考研数学 方法技巧 典型问题

第一版

黄国铭

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(\tan r-\sin r)^2}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & & & \\ \gamma & \alpha & \beta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma & \alpha & \beta \\ & & & \gamma & \alpha\end{vmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

$$p_k=\frac{\dbinom{M}{k}\dbinom{N-M}{n-k}}{\dbinom{N}{n}},\quad \begin{matrix}k=0,1,\cdots,r\\ r=\min\{M,n\}\end{matrix}$$

前言

关于本书

致谢

目录

第一部分

高等数学

第 1 章

函数、数列与极限

“迟序之数, 非出神怪, 有形可检, 有数可推.”

——祖冲之

函数、数列和极限是数学中重要的概念, 它们在分析、微积分、数学分析等领域都有广泛的应用. 下面简要介绍这几个概念:

1. 函数: 函数是一种映射关系, 它将一个集合中的每个元素映射到另一个集合中的唯一元素. 在数学中, 我们通常用 $f(x)$ 或 $y = f(x)$ 表示函数, 其中 x 是自变量, y 是因变量. 函数可以是线性的、多项式的、三角函数、指数函数、对数函数等各种形式. 函数的性质包括定义域、值域、奇偶性、周期性等.

2. 数列: 数列是按照一定规律排列的一组数的序列. 数列可以是有限的, 也可以是无限的. 常见的数列有等差数列、等比数列、斐波那契数列等. 数列的极限是指当数列的项趋向于某个值时, 这个值称为数列的极限. 数列的极限可以是有限的, 也可以是无穷的.

3. 极限: 极限是数学中一个重要的概念, 用来描述函数或数列在某个点或无穷远处的“接近程度”. 对于函数 $f(x)$, 当 x 趋近于某个值 a 时, 如果 $f(x)$ 的取值趋近于某个确定的值 L, 则称 L 是函数 $f(x)$ 在 x 趋近于 a 时的极限, 记作 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. 类似地, 对于数列 $\{a_n\}$, 当 n 趋向于无穷大时, 如果数列的项趋近于某个确定的值 L, 则称 L 是数列 $\{a_n\}$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

函数、数列和极限是数学中基础而重要的概念, 它们在理论研究和实际问题求解中都有着重要的作用.

1.1 函数

函数的基本特征包括: 定义域和值域、解析式与图像、奇偶性、单调性、零点以及渐近线等, 这些基本特征可以帮助我们更好地理解和分析函数的性质和行为.

1.1.1 函数的性质

定义 1.1.1 (函数的概念). 设有两个变量 x 与 y, 如果变量 x 在其变化范围 D 内任取一个确定的数值时, 变量 y 按照一定的规则 f 总有唯一确定的数值和它对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记为 $y=f(x)$, x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为函数的定义域, f 表示由 x 确定 y 的对应规则.

例 1.1.1. 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}+\arctan\dfrac{x-1}{5}$ 的定义域.

要使函数有意义, 变量 x 必须同时满足 $\begin{cases}25-x^2>0\\ \left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow -4\leqslant x<5$, 因此定义域为 $[-4,5)$.

定义 1.1.2 (有界性). 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义, 如果存在一个正常数 M, 使得对于 x 在 D 上的任意取值, 均有 $|f(x)|<M$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界, 否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

定理 1.1.1 (函数的有界性定理). 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界; 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在 (见定义 1.1.10), 则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

例 1.1.2 (2004 数三). 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界

A. $(-1,0)$ B. $(0,1)$ C. $(1,2)$ D. $(2,3)$

当 $x\neq 0,1,2$ 时, $f(x)$ 连续, 而

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=-\frac{\sin 3}{18},\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=-\frac{\sin 2}{4},\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=\frac{\sin 2}{4},\ \lim_{x\to 1}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to 2}f(x)=\infty$$

所以函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上有界.

定义 1.1.3 (单调性). 设函数 $f(x)$ 在某区间 D 上有定义, 如果对于 D 上任意两点 x_1,x_2, 且 $x_1<x_2$, 均有 $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调递增 (或单调递减). 单调递增与单调递减函数统称为单调函数.

例 1.1.3. 由 $f'(x_0)>0$ 能否得到函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内单调递增?

不能, 理由如下: 利用一阶导数判断函数的单调性, 需要已知导数在某区间的正负, 而不是某一点导数值的正负

定理 1.1.2 (函数的单调性判定). 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 如果在区间上有 $f'(x)\geqslant 0$ (或 $f'(x)\leqslant 0$) (且不在任一子区间取恒等号), 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格单调递增 (或严格单调递减).

定义 1.1.4 (奇偶性). 设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 D 上有定义, 如果对 D 上任意点 x, 均有 $f(-x)=f(x)$ (或 $f(-x)=-f(x)$), 则称函数 $f(x)$ 为偶函数 (或奇函数). 奇函数的图像关于原点对称, 偶函数的图像关于 y 轴对称.

定义 1.1.5 (周期性). 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义, 如果存在正常数 T, 使得对于 D 上任意 x, 均有 $f(x+T)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, 使上式成立的最小正数为周期函数的最小正周期. 并不是每一个周期函数都有最小正周期.

定理 1.1.3 (函数的周期性定理). 若函数 $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=\cdots=f(x+nT)$.

例 1.1.4 (1987 数二). $f(x)=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x}\ (-\infty<x<+\infty)$ 是

A. 有界函数　　B. 单调函数　　C. 周期函数　　D. 偶函数

由于 $|x\sin x|$ 和 $\mathrm{e}^{\cos x}$ 都是偶函数, 则其乘积 $f(x)=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x}$ 为偶函数, 选 D.

例 1.1.5 (2014 数一). 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, 且 $f'(x)=2(x-1)\ (0\leqslant x\leqslant 2)$, 求 $f(7)$.

$f(x)=\int 2(x-1)\mathrm{d}x=x^2-2x+C$, 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(0)=0$, 可知 $C=0$, 于是 $f(x)=x^2-2x$, 又 $f(x)$ 的周期为 4, 于是 $f(7)=f(-1+8)=f(-1)=-f(1)=1$.

定义 1.1.6 (基本初等函数与初等函数). 常数函数 $y=c$ (c 为常数), 幂函数 $y=x^\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$, 指数函数 $y=a^x(a\neq 1,a>0)$, 对数函数 $y=\log_a x(a\neq 1,a>0)$, 三角函数和反三角函数称为基本初等函数. 由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合, 并由一个式子表示的函数称为初等函数.

几个常用的特殊函数:

(1) 绝对值函数: $y=|x|$.

(2) 取整函数: $y=[x]$, 表示不超过 x 的最大整数.

(3) *Dirichlet* 函数: $D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$

1.1.2 复合函数与反函数

定义 1.1.7 (复合函数). 如果我们有两个函数 f 和 g, 而两者的定义域分别是 D_f 和 D_g, 值域分别是 I_f 和 I_g. 如果 $I_f\cap D_g\neq\varnothing$, 那我们定义复合函数 为

$$g\circ f:=\{(x,z)\mid(\exists y\in I_f\cap D_g)\,[y=f(x)\wedge z=g(y)]\}.$$

例 1.1.6 (2001 数二). 设 $f(x)=\begin{cases}1,|x|\leqslant 1\\0,|x|>1\end{cases}$, 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

A. 0　　B. 1　　C. $\begin{cases}1,|x|\leqslant 1\\0,|x|>1\end{cases}$　　D. $\begin{cases}0,|x|\leqslant 1\\1,|x|>1\end{cases}$

因为 $f\in\{0,1\}$，所以 $f[f(x)]=1$，那么 $f\{1\}=1$，因此选 B.

例 1.1.7. 已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+(2x)^n+x^{2n}}\ (x\geqslant 0)$，$g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$，求 $f(g(x))$ 的表达式.

由推论 *1.3.3* 知，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1^n+1^n+(2x)^n+(x^2)^n}=\max\{1,2x,x^2\}=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2}\\ 2x, & \dfrac{1}{2}\leqslant x<2\\ x^2, & 2\leqslant x\end{cases}$ 因此 $g(x)=\begin{cases}1, & -1\leqslant x<1\\ -x, & |x|>1\\ 0, & x=1\end{cases}$，于是 $g(x)$ 的图像如图 *1.1.1* 所示，那么

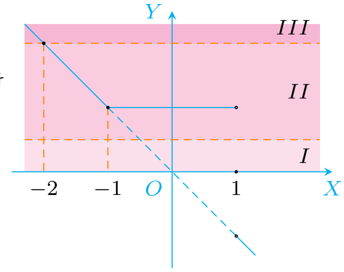


图 1.1.1

$$I: x=1\Rightarrow g(1)=0\Rightarrow f(g(0))=1$$

$$II:\begin{cases}-2<x<-1\\ 1\leqslant x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}g(x)=-x\\ g(x)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x>2\\ -x>1\\ -1\leqslant x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(g(x))=x^2\\ f(g(x))=-2x\\ f(g(x))=2\end{cases}$$

$$III:\ x\leqslant -2\Rightarrow g(x)=-x\Rightarrow f(g(x))=x^2$$

综上，$f(g(x))=\begin{cases}x^2, & x\leqslant -2\\ -2x, & -2<x<-1\\ 2, & -1\leqslant x<1\\ 1, & x=1.\end{cases}$

定义 1.1.8 (反函数). 设 f 为一函数，其定义域为 D_f，值域为 I_f，如果存在一函数 g，其定义域和值域分别为 I_g，D_g，并对每一 $x\in D_f$ 有：$g(f(x))=x$，则称 g 为 f 的*反函数*，记为 f^{-1}.

例 1.1.8. 已知 g 是 f 的反函数，则 $f(2x)$ 的反函数为

A. $y=\dfrac{1}{2}g(x)$　　B. $y=2g(x)$　　C. $y=\dfrac{1}{2}g(2x)$　　D. $y=2g(2x)$

令 $y=f(2x)$，反解出 $x: x=\dfrac{1}{2}g(y)$，交换 x 与 y 的位置，于是 $y=\dfrac{1}{2}g(x)$，选 A.

例 1.1.9. 求 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数表达式.

令 $y_1=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}$，$y_2=\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$，那么 $y=y_1+y_2$，又因为

$$y_1^3+y_2^3=(y_1+y_2)(y_1^2-y_1y_2+y_2^2)=(y_1+y_2)[(y_1+y_2)^2-3y_1y_2]$$

其中 $y_1^3+y_2^3=x+\sqrt{1+x^2}+x-\sqrt{1+x^2}=2x$，$y_1y_2=\sqrt[3]{x^2-1-x^2}=-1$，因此

$$2x=y(y^2+3)\Rightarrow x=\frac{y(y^2+3)}{2}.$$

例 1.1.10. 设 $f(x)=2023x^{2023}+x+1$，$f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，计算极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(2023x)-f^{-1}(x)}{\sqrt[2023]{x}}.$$

设 $g(x)=f^{-1}(x)$，由定义 *1.1.8*，得 $f(g(x))=x$，于是

$$x=2023g^{2023}(x)+g(x)+1$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)}{\sqrt[2023]{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{\sqrt[2023]{2023x^{2023}+g(x)+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[2023]{2023+\dfrac{1}{g^{2022}(x)}+\dfrac{1}{g^{2023}(x)}}}=\frac{1}{\sqrt[2023]{2023}}$$

进而有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(2023x)}{\sqrt[2023]{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(2023x)}{\sqrt[2023]{2023x}}\cdot\frac{\sqrt[2023]{2023x}}{\sqrt[2023]{x}}=\frac{\sqrt[2023]{2023}}{\sqrt[2023]{2023}}=1$$

故原极限为 $1-\dfrac{1}{\sqrt[2023]{2023}}$.

1.1.3 函数的连续性及间断点的类型

连续函数

定义 1.1.9 (函数连续). 若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 若函数 $f(x)$ 在区间 I 内每一点都连续, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内连续.

定义 1.1.10 (单侧连续). 若 $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处左连续; 若 $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处右连续.

定理 1.1.4 (函数连续的充要条件). $f(x)$ 在点 x_0 处连续等价于 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

第一类间断点

定义 1.1.11 (可去间断点). 如果不连续点 x_0 两侧函数的极限存在且相等, 无论在 x_0 处是否定义 (若有定义, 则函数值不是在这一点的左右极限), 这类间断点叫*可去间断点* (或*可移间断点*), 这类函数通过补充定义

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

后可变为连续函数.

定义 1.1.12 (跳跃间断点). 如果不连续点 x_0 两侧函数的极限存在但不相等, 称函数在这些点是*跳跃间断点*.

第二类间断点

所有不是第一类间断点的类型, 都是第二类间断点.

定义 1.1.13 (无穷间断点). 函数在某点的左右极限至少有一个是无穷, 这样的间断点就是*无穷间断点*, 由此可知函数在这个间断点的某个邻域中无界. 无穷间断点的一个重要特性是它是必不可积的.

定义 1.1.14 (振荡间断点). 对于一个函数, 当自变量趋于某一点时, 函数值在两个常数间变动无限多次, 这时函数在这一点处不存在有限极限也不是无穷. 这样的间断点是*振荡间断点*, 由此可知函数在这个间断点的某个邻域中有界. 振荡间断点的一个重要特性是它可能是可积的.

例 1.1.11. 设 $f(x) = \dfrac{\left(1 - 2^{\frac{1}{x-1}}\right) \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{2}{x-1}}} \cdot \arctan \dfrac{[\, x+1 \,]}{x+1}$, 则下列关于 $f(x)$ 间断点的描述正确的是

A. $f(x)$ 有一个可去间断点, 一个跳跃间断点, 一个第二类间断点

B. $f(x)$ 有两个可去间断点, 一个第二类间断点

C. $f(x)$ 有两个跳跃间断点, 一个第二类间断点

D. $f(x)$ 有一个跳跃间断点, 两个第二类间断点

因为 $x \neq -1, 0, 1$, 下求各不连续点的左右极限值,

$$f(-1^-) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1-\delta \\ \delta > 0}} f(x) = \frac{\left(1 - 2^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{e}^{-1}}{1 + 2^{-1}} \cdot \frac{\pi}{2},\ f(-1^+) = \lim_{x \to -1^+} = \lim_{\substack{x \to -1+\delta \\ \delta > 0}} f(x) = 0$$

则 $x = -1$ 为 f 的跳跃间断点;

$$f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0-\delta \\ \delta > 0}} f(x) = 0,\ f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0+\delta \\ \delta > 0}} f(x) = +\infty$$

则 $x = 0$ 为 f 的第二类间断点;

$$f(1^-) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1-\delta \\ \delta > 0}} f(x) = \mathrm{e} \cdot \arctan \frac{1}{2},\ f(1^+) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1+\delta \\ \delta > 0}} f(x) = 0$$

则 $x = 1$ 为 f 的跳跃间断点, 故选 C.

1.1.4 渐近线方程

定义 1.1.15 (铅直渐近线). 若 $\lim\limits_{x \to \varepsilon^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to \varepsilon^+} f(x)$ 至少有一个为无穷大, 则称 $x = \varepsilon$ 为曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线.

定义 1.1.16 (水平渐近线). 若 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ 或 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, 其中 b 为常数, 则称 $y = b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

定义 1.1.17 (斜渐近线). 若 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ 存在且不为零, 同时 $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - kx] = b$ 也存在 (或 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ 存在且不为零, 同时 $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b$ 存在), 则称 $y = kx + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 斜渐近线.

例 1.1.12. 求下列曲线的全部渐近线.

(1) $y = \sqrt{4x^2 + x} \ln\left(2 + \dfrac{1}{x}\right)$.	(2) $y = \mathrm{e}^{x^{-2}} \arctan \dfrac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x+2)}$.
(3) $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2} \cos(2 \arctan x)$.	(4) $y = (2x + 1) \arctan x + \dfrac{\arctan \frac{1}{x^2 - 1}}{x^2 + x - 2}$.
(5) $y^3 = x(x^2 - 2y)$.	(6) $x^3 - y^3 = 6xy$.

(1) 由 $\lim\limits_{x \to (-\frac{1}{2})^+} y = -\infty$, 且 $\lim\limits_{x \to 0^-} y = 0$, 所以曲线存在一条铅直渐近线 $x = -\dfrac{1}{2}$, 又

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x}}{x} \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{4 + \frac{1}{x}} \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2 \ln 2$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \to +\infty} (y - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{4x^2 + x} \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) - 2 \ln 2x\right] \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{4x^2 + x} \ln 2 - 2 \ln 2 \cdot x + \sqrt{4x^2 + x} \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) - \sqrt{4x^2 + x} \ln 2\right] \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x}{\sqrt{4x^2 + x} + 2x} \cdot \ln 2 + |x| \sqrt{4 + \frac{1}{x}} \ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right)\right] = \frac{1}{4} \ln 2 + 1 \end{aligned}$$

故存在一条斜渐近线方程 $y = 2 \ln 2x + \dfrac{1}{4} \ln 2 + 1$, 同理当 $x \to -\infty$ 时, 也存在一条斜渐近线方程

$$y = -2 \ln 2x - \frac{1}{4} \ln 2 - 1.$$

(2) 由 $\lim\limits_{x\to-2^-}y=\dfrac{\pi}{2\mathrm{e}^4}$, $\lim\limits_{x\to-2^+}y=-\dfrac{\pi}{2\mathrm{e}^4}$, $\lim\limits_{x\to1^-}y=-\dfrac{\pi\mathrm{e}}{2}$, $\lim\limits_{x\to1^+}y=\dfrac{\pi\mathrm{e}}{2}$, $\lim\limits_{x\to0^-}y=-\infty$, 故 y 的铅直渐近线为 $x=0$, 因为

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{x^{-2}}\arctan\frac{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=\frac{\pi}{4}$$

故 y 的水平渐近线为 $y=\dfrac{\pi}{4}$, 又因为

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=0$$

故曲线共存在两条渐近线, 分别为 $x=0$ 与 $y=\dfrac{\pi}{4}$.

(3) 显然 $x=1$ 为该曲线的铅直渐近线, 下求斜渐近线,

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}\cos(2\arctan x)=1\cdot-1=-1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3\cos(2\arctan x)+x(x-1)^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^3+x^3-2x^2+x}{(x-1)^2}=-2$$

所以斜渐近线方程为 $y=-x-2$.

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, 所以曲线 $y=f(x)$ 没有水平渐近线; 由 $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=\infty$, 得 $x=-2$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线; 由

$$f(-1^-)=\lim_{x\to-1^-}f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=0,\ f(-1^+)=\lim_{x\to-1^+}f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

得 $x=-1$ 不是该曲线的铅直渐近线; 又由

$$\lim_{x\to1}f(x)=\frac{3\pi}{4}+\lim_{x\to1}\frac{\arctan\dfrac{1}{x^2-1}}{x^2+x-2}=\infty$$

得 $x=1$ 是该曲线的铅直渐近线; 下求斜渐近线,

$$k_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)\arctan x+\frac{\arctan\dfrac{1}{x^2-1}}{x^3+x^2-2x}=-\pi$$

那么

$$b_1=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}\left[(2x+1)\arctan x+\frac{\arctan\dfrac{1}{x^2-1}}{x^2+x-2}+\pi x\right]$$

$$=2\lim_{x\to-\infty}x\Big(\arctan x+\frac{\pi}{2}\Big)+\lim_{x\to-\infty}\arctan x+\lim_{x\to-\infty}\frac{\arctan\dfrac{1}{x^2-1}}{x^2+x-2}=-\frac{\pi}{2}-2$$

那么一条斜渐近线为 $y=-\pi x-\dfrac{\pi}{2}-2$, 同理可求解另一条斜渐近线为 $y=\pi x+\dfrac{\pi}{2}-2$.

(5) 令 $k=\dfrac{y}{x}$, 有

$$k^3\cdot x^3=x\big(x^2-2kx\big)\Rightarrow k^3=1-\frac{2k}{x}$$

两边取极限有

$$\lim_{x\to\pm\infty}k^3=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{2k}{x}\right)\Rightarrow\lim_{x\to\pm\infty}k^3=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-2k\cdot\frac{1}{x}\right)\Rightarrow k=1$$

令 $b=y-kx=y-x$, 那么

$$(x+b)^3=x\big(x^2-2x+2b\big)\Rightarrow\frac{b^3}{x^2}+3b+\frac{3b^2}{x}=-2\frac{b}{x}-2$$

两边取极限有

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{b^3}{x^2}+3b+\frac{3b^2}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-2\frac{b}{x}-2\right)$$

解得 $b=-\dfrac{2}{3}$, 于是斜渐近线方程为 $y=x-\dfrac{2}{3}$.

(6) 令 $y=tx$, 代入原方程得 $\begin{cases} x=\dfrac{6t}{1-t^3} \\ y=\dfrac{6t^2}{1-t^3} \end{cases}$ 当 $x\to\infty$ 时, $\dfrac{6t}{1-t^3}\to\infty\Rightarrow t\to 1$, 并且此时 $y\to\infty$, 因此

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{6t^2}{1-t^3}\cdot\frac{1-t^3}{6t}=\lim_{t\to 1}t=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{t\to 1}\frac{6t^2-6t}{1-t^3}=6\lim_{t\to 1}\frac{t(t-1)}{-(t-1)(t^2+t+1)}=-2$$

因此该曲线的斜渐近线为 $y=x-2$.

定理 1.1.5 (割线定理). (1) 设 $p>0$, $y=f(x)$ 在 $[p,+\infty)$ 上有界, 若有

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=k,$$
$$\lim_{x\to+\infty}[(x+1)f(x)-xf(x+1)]=b$$

则直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

(2) 设 $q<0$, $y=f(x)$ 在 $(-\infty,q]$ 上有界, 若有

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=k,$$
$$\lim_{x\to+\infty}[(x+1)f(x)-xf(x+1)]=b,$$

则直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

例 1.1.13 (2023 数一). 求曲线 $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x-1}\right)$ 的斜渐近线方程.

法一: 渐近线的斜率为

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)=1$$

渐近线的截距为

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)-x\right]=\lim_{x\to\infty}x\ln\left[1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\mathrm{e}(x-1)}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

故所求斜渐近线方程为 $y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

法二: 改写函数表达式为

$$y=x\ln\mathrm{e}\left[1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right]=x+x\ln\left[1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right]=x+\frac{x}{\mathrm{e}(x-1)}=x+\frac{1}{\mathrm{e}}+o(1)\ (x\to\infty)$$

所以斜渐近线方程为 $y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

法三: 利用割线定理,

$$k=\lim_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)]=\lim_{x\to\infty}\left[(x+1)\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)-x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)\right]=1+\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{\mathrm{e}+x^{-1}}{\mathrm{e}+(x-1)^{-1}}$$

$$=1+\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}}{\mathrm{e}+\dfrac{1}{x-1}}=1-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)+1}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[(x+1)f(x)-xf(x+1)]=\lim_{x\to\infty}\left[(x+1)x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)-x(x+1)\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x(x+1)\ln\frac{\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}}{\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}x(x+1)\frac{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}{\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\mathrm{e}x+1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

因此该曲线的斜渐近线为 $y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

1.2 极限的概念、性质及存在准则

极限是微积分中非常重要的概念, 它描述了函数在某一点或无穷远处的趋势或取值. 极限的性质包括唯一性、局部性、保号性、保序性和四则运算法则等. 极限的存在准则有夹逼准则、单调有界准则等.

1.2.1 数列、函数极限的定义

数列的极限定义

定义 1.2.1 (数列极限 A). 设 $\{a_n\}$ 是一数列, 如果存在常数 a, 当 n 无限增大时, a_n 无限接近 (或趋近) 于 a, 则称数列 $\{a_n\}$ 收敛, a 称为数列 $\{a_n\}$ 的极限, 或称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 或 $a_n \to \infty$, $n \to \infty$. 当 $n \to \infty$ 时, 若不存在这样的常数 a, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散 或 不收敛, 也可以说极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在.

定义 1.2.2 (数列极限 B). 设 $\{a_n\}$ 为一数列, a 为一个常数, 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在一个正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 为数列 $\{a_n\}$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

例 1.2.1 (2003 数一). 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负整数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$, 则必有

A. $a_n < b_n$ 对任意 n 成立

B. $b_n < c_n$ 对任意 n 成立

C. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 不存在

D. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在

取 $a_n = \dfrac{2}{n}$, $b_n = 1$, $c_n = \dfrac{n}{2}$, 则可排除选项 A、B、C, 因此选 D.

例 1.2.2 (2014 数三). 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \neq 0$, 则当 n 充分大时有

A. $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$

B. $|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$

C. $a_n > a - \dfrac{1}{n}$

D. $a_n > a + \dfrac{1}{n}$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, 都存在一个正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$, 即 $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, 则 $|a| - \varepsilon < |a_n| \leqslant |a| + \varepsilon$, 取 $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$, 得 $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$, 选 A.

函数的极限定义

定义 1.2.3 (函数的极限). 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内 (点 x_0 可除外) 有定义, A 为一个常数, 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在一个正数 δ, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限, 记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

定义 1.2.4 (左右极限). 若对于满足 $0 < x_0 - x < \delta$ $(0 < x - x_0 < \delta)$ 的一切 x 所对应的 $f(x)$ 都不满足 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 自 x_0 左 (右) 侧趋于 x_0 时的极限, 即*左 (右) 极限*, 分别记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) = A \ \left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0) = A\right)$$

类似地, 可以给出当 $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ 时, $f(x)$ 的极限为 A 的定义.

例 1.2.3. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续, 则 "$\exists x_n \in [a,+\infty)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$" 是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 无界的

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分也非必要条件

题目中的两个条件分别为

(i) $\exists x_n \in [a,+\infty)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$;

(ii) $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 无界,

讨论充分性, 即 (i)→(ii)

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ 可知对于 $\forall M > 0, \exists N \in [a,+\infty)$ 使得 $|f(x_N)| > M$, 故 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 无界;

讨论必要性, 即 (ii)→(i)

因为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 无界, 则对 $\forall M_1 > 0, \exists X_1 \in [a,+\infty)$, 使得 $|f(X_1)| > M_1$, 且 $\exists X_2 \in [X_1,+\infty)$, 使得 $|f(X_2)| > |f(X_1)|$, 同理可取 x_1, $\exists x_2 \in [x_1,+\infty)$, 使得 $|f(x_2)| > |f(x_1)|$; $\exists x_3 \in [x_2,+\infty)$, 使得 $|f(x_3)| > |f(x_2)|$, 由此递推, 得存在严格 $\nearrow$ 的数列 $\{x_n\}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, 且存在单调的 $|f(x_n)|$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n)| = +\infty$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

1.2.2 数列与其子列极限之间的关系

定理 1.2.1 (子列极限定理). $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+2} = a$.

例 1.2.4 (2015 数三). 设 $\{x_n\}$ 是数列, 下列命题中不正确的是

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$

B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$

D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

如 $x_{3n} = 1 + \dfrac{1}{3n}$, $x_{3n+1} = 1 + \dfrac{1}{3n+1}$, $x_{3n+2} = 2 + \dfrac{1}{3n+2}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = 1$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+2} = 2$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \neq 1$, 故选 D.

例 1.2.5. 设 $x_n = (-1)^n \cdot \dfrac{n+1}{n}$, 证明: 数列 $\{x_n\}$ 发散.

证 考察子列

$$x_{2n} = \frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \to 1 \ (n\to\infty),\ x_{2n+1} = -\frac{2n+2}{2n+1} = -1 - \frac{1}{2n+1} \to -1 \ (n\to\infty)$$

由定理 1.2.1 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在, 即得证数列 $\{x_n\}$ 发散.

1.2.3 数列、函数极限的性质

数列极限的性质

定理 1.2.2 (数列极限的唯一性). 收敛数列的极限是唯一的, 即若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, 则 $a = b$.

定理 1.2.3 (数列极限的有界性). 设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则数列 $\{a_n\}$ 有界, 即存在常数 $M > 0$, 使得 $|a_n| < M\ (\forall n \in N)$.

定理 1.2.4 (数列极限的保号性). 设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 其极限为 a

(1) 若有正整数 N, 使得当 $n > N$, 有 $a_n > 0$ (或 < 0), 则 $a \geqslant 0$ (或 $\leqslant 0$).

(2) 若 $a > 0$ (或 < 0), 则有正整数 N, 使得当 $n > N$, 时, 有 $a_n > 0$ (或 < 0).

例 1.2.6 (2017 数二). 设数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则

A. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin x_n = 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

B. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(x_n + \sqrt{|x_n|}\right) = 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

C. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(x_n + x_n^2\right) = 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

D. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + \sin x_n) = 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

因为数列 $\{x_n\}$ 收敛, 故令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则有 A 知 $\sin a = 0 \not\Rightarrow a = 0$, 同理 B、C 不正确, 而由 D 可知 $\sin a = -a \Rightarrow a = 0$, 故选 D.

函数极限的性质

定理 1.2.5 (函数极限的唯一性). 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 则 A 必唯一.

定理 1.2.6 (函数极限的有界性). 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有界.

定理 1.2.7 (函数极限的保号性). 设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内均有 $f(x) \geqslant 0$ (或 $f(x) \leqslant 0$), 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 则 $a \geqslant 0$ (或 $A \leqslant 0$).

定理 1.2.8 (函数极限的充要条件). (1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

证明函数 $f(x)$ 的极限不存在的方法

(1) 若 $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}$ 不存在. 当 $x \to \infty$ 时, 对含有 $a^x (a > 0, a \neq 1)$ 或 $\arctan x$ 或 $\operatorname{arccot} x$ 的函数极限, 一定要对 $x \to +\infty$ 与 $x \to -\infty$ 分别求极限, 若两者的极限值相等,则 $x \to \infty$ 时极限存在, 否则不存在.

(2) 若存在数列 $\{x_n\}: x_n \to x_0, x_n \neq x_0$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在; 或有两个数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$, 满足 $x_n \to x_0\,(x_n \neq x_0), y_n \to y_0\,(y_n \neq y_0)$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.

(3) 利用结论: 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)+g(x)]$ 不存在; 若又有 $A \neq 0$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 不存在.

1.2.4 数列、函数极限的存在准则

数列极限的存在准则

定理 1.2.9 (数列的夹逼准则). 若 $\exists N$, 使得当 $n > N$ 时有 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

定理 1.2.10 (数列的单调有界准则). 若数列 $\{x_n\}$ 单调上升有上界 (或单调下降有下界), 即 $x_{n+1} \leqslant x_n$ (或 $x_{n+1} \geqslant x_n$) $(n = 1, 2, \cdots)$, 并存在一个数 M (m) 使得对一切 n 有 $x_n \leqslant M$ (或 $x_n \geqslant m$), 则 $\{x_n\}$ 收敛, 即存在一个数 a, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 且有 $x_n \leqslant a$ (或 $x_n \geqslant a$) $(n = 1, 2, \cdots)$.

例 1.2.7 (2008 数一). 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是

A. 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　B. 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛　　D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛

若 $\{x_n\}$ 单调, $f(x)$ 单调有界, 则数列 $\{f(x_n)\}$ 单调有界, 因此数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 故选 B.

函数极限的存在准则

定理 1.2.11 (函数的夹逼准则). 若 $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

例 1.2.8 (2000 数三). 设对任意 x, 总有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

A. 存在且等于零　　B. 存在但不一定为零　　C. 一定不存在　　D. 不一定存在

本题中所给条件比夹逼准则的条件弱, 事实上, 若 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = A$ (有限), 则必有 $\lim\limits_{x\to\infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 反之则不然, 因为当 $\lim\limits_{x\to\infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ 时, 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)$ 可以都不存在, 如 $g(x) = \varphi(x) = x$.

(1) 若取 $\varphi(x) = x - \dfrac{1}{x^2}$, $f(x) = x$, $g(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$, 显然有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 但 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在, 则排除选项 A、B.

(2) 若取 $\varphi(x) = f(x) = g(x) = 1$, 满足题设条件, 但 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ 存在, 则排除选项 C, 故选 D.

1.3 计算极限值的若干方法

计算极限值的方法有很多种, 常用的方法包括: 利用等价代换和初等变形、利用夹逼准则、利用 L'Hospital 法则以及利用 Taylor 展开等.

1.3.1 利用等价代换和初等变形

等价代换

当 $x \to 0$ 时, 下表是常见的等价代换.

一阶	(1) $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \mathrm{e}^x - 1 \sim \ln(1+x)$		
	(2) $\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$	(3) $a^x - 1 \sim x \ln a$	(4) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$
	(5) $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \sim x$		
二阶	(6) $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$	(7) $x - \ln(1+x) \sim \dfrac{1}{2}x^2$	(8) $(1+x)^x - 1 \sim x^2$
三阶	(9) $x - \arctan x \sim \dfrac{1}{3}x^3$	(10) $\tan x - x \sim \dfrac{1}{3}x^3$	(11) $\tan x - \sin x \sim \dfrac{1}{2}x^3$
	(12) $x - \sin x \sim \dfrac{1}{6}x^3$	(13) $\arcsin x - x \sim \dfrac{1}{6}x^3$	

定理 1.3.1 (减法无穷小代换). 若 $f \sim g$, 则 $f - g \sim f(\ln f - \ln g)$.

例 1.3.1 (第一届数学竞赛初赛). 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域 U 内有定义, 对 $\forall x \in U$, $f(x) \neq g(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = a > 0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f^g - g^f}{f-g}$.

由定理 1.3.1 可易求得该极限值为 a^a.

例 1.3.2. 求下列极限值.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

(3) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ $(m, n \in \mathbf{N})$.

(4) $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{\tan^3 x - 3\tan x}{\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x - \cos\dfrac{x}{2}}{\left(\sin x - \sin\dfrac{x}{2}\right)\ln(1+x)}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x\ln\sin x - \sin x \ln x}{x^3 \ln x}$.

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1 - \sqrt[n]{\cos 2n\pi x}}{(x-1)(x^x-1)}$.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\sqrt[n]{2}\left(1 - \cos\dfrac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+1} - n}$.

(9) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x^2-9)\ln(4+x)}{\arctan^2(x+3)}$.

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1 - \sqrt[k]{\cos x}\right)}{(1-\cos x)^{n-1}}$.

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt[k]{\cos kx}}{x^2}$.

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n!x^n - \prod\limits_{k=1}^{n}\sin kx}{x^{n+2}}$.

(1) 原式 $= \exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\cos x}\ln\dfrac{\sin x}{x} = \exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\cos x}\cdot\dfrac{\sin x - x}{x} = \exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{6}x^3}{\dfrac{1}{2}x^3} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$.

(2) 原式 $= \exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\arcsin x}{x} = \exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{\arcsin x - x}{x} = \exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{6}x^3}{x^3} = \mathrm{e}^{\frac{1}{6}}$.

(3) 原式 $\xlongequal{t=x-\pi} \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin m(t+\pi)}{\sin n(t+\pi)} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(-1)^n\sin mt}{(-1)^n\sin nt} = (-1)^{m-n}\dfrac{m}{n}$.

