复杂系统的可靠性分析——基于贝叶斯网络与蒙特卡洛仿真

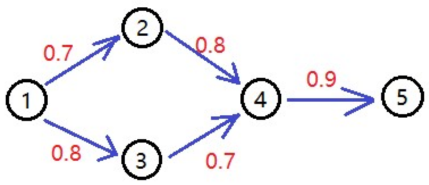
工业工程一班 朱明仁 **1120160424**

1、 系统模型

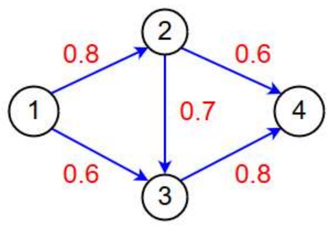
系统由组件构成，每一个组件都有它的输入和输出，这些输入输出之间的耦合使得组件相互连接，形成相互影响的整体。在这里把组件抽象成从输入到输出之间的过程，组件的可靠性即为成功实现该过程的概率，由此组件便有了“方向”的属性，可以用有向箭头来表示。将系统中的组件按输入输出的耦合关系首尾相接，便构成了一个可以代表该系统的有向图，此即为该系统的网络模型。

这里给出三个示例模型（蓝色箭头代表组件，红色小数代表组件可靠性），作为下面讨论和分析的对象：

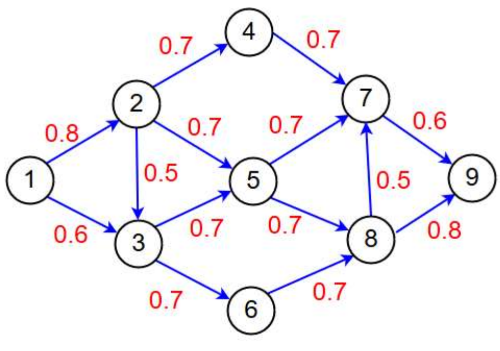
例 1



例 2



例 3



在下面的讨论中，我们用组件的输入输出对来表示该组件，例如例 1 中组件（4,5）的可靠性为 0.9。

P.S.在这里我们把组件作为有向图的弧来考虑，不过也许也有把组件作为点来考虑的，两者之间可以相互转化，不影响讨论。

2、 可靠性的基础分析

串联组件的可靠性：$R=\prod_{i\in I}R_i$

并联组件的可靠性：$R=1-\prod_{i\in I}(1-R_i)$

运用上面两个公式可以求解混联系统的可靠性，如例 1：

$R_1=[1-(1-0.7\times0.8)(1-0.8\times0.7)]\times0.9=0.72576$

但遇到桥式网络时便有些麻烦，如例 2，需要对组件（2,3）分情况讨论：

$$R_2=(1-0.7)[1-(1-0.8\times0.6)(1-0.6\times0.8)]$$
$$+0.7\times\begin{bmatrix}(0.8+0.6-0.8\times0.6)(0.6+0.8-0.6\times0.8)\\ -0.6\times0.6\times(1-0.8)\times(1-0.8)\end{bmatrix}$$
$$=0.80128$$

对于类似于例 3 或者比例 3 更为复杂的系统,这种朴素的方法显然不能奏效。

3、 基于贝叶斯网络的分析

对于复杂系统，我们在这里提出一种基于贝叶斯网络的分析方法。

以例 3 为例，该系统如果运行正常，则必定在节点 1 与节点 9 之间有一条通路，我们把节点看做事件，事件 1 发生的概率为 1，事件 9 发生的概率即为该系统的可靠性。

依据各组件的连接关系与可靠性，我们可以写出各个事件基于前序事件的条件概率，例如：

$\mathrm{P}(9|{\sim}7,{\sim}8)=0$

$\mathrm{P}(9|7,{\sim}8)=0.6$

$\mathrm{P}(9|{\sim}7,8)=0.8$

$\mathrm{P}(9|7,8)=1-(1-0.6)(1-0.8)=0.92$

“~”代表事件未发生。

在贝叶斯网络中，我们所需要计算的只有两类：概率或条件概率，也就是形如 P({Ai})或 P({Ai}|{Bi})的式子的值。在此，我们提出以下分治递归算法来计算如例 3 所示系统的可靠性：

（1） 计算 P({Ai})时，若{Ai}中的所有事件的前序事件也都包含在{Ai}中，那么对其用条件概率展开：

$$P(\{Ai\})=\prod_{Ai\in\{Ai\}}P(Ai|\{Ai^*\})$$

其中{Ai*}为 Ai 的前序事件集合；否则找出任意一个不在{Ai}中的前序事件 B*对其用全概率公式展开：

$$P(Ai) = P(\{Ai\}|B^*) + P(\{Ai\}|\sim B^*)$$

（2） 计算 P({Ai}|{Bi})时，如果{Ai}中只有一个元素 A，且{Bi}恰好为事件 A 的前序事件集合{Ai*}，那么对其用并联公式计算值：

$$P(\{Ai\}|\{Bi\}) = 1 - \prod_{Bi\in\{Ai^*\}} (1 - P(A|Bi, \sim(\{Ai^*\} - Bi)))$$

否则按照条件概率的定义式展开：

$$P(\{Ai\}|\{Bi\}) = \frac{P(\{Ai\},\{Bi\})}{P(\{Bi\})}$$

依据上述算法所得各示例的可靠性如下：

R1=0.72576，R2=0.80128，R3=0.71566

例 1、例 2 与朴素方法的计算结果相同。

虽然贝叶斯网络可以求出类似于例 3 的复杂系统可靠性的精确解，但是也具有无法避免的缺陷：不能求解带有反馈机制的复杂系统（贝叶斯网络必须是有向无环图），而且其计算量大，对于更大的复杂系统需要耗费较多的时间。

4、 基于蒙特卡洛仿真的分析

对于可以用概率描述的复杂系统，相比贝叶斯分析不能求解反馈系统与耗时较长的缺陷，蒙特卡洛方法给出了一个快速且有效的解决方向。

对于描述复杂系统的网络，我们可以依据概率通过随机方式给出网络中弧的或通或断，构造大量的随机网络来检测系统的可靠性。

各示例通过 10 万次的仿真求得的系统可靠性如下：

R1=0.72607，R2=0.80144，R3=0.71677

与贝叶斯分析的结果十分相近，误差控制在千分位上。

附件：以上三个示例的演示软件