得该值在根的某一足够小的邻域内，使得从该点开始计算出的迭代序列收敛到根。在实际计算中，要根据结果是否收敛，通过判断 f(a)*f(b)是否小于 0，并运用二分法找到满足收敛精度的迭代初值。

②该题所求根为重根，牛顿迭代法在求重根的近似值时收敛速度为一阶，在使用 matlab 计算时，在一段时间内无法得出结果。原因：由于$f(x)$是符号标记，并未转换为数值，故运算速度较慢，可以用$f\ =\ matlabFunction(f)$这一函数解决运算速度慢的问题。

实验报告五

题目（摘要）

利用 Gauss 列主元消去法求解线性方程组$AX=B$。

前言：（目的和意义）

目的：通过化简系数矩阵的方法，求解线性方程组。

意义：高斯消元法通过化简系数矩阵为三角阵，可以简化求解线性方程组的步骤。而列选的高斯消元法，可以压制舍入误差对实验结果的影响，即通过每次选取待化简的一列中绝对值最大的数，来控制乘数因子m_{ik}不会出现大数吃小数的情况。

数学原理

1. 对$k=1,2,\cdots,n-1$,寻找最小的正整数p，$k \le p \le n$和$\left|a_{pk}\right| = \max\limits_{k \le j \le n}\left|a_{jk}\right|$。如果$a_{pk} \ne 0$,且$p \ne k$,那么交换p,k两行,并对i=k+1,⋯,n,记$m_{ik}=a_{ik}/a_{kk}$,计算下列式子。

$$\begin{cases} a_{ij}=a_{ij}-a_{kj}m_{ik} \\ i=k+1,?\cdot\cdot,n \\ j=k+1,?\cdot\cdot,n \\ b_i=k+1,?\cdot\cdot,n \end{cases}$$