(4) 原式 $= \lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\tan x\cdot\dfrac{\sin^2 x - 3\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x} = \lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\tan x\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)}{-\dfrac{1}{2}\cos x^2} = -24$.

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-1+\left(1-\cos\dfrac{x}{2}\right)}{x\cdot\sin\dfrac{x}{2}\left(2\cos\dfrac{x}{2}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-1}{\dfrac{x^2}{2}}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x^2}{2}}=2+\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{4}.$

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x\ln x-\sin x\ln x}{x^3\ln x}+\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x\ln\sin x-x\ln x}{x^3\ln x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x-\sin x}{x^3}+\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x^2\ln x}=\dfrac{1}{6}.$

(7) 原式$=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{n}\ln\cos 2n\pi x}{(x-1)\ln x}\xlongequal{t=x-1}-\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{n}(\cos(2n\pi t)-1)}{t\ln(t+1)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{2}(2n\pi t)^2}{t^2}=2n\pi^2.$

(8) 原式 $\xlongequal{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n^4}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2n^2}}{\dfrac{1}{2n^2}}=1.$

(9) 原式$=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(x-3)(x+3)}{(x+3)^2}=-6.$

(10) 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[k]{\cos x}}=1$, 即 $1-\sqrt[k]{\cos x}\sim-\ln\sqrt[k]{\cos x}=-\dfrac{1}{k}\ln\cos x\sim\dfrac{1}{k}(1-\cos x)\ (x\to 0)$, 故

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\prod\limits_{k=2}^{n}\left[\dfrac{1}{k}(1-\cos x)\right]}{(1-\cos x)^{n-1}}=\frac{1}{n!}.$$

(11) 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt[k]{\cos kx}}=1$, 故 $1-\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt[k]{\cos kx}\sim-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\ln\cos kx\sim\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\ln\left(1-\cos kx\right)\left(x\to 0\right)$,

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\left(1-\cos kx\right)}{x^2}=\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{1}{2}\left(kx\right)^2}{x^2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n\left(n+1\right)}{4}.$$

(12) **法一:** 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n!x^n}{\prod\limits_{k=1}^{n}\sin kx}=1$, 所以 $n!x^n\sim\prod\limits_{k=1}^{n}\sin kx\ (x\to 0)$.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{n!x^n\left[\ln\left(n!x^n\right)-\ln\prod\limits_{k=1}^{n}\sin kx\right]}{x^{n+2}}=n!\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\ln kx-\ln\sin kx)}{x^2}=n!\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{kx}{\sin kx}}{x^2}$$

$$=n!\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{kx}{\sin kx}-1}{x^2}=n!\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{kx-\sin kx}{kx^3}=\frac{n!}{6}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(2n+1)}{36}(n+1)!.$$

法二: 原式$=n!\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n}\sin kx}{n!x^n}}{x^2}=n!\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{kx}}{x^2}$, 记 $f_n(x)=\dfrac{1-\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{kx}}{x^2}$, 则有

$$f_n(x)=f_1(x)+\sum_{k=2}^{n}(f_k(x)-f_{k-1}(x))$$

两边取极限有,

$$\lim_{x\to 0}f_n(x)=\lim_{x\to 0}f_1(x)+\lim_{x\to 0}\sum_{k=2}^{n}(f_k(x)-f_{k-1}(x))=\frac{1}{6}+\lim_{x\to 0}\sum_{k=2}^{n}\frac{\left(\prod\limits_{i=1}^{k-1}-\prod\limits_{i=1}^{k}\right)\dfrac{\sin ix}{ix}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{6}+\lim_{x\to 0}\frac{\prod\limits_{i=1}^{k-1}\dfrac{\sin ix}{ix}\left(1-\dfrac{\sin kx}{kx}\right)}{x^2}=\frac{1}{6}+\lim_{x\to 0}\sum_{k=2}^{n}\frac{kx-\sin kx}{kx^3}=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Rightarrow\text{原式}=\frac{n(2n+1)}{36}(n+1)!.$$

初等变形

常见的裂项公式.

(1) $\dfrac{1}{n(n+k)}=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k}\right)$	(2) $\dfrac{1}{(n-k)n(n+k)}=\dfrac{1}{2k^2}\left[\left(\dfrac{1}{n-k}-\dfrac{1}{n}\right)-\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k}\right)\right]$
(3) $\dfrac{1}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{k}(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})$	(4) $\dfrac{2^n}{(2^n+k)(2^{n+1}+k)}=\dfrac{1}{2^n+k}-\dfrac{1}{2^{n+1}+k}$

定理 1.3.2. 若 $B\sim\tilde{B}$, 且 $\exists a,\ b$ 使得 $\lim A-\tilde{B}=a,\ \lim\tilde{B}-B=b$, 则 $\lim A-B=a+b$.

例 1.3.3. 求下列极限值.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.	(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos\sqrt{\tan x-\sin x}}{\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt[3]{1-x^3}}$.	(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}$.
(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.	(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$.	(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{-n}}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k\cdot k^2$.

(1) $1-\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{(k-1)(k+1)}{k^2}$ 进行变形. 原式 $=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$.

(2) 由 $\sqrt{\tan x-\sin x}=\sqrt{\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}}\sim\sqrt{\dfrac{x^3}{2}}$, 知 $1-\cos\sqrt{\tan x-\sin x}\sim\dfrac{x^3}{4}$,

又 $\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt[3]{1-x^3}=\dfrac{2x^3}{\left(\sqrt[3]{1+x^3}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^3}\cdot\sqrt[3]{1-x^3}+\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2}\sim\dfrac{2x^3}{3}$, 故原式$=\dfrac{3}{8}$.

(3) 原式 $=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\tan^2\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{n}{2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{2}\right)\ln\left(1+\tan^2\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{2}\right)\cdot\tan^2\frac{x}{\sqrt{n}}}=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

(4) $\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)=\sin^2\dfrac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}=\sin^2\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}$.

由于初等函数在有定义的地方皆连续, 故

$$\text{原极限}=\sin^2\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}\right)=\sin^2\frac{\pi}{2}=1.$$

(5) 由 $\sin\pi\sqrt{1+4n^2}=\sin\pi\left(\sqrt{1+4n^2}-2n\right)=\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)^n=\exp\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)\\&=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

(6) 因为 $(1+x)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\cdot x^k$, 两边关于 x 求导, 得 $n(1+x)^{n-1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k\cdot kx^{k-1}$, 两边再同时乘以 x, 并再关于 x 求导, 得 $n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k\cdot k^2x^{k-1}$, 令 $x=1$, 得

$$n\cdot2^{n-1}+n(n+1)\cdot2^{n-2}=n(n+1)\cdot2^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^kk^2$$

于是有原式 $=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{-n}}{n(n+1)}\cdot n(n+1)\cdot2^{n-2}=\frac{1}{4}$.

例 1.3.4. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 设

$$(1)\ x_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}.\qquad (2)\ x_n=\frac{3}{2}\frac{5}{4}\frac{17}{16}\cdots\frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}.$$

$$(3)\ x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1^3+2^3+\cdots+i^3}}.\qquad (4)\ x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)(i+2)}.$$

(1) 乘 $\dfrac{2^n\sin\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$, $x_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\dfrac{2^n\sin\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\dfrac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$

$$原式=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

(2) 乘 $\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$, 再对分子反复应用公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

$$x_n=\left(1+\frac{1}{2^{2^0}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^1}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^2}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)=\frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\cdot\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right)\to 2\ (n\to\infty)$$

(3) 因为 $\sum\limits_{i=1}^{n}i^3=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}i\right)^2$,

$$原式=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{i}j^3}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\left(\sum\limits_{j=1}^{i}j\right)^2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{1}{2}i(i+1)}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2.$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\dfrac{1}{i(i+1)}-\dfrac{1}{(i+1)(i+2)}\right]=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\dfrac{1}{4}.$

例 1.3.5. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k+1-\sqrt{k^2+k}}{\sqrt{k}\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\right)}$.

由 $\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k+1-\sqrt{k^2+k}}{\sqrt{k}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})}=\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sqrt{k+1}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})}=\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}\cdot\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}$, 因此

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdots\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}\cdots\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}=\left(\sqrt{2}-1\right)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}{n}=2\sqrt{2}-2.$$

例 1.3.6. 设 $\left(1+\sqrt{3}\right)^n=a_n+b_n\cdot\sqrt{3}$ (其中 a_n,b_n 均为正整数), 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$.

由二项式定理,

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\left(\sqrt{3}\right)^k=\sum_{\substack{2k\leqslant n\\ k\in\mathbb{N}}}\mathrm{C}_n^k\left(\sqrt{3}\right)^k+\sum_{\substack{2k+1\leqslant n\\ k\in\mathbb{N}}}\mathrm{C}_n^k\left(\sqrt{3}\right)^k=a_n+b_n\cdot\sqrt{3}$$

则 $\left(1-\sqrt{3}\right)^n=a_n-b_n\cdot\sqrt{3}$, 联立两式解得

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)^n+\left(1-\sqrt{3}\right)^n}{2}\\ b_n=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)^n-\left(1-\sqrt{3}\right)^n}{2}\end{cases}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^n+\left(1-\sqrt{3}\right)^n}{\left(1+\sqrt{3}\right)^n-\left(1-\sqrt{3}\right)^n}=\sqrt{3}.$$

1.3.2 利用已知极限

例 1.3.7 (西安电子科技大学). 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n\ (a,b\geqslant 0)$.

法一: $n\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\dfrac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)\to\dfrac{1}{2}(\ln a+\ln b)\ (n\to\infty)$, 故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1}}\right\}^{n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)}\\&=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\mathrm{e}^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

法二: 原式 $\xlongequal{x=\frac{1}{n}}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{a^x+b^x}{2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\sqrt{ab}$.

推论 1.3.1. $a_i,p_i>0,i=1,2,\cdots,m,p=\sum\limits_{i=1}^m p_i$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m\sqrt[n]{a_i}\right)^n=\sqrt[m]{\prod_{i=1}^m a_i},\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^m p_i\cdot\sqrt[n]{a_i}\right)^n=\sqrt[p]{\prod_{i=1}^m a_i^{p_i}}.$$

例 1.3.8. 求下列极限值.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{5}}{3}\right)^n$. | (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+\sqrt[n]{64}}{3}\right)^{2n-1}$. | (3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$.

(1) 原式 $=\sqrt[3]{2\times3\times5}=\sqrt[3]{30}$.

(2) **法一:** 原式 $\xlongequal{2n-1=t}\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{1+1+\sqrt[\frac{t+1}{2}]{64}}{3}\right)^t=\left(\sqrt[3]{64}\right)^2=16$.

法二: 原式 $=\exp\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x}-1\right)\ln\left(\dfrac{2+64^x}{3}\right)=\exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2-x)\left(64^x-1\right)}{3}\xlongequal{L'}$ [1] $\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\ln 64}=16$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a\cdot a^x+b\cdot b^x+c\cdot c^x}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt[a+b+c]{a^ab^bc^c}$.

例 1.3.9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$.

[1] 该标记表示经 L'Hospital 法则得到的计算结果, 关于 L'Hospital 法则可见定理 1.3.6.

为解决该问题, 先介绍并证明一个重要的等式,

引理 1.3.1. $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n=\gamma+o(1)$, 其中 $\gamma=0.577215\cdots$ (称为 Euler 常数).

$|x_n-x_{n-1}|=\left|\frac{1}{n}-[\ln n-\ln(n-1)]\right|, n\geqslant 2$ 由 *Lagrange* 中值定理

$$\ln n-\ln(n-1)=\frac{1}{\xi_n}\ (n-1<\xi_n<n)$$

$|x_n-x_{n-1}|=\frac{n-\xi_n}{n\cdot\xi_n}<\frac{1}{(n-1)^2}$, 而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2}$ 收敛, 故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}|x_n-x_{n-1}|$ 收敛, x_n 也收敛.

$$原式=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)=\lim_{n\to\infty}[(\ln 2n+\gamma+\alpha_{2n})-(\ln n+\gamma+\alpha_n)]=\lim_{n\to\infty}(\ln 2+\alpha_{2n}-\alpha_n)=\ln 2$$

其中 γ 为 *Euler* 常数.

推论 1.3.2. 已知 m 为正整数, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{mn+1}+\frac{1}{mn+2}+\cdots+\frac{1}{(m+1)n}\right]=\ln\frac{m+1}{m}.$$

证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{mn+k}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{m+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{m+x}=\ln\frac{m+1}{m}.$

例 1.3.10. 试借助 Stirling 公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n+\frac{\theta_n}{12n}},\ 0\leqslant\theta_n\leqslant 1$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{e}^{1-\frac{1}{i}}}{(1+\frac{1}{i})^i}$.

由引理 *1.3.1*, 得

$$原式=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{\mathrm{e}^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}}{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i+1}{i}\right)^i}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot n!\mathrm{e}^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}}{(n+1)^n\mathrm{e}^{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi}n\mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\mathrm{e}^{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}}=\sqrt{2\pi}\exp\lim_{n\to\infty}\left(\ln n+\frac{\theta_n}{12n}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)=\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-(1+\gamma)}$$

其中 γ 为 *Euler* 常数.

1.3.3 利用函数与极限的关系

定理 1.3.3 (极限值与函数式的转换). $\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),\ \alpha(x)\to 0.$

定理 1.3.4 (分式极限的关系). 设 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A$, A 为有限常数, 则

(1) 当 $g(x)\to 0$ 时, 必有 $f(x)\to 0$;

(2) 当 $f(x)\to 0$, 且 $A\neq 0$ 时, 必有 $g(x)\to 0$.

例 1.3.11. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有连续导数, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x}\right)=2$, 求 $f(0)'$.

由已知 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right)=2$, 得 $f(x)=2x-\dfrac{\sin x}{x}+x\cdot\alpha(x)$, $\alpha(x)\to0\ (x\to0)$, 则有

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(2x-\frac{\sin x}{x}+x\cdot\alpha(x)\right)=-1$$

$$f(0)'=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+1}{x}=\lim_{x\to0}\left(2+\frac{x-\sin x}{x^2}+\alpha(x)\right)=2.$$

例 1.3.12. (运用两种方法) 根据假设求极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)+xf(x)}{\sin x^2}=2$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+f(x)}{x}$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{3^x-1}=5$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{3f(x)}{1-\cos x}\right)}{\mathrm{e}^x-1}=9$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\tan x-\sin x}$.

(1) **法一** :由已知得 $f(x)=\dfrac{-\sin 6x+x^3\cdot\alpha(x)}{x}$, $\alpha(x)\to0$, 故

$$\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{6x-\sin 6x+x^3\cdot\alpha(x)}{x^3}=\frac{\frac{1}{6}(6x)^3}{x^3}=36.$$

法二: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}+\dfrac{6x-\sin 6x}{x^3}\right)=36.$

(2) **法一**: 由已知得 $f(x)=\dfrac{2\sin x^2+\alpha(x)\cdot\sin x^2-\ln(1+2x)}{x}$, $\alpha(x)\to0$, 故

$$\lim_{x\to0}\frac{2+f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2x+2\sin x^2+\alpha(x)\sin x^2-\ln(1+2x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\left[\frac{2\sin x^2}{x^2}+\frac{2x-\ln(1+2x)}{x^2}\right]=4.$$

法二: 因为 $x\sim\sin x\ (x\to0)$, 所以 $\dfrac{2+f(x)}{x}=\dfrac{2x+xf(x)}{x^2}\sim\dfrac{2x+f(x)}{\sin x^2}$, 故

$$\lim_{x\to0}\frac{2+f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+2x)+xf(x)}{\sin x^2}+\frac{2x-\ln(1+2x)}{x^2}\right]=2+2=4.$$

(3) **法一**: 由已知得 $f(x)=\sin 2x\cdot\left[\mathrm{e}^{(5+\alpha(x))\cdot(3^x-1)}-1\right]$, $\alpha(x)\to0$, 故

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x\cdot(5+\alpha(x))\cdot(3^x-1)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x\cdot(5+\alpha(x))\cdot x\ln 3}{x^2}=10\ln 3.$$

法二: 因为 $\lim\limits_{x\to0}(3^x-1)=0$, 所以有 $\lim\limits_{x\to0}\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{3^x-1}\cdot(3^x-1)=0.$
于是 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sin 2x}=0$, 从而当 $x\to0$ 时, $\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)\sim\dfrac{f(x)}{\sin 2x}$. 又 $3^x-1\sim x\ln 3$, $x\to0$, 再由已知

$$5=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{3^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{\sin 2x}}{x\cdot\ln 3}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2\ln 3\cdot x^2}$$

故得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=10\ln 3.$

(4) **法一**: 由已知得 $f(x)=\left[\mathrm{e}^{(9+\alpha(x))(\mathrm{e}^x-1)}-1\right]\cdot\dfrac{1-\cos x}{3}\sim(9+\alpha(x))\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot x^3$, $\alpha(x)\to0$,
且 $\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$, $x\to0$, 所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x-\sin x}=3.$
法二: 同上例解法 *2*.

1.3.4　利用夹逼准则

当极限不易直接求出时, 可考虑将求极限的变量, 作适当的放大和缩小, 使放大、缩小所得的新变量易于求极限, 且二者的极限值相同, 则原极限存在, 且等于公共值.

例 1.3.13. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. (该结论可作为重要极限使用).

证法一 因为 $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}$, 所以当 $n\leqslant 2$ 时, 由

$$n=1+(n-1)=1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{2}{n}=1+\mathrm{C}_n^2\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2<\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$$

得 $1<\sqrt[n]{n}<\sqrt{\frac{2}{n}}$, 于是由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证法二 由定理 *2.6.2* 知算术-几何-调和平均值不等式: 设 $a_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$, 则有

$$\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}\leqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$$

因为 n 可看作两个 $\sqrt{n}$ 与 $n-2$ 个 1 的乘积, 所以由上述不等式有

$$\frac{2}{\frac{2}{\sqrt{n}}+n-2}\leqslant\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\underbrace{1\cdot1\cdots1}_{n-2}}\leqslant\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{2}{\sqrt{n}}+n-2}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=1$, 故由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

例 1.3.14. (要求用夹逼准则求解) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, 设

(1) (东北师范大学) $x_n=\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}$.

(2) $x_n=\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

(3) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\left(n^k+1\right)^{-\frac{1}{k}}+\left(n^k-1\right)^{-\frac{1}{k}}\right]$.

(4) (北京大学) $x_n=(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

(5) $x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$.

(6) (中国地质大学) $x_n=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

(7) (2003 浙江省数学竞赛) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$.

(8) $x_n=\sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^n}$, $a_k>0$.

(1) 因为几何平均小于算术平均, 故分母中的因子

$$2n=\frac{(2n-1)+(2n+1)}{2}>\sqrt{(2n-1)(2n+1)}$$

由此可知

$$0<x_n=\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\to0$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2) $\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$ 共有 $2n+2$ 项, 最小项为 $\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}=\frac{1}{n+1}$, 最大项为 $\frac{1}{n}$, 因此

$$\frac{2n+2}{n+1}\leqslant\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}\leqslant\frac{2n+2}{n}$$

左右两端极限均为 2, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}=2$.

(3) 因为 $n^k < n^k+1 < (n+1)^k$，所以

$$n^{-1}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}} > (n+1)^{-1}\ (k=1,2,\cdots,n)$$

相加得 $\dfrac{n}{n} > \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}} > \dfrac{n}{n+1}$. 令 $n\to\infty$，取极限得 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}=1$.

同理可得 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}=1$，从而 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=2$.

(4) $1\leqslant (n!)^{\frac{1}{n^2}}\leqslant (n^n)^{\frac{1}{n^2}}=n^{\frac{1}{n}}$，因为 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ (见例 1.3.13)，所以 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$.

(5) 由对数不等式

$$\frac{1}{n+1}\leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n+n}\right)\leqslant x_n\leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n+n-1}\right)$$

左端 $=\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\cdot\dfrac{n+3}{n+2}\cdots\dfrac{n+n}{n+n-1}\cdot\dfrac{n+n+1}{n+n}\right)=\ln\dfrac{2n+1}{n+1}\to\ln 2\ (n\to\infty)$.

同理，右端$=\ln\dfrac{2n}{n}\to\ln 2\ (n\to\infty)$，所以 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\ln 2$.

(6) 利用不等式: $\left(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\mathrm{e}\left(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$，知

$$\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot\frac{n+1}{n}<\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}<\sqrt[n]{\mathrm{e}}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\sqrt[n]{\frac{n+1}{\mathrm{e}}}$$

故有夹逼准则，得 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(7) 因为 $\dfrac{n+k}{n^2+n}\leqslant\dfrac{n+k}{n^2+k}<\dfrac{n+k}{n^2}$，$k=1,2,\cdots,n$，所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+n}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+n}\sum_{k=1}^{n}(n+k)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{2n^2+2n}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n+k)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{2n^2}=\frac{3}{2}$$

故由夹逼准则，得 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}=\frac{3}{2}$.

(8) 记 $a_{i0}=\displaystyle\max_{1\leqslant j\leqslant m}\{a_j\}$，则 $a_{i0}<\displaystyle\sum_{k=1}^{m}a_k^n<ma_{i0}^n$，于是 $a_{i0}<\sqrt[n]{\displaystyle\sum_{k=1}^{m}a_k^n}<\sqrt[n]{m}a_{i0}$，由 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$ 及夹逼准则得 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{m}a_k^n}=a_{i0}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$.

推论 1.3.3. 设 $a_i,p_i>0$，$i=1,2,\cdots,m$，$p=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}p_i$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}a_i^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{m}p_ia_i^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{m}p_ia_i^n}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{\sum_{i=1}^{m}p_ia_i^x}=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{a_i\}$$

.

例 1.3.15. 求下列极限值.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n\cdot\sin^n x}$. | (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^2 n+2\cos^2 n}$. | (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+a^{2n}}$，$a$ 为常数.

(1) 原式 $=\max\{1,2\sin x\}=\begin{cases}2\sin x & ,|\sin x|>\dfrac{1}{2}\\ 1 & ,-\dfrac{1}{2}<\sin x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ \text{不存在} & ,\sin x=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\left(\cos^{\frac{2}{n}}n\right)^{n}}=\max\left\{1,\cos^{\frac{2}{n}}n\right\}=1.$，其中易求得 $\cos^{\frac{2}{n}}n$ 的最大值为 1.

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{n}+\underbrace{a^{n}+a^{n}+\cdots+a^{n}}_{a_n}}=\max\{2,a\}.$

例 1.3.16. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{3}-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^{2}}{n^{2}+k}\right)$.

因为 $\dfrac{n}{3}-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^{2}}{n^{2}+k}=\dfrac{n}{3}-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^{2}}{n^{2}}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^{3}}{n^{2}(n^{2}+k)}$，那么

$$I_1=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{2}}{n^{2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{3}-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n-1}{6n}=-\frac{1}{2}$$

并且 $\sum\limits_{k=1}^{n}k^{3}=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}k\right)^{2}=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^{2}=\dfrac{n^{2}(n+1)^{2}}{4}$，于是有

$$\frac{1}{4}\leftarrow\frac{n+1}{4n}=\frac{1}{n^{2}(n^{2}+n)}\sum_{k=1}^{n}k^{3}<\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{3}}{n^{2}(n^{2}+k)}<\frac{1}{n^{4}}\sum_{k=1}^{n}k^{3}=\frac{(n+1)^{2}}{4n^{2}}\to\frac{1}{4}\ (n\to\infty)$$

故由夹逼准则得原极限 $I=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}$.

例 1.3.17 (第十一届数学竞赛决赛). $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\sqrt{i}}\right)$.

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+\sqrt{i}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sqrt{i}}{n(n+\sqrt{i})}=\lim\limits_{n\to\infty}n^{-3/2}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sqrt{i}}{1+\dfrac{\sqrt{i}}{n}}:=\lim\limits_{n\to\infty}f$

$$n^{-3/2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{1+\dfrac{\sqrt{n}}{n}}\leqslant f\leqslant n^{-3/2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{1+\dfrac{1}{n}}$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-3/2}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sqrt{i}}{1+\dfrac{\sqrt{n}}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{-3/2}}{1+n^{-1/2}}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{i}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{-3/2}}{1+n^{-1/2}}\dfrac{n^{3/2}}{3/2}=\dfrac{2}{3}$,

$$\lim_{n\to\infty}n^{-3/2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{1+\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-3/2}}{1+\dfrac{1}{n}}\cdot\frac{n^{3/2}}{3/2}=\frac{2}{3}$$

由夹逼准则，得原式$=\dfrac{2}{3}$，下证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{i}\sim\dfrac{2}{3}n^{3/2}\ (n\to\infty)$.

由图 1.3.1 得：一方面

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i}<\int_{0}^{n}\sqrt{x+1}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\left[(n+1)^{3/2}-1\right]$$

另一方面

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i}>\int_{0}^{n}\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}n^{3/2}$$

由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i}\sim\frac{2}{3}n^{3/2}\ (n\to\infty).$$

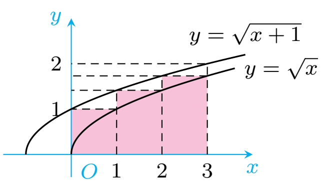


图 1.3.1

例 1.3.18. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{n+1}{2}-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n+\sqrt{i}}\right)$.

原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}i-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{in}{n+\sqrt{i}}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}n^{-3/2}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i^{3/2}}{n+\sqrt{i}}:=\lim\limits_{n\to+\infty}f$

$$\frac{2}{5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-3/2}}{n+\sqrt{n}}\cdot\frac{2}{5}n^{5/2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-3/2}}{n+\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}i^{3/2}\leqslant\lim_{n\to+\infty}f\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-3/2}}{n+1}\sum_{i=1}^{n}i^{3/2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-3/2}}{n+1}\cdot\frac{2}{5}n^{5/2}=\frac{2}{5}$$

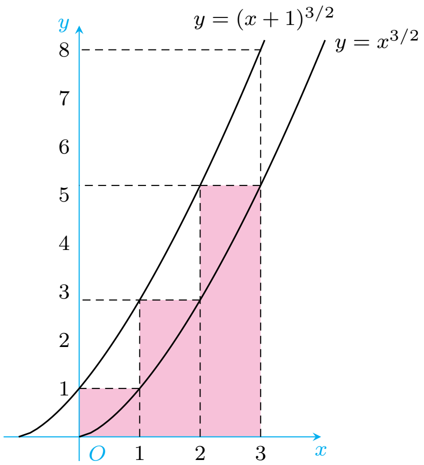


图 1.3.2

故，原式$=\dfrac{2}{5}$，下证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}i^{3/2}\sim\dfrac{2}{5}n^{5/2}\ (n\to\infty)$，由图 *1.3.2* 得：一方面

$$\sum_{i=1}^{n}i^{3/2}<\int_0^n(x+1)^{3/2}\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\left[(n+1)^{5/2}-1\right]$$

另一方面

$$\sum_{i=1}^{n}i^{3/2}>\int_0^n x^{3/2}\mathrm{d}x=\frac{2}{5}n^{5/2}$$

由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}i^{3/2}\sim\frac{2}{5}n^{5/2}\ (n\to\infty).$$

例 1.3.19 (第四届数学竞赛). 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\displaystyle\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t$.

当 $x>1$ 时，因为

$$0\leqslant\left|\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-1}}=2\big(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\big)=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{x}}$$

所以

$$0\leqslant\lim_{x\to+\infty}\left|\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t\right|\leqslant\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}=0$$

故由夹逼准则得原极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\displaystyle\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t=0$.

例 1.3.20 (2013 浙江省数学竞赛). 设 $f_n(x)=x^n\ln x$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!}f_n^{(n-1)}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

因为 $f_n'(x)=nx^{n-1}\ln x+x^{n-1}=nf_{n-1}(x)+x^{n-1}$，所以

$$f_n^{(n-1)}(x)=\left[f_n'(x)\right]^{(n-2)}=\left[nf_{n-1}(x)+x^{n-1}\right]^{(n-2)}=nf_{n-1}^{(n-2)}(x)+(n-1)!x$$

经过递推可得

$$\frac{1}{n!}f_n^{(n-1)}(x)=\frac{f_{n-1}^{(n-2)}(x)}{(n-1)!}+\frac{x}{n}=\frac{f_{n-2}^{(n-3)}(x)}{(n-2)!}+\frac{x}{n-1}+\frac{x}{n}=\cdots=\frac{f_2'(x)}{2!}+x\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}=x\left(\ln x+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right)$$

于是，有 $\dfrac{1}{n!}f_n^{(n-1)}\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n\right)$，并且

$$\ln(n+1)-\ln 2=\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x+1}<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}<\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln n$$

所以

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{n+1}{2n}<\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}f_n^{(n-1)}\left(\frac{1}{n}\right)<0$$

由夹逼准则得原极限为 *0*.

夹逼准则的推广形式

当使用夹逼准则时, 若放大与缩小所得之量的极限值不相等, 但两者只相差一个任意小量, 则夹逼准则仍然有效.

例 1.3.21. (推论 1.3.3 的连续形式) 设 $f(x)>0$, 在区间 $[0,1]$ 上连续, 试证

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^n\frac{1}{n}}=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x).$$

记 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)$, 则

$$x_n:=\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^n\frac{1}{n}}\leqslant M$$

因为 $f(x)$ 连续, 根据闭区间连续函数的性质, $\exists x_0\in[0,1]$, $s.t. f(x_0)=M$. 于是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$, $x\in[0,1]$ 时, 有

$$M-\varepsilon<f(x)<M+\varepsilon$$

当 n 充分大时有 $\dfrac{1}{n}<\delta$, $\exists i_0$, $s.t.\left|\dfrac{i_0}{n}-x_0\right|<\delta$, $f\left(\dfrac{i_0}{n}\right)>M-\varepsilon$. 故

$$x_n:=\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^n\frac{1}{n}}\geqslant\sqrt[n]{\left(f\left(\frac{i_0}{n}\right)\right)^n\frac{1}{n}}>(M-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\to M-\varepsilon$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性, 知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=M$.

例 1.3.22. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$.

法一: $\forall 0<\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$, 有

$$0\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{2}\cdot\sin^n x\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\cdot\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)+\varepsilon$$

令 $n\to\infty$, 得

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\sin^n x\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)+\varepsilon=\varepsilon$$

再由 ε 的任意性及夹逼准则, 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=0$.

法二: 记 $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$, 则由

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & ,n\text{ 为正偶数}\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & ,n\text{ 为大于 1 的奇数}\end{cases}$$

其中 $n!!$ 表示不大于 n 且与 n 有相同奇偶性的数的连乘积. 得

$$I_{2k}=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

于是有

$$I_{2k}^2=\frac{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdots(2k-3)(2k-3)(2k-1)(2k-1)\cdot1}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdots(2k-4)(2k-2)(2k-2)(2k)\cdot2k}\cdot\frac{\pi}{4}$$

从而得 $\dfrac{1}{4k}\cdot\dfrac{\pi^2}{4}<I_{2k}^2<\dfrac{2k-1}{4k^2}\cdot\dfrac{\pi^2}{4}$, 故 $\lim\limits_{k\to0}I_{2k}=0$. 又因为 $0\leqslant I_{2k+1}\leqslant I_{2k}$, 所以 $\lim\limits_{k\to\infty}I_{2k+1}=0$, 从而得 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=0$.

Wallis 公式

推论 1.3.4. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & ,n\text{ 为正偶数}\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & ,n\text{ 为大于 1 的奇数.}\end{cases}$

一般形式:

$$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & ,m,n\text{ 为正偶数}\\ \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} & ,m,n\text{ 为大于 1 的奇数}\end{cases}.$$

证 利用分部积分公式 $\int f\mathrm{d}g=fg-\int g\mathrm{d}f$,

$$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^{n-1}x\mathrm{d}\sin x=\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}\left(\sin^m x\cos^{n-1}x\right)$$

$$=-m\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m+2}x\cos^{n-2}x\mathrm{d}x=-mI_{m,n}+(n-1)I_{m+2,n-2}$$

(1) 当 n 为正偶数 $n=2k$ 时,

$$I_{m,n}=\frac{n-1}{m+1}I_{m+2,n-2}=\frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+3}I_{m+4,n-4}=\cdots=\frac{(n-1)(n-3)\cdots1}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-1)}I_{m+n,0}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(n-1)(n-3)\cdots1}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-1)}\dfrac{(m+n-1)!!}{(m+n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & ,\text{当 } m \text{ 也为正偶数时}\\ \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots1}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-1)}\dfrac{(m+n-1)!!}{(m+n)!!} & ,\text{否则}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & ,\text{当 } m \text{ 也为正偶数时}\\ \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} & ,\text{否则}\end{cases}$$

因为 $\dfrac{(n-1)(n-3)\cdots1}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-1)}=\dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n-1)!!}$.

(2) 当 n 为大于 1 的奇数 $n=2k+1$ 时 (不论 m 是偶数还是奇数) 时,

$$I_{m,n}=\frac{n-1}{m+1}I_{m+2,n-2}=\frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+3}I_{m+4,n-4}=\cdots=\frac{(n-1)(n-3)\cdots2}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-2)}I_{m+n-1,1}$$

其中 $I_{m+n-1,1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m+n-1}x\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m+n-1}x\mathrm{d}\sin x=\int_0^1 t^{m+n-1}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{m+n}$, 代入上式, 得

$$I_{m,n}=\frac{(n-1)(n-3)\cdots2}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-2)}\cdot\frac{1}{m+n}=\frac{(n-1)!!(m-1)!!}{(m+n)!!}.$$

综上即得欲证等式.

定理 1.3.5 (双阶乘与阶乘的转化). $(2n)!!=2^n\cdot n!$, $(2n-1)!!=\dfrac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$.

例 1.3.23. 设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$, $b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^n x\mathrm{d}x$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$.

由推论 1.3.4 知, $b_n=\begin{cases}\dfrac{[(n-1)!!]^2}{(2n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}\\ \dfrac{[(n-1)!!]^2}{(2n)!!}, & n\text{大于 1 的奇数}\end{cases}$, 并且

$$a_n\xlongequal{x=\cos t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\cdot\sin^2 t\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{(n+2)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}\\ \dfrac{(n-1)!!}{(n+2)!!}, & n\text{ 大于 1 的奇数}\end{cases}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\begin{cases}\dfrac{[(n-1)!!]^2}{(2n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{(n+2)!!}{(n-1)!!}\cdot\dfrac{2}{\pi}=\dfrac{(n-1)!!\cdot(n+2)!!}{(2n)!!}=\dfrac{n!(n+2)}{2^n\cdot n!}=\dfrac{n+2}{2^n}\to 0, & n\text{ 为正偶数}\\ \dfrac{[(n-1)!!]^2}{(2n)!!}\cdot\dfrac{(n+2)!!}{(n-1)!!}=\dfrac{(n-1)!!\cdot(n+2)!!}{(2n)!!}=\dfrac{n!(n+2)}{2^n\cdot n!}=\dfrac{n+2}{2^n}\to 0, & n\text{ 大于 1 的奇数}\end{cases}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=0.$

1.3.5 求极限其他常用方法

下述的各种方法涉及到之后的知识点, 若对知识点掌握不扎实, 可暂缓阅读.

