



模式识别

第四章

基于贝叶斯决策的最小风险分类





Bayes法则—最小错误贝叶斯分类

对于两类 ω_1 , ω_2 问题, 直观地, 可以根据后验概率做判决:

若 $p(\omega_1|x) > p(\omega_2|x)$ 则 $x \in \omega_1$

若 $p(\omega_1|x) < p(\omega_2|x)$ 则 $x \in \omega_2$





最小错误分类规则是最优的吗？





最小错误分类规则的分析

- (1) 最小错误：相当于利益最大化
- (2) 证券等投资中只追求收益最大化是不可取的
- (3) 做决策时，应该考虑到事物反面带来的影响——权衡利弊





决策的负面影响及风险

(a) 决策的排他性：只能做出一个选择（择偶等）

(b) 资源使用的不可重复性：例如，全部资金买了股票，就无法买房

(c) 某个决策可能带来较大收益的同时，可能也带来较大风险（高收益，高风险）：企业大规模扩张，高杠杆投资等





决策的负面影响及风险

(d) 难以保证一个合理的决策在实际中是最优的，例如买入一项资产（或股票），有51%的盈利可能性，而亏损的可能性为49%。
买还是不买？

再如，

(1) 一个足球竞彩的下注，**成功的可能性是70%，而失败的可能性是30%**（如果这场比赛重复进行100次，其中**70次左右的比赛结果为下注的结果——成功**，而**30次左右的比赛结果与下注的结果相反——失败**）

(2) **下注成功时获得收益为本金的20%，而失败时失去所有本金——一无所有！**





经济活动的风险



(经济日报)坚决守住不发生系统性金融风险底线

2018-07-04 09:29:00

中国期货业协会网站



新一届国务院金融稳定发展委员会7月2日成立并召开会议，研究部署打好防范化解重大风险攻坚战等相关工作。专家表示，中国具备防止系统性金融风险爆发的良好宏观环境，有能力、有信心打好这场攻坚战。

中国期货





灾难预报时如何考虑风险？



新华网

WWW.NEWS.CN

2019/11/11





巴菲特的风险观和风险控制方法

2017-04-10 14:15

巴菲特在2004年的股东大会上,说了一句非常重要的话,这句话揭示了巴菲特的风险观,也透露了巴菲特控制风险的核心原则和手段。巴菲特说:“控制风险的最好办法是深入思考,而不是投资组合。”“真正的风险来自于你不知道自己在做什么。”这两句话合在一起,构成巴菲特的风险观和风险管理原则。

从价值投资的角度,假如你持有的企业破产了,那么风险就无法回避了,但是巴菲特没有强调风险发生是企业的问题,巴菲特没有指责企业破产使自己陷入了风险,而是强调了投资人所以遇到风险,是因为没有深入思考,从而不知道自己做了什么。巴菲特认为你所以遇到一





神奇投资公式

$$\text{final} = p_1 * \text{positive_income} + p_2 * \text{negative_income}$$

若采用之前最小错误分类的观点： 则只判断 p_1 ， p_2 大小





风险与“收益”的量化与决策

最小风险分类





- (1) 假设有 c 个类别
- (2) 一个决策表示将样本分类到 c 个类别的其中一个
- (3) 假设样本属于 c 个类别中每一个的概率都不等于零
- (4) 所以将样本分类到 c 个类别的任意一个时，都存在 c 个不同的风险（付出的代价）





决策 α_i :

将样本 x 分类到第 i 类





在决策表中，每一个决策 α_i 对应存在 c 个损失。对于 x ，定义在采取决策 α_i 时的条件期望损失（条件风险）为：

$$R(\alpha_i | x) = E[\lambda(\alpha_i, \omega_j)] = \sum_{j=1}^c \lambda(\alpha_i, \omega_j) P(\omega_j | x)$$

$$i = 1, 2, \dots, a$$





\mathbf{x} 是随机向量的观察值，对于其不同观察值，采取不同的决策 α_i 时，对应不同的条件风险。所以，不同的 \mathbf{x} ，将会采用不同的决策

决策可以看成随机向量 \mathbf{x} 的函数，记为 $\alpha(\mathbf{x})$ （随机变量），可以定义期望风险为

$$R = \int R(\alpha(\mathbf{x}) | \mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

注：积分在整个特征空间上进行





差别:

- 条件风险 $R(\alpha_i/x)$ 只反映出，对某一个 x 取值，采取决策行动 α_i 所带来的风险
- 期望风险 R 则反映，在整个特征空间中不同的 x 取值，采取相应的决策 $\alpha(x)$ 所带来的平均风险