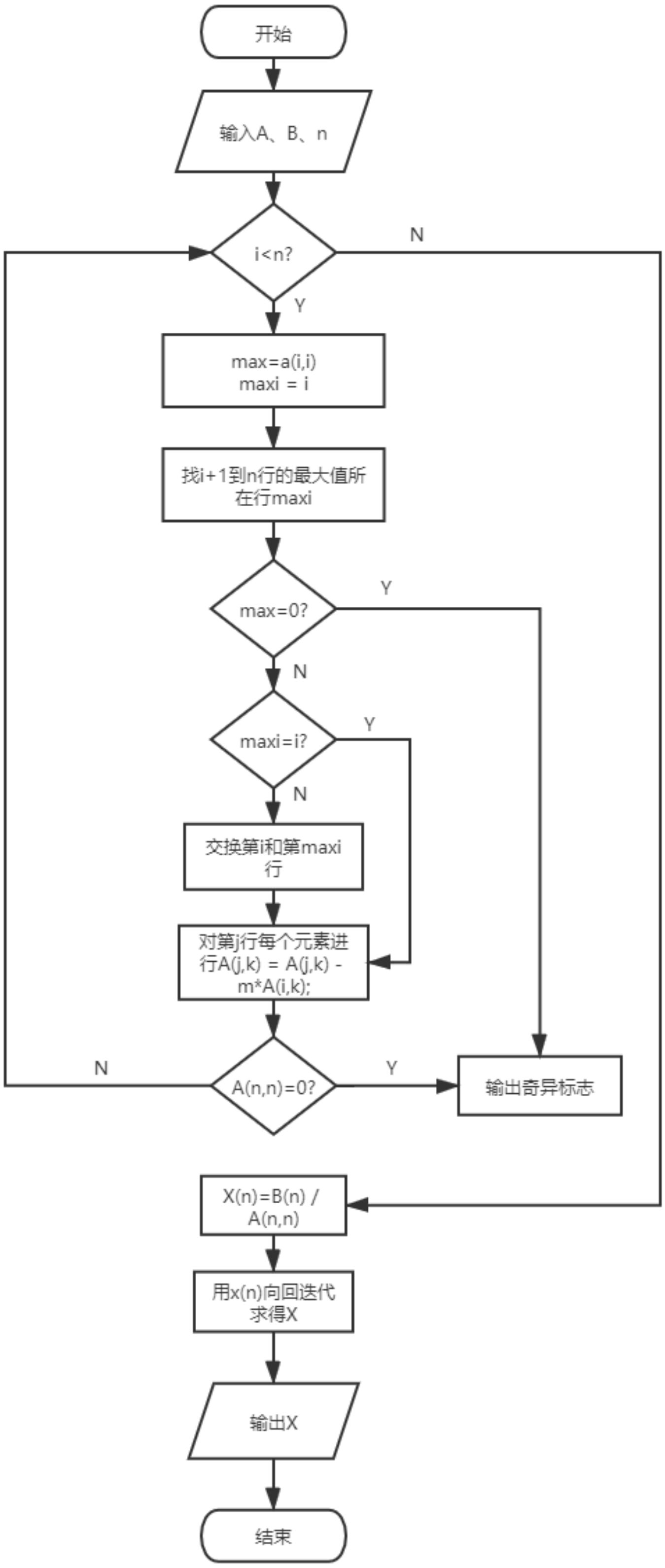
若$a_{pk}=0$,说明系数矩阵奇异，无解。

2.如果$a_{nn}=0$,则说明系数矩阵奇异，无解。

3.置$x_n=b_n/a_{nn}$，回代过程如下：

对$k=n-1,\cdots,2,1$,置$x_k=(b_k-\sum\limits_{j=k+1}^{n}a_{kj}x_j)/a_{kk}$

程序设计流程


开始
输入A、B、n
i<n?
N
Y
max=a(i,i)
maxi = i
找i+1到n行的最大值所在行maxi
max=0?
Y
N
maxi=i?
Y
N
交换第i和第maxi行
对第j行每个元素进行A(j,k) = A(j,k) - m*A(i,k);
N
A(n,n)=0?
Y
输出奇异标志
X(n)=B(n) / A(n,n)
用x(n)向回迭代求得X
输出X
结束

实验结果、结论与讨论

题目 1：

（1）

```
1.1

ans =

[1.0, 1.0, 1.0, 1.0]
```

（2）

```
1.2

ans =

[1.0, 1.0, 1.0, 1.0]
```

（3）

```
ans =

[1.0, 1.0, 1.0, 1.0]
```

（4）

```
ans =

[1.0, 1.0, 1.0, 1.0]
```

题目二:

(1)

```
2.1

ans =

[0.9536791069, 0.3209568455, 1.078708076, -0.09010850954]
```