L'Hospital 法则

定理 1.3.6 ($\frac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法则)**.** 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足以下条件:

(1) 当 $x\to a$ 时, $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是无穷小 (或无穷大);

(2) 在点 a 的某个去心邻域内, $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是可导的, 且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大),

那么 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

定理 1.3.7 ($\frac{*}{\infty}$ 型 L'Hospital 法则)**.** 对于 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的不定式, 一般情形 (即 $\dfrac{*}{\infty}$ 型的不定式) 为: 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

(1) 在点 a 的某个去心邻域内, $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是可导的, 且 $g'(x)\neq 0$;

(2) $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大),

那么 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

每次使用 L'Hospital 法则之前, 务必考察它是否属于七种不定型, 否则不能用, 七种不定型如下.

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$$

一旦用 L'Hospital 法则算不出结果, 不等于极限不存在. 例如 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}=1$, 就是如此. 这是因为 L'Hospital 法则只是充分条件, 不是必要条件.

使用 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的 L'Hospital 法则时, 只需要检验分母趋向无穷大即可, 分子不趋向 ∞ 没有关系.

在多数需要使用 L'Hospital 法则的情境下, 式子含有变限积分, 变限积分的求导公式如下:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(t)\mathrm{d}t=f(\beta(x))\cdot\beta'(x)-f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x).$$

定理 1.3.8 (Heine 定理). 若 $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall x_n \to x_0\ (n\to\infty)$, 恒有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

例 1.3.24. 求下列极限值.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} \dfrac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t$.

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(n^3-n^2+\dfrac{n}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\sqrt{1+n^6}\right]$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_1^n \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$.

(4) (中国科学院) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x^2\sin 2x}$.

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{n}\cdot\displaystyle\int_n^{n^2}\left(1+\dfrac{1}{2t}\right)^t\sin\dfrac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

(1) 将 $\dfrac{1}{n}$ 替换为 x, 利用 *Heine* 定理把数列极限转化为函数极限,

$$原式 = \lim_{x\to 0^+} x\int_x^1\frac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+}\frac{\displaystyle\int_x^1\frac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t}{t^{-1}} \xlongequal{L'} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\dfrac{\cos 2x}{4x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \frac{1}{4}\lim_{x\to 0^+}\cos 2x = \frac{1}{4}.$$

(2) 由 *Heine* 定理, 将数列极限转为函数极限, 并且令 $t=\dfrac{1}{x}$, 那么 $t\to 0^+$,

$$原式 = \lim_{t\to 0^+}\left[\left(\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2t}\right)\mathrm{e}^t-\sqrt{1+\frac{1}{t^6}}\right] = \lim_{t\to 0^+}\frac{\left(1-t+\dfrac{t^2}{2}\right)\mathrm{e}^t-\sqrt{1+t^6}}{t^3}$$

$$\xlongequal{L'} \lim_{t\to 0^+}\frac{(-1+t)\mathrm{e}^t+\left(1-t+\dfrac{t^2}{2}\right)\mathrm{e}^t-\dfrac{6t^5}{2\sqrt{1+t^6}}}{3t^2} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t-\dfrac{3t^3}{\sqrt{1+t^6}}}{3} = \frac{1}{6}.$$

(3) 为 $\dfrac{*}{\infty}$ 型, 原式 $\xlongequal{L'} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\dfrac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\dfrac{2\sqrt{n}}{1} = 2.$

(4) 为 $\dfrac{0}{0}$ 型, 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{2x^3} \xlongequal{L'} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\mathrm{e}^{x^2}}{6x^2} = -\dfrac{1}{6}.$

(5) 为 1^∞ 型,

$$原式 = \exp\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right) = \exp\lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\frac{2}{\pi}\arctan x - 1\right)$$

$$\xlongequal{\frac{1}{x}=t} \exp\lim_{t\to 0^+}\frac{\dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{1}{t}-1}{t} \xlongequal{L'} \exp\lim_{t\to 0^+}\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{1+\dfrac{1}{t^2}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\right] = \mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}}.$$

(6) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\displaystyle\int_n^{n^2}\left(1+\dfrac{1}{2t}\right)^t\sin\dfrac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t}{n} \xlongequal{L'} \lim\limits_{n\to\infty}\left[2n\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right)^{n^2}\sin\dfrac{1}{n}-\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$,

其中

$$\lim_{n\to\infty} 2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n^2}\sin\frac{1}{n} = 2\exp\lim_{n\to\infty} n^2\ln\left(1+\frac{1}{2n^2}\right) = 2\sqrt{\mathrm{e}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n}{\sqrt{n}} = 0.$$

故, 原式 $= 2\sqrt{\mathrm{e}}$.

例 1.3.25 (中南大学). 设 $f(x)$ 有二阶导数, 在原点附近不为零, 但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 0$, $f''(0)=4$, 求

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)\xlongequal{L'}\exp\lim_{x\to0}\frac{\frac{f'(x)}{x}-\frac{f(x)}{x^2}}{1+\frac{f(x)}{x}}$$，下求分子分母的极限.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0\Rightarrow f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0$$
$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\xlongequal{f(0)=0}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$$
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\xlongequal{L'}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0)=2$$

于是 $\lim_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{4-2}{1}}=\mathrm{e}^2$.

例 1.3.26 (2005 数学 (二)). 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $f(0)\neq0$, 求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}.$$

$$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}-\int_x^0 f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$，于是

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}\xlongequal{L'}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)}$$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内未必可导, 不满足 *L'Hospital* 法则条件, 不能继续用 *L'Hospital* 法则. 以下给出两种解法:

法一: 用积分中值定理 $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\cdot x$, 其中 ξ 介于 0 与 x 之间.

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f(\xi)}{f(\xi)+f(x)}=\frac{1}{2}.$$

法二: 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F'(x)=f(x)$, $\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=f(0)$.

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{F(x)+xF'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{F(x)-F(0)}{x}}{\frac{F(x)-F(0)}{x}+F'(x)}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}.$$

注意**连续不一定可导, 可导必连续**, 即当不满足 L'Hospital 法则条件时, 可参考例题 1.3.26 中给出的两种方法.

例 1.3.27. 设 $f'(x)$ 连续, $f(0)=0, f'(0)\neq0$, 求 $\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}f(x^2-t)\mathrm{d}t}{x^3\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t}$.

分子有

$$\int_0^{x^2}f(x^2-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x^2-t=u}-\int_{x^2}^0 f(u)\mathrm{d}u=\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u=\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t$$

分母有

$$\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t\xlongequal{xt=v}\frac{1}{x}\int_0^x f(v)\mathrm{d}v=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

于是

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}\xlongequal{L'}\lim_{x\to0}\frac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)}\xlongequal{L'}\lim_{x\to0}\frac{4xf'(x^2)}{3f(x)+xf'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{4f'(x^2)}{3\frac{f(x)}{x}+f'(x)}=\frac{4f'(0)}{4f'(0)}=1.$$

例 1.3.28. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f(0)=0, f'(0)=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t}{x^3\sin x}$.

因为 $\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t \xlongequal{x^2-t^2=u} -\dfrac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$，于是

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t}{x^4} \xlongequal{L'} \lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{4x^2} \xlongequal{L'} \frac{1}{4}f'(x^2) = \frac{1}{4}.$$

例 1.3.29. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，$f'(0)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^\alpha-\sin x}=\beta\neq 0$，求 α 与 β 的值.

由定理 1.3.4 知，$\lim\limits_{x\to 0^+}(x^\alpha-\sin x)=0$，即 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^\alpha}{\sin x}=1\Rightarrow \alpha=1$，所以

$$原式 = \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\frac{1}{6}x^3} \xlongequal{L'} \lim_{x\to 0^+}\frac{2f(x)}{x^2} \xlongequal{L'} \lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{x}$$

由 $f'(0)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0$，可设 $f(x)=x^2$，故 $\alpha=1, \beta=2$.

Taylor 展开

无穷小的相关概念 在正式介绍如何用 Taylor 展开计算极限前，需要对无穷小性质做相关介绍.

定义 1.3.1 (无穷小的相关定义). (1) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，那么称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$;

(2) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，那么称 β 是比 α 同阶的无穷小，记作 $\beta\sim c\alpha$;

(3) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0, k>0$，那么称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小，记作 $\beta\sim c\alpha^k$;

(4) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，那么称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$;

(5) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，那么称 β 是比 α 低阶的无穷小.

定理 1.3.9 (等价无穷小的充要条件). β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

定理 1.3.10 (无穷小量的传递性). 设 $\alpha\sim\alpha', \beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

定理 1.3.11 (无穷小量的加法). 设 $m>n>0$ 且 $\lim\alpha=0$，则有 $o(\alpha^m)\pm o(\alpha^n)=o(\alpha^k)$ $(0<k\leqslant n)$.

证 $\lim\dfrac{o(\alpha^m)\pm o(\alpha^n)}{\alpha^k}=\lim\dfrac{o(\alpha^m)}{\alpha^m}\cdot\alpha^{m-k}\pm\lim\dfrac{o(\alpha^n)}{\alpha^n}\cdot\alpha^{n-k}=0.$

定理 1.3.12 (无穷小量的乘法). $m,n>0$ 且 $\lim\alpha=0$，则有 $o(\alpha^m)$(或 α^m)$\cdot o(\alpha^n)=o(\alpha^k)$ $(0<k\leqslant m+n)$.

证 $\lim\dfrac{o(\alpha^m)\cdot o(\alpha^n)}{\alpha^k}=\lim\dfrac{o(\alpha^m)}{\alpha^m}\cdot\lim\dfrac{o(\alpha^n)}{\alpha^n}\cdot\lim\alpha^{m+n-k}=0\times 0\times 0=0.$ (α^m 同理).

例 1.3.30. 设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$, 其中 $|\alpha(x)|<\dfrac{\pi}{2}$, 则当 $x\to 0$ 时, $\alpha(x)$ 是

A. 比 x 高阶的无穷小量

B. 比 x 低阶的无穷小量

C. 与 x 同阶但不等价的无穷小量

D. 与 x 等价的无穷小量

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\alpha(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}\neq 1$, 于是当 $x\to 0$ 时, $\alpha(x)$ 与 x 同阶但不等价的无穷小量, 选 C.

例 1.3.31. 设 $g(x)$ 可导, 且当 $x\to 0$ 时, $g(x)$ 是 x 的高阶无穷小, 则当 $x\to 0$ 时, 必有

A. $g'(x)$ 是无穷小量

B. $\dfrac{x}{g(x)}$ 是无穷大量

C. 若 $G'(x)=g(x)$, 则 $G(x)$ 是 x 的高阶无穷小

D. $\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ 是 x^2 的高阶无穷小

由于 $g(x)$ 是 x 的高阶无穷小, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=0$, 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}{x^2}\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{2x}=0$$

因此 $\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ 是 x_2 的高阶无穷小, 故选 D.

反例: 对于 A 选项 $g(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 此时 $g(x)$ 是 x 的高阶无穷小, 但此时

$$g'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

它在 $x=0$ 附件是振荡的, 极限不存在, 无法使用 *L'Hospital* 法则; 对于 B 选项, $g(x)=0$, 在 $g(x)\neq 0$ 的情况下是对的; 对于 C 选项 $G(x)=x^3+1$, $g(x)=3x^2$, $g(x)$ 的原函数有无数个, 它们相差一个常数, 而只有一个能保证 $G(x)$ 是无穷小.

例 1.3.32. 若 $x\to 0$ 时, 函数 $\cos x-\dfrac{c+9x^2}{c+4x^2}$ 是 x^2 的高阶无穷小, 求 c.

因为 $\cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$, 且 $\dfrac{c+9x^2}{c+4x^2}=\dfrac{9}{4}-\dfrac{5}{4\left(1+\dfrac{4}{c}x^2\right)}=\dfrac{9}{4}-\dfrac{5}{4}\left[1-\dfrac{4}{c}x^2+o(x^2)\right]=1+\dfrac{5}{c}x^2+o(x^2)$, 于是

$$\cos x-\frac{c+9x^2}{c+4x^2}=1-\frac{1}{2}x^2-\left[1+\frac{5}{c}x^2\right]+o(x^2)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{5}{c}\right)x^2+o(x^2)$$

故 $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{c}=0$, 解得 $c=-10$.

符号 O 与 o 的含义 符号“$f(x)=O(1)$”表示在所讨论过程中, “$f(x)$ 是有界量”, 即 $\exists M>0$, 使得 $|f(x)|\leqslant M$ (在此过程中保持成立); 符号“$o(1)$”代表在所讨论过程里, 它是“无穷小量”. 例如: $\alpha=o(1)$, 意指: (在所讨论过程里) α 是无穷小量.

$$f(x)=O(g(x))\text{ 代表 }\frac{f(x)}{g(x)}=O(1),\ f(x)=o(g(x))\text{ 代表 }\frac{f(x)}{g(x)}=o(1).$$

推论 1.3.5 (Laurent 级数). 作为例题 1.3.13 的推广表达式:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1+\frac{\ln(n)}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right);\\
&\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2n}+\frac{11\mathrm{e}}{24n^2}-\frac{7\mathrm{e}}{16n^3}+\frac{2447\mathrm{e}}{5760n^4}+O\left(\frac{1}{n^5}\right);\\
&\lim_{x\to 0}x^x=1+x\ln x+\frac{1}{2}x^2\ln^2 x+\frac{1}{6}x^3\ln^3 x+\frac{1}{24}x^4\ln^4 x+\frac{1}{120}x^5\ln^5 x+O(x^6);\\
&\lim_{x\to 1}x^x=1+(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+\frac{1}{3}(x-1)^4+\frac{1}{12}(x-1)^5+O\big((x-1)^6\big).
\end{aligned}$$

例 1.3.33. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}+\dfrac{\mathrm{e}}{2n}\right]$.

由推论 *1.3.5* 知, 极限可化为 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot\left[\dfrac{11\mathrm{e}}{24n^2}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right]=\dfrac{11\mathrm{e}}{24}$.

例 1.3.34. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(2\cdot n^{\frac{1}{n}}-1\right)^n}{n^2}$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1+\dfrac{\ln n}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, 于是原式化为

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[1+\frac{2\ln n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1+\frac{2\ln n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n^{\frac{2}{n}}}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+2\ln n+O\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{\frac{2}{n}+1}}\right]^n$$

当 $n\to\infty$ 时, $n^{\frac{2}{n}+1}\to n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$, 故上式极限为 *1*.

例 1.3.35. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e}^2\left(x-\sqrt{1-2x}\right)}{x^2}$.

因为 $(1+2x)^{\frac{1}{x}}=(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2}=\left(\mathrm{e}-\dfrac{\mathrm{e}}{2}\cdot 2x+\dfrac{11\mathrm{e}}{24}\cdot(2x)^2+o(x^2)\right)^2=\mathrm{e}^2\left(1-2x+\dfrac{14}{3}x^2\right)+o(x^2)$, 且 $x-\sqrt{1-2x}=-1+2x+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$, 于是

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^2\left(1-2x+\frac{14}{3}x^2-1+2x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)}{x^2}=\frac{31}{6}\mathrm{e}^2.$$

Taylor 公式 若 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内可导, 则 $\forall x,x_0\in[a,b]$, $\exists\xi$ 位于 x 与 x_0 之间, 使得下式成立:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中, $R_n(x)=\dfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$ 为 *Lagrange* 余项.
若 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数 $f^{(n)}(x_0)$, 则在 x_0 邻域内上式成立, 其中 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ $(x\to x_0)$, 称为 *Peano* 余项. 常用函数的展开式可见 7.2.3 节.

例 1.3.36. 若要使 $x\to 0$ 时, $\mathrm{e}^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$ 为尽可能高阶的无穷小量, 问数 a,b 应取何值? 用 x 的幂级数写出此时的等价无穷小.

用 Taylor 公式展开到 x^3 此项，有 $\mathrm{e}^x=\sum\limits_{k=0}^{3}\dfrac{x^k}{k!}+o(x^3)$，

$$\frac{1+ax}{1+bx}=\frac{1+bx+(a-b)x}{1+bx}=1+(a-b)x\left[\sum_{k=0}^{2}(-bx)^k+o(x^2)\right]=1+(a-b)\sum_{k=0}^{2}(-1)^kb^kx^{k+1}+o(x^3)$$

于是

$$\mathrm{e}^x-\frac{1+ax}{1+bx}=[1-(a-b)]x+\left[\frac{1}{2}+(a-b)b\right]x^2+\left(\frac{1}{3!}-ab^2+b^3\right)x^3+o(x^3)$$

令 x 的一、二次项系数为零，解得 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$，此时

$$\mathrm{e}^x-\frac{1+ax}{1+bx}=-\frac{1}{12}x^3+o(x^3)\sim-\frac{1}{12}x^3\ (x\to0).$$

例 1.3.37. 用 Taylor 展开求下列极限值.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{3-\mathrm{e}^x}{2+x}\right)^{\csc x}$.　(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.　(3) $\lim\limits_{x\to0}(\cos2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.　(5) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}$.　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}\right)^{x}$.　(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{\left(\cos x-\mathrm{e}^{x^2}\right)\sin\left(x^2\right)}$.　(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-(1+x)^{\frac{\mathrm{e}}{x}}}{x^2}$.

(1) 原式 $=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{3-\mathrm{e}^x}{2+x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\mathrm{e}^x-x}{(2+x)x}}=\exp\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)}{x(2+x)}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(2) 本题也可以用等价无穷小来写.

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=\exp\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$$
$$=\exp\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\exp\lim_{x\to0}\frac{x-\left(x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2}=\sqrt{\mathrm{e}}.$$

(3) 要将 $\sin x$ 与 $\cos x$ 展开到四阶，与分母等价.

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^4}\ln(\cos2x+2x\sin x)=\exp\lim_{x\to0}\frac{\cos2x+2x\sin x-1}{x^4}$$
$$=\exp\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{(2x)^2}{2!}+\dfrac{(2x)^4}{4!}+o(x^4)+2x\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-1}{x^4}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}.$$

(4) 注意本题要将 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ 展开到二阶.

$$\text{原式}=\exp\lim_{x\to\infty}x\ln\left[\mathrm{e}^{-1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\exp\lim_{x\to\infty}x\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]$$
$$=\exp\lim_{x\to\infty}x\left[x\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-1\right]=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

(5) 原式 $=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]}=\exp\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x^2}\left(x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\dfrac{1}{x}\right]=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

(6) 本题也可以用等价无穷小来写.

$$\text{原式}=\exp\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)=\exp\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x-\ln x+\dfrac{\ln x}{2x}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}{\ln x+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \exp \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\ln\ln x + (1-2x)\ln x + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{2x\ln x + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \exp \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\ln\ln x}{\ln x} + \frac{1}{x} - 2\right) = \mathrm{e}^{-1}.$$

(7) 本题也可以用等价无穷小来写.

$$\text{原式} = \exp \lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{1}{x} + 2^{\frac{1}{x}}\right) = \exp \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{1}{x} + 2^{\frac{1}{x}} - 1\right) \xlongequal{\frac{1}{x}=t} \exp \lim_{t\to0} \frac{t + 2^t - 1}{t}$$

$$= \exp \lim_{t\to0} \frac{t + \mathrm{e}^{t\ln 2} - 1}{t} = \exp \lim_{t\to0} \frac{t + t\ln 2 + o(t)}{t} = \mathrm{e}^{1+\ln 2} = 2\mathrm{e}.$$

(8) $\text{原式} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\dfrac{x^2}{2} + 1 - \left(1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8} + o\left(x^4\right)\right)}{\left(\cos x - 1 + 1 - \mathrm{e}^{x^2}\right)\cdot x^2} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\dfrac{x^4}{8} + o\left(x^4\right)}{\left(-\dfrac{x^2}{2} - x^2 + o\left(x^2\right)\right)x^2} = -\dfrac{1}{12}$

(9) 因为 $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$，则

$$\text{原式} = \lim_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^{(1+x)^{1/x}}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}} - \frac{\mathrm{e}}{x}\ln(1+x)\right]}{x^2} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}\lim_{x\to0} \frac{\exp\left[\frac{1}{x}\ln(1+x) - 1\right] - \frac{1}{x}\ln(1+x)}{x^2}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}\lim_{x\to0} \frac{\exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) - 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)}{x^2} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}\lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^2}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}}{8}.$$

例 1.3.38. 用 Taylor 展开求下列极限值.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt[4]{x^4-2x^3}\right)$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x^2} + \cos\dfrac{1}{x}\right)^{\sin^{-2}\left(\frac{1}{x}\right)}$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\mathrm{e}^{x^2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2\right)}{[\ln(1-x)+\ln(1+x)]\cdot\sin\dfrac{x^2}{1+x}}$.

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\displaystyle\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

(6) $\lim\limits_{x\to0}\left(1 - x^{\frac{2}{3}} + \displaystyle\int_0^{\sqrt[5]{x^2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t\right)^{x^{-2}}$.

(1) $\text{原式} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{x}} - \sqrt[4]{1-\dfrac{2}{x}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{x} - 1 + \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{3}{2}$.

(2) $\text{原式} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 + \dfrac{2}{3x} + \dfrac{1}{3x^3} - 1 - \dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = -\dfrac{1}{3}$.

(3) 等价无穷小与 Taylor 展开配合使用.

$$\text{原式} \xlongequal{\frac{1}{x}=t} \exp\lim_{t\to0}\frac{1}{\sin^2 t}\ln\left(\sin 2t^2 + \cos t\right) = \exp\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t^2 + \cos t - 1}{t^2} = \exp\lim_{t\to0}\frac{2t^2 - \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)}{t^2} = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}.$$

(4) $\text{原式} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o\left(x^2\right)\right)}{-\left(x + \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) + x - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)}\cdot\dfrac{1+x}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{x^2}{4}}{-x^2} = \dfrac{1}{4}$.

(5) 等价无穷小与 L'Hospital 法则和 Taylor 展开配合使用，要注意展开的阶数.

$$\text{原式} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x} \xlongequal{L'} \lim_{x\to+\infty} x^2\left[\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - x\right] = \frac{1}{2}.$$

(6) **被积函数的 Taylor 展开** 若 $F(x)=f(x)+o(x^n)$, 则有 $\int_0^x F(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+o(x^{n+1})$,

$$\text{原式}\xlongequal{x^{\frac{2}{3}}=y}\lim_{y\to 0}\left(1-y+\int_0^y \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t\right)^{y-3}=\exp\lim_{y\to 0}\frac{1}{y^3}\ln\left(1-y+\int_0^y \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t\right)$$
$$=\exp\lim_{y\to 0}\frac{-y+\int_0^y\left(1+\frac{1}{2}t^2+o\left(t^2\right)\right)\mathrm{d}t}{y^3}=\exp\lim_{y\to 0}\frac{-y+y+\frac{1}{6}y^3+o\left(y^3\right)}{y^3}=\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}.$$

例 1.3.39. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内可导, 且 $f(0)=1, f'(0)=2$, 求 $\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{1-f\left(\frac{1}{n}\right)}}$.

$$\text{原式}=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1-f\left(\frac{1}{n}\right)}\ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right)=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1-f\left(\frac{1}{n}\right)}\left(n\sin\frac{1}{n}-1\right)$$
$$=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1-f\left(\frac{1}{n}\right)}\left[n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-1\right]=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{6n}}{1-f\left(\frac{1}{n}\right)}$$
$$=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n}}{f\left(0+\frac{1}{n}\right)-f(0)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{6f'(0)}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{12}}$$

例 1.3.40 (2020 北京化工大学). 计算极限 $\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{\mathrm{e}}{2}x+x^2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-\mathrm{e}\right]\right\}$.

令 $\frac{1}{x}=t$, $(t\to 0^+,\ x\to+\infty)$, 于是

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0^+}\left\{\frac{\mathrm{e}}{2t}+\frac{1}{t^2}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}-\mathrm{e}\right]\right\}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\mathrm{e}t+2\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}-\mathrm{e}\right]}{2t^2}$$

其中 $(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}$, 并且需要将 $\ln(1+t)$ 展开到三阶, 即 $\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o(x^3)$, 那么

$$\frac{\ln(1+t)}{t}=1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+o(x^2)$$

于是 $\mathrm{e}^{\frac{1}{t}\ln(t+1)}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+o(x^2)}$, 并且需要将 e^x 展开到二阶, 这是因为对 $-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}$ 平方后依旧存在 t 的二阶项, 但无需展开到三阶, 故

$$\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+o(t^2)}=1+\left(-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+o(t^2)\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+o(t^2)\right)^2$$
$$=1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+o(t^2)+\frac{t^2}{8}+o(t^2)=1-\frac{t}{2}+\frac{11t^2}{24}+o(t^2)$$

因此

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\mathrm{e}t+2\left[\mathrm{e}\left(1-\frac{t}{2}+\frac{11t^2}{24}+o(t^2)\right)-\mathrm{e}\right]}{2t^2}=\frac{11}{24}\mathrm{e}.$$

例 1.3.41. 设 p 是某正整数, $I_n=\frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^n k^p-\frac{n}{p+1}$, 求 $\lim_{n\to\infty}I_n$.

由带 Peano 余项的 Taylor 展开式 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+o\big((x-x_0)^2\big)$ 记 $h=x-x_0$ 可得

$$f(x)-f(x-h)=f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+o\left(\frac{1}{h^2}\right)$$

那么令 $f(x)=\dfrac{x^{1+p}}{1+p}$，则 $f'(x)=x^p$，$f''(x)=px^{p-1}$，于是当 $n\to\infty$ 时

$$f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p+\frac{1}{2n^2}p\left(\frac{k}{n}\right)^{p-1}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

即

$$\left(\frac{k}{n}\right)^p=n\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]-\frac{1}{2n}p\left(\frac{k}{n}\right)^{p-1}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

累加得

$$\frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n}k^p=n(f(1)-f(0))+\frac{p}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{p-1}+o(1)$$

又因为 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{p-1}=p$，所以 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{1}{2}$.

例 1.3.42. 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\sin(2\pi n!\mathrm{e})$.

用 *Taylor* 公式，$\exists\theta_n\in(0,1)$，使得

$$\mathrm{e}=\mathrm{e}^x\big|_{x=1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta_n}}{(n+2)!}$$

$$原式=\lim_{n\to\infty}n\sin\left\{2\pi n!\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta_n}}{(n+2)!}\right]\right\}=\lim_{n\to\infty}n\sin\left[\frac{2\pi}{n+1}+\frac{2\pi\mathrm{e}^{\theta_n}}{(n+1)(n+2)}\right]$$

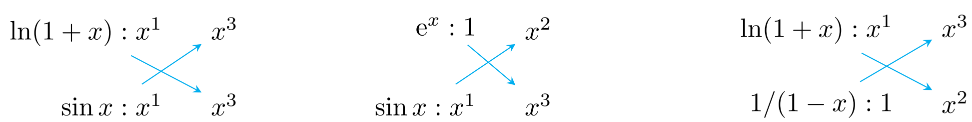
其中 $\alpha_n\xlongequal{记}\dfrac{2\pi}{n+1}+\dfrac{2\pi\mathrm{e}^{\theta_n}}{(n+1)(n+2)}\to 0\ (n\to\infty)$，于是

$$原式=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{\sin\alpha_n}{\alpha_n}\cdot\alpha_n\right)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\pi n}{n+1}+\frac{n}{(n+1)(n+2)}\cdot 2\pi\mathrm{e}^{\theta_n}\right]=2\pi.$$

两个函数乘积的 Taylor 展开　若 f,g 展开第一个不为 0 的项次数分别为 m,n，欲使 $f\cdot g$ 展开到 p 阶，则 f,g 分别需要展开到 $p-n,p-m$ 阶.

例 1.3.43. 将下列函数展开到指定的阶数.

(1) $\ln(1+x)\sin x$，展开到 4 阶.	(2) $\mathrm{e}^x\sin x$，展开到 3 阶.	(3) $\dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$，展开到 3 阶.



(1) $\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$，$\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$，所以

$$\begin{aligned}\ln(1+x)\sin x&=\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o_1\left(x^3\right)\right)\left(x-\frac{1}{6}x^3+o_2\left(x^3\right)\right)\\&=x^2-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^4+o\left(x^4\right)=\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{2}x^3+x^2+o\left(x^4\right)\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$，$\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x\sin x&=\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)\left(x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right)\\&=x-\frac{1}{6}x^3+x^2+\frac{1}{2}x^3+o\left(x^3\right)=\frac{1}{3}x^3+x^2+x+o\left(x^3\right)\end{aligned}$$

(3) $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$, $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+o(x^2)$, 所以

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x)}{1-x}&=\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)(1+x+x^2+o(x^2))\\&=x+x^2+x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)=\frac{5}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+o(x^3).\end{aligned}$$

推论 1.3.6. $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 展开第一个不为 0 的项次数分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_k$, 欲使 $f_1f_2\cdots f_k$ 展开到 p 阶, 则 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 分别需要展开到 $p-(m_2+m_3+\cdots+m_k),p-(m_1+m_3+\cdots+m_k),\cdots,p-(m_2+m_3+\cdots+m_{k-1})$ 阶.

例 1.3.44. 试用推论 1.3.6, 计算例 1.3.2(12).

需要将$\sin kx$ 展开到三阶, 故 $\sin kx=kx-\frac{1}{6}(kx)^3+o(x^3)$, 那么

$$\prod_{k=1}^{n}\sin kx=\prod_{k=1}^{n}\left[kx-\frac{1}{6}(kx)^3+o(x^3)\right]\ (x\to 0)$$

在上式中排列组合出 x 的阶数小于等于 $n+2$ 的项, 有

$$\prod_{k=1}^{n}\sin kx=n!x^n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}n!k^2x^{n+2}+o(x^{n+2})=n!x^n-\frac{n!x^{n+2}}{6}\sum_{k=1}^{n}k^2+o(x^{n+2})\ (x\to 0)$$

$$\text{故原式}=\lim_{x\to 0}\frac{n!x^n-n!x^n+\frac{n!x^{n+2}}{6}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2+o\left(x^{n+2}\right)}{x^{n+2}}=\frac{n!}{6}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(2n+1)}{36}(n+1)!.$$

复合函数的 Taylor 展开 先确定外函数的展开阶数, 再由各项阶数确定内函数的展开阶数.

例 1.3.45. 将下列函数展开到指定的阶数.

(1) $\sin(\sin x)$, 展开到 3 阶.	(2) $\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{\sin x}$, 展开到 3 阶.
(3) $\ln\cos x$, 展开到 6 阶.	(4) $\frac{1}{\mathrm{e}}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, 展开到 3 阶.

(1) 先将外层函数展开到 3 阶,

$$\begin{aligned}\sin(\sin x)&=\sin x-\frac{1}{6}\sin^3x+o(\sin^3x)=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-\frac{1}{6}(x+o(x))^3+o(x^3)\\&=x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{\sin x}=\mathrm{e}^{\tan x}-1-(\mathrm{e}^{\sin x}-1)$, 先将外层函数展开到 3 阶,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\tan x}-1&=\tan x+\frac{1}{2}\tan^2x+\frac{1}{6}\tan^3x+o\left(\tan^3x\right)\\&=\left(x+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right)+\frac{1}{2}\left(x+o\left(x\right)\right)^2+\frac{1}{6}\left(x+o\left(x\right)\right)^3+o\left(x^3\right)\\&=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+o\left(x^3\right)\\\mathrm{e}^{\sin x}-1&=\sin x+\frac{1}{2}\sin^2x+\frac{1}{6}\sin^3x+o\left(\sin^3x\right)\\&=\left(x^3-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right)+\frac{1}{2}\left(x+o\left(x\right)\right)^2+\frac{1}{6}\left(x+o\left(x\right)\right)^3+o\left(x^3\right)\\&=\frac{1}{2}x^2+x+o\left(x^3\right)\end{aligned}$$

故 $\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{\sin x}=\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$.

(3) 先将外层函数展开到 6 阶,

$$\begin{aligned}
\ln\cos x &= \frac{1}{2}\ln\left(1-\sin^2 x\right) = -\frac{1}{2}\left(\sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{2} + \frac{\sin^6 x}{3} + o(\sin^3 x)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^5\right)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+0\left(x^5\right)\right)^4 + \frac{1}{3}\left(x+o(x)\right)^6\right] + o\left(x^6\right) \\
&= -\frac{1}{45}x^6 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^6\right).
\end{aligned}$$

(4) 原式 $= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}$, 注意到 $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, 于是

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)} = 1 + \left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)^3 \\
&= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

例 1.3.46. 计算下列极限值.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\left(\mathrm{e}^x-1\right)-\mathrm{e}^{\tan x}+1}{x^4}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(\sin x\right)-\mathrm{e}^{\cos x-1}}{\tan^2 x-\sin^2 x}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\sin^2 x\right)-6\left(\sqrt[3]{2-\cos x}-1\right)}{x^4}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 - x^4\ln^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

(1) 注意到

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),\ \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

于是

$$\begin{aligned}
\tan\left(\mathrm{e}^x-1\right) &= \mathrm{e}^x - 1 + \frac{1}{3}(\mathrm{e}^x-1)^3 + o(x^4) \\
&= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)^3 + o(x^4) \\
&= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+o(x^3)\right)^3 + o(x^4) \\
&= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \\
&= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{13}{24}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\tan x} - 1 = \tan x + \frac{1}{2}\tan^2 x + \frac{1}{6}\tan^3 x + \frac{1}{24}\tan^4 x + o(x^4) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)\right)^3 + \frac{1}{24}\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)\right)^4 + o(x^4) \\
&= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\left(x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right) + \frac{1}{6}\left(x^3+o(x^4)\right) + \frac{1}{24}\left(x^4+o(x^4)\right) + o(x^4) \\
&= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{24}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

因此原式 $= \dfrac{\frac{1}{6}x^4+o(x^4)}{x^4} = \dfrac{1}{6}$.

(2) 与上题同理, 注意到

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),\ \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4),\ \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

于是

$$\begin{aligned}\cos(\sin x) &= 1-\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{24}\sin^4 x+o(x^4)\\ &= 1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)^2+\frac{1}{24}\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)^4+o(x^4)\\ &= 1-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)\right)+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\\ &= 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\cos x-1} &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4++o(x^4)}\\ &= 1+\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)+o(x^4)\\ &= 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)+\frac{1}{2}x^4\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}x^2+o(x^2)\right)^2+o(x^4)\\ &= 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan^2 x-\sin^2 x &= \left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)\right)^2-\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)^2\\ &= x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)-\left(x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)\right)=x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

于是原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)-\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^4+o(x^4)\right)}{x^4+o(x^4)}=\dfrac{1}{24}$.