目标：所采取的一系列决策行动应该使**期望风险**达到最小

手段：如果在采取每一个决策时，都使其条件风险最小，则对所有的 x 作决策时，其期望风险也必然达到最小

决策：最小风险**Bayes**决策





- 假设:

- α_k 表示将样本（样例 \mathbf{x} ）分类为第 k 类





最小风险Bayes决策规则:

若 $R(\alpha_k | \mathbf{x}) = \min_{i=1,2,\dots,a} R(\alpha_i | \mathbf{x})$, 则 $x \in \alpha_k$

采取决策

α_k

其中

$$R(\alpha_i | x) = \sum_{j=1}^c \lambda(\alpha_i, \omega_j) P(\omega_j | x), i = 1, 2, \dots, a$$





$\lambda(\alpha_i, \omega_j)$ 也写为 $\lambda(\alpha_j|\omega_j)$, λ_{ij}

物理意义：

本来属于第 j 类的样本被采取决策 α_i （被分类到第 i 类）时的损失





最小风险Bayes决策的步骤

①在已知类先验概率和类概率密度函数的情况下，
计算待识 \mathbf{x} 的后验概率（**Bayes**公式）

$$P(\omega_i | \mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} | \omega_i)P(\omega_i)}{\sum_{j=1}^c p(\mathbf{x} | \omega_j)P(\omega_j)}$$





②根据决策表，计算每一个决策的条件风险

$$R(\alpha_i | x) = \sum_{j=1}^c \lambda(\alpha_i, \omega_j) P(\omega_j | x), i = 1, 2, \dots, a$$

③找出条件风险最小值所对应的决策，对x
采取该决策（归属到该类）

若 $R(\alpha_k | x) = \min_{i=1,2,\dots,c} R(\alpha_i | x)$ ，则 $x \in \omega_k$





例: 区分正常与异常细胞

正常细胞

$$P(\omega_1) = 0.9$$

$$p(x | \omega_1) = 0.2$$

$$\lambda_{11} = 0$$

$$\lambda_{21} = 1$$

异常细胞

$$P(\omega_2) = 0.1,$$

$$p(x | \omega_2) = 0.4$$

$$\lambda_{12} = 6$$

$$\lambda_{22} = 0$$

后验概率

$$P(\omega_1 | x) = 0.818$$

$$P(\omega_2 | x) = 0.182$$





条件风险

$$R(\alpha_1 | x) = \sum_{j=1}^2 \lambda_{1j} P(\omega_j | x) = \lambda_{12} P(\omega_2 | x) = 1.092$$

$$R(\alpha_2 | x) = \lambda_{21} P(\omega_1 | x) = 0.818$$

决策: 归属到异常细胞

原因: 损失起主导作用

	正常	异常
归正常	0	6
归异常	1	0





两种决策规则之间的关系

$$\lambda(\alpha_i | \omega_j) = \lambda_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ 1, & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, c$$

意义:

正确决策没有损失，错误决策损失都为 1

附件条件: c 个类别对应 c 个决策（无拒绝类）





$$R(\alpha_i | x) = \sum_{j=1}^c \lambda(\alpha_i, \omega_j) P(\omega_j | x) = \sum_{j \neq i} P(\omega_j | x)$$

对 x 采取决策（归属） ω_i 时的条件错误概率

$$R(\alpha_i | x) \text{ 最小} \longrightarrow \sum_{j \neq i} P(\omega_j | x) \text{ 最小}$$

$$P(\omega_i | x) = 1 - \sum_{j \neq i} P(\omega_j | x) : \text{最大}$$

结论：在 0-1 损失函数的条件下，使风险最小的Bayes决策等价于使错误率最小的Bayes决策，后者是前者的特例





例题：

地震预报是比较困难的一个课题，可以根据地震与生物异常反应之间的联系来进行研究。根据历史记录统计，地震前一周内出现生物异常反应的概率为 50%，而一周内没有发生地震但也出现了生物异常反应的概率为 10%。假设某一个地区属于地震高发区，发生地震的概率为 20%。问：

如果某日观察到明显的生物异常反应现象，是否应当预报一周内将发生地震？
解：

把地震是否发生设成两个类别：发生地震为 ω_1 ，不发生地震为 ω_2 ；

则两个类别出现的先验概率 $P_1=0.2$ ， $P_2=1-0.2=0.8$ ；

设地震前一周是否出现生物异常反应这一事件设为 x ，当 $x=1$ 时表示出现了， $x=0$ 时表示没出现；

则根据历史记录统计可得，： $p(x=1|\omega_1)=0.5$ ， $p(x=1|\omega_2)=0.1$





设地震前一周是否出现生物异常反应这一事件设为 x ，当 $x=1$ 时表示出现了， $x=0$ 时表示没出现；

则根据历史记录统计可得， $p(x=1|\omega_1)=0.5$ ， $p(x=1|\omega_2)=0.1$

所以，某日观察到明显的生物异常反应现象，此时可以得到将发生地震的概率为：

$$\begin{aligned} p(\omega_1|x=1) &= (P_1 \times p(x=1|\omega_1)) / (P_1 \times p(x=1|\omega_1) + P_2 \times p(x=1|\omega_2)) \\ &= (0.2 \times 0.5) / (0.2 \times 0.5 + 0.8 \times 0.1) = 5/9 \end{aligned}$$