（2）

```
2.2

ans =

[0.516177298, 0.4152194728, 0.1099661029, 1.036539223]
```

(3)

```
2.3

ans =

[1.0, 1.0, 1.0]
```

(4)

```
ans =

[1.0, 1.0, 1.0]
```

结论

实验中无奇异标志输出，以上线性方程均存在解，符合预期。

```
    syms x;
disp("1.1");
a=0;
b=1;
f=x*x*exp(x);
N=6;
theta=1e-6;
vpa(Romberg(a,b,N,theta,f),10)

syms x;
disp("1.2");
a=1;
b=3;
N=6;
f=exp(x)*sin(x);
theta=1e-6;
vpa(Romberg(a,b,N,theta,f),10)

syms x;
disp("1.3");
a=0;
b=1;
f=4/(1+x*x);
theta=1e-6;
N=6;
vpa(Romberg(a,b,N,theta,f),10)

syms x;
disp("1.4");
```

```
a=0;
b=1;
f=1/(1+x);
theta=1e-6;
N=6;
vpa(Romberg(a,b,N,theta,f),10)

function M = Romberg(a,b,N,theta,f)
f = matlabFunction(f);
M=zeros(N);
M(1,1)=(b-a)/2*(f(a)+f(b));
for i = 2:(N)
    m=power(2,i-1);
    h=(b-a)/m;
    plus=0;
    for j = (a+h):(2*h):(b)
        plus = plus + 2 * h * f(j);
    end
    M(i,1)=0.5*M(i-1,1)+0.5*plus;
    if(abs(M(i,1)-M(i-1,1)) < theta)
        disp("停机");
        return;
    end
end
for i =2:(N)
    m=power(4,i-1);
    M(i,i)=(m*M(i,i-1)-M(i-1,i-1))/(m-1);
    if(abs(M(i,i)-M(i-1,i-1))<theta)
        disp("停机");
```

```
        return;
    end
   for j = (i+1):(N)
       M(j,i)=(m*M(j,i-1)-M(j-1,i-1))/(m-1);
       if(abs(M(j,i)-M(j-1,i))<theta)
        disp("停机");
        return;
       end
   end
end
end
```

```
    1.1
停机

ans =

[ 1.359140914,          0,          0, 0, 0, 0]
[ 0.885660616, 0.7278338499,          0, 0, 0, 0]
[0.7605963324, 0.7189082379, 0.7183131972, 0, 0, 0]
[ 0.728890177, 0.7183214585, 0.7182823399, 0, 0, 0]
[0.7209357789, 0.7182843129, 0.7182818365, 0, 0, 0]
[0.7189454326, 0.7182819839,          0, 0, 0, 0]

1.2
停机

ans =

[ 5.12182642,          0,          0, 0, 0, 0]
```

```
[9.279762907, 10.66574174,          0, 0, 0, 0]

[10.52055428, 10.93415141, 10.95204539, 0, 0, 0]

[10.84204347, 10.94920653,  10.9502102, 0, 0, 0]

[10.92309389,  10.9501107, 10.95017097, 0, 0, 0]

[10.94339842,  10.9501666, 10.95017033, 0, 0, 0]
```

1.3

停机

```
ans =


[       3.0,          0, 0, 0, 0, 0]

[       3.1, 3.133333333, 0, 0, 0, 0]

[3.131176471, 3.141568627, 0, 0, 0, 0]

[3.138988494, 3.141592502, 0, 0, 0, 0]

[3.140941612, 3.141592651, 0, 0, 0, 0]

[3.141429893,          0, 0, 0, 0, 0]
```

1.4

停机

```
ans =


[       0.75,           0, 0, 0, 0, 0]

[0.7083333333, 0.6944444444, 0, 0, 0, 0]

[0.6970238095, 0.6932539683, 0, 0, 0, 0]

[0.6941218504, 0.6931545307, 0, 0, 0, 0]

[0.6933912022, 0.6931476528, 0, 0, 0, 0]

[0.6932082083, 0.6931472103, 0, 0, 0, 0]
```