(3) $\ln(1+\sin^2 x)=\sin^2 x-\dfrac{1}{2}\sin^4 x+o(x^4)$，且 $\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^4)$，于是

$$\begin{aligned}\ln(1+\sin^2 x) &= \left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^2-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^4+o(x^4)\\ &= x^2\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)^2-\frac{1}{2}x^4\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)^4+o(x^4)=x^2-\frac{5}{6}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2-\cos x}-1 &= \sqrt[3]{1+(1-\cos x)}-1=\frac{1}{3}(1-\cos x)+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}(1-\cos x)^2\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{2}+o(x^4)\right)^2+o(x^4)=\frac{1}{6}x^2-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\end{aligned}$$

于是原式 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{-\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=-\dfrac{7}{12}$.

(4) **法一：** 利用 *L'Hospital* 法则计算极限

$$I=\lim_{x\to\infty}x^2\left[1-\frac{1}{2x}+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\left[1-\frac{1}{2x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to 0}\left[1-\frac{t}{2}+\frac{\ln(1+t)}{t}\right]\cdot\frac{t-\frac{t^2}{2}-\ln(1+t)}{t^3}$$

$$\xlongequal{L'}\lim_{t\to 0}\frac{2-2t+\frac{2}{1+t}}{2}\cdot\frac{1-t-\frac{1}{1+t}}{3t^2}=2\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3}.$$

法二： 对 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$，$x\to\infty$ 进行 *Taylor* 展开，有

$$\begin{aligned}I &= \lim_{x\to\infty}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-x^4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o(x^{-4})\right)^2\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-x^2\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o(x^{-3})\right)^2\right]\\ &= \lim_{x\to\infty}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{3x}\right)^2\right]=\lim_{x\to\infty}\left(x-\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}+\frac{1}{3x}\right)\left(x-\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3x}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-6x^2+3x-1}{9x^2}=-\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

例 1.3.47. 计算极限 $\lim\limits_{x \to 0}\left[\dfrac{1}{x\ln(1+x)}-\dfrac{2+x}{2x^2}\right]$.

对 $\ln(1+x)$ 进行 *Taylor* 展开, 有 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$, 于是

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)}-\frac{2+x}{2x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{12}{2x^2(6-3x+2x^2)}-\frac{2+x}{2x^2}\right]\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{12-(2+x)(6-3x+2x^2)}{2x^2(6-3x+2x^2)}=-\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{2(6-3x+2x^2)}=-\frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

例 1.3.48. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上三阶可导, 满足

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2}=a\neq 1\ f^{(k)}(x)>0,\ k=0,1,2$$

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$.

注意到

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{[f''(x)]^2-[f''(x)]^2+f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2}\\
&=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{[f''(x)]^2-f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2}=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f'(x)}{f''(x)}\right)
\end{aligned}$$

于是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{f'(x)}{f''(x)}\right)=1-a$, 并且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{1}{\dfrac{f'(x)}{xf''(x)}\cdot\dfrac{xf''(x)}{f(x)}}$$

利用 *L'Hospital* 法则, 得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{xf''(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{f'(x)}{f''(x)}}{x}\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f'(x)}{f''(x)}\right)=1-a$$

注意到 $\dfrac{f'(x)}{xf''(x)}>0\ (0<x<+\infty)$, 故由极限的保号性知, $1-a\geqslant 0$, 但 $a\neq 1$, 所以 $a<1$; 另一方面, 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 及 $\forall h>0$, 由 *Taylor* 公式, 得

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(\xi)h^2>f(x)+f'(x)h\ \xi\in(x,x+h)$$

所以 $\lim\limits_{h\to\infty}f(x+h)=+\infty$, 即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$, 于是利用 *L'Hospital* 法则, 得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)}\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)+xf''(x)}{f'(x)}=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{xf''(x)}{f'(x)}=1+\frac{1}{1-a}=\frac{2-a}{1-a}$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{xf''(x)}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf'(x)}{f(x)}}=\frac{1}{2-a}.$$

Lagrange 中值定理

定理 1.3.13 (Lagrange 中值定理). 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则 $\forall x_1,x_2\in[a,b],\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)\cdot(x_2-x_1).$$

例 1.3.49. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos[2\ln(1+x)]}{x^2}$.

错解. 由 *Lagrange* 中值定理, $\cos x-\cos[2\ln(1+x)]=[2\ln(1+x)-x]\sin\xi$, 其中 ξ 介于 x 与 $2\ln(1+x)$ 之间, 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos[2\ln(1+x)]}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{[2\ln(1+x)-x]\sin\xi}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{[2x+o(x)-x]}{x}=1$$

错因: 当 $x\to 0^+$, $x<\xi<2\ln(1+x)\Rightarrow 1\leftarrow\dfrac{x}{x}<\dfrac{\xi}{x}<\dfrac{2\ln(1+x)}{x}\to 2$, 左右极限值不相等, 故不能由夹逼准则得 $\sin\xi\sim\xi$, 同理可得 $x\to 0^-$ 情况相同.

当 $x\to 0$ 时, $\cos[2\ln(1+x)]\to 1$, 于是原式可改写为

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x-1}{x^2}+\frac{1-\cos(2\ln(1+x))}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2\ln(1+x))}{x^2}=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}.$$

例 1.3.50. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{n^\beta-(n-1)^\beta}=2023$, 求 α,β 的值.

A. $\alpha=-\dfrac{2022}{2023},\ \beta=\dfrac{1}{2023}$.　　B. $\alpha=-\dfrac{2023}{2022},\ \beta=\dfrac{1}{2022}$.

C. $\alpha=-\dfrac{2022}{2023},\ \beta=\dfrac{1}{2022}$.　　D. $\alpha=-\dfrac{2023}{2022},\ \beta=\dfrac{1}{2023}$.

设 $f(x)=x^\beta$, 那么由 *Lagrange* 中值定理, 有

$$f(n)-f(n-1)=\beta\xi_n^{\beta-1}$$

那么极限式改写为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{\beta\xi_n^{\beta-1}}=2023$, 且 $\dfrac{n}{\xi_n}\to 1(n\to\infty)$, 于是 $\begin{cases}\dfrac{1}{\beta}=2023\\ \alpha=\beta-1\end{cases}$ 解得选 *A*.

例 1.3.51. 用 Lagrange 中值定理求下列极限值.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$. | (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{\theta}{n}\right)^n$. | (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$. | (5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$. | (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$.

(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{6}\xi^{-\frac{5}{6}}\cdot(2x^5)=\dfrac{1}{3}$, $\xi\to x^6$.

(2) 原式 $=\exp\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\cos\dfrac{\theta}{n}=\exp\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\cos\dfrac{\theta}{n}-1\right)=\exp\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\dfrac{\theta}{n}\cdot(-\sin\xi)=e^0=1$, $\xi\to 0$.

(3) 原式 $=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}=\exp\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)-1\right]=\exp\lim\limits_{n\to\infty}\sec^2\xi=e^2$, $\xi\to\dfrac{\pi}{4}$.

(4) 先用 *Lagrange* 中值定理, 再用 *Taylor* 展开.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln\sin x-2\ln(x\cos x)}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\cdot\xi}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{x-\dfrac{x^3}{6}-x\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)+o\left(x^3\right)}{x^2\cdot\xi}=\frac{2}{3},\ \xi\to x.$$

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}}{x^2}=\dfrac{3}{2}$, $\xi\to 1$.

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^\xi\left(x^2-2+2\cos x\right)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2+2\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)\right)}{x^4}=\dfrac{1}{12}$, $\xi\to 0$.

例 1.3.52. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 二阶可微且 $f'(0)=0$, $f''(0)=1$, 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}$.

显然 f 在 $x=0$ 邻域内一阶可微，因此由 *Lagrange* 中值定理，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{[x-\ln(1+x)]f'(\xi_x)}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi_x)}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi_x)-f'(0)}{\xi_x}\cdot\frac{\xi_x}{x}=\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2}$$

其中

$$1=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+x)}{x}\leqslant\lim_{x\to 0+}\frac{\xi_x}{x}\leqslant\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1$$
$$1=\lim_{x\to 0-}\frac{x}{x}\leqslant\lim_{x\to 0-}\frac{\xi_x}{x}\leqslant\lim_{x\to 0-}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

例 1.3.53 (2011 数一). 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$.

令 $y=\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$，则 $\ln y=\frac{\ln(\ln(x+1))-\ln x}{e^x-1}$，而

$$\lim_{x\to 0+}\ln y=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(\ln(x+1))-\ln x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(\ln(x+1))-\ln x}{x}$$

由 *Lagrange* 中值定理，令 $f(x)=\ln x$ 那么 $f(1+\ln x)-f(x)=\frac{\ln(1+x)-x}{\xi_x}$，其中 ξ_x 介于 x 与 $\ln(1+x)$ 之间，于是

$$\lim_{x\to 0+}\ln y=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+x)-x}{x\cdot\xi_x}=\lim_{x\to 0+}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

当 $x<0$ 时，$\ln y=\frac{\ln[-\ln(1+x)]-\ln(-x)}{e^x-1}$ 同样可得 $\lim\limits_{x\to 0-}\ln y=-\frac{1}{2}$，于是原极限为 $e^{-\frac{1}{2}}$.

例 1.3.54 (第三届数学竞赛决赛). 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}e^{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$.

对函数 $f(x)=e^{x^2}$ 在区间 $[0,x]$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 上应用拉格朗日中值定理，$\exists\xi\in(0,x)$，使得 $f(x)-f(0)=f'(\xi)x$，即

$$e^{x^2}-1=2\xi e^{\xi^2}x\Rightarrow 1\leqslant e^{x^2}=1+2\xi e^{\xi^2}x\leqslant 1+2ex$$

于是

$$\frac{n}{n^2x^2+1}\leqslant\frac{n}{n^2x^2+1}e^{x^2}\leqslant\frac{n}{n^2x^2+1}+\frac{2enx}{n^2x^2+1}$$

应用定积分的保号性，有

$$\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}e^{x^2}dx\geqslant\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}dx=\arctan nx\Big|_0^1=\arctan n$$

$$\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}e^{x^2}dx\leqslant\int_0^1\left(\frac{n}{n^2x^2+1}+\frac{2enx}{n^2x^2+1}\right)dx=\arctan nx\Big|_0^1+\frac{e}{n}\ln\left(1+n^2x^2\right)\Big|_0^1=\arctan n+\frac{e}{n}\ln\left(1+n^2\right)$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\arctan n+\frac{e}{n}\ln\left(1+n^2\right)\right]=\frac{\pi}{2}$，故由夹逼准则，等式成立.

例 1.3.55. 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left[\ln\left(x^2+x\right)-2\ln(1+x)\right]$.

法一： 利用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$，改写极限式，有

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\ln\frac{x^2+x}{(1+x)^2}=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\ln\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\ln\left(1+\frac{-x-1}{x^2+2x+1}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\cdot\frac{-x-1}{x^2+2x+1}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x+1}=-1.\end{aligned}$$

法二： 利用 *Lagrange* 中值定理：设 $f(x)=\ln x$，则 $\exists\xi$ 介于 x^2+x 与 x^2+2x+1，使得

$$\frac{f\left(x^2+x\right)-f\left(x^2+2x+1\right)}{\left(x^2+x\right)-\left(x^2+2x+1\right)}=f'(\xi)=\frac{1}{\xi},\xi\to\infty$$

即 $\ln\left(x^2+x\right)-\ln\left(x^2+2x+1\right)=-\dfrac{1}{\xi}(x+1)$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\ln\left(x^2+x\right)-2\ln(1+x)\right]=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\ln\left(x^2+x\right)-\ln\left(x^2+2x+1\right)\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[-\frac{1}{\xi}(x+1)\right]=-\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{\xi}$$

因为 ξ 介于 x^2+x 与 x^2+2x+1，由夹逼准则可知：

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\ln\left(x^2+x\right)-2\ln(1+x)\right]=-1$$

法三： 由 *L'Hospital* 法则可知：注意到

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x^2+x\right)-2\ln(1+x)\right]=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0$$

记 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left[\ln\left(x^2+x\right)-2\ln(1+x)\right]$，则

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+x\right)-2\ln(1+x)}{\dfrac{1}{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2x+1}{x^2+x}-\dfrac{2}{1+x}}{-\dfrac{1}{(x+1)^2}}$$
$$=-\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x+1}{x^2+x}-\frac{2x}{(1+x)x}\right](x+1)^2=-\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+x}=-1$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left[\ln\left(x^2+x\right)-2\ln(1+x)\right]=-1$.

法四： $\ln\left(x^2+x\right)$ 和 $\ln(1+x)$ 在 $x\to+\infty$ 的渐近展开式. 注意到：

$$\ln\left(x^2+x\right)=2\ln x+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right),\ \ln(1+x)=\ln x+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\ln\left(x^2+x\right)-2\ln(1+x)\right]=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[2\ln x+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-2\left(\ln x+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=-1.$$

例 1.3.56. 求极限 $I=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left[\mathrm{e}^{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\mathrm{e}x}\right]$.

作变量代换：$t=\dfrac{1}{x}$，则有

$$I=\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{e}^{(1+t)^{t^{-1}}}-(1+t)^{\frac{\mathrm{e}}{t}}}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{e}^{(1+t)^{t^{-1}}}-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}\ln(1+t)}{t}}}{t^2}$$

令 $f(t)=(1+t)^{t^{-1}}$，$g(t)=\dfrac{\mathrm{e}\ln(1+t)}{t}$，则 $\lim\limits_{t\to0}f(t)=\lim\limits_{t\to0}g(t)=0$，由 *Lagrange* 中值定理，得

$$\mathrm{e}^{f(t)}-\mathrm{e}^{g(t)}=\mathrm{e}^{\xi}(f(t)-g(t))$$

其中 ξ 介于 $f(t)$ 与 $g(t)$ 之间，当 $t\to0$ 时，$\xi\to\mathrm{e}$，所以 $\mathrm{e}^{f(t)}-\mathrm{e}^{g(t)}\sim\mathrm{e}^{\mathrm{e}}[f(t)-g(t)]$，故

$$I=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}\lim_{t\to0}\frac{f(t)-g(t)}{t^2}=\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)}{t}-1}-\dfrac{\ln(1+t)}{t}}{t^2}$$

记 $\alpha(t)=\dfrac{\ln(1+t)}{t}-1\ (t\to0,\alpha(t)\to0)$，由 $\mathrm{e}^{\alpha(t)}$ 的 *Taylor* 展开，得

$$\mathrm{e}^{\alpha(t)}=1+\alpha(t)+\frac{1}{2!}\alpha^2(t)+o(\alpha^2(t))=\frac{\ln(1+t)}{t}+\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(1+t)-t}{t}\right]^2+o(\alpha^2(t))$$

因此

$$I=\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}\lim_{t\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{[\ln(1+t)-t]^2}{t^4}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}\lim_{t\to0}\frac{\left[-\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)\right]^2}{t^4}=\frac{1}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}.$$

例 1.3.57. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sin x+\mathrm{e}^{\tan x}\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\tan x+\mathrm{e}^{\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}}{x^3}$

改写极限式，有

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sin x+\mathrm{e}^{\tan x}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{x}\left[\ln\left(\sin x+\mathrm{e}^{\tan x}\right)-\ln\left(\tan x+\mathrm{e}^{\sin x}\right)\right]}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\left(\sin x+\mathrm{e}^{\tan x}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\tan x}-\tan x-\left(\mathrm{e}^{\sin x}-\sin x\right)}{x^4}\\&=\exp\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\sin x+\mathrm{e}^{\tan x}\right)\cdot\lim_{x\to0}\frac{(\tan x-\sin x)f'(\xi_x)}{x^4}\end{aligned}$$

其中

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\sin x+\mathrm{e}^{\tan x}\right)=\exp\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\sin x+\mathrm{e}^{\tan x}-1\right)=\exp\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\tan x}{x}=\mathrm{e}^2$$

ξ_x 介于 $\sin x$ 与 $\tan x$ 之间，并且

$$\lim_{x\to0}\frac{(\tan x-\sin x)f'(\xi_x)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^3f'(\xi_x)}{x^4}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi_x)}{x}=\frac{1}{2}$$

这是因为 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1\to x\ (x\to0)$，以及当 $x\to0^+$ 时，

$$0\leftarrow\sin x<\xi_x<\tan x\to0$$

当 $x\to0^-$ 时，

$$0\leftarrow\tan x<\xi_x<\sin x\to0$$

于是 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(\xi_x)}{x}=1$，综上原式 $=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$.

例 1.3.58. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有三阶连续导数，且 $f'(a)\neq0$，令

$$\varphi(x)=\left[\frac{f'(x)+f'(a)}{2f(x)-2f(a)}\right]^2-\left(\frac{1}{x-a}\right)^2$$

计算极限 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$.

考虑 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的 *Taylor* 展开，

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-a)^3$$

于是

$$2f(x)-2f(a)=2f'(a)(x-a)+f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3}f'''(\xi)(x-a)^3$$

其中 ξ 介于 x 与 a 之间，同理，考虑 $f'(x)$ 在 $x=a$ 处的 *Taylor* 展开，

$$f'(x)=f'(a)+f''(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f'''(\eta)(x-a)^2$$

于是

$$f'(x)+f'(a)=2f'(a)+f''(a)(x-a)+\frac{1}{2}f'''(\eta)(x-a)^2$$

其中 η 介于 x 与 a 之间，将两式代入极限式，并通分，于是分子为

$$\begin{aligned}&(x-a)^2\left[2f'(a)+f''(a)(x-a)+\frac{f'''(\eta)}{2}(x-a)^2\right]^2-\left[2f'(a)(x-a)+f''(a)(x-a)^2+\frac{f'''(\xi)}{3}(x-a)^3\right]^2\\=&f'(a)\left[2f'''(\eta)-\frac{4}{3}f'''(\xi)\right](x-a)^4+o\left((x-a)^4\right)\end{aligned}$$

分母为

$$\left[2f'(a)+f''(a)(x-a)+\frac{f'''(\xi)}{3}(x-a)^2\right]^2(x-a)^4=4\left[f'(a)\right]^2(x-a)^4+o\left((x-a)^4\right)$$

分式求 $x\to a$ 的极限，都只考虑分子、分母中的最低次幂，并且都为 $(x-a)^4$，所以

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\lim_{x\to a}\frac{2f'''(\eta)-\frac{4}{3}f'''(\eta)}{4f'(a)}$$

由于 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有三阶连续导数，故 $f'''(\eta)=f'''(\xi)=f'''(a)$，于是原极限为 $\dfrac{f'''(a)}{6f'(a)}$.

利用积分等价求极限

定理 1.3.14 (等价积分). 设 f 与 g 连续, 当 $x \to 0$ 时, $\alpha(x), \beta(x)$ 均为无穷小, $\alpha(x) \sim \beta(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f}{g} = 1$, 则

$$\int_0^{\alpha(x)} f\mathrm{d}t \sim \int_0^{\beta(x)} g\mathrm{d}t.$$

例 1.3.59. 把 $x \to 0^+$ 时的无穷小量

$$\alpha = \int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t,\ \beta = \int_0^{x^2} \tan\sqrt{t}\mathrm{d}t,\ \gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 \mathrm{d}t$$

排列起来, 使排列在后的是前一项的高阶无穷小量, 则正确的排列次序为

A. α, β, γ　　B. α, γ, β　　C. β, α, γ　　D. β, γ, α

由定理 *1.3.14* 可知, 当 $x \to 0^+$ 时, 有

$$\alpha \sim \int_0^x \mathrm{d}t = x,\ \beta \sim \int_0^{x^2} \sqrt{t}\mathrm{d}t = \frac{2}{3}x^3,\ \gamma \sim \int_0^{x^{\frac{1}{2}}} t^3 \mathrm{d}t = \frac{1}{4}x^2$$

因此 γ 是 α 的高阶无穷小量, β 是 γ, α 的高阶无穷小量, 所以有排列 α, γ, β, 选 *B*.

例 1.3.60. 求下列极限值.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\sin x) - \cos x}{\left[x - \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right] \displaystyle\int_0^{\ln(1+x)} \cos t^2 \mathrm{d}t}$.　(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{2(\sec x - 1)} - \sqrt[3]{6(x - \sin x)}}{\displaystyle\int_0^{x^2} \arctan\left(\mathrm{e}^{\sqrt{t}} - 1\right)\mathrm{d}t}$.

(1) 分子: $\cos(\sin x) - \cos x = (x - \sin x)\sin\xi$, 其中 ξ 介于 $\sin x$ 与 x 之间, 当 $x \to 0^+$ 时, 有 $\sin x < \xi < x$, 那么

$$1 \leftarrow \frac{\sin x}{x} < \frac{\xi}{x} < \frac{x}{x} \to 1\ (x \to 0)$$

即 $\xi \sim x$; 当 $x \to 0^-$, 同理可得 $\xi \sim x$, 于是 $\xi \sim x\ (x \to 0)$, 则

$$(x - \sin x)\sin\xi \sim (x - \sin x)x \sim \frac{1}{6}x^4$$

分母: $\displaystyle\int_0^{\ln(1+x)} \cos t^2 \mathrm{d}t \sim \int_0^x \mathrm{d}t = x\ (x \to 0)$, 并且

$$x - \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \sim \mathrm{e}^x\left[\ln \mathrm{e}^x - \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right] \sim \mathrm{e}^x - x - \sqrt{1+x^2}$$

又

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4),\ (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

那么 $\mathrm{e}^x - x - \sqrt{1+x^2} = \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^4)$, 因此原式 $= \dfrac{\frac{1}{6}x^4}{\frac{1}{6}x^3 \cdot x} = 1$.

(2) 分母: $\displaystyle\int_0^{x^2} \arctan\left(\mathrm{e}^{\sqrt{t}} - 1\right)\mathrm{d}t \sim \int_0^{x^2} \left(\mathrm{e}^{\sqrt{t}} - 1\right)\mathrm{d}t \sim \int_0^{x^2} \sqrt{t}\mathrm{d}t \to \frac{2}{3}x^3\ (x \to 0^+)$, 则考虑将分子展开到 x^3 阶, 故

$$\begin{aligned}\sqrt{2(\sec x - 1)} - \sqrt[3]{6(x - \sin x)} &\sim \sqrt{2(\sec x - 1)}\left[\frac{1}{2}\ln 2(\sec x - 1) - \frac{1}{3}\ln 6(x - \sin x)\right] \\ &\sim x\left[\frac{1}{2}\ln 2(\sec x - 1) - \frac{1}{3}\ln 6(x - \sin x)\right]\ (x \to 0^+)\end{aligned}$$

那么中括号中须展开到 x^2 阶，不妨先减去 $\frac{1}{2}\ln x^2$，再加 $\frac{1}{2}\ln x^2$ 即 $\left(\frac{1}{6}\ln x^6\right)$，则前项

$$\frac{1}{2}\ln 2(\sec x-1)-\frac{1}{2}\ln x^2=\frac{1}{2}\ln\frac{2(\sec x-1)}{x^2}\sim\frac{1}{2}\left[\frac{2(\sec x-1)}{x^2}-1\right]$$

又因为

$$\sec x=1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{5}{4!}x^4+o(x^5)$$

则上式化为 $\frac{5}{4!}x^2\ (x\to 0^+)$，后项有

$$\frac{1}{6}\ln x^6-\frac{1}{3}\ln 6(x-\sin x)=\frac{1}{6}\ln x^6-\frac{1}{6}\ln 36(x-\sin x)^2=-\frac{1}{6}\ln\frac{36(x-\sin x)^2}{x^6}$$

其中

$$\ln\frac{36(x-\sin x)^2}{x^6}\sim\frac{36(x-\sin x)^2-x^6}{x^6}=\frac{\left[6(x-\sin x)+x^3\right]\left[6(x-\sin x)-x^3\right]}{x^6}\ (x\to 0^+)$$

那么上式分子则要展开到 x^8 阶，于是

$$6(x-\sin x)+x^3=6\left(\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)+x^3\right)=2x^3$$

$$6(x-\sin x)-x^3=6\left(\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{5!}x^5+o(x^6)\right)-x^3=-\frac{6}{5!}x^5\ (x\to 0^+)$$

故 $-\frac{1}{6}\ln\frac{36(x-\sin x)^2}{x^6}\sim-\frac{1}{6}\cdot\frac{2x^3\cdot\left(-\frac{6}{5!}x^5\right)}{x^6}\sim\frac{2}{5!}x^2\ (x\to 0^+)$，综上原极限

$$I=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\left(\frac{5}{4!}x^2+\frac{2}{5!}x^2\right)}{\frac{2}{3}x^3}=\left(\frac{5}{4!}+\frac{2}{5!}\right)\cdot\frac{3}{2}=\frac{27}{80}.$$

利用积分定义求极限

定理 1.3.15 (定积分与极限式). 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

引理 1.3.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$

证 原式 $=\exp\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\sqrt[n]{n!}-\ln n\right)=\exp\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln x\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-1}.$

例 1.3.61. 求下列极限值.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{i}{n^2}}-1\right)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\cos\frac{i\pi}{2n}}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i\cos\frac{i}{n}}{n^2+i}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right]$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$.

(1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{3}\frac{i}{n^2}=\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n}=\frac{1}{3}\int_0^1x\mathrm{d}x=\frac{1}{6}.$

(2) 原式 $=\dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\cos\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{i}{n}}=\dfrac{\pi}{2}\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{1+\cos\dfrac{\pi}{2}x}\xlongequal{\frac{\pi}{2}x=t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{d}t}{1+\cos t}=\dfrac{1}{2}.$

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\dfrac{i}{n}\cos\dfrac{i}{n}}{1+\dfrac{i}{n^2}}:=\lim\limits_{n\to\infty}f$

$$\lim_{n\to\infty}f\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\dfrac{i}{n}\cos\dfrac{i}{n}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cos\frac{i}{n}=\int_0^1 x\cos x\mathrm{d}x=\sin 1+\cos 1-1$$

$$\lim_{n\to\infty}f\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\dfrac{i}{n}\cos\dfrac{i}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cos\frac{i}{n}=\sin 1+\cos 1-1$$

由夹逼准则得，原式=$\sin 1+\cos 1-1$.

(4) 原式 $=\exp\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$，其中

$$\ln\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\ln(2n)!-2\ln(n!)=\sum_{i=1}^{2n}\ln i-2\sum_{i=1}^{n}\ln i=\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{n+i}{i}=\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{1+\dfrac{i}{n}}{\dfrac{i}{n}}$$

故，原式化为 $\exp\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\dfrac{1+\dfrac{i}{n}}{\dfrac{i}{n}}=\exp\int_0^1\ln\dfrac{1+x}{x}\mathrm{d}x=4$，其中

$$\int_0^1\ln\frac{1+x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=2\ln 2.$$

(5) 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，则有

$$\begin{aligned}I&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{(n+1)!}\left[\frac{\ln(n+1)!}{n+1}-\frac{\ln n!}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\ln k-\frac{n+1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\left[\ln(n+1)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\left(-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n+1}\right)\end{aligned}$$

其中，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\dfrac{k}{n+1}=-\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=1$，综上，原式$=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(6) 注意到有 $\dfrac{2^{\frac{k}{n}}}{n+1}<\dfrac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\dfrac{1}{k}}<\dfrac{2^{\frac{k}{n}}}{n}$，于是

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 2^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 2^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2}$$

由夹逼准则得原极限为 $\dfrac{1}{\ln 2}$.

例 1.3.62. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}k\ln(n+k)-\dfrac{n+1}{2n}\ln n\right]$.

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}\ln(n+k)-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}\ln n\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)=\int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x$，其中

$$\int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\left[x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{4}.$$

例 1.3.63. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}\prod\limits_{i=1}^{2n}\left(n^2+i^2\right)^{\frac{1}{n}}$.

令 $I_n=\dfrac{1}{n^4}\prod\limits_{i=1}^{2n}\left(n^2+i^2\right)^{\frac{1}{n}}$，则

$$\ln I_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln\left(n^2+i^2\right)-\ln n^4=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\left[\ln\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)+2\ln n\right]-4\ln n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)$$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\exp\lim_{n\to\infty}I_n=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)=\exp\int_0^2\ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x\\&=\exp\left[x\ln\left(1+x^2\right)-2x+2\arctan x\right]_0^2=25\exp(2\arctan 2-4).\end{aligned}$$

例 1.3.64. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{n\dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right)^2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k}\right)^3}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{n+k}\right)\sin\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\right]\right\}$.

将待求极限分为两部分，

$$\begin{aligned}I_1&=\lim_{n\to\infty}n\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right)^2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k}\right)^3}=\lim_{n\to\infty}n\frac{\left(\frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{n}}\right)^3\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right)^2}{\left(\frac{1}{n\cdot\sqrt{n}}\right)^2\left(\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k}\right)^3}=\lim_{n\to\infty}n\frac{\frac{1}{n^3n}\cdot\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\right)^2}{\frac{1}{n^2n}\cdot\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[3]{\frac{k}{n}}\right)^3}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[3]{\frac{k}{n}}\right)^3}=\frac{\left(\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x\right)^2}{\left(\int_0^1\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x\right)^3}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^3}=\frac{256}{243}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n+k}\right)\sin\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\sin\ln 2\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\sin\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)-\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\ln 2}{2n}=\int_0^1\frac{\sin\ln(1+x)}{1+x}\mathrm{d}x\\&=-\int_0^1\mathrm{d}(\cos\ln(1+x))=1-\cos\ln 2\end{aligned}$$

故原极限为 $\dfrac{499}{243}-\cos\ln 2$.

推论 1.3.7. $\lim\limits_{n\to\infty}n^{j-i}\dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[i]{k}\right)^i}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[j]{k}\right)^j}=\lim\limits_{n\to\infty}n^{j-i}\dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[i]{\frac{k}{n}}\cdot\sqrt[i]{n}\right)^i}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[j]{\frac{k}{n}}\cdot\sqrt[j]{n}\right)^j}=\dfrac{\left(\frac{i}{i+1}\right)^i}{\left(\frac{j}{j+1}\right)^j}$.

例 1.3.65. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2n+1}}\left(\int_1^{\frac{1}{2n}}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y+\int_1^{\frac{3}{2n}}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y+\cdots+\int_1^{\frac{2n-1}{2n}}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right)$.

$\sqrt[n]{2}-1=2^{\frac{1}{n}}-1=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln 2}-1\sim\dfrac{1}{n}\ln 2\ (n\to\infty)$，且 $\sqrt[n]{2n+1}\to 1\ (n\to\infty)$，

$$\text{原式}=\ln 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_1^{\frac{2k-1}{2n}}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\ln 2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$$

$$= -\ln 2\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}(-y^2) = \frac{\ln 2}{2}(\mathrm{e}^{-1}-1).$$

定理 1.3.16 (不等分积分与极限式). 对于 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, 当 $i=1$ 时, x_{i-1} 值为区间左端点; 当 $i=n$ 时, x_i 值为区间右端点.

例 1.3.66. 计算极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)\sum_{i=0}^{n-1}2^{\frac{i}{n}}\sin 2^{\frac{2i+1}{2n}}$.

原式等于 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left(2^{\frac{i+1}{n}}-2^{\frac{i}{n}}\right)\sin 2^{\frac{2i+1}{2n}}$, 可以看出函数 $\sin x$ 在 $[1,2]$ 上按照下列方式划分

$$1 = 2^{\frac{0}{n}} < 2^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{2}{n}} < \cdots < 2^{\frac{n}{n}} = 2$$

其中 $\Delta x_i = 2^{\frac{i+1}{n}} - 2^{\frac{i}{n}}$, $\xi_i = 2^{\frac{2i+1}{2n}} \in \left[2^{\frac{i}{n}}, 2^{\frac{i+1}{n}}\right]$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)\sum_{i=0}^{n-1}2^{\frac{i}{n}}\sin 2^{\frac{2i+1}{2n}} = \int_1^2 \sin x\mathrm{d}x = \cos 2 - \cos 1.$$

利用收敛级数通项趋向零求极限

利用级数收敛的必要条件是求极限为 0 的数列极限的方法之一.

例 1.3.67. 求下列极限值

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot n!}{(2n)^n}.\quad\Big|\quad (2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{3\cdot 6\cdots(3n)}.\quad\Big|\quad (3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{11\cdot 12\cdots(n+10)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}.$$

(1) $x_n = \dfrac{5^n\cdot n!}{(2n)^n}$, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{5^{n+1}(n+1)!}{(2n+2)^{n+1}}\cdot\dfrac{(2n)^n}{5^n n!} = \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \dfrac{5}{2}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \to \dfrac{5}{2\mathrm{e}} < 1, n\to\infty$, 故正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n n!}{(2n)^n}$ 收敛, 从而通项 $x_n \to 0\ (n\to\infty)$.

(2) $x_n = \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{3\cdot 6\cdots(3n)}$, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{2n+1}{3n+3} \to \dfrac{2}{3} < 1\ (n\to\infty)$, 故正项级数 $\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{3\cdot 6\cdots(3n)}$ 收敛, 从而通项 $x_n \to 0\ (n\to\infty)$.

(3) $x_n = \dfrac{11\cdot 12\cdots(n+10)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}$, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{n+11}{3n+2} \to \dfrac{1}{3} < 1\ (n\to\infty)$, 故正项级数 $\dfrac{11\cdot 12\cdots(n+10)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}$ 收敛, 从而通项 $x_n \to 0\ (n\to\infty)$.

利用导数的定义

如果所求极限可凑成某个可导函数的增量, 那么可利用导数的定义来求得该极限, 这种方法多用于求抽象函数的不定式极限.

例 1.3.68. 若 $f(1)=0$, $f'(1)$ 存在, 求极限 $I = \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)\cdot\tan 3x}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)\cdot\sin x}$.

考虑导数的定义, 有

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\frac{3f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2} = 3\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2} \\ &= 3f'(1)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\right) = \frac{3}{2}f'(1). \end{aligned}$$

例 1.3.69. 求极限 $I=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^3+9}\cdot\sqrt[3]{2x^2-17}-16}{4-\sqrt{x^3-23}\cdot\sqrt[3]{3x^2-19}}$.

记 $f(x)=\sqrt{x^3+9}\cdot\sqrt[3]{2x^2-17}$, $g(x)=\sqrt{x^3-23}\cdot\sqrt[3]{3x^2-19}$, 则 $f(3)=6$, $g(3)=4$, 于是

$$I=-\lim_{x\to 3}\frac{\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}}{\dfrac{g(x)-g(3)}{x-3}}=-\lim_{x\to 3}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

对 $f(x)$ 取对数并求导, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln f(x))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^3+9\right)+\frac{1}{3}\ln\left(2x^2-17\right)\right]=\frac{1}{2}\frac{3x^2}{x^3+9}+\frac{1}{3}\frac{4x}{2x^2-17}$$

所以 $f'(3)=\dfrac{105}{4}$, 同理可得 $g'(3)=\dfrac{33}{2}$, 于是 $I=-\dfrac{35}{22}$.

利用高等变形求极限

例 1.3.70. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)+\cdots+(x+\alpha_n)}-x\right]=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$.