而不发生地震的概率为：

$$\begin{aligned} p(\omega_2|x=1) &= (P_2 \times p(x=1|\omega_2)) / (P_1 \times p(x=1|\omega_1) + P_2 \times p(x=1|\omega_2)) \\ &= (0.8 \times 0.1) / (0.2 \times 0.5 + 0.8 \times 0.1) = 4/9 \end{aligned}$$

因为 $p(\omega_1|x=1) > p(\omega_2|x=1)$ ，所以在观察到明显的生物异常反应现象时，发生地震的概率更高，所以应当预报一周内将发生地震。





“震撼世界的1976年7月28日唐山大地震，震前曾被准确地预测出来了。”

唐山作家张庆洲经过长时间调查，最近向世人披露了这一令人震惊的消息。《报告文学》杂志社推出张庆洲的长篇调查《唐山警世录》，揭开了鲜为人知的一幕又一幕……

“地震前，地震监测网覆盖了整个唐山地区。”张庆洲援引1986年《地震报》统计数据说，1976年上半年，唐山地区群测点中的骨干点就达85个。

“各种异常都已经十分明显了，光监测地震用的微安表就不知道烧了多少块。”张庆洲说，据他调查，绝大多数监测点都发现了不同程度的临震异常，至少十几个点向上级单位发出了短期临震预报。

张庆洲把几十盘录音带往桌子上一摊，对记者说，“这是几十位当事人的采访录音，里面讲的是一个20多年前的秘密。”

当年唐山地震监测网的工作人员中，张庆洲说他印象最深的，是开滦马家沟矿地震台的马希融。这位担任过河北省第六、七、八届人大常委的七旬老者，曾两次发出了临震预报。

从1976年5月28日开始，马希融发现，一直平稳的地电阻率值出现了急速下降的现象。他一边加紧观测计算，一边注意观察地下水和动物变化。为慎重起见，马希融还与其他地震台站进行沟通，最后确认监测结果无误。7月6日，马希融正式向国家地震局、河北省地震局、开滦矿务局地震办公室，发出短期将发生强震的紧急预报。

7月14日，国家地震局派来两位分析预报室负责地电的专家。他们检查了设备、线路，没有发现任何问题，之后指出，地电阻率值下降是干扰引起的。





（张庆洲走访唐山大地震的当事人）

7月14日，北京市地震队紧急给国家地震局打电话，提出请国家地震局分析预报室立即安排时间听取汇报。国家地震局说，先到天津、唐山等地了解情况，21日再听汇报。

可到了21日，国家局没来人。北京地震队的耿庆国回忆说，“北京队业务组副组长张国民直接给主管华北震情的国家地震局分析预报室的副主任梅世蓉打了电话，请求立即听取汇报，但梅世蓉把汇报的时间推迟到了26日。”

“26日那天，国家局来了15个人，梅世蓉没到。国家局的同志听取了整整一天的汇报之后，传达了梅世蓉的意见。”耿庆国回忆说，梅世蓉的意见是“四川北部为搞防震已经闹得不可收拾，京津唐地区再乱一下可怎么得了？北京是首都，预报要慎重！”





唐山大地震中,有一个少为人知的“青龙奇迹”——距唐山市中心仅65公里的青龙县,在大地震中无一人伤亡。

1976年7月,国家地震局的一行人到北京市地震队听取汇报。国家地震局以汪成民为代表的一批同志坚持认为大震将近,但他们的意见没有得到重视。在这种情况下,汪成民做了一次“越轨”行为——在全国地震群防工作经验交流会的晚间座谈会上,把“7月22日到8月5日唐山、滦县一带可能发生5级以上地震”的震情捅了出去。

青龙县科委主管地震工作的王春青听了通报,从唐山火速赶回县里。7月24日,青龙县“一把手”冉广歧顶着摘乌纱帽的风险拍了板,向全县预告灾情。7月25日,青龙县向县三级干部800多人作了震情报告,要求必须在26日之前将震情通知到每一个人。当晚,近百名干部十万火急地奔向各自所在的公社。青龙县的人几乎全被赶到室外生活。

这一违反政府常规的做法,保证了在惨烈的大地震中,青龙县无一人伤亡。