Published with MATLAB® R2020b

```
    syms x;
syms y;
disp("1.1");
a=0;
b=1;
alpha=-1;
N=5;
f(x,y)=x+y;
Runge_Kutta(f,a,b,alpha,N)
N=10;
Runge_Kutta(f,a,b,alpha,N)
N=20;
Runge_Kutta(f,a,b,alpha,N)

syms x;
syms y;
disp("1.2");
a=0;
b=1;
alpha=1;
N=5;
f(x,y)=-y*y;
Runge_Kutta(f,a,b,alpha,N)
N=10;
Runge_Kutta(f,a,b,alpha,N)
N=20;
Runge_Kutta(f,a,b,alpha,N)

syms x;
```

```
syms y;
disp("2.1");
a=1;
b=3;
alpha=0;
N=5;
f(x,y)=2*y/x+x*x*exp(x);
Runge_Kutta(f,a,b,alpha,N)
N=10;
Runge_Kutta(f,a,b,alpha,N)
N=20;
Runge_Kutta(f,a,b,alpha,N)

syms x;
syms y;
disp("2.2");
a=1;
b=3;
alpha=-2;
N=5;
f(x,y)=(y+y*y)/x;
Runge_Kutta(f,a,b,alpha,N)
N=10;
Runge_Kutta(f,a,b,alpha,N)
N=20;
Runge_Kutta(f,a,b,alpha,N)

syms x;
syms y;
```

```
disp("3.1");

a=0;

b=1;

alpha=1/3;

N=5;

f(x,y)=-20*(y-x*x)+2*x;

Runge_Kutta(f,a,b,alpha,N)

N=10;

Runge_Kutta(f,a,b,alpha,N)

N=20;

Runge_Kutta(f,a,b,alpha,N)


syms x;

syms y;

disp("3.2");

a=0;

b=1;

alpha=1;

N=5;

f(x,y)=-20*y+20*sin(x)+cos(x);

Runge_Kutta(f,a,b,alpha,N)

N=10;

Runge_Kutta(f,a,b,alpha,N)

N=20;

Runge_Kutta(f,a,b,alpha,N)


syms x;

syms y;

disp("3.3");
```

```
a=0;
b=1;
alpha=0;
N=5;
f(x,y)=-20*(y-exp(x)*sin(x))+exp(x)*(sin(x)+cos(x));
Runge_Kutta(f,a,b,alpha,N)
N=10;
Runge_Kutta(f,a,b,alpha,N)
N=20;
Runge_Kutta(f,a,b,alpha,N)


function M = Runge_Kutta(f,a,b,alpha,N)
    f = matlabFunction(f);
    h = (b - a) / N;
    M=zeros(N+1,2);
    M(1,1)=a;
    M(1,2)=alpha;
    for i=2:(N+1)
        M(i,1)=M(i-1,1)+h;
        K1=f(M(i-1,1),M(i-1,2));
        K2=f((M(i-1,1)+h/2),(M(i-1,2)+h*K1/2));
        K3=f((M(i-1,1)+h/2),(M(i-1,2)+h*K2/2));
        K4=f((M(i-1,1)+h),(M(i-1,2)+h*K3));
        M(i,2)=M(i-1,2)+(K1+2*K2+2*K3+K4)*h/6;
    end
end
```

1.1

```
ans =
```

```
         0   -1.0000
    0.2000   -1.2000
    0.4000   -1.4000
    0.6000   -1.6000
    0.8000   -1.8000
    1.0000   -2.0000


ans =

         0   -1.0000
    0.1000   -1.1000
    0.2000   -1.2000
    0.3000   -1.3000
    0.4000   -1.4000
    0.5000   -1.5000
    0.6000   -1.6000
    0.7000   -1.7000
    0.8000   -1.8000
    0.9000   -1.9000
    1.0000   -2.0000


ans =

         0   -1.0000
    0.0500   -1.0500
    0.1000   -1.1000
    0.1500   -1.1500
```

```
    0.2000   -1.2000

    0.2500   -1.2500

    0.3000   -1.3000

    0.3500   -1.3500

    0.4000   -1.4000

    0.4500   -1.4500

    0.5000   -1.5000

    0.5500   -1.5500

    0.6000   -1.6000

    0.6500   -1.6500

    0.7000   -1.7000

    0.7500   -1.7500

    0.8000   -1.8000

    0.8500   -1.8500

    0.9000   -1.9000

    0.9500   -1.9500

    1.0000   -2.0000


1.2


ans =


         0    1.0000

    0.2000    0.8333

    0.4000    0.7143

    0.6000    0.6250

    0.8000    0.5556

    1.0000    0.5000
```

```
ans =

         0    1.0000
    0.1000    0.9091
    0.2000    0.8333
    0.3000    0.7692
    0.4000    0.7143
    0.5000    0.6667
    0.6000    0.6250
    0.7000    0.5882
    0.8000    0.5556
    0.9000    0.5263
    1.0000    0.5000


ans =

         0    1.0000
    0.0500    0.9524
    0.1000    0.9091
    0.1500    0.8696
    0.2000    0.8333
    0.2500    0.8000
    0.3000    0.7692
    0.3500    0.7407
    0.4000    0.7143
    0.4500    0.6897
    0.5000    0.6667
    0.5500    0.6452
    0.6000    0.6250
```

```
    0.6500    0.6061

    0.7000    0.5882

    0.7500    0.5714

    0.8000    0.5556

    0.8500    0.5405

    0.9000    0.5263

    0.9500    0.5128

    1.0000    0.5000
```