证 先证: $A^n-B^n=(A-B)\sum\limits_{i=1}^{n}A^{i-1}B^{n-i}$, 过程如下:

引理 1.3.3. $A^n-1=(A-1)\sum\limits_{i=1}^{n}A^{i-1}$. (证明略)

$$A^n-B^n=B^n\left[\left(\frac{A}{B}\right)^n-1\right]\xlongequal{A^n-1=(A-1)\sum\limits_{i=1}^{n}A^{i-1}}B^n\left(\frac{A}{B}-1\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{A}{B}\right)^{i-1}$$
$$=(A-B)\,B^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{A}{B}\right)^{i-1}=(A-B)\sum_{i=1}^{n}A^{i-1}B^{n-i}$$

则有 $\prod\limits_{i=1}^{n}(x+\alpha_i)-x^n=\left[\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}(x+\alpha_i)}-x\right]\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}(x+\alpha)^{\frac{n-j}{n}}\right]x^{j-1}$, 故

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(x+\alpha_i)-x}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}(x+\alpha_i)^{\frac{n-j}{n}}\right]x^{j-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i+\ldots+\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}(x+\alpha_i)^{\frac{n-j}{n}}\right]\cdot x^{j-1}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i+o\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+\dfrac{\alpha_i}{x}\right)^{\frac{n-j}{n}}\right]}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.$$

例 1.3.71. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n\prod\limits_{m=1}^{n}\left(1-\dfrac{1}{m}+\dfrac{5}{4m^2}\right)$.

由 *Euler* 乘积公式:

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right),\ z\in\mathbb{C}$$

将 z 替换为 $\mathrm{i}z$, 并且有 $\sin\alpha=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{2\mathrm{i}}$, 得

$$\frac{\sin\mathrm{i}\pi z}{\mathrm{i}\pi z}=\frac{\mathrm{e}^{\pi z}-\mathrm{e}^{-\pi z}}{2\pi z}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right),\ z\in\mathbb{C}\tag{1}$$

取 $z=1,2$, 代入式 *(1)* 中, 得

$$\frac{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right),\ \frac{\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}}{4\pi}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{4}{n^2}\right)\tag{2}$$

记 $x_n=\prod_{m=1}^{n}\left(1-\frac{1}{m}+\frac{5}{4m^2}\right)=\prod_{m=1}^{n}\frac{(2m-1)^2+4}{4m^2}$, 式 (2) 取极限得

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{4}{k^2}\right)=\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}}{4\pi},\quad \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)=\frac{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi}\tag{3}$$

并且

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{4}{k^2}\right)&=\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{4}{4m^2}\right)\cdot\prod_{m=1}^{n}\left[1+\frac{4}{(2m-1)^2}\right]\\&=\prod_{m=1}^{n}\frac{4m^2+4}{4m^2}\cdot\prod_{m=1}^{n}\frac{(2m-1)^2+4}{(2m-1)^2}=\prod_{m=1}^{n}\frac{4\left(m^2+1\right)}{(2m-1)^2}\cdot\prod_{m=1}^{n}\frac{(2m-1)^2+4}{4m^2}\\&=4^n\prod_{m=1}^{n}\frac{m^2+1}{m^2}\cdot\prod_{m=1}^{n}\frac{m^2}{(2m-1)^2}\cdot x_n=\left(\prod_{m=1}^{n}\frac{m^2+1}{m^2}\right)\cdot\frac{4^{2n}\,(n!)^4}{((2n)!)^2}\cdot x_n\end{aligned}$$

由 Stirling 公式 $n!=\sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, 得

$$\frac{4^{2n}\,(n!)^4}{((2n)!)^2}=\pi n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

因此

$$\prod_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{4}{k^2}\right)=\left(\prod_{m=1}^{n}\frac{m^2+1}{m^2}\right)\cdot\pi\,(nx_n)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

当 $n\to\infty$ 时, 由式 (3) 得

$$\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}}{4\pi}=\frac{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi}\cdot\pi\cdot\lim_{n\to\infty}nx_n\Rightarrow\lim_{n\to\infty}nx_n=\frac{\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi}.$$

1.3.6 Stolz 定理及其应用

Stolz 定理是求解和证明数列极限的一种重要方法, 它有 $\dfrac{0}{0}$ 型和 $\dfrac{*}{\infty}$ 型两种形式.

数列的情况

定理 1.3.17 ($*/\infty$ 型). 设数列 $\{a_n\}$ 是严格递增的无穷大量, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l$, ($l$ 为有限或 $\pm\infty$), 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l.$$

定理 1.3.18 (0/0 型). 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 都是无穷小量, 且 $\{a_n\}$ 严格单调递减, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l$ (l 为有限或 $\pm\infty$), 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l.$$

定理 1.3.17 其实只要求分母 x_n 严格单调递增趋向无穷大, 至于分子 y_n 是否趋向无穷大, 无关紧要; 定理 1.3.18 则是名副其实的 $\dfrac{0}{0}$ 型.

例 1.3.72. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k^3+k^2}$.

原式 $\xlongequal{Stolz}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n+1}-\sum\limits_{k=1}^{n}\right)\sqrt[3]{k^3+k^2}}{n+1-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{(n+1)^3+(n+1)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}.$

例 1.3.73. 设 $\alpha>1$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k^\alpha}$.

当 $\alpha>1$ 时, 由基本不等式 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$, 得

$$n+k^\alpha\geqslant 2\sqrt{nk^\alpha}$$

所以有

$$\begin{aligned}0\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k^\alpha}&\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{nk^\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^\alpha}}\\&\xlongequal{Stolz}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\right)\dfrac{1}{\sqrt{k^\alpha}}}{2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n^\alpha}}=0\end{aligned}$$

故由夹逼准则得原极限等于 0.

推论 1.3.8. 当 α 为正数时, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k^\alpha}=\begin{cases}1, & 0<\alpha<1\\ \ln 2, & \alpha=1\\ 0, & \alpha>1\end{cases}$.

证 当 $\alpha=1$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln 2$$

当 $\alpha\in(0,1)$ 时, 注意到不等式 $1\leqslant k\leqslant n$ 时,

$$\frac{1}{n+n^\alpha}<\frac{1}{n+k^\alpha}<\frac{1}{n+1}$$

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+n^\alpha}<\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k^\alpha}<\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+1}$,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+n^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+n^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n^{\alpha-1}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n^{-1}}=1$$

由夹逼准则可知, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k^\alpha}=1$, 又知当 $\alpha>1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k^\alpha}=0$, 故综上所述, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k^\alpha}=\begin{cases}1, & 0<\alpha<1\\ \ln 2, & \alpha=1\\ 0, & \alpha>1\end{cases}.$$

例 1.3.74. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\dfrac{1}{p+1}$ (p 为自然数).

证法一 原式 $\xlongequal{Stolz}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+n)^p}{(p+1)n^p+\dfrac{(p+1)p}{2}n^{p-1}+\cdots+1}=\dfrac{1}{p+1}$.

证法二 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^p=\displaystyle\int_0^1 x^p dx=\dfrac{1}{p+1}$.

例 1.3.75. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$.

证 令 $|x_n - x_{n-1}| := y_n = \left|\sum\limits_{k=3}^{n}(y_k - y_{k-1}) + y_1\right| \leqslant \sum\limits_{k=3}^{n}|y_k - y_{k-1}| + y_2 \leqslant \sum\limits_{k=3}^{n}|x_k - x_{k-2}| + |x_2 - x_1|$，于是

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{|x_n - x_{n-1}|}{n} \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=3}^{n}|x_k - x_{k-2}| + |x_2 - x_1|}{n} \xlongequal{Stolz} \lim_{n\to\infty}\frac{|x_n - x_{n-2}|}{n-(n-1)} = 0$$

由夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$.

例 1.3.76. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n\ln n]{n!}$.

法一：（积分放缩 + 夹逼准则）原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n\ln n}} = \exp\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n\ln n}$，又因为

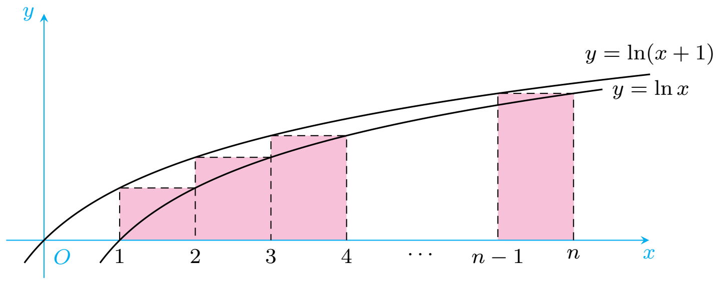


图 1.3.3

由图可知：$\displaystyle\int_1^n \ln x\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n}\ln k \leqslant \int_1^n \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$ 则有

$$\frac{n\ln n - n + 1}{n\ln n} \leqslant \frac{1}{n\ln n}\sum_{k=1}^{n}\ln k \leqslant \frac{(n+1)\ln(n+1) - n}{n\ln n}$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\ln n - n + 1}{n\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\ln(n+1) - n}{n\ln n} = 1$，因此有夹逼准则，原式$=\mathrm{e}$.

法二：（Stolz 定理+L'Hospital 法则）同上得到和式：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n\ln n} \xlongequal{Stolz} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n\ln n - (n-1)\ln(n-1)}$ 下面考虑该极限值 $I = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\ln n - (n-1)\ln(n-1)}{\ln n}$，由 Heine 定理将其连续化为函数极限：

$$I' = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x - (x-1)\ln(x-1)}{x\ln x}$$

$$I' \xlongequal{L'} \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x + 1 - \ln(x-1) - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x\ln\frac{x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{x}{x-1} - 1\right) = 1 \Rightarrow \text{原式}=\mathrm{e}.$$

例 1.3.77. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{2^k}{2^{k+1}-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-k}}}$.

取对数降低运算等级，故

$$I = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2^k}{2^{k+1}-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-k}}} = \exp\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{n-k}}\ln\frac{2^k}{2^{k+1}-1}$$

$$= \exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}\ln\frac{2^k}{2^{k+1}-1} \xlongequal{Stolz} \exp\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} - \sum\limits_{k=1}^{n-2}\right)2^{k-1}\ln\dfrac{2^k}{2^{k+1}} - 1}{2^{n-1} - 2^{n-2}}$$

$$= \exp \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-2}\ln\dfrac{2^{n-1}}{2^n-1}}{2^{n-1}-2^{n-2}} = \exp \lim_{n\to\infty} \ln\frac{1}{2-\dfrac{1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2}.$$

例 1.3.78. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n}\ln \mathrm{C}_n^k$.

Stolz 公式可重复使用,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &\xlongequal{Stolz} \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n+1}\ln\mathrm{C}_{n+1}^k-\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\mathrm{C}_n^k}{(n+1)^2-n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\dfrac{\mathrm{C}_{n+1}^k}{\mathrm{C}_n^k}+\ln\mathrm{C}_{n+1}^{n+1}}{2n+1}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\dfrac{n+1}{n-k+1}}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln k}{2n+1}\\
&\xlongequal{Stolz} \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n-\ln(n+1)}{(2n+1)-(2n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

例 1.3.79. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\prod\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}$.

取对数,降低运算等级,有

$$\begin{aligned}
I &= \exp\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n(n+1)}\ln\prod_{k=0}^{\infty}\mathrm{C}_n^k = \exp\lim_{n\to\infty}\frac{2\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\mathrm{C}_n^k}{n(n+1)} \xlongequal{Stolz} \exp\lim_{n\to\infty}\frac{2\sum\limits_{k=0}^{n+1}\ln\mathrm{C}_{n+1}^k-2\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\mathrm{C}_n^k}{(n+1)(n+2)-n(n+1)}\\
&= \exp\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\dfrac{n+1}{n-k+1}}{n+1} = \cdots = \exp\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.
\end{aligned}$$

例 1.3.80. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\dfrac{n!\,(n-1)!\cdots 2!}{n^n\,(n-1)^{n-1}\cdots 2^2}}$.

由例题 *1.3.10* 可知, $n! = \sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}, 0<\theta_n<1$, 那么

$$原式 = \exp\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\ln k!-\sum\limits_{k=2}^{n}\ln k^k}{n^2} \xlongequal{Stolz} \exp\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!-\ln n^n}{2n-1} \xlongequal{Stirling} \exp\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{2\pi n}\mathrm{e}^{-n}+\dfrac{\theta_n}{12n}\right)}{2n-1} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

例 1.3.81. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\dfrac{\pi^2}{6}-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{n}\right)$.

记 $m=\dfrac{\pi^2}{6}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$,

$$\begin{aligned}
原式 &= \lim_{n\to\infty}\frac{m-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}} \xlongequal{Stolz} \lim_{n\to\infty}\frac{m-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{n}-\left(m-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{n-1}\right)}{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n-1)^2}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n-1)^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-(n-1)^2+n^2(n-1)-n(n-1)^2}{(n-1)^2-n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{1-2n} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

例 1.3.82. $\{\mathrm{C}_n^k\}_{k=0}^n$ 为二项式系数, A_n, G_n 分别表示它们的算术平均值和几何平均值, 试证:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n}=2,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{G_n}=\sqrt{\mathrm{e}}.$$

证 因为 $A_n=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k=\dfrac{2^n}{n+1}$, $G_n=\left(\prod\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\right)^{\frac{1}{n+1}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\ln \mathrm{C}_n^k}$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2^n}{n+1}}=2$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{G_n}&=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln \mathrm{C}_n^k}{n(n+1)}\xlongequal{Stolz}\exp\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln \mathrm{C}_n^k-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln \mathrm{C}_{n-1}^k}{2n}\\
&=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln \mathrm{C}_n^k-\sum\limits_{k=1}^{n-2}\ln \mathrm{C}_{n-1}^k}{2n}=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-2}\ln\dfrac{\mathrm{C}_n^k}{\mathrm{C}_{n-1}^k}+\ln \mathrm{C}_n^{n-1}}{2n}\\
&=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-2}\ln\dfrac{n}{n-k}+\ln n}{2n}=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{n-k}{n}\right)\\
&=\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1-x)\mathrm{d}x\right]=\sqrt{\mathrm{e}}.
\end{aligned}$$

函数极限的情况

Stolz 定理可推广到函数极限的情况.

定理 1.3.19 (∞/∞ 型). 若 $T>0$ 为常数, 且满足

(1) $g(x+T)>g(x)$, $\forall x\geqslant a$;

(2) $g(x)\to+\infty\ (x\to+\infty)$, 且 f,g 在 $[a,+\infty)$ 内闭有界;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$.

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$, (其中 l 为有限数, $+\infty$ 或 $-\infty$).

定理 1.3.20 ($0/0$ 型). 若 $T>0$ 为常数, 且

(1) $0<g(x+T)<g(x),\forall x\geqslant a$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f=\lim\limits_{x\to+\infty}g=0$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$.

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$, (其中 l 为有限数, $+\infty$ 或 $-\infty$).

例 1.3.83. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上有定义, 且内闭有界 (即 $\forall[\alpha,\beta]\subset(a,+\infty)$, f 在 $[\alpha,\beta]$ 上有界),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=l$$

其中 l 为有限数, $+\infty$ 或 $-\infty$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^{n+1}}=\dfrac{l}{n+1}$.

运用函数的 *Stolz* 定理, 得

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(n+1)x^n+\dfrac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^{n-1}+\cdots+1}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x^n}}{(n+1)+\dfrac{n(n+1)}{1\cdot 2}\dfrac{1}{x}+\cdots+\dfrac{1}{x^n}}=\frac{l}{n+1}\ (l\ 为+\infty,-\infty\ 也成立).
\end{aligned}$$

Stolz 的应用

例 1.3.84. 对于数列 $x_0 = a, 0 < a < \dfrac{\pi}{2}, x_n = \sin x_{n-1}\ (n = 1, 2, \cdots)$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n = 1.$$

证

(1) 因为 $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$, $x_0 = a$, 递推可知

$$0 < x_n = \sin x_{n-1} < x_{n-1} < \frac{\pi}{2}\ (n = 1, 2, \cdots)$$

$\{x_n\}$ 单调递减且有下界 0, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 知 $A = \sin A \Rightarrow A = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(2) 要证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n}{3}} x_n = 1$, 即证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = 3$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} &\overset{Stolz}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_{n-1}^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x_{n-1}} - \frac{1}{x_{n-1}^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n-1}^2 \sin^2 x_n - 1}{x_{n-1}^2 - \sin^2 x_{n-1}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{(x + \sin x)(x - \sin x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{(2x + o(x))\left(\frac{x3}{6} + o(x^3)\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{(2 + o(1))\left(\frac{1}{6} + o(1)\right)} = 3.
\end{aligned}$$

得证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n}{3}} x_n = 1$.

例 1.3.85. 设 $0 < a_1 < 1, a_{n+1} = a_n(1 - a_n)\ (\forall n \in \mathbb{N})$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 1$.

证 由 $0 < x_1 < 1$ 及 $x_2 = x_1(1 - x_1)$ 知, $0 < x_2 < 1$, 用数学归纳法可证: $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < x_n < 1$, 于是 $0 < \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - x_n < 1\ (n = 1, 2, \cdots)$, 从而 $\{x_n\} \searrow 0$, 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 递推关系式两边取极限, 得 $A = A(1 - A)$, 解得 $A = 0$. 令 $b_n = \dfrac{1}{x_n}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 且数列 $\{b_n\}$ 是严格单调递增, 故由 *Stolz* 定理

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} (1 - x_n) = 1.$$

例 1.3.86. 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \ln(1 + x_n)\ (n = 1, 2, \cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

$x_2 = \ln(1 + x_1) > 0$, 用数学归纳法可证 $\forall n \in \mathbb{N}^* : x_n > 0$, 又 $x_1 > 0, x_{n+1} = \ln(1 + x_n) < x_n$, 故数列 $\{x_n\} \searrow 0$, 那么

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} &\overset{Stolz}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n - 1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\ln(1 + x_{n-1})} - \frac{1}{x_{n-1}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n-1} \ln(1 + x_{n-1})}{x_{n-1} - \ln(1 + x_{n-1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n-1}^2}{\frac{1}{2} x_{n-1}^2} = 2.
\end{aligned}$$

例 1.3.87. 序列 $a_{ij} = \dfrac{i + j}{i^2 + j^2}$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$.

由 Stolz $(*/\infty$ 型) 得[2]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\right)\frac{i+j}{i^2+j^2}=\lim_{n\to\infty}\left[2\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1)+k}{(n+1)^2+k^2}\right)+\frac{1}{n+1}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\dfrac{k}{n+1}}{1+\left(\dfrac{k}{n+1}\right)^2}\right)+\frac{1}{n+1}\right]=2\int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}+\ln 2.$$

例 1.3.88. 序列 $a_{ij}=\dfrac{ij}{\sqrt{i^2+j^2+ai+bj+c}}$, a,b,c 为非负实数, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}$.

令 $y_n=\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{ij}{\sqrt{i^2+j^2}}$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}y_n\overset{Stolz}{=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1}\sum\limits_{j=1}^{n+1}-\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\right)\dfrac{ij}{\sqrt{i^2+j^2}}}{3n^2+3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[2\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k(n+1)}{\sqrt{k^2+(n+1)^2}}\right)+\dfrac{n+1}{\sqrt2}\right]}{3n^2+3n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^2}{3n^2+3n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{k/(n+1)}{\sqrt{1+(k/(n+1))^2}}=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\left(\sqrt2-1\right).$$

考虑 $\delta>0$ 的情况, 令 $z_n=\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{ij}{\sqrt{(i+\delta)^2+(j+\delta)^2}}$, 下证 $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n-y_n)=0$,

$$d_n=z_n-y_n=\frac{-1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(2\delta^2+2\delta i+2\delta j\right)ij}{\sqrt{(i+\delta)^2+(j+\delta)^2}\sqrt{i^2+j^2}\left(\sqrt{(i+\delta)^2+(j+\delta)^2}+\sqrt{i^2+j^2}\right)}$$

由 $\sqrt{i^2+j^2}\geqslant\sqrt{2ij}$, 因此

$$|d_n|\leqslant\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(2\delta^2+2\delta i+2\delta j\right)ij}{\left(i^2+j^2\right)^{\frac32}}\leqslant\frac{1}{\sqrt2 n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta^2+\delta i+\delta j}{\sqrt i\sqrt j}$$

$$=\frac{\delta^2}{\sqrt2 n^3}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt j}\right)+\frac{\delta}{\sqrt2}\left(\frac1n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt j}\right)\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt i\right)+\frac{\delta}{\sqrt2}\left(\frac1n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt i}\right)\left(\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sqrt j\right)$$

当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt j}=0,\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sqrt j=0$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=0$, 令 $x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}$, 且 $\xi=\max\left\{\dfrac a2,\dfrac b2,\sqrt{\dfrac c2}\right\}$, 得

$$i^2+j^2\leqslant i^2+j^2+ai+bj+c\leqslant(i+\xi)^2+(j+\xi)^2$$

因此 $z_n\leqslant x_n\leqslant y_n$, 两边取极限, 由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=\dfrac23\left(\sqrt2-1\right)$.

---

[2] 以下的括号不为矩阵符号,

$$\left(\begin{array}{ccccccccc}
 & \dfrac{1+1}{1^2+1^2} & + & \dfrac{1+2}{1^2+2^2} & + & \cdots & + & \dfrac{1+n}{1^2+n^2} & + & \dfrac{1+n+1}{1^2+(n+1)^2}\\
+ & \dfrac{2+1}{2^2+1^2} & + & \dfrac{2+2}{2^2+2^2} & + & \cdots & + & \dfrac{2+n}{2^2+n^2} & + & \dfrac{2+n+1}{2^2+(n+1)^2}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots\\
+ & \dfrac{n+1}{n^2+1^2} & + & \dfrac{n+2}{n^2+2^2} & + & \cdots & + & \dfrac{n+n}{n^2+n^2} & + & \dfrac{n+n+1}{n^2+(n+1)^2}\\
+ & \dfrac{n+1+1}{(n+1)^2+1^2} & + & \dfrac{n+1+2}{(n+1)^2+2^2} & + & \cdots & + & \dfrac{n+1+n}{(n+1)^2+n^2} & + & \dfrac{n+1+n+1}{(n+1)^2+(n+1)^2}
\end{array}\right)$$

$$-\left(\begin{array}{cccccccc}
 & \dfrac{1+1}{1^2+1^2} & + & \dfrac{1+2}{1^2+2^2} & + & \cdots & + & \dfrac{1+n}{1^2+n^2}\\
+ & \dfrac{2+1}{2^2+1^2} & + & \dfrac{2+2}{2^2+2^2} & + & \cdots & + & \dfrac{2+n}{2^2+n^2}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots\\
+ & \dfrac{n+1}{n^2+1^2} & + & \dfrac{n+2}{n^2+2^2} & + & \cdots & + & \dfrac{n+n}{n^2+n^2}
\end{array}\right)=2\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1)+k}{(n+1)^2+k^2}\right]+\frac{1}{n+1}.$$

1.4 极限典型问题

这一节讨论与极限相关联的三类典型问题, 即极限的存在性问题、极限的局部逆问题和无穷小量及其阶的比较.

1.4.1 极限的存在性问题

讨论极限的存在性, 是高等数学中既十分典型又经常遇到的问题, 在研究非初等函数的连续性与可导性, 往往归结为这类问题.

例 1.4.1. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\displaystyle\int_0^{x^2}\sqrt{1+\tan^2 t}\mathrm{d}t}{2x^2} & ,x<0\\ \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\ln\left(1+x^2\right)} & ,x>0\end{cases}$$

求极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

利用 L'Hospital 法则易求得在 $x=0$ 处的左右极限值,

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\displaystyle\int_0^{x^2}\sqrt{1+\tan^2 t}\mathrm{d}t}{2x^2}\xlongequal{L'}\lim_{x\to0^-}\frac{2x\cdot\sqrt{1+\tan^2 x^2}}{4x}=\frac{1}{2}$$

并且

$$\lim_{xto0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\ln\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{2}$$

由 $f(0^-)=f(0^+)=\dfrac{1}{2}$, 故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\dfrac{1}{2}$.

1.4.2 极限的局部逆问题

如果已知函数的极限存在, 但是在函数的表达式中含有一个 (或多个) 待定的参数, 要求确定待定参数的值, 这就是所谓的函数极限的局部逆问题.

例 1.4.2 (2018 数二). 若 $\lim\limits_{x\to0}\left(\mathrm{e}^x+ax^2+bx\right)^{x^{-2}}=1$, 则

A. $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-1$ B. $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=-1$ C. $a=\dfrac{1}{2}$, $b=1$ D. $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=1$

由题设条件 $\lim\limits_{x\to0}\left(\mathrm{e}^x+ax^2+bx\right)^{x^{-2}}=\exp\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\mathrm{e}^x+ax^2+bx\right)=1$, 于是有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^x+ax^2+bx\right)}{x^2}=0$, 即

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^x+ax^2+bx\right)}{x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x+ax^2+bx+1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+ax^2+bx+1+o\left(x^2\right)}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{1}{2}+a\right)+\frac{b+1}{x}+\frac{2}{x^2}\right]=0\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}+a=0\\1+b=0\end{cases}\end{aligned}$$

故解得选 B.

例 1.4.3 (2018 数一). 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=\mathrm{e}$, 求 k.

$\exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin kx}\ln\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)=\exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\tan x)-\ln(1+\tan x)}{\sin kx}=\exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\tan x}{\xi_x\cdot\sin kx}=\mathrm{e}$, 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\tan x}{\xi_x\cdot\sin kx}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{\xi_x k}=1\Rightarrow k=-2$$

其中 $\xi_x\to 1\ (x\to 0)$.

例 1.4.4. 试确定常数 A,B,C, 使下式当 $x\to 0$ 时成立:

$$\frac{\mathrm{e}^{\sin x}}{\sin x}=\frac{1+Bx+Cx^2}{x+Ax^2}+o\left(x^2\right).$$

将所给等式两边同时乘以 $(1+Ax)\sin x$, 并注意到 $x\to 0$ 时, $(1+Ax)\sin x\cdot o\left(x^2\right)=o\left(x^3\right)$, 得

$$(1+Ax)\mathrm{e}^{\sin x}=\frac{\sin x}{x}\left(1+Bx+Cx^2\right)+o\left(x^3\right)$$

将 $\mathrm{e}^{\sin x}$, $\dfrac{\sin x}{x}$ 分别展开到 x 的三阶, 于是有

$$\mathrm{e}^{\sin x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right),\ \frac{\sin x}{x}=1-\frac{1}{6}x^2+o\left(x^2\right)$$

代入上式, 得

$$\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)(1+Ax)=\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)\left(1+Bx+Cx^2\right)+o\left(x^3\right)$$

$$(A+1-B)x+\left(A-C+\frac{2}{3}\right)x^2+\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{6}\right)x^3=o\left(x^3\right)$$

欲使上式成立, 必须有 $\begin{cases}A+1-B=0\\ A-C+\dfrac{1}{3}=0\\ \dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{6}=0\end{cases}$, 联立解得 $A=-\dfrac{1}{4}$, $B=\dfrac{3}{4}$, $C=\dfrac{5}{12}$.

1.4.3 无穷小量及其阶的比较

有关无穷小量的概念可参考定义 1.3.1.

例 1.4.5 (2019 数一). 当 $x\to 0$ 时, 若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 k 等于

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

由于当 $x\to 0$ 时, $x-\tan x\sim -\dfrac{1}{3}x^3$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}=-\dfrac{1}{3}$, 所以 $k=3$, 选 C.

例 1.4.6. 设 $x\to 0$ 时, $\mathrm{e}^{x\cos x^2}-\mathrm{e}^x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 n 为

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

因为 $\mathrm{e}^{x\cos x^2}-\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\left[\mathrm{e}^{x\left(\cos x^2-1\right)}-1\right]\sim x\left(\cos x^2-1\right)\sim -\dfrac{1}{2}x^5$, 所以 $n=5$, 故选 A

例 1.4.7 (2001 数二). 设当 $x\to 0$ 时, $(1-\cos x)\ln\left(1+x^2\right)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $x\sin x^n$ 是比 $\mathrm{e}^{x^2}-1$ 高阶的无穷小, 则正整数 n

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

因为 $(1-\cos x)\ln\left(1+x^2\right)\sim\dfrac{1}{2}x^4$, $x\sin x^n\sim x^{n+1}$, $\mathrm{e}^{x^2}-1\sim x^2$, 由题意知 $4>n+1>2$, 解得 $n=2$, 故选 B.

1.5 递推形式的极限

有些数列, 常常是利用递推的形式给出的, 如何计算这类数列的极限, 是本节的重点. 此类问题在各类考试中比较常见, 需多加注意.

1.5.1 利用存在性求极限

假若用某种方法证明了递推数列的极限存在, 则在递推公式里取极限, 便可得到极限值 A 应满足的方程, 解此方程, 可求得极限值 A.

定理 1.5.1 (单调有界准理). 若 $x_n \nearrow$ 有上界, 或 $x_n \searrow$ 有下界, 则 $\{x_n\}$ 收敛.

判断单调性的通常方法有:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}: x_{n+1}-x_n \begin{cases} \geqslant 0, & x_n \nearrow, \\ \leqslant 0, & x_n \searrow. \end{cases}$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}: \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \begin{cases} \geqslant 1, & x_n \nearrow, \\ \leqslant 1, & x_n \searrow. \end{cases}$

(3) 若 $x_{n+1}=f(x_n),\ f'(x) \geqslant 0$, 则 $\begin{cases} x_1 \leqslant x_2, & x_n \nearrow, \\ x_1 \geqslant x_2, & x_n \searrow. \end{cases}$

定理 1.5.2 (压缩映射). 对于任一数列 $\{x_n\}$ 而言, 若存在常数 r, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$, 恒有

$$|x_{n+1}-x_n| \leqslant r|x_n-x_{n-1}|,\ 0<r<1$$

则数列 $\{x_n\}$ 收敛；特别地, 若数列 $\{x_n\}$ 利用递推公式给出: $x_{n+1}=f(x_n)\ (n=1,2,\cdots)$, 其中 f 为某一可微函数, 且 $\exists r \in \mathbb{R}$, 使得

$$|f'(x)| \leqslant r < 1$$

则数列 $\{x_n\}$ 收敛. 若上式只在某区间 D 上成立, 则必须验证数列 $\{x_n\}$ 是否保持在区间 D 内.

定理 1.5.3 (不动点迭代). 求解非线性方程 (组) 的一类常见的数值解法. 例如, 单个方程的求根问题 $f(x)=0$ 总可以等价地写成 $x=\phi(x)$, 其中 $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个辅助函数, 满足该式的点 x 称为不动点. 如果给定初始点 $x(0)$, 就可以考虑如下的不动点迭代法:

$$x^{(k+1)}=\phi\left(x^{(k)}\right)\ (k=0,1,\cdots)$$

函数 ϕ 亦称为**迭代函数**.

如果迭代函数 ϕ 是一个闭区间上的压缩映射 (或者迭代函数连续可微, 且导数的绝对值在该闭区间上严格小于 1), 则不动点迭代法产生的序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛到 ϕ 在区间上的不动点.

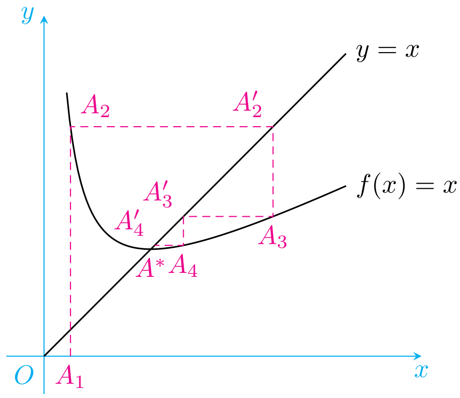


图 1.5.1

例 1.5.1. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_0=1,\ x_{n+1}=\sqrt{2x_n}\ (n=0,1,2,\cdots)$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限值.

证法一 $x_n=\sqrt{2x_{n-1}}=\sqrt{2\sqrt{2x_{n-2}}}=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=2^{1-\frac{1}{2^n}}\to 2\ (n\to\infty)$.

证法二 显然 $1\leqslant x_0<2$, 假设 $1\leqslant x_k<2$, 则 $1\leqslant x_{k+1}=\sqrt{2x_k}<\sqrt{2\cdot 2}=2$, 故由数学归纳法知, $\forall n\in\mathbb{N}:1\leqslant x_n<2$, 又由 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\sqrt{2x_n}}{x_n}=\sqrt{\dfrac{2}{x}}>1$, 知 $\{x_n\}\nearrow$, 所以由单调有界原理得 $\{x_n\}$ 收敛, 不妨记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 则在递推公式里取极限, 有 $A=\sqrt{2A}\Rightarrow A=0,2$, 而由 $x_n\geq 1$, 知 $A\geqslant 1$, 故取 $A=2$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

证法三 令 $f(x)=\sqrt{2x}\ (x>0)$, 则 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}>0\ (x>0)$, 于是当 $x>0$ 时, $f(x)\nearrow$, 从而有 $x_n>x_{n-1}$, 可得 $x_{n+1}=f(x_n)>f(x_{n-1})=x_n$, 而 $x_1=\sqrt{2}>x_0=1$, 故有 $x_1<x_2<\cdots$, 即 $\{x_n\}\nearrow$, 其余证法同证法 *2*.

证法四 如证法 *2*, 已有 $1\leqslant x_n<2$, 对 $f(x)=\sqrt{2x}$, 有

$$|f'(x)|=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}<1$$

满足压缩映射条件, 其余证法同证法 *2*.

证法五 由递推关系式两边取对数, 得 $\ln x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\ln x_n+\dfrac{1}{2}\ln 2$, 令 $b_n=\ln x_n$, 则

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}\ln 2,\ b_0=0$$

记 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\ln 2$, 则 $b_{n+1}=f(b_n)$, 又由特征方程 $x=f(x)$, 解得特征根 $x=\ln 2$, 所以

$$b_n-\ln 2=\left(\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{2}\ln 2\right)-\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2\right)=\frac{1}{2}(b_{n-1}-\ln 2)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot(b_0-\ln 2)=-\ln 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-\ln 2)=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

推论 1.5.1. 一般地, 设 $a,x_0>0,x_{n+1}=\sqrt{ax}\ (n=0,1,2,\cdots)$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

例 1.5.2. 已知 $x_1=\sqrt{6},\ x_n=\sqrt{6+x_{n-1}}\ (n=2,3,\cdots)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 有极限, 并求其值.

证法一 用数学归纳法可证: $0<x_n<3\ (n=1,2,\cdots)$,
因为 $x_{n+1}x-n=\sqrt{6+x_n}-\sqrt{6+x_{n-1}}=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{6+x_n}+\sqrt{6+x_{n-1}}}$, 所以 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号, 又 $x_2=\sqrt{6+\sqrt{6}}>\sqrt{6}=x_1$, 所以 $x_{n+1}>x_n$, 即 $\{x_n\}\nearrow 3$, 由单调有界准则知, $\{x_n\}$ 收敛.

证法二 先假设数列 $\{x_n\}$ 收敛, 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 则由递推关系式两边取极限, 得 $A=\sqrt{6+A}$, 解得 $A=3,-2$, 因为 $x_n>0\ (n=1,2,\cdots)$, 所以 $A=3$, 下证数列 $\{x_n\}$ 收敛于 3.

记 $q=\dfrac{1}{\sqrt{6}+3}$, 则有

$$|x_n-3|=\left|\sqrt{6+x_{n-1}}-3\right|=\frac{|x_{n-1}-3|}{\sqrt{6+x_{n-1}}+3}<q\cdot|x_{n-1}-3|<\cdots<q^{n-1}\cdot|x_1-3|$$

而由 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$, 故由极限的定义或者夹逼准则, 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

例 1.5.3. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{2\left(x_n-1\right)}, (n=0,1,2,\cdots)$，且 $x_0>1$，证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

因为 $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{2(x_n-1)}=\dfrac{x_n^2-1+1}{2(x_n-1)}=\dfrac{(x_n-1)(x_n+1)+1}{2(x_n-1)}=1+\dfrac{x_n-1}{2}+\dfrac{1}{2(x_n-1)}\geqslant 2\ (n=1,2,\cdots)$，

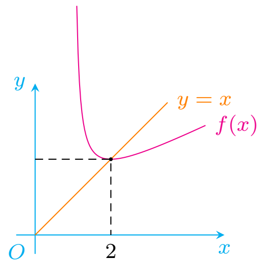


图 1.5.2

法一： 令 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x-1)}$，则

$$f'(x)=\frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{(x-1)^2}\right]$$

所以 $|f'(x)|=\left|\dfrac{1}{2}\left[1-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right]\right|<\dfrac{1}{2}<1$，表明 $x_{n+1}=f(x_n)$ 是一压缩映像，所以 $\{x_n\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，不妨记为 A，对 $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{2(x_n-1)}$ 两边取极限，有 $A=\dfrac{A^2}{2(A-1)}\Rightarrow A=2$，由极限的保序性可得 $A=2$，即原数列极限为 2.

法二： $x_{n+1}-x_n=\dfrac{x_n^2}{2(x_n-1)}-x_n=-\dfrac{x_n(x_n-2)}{2(x_n-1)}<0$，则 $\{x_n\}\searrow$，同法一可得数列极限为 2.

法三： 取[3] $A=2$，则 $A=\dfrac{A^2}{2(A-1)}$，作

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-A|-\left|\frac{x_n^2}{2(x_n-1)}-\frac{A^2}{2(A-1)}\right|&=\frac{1}{2}\left|\frac{x_n^2-1+1}{x_n-1}-\frac{A^2-1+1}{A-1}\right|=\frac{1}{2}\left|x_n+1+\frac{1}{x_n-1}-(A+1)-\frac{1}{A-1}\right|\\&=\frac{1}{2}\left|x_n-A+\frac{1}{x_n-1}-\frac{1}{A-1}\right|<|x_n-A|\end{aligned}$$

因此

$$|x_{n+1}-A|<\frac{1}{2}|x_n-A|<\cdots<\frac{1}{2^{n+1}}|x_0-A|\to 0\ (n\to\infty)$$

故由夹逼准则（或数列极限的定义）可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

例 1.5.4. (试用三种方法求) 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}$ (c为常数)，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

法一：（用单调有界准则）若 $x_1=\sqrt{c}$，则 $x_n=\sqrt{c}\ (\forall n\in\mathbb{N})$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$，若 $x_1>\sqrt{c}$，因 $f(x):=\dfrac{c(1+x_n)}{c+x}=c-\dfrac{c(c-1)}{c+x}$ 严格 $\nearrow$，故 $\forall n\in\mathbb{N}:x_n>\sqrt{c}\Rightarrow x_{n+1}=\dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}=f(x_n)>f\left(\sqrt{c}\right)=\sqrt{c}$，由 $x_1>\sqrt{c}$ 可递推出 $x_n\sqrt{c}$，又因为 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{c-x_n^2}{c+x_n}<0$，知 x_n 严格 $\nearrow$，故 $\{x_n\}$ 收敛，同理可证，当 $0<x_1<\sqrt{c}$ 时，$x_n\nearrow\sqrt{c}$，综上，$\{x_n\}$ 单调有界，极限存在，令递推式 $\dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}$ 两边取极限，得极限为 $\sqrt{c}$.

法二：（用压缩映射）因为 $x_n>0$，且 $x>0$ 时，$f'(x)=\left[\dfrac{c(1+x)}{c+x}\right]'=\dfrac{c(c-1)}{(c+x)^2}>0$，又 $c>1$ 知

$$0<f'(x)=\frac{c(c-1)}{(c+x)^2}\leqslant\frac{c(c-1)}{c^2}=1-\frac{1}{c}<1\ (\forall x>0)$$

故 $x_{n+1}=f(x_n)$ 为压缩映射，$\{x_n\}$ 收敛，同上由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$.

法三： 显然对一切 $x_n>0$，令 $f(x)=\dfrac{c(1+x)}{c+x}=x$，知不动点 $x^*=\sqrt{c}$，而 $f\nearrow$ 保证了 x_n 位于不动点 x^* 的同一侧，且

$$\left[x-\frac{c(1+x)}{c+x}\right](x-\sqrt{c})=\frac{cx+x^2-c-cx}{c+x}(x-\sqrt{c})=\frac{x+\sqrt{c}}{c+x}(x+\sqrt{c})^2>0$$

意味着 x_n 向 x^* 步步靠近，根据不动点迭代法知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$.

例 1.5.5. 设 $a,x_0>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$ $(n=0,1,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其值.

---

[3] 由图 1.5.2 可知在 $x>1$ 处有一个不动点 $x=2$.

证法一 由算术平均数大于几何平均数得 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{a}\ (n=0,1,2,\cdots)$, 于是 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{x_n^2}\right)\leqslant 1$, 即 $x_{n+1}\leqslant x_n$, 从而数列 $\{x_n\}\searrow\sqrt{a}$, 故数列收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 则由递推关系式两边取极限解得 $A=\pm\sqrt{a}$, 因为 $x_n\geqslant\sqrt{a}$, 所以极限为 $\sqrt{a}$.

证法二 由已知 $x_n>0$, 且

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)-x_n=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n}-x_n\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{a}{\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)}-\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{-\left(x_{n-1}^2-a\right)^a}{x_{n-1}\cdot\left(x_{n-1}^2+a\right)}<0\ (n\geqslant 2)$$

所以 $\{x_n\}\searrow 0$, 同解法 *1*, 可求得极限值为 $\sqrt{a}$.

证法三 由 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{a}\ (n=0,1,2,\cdots)$, 所以 $x_{n+1}-\sqrt{a}=(x_n-\sqrt{a})\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{a}}{x_n}\right)$, 反复利用该递推公式, 得

$$x_{n+1}-\sqrt{a}=(x_1-\sqrt{a})\cdot\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{\sqrt{a}}{x_1}\right)\left(1-\frac{\sqrt{a}}{x_2}\right)\cdots\left(1-\frac{\sqrt{a}}{x_n}\right)$$

于是 $|x_{n+1}-\sqrt{a}|\leqslant\frac{1}{2^n}\cdot|x_1-\sqrt{a}|$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$, 由夹逼准则得 $\left|\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}-\sqrt{a}\right|=0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

推论 1.5.2. 一般地, 设 $a,x_1>0,m\in\mathbf{N}^*$, $x_{n+1}=\frac{1}{m}\left[(m-1)\,x_n+\frac{a}{x_n^{m-1}}\right]$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt[m]{a}$.

例 1.5.6. 设 $a,x_0>0,x_{n+1}=\frac{x_n\left(x_n^2+3a\right)}{3x_n^2+a}\ (n=0,1,\cdots)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限值.

令 $f(x)=\frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$, 则 $f'(x)=\frac{3\left(x^2-a^2\right)^2}{(3x^2+a)^2}\geqslant 0,x_{n+1}=f(x_n)$,
若 $x_0\geqslant\sqrt{a}$, 则 $x_1=f(x_0)\geqslant f\left(\sqrt{a}\right)=\sqrt{a}$, 由 $x_n\geqslant\sqrt{a}$ 可得 $x_{n+1}=f(x_n)\geqslant f\left(\sqrt{a}\right)=\sqrt{a}$, 于是由数学归纳法得 $\forall n\in\mathbb{N},x_n\geqslant\sqrt{a}$, 又 $x_1=\frac{x_0\left(x_0^2+3a\right)}{3x_0^2+a}\leqslant x_0$, 由 $f'(x)\geqslant 0$ 得 $x_2=f(x_1)\leqslant f(x_0)=x_1$, 反复利用此关系, 即得 $x_{n+1}\leqslant x_n$, 于是数列 $\{x_n\}\searrow\sqrt{a}$, 故数列 $\{x_n\}$ 收敛,
若 $0<x_0<\sqrt{a}$, 则类似上面可证得 $\forall n\in\mathbb{N},0<x_n<\sqrt{a}$ 且 $x_{n+1}\geqslant x_n$, 于是数列 $\{x_n\}\nearrow\sqrt{a}$, 故数列 $\{x_n\}$ 收敛, 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 易得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

推论 1.5.3. 一般地, 设 $k\geqslant 2,k\in\mathbb{N}^*,x_0>0$, 令 $x_{n+1}=\dfrac{x_n^k+\sum\limits_{i=1}^{[k/2]}\mathrm{C}_k^{2i}\cdot x_n^{k-2i}\cdot a^i}{\sum\limits_{i=0}^{[(k-1)/2]}\mathrm{C}_k^{2i+1}\cdot x_n^{k-2i-1}\cdot a^i}\ (n=0,1,\cdots)$, 则数列 $\{x_n\}$ k 阶收敛于 $\sqrt{a}$.

事实上, 因为 $\frac{x_{n+1}-\sqrt{a}}{x_{n+1}+\sqrt{a}}=\left(\frac{x_n-\sqrt{a}}{x_n+\sqrt{a}}\right)^k=\cdots=\left(\frac{x_1-\sqrt{a}}{x_1+\sqrt{a}}\right)^{k^n}$, 所以有

$$x_{n+1}-\sqrt{a}=2\sqrt{a}\frac{\gamma^{k^n}}{1-\gamma^{k^n}}\to 0\,(n\to\infty)$$

且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\sqrt{a}}{(x_n-\sqrt{a})^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}+\sqrt{a}}{(x_n+\sqrt{a})^k}=\frac{1}{(2\sqrt{a})^{k-1}}.$$

1.5.2 写出通项求极限

利用不动点求通项

在前小节介绍了不动点迭代法, 下文将介绍如何运用不动点解决两种类型的数列通项问题.

例 1.5.7. 已知 $a_{n+1}=\dfrac{a\cdot a_n+b}{c\cdot a_n+d}$ $(c\neq 0)$, 且 $ad-bc\neq 0$, a,b,c,d 都是常数, 求通项 a_n.

设 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c,ad-bc\neq 0)$, $\{a_n\}$ 满足递归关系 $a_{n+1}=f(a_n)$, 且初始值 $a_1\neq f(a_1)$.

(1) 若 f 有两相异的不动点 p,q, 则 $\dfrac{a_{n+1}-p}{a_{n+1}-q}=k\cdot\dfrac{a_n-p}{a_n-q}$, 其中 $k=\dfrac{a-pc}{b-qc}$, 即 $\left\{\dfrac{a_n-p}{a_n-q}\right\}$ 是以 k 为公比的等比数列, 由此解得

$$a_n=\frac{(a_1q-pq)\,k^{n-1}-(a_1p-pq)}{(a_1-p)\,k^{n-1}-(a_1-q)}.$$

(2) 若 f 只有一个不动点 p, 则 $\dfrac{1}{a_{n+1}-p}=\dfrac{1}{a_n-p}+k$, 其中 $k=\dfrac{2c}{a+d}$, 即 $\left\{\dfrac{1}{a_n-p}\right\}$ 是以 k 为公差的等差数列, 由此解得

$$a_n=\frac{a_1-p}{(ka_1-pk)\,n+1-ka_1+pk}+k.$$

例 1.5.8. 已知 $a_{n+1}=\dfrac{a\cdot a_n^2+b}{2a\cdot a_n+c}$ $(a\neq 0)$, a,b,c 都是常数, 求通项 a_n.

设递归函数为 $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{2ax+c}$, 那么

1. 若 f 有两相异的不动点 p,q, 即 $p=\dfrac{ap^2+b}{2ap+c}$, $q=\dfrac{aq^2+b}{2aq+c}$, 则

$$a_{n+1}-p=\frac{a\cdot an^2+b}{2a\cdot a_n+c}-p=\frac{a\cdot a_n^2+b-2apa_n-pc}{2a\cdot a_n+c}=\frac{a\cdot a_n^2-2apa_n+ap^2}{2a\cdot a_n+c}=\frac{a(a-p)^2}{2a\cdot a_n+c}$$

同理 $a_{n+1}-q=\dfrac{a\,(a_n-q)^2}{2a\cdot a_n+c}$, 两式相除, 得

$$\frac{a_{n+1}-p}{a_{n+1}-q}=\left(\frac{a_n-p}{a_n-q}\right)^2=\left(\frac{a_{n-1}-p}{a_{n-1}-q}\right)^{2^2}=\cdots=\left(\frac{a_1-p}{a_1-q}\right)^{2^{n-1}}$$

由此解得, $a_n=\dfrac{q\,(a_1-p)^{2^{n-1}}-p\,(a_1-q)^{2^{n-1}}}{(a_1-p)^{2^{n-1}}-(a_1-q)^{2^{n-1}}}$.

2. 若 f 有两相同的不动点 p, 易得 $p=-\dfrac{c}{2a}$, 由 $a_{n+1}-p=a_{n+1}+\dfrac{c}{2a}=\dfrac{a\cdot a_n^2+b}{2a\cdot a_n+c}+\dfrac{c}{2a}$, 令 $b_n=a_n+\dfrac{c}{2a_n}$, 化简可得 $b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n$, 即 $b_n=\left(a_1+\dfrac{c}{2a}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$, 由此解得

$$a_n=\left(a_1+\frac{c}{2a}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{c}{2a}.$$

例 1.5.9. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=2, x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证法一 记 $f(x)=2+\dfrac{1}{x}$, 则 $x_{n+1}=f(x_n)$, 由 $f(x)=x$ 解得不动点为 $p=1+\sqrt{2}, q=1-\sqrt{2}$, 于是

$$\frac{x_n-p}{x_n-q}=\frac{q}{p}\cdot\frac{x_{n-1}-p}{x_{n-1}-q}=\cdots=\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}\cdot\frac{x_1-p}{x_2-q}$$

而 $\left|\dfrac{q}{p}\right|=\left|\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right|<1$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-p}{x_n-q}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1+\sqrt{2}$.

证法二 假设数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则由递推关系式两边取极限解得 $a=1\pm\sqrt{2}$, 又因为

$$x_{n+1}=\frac{1}{x_n}+2>2$$

所以 $a\geqslant 2$, 故取 $a=1+\sqrt{2}$, 下证数列 $\{x_n\}$ 的极限存在,

$$\begin{aligned}|x_n-a|&=\left|\left(2+\frac{1}{x_n-1}\right)-\left(2+\frac{1}{a}\right)\right|=\left|\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{a}\right|=\frac{|x_{n-1}-a|}{ax_{n-1}}<\frac{|x_{n-1}-a|}{4}\\&<\frac{1}{4^2}\,|x_{n-2}-a|<\ldots<\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot|x_1-a|=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot\left|1-\sqrt{2}\right|=\frac{\sqrt{2}-1}{4^{n-1}}\end{aligned}$$

所以由夹逼准则或极限的定义得 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-a)=0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1+\sqrt{2}$.

推论 1.5.4. 一般地, 设 $a,b,x_1>0, x_n=a+\dfrac{b}{x_{n-1}}\ (n=2,3,\cdots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{a+\sqrt{4b+a^2}}{2}$.

例 1.5.10. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{C(1+x_n)}{C+x_n}, n=1,2,\cdots$, $C>1$ 为常数, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

法一: 由递推关系式 $x_n=\dfrac{C(1+x_{n-1})}{C+x_{n-1}}$ 得

$$x_n+\sqrt{C}=\sqrt{C}\cdot(1+\sqrt{C})\cdot\frac{x_{n-1}+\sqrt{C}}{x_{n-1}+C},$$
$$\frac{1}{x_n+\sqrt{C}}=\frac{1}{C+\sqrt{C}}\cdot\frac{x_{n-1}+C}{x_{n-1}+\sqrt{C}}=\frac{1}{C+\sqrt{C}}+\frac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\cdot\frac{1}{x_{n-1}+\sqrt{C}}$$

所以

$$\frac{1}{x_n+\sqrt{C}}-\frac{1}{2\sqrt{C}}=\frac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\cdot\left(\frac{1}{x_{n-1}+\sqrt{C}}-\frac{1}{2\sqrt{C}}\right)=\cdots=\left(\frac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{x_1+\sqrt{C}}-\frac{1}{2\sqrt{C}}\right)$$

因为 $\left|\dfrac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\right|<1$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\right)^{n-1}=0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n+\sqrt{C}}=\dfrac{1}{2\sqrt{C}}$,
故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+\sqrt{C}\right)=2\sqrt{C}$, 即得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{C}$.

法二: 因为 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$, $C>1$, 且

$$x_{n+2}-x_{n+1}=\frac{C(1+x_{n+1})}{C+x_{n+1}}-x_{n+1}=\frac{C-x_{n+1}^2}{C+x_{n+1}}=\frac{C-\left(\dfrac{C(1+x_n)}{C+x_n}\right)^2}{C+\dfrac{C(1+x_n)}{C+x_n}}=\frac{(C-1)(C-x_n^2)}{(C+2x_n+1)(C+x_n)}$$

所以 $\dfrac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}=\dfrac{\dfrac{(C-1)(C-x_n^2)}{(C+2x_n+1)(C+x_n)}}{\dfrac{C-x_n^2}{C+x_n}}=\dfrac{C-1}{C+2x_n+1}>0$, 于是 $x_{n+2}-x_{n+1}$ 与 $x_{n+1}-x_n$ 同号, 从而知 $\{x_n\}$ 为单调递增数列, 又由 $0<x_{n+1}=\dfrac{C(1+x_n)}{C+x_n}<\dfrac{C(1+x_n)}{1+x_n}=C$, 可知数列 $\{x_n\}$ 有界, 从而由单调有界原理知数列 $\{x_n\}$ 收敛, 不妨记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$, 则由递推关系式两边取极限得 $l=\dfrac{C(1+l)}{C+l}$, 解得 $l=\pm\sqrt{C}$, 而由 $x_n>0$, 知 $l\geqslant0$, 故取 $l=\sqrt{C}$, 即得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{C}$.

法三: 假设数列 $\{x_n\}$ 收敛, 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 则由递推关系式两边取极限, 得 $A=\dfrac{C(1+A)}{C+A}$, 解得 $A=\pm\sqrt{C}$, 又因为 $x_n>0$, 所以 $A\geqslant0$, 故 $A=\sqrt{C}$, 以下证明数列 $\{x_n\}$ 收敛且以 $\sqrt{C}$ 为极限, 因为

$$\begin{aligned}\left|x_n-\sqrt{C}\right|&=\left|\frac{C(1+x_{n-1})}{C+x_{n-1}}-\sqrt{C}\right|=\left|\frac{(C-\sqrt{C})\cdot\left(x_{n-1}-\sqrt{C}\right)}{C+x_{n-1}}\right|<\frac{C-\sqrt{C}}{C}\cdot\left|x_{n-1}-\sqrt{C}\right|\\&<\left(\frac{C-\sqrt{C}}{C}\right)^{n-1}\cdot\left|x_1-\sqrt{C}\right|\end{aligned}$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{C-\sqrt{C}}{C}\right)^{n-1}=0$, 所以由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_n-\sqrt{C}\right|=0$, 即得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{C}$.

法四: 令 $f(x)=\dfrac{C(1+x)}{C+x}$, 则由 $f(x)=x$ 求得 $f(x)$ 的不动点 $x_1=\sqrt{C}, x_2=-\sqrt{C}$, 于是

$$x_n-\sqrt{C}=\frac{(C-\sqrt{C})\cdot\left(x_{n-1}-\sqrt{C}\right)}{C+x_{n-1}},\quad x_n+\sqrt{C}=\frac{(C+\sqrt{C})\cdot\left(x_{n-1}+\sqrt{C}\right)}{C+x_{n-1}}$$

从而

$$\frac{x_n-\sqrt{C}}{x_n+\sqrt{C}}=\frac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\cdot\frac{x_{n-1}-\sqrt{C}}{x_{n-1}+\sqrt{C}}=\cdots=\left(\frac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\right)^{n-1}\cdot\frac{x_1-\sqrt{C}}{x_1+\sqrt{C}}$$

故由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\right)^{n-1}=0$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-\sqrt{C}}{x_n+\sqrt{C}}=0$, 即得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{C}$.

利用生成函数求通项

生成函数又称为“母函数”，当想要了解某数列 $\{a_n\}_0^\infty$ 时, 通常设为 $f(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$, 即只通过一个参数 t 表示整个数列。

定理 1.5.4 (加法性质). 若 $f(t)$ 是 $\{a_n\}_0^\infty$ 的生成函数, $g(t)$ 是 $\{b_n\}_0^\infty$ 的生成函数, 则 $\alpha f(t)+\beta g(t)$ 是 $\{\alpha a_n+\beta b_n\}_0^\infty$ 的生成函数.

$$\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n+\beta\sum_{n=0}^{\infty}b_nt^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)t^n.$$

定理 1.5.5 (移位性质). 若 $f(t)$ 是 $\{a_n\}_0^\infty$ 的生成函数, 则 $t^mf(t)$ 是 $\{a_{n-m}\}_m^\infty$ 的生成函数.

$$t^m\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=\sum_{n=m}^{\infty}a_{n-m}t^n.$$

定理 1.5.6 (变换性质). 显然 $f(ct)$ 是序列 $a_0,ca_1,c^2a_2,\cdots$ 的生成函数, 特别地 $1,c,c^2,c^3,\cdots$ 的生成函数是 $\dfrac{1}{1-ct}$, 在数列里每隔一项取项时, 有以下常用的技巧:

$$\begin{array}{ccccccccccc}\dfrac{f(t)+f(-t)}{2} & = & a_0 & + & a_2t^2 & + & a_4t^4 & + & \cdots & & \\ \dfrac{f(t)-f(-t)}{2} & = & & a_1t & + & a_3t^3 & + & a_5t^5 & + & \cdots\end{array}$$

利用单位复根, 可以推广到每隔 $m-1$ 取第 m 项: 令 $\omega=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/m}=\cos\left(\dfrac{2\pi}{m}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{2\pi}{m}\right)$, 有

$$\sum_{n\leqslant 0,n\bmod m=r}a_nt^n=\frac{1}{m}\sum_{0\leqslant k\leqslant m}\omega^{-kr}f\left(\omega^kt\right)\ (0\leqslant r<m).$$

例 1.5.11. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_0=a,x_1=b,x_{n+1}=\dfrac{x_n+x_{n-1}}{2},n=1,2,3,\cdots$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

令 $f(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_nt^n$, 则

$$\begin{aligned}f(t)&=\sum_{n=0}^{\infty}x_nt^n=a+bt+\sum_{n=2}^{\infty}x_nt^n=a+bt+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}t^n\\&=a+bt+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\sum_{n=2}^{\infty}x_{n-1}t^{n-1}+\frac{1}{2}t^2\sum_{n=2}^{\infty}x_{n-2}t^{n-2}=a+bt+\frac{1}{2}t\sum_{n=0}^{\infty}x_{n+1}t^{n+1}+\frac{1}{2}t^2\sum_{n=0}^{\infty}x_nt^n\\&=a+bt+\frac{1}{2}t\left(f(t)-a\right)+\frac{1}{2}t^2f(t)\end{aligned}$$

即 $f(t)=\dfrac{a+bt-\frac{1}{2}at}{1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t}=\dfrac{2a+2bt-at}{2-t-t^2}=\dfrac{2a+2bt-at}{(2+t)(1-t)}=\dfrac{A}{2+t}+\dfrac{B}{1-t}$, 比较系数,

解得 $A=\dfrac{4a-3b}{3}$, $B=\dfrac{2b+a}{3}$, 那么

$$f(t)=\frac{4a-3b}{3}\cdot\frac{1}{2+t}+\frac{2b+a}{3}\cdot\frac{1}{1-t}=\frac{4a-3b}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^nt^n+\frac{2b+a}{3}\sum_{n=0}^{\infty}t^n$$

从而 $x_n=\dfrac{4a-3b}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+\dfrac{2b+a}{3}\to\dfrac{2b+a}{3}\ (n\to\infty)$.

推论 1.5.5. 一般地, 设 $x_0,x_1>0,x_{n+1}=kx_n+lx_{n-1}\ (n=1,2,\cdots)$, 其中 $k,l>0$ 且 $k+l=1$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{x_1+lx_0}{1+l}$.

1.5.3 求解线性递推关系

定义 1.5.1. 一个常系数的 k 阶线性齐次递推关系是形如

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

的递推关系, 其中 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 是实数, $c_k \neq 0$.

这个定义中的递推关系是线性的, 因为它的右边是数列前项的倍数之和; 这个递推关系是齐次的, 因为所出现的各项都是 a_j 的倍数.

求解常系数线性齐次递推关系

求解常系数线性齐次递推关系的基本方法是寻找形如 $a_n = r^n$ 的解, 其中 r 是常数, 注意 $a_n = r^n$ 是递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ 的解, 当且仅当

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \ldots + c_k r^{n-k}$$

当等式的两边除以 r^{n-k} 并且从左边减去右边时, 可得到等价的方程

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0.$$

因此, 数列 $\{x_n\}$ 以 $a_n = r^n$ 作为解, 当且仅当 r 是这后一个方程的解. 这个方程叫做该递推关系的特征方程, 方程的解叫做这个递推关系的特征根.

定理 1.5.7 (常系数线性齐次递推定理). 设 c_1 和 c_2 是实数, 假设 $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ 有两个不相等的根 r_1 和 r_2, 那么数列 $\{x_n\}$ 是递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ 的解, 当且仅当 $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 其中 α_1 和 α_2 是常数.

例 1.5.12. 设 $a_0 = 2, a_1 = 7$, 且数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项.

由递推关系得特征方程为 $r^2 - r - 2 = 0$, 解得根为 $r_1 = 2, r_2 = -1$, 因此数列 $\{a_n\}$ 是递推关系解当且仅当

$$a_n = \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2 \cdot (-1)^n$$

$\alpha_{1,2}$ 均是常数, 由初始条件得 $\begin{cases} a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ a_1 = 7 = \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases}$, 所以

$$a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n.$$

定理 1.5.8. 设 c_1 和 c_2 是实数, $c_2 \neq 0$, 假设 $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ 只有一个根 r_0, 数列 $\{a_n\}$ 是递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ 的解, 当且仅当 $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 其中 α_1 和 α_2 是常数.

例 1.5.13. 求具有初始条件 $a_0 = 1$ 和 $a_1 = 6$ 的递推关系 $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ 的解.

$r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow r = 3$, 因此递推关系的解为 $a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$, 又由初始条件可解得 $\alpha_1 = 1 = \alpha_2$, 因此解为 $a_n = 3^n + n \cdot 3^n$.

定理 1.5.9. 设 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 是实数, 假设特征方程

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$$

有 k 个不相等的根 $r_1, r_2, \cdots, r_k$, 那么数列 $\{a_n\}$ 是递推关系

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

的解, 当且仅当

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n$$

$n = 0, 1, 2, \cdots$, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 是常数.

某些具有非线性递推关系的数列可化为线性形式处理.

例 1.5.14. 设 $x_0 = 1, x_1 = \mathrm{e}, x_{n+1} = \sqrt{x_n x_{n-1}}\ (n = 1, 2, \cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

由已知可得出 $x_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$, 且 $\ln x_{n+1} = \frac{1}{2}(\ln x_n - \ln x_{n-1})$, 令 $a_n = \ln x_n$, 则

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}\ (n = 1, 2, \cdots)$$

即化为例 1.5.11, 最后解得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \mathrm{e}^{2/3}$.

第 2 章

一元函数微分学

"宇宙之大, 粒子之微, 火箭之速, 化工之巧, 地球之变,
生物之谜, 日用之繁, 无处不用数学."
——华罗庚

一元函数微分学是微积分的一个重要分支, 主要研究一元函数的导数和微分. 下面简要介绍一元函数微分学的几个重要概念:

1. 导数: 函数在某一点处的导数描述了函数在该点处的变化率. 对于一元函数 $y = f(x)$, 其导数 $f'(x)$ 表示函数 $f(x)$ 在点 x 处的导数, 即函数在 x 处的切线斜率. 导数的几何意义是函数图像在该点处的切线斜率, 也可以理解为函数的局部线性近似.

2. 微分: 微分是导数的积分形式, 用微分形式 $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ 表示. 微分可以理解为函数在某一点处的微小增量, 即函数值的微小变化. 微分在近似计算中有重要作用, 例如在求函数的局部线性近似、计算微分方程等方面.

3. 微分中值定理: 微分中值定理是微分学中的一个重要定理, 主要有 Lagrange 中值定理和 Cauchy 中值定理两种形式. 这些定理描述了函数在一定条件下的变化规律, 为函数的性质和变化提供了重要的理论基础.

4. Taylor 展开: Taylor 展开是一种将函数在某点附近用多项式逼近的方法. Taylor 展开可以将函数表示为无穷级数的形式, 通过截断级数可以得到函数在该点附近的近似值, 有助于研究函数的性质和计算函数值.

一元函数微分学是微积分的基础, 它不仅在数学理论研究中有着重要作用, 也在物理、工程、经济等应用领域有广泛的应用. 通过学习一元函数微分学, 可以更深入地理解函数的性质和变化规律, 为进一步学习微积分和应用数学打下坚实的基础.

2.1 导数与微分

导数和微分都是描述函数变化率的概念, 但是它们有一些不同之处.

导数是函数在某一点的变化率, 表示函数在该点的斜率. 导数可以用极限的概念来定义, 即函数在某一点的导数等于该点的函数值的极限与该点的自变量取值的极限的比值. 导数可以用符号表示为 $f'(x)$, 表示函数 f 在点 x 处的导数.

微分是函数在某一点的线性近似, 表示函数在该点的局部变化率. 微分可以用导数来计算, 即函数在某一点的微分等于函数在该点的导数与自变量的微小增量的乘积. 微分可以用符号表示为 $\mathrm{d}f(x)$, 表示函数 f 在点 x 处的微分.

2.1.1 导数的定义与可微性质

导数定义的运用

定义 2.1.1 (导数). 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 当自变量 x 在点 x_0 处取得增量 Δx $(\Delta x\neq 0)$ 时, 相应地, 函数 y 取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, 如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 并称整个极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 记作 $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$, 如果记 $x=x_0+\Delta x$, 则导数又可表示为 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

例 2.1.1 (2004 数一). 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0)>0$, 则存在 $\delta>0$, 使得

A. $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调递增

B. $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调递增

C. 对任意 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$

D. 对任意 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$

由于 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$, 所以由函数极限的局部保号性知, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x|<\delta$ 时, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$, 则当 $x\in(-\delta,0)$ 时, $f(x)-f(0)<0$, 即有 $f(x)<f(0)$; 当 $x\in(0,\delta)$ 时, $f(x)-f(0)>0$, 即有 $f(x)>f(0)$, 因此选 C.

推论 2.1.1. 若 $f'(x_0)>0$, 则存在 $\delta>0$, 当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时, $f(x)<f(x_0)$; 当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时, $f(x)>f(x_0)$, 同理 $f'(x_0)<0$ 也有类似结论.

例 2.1.2. 下列 f 在 x_0 的某个邻域内均有定义, 哪项极限式能作为 f 在 x_0 处的导数定义?

A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$

B. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x_0+x^2\right)-f(x_0)}{x^2}$

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-x)}{x}$

按照定义 2.1.1, 不但要求 f 在 x_0 的某个邻域有定义, 而且 f 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 是否存在以及 $f'(x_0)$ 的值的大小都与 f 在 x_0 处的值 $f(x_0)$ 有关, 由此可知 A 不能作为 f 在 x_0 处导数的定义, 实际上, 从 A 的分子结构易见, 该极限存在与否同 f 在 x_0 处的值无关, 即使 f 在点 x_0 处没有定义, 或者有定义但不连续, A 极限也可能存在, 例如,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处不连续 ($x=0$ 为第二类间断点), 因而在 $x=0$ 处必不可导, 但极限却存在

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0-\Delta x)}{2\Delta x}=\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{(\Delta x)^2}-\frac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=0$$

因此, 用 A 极限来定义函数 f 在点 x_0 处的导数是不恰当的, 实际上, 对于任何偶函数 f, 在点 $x_0=0$ 处 A 极限总存在, 且

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0-\Delta x)}{2\Delta x}=0$$

但根据定义 2.1.1 却不一定存在, 也就是说, 函数 f 在点 $x_0=0$ 处不一定可导;
B 极限也不能作为 f 在点 x_0 处的导数定义, 因为

$$\exists\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]\not\Rightarrow\exists\lim_{x\to h}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

例如, 函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为无理数}\\ 0, & x\text{ 为有理数}\end{cases}$ 处处有定义, 处处不连续, 从而处处不可导, 但是,

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty}n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x_0+\frac{1}{n}-f(x_0)\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{0}{\frac{1}{n}}=0$$

C 极限也不能作为 f 在 x_0 处导数的定义, 实际上, 极限

$$\exists\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x_0+x^2\right)-f(x_0)}{x^2}\Leftrightarrow\exists f'_+(x_0)$$

由此不能推出定义 2.1.1 存在, 例如函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 虽然极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(0+x^2\right)-f(0)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0}{x^2}=1$$

但是由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 所以它在点 $x=0$ 处不可导;
D 极限与导数定义等价, 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}\overset{h=-x}{=\!=\!=}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0).$$

综上所述, 选 D.

例 2.1.3 (2011 数二). 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 则 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f\left(x^3\right)}{x^3}$ 等于

A. $-2f'(0)$　　B. $-f'(0)$　　C. $f'(0)$　　D. 0

法一: 凑导数定义,

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-x^2f(0)+2f(0)-2f\left(x^3\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\frac{f\left(x^3\right)-f(0)}{x^3}\right)=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)$$

法二: 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)=f'(0)x+o(x),\ f\left(x^3\right)=f'(0)x^3+o\left(x^3\right)$$

于是

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(f'(0)x+o(x))-2\left(f'(0)x^3+o(x)\right)}{x^3}=f'(0)-2f'(0)=-f'(0).$$

例 2.1.4. 证明: $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{1}{(cx+d)^2}\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$.