2.1

```
ans =


    1.0000         0

    1.4000    2.6139

    1.8000   10.7763

    2.2000   30.4917

    2.6000   72.5856

    3.0000  156.2252



ans =


    1.0000         0

    1.2000    0.8664

    1.4000    2.6197

    1.6000    5.7199

    1.8000   10.7920

    2.0000   18.6809

    2.2000   30.5216
```

```
    2.4000   47.8324
    2.6000   72.6345
    2.8000  107.6089
    3.0000  156.2983


ans =

    1.0000         0
    1.1000    0.3459
    1.2000    0.8666
    1.3000    1.6072
    1.4000    2.6203
    1.5000    3.9676
    1.6000    5.7209
    1.7000    7.9638
    1.8000   10.7935
    1.9000   14.3229
    2.0000   18.6829
    2.1000   24.0250
    2.2000   30.5244
    2.3000   38.3835
    2.4000   47.8359
    2.5000   59.1510
    2.6000   72.6389
    2.7000   88.6566
    2.8000  107.6143
    2.9000  129.9833
    3.0000  156.3048
```

2.2

```
ans =

    1.0000   -2.0000
    1.4000   -1.5540
    1.8000   -1.3836
    2.2000   -1.2934
    2.6000   -1.2375
    3.0000   -1.1995


ans =

    1.0000   -2.0000
    1.2000   -1.7142
    1.4000   -1.5555
    1.6000   -1.4545
    1.8000   -1.3846
    2.0000   -1.3333
    2.2000   -1.2941
    2.4000   -1.2631
    2.6000   -1.2381
    2.8000   -1.2174
    3.0000   -1.2000


ans =

    1.0000   -2.0000
```

```
    1.1000   -1.8333

    1.2000   -1.7143

    1.3000   -1.6250

    1.4000   -1.5556

    1.5000   -1.5000

    1.6000   -1.4545

    1.7000   -1.4167

    1.8000   -1.3846

    1.9000   -1.3571

    2.0000   -1.3333

    2.1000   -1.3125

    2.2000   -1.2941

    2.3000   -1.2778

    2.4000   -1.2632

    2.5000   -1.2500

    2.6000   -1.2381

    2.7000   -1.2273

    2.8000   -1.2174

    2.9000   -1.2083

    3.0000   -1.2000


3.1


ans =


   1.0e+03 *


         0    0.0003

    0.0002    0.0018

    0.0004    0.0088
```

```
    0.0006    0.0437
    0.0008    0.2173
    0.0010    1.0843


ans =

         0    0.3333
    0.1000    0.1228
    0.2000    0.0793
    0.3000    0.1048
    0.4000    0.1666
    0.5000    0.2539
    0.6000    0.3630
    0.7000    0.4927
    0.8000    0.6426
    0.9000    0.8125
    1.0000    1.0025


ans =

         0    0.3333
    0.0500    0.1276
    0.1000    0.0569
    0.1500    0.0402
    0.2000    0.0467
    0.2500    0.0651
    0.3000    0.0910
    0.3500    0.1229
```

```
    0.4000    0.1602
    0.4500    0.2026
    0.5000    0.2501
    0.5500    0.3026
    0.6000    0.3601
    0.6500    0.4226
    0.7000    0.4901
    0.7500    0.5626
    0.8000    0.6401
    0.8500    0.7226
    0.9000    0.8101
    0.9500    0.9026
    1.0000    1.0001
```