证 $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}=\dfrac{1}{(cx+d)^2}\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\ (cx+d\neq 0).$

例 2.1.5. 求下列一阶导数

$$(1)\ F(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}. \quad (2)\ F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}.$$

(1) 利用例 9.1.3 的结论，有

$$\begin{aligned} F'(x) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (x^2+x+9)+(x^2-1+4)+(x^2-x+3)=3(x^2+5). \end{aligned}$$

(2) 同上，有 $F'(x)=\begin{vmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 0 & 2 & 6x \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}=0+0+6(2x^2-x^2)=6x^2.$

例 2.1.6. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f(0)\neq 0$，$f'(0)\neq 0$，且

$$af(h)+bf(2h)-f(0)=o(h)\ h\to 0$$

求 a,b.

两边同时除以 h，有

$$o(1)=\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=a\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h}+2b\cdot\frac{f(2h)-f(0)}{2h}+\frac{(a+b-1)f(0)}{h}$$

令 $h\to 0$ 得方程组 $\begin{cases} a+2b=0 \\ a+b-1=0 \end{cases} \Rightarrow a=2, b=-1.$

例 2.1.7. 设 $f(0)=0, f'(0)=A$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$.

$\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)\right|=0\Rightarrow\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)=o(1)\Rightarrow f(x)=x\cdot o(1)+xf'(0)+f(0)$，故

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{k}{n^2}\cdot o(1)+\frac{k}{n^2}f'(0)+f(0)=\frac{k}{n^2}(A+o(1))\ (n\to\infty)$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}(A+o(1))=\frac{n+1}{2n}(A+o(1))\ (n\to\infty)$$

取极限有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)=\dfrac{A}{2}$.

例 2.1.8. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微，$\alpha_n<x_0<\beta_n\ (n=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=x_0$，证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0).$$

证 首先，容易得到

$$\begin{aligned} \frac{f(\beta n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n} &= \frac{f(\beta_n)-f(x_0)+f(x_0)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n} \\ &= \frac{\beta_n-x_0}{\beta n-\alpha_n}\frac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta n-x_0}-\frac{\alpha_n-x_0}{\beta n-\alpha_n}\frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n-x_0} \end{aligned}$$

若记 $\lambda_n=\dfrac{\beta_n-x_0}{\beta_n-\alpha_n}$, 那么 $\dfrac{x_0-\alpha_n}{\beta_n-\alpha_n}=1-\lambda_n$, 且 $0<\lambda_n<1,\ 0<1-\lambda_n<1$, 故上式可改写为

$$\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=\lambda_n\frac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta_n-x_0}+(1-\lambda_n)\frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n-x_0}$$

即 $f'(x_0)=\lambda_n f'(x_0)+(1-\lambda_n)f'(x_0)$, 故有 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 当 $n>N$ 时,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}-f'(x_0)\right|&\leqslant\lambda_n\left|\frac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta_n-x_0}-f'(x_0)\right|+(1-\lambda_n)\left|\frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n-x_0}-f'(x_0)\right|\\&<\lambda_n\varepsilon+(1-\lambda_n)\varepsilon=\varepsilon\end{aligned}$$

原极限获证.

例 2.1.9. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=A$, 求证: $f'(0)$ 存在, 并且 $f'(0)=A$.

证 因已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=A$, 即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|x|<\delta$ 时, 有

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(2x)-f(x)}{x}<A+\frac{\varepsilon}{2}$$

特别地, 取 $x_n=\dfrac{x}{2^k}\ (k\in\mathbb{N})$, 上式亦成立, 则有

$$\frac{1}{2^k}\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^k}\right)}{x}<\frac{1}{2^k}\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

将此 n 式相加, 得

$$\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right]=f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f(x)-f(x_n)$$

因为 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k}=1-\dfrac{1}{2^k}$, 于是

$$\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{f(x)-f(x_n)}{x}<\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

再令 $n\to\infty$, 取极限, 有 $x_n=\dfrac{x}{2^n}\to0$, 而 f 在 $x=0$ 处连续, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(0)$, 故

$$A-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\frac{f(x)-f(0)}{x}\leqslant A+\frac{\varepsilon}{2}$$

即 $\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-A\right|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$, $f'(0)$ 存在且 $f'(0)=A$.

两种符号的区别

定义 2.1.2 (左右导数)**.** 若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在, 则该极限值称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数, 记作 $f'_(x_0)$. 同理可得右导数的定义.

$f'_-(x_0)\ (f'_+(x_0))$ 表示函数在点 x_0 处的左 (右) 导数, 而 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\ (\lim\limits_{x\to x_0^+})$ 表示导函数在 x_0 处的左 (右) 极限, 一般情况下 $f'_\pm(x_0)\neq\lim\limits_{x\to x_0^\pm}f'(x)$.

定理 2.1.1 (函数的可导性与连续性)**.** 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导, 则 $y=f(x)$ 在点 x_0 必连续, 但连续不一定可导.

函数在某一点可导不能保证它在该点的某一邻域内可导, 例如: $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\ 为无理数\\ 0, & x\ 为有理数\end{cases}$

函数在某一点可导不能保证其导函数在该点连续, 例如: $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$

两个函数至少有一个不可导, 那么复合后不一定不可导.

例 2.1.10. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{2x}{1+\mathrm{e}^{x}}, & x>0\end{cases}$ 求函数在点 $x=0$ 处的导数.

$f(x)$ 是分段函数, 按定义分别求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右导数,

$$f'_{(}0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=1,\ f'_+(0)=\lim_{x\to0+}\frac{\dfrac{2x}{1+\mathrm{e}^{x}}-0}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{2}{1+\mathrm{e}^{x}}=1$$

因为左右导数相等, 所以 $f'(0)=1$.

例 2.1.11 (2018 数一). 下列函数中, 在 $x=0$ 处不可导的是

A. $f(x)=|x|\sin|x|$ B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$ C. $f(x)=\cos|x|$ D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

对选项 D, 有导数定义知

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{2}|x|}{x}=\frac{1}{2},\ f'_+(0)=\lim_{x\to0+}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{-\frac{1}{2}|x|}{x}=-\frac{1}{2}$$

则 $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$ 在 $x=0$ 处不可导, 故选 D.

2.1.2 反函数、用参数方程确定的函数、隐函数的导数

定理 2.1.2 (反函数的导数). 导数 $f'(x)\neq0$ 的可微函数 $y=f(x)$ $(a<x<b)$ 具有单值连续的反函数 $x=f^{-1}(y)$, 此反函数可微, 那么

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}$$

反函数的导数等于原函数的导数的倒数.

例 2.1.12. 设 $f(x)$ 为单调可微函数, $g(x)$ 与 $f(x)$ 互为反函数, 且 $f(2)=4, f'(2)=\sqrt{5}, f'(4)=6$, 则 $g'(4)$ 等于

A. $\dfrac{1}{4}$ B. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ C. $\dfrac{1}{6}$ D. 4

$f(2)=4\Leftrightarrow g(4)=2$, 故 $g'(4)=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, 选 B.

定理 2.1.3 (用参数方程确定的函数的导数). 若方程组 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha<t<\beta)$, 其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 为可微函数, 且 $\varphi'(t)\neq0$, 在某区域内确定 y 为 x 的单值连续函数: $y=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$, 则此函数的导数为

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

例 2.1.13 (2017 数二). 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t+\mathrm{e}^t\\ y=\sin t\end{cases}$ 确定, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}=\dfrac{\cos t}{1+\mathrm{e}^t}$, 那么

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}=\frac{-\sin t(1+\mathrm{e}^t)-\mathrm{e}^t\cos t}{(1+\mathrm{e}^t)^3}$$

因此 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=-\dfrac{1}{8}$.

定理 2.1.4 (隐函数的导数)**.** 若可微函数 $y=y(x)$ 满足方程 $F(x,y)=0$, 则此隐函数的导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F(x,y)]=0.$$

例 2.1.14. 设 $u=xy+y^2$, 其中 $y=y(x)$ 是由 $x^2+y^2=5$ 确定的函数, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{\substack{x=2\\y=-1}}$.

等式两边同时对 x 求导, $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=y+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\\ 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=0\end{cases}$, 并将 $x=2,y=-1$ 代入, 得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{\substack{x=2\\y=-1}}=-1$.

例 2.1.15. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x^3+y^3+xy=1$ 确定, 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3y+x-3}{x^2}$.

当 $x=0$ 时, $y(0)=1$, 方程 $x^3+y^3+xy=1$ 两边同时对 x 求导, 得

$$3x^2+3y^2\cdot y'+y+xy'=0\Rightarrow y'(0)=-\frac{1}{3}$$

继续对 x 求导, 得

$$6x+6y\cdot(y')^2+3y^2\cdot y''+2y'+xy''=0\Rightarrow y''(0)=0$$

将 $y(x)$ 在 $x=0$ 处 *Taylor* 展开, 得

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{1}{2}y''(x)x^2+o(x^2)$$

于是待求极限式等于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3-x+o(x^2)+x-3}{x^2}=0$.

例 2.1.16 (2007 数二)**.** 已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f'(0)=1$, 函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-x\mathrm{e}^{y-1}=1$ 所确定, 设 $z=f(\ln y-\sin x)$, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

当 $x=0$ 时, 由 $y-x\mathrm{e}^{y-1}=1$ 知 $y=1$, 并且对方程 $y-x\mathrm{e}^{y-1}=1$ 两端的 x 求导, 得 $y'-(\mathrm{e}^{y-1}+x\mathrm{e}^{y-1}\cdot y')=0$, 将 $x=0,y=1$, 代入该式求得 $y'(0)=1$, 那么 $\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=f'(\ln y-\sin x)\left.\left(\dfrac{y'}{y}-\cos x\right)\right|_{x=0}=0$, 且

$$y''-[2\mathrm{e}^{y-1}\cdot y'+x(\mathrm{e}^{y-1}\cdot y'^2+\mathrm{e}^{y-1}\cdot y'')]=0$$

解得 $y''(0)=0$, 那么

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=f''(\ln y-\sin x)\left(\frac{y'}{y}-\cos x\right)^2+f'(\ln y-\sin x)\left.\left(\frac{y''\cdot y-y'^2}{y^2}+\sin x\right)\right|_{x=0}=f'(0)(2-1)=f'(0)=1.$$

例 2.1.17. 设函数 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3\\ \mathrm{e}^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ 所确定, 试求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

对方程组每个方程两边分别取微分, 得 $\begin{cases}\mathrm{d}x=6t\mathrm{d}t+2\mathrm{d}t\\ \mathrm{e}^y\sin t\mathrm{d}y+\mathrm{e}^y\cos t\mathrm{d}t-\mathrm{d}y=0\end{cases}$ 则 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=6t+2$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{e}^y\cos t}{1-\mathrm{e}^y\sin t}$, 那么

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{(1-\mathrm{e}^y\sin t)(6t+2)}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{(2-y)(6t+2)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{(2-y)(6t+2)}\right]\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{(\mathrm{e}^y y_t'\cos t-\mathrm{e}^y\sin t)(2-y)(6t+2)-[(-y_t')(6t+2)+6(2-y)]\mathrm{e}^y\cos t}{(2-y)^2(6t+2)^3}$$

由 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$, $\left.y\right|_{t=0}=1$, 代入上式, 得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\dfrac{\mathrm{e}(2\mathrm{e}-3)}{4}$.

例 2.1.18. 求下列 y'_x (参数均为正实数, 且 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\arctan\dfrac{y}{x}$).

(1) $x=\sin^2 t\ y=\cos^2 t$.	(2) $x=a\cos t\ y=b\sin t$.	(3) $x=a\cos^3 t\ y=a\sin^3 t$.
(4) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.	(5) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.	(6) $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.
(7) $r=a\varphi$.	(8) $r=a(1+\cos\varphi)$.	(9) $r=a\mathrm{e}^{m\varphi}$.

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{-2\cos t\sin t}{2\sin t\cos t}=-1\ (0<x<1)$.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}=-\cot x\ (0<|t|<\pi)$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t\ (t\neq\dfrac{2k+1}{2}\pi k$ 为正整数).

(4) 两边对 x 求导, 得 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}.y'_x=0\Rightarrow y'_x=-\sqrt{\dfrac{y}{x}}\ (x,y>0)$.

(5) 两边对 x 求导, 得 $\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'_x=0\Rightarrow y'_x=-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}\ (x\neq 0)$.

(6) 两边对 x 求导, 得 $\dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\dfrac{xy'_x-y}{x^2}=\dfrac{x+yyx'}{x^2+y^2}\Rightarrow y'_x=\dfrac{x+y}{x-y}\ (x\neq y,0)$.

(7) $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $r=r(\varphi)$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}}=\frac{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\sin\varphi+r\cos\varphi}{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\cos\varphi-r\sin\varphi}\tag{*}$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\arcsin\varphi+a\varphi\cos\varphi}{\arccos\varphi-a\varphi\sin\varphi}=\tan(\varphi+\arctan\varphi)$.

(8) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=-a\sin\varphi$, 代入 (*) 式, 且 $(\varphi\neq 0,\pm\dfrac{2\pi}{3})$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-a\sin^2\varphi+a(1+\cos\varphi)\cos\varphi}{-a\sin\varphi\cos\varphi-a(1+\cos\varphi)\sin\varphi}=-\frac{\cos 2\varphi+\cos\varphi}{\sin 2\varphi+\sin\varphi}=-\frac{\cos\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}=-\cot\frac{3\varphi}{2}.$$

(9) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=ma\mathrm{e}^{m\varphi}$, 代入 (*) 式得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ma\mathrm{e}^{m\varphi}\sin\varphi+a\mathrm{e}^{m\varphi}\cos\varphi}{ma\mathrm{e}^{m\varphi}\cos\varphi-a\mathrm{e}^{m\varphi}\sin\varphi}=\frac{m\sin\varphi+\cos\varphi}{m\cos\varphi-\sin\varphi}=\tan\left(\varphi+\arctan\frac{1}{m}\right).$$

2.1.3 高阶导数与 Leibniz 公式

先拆项再求导

基本形式主要有:

(1) $(x^k)^{(n)}=k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n}\ (n\leqslant k)$.	(2) $\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$
(3) $(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$.	(4) $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a$.
(5) $(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$.	(6) $(\log_a x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n\ln a}$
(7) $[\sin(kx+b)]^{(n)}=k^n\sin\left(kx+b+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.	(8) $[\cos(kx+b)]^{(n)}=k^n\cos\left(kx+b+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

并特别注意 $[f(ax+b)]^{(n)}=a^nf^{(n)}(ax+b)$, 因子 a^n 不要漏掉.

例 2.1.19. 求下列 $y^{(n)}$, n 足够的大.

(1) $y=\dfrac{1}{x(1-x)}$.	(2) $y=\dfrac{x^4}{x-1}$.	(3) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-5x+6}$.	(4) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$
(5) $y=\sin^2 x$.	(6) $y=\cos^3 x$.	(7) $y=\cos ax\cos bx$.	(8) $y=\sin ax\cos bx$.
(9) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.	(10) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3x+2}}$	(11) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$.	(12) $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$.

(1) 因为 $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}$, 所以 $y^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}+\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$, $x\neq 0,1$.

(2) 因为 $y=(x^2+1)(x+1)+\dfrac{1}{x-1}$, 所以 $y^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{(x-1)^{n+1}}$, $n\geqslant 4$.

(3) 因为 $y=1-\dfrac{7}{x-2}+\dfrac{13}{x-3}$, 所以 $y^{(n)}=7\cdot\dfrac{n!}{(2-x)^{n+1}}+(-1)^n\cdot 13\cdot\dfrac{n!}{(x-3)^{n+1}}$, $x\neq 2,3$.

(4) 因为 $y=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$, 所以 $y^{(n)}=(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$, $x\neq 1,2$.

(5) 因为 $y=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$, 所以 $y^{(n)}=-2^{n-1}\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

(6) 由三倍角公式 $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$, 所以 $y^{(n)}=\dfrac{3^n}{4}\cos\left(3x+\dfrac{n\pi}{2}\right)+\dfrac{3}{4}\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

(7) 因为 $y=\dfrac{1}{2}\cos(a-b)x+\dfrac{1}{2}\cos(a+b)x$, 所以

$$y^{(n)}=\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]+\frac{1}{2}(a-b)^n\cos\left[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right].$$

(8) 由积化和差公式得 $y=\dfrac{1}{2}\sin(a+b)x+\dfrac{1}{2}\sin(a-b)x$, 所以

$$y^{(n)}=\frac{(a+b)^n}{2}\sin\left[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]+\frac{(a-b)^n}{2}\sin\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right].$$

(9) $y^{(n)}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right)\cdots\left(-\dfrac{2n-1}{2}\right)\cdot(-2)^n\cdot(1-2x)^{-\frac{2n+1}{2}}=\dfrac{(2n-1)!!}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}}$.

(10) $y^{(n)}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right)\cdots\left(-\dfrac{2n-1}{2}\right)\cdot 3^n\cdot(3x+2)^{-\frac{2n+1}{2}}=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^n\cdot\dfrac{(2n-1)!!}{(3x+2)^{\frac{2}{n+1}}}$.

(11) 因为 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}-\sqrt{1-x}$, 所以 $y^{(n)}=\dfrac{(2n-1)!!}{2^n}(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}+\dfrac{(2n-3)!!}{2^n}(1-x)^{-\frac{2n-1}{2}}$.

(12) 因为 $y=\dfrac{(x+1)-1}{\sqrt[3]{1+x}}=(1+x)^{\frac{2}{3}}-(1+x)^{-\frac{1}{3}}$, 所以当 $n\geqslant 2, x\neq -1$ 时,

$$\begin{aligned}y^{(n)}&=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\cdots\left(-\frac{3n-5}{3}\right)(1+x)^{-\frac{3n-2}{3}}+\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)\cdots\left(-\frac{3n-2}{3}\right)(1+x)^{-\frac{3n+1}{3}}\\&=\frac{(-1)^{n+1}\cdot 1\cdot 4\cdots(3n-5)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}[2(1+x)+(3n-2)]=\frac{(-1)^{n+1}1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-5)(3n+2x)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}.\end{aligned}$$

Leibniz 公式

把要求导的函数写成两项相乘, 然后直接应用 Leibniz 公式:

$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}.$$

例 2.1.20. 求下列 $y^{(n)}$.

(1) $y=x\cos ax$.	(2) $y=x^2\sin ax$.	(3) $y=\sin^2 ax\cos bx$.	(4) $y=\dfrac{\sin(2x+1)}{4x-3}$.
(5) $y=(x^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x}$.	(6) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.	(7) $y=x^2\mathrm{e}^{ax}$.	(8) $y=x\ln x$.

(1) $y^{(n)}=x(\cos ax)^{(n)}+n(\cos ax)^{(n-1)}=a^n x\cos\left(ax+\dfrac{n\pi}{2}\right)+na^{n-1}\sin\left(ax+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

(2) $y^{(n)}=a^n x^2\sin\left(ax+\dfrac{n\pi}{2}\right)+2na^{n-1}x\sin\left(ax+\dfrac{n-1}{2}\pi\right)+n(n-1)a^{n-1}\sin\left(ax+\dfrac{n-2}{2}\pi\right)$.

(3) 将 $\sin^2 ax$ 降幂, 再用积化和差公式, 得 $y=\dfrac{1}{2}\cos bx-\dfrac{1}{4}\cos(2a+b)x-\dfrac{1}{4}\cos(2a-b)x$, 于是

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}b^2cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}(2a+b)^n\cos\left[(2a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]-\frac{1}{4}(2a-b)^n\cos\left[(2a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right].$$

(4) $y^{(n)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(-1)^{n-k}\frac{(n-k)!\cdot 2^{3n-2k}}{(4x-3)^{n-k+1}}\sin\left(2x+1+\frac{n\pi}{2}\right)$.

(5) $y^{(n)}=(-1)^n\mathrm{e}^{-x}\left[x^2-2(n-1)x+(n-1)(n-2)\right]$.

(6) $y^{(n)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\mathrm{e}^x\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)}=\mathrm{e}^x\left[\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{x^{k+1}}\right]$.

(7) $y^{(n)}=a^n x^2\mathrm{e}^{ax}+2na^{n-1}x\mathrm{e}^{ax}+n\,(n-1)\,a^{n-2}\mathrm{e}^{ax}$.

(8) $y^{(n)}=\begin{cases}(-1)^{n-2}(n-2)!x^{1-n}, & n\geqslant 2\\ \ln x+1, & n=1.\end{cases}$

例 2.1.21. 设函数 $y=\left(x^2-11x+30\right)^{2022}\cdot\cos\dfrac{\pi x}{18}$, 求 $y^{(2022)}(6)$.

$y=\left(x^2-11x+30\right)^{2022}\cdot\cos\dfrac{\pi x}{18}=(x-6)^{2022}(x-5)^{2022}\cos\dfrac{\pi x}{18}$, 由 *Leibniz* 计算公式, 可知对 $x=6$ 处, 仅仅有一项不为 0, 即

$$y^{(2022)}(6)=\mathrm{C}_{2022}^{2022}\cdot 2022!\left[(x-5)^{2022}\cos\frac{\pi x}{18}\right]_{x=6}=\frac{2022!}{2}.$$

用数学归纳法求高阶导数

当高阶导数不能一次求出时, 可先求出前几阶导数, 归纳总结, 找出规律, 然后用数学归纳法加以证明.

例 2.1.22. 证明: $\left(x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

证 当 $n=1$ 时, 由于 $\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, 故等式成立,

设当 $n=k$ 时等式成立, 即有 $\left(x^{k-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)}=\dfrac{(-1)^k}{x^{k+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, 要证等式对 $n=k+1$ 时也成立,

$$\begin{aligned}\left(x^k\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k+1)}&=\left[\left(x\cdot x^{k-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)}\right]'=\left[x\left(x^{k-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)}+k\left(x^{k-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k-1)}\right]'\\&=x\left(x^{k-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k+1)}+\left(x^{k-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)}+k\left(x^{k-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)}\\&=x\left[\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right]'+(k+1)\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\\&=\frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{x^{k+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\frac{(-1)^k(k+1)}{x^{k+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

于是, 由数学归纳法得知, $\left(x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 对于一切正整数 n 均成立.

用递推公式求导

例 2.1.23. 设 $f(x)=x^n\cdot\ln x$，求 $f^{(n)}(x)$.

令 $f_n(x)=x^n\cdot\ln x$，则

$$f_n'(x)=nx^{n-1}\cdot\ln x+x^{n-1}=n\cdot f_{n-1}(x)+x^{n-1}$$

对上式两边同时除以 $n!$，则有 $\dfrac{f_n'(x)}{n!}=\dfrac{f_{n-1}(x)}{(n-1)!}+\dfrac{x^{n-1}}{n!}$，再同时求 $(n-1)$ 阶导，即

$$\frac{f_n^{(n)}(x)}{n!}=\frac{f_{n-1}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+\frac{1}{n}:=u_n-u_{n-1}=\frac{1}{n}$$

于是 $u_n=\ln x+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，所以 $f_n^{(n)}(x)=n!\left(\ln x+1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$.

$$\begin{array}{rcrcl}
u_1 & - & u_0 & = & \frac{1}{1}\\
\cancel{u_2} & - & \cancel{u_1} & = & \frac{1}{2}\\
\cancel{u_3} & - & \cancel{u_2} & = & \frac{1}{3}\\
\cancel{u_4} & - & \cancel{u_3} & = & \frac{1}{4}\\
 & & \vdots & & \\
u_n & - & \cancel{u_{n-1}} & = & \frac{1}{n}\\
\hline
u_n & - & u_0 & = & \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}
\end{array}$$

例 2.1.24 (2023 四川大学). 设 $y=\arcsin x$，求 $\dfrac{y^{(7)}(0)}{7!}$.

直接求导，有

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ y''=\frac{x}{1-x^2}y'$$

则 $(1-x^2)y''=xy'$，对其两边求 n 阶导数，利用 *Leibniz* 公式得

$$(1-x^2)y^{(n+2)}+n(-2x)y^{(n+1)}+\frac{n(n-1)}{2}(-2)y^{(n)}=xy^{(n+1)}+ny^{(n)}$$

整理得

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$$

令 $x=0$，可得递推公式可知：$y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$，又因为 $y'(0)=y''(0)=0$，则

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & x=2k\\ [(2k-1)!!]^2, & n=2k+1\end{cases},k\in\mathbb{N}_+$$

所以 $\dfrac{y^{(7)}(0)}{7!}=\dfrac{(5!!)^2}{7!}=\dfrac{5}{112}$.

例 2.1.25. 设 $f(x)=(\arcsin x)^2$，求 $f^{(n)}(0)$.

由 $f'(x)=2\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，得

$$(1-x^2)\left[f'(x)\right]^2=4f(x)$$

再次求导，整理得

$$-xf'(x)+(1-x^2)f''(x)=2$$

由 *Leibniz* 公式得

$$-xf^{(n+1)}(x)-nf^{(n)}(x)+(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-2nxf^{(n+1)}(x)-n(n-1)f^{(n)}(x)=0$$

令 $x=0$，得

$$f'(0)=0,f''(0)=2,f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0)$$

从而

$$\begin{aligned}
&f^{(2k+1)}(0)=0,\ k=0,1,\cdots,\\
&f^{(2k)}(0)=(2k-2)^2\,(2k-4)^2\cdots2^2\cdot2=2\prod_{i=1}^{k-1}(2k-2i)^2\\
&\qquad=2^{2(k-1)}\cdot2\prod_{i=1}^{k-1}(k-i)^2=2^{2k-1}\left[\prod_{i=1}^{k-1}(k-i)\right]^2\\
&\qquad=2^{2k-1}\left[(k-1)!\right]^2,\ k=1,2,\cdots.
\end{aligned}$$

用 Taylor 展开式求导

定理 2.1.5 (Taylor 展开式). $f(x)$ 按 $(x-a)$ 的幂展开的幂级数必是 $f(x)$ 的 Taylor 展开式:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

因此, 若一旦得到展开式 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$, 则 $f^{(n)}(a)=a_n n!\ (n=0,1,2,\cdots)$.

例 2.1.26. 设 $f(x)=(x-1)^n\cdot x^{2n}\cdot\sin\dfrac{\pi x}{2}$, 求 $f^{(n)}(1)$.

当 $x\to 1$ 时, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^n}=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^{2n}\cdot\sin\dfrac{\pi x}{2}\right)=1$, 将 $f(x)$ 在 $x=1$ 处 *Taylor* 展开, 有

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(1)+f'(1)(x-1)+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+o((x-1)^n)}{(x-1)^n}=1$$

即

$$f(1)=f'(1)=\cdots=f^{(n-1)}(1)=0,\ \frac{f^{(n)}(1)}{n!}=1$$

故 $f^{(n)}(1)=n!$.

例 2.1.27. 设 $y=\arctan x$, 求 $y^{(n)}(0)$.

法一: 因为

$$\arctan x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_0^x\left[1-t^2+t^4-\cdots+(-1)^n t^{2n}\right]\mathrm{d}t=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\ (-1<x<1)$$

所以由幂级数展开式的唯一性, 得

$$y^{(2n)}(0)=0,\ y^{(2n+1)}(0)=(2n+1)!\frac{(-1)^n}{2n+1}=(-1)^n(2n)!$$

法二: 由 $y=\arctan x$, 则 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$, 即 $y'(1+x^2)=1$, 等式两端对 x 求 $n+1$ 阶导数, 由 *Leibniz* 公式得

$$\left(1+x^2\right)y^{(n+2)}+(n+1)y^{(n+1)}\left(1+x^2\right)'+\frac{n(n+1)}{2!}y^{(n)}\left(1+x^2\right)''=0$$

于是得 $\left(1+x^2\right)y^{(n+2)}+2(n+1)xy^{(n+1)}+n(n+1)y^{(n)}=0$, 令 $x=0$, 得

$$y^{(n+2)}(0)=-n(n+1)y^{(n)}(0)$$

又 $y'(0)=1, y''(0)=0$, 故 $y^{(2m)}(0)=0, y^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m)$.
法三: 转化为 $x=\tan y$, 于是

$$y'=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\cos^2 y=\cos y\cdot\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$$

两边关于 x 求导, 得

$$\begin{aligned}y''&=-\sin y\cdot y'\cdot\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+\cos y\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot y'=y'\cdot\left[-\sin y\cdot\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+\cos y\cdot\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]\\&=y'\cos\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)=\cos^2 y\cdot\sin\left(2y+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\cos^2 y\cdot\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

由数学归纳法可证得

$$y^{(n)}=(n-1)!\cdot\cos^n y\cdot\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$$

当 $x=0$ 时 $y=0$, 于是

$$y^{(n)}(0)=(n-1)!\cdot\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2m\\(-1)^m(2m)!, & n=2m+1\end{cases}\ 其中\ m=0,1,\cdots.$$

法四: 由 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\dfrac{1}{x-\mathrm{i}}-\dfrac{1}{x+\mathrm{i}}\right), x\pm\mathrm{i}=re^{\pm\mathrm{i}\theta}$, 其中 $r=\sqrt{1+x^2},\theta=\operatorname{arccot}x$, 所以

$$\begin{aligned}y^{(n+1)}&=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x+\mathrm{i}}\right)^{(n)}\right]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-\mathrm{i})^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+\mathrm{i})^{n+1}}\right]\\&=\frac{(-1)^n n!}{2\mathrm{i}\,(1+x^2)^{n+1}}\cdot\left[(x+\mathrm{i})^{n+1}-(x-\mathrm{i})^{n+1}\right]=\frac{(-1)^n n!}{2\mathrm{i}\,(1+x^2)^{n+1}}\cdot\left[r^{n+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}-r^{n+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)\theta}\right]\\&=\frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{n+1}}r^{n+1}\sin(n+1)\theta=\frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin\left[(n+1)\cdot\operatorname{arccot}x\right]\end{aligned}$$

于是 $y'(0)=1,\ y(n+1)(0)=(-1)^n n!\sin\dfrac{(n+1)}{2}\pi,\ n=1,2,\ldots$, 故当 $n=2m$ 时,

$$y^{(2m+1)}(0)=(-1)^{2m}(2m)!\sin\frac{2m+1}{2}\pi=(-1)^m(2m)!$$

当 $n=2m-1$ 时, $y^{(2m)}(0)=0$.

例 2.1.28. 设 $f(x)=x^{2021}\mathrm{e}^{2020x}\sin x$, 求 $f^{(2023)}(0)$.

法一: 令 $h(x)=x^{2021},\ g(x)=\mathrm{e}^{2020x}\sin x$, 根据 *Leibniz* 求导公式,

$$\begin{aligned}f^{(2023)}(x)&=\sum_{k=0}^{2023}\mathrm{C}_{2023}^{k}h^{(2023-k)}(x)g^{(k)}(x)=\sum_{k=0}^{2023}\mathrm{C}_{2023}^{k}\left(x^{2021}\right)^{(2023-k)}\left(\mathrm{e}^{2020x}\sin x\right)^{(k)}\\&=\sum_{k=0}^{2023}\mathrm{C}_{2023}^{k}\left(x^{2021}\right)^{(2023-k)}\left[\sum_{m=0}^{k}\mathrm{C}_{k}^{m}\left(\mathrm{e}^{2020x}\right)^{(m-k)}\sin^{(m)}x\right]\\&=\sum_{k=0}^{2023}\mathrm{C}_{2023}^{k}\frac{2021!}{(k-2)!}x^{k-2}\left[\sum_{m=0}^{k}\mathrm{C}_{k}^{m}(2020)^{k-m}\mathrm{e}^{2020x}\sin\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

当 $x=0$ 时,

$$f^{(2023)}(0)=\mathrm{C}_{2023}^{2}\frac{2021!}{(2-2)!}\left[\sum_{m=0}^{2}\mathrm{C}_{2}^{m}(2020)^{2-m}\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right]=\frac{2023!}{2!\cdot 2021!}2021!\cdot 2!\cdot 2020=2020\cdot 2023!.$$

法二: 利用 *Taylor* 公式的唯一性,

$$f(x)=x^{2021}\mathrm{e}^{2020x}\sin x=x^{2021}\left(1+2020x+1010x^2+o(x^2)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)=x^{2022}+2020x^{2023}+o(x^{2023})$$

故 $f^{(2023)}(0)=2020\cdot 2023!$.

2.2 函数的可导性

函数的可导性是指函数在某一点处存在导数 (或导数存在), 即该点处函数的斜率存在. 可导性是微积分中一个重要的概念, 它在研究函数的变化率、极值、凹凸性等方面起着关键作用.

2.2.1 含绝对值函数的可导性

$|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 点的可导性

定理 2.2.1 (含绝对值函数的可导性). $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 点的可导性的四种情况:

(1) 当 $f(x_0)>0$, 时 $y=|f(x)|$ 在 x_0 处可导, 且 $y'\big|_{x=x_0}=f'(x_0)$.

(2) 当 $f(x_0)<0$, 时 $y=|f(x)|$ 在 x_0 处可导, 且 $y'\big|_{x=x_0}=-f'(x_0)$.

(3) 当 $f(x_0)=0$ 但 $f'(x_0)\neq 0$ 时, $y=|f(x)|$ 在 x_0 处不可导.

(4) 当 $f(x_0)=0$ 且 $f'(x_0)\neq 0$ 时, $y=|f(x)|$ 在 x_0 处可导, 且 $y'\big|_{x=x_0}=0$.

证 *(1)* 与 *(2)* 只需证明其中一个, *(3)* 与 *(4)* 也只需证明其中一个.
(1) 因 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则 $f(x_0)$ 在 x_0 处连续, 又 $f(x_0)>0$, 由保号性可知, 存在 x_0 点的 δ 邻域 $U(x_0,\delta)$, 当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时, $y=|f(x)|=f(x)$, 故 $y'\big|_{x=x_0}=f'(x_0)$, 同理可证 *(2)*.
(3) $y'_{\pm}(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}}\dfrac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}}\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=\pm|f'(x_0)|$, 因 $|f(x_0)|\neq 0$, 所以 $y'_{-}(x_0)\neq y'_{+}(x_0)$, 故 $y=|f(x)|$ 在 x_0, 处不可导, 同理可证 *(4)*.

例 2.2.1 (2000 数三). 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是

A. $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　B. $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$

C. $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$　　D. $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

由定理 *2.2.1* 知, 选 *B*.

例 2.2.2. 求 $y=\left|x^2-1\right|$ 的导数.