3.2

```
ans =

   1.0e+03 *

         0    0.0010
    0.0002    0.0052
    0.0004    0.0254
    0.0006    0.1255
    0.0008    0.6253
    0.0010    3.1238


ans =
```

```
         0    1.0000
    0.1000    0.4331
    0.2000    0.3097
    0.3000    0.3323
    0.4000    0.4014
    0.5000    0.4831
    0.6000    0.5654
    0.7000    0.6440
    0.8000    0.7167
    0.9000    0.7825
    1.0000    0.8405
```

```
ans =

         0    1.0000
    0.0500    0.4250
    0.1000    0.2405
    0.1500    0.2022
    0.2000    0.2184
    0.2500    0.2548
    0.3000    0.2983
    0.3500    0.3439
    0.4000    0.3898
    0.4500    0.4351
    0.5000    0.4795
    0.5500    0.5227
    0.6000    0.5646
    0.6500    0.6052
    0.7000    0.6442
```

```
    0.7500    0.6816

    0.8000    0.7173

    0.8500    0.7513

    0.9000    0.7833

    0.9500    0.8134

    1.0000    0.8414
```

3.3

```
ans =

         0         0

    0.2000    0.2986

    0.4000    0.9272

    0.6000    2.8355

    0.8000   10.7109

    1.0000   47.9414



ans =

         0         0

    0.1000    0.1121

    0.2000    0.2451

    0.3000    0.4018

    0.4000    0.5841

    0.5000    0.7938

    0.6000    1.0324

    0.7000    1.3010

    0.8000    1.6003
```

```
    0.9000    1.9305
    1.0000    2.2912


ans =

         0         0
    0.0500    0.0526
    0.1000    0.1104
    0.1500    0.1737
    0.2000    0.2427
    0.2500    0.3178
    0.3000    0.3990
    0.3500    0.4867
    0.4000    0.5811
    0.4500    0.6823
    0.5000    0.7906
    0.5500    0.9061
    0.6000    1.0290
    0.6500    1.1594
    0.7000    1.2974
    0.7500    1.4432
    0.8000    1.5966
    0.8500    1.7579
    0.9000    1.9268
    0.9500    2.1034
    1.0000    2.2875
```

Published with MATLAB® R2020b

```
    syms x;

disp("1.1");

e1 = 1e-6;

e2 = 1e-4;

N = 10;

x0 = pi/4;

f = cos(x)-x;

vpa(Newton(f,x0,e1,e2,N),10)


syms x;

disp("1.2");

e1 = 1e-6;

e2 = 1e-4;

N = 10;

f=exp(-x)-sin(x);

x0=0.6;

vpa(Newton(f,x0,e1,e2,N),10)


syms x;

disp("1.3");

e1 = 1e-6;

e2 = 1e-4;

N = 10;

f=x-exp(-x);

x0=0.5;

vpa(Newton(f,x0,e1,e2,N),10)



syms x;
```

```
disp("1.4");
e1 = 1e-6;
e2 = 1e-4;
f=x*x-2*x*exp(-x)+exp(-2*x);
N=20;
x0=0.5;
vpa(Newton(f,x0,e1,e2,N),10)

function x1 = Newton(f,x0,e1,e2,N)
    df = diff(f);
    f = matlabFunction(f);
    df = matlabFunction(df);
    for i = 1:N
        F = f(x0);
        DF = df(x0);
        if(abs(F) < e1)
            x1 = x0;
            return;
        end
        if(abs(DF)< e2)
            x1 = -1;
            disp("失败");
            return;
        end
        x1 = x0 - F/DF;
        if(abs(x0-x1)<e1)
            return;
        end
        x0 = x1;
```

```
    end
 x1 = -1;
 disp("失败");
end
```

```
    1.1

ans =

0.7390851781

1.2

ans =

0.5885327428

1.3

ans =

0.567143165

1.4

ans =

0.5666057041
```

Published with MATLAB® R2020b

```
   n=4;
disp("1.1");
A=[0.4096,0.1234,0.3678,0.2943;0.2246,0.3872,0.4015,0.1129;0.3645,0.1920,0.3781,0.0643
;0.1784,0.4002,0.2786,0.3927];
B=[1.1951;1.1262;0.9989;1.2499];
vpa(Gauss(A,B,n),10)

n=4;
disp("1.2");
A=[136.01,90.86,0,0;90.86,98.81,-67.59,0;0,-67.59,132.01,46.26;0,0,46.26,177.17];
B=[226.87;122.08;110.68;223.43];
vpa(Gauss(A,B,n),10)

n=4;
disp("1.3");
A=[1,1/2,1/3,1/4;1/2,1/3,1/4,1/5;1/3,1/4,1/5,1/6;1/4,1/5,1/6,1/7];
B=[25/12;77/60;57/60;319/420];
vpa(Gauss(A,B,n),10)

n=4;
disp("1.4");
A=[10,7,8,7;7,5,6,5;8,6,10,9;7,5,9,10];
B=[32;23;33;31];
vpa(Gauss(A,B,n),10)

n=4;
disp("2.1");
A=[197,305,-206,-804;46.8,71.3,-47.4,52;88.6,76.4,-10.8,802;1.45,5.9,6.13,36.5];
B=[136;11.7;25.1;6.6];
```

```
vpa(Gauss(A,B,n),10)


n=4;
disp("2.2");
A=[0.5398,0.7161,-0.5554,-0.2982;0.5257,0.6924,0.3565,-0.6255;0.6465,-0.8187,-0.1872,0
.1291;0.5814,0.94,-0.7779,-0.4042];
B=[0.2058;-0.0503;0.107;0.1859];
vpa(Gauss(A,B,n),10)


n=3;
disp("2.3");
A=[10,1,2;1,10,2;1,1,5];
B=[13;13;7];
vpa(Gauss(A,B,n),10)


n=3;
disp("2.4");
A=[4,-2,-4;-2,17,10;-4,10,9];
B=[-2;25;15];
vpa(Gauss(A,B,n),10)


function X = Gauss(A,B,n)
X = linspace(0,0,n);
for i = 1 : n
    max = abs(A(i,i));
    maxi = i;
    %找 max a[k][i]
    for j = (i + 1) : n
        if(abs(A(j,i)) > abs(max))
```

```
        maxi = j;
        max = A(j,i);
    end
end
if(max == 0)
    disp("奇异标志");
    return;
end
if(maxi ~= i)
    %交换 B
    temp = B(i);
    B(i) = B(maxi);
    B(maxi) = temp;
    for j = i : n
        temp = A(i,j);
        A(i,j) = A(maxi,j);
        A(maxi,j) = temp;
    end
end
%化简
for j = i+1 : n
    m = A(j,i)/A(i,i);
    B(j) = B(j) - m*B(i);
    for k = i : n
        A(j,k) = A(j,k) - m*A(i,k);
    end
end
if(A(n,n) == 0)
    disp("奇异标志")
```

```
        return;
    end
end
    %回代
    X(n) = B(n) / A(n,n);
    for i = n-1 :-1 : 1
        X(i) = B(i);
        for j = i+1 :n
            X(i) = X(i) - X(j) * A(i,j);
        end
        X(i) = X(i)/A(i,i);
    end
end
```

1.1

ans =

[1.0, 1.0, 1.0, 1.0]

1.2

ans =

[1.0, 1.0, 1.0, 1.0]

1.3

ans =

```
[1.0, 1.0, 1.0, 1.0]

1.4

ans =

[1.0, 1.0, 1.0, 1.0]

2.1

ans =

[0.9536791069, 0.3209568455, 1.078708076, -0.09010850954]

2.2

ans =

[0.516177298, 0.4152194728, 0.1099661029, 1.036539223]

2.3

ans =

[1.0, 1.0, 1.0]

2.4

ans =
```

```
[1.0, 1.0, 1.0]
```

Published with MATLAB® R2020b