令 $f(x)=x^2-1$, 当 $|x|>1$ 时, $y=|f(x)|=f(x)=x^2-1$, 那么 $y'=f'(x)=2x$; 当 $|x|<1$ 时, $y=|f(x)|=-f(x)=1-x^2$, 那么 $y'=-f'(x)=-2x$; 当 $x=\pm 1$ 时, 因 $f(\pm 1)=0$, 但 $f'(\pm 1)\neq 0$, 故 $y=|f(x)|$ 在 $x=\pm 1$ 处不可导, 综上 $y'=\begin{cases}2x, & |x|>1\\ -2x, & |x|<1.\end{cases}$

$f(x)|g(x)|$ 在 $x=x_0$ 点的可导性

定理 2.2.2. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, $|g(x)|$ 在 x_0 出连续但不可导, 则 $\varphi(x)=f(x)|g(x)|$ 在 x_0 处可导的充要条件是 $f(x_0)=0$, 且当 $\varphi(x)$ 在 x_0 处可导时, 有 $\varphi'(x_0)=f'(x_0)|g(x_0)|$, 并且称 $f(x)$ 是 $|g(x)|$ 在 $x=x_0$ 点的磨光函数.

证 充分性: 当 $f(x_0)=0$ 时,

$$\varphi'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}|g(x_0)|=f'(x_0)|g(x_0)|$$

必要性: 用反证法, 反设 $f(x_0)\neq 0$, 则由 $\varphi(x),f(x)$ 在 x_0 点皆可导, 可得 $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}=|g(x)|$ 在 x_0 可导, 与条件矛盾, 所以当 $\varphi(x)$ 在 x_0 可导时必有 $f(x_0)=0$.

例 2.2.3 (1995 数一). 设 $f(x)$ 可导, $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$, 则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 可导的

A. 充分必要条件　　B. 充分但非必要条件

C. 必要但非充分条件　　D. 即非充分也非必要条件

易知, $1+|\sin x|$ 在 $x=0$ 处连续但不可导, 由定理 *2.2.2* 知, $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 可导的充分必要条件, 选 *A*.

例 2.2.4 (1998 数二). 函数 $F(x)=\left(x^2-x-2\right)\left|x^3-x\right|$ 不可导点的个数是

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

由 $|x^3-x|$ 知不可导点为 $x=0,x=\pm1$, 但 $f(x)=x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ 处处可导, 且 $f(-1)=0$, 则 $F(-1)$ 可导, 但 $f(0)\neq 0, f(1)\neq 0$, 故 $F(x)$ 在 $x=0,1$ 处不可导, 因此不可导点的个数是 2, 选 B.

定理 2.2.3. 设 $f(x)=(x-a)^n|x-a|\ \ n\in\mathbb{Z}^+$, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 点的各阶导数

$$f^{(k)}(a)=\begin{cases}0, & k\leqslant n\\ \text{不存在}, & k>n.\end{cases}$$

证 由 $f(x)=\begin{cases}-(x-a)^{n+1}, & x\leqslant a\\ (x-a)^{n+1}, & x>a\end{cases}$ 得 $f^{(n)}(a)=\begin{cases}-(n+1)!(x-a), & x\leqslant a\\ (n+1)!(x-a), & x>a\end{cases}$, 但 $f_-^{(n+1)}(a)=-(n+1)!\neq f_+^{(n+1)}(a)=(n+1)!$, 故 $f^{(n+1)}(a)$ 不存在.

例 2.2.5 (1992 数一). 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$, 则 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数为

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, 其中 $f_1(x)=3x^3$ 在 $x=0$ 任意阶可导, 但 $f_2(x)=x^2|x|$ 在 $x=0$ 点之多只有二阶导数, 故选 C.

2.2.2 分段函数的可导性

定理 2.2.4. 设分段函数 $f(x)=\begin{cases}g(x), & x<x_0\\ A, & x=x_0\\ h(x), & x>x_0\end{cases}$ 如果函数 $f(x)$ 满足: (1) 在点 x_0 处连续; (2) 在点 x_0 的某空心邻域内可导; (3) $\lim\limits_{x\to x_0^-}g'(x)=B$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}h'(x)=C$. 则 $f'_-(x_0)=B$, $f'_+(x_0)=C$.

例 2.2.6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}(\mathrm{e}^x-1), & x\leqslant 0\\ x\arctan\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ 讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的可导性, 并求导函数 $f'(x)$.

显然函数 $f(x)$ 在分段点 $x=0$ 连续,

$$g'(x)=\left(\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^x-1)\right)'=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^x,\ h'(x)=\left(x\arctan\frac{1}{x}\right)'=\arctan\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$$

于是有 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}g'(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\pi}{2}\mathrm{e}^x=\dfrac{\pi}{2}$, $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}h'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\arctan\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1+x^2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$, 从而函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导且 $f'(0)=\dfrac{\pi}{2}$, 所以 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\mathrm{e}^x, & x\leqslant 0\\ \arctan\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1+x^2}, & x>0.\end{cases}$

2.3 微分中值定理

微分中值定理是微积分中的一个重要定理, 它描述了函数在某一区间内的平均变化率与某一点处的瞬时变化率之间的关系.

2.3.1 四大基本定理

引理 2.3.1 (Fermat 引理). 函数 $f(x)$ 在点 $x=\xi$ 的某邻域 $U(\xi)$ 内有定义, 并且在 ξ 处可导, 如果对于任意的 $x\in U(\xi)$, 都有 $f(x)\geqslant f(\xi)$ 或 $f(x)\geqslant f(\xi)$, 那么 $f'(\xi)=0$.

定理 2.3.1 (Rolle 定理). 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(b)=f(a)$, 则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

例 2.3.1. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导, 且 $f(x)>0$, $0<a<1$, 证明存在 $\xi\in\left(a,\dfrac{1}{a}\right)$, 使得

$$\frac{\xi f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{\xi^{-1}f'(\xi^{-1})}{f(\xi^{-1})}.$$

证 将要证的等式化中的 ξ 换成 x, 并两边关于 x 积分得

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{f'(x^{-1})}{f(x^{-1})}\mathrm{d}x^{-1}\Rightarrow f(x)f(x^{-1})=C$$

为此构造辅助函数

$$F(x)=f(x)f(x^{-1})$$

于是 $f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$, 故由 *Rolle* 定理知, $\exists\xi\in(0,1)$, 使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)f(\xi^{-1})-\xi^{-2}f'(\xi^{-1})f(\xi)=0$$

又 $\xi,f(\xi),f(\xi^{-1})\neq0$, 故 $\dfrac{\xi f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{\xi^{-1}f'(\xi^{-1})}{f(\xi^{-1})}$.

定理 2.3.2 (Lagrange 定理). 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$, $\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

例 2.3.2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right]=\frac{1}{2}[f(1)-f(0)].$$

由 *Lagrange* 中值定理知, $\exists\xi_k\in\left(\dfrac{2k-1}{2n},\dfrac{k}{n}\right)$, 使 $f\left(\dfrac{k}{n}\right)-f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)=\dfrac{f'(\xi_k)}{2n}$, 于是

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right]=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k)=\frac{1}{2}\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[f(1)-f(0)].$$

定理 2.3.3 (Cauchy 定理). 若 $F(x),G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, $G'(x)\neq0$, 则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}.$$

例 2.3.3. 设 $0<a<b$, 证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $a\mathrm{e}^b-b\mathrm{e}^a=(1-\xi)\mathrm{e}^{\xi}(a-b)$.

证 将要证的等式化为 $\dfrac{\frac{\mathrm{e}^b}{b}-\frac{\mathrm{e}^a}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=(1-\xi)\mathrm{e}^{\xi}$, 令 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$, 则 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $\forall x\in(a,b)$, $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$, 故由 *Cauchy* 定理知, $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=(1-\xi)\mathrm{e}^{\xi}$$

化简得 $a\mathrm{e}^b-b\mathrm{e}^a=(1-\xi)\mathrm{e}^{\xi}(a-b)$.

定理 2.3.4 (Darboux 定理). 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处可导 (端点指单侧导数), $f'(a)<f'(b)$ 或 $f'(a)>f'(b)$, 则 $\forall\mu: f'(a)<\mu<f'(b)$, 或 $f'(a)>\mu>f'(b)$, $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=\mu$.

2.3.2 单中值问题

辅助函数的构造

常用的辅助函数构造, 本质为解微分方程.

表 2.1

原函数	辅助函数	原函数	辅助函数
(1) $\xi f'(\xi)+nf(\xi)=0$	$F(x)=x^n f(x)$	(2) $\xi f'(\xi)-nf(\xi)=0$	$F(x)=x^{-n}f(x)$
(3) $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$	$F(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}f(x)$	(4) $\alpha f'(\xi)+\beta f(\xi)=0$	$F(x)=\mathrm{e}^{\frac{\beta}{\alpha}x}f(x)$
(5) $f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$	$F(x)=\mathrm{e}^{g(x)}f(x)$	(6) $f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0$	$F(x)=\mathrm{e}^{\int g(x)}f(x)$
(7) $f'(x)-\lambda(f(x)-x)=1$	$F(x)=(f(x)-x)\mathrm{e}^{-\lambda x}$	(8) $f'(x)-\alpha(f(x)-f(a))=0$	$F(x)=(f(x)-f(a))\mathrm{e}^{-\alpha x}$
(9) $f''(x)+f(x)=0$	$F(x)=f^2(x)+[f'(x)]^2$	(10) $f''(x)-f(x)=0$	$F(x)=\mathrm{e}^x(f'(x)-f(x))$

证 关于如何解微分方程可参考阅读第八章.

(1) 将原函数改写为 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ny=0$, 该方程是变量分离方程, 即

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{\mathrm{d}y}{ny}\Rightarrow\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{1}{n}\int\frac{\mathrm{d}y}{y}\Rightarrow\ln x^n+\ln y=C\Rightarrow x^n y=C$$

将 C 改写为 $F(x)$, 即得辅助函数 $F(x)=x^n f(x)$.

(2) 同 *(1)* 易得 $\dfrac{y}{x^n}=C$, 因此辅助函数为 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x^n}$.

(3) 将原函数改写为 $y'+\lambda y=0$, 有通解 $y=C\mathrm{e}^{-\lambda x}$, 即 $C=y\mathrm{e}^{\lambda x}$, 将 C 改写为 $F(x)$, 即得辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}f(x)$.

(4) 同 *(2)* 得通解 $y=C\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{\alpha}x}$, 即 $C=y\mathrm{e}^{\frac{\beta}{\alpha}x}$, 因此有辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^{\frac{\beta}{\alpha}x}f(x)$.

(5) 将原函数改写为 $y'+g'(x)y=0$, 该方程为一阶常系数线性微分方程, 有通解 $y=C\mathrm{e}^{-\int g'(x)\mathrm{d}x}$, 即 $C=y\mathrm{e}^{g(x)}$, 因此有辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^{g(x)}f(x)$.

(6) 同 *(5)* 易得辅助函数为 $F(x)=\mathrm{e}^{\int g(x)}f(x)$.

(7) 将原函数改写为 $y'-\lambda(y-x)=1\Rightarrow y'-\lambda y=1-\lambda x$, 该方程为一阶常系数线性微分方程, 有通解为

$$y=\mathrm{e}^{\int\lambda\mathrm{d}x}\left[\int(1-\lambda x)\mathrm{e}^{-\int\lambda\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=x+C\mathrm{e}^{\lambda x}$$

即 $C=(y-x)\mathrm{e}^{-\lambda x}$, 因此辅助函数为 $F(x)=(f(x)-x)\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

(8) 同 *(7)* 原函数为 $y'-\alpha f(x)=-\alpha f(a)$, 有通解为

$$y=\mathrm{e}^{\alpha\int\mathrm{d}x}\left[-\alpha f(a)\int\mathrm{e}^{-\alpha\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=f(a)+C\mathrm{e}^{\alpha x}$$

即 $C=(y-f(a))\mathrm{e}^{-\alpha x}$, 因此辅助函数为 $F(x)=(f(x)-f(a))\mathrm{e}^{-\alpha x}$.

(9) 将原函数改写为 $y''+y=0$, 等式两边同时乘以 $2y'$, 有 $2y'y''+2yy'=0\Rightarrow\left[(y')^2+y^2\right]'=C$, 因此辅助函数为 $F(x)=f^2(x)+[f'(x)]^2$.

(10) 将原函数改写为 $y''-y=0$ 并令 $\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, 于是有 $(\mathrm{D}^2-1)y=(\mathrm{D}+1)(\mathrm{D}-1)y=0$, 令 $(\mathrm{D}-1)y=z$, 则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+z=0\Rightarrow z=C\mathrm{e}^{-x}\Rightarrow C=(\mathrm{D}-1)y\mathrm{e}^x$$

将 C 改写为 $F(x)$, 即得辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^x(f'(x)-f(x))$.

例 2.3.4. 设函数 $f(x), g(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

证 将要证的等式化中的 ξ 换成 x, 有 $f'(x)+f(x)g'(x)=0$, 化为 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}-g'(x)$, 然后两边关于 x 积分, 得

$$\ln|f(x)| = -g(x)+C \Rightarrow f(x)=C\mathrm{e}^{-g(x)} \Rightarrow f(x)\mathrm{e}^{g(x)}=C$$

为此构造辅助函数

$$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{g(x)}$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 故由 *Rolle* 定理知, $\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$F'(\xi)=(f'(\xi)+f(\xi)\cdot g'(\xi))\mathrm{e}^{g(\xi)}=0$$

而 $\mathrm{e}^{g(x)}>0$, 故 $f'(\xi)+f(\xi)\cdot g'(\xi)=0$.

例 2.3.5. 设函数 $f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$, $f(0)=0$, 且 $\forall x\in(0,1)$, 都有 $f(x)\neq 0$, 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $\dfrac{nf'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$, 其中 n 为自然数.

证 将要证的等式化中的 ξ 换成 x, 并两边关于 x 积分得

$$n\ln|f(x)| = -\ln|f(1-x)|+C \Rightarrow f^n(x)\cdot f(1-x)=C$$

为此构造辅助函数

$$F(x)=f^n(x)\cdot f(1-x)$$

那么 $f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$, $F(0)=F(1)$, 故有 *Rolle* 定理知,

$$\exists \xi\in(0,1),\ 使得\ F'(\xi)=nf^{n-1}(\xi)f'(\xi)f(1-\xi)-f^n(\xi)f'(1-\xi)=0$$

又 $f(\xi), f(1-\xi)\neq 0$, 故有 $nf'(\xi)f(1-\xi)-f(\xi)f'(1-\xi)=0$, 即 $\dfrac{nf'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

推论 2.3.1. 设函数 $f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$, $f(0)=0$, 且 $\forall x\in(0,1)$, 都有 $f(x)\neq 0$, 则由至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$\frac{mf'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{nf'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

其中 m,n 为自然数.

例 2.3.6. 设 $f(x)\in C\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\cap D\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(0)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$, 证明: $\exists\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$f'(\xi)+f(\xi)=\cos\xi.$$

证 构造辅助函数[1] $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)-\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}\cdot(\sin x+\cos x)$, 则

$$F(0)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

由 *Rolle* 定理知, $\exists\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$F'(\xi)=\mathrm{e}^{\xi}\left[f'(\xi)+f(\xi)-\cos\xi\right]=0$$

又 $\mathrm{e}^{\xi}>0$, 因此 $f'(\xi)+f(\xi)=\cos\xi$.

---

[1]解一阶线性微分方程

$$y=\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\left[\int\cos x\cdot\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-x}\left[\int\cos x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)+C\mathrm{e}^{-x}$$

其中 $\displaystyle\int\cos x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{\begin{vmatrix}(\mathrm{e}^x)' & (\cos x)'\\ \mathrm{e}^x & \cos x\end{vmatrix}}{2}+C=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)+C.$

例 2.3.7 (第十届“景润杯”). 设 $f(x),g(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$, 且满足

$$2b>3a,\ a+b>0,\ f(a)=0,\ f\left(\frac{2a+2b}{5}\right)+f\left(\frac{3a+3b}{5}\right)=0$$

证明存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

证 令 $h(x)=f(x)\mathrm{e}^{g(x)}$, 由题意可得 $\dfrac{2a+3b}{5},\dfrac{3a+3b}{5}\in(a,b)$, 由 $f\left(\dfrac{2a+2b}{5}\right)+f\left(\dfrac{3a+3b}{5}\right)=0$, 可得

$$f\left(\frac{2a+2b}{5}\right)\cdot f\left(\frac{3a+3b}{5}\right)<0 \text{ 或 } f\left(\frac{2a+2b}{5}\right)=f\left(\frac{3a+3b}{5}\right)=0$$

若 $f\left(\dfrac{2a+2b}{5}\right)\cdot f\left(\dfrac{3a+3b}{5}\right)<0$, 则由零点定理知, $\exists\eta\in\left(\dfrac{2a+2b}{5},\dfrac{3a+3b}{5}\right)$, 使得 $f(\eta)=0$; 若 $f\left(\dfrac{2a+2b}{5}\right)=f\left(\dfrac{3a+3b}{5}\right)=0$, 则取 $\eta=\dfrac{2a+2b}{5}$, 那么 $f(\eta)=0$, 显然 $[a,\eta]\subset[a,b]$, 且 $h(x)$ 在 $[a,\eta]$ 上满足 *Rolle* 定理的条件, 则 $\exists\xi\in(a,\eta)\subset(a,b)$, 使得 $h'(\xi)=0$, 而 $h'(\xi)=\mathrm{e}^{g(\xi)}[f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)]=0$, 因 $\mathrm{e}^{g(\xi)}\neq0$, 故 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

常数 k 值法

一般用于端点函数值不确定的情况下, 即题目中没有说明 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的值, 此时令带有中值的函数 $\varphi(\xi)=k$, 再将待证式中的一端点 b (或者 a) 改写为 x 即得辅助函数.

例 2.3.8. 设 $0<a<b$, 函数 $f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$, 证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

证法一 将要证式化为 $\dfrac{f(b)-f(a)}{\xi}=f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$, 即需证明 $[(f(b)-f(a))\ln x]'_{x=\xi}=\left[f(x)\ln\dfrac{b}{a}\right]'_{x=\xi}$, 为此, 作辅助函数

$$F(x)=(f(b)-f(a))\ln x-f(x)\ln\frac{b}{a}$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $F(b)=F(a)$, 故由 *Rolle* 定理知, $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$F'(\xi)=(f(b)-f(a))\frac{1}{\xi}-f'(\xi)\ln\frac{b}{a}=0$$

即 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$.

证法二 将要证式化为 $\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\xi f'(\xi)$, 令 $\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=k$, 则 $f(b)-k\ln b=f(a)-k\ln a$, 此时只需证 $k=\xi f'(\xi)$, 为此, 作辅助函数

$$F(x)=f(x)-k\ln x$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $F(b)=F(a)$, 故由 *Rolle* 定理知, $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{k}{\xi}=0$$

即得 $k=\xi f'(\xi)$, 从而得 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$.

证法三 要证 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$, 只需设 k 为使等式 $f(b)-f(a)=k\cdot\ln\dfrac{b}{a}$ 成立的待定常数, 再证明 $k=\xi f'(\xi)$ 即可, 为此, 将等式中的 b 改写为 x, 并移项, 构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-k\ln\frac{x}{a}$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $F(b)=0=F(a)$, 于是由 *Rolle* 定理知, $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{k}{\xi}=0$$

即得 $k=\xi f'(\xi)$, 从而得证.

证法四 将要证的等式化为 $\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\dfrac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$, 易见, 设 $g(x)=\ln x$, 则 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $\forall x\in(a,b), g'(x)=\dfrac{1}{x}\neq 0$, 故由 *Cauchy* 中值定理知, $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

即 $\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, 化简得 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$.

证法二又称为第一类常数 k 值法, 主要适用于常数部分可以分离的微积分中值等式证明题; 证法三则称为第二类常数 k 值法, 适用面更广.

推论 2.3.2. 设函数 $f(x),g(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$, 且 $g'(x)\neq 0$, 又 $g(x)>0, a\leqslant x\leqslant b$, 则存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$g'(\xi)\left[f(b)-f(a)\right]=g(\xi)f'(\xi)\ln\frac{g(b)}{g(a)}.$$

证 因为 $f(x),g(x)$ 皆在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $g'(x)\neq 0$, 又 $g(x)>0, a\leqslant x\leqslant b$, 所以由 *Cauchy* 定理知 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{\ln g(b)-\ln g(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{g'(\xi)}{g(\xi)f'(\xi)}$$

整理即得待证式.

例 2.3.9. 设 $0<a<b$, 函数 $f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$, 证明 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

证法一 要证 $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$, 只需证

$$\left[x^2\cdot(f(b)-f(a))\right]'_{x=\xi}=\left[(b^2-a^2)f(x)\right]'_{x=\xi}$$

为此, 构造辅助函数 $F(x)=x^2\cdot(f(b)-f(a))-(b^2-a^2)f(x)$, 那么 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $F(a)=F(b)$, 故由 *Rolle* 定理知, $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$F'(\xi)=2\xi(f(b)-f(a))-(b^2-a^2)f'(\xi)=0$$

即 $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$.

证法二 将要证的等式化为 $2\xi\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=f'(\xi)$, 令 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=k$, 则 $f(b)-kb^2=f(a)-ka^2$, 为此, 构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-kx^2$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $F(a)=F(b)$, 故由 *Rolle* 定理知, $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)-2k\xi=0$$

即 $f'(\xi)=2k\xi$, 因而在 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=k$ 的两边同时乘以 $2\xi(b^2-a^2)$, 即得待证等式.

证法三 将要证的等式化为 $f(b)-f(a)=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}(b^2-a^2)$, 设 k 为使 $f(b)-f(a)=k(b^2-a^2)$ 成立的实常数, 则只需证 $k=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$, 为此构造辅助函数:

$$F(x)=f(x)-f(a)-k(x^2-a^2)$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $F(a)=F(b)$, 故由 *Rolle* 定理知, $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)-2k\xi=0$$

即得 $f'(\xi)=2k\xi$, 又 $0<a<b$, $\xi\in(a,b)$, 所以 $\xi>0$, 于是 $k=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$, 从而得证.

证法四 将要证的等式化为 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}$, 令 $g(x)=x^2$, 则 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $\forall x\in(a,b)$, $g'(x)=2x>0$, 故由 *Cauchy* 定理知, $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

化简得 $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$.

推论 2.3.3. 一般地, 设函数 $f(x), g(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$, 则 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$g'(\xi)(f(b)-f(a)) = (g(b)-g(a))f'(\xi).$$

证 由 *Cauchy* 定理易证.

例 2.3.10. 设函数 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$, 证明 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi} = f'(\xi)$.

证法一 将要证的等式化为 $f(\xi)+\xi f'(\xi)-f(a)-bf'(\xi)=0$, 即只需证 $[xf(x)-f(a)x-bf(x)]'_{x=\xi}$, 为此构造辅助函数

$$F(x) = xf(x)-f(a)x-bf(x)$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $F(a)=-bf(a)=F(b)$, 故由 *Rolle* 定理知, $\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$F'(\xi) = f(\xi)+\xi f'(\xi)-f(a)-bf'(\xi)=0$$

化简即得 $\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi} = f'(\xi)$.

证法二 将要证的等式化中的 ξ 化为 x, 有 $\dfrac{f(x)-f(a)}{b-x} = f'(x) \Rightarrow \dfrac{1}{b-x} = \dfrac{[f(x)-f(a)]'}{f(x)-f(a)}$, 两边关于 x 积分得

$$-\ln(b-x) = \ln|f(x)-f(a)| + \ln C$$

即 $(b-x)(f(x)-f(a)) \equiv C.$, 为此构造辅助函数

$$F(x) = (b-x)(f(x)-f(a))$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $F(a)=0=F(b)$, 故由 *Rolle* 定理知, $\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$F'(\xi) = bf'(\xi)-f(\xi)-\xi f'(\xi)+f(a)=0$$

化简即得 $\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi} = f'(\xi)$.

证法三 将要证的等式化为 $(b-\xi)f'(\xi)-f(\xi) = -f(a) = -\dfrac{(b-a)f(a)}{b-a}$, 为此构造辅助函数

$$F(x) = (b-x)f(x)$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 故由 *Lagrange* 中值定理知, $\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(\xi) = -f(\xi)+(b-\xi)f'(\xi)$$

即得 $f'(\xi) = \dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}$.

证法四 将要证的等式化为 $f(\xi)-f(a)+\xi f'(\xi) = bf'(\xi)$, 即只需证

$$\frac{1}{b} = \frac{f'(\xi)}{f(\xi)-f(a)+\xi f'(\xi)}$$

而 $f(\xi)-f(a)+x\xi f'(\xi) = [xf(x)-f(a)x]'_{x=\xi}$, 为此构造辅助函数

$$F(x) = x(f(x)-f(a))$$

则 $f(x), F(x)$ 在 $[a,b]$ 满足 *Cauchy* 中值定理的条件, 于是 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

化简即得 $\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi} = f'(\xi)$.

推论 2.3.4. 设函数 $f(x), g(x) \in C[0,1] \cap D(0,1)$, 且对任意的 $x \in (a,b)$, 有 $g'(x) \neq 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证 要证 $\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, 只需证 $(g(\xi)-g(b))f'(\xi)+(f(\xi)-f(a))g'(\xi)=0$, 即证

$$(g(x)f(x)-g(b)f(x)-f(a)g(x))'_{x=\xi}=0$$

为此构造辅助函数 $F(x)=(f(x)-f(a))(g(x)-g(b))$ 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, $F(a)=F(b)$ 故由 *Rolle* 定理知, $\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$F'(\xi) = f'(\xi)(g(\xi)-g(b))g'(\xi)(f(\xi)-f(a))=0$$

即得 $\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

2.3.3 双中值问题

证明含有两个中值 (可相等) 微分等式的常见方法有:

(1) 使用两次 Lagrange 中值定理;

(2) 使用两次 Cauchy 中值定理;

(3) 使用两次 Taylor 中值定理;

(4) 使用 Rolle 定理、Lagrange 中值定理及 Cauchy 中值定理中的任两个定理各一次.

对于含有三个中值微分等式的证明题, 其证明方法可以类似地推广得到. 如果两个中值不相等, 那么可对**区间进行划分**, 在各自的子区间运用中值定理.

区间无需划分

例 2.3.11. 设函数 $f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$, 且 $f(a)=f(b)=1$, 证明存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得

$$\mathrm{e}^{\eta-\xi}[f(\eta)-f'(\eta)]=1.$$

证法一 将要证明的等式中含 ξ 和 η 的项分别放到等式的两侧, 化为

$$\mathrm{e}^{\eta}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=\mathrm{e}^{\xi}$$

即只需证 $[\mathrm{e}f(x)]'_{x=\eta}=(\mathrm{e}^{x})'_{x=\xi}$, 而由 *Lagrange* 中值定理知,

$$\frac{\mathrm{e}^{b}-\mathrm{e}^{a}}{b-a}=(\mathrm{e}^{x})'_{x=\xi},\ \frac{\mathrm{e}^{b}f(b)-\mathrm{e}^{a}f(a)}{b-a}=[\mathrm{e}f(x)]'_{x=\eta}$$

且 $f(a)=f(b)=1$ 知 $\dfrac{\mathrm{e}^{b}-\mathrm{e}^{a}}{b-a}=\dfrac{\mathrm{e}^{b}f(b)-\mathrm{e}^{a}f(a)}{b-a}$, 故可令

$$F(x)=\mathrm{e}^{x}f(x),\ G(x)=\mathrm{e}^{x}$$

则 $F(x),G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 于是分别对 $F(x)$ 和 $G(x)$ 用 *Lagrange* 中值定理知 $\exists\xi,\eta\in(a,b)$, 使得

$$\frac{\mathrm{e}^{b}-\mathrm{e}^{a}}{b-a}=(\mathrm{e}^{x})'_{x=\xi}=\mathrm{e}^{\xi},\ \frac{\mathrm{e}^{b}f(b)-\mathrm{e}^{a}f(a)}{b-a}=[\mathrm{e}f(x)]'_{x=\eta}=\mathrm{e}^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]$$

又 $f(a)=f(b)=1$, 从而得 $\mathrm{e}^{\eta}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=\mathrm{e}^{\xi}$, 即 $\mathrm{e}^{\eta-\xi}[f(\eta)-f'(\eta)]=1$.

证法二 要证 $\mathrm{e}^{\eta-\xi}[f(\eta)-f'(\eta)]=1$, 即要证 $\mathrm{e}^{\eta-\xi}[f(\eta)-f'(\eta)]-1=0$, 将 η 改写为 x 后, 只需证 $\left[\mathrm{e}^{x-\xi}\cdot f(x)-x\right]'_{x=\eta}=0$, 为此构造辅助函数

$$F(x)=\mathrm{e}^{x-\xi}\cdot f(x)-x$$

即证 $F(x)$ 满足 *Rolle* 定理, 而这需要证明 $F(b)=F(a)$, 即 $\mathrm{e}^{b-\xi}-\mathrm{e}^{a-\xi}=b-a$, 再令 $G(x)=\mathrm{e}^{x}$, 则 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 由 *Lagrange* 中值定理知, $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$G(b)-G(a)=G'(\xi)(b-a)$$

从而得 $F(a)=F(b)$, 故由 *Rolle* 定理知, $\exists\eta\in(a,b)$, 使得 $F'(\eta)=0$, 即 $\mathrm{e}^{\eta-\xi}[f(\eta)-f'(\eta)]=1$.

例 2.3.12. 设 $f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$, 证明: $\exists\xi,\eta\in(0,1)$, 使得

$$\mathrm{e}^{\eta-1}[f(\xi)+\xi f'(\xi)]=\eta f'(\eta)+f(\eta)-\eta f(\eta).$$

证 对 $xf(x)$ 在 $[0,1]$ 上使用 *Lagrange* 中值定理, 有

$$\frac{1\cdot f(1)-0}{1-0}=f(\xi)+\xi f'(\xi)=1,\ \xi\in(0,1)$$

对 $x\mathrm{e}^{-x}f(x)$ 在 $[0,1]$ 上使用 *Lagrange* 中值定理, 有

$$\frac{\mathrm{e}^{-1}f(1)-0}{1-0}=\mathrm{e}^{-\eta}\left[\eta f'(\eta)+f(\eta)-\eta f(\eta)\right]=\mathrm{e}^{-1}f(\eta),\ \eta\in(0,1)$$

两式联立即得证.

例 2.3.13. 设 $0<a<b$, $f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$, $f'(x)\neq 0$, 证明 $\exists\xi,\eta\in(a,b)$, 使得

$$ab\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}=(b-a)\eta^2 f'(\eta).$$

证 令 $g(x)=-\dfrac{1}{x}$, $h(x)=\ln x$, 那么 f,g,h 均在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且满足 *Cauchy* 中值定理的条件, 于是 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}\Rightarrow f(b)-f(a)=\ln\frac{b}{a}\xi f'(\xi)$$

同理 $\exists\eta\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\eta)}{\frac{1}{\eta^2}}\Rightarrow f(b)-f(a)=(b-a)\frac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}$$

故 $\ln\dfrac{b}{a}\xi f'(\xi)=(b-a)\dfrac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}$, 整理得 $ab\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}=(b-a)\eta^2 f'(\eta)$.

例 2.3.14. 设 $a>0$, 函数 $f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$, 且 $f(a)\neq f(b)$, 证明: $\exists\xi,\eta\in(a,b)$, 使得

$$ab(a+b)f'(\xi)=2\xi\eta^2 f'(\eta).$$

证 令 $g(x)=x^2$, $h(x)=\dfrac{1}{x}$, f,g,h 均在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 由 *Cauchy* 中值定理知,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\Rightarrow f(b)-f(a)=\left(b^2-a^2\right)\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$
$$\frac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)}=\frac{f'(\eta)}{h'(\eta)}\Rightarrow f(b)-f(a)=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)f'(\eta)\eta^2$$

故 $\left(b^2-a^2\right)\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}=\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)f'(\eta)\eta^2$, 整理即得 $ab(a+b)f'(\xi)=2\xi\eta^2 f'(\eta)$.

区间需要划分

例 2.3.15. 已知函数 $f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$, 且 $f(0)=0$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$, 证明存在 $\xi,\eta\in(0,1)$, $\xi\neq\eta$, 使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi+\eta$.

证 要证 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi+\eta$, 即证 $f'(\xi)-\xi=\eta-f'(\eta)$, 为此构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$$

那么 $f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$, 那么由 *Lagrange* 中值定理 $\exists\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right),\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 使得

$$F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=\frac{1}{2}F'(\xi)=\frac{f'(\xi)-\xi}{2},\ F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}F'(\eta)=\frac{f'(\eta)-\eta}{2}$$

因为 $F(0)=F(1)=0$, 于是 $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{f'(\xi)-\xi}{2}=-\dfrac{f'(\eta)-\eta}{2}\Rightarrow f'(\xi)+f'(\eta)=\xi+\eta$.

例 2.3.16. 设函数 $f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 证明: $\exists\lambda$, $\mu\in(0,1)$, 且 $\lambda\neq\mu$, 使得

$$f'(\lambda)(f'(\mu)+1)=2.$$

证 令 $F(x)=f(x)-2(1-x)$, 则 $F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $F(0)<0$, $F(1)>0$, 由介值定理知, $\exists x_0\in(0,1)$, 使 $F(x_0)=0$, 即

$$f(x_0)=2(1-x_0)$$

对区间 $[0,x_0]$ 和 $[x_0,1]$, 使用 *Lagrange* 中值定理, 有

$$\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=f'(\lambda),\ \frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=f'(\mu)$$

于是 $f'(\lambda)(f'(\mu)+1)=\dfrac{f(x_0)}{x_0}\left(\dfrac{1-f(x_0)}{1-x_0}+1\right)=2$.

例 2.3.17. 设 $f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$, 且 $f(0)=0,\ f(1)=1$, 证明:

(1) 若 $0<a<1$, 则在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ, 使得 $f(\xi)=a$;

(2) 在 $(0,1)$ 内存在两个不同点 $\xi_1,\ \xi_2$, 使得

$$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{2022}{f'(\xi_2)}=2023.$$

证

(1) 令 $F(x)=f(x)-a$, 那么 $F(0)=-a<0,\ F(1)=1-a>0$, 故由零点定理知, $\exists\xi\in(0,1)$, 使得 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=a$;

(2) 因为 $0<\dfrac{1}{2023}<1$, 那么由 *(1)* 可知, $\exists\xi_0\in(0,1)$, 使得 $f(\xi_0)=\dfrac{1}{2023}$, 于是在区间 $(0,\xi_0)$ 和 $(\xi_0,1)$ 上分别使用 *Lagrange* 中值定理, 有

$$f(\xi_0)-f(0)=\frac{1}{2023}=f'(\xi_1)\xi_0,\ f(1)-f(\xi_0)=1-\frac{1}{2023}=f'(\xi_2)(1-\xi_0)$$

两式消去 ξ_0, 得 $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{2022}{f'(\xi_2)}=2023,\ 0<\xi_1<\xi_0<\xi_2<1$.

推论 2.3.5. 一般地, 设 $f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$, 且 $f(0)=0,\ f(1)=1$, 那么

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

例 2.3.18. 设函数 $f(x)\in C[0,1]\cap D^2(0,1),\ f(0)=f(1)=0,\ f(x)>0$, 证明:

(1) 在 $(0,1)$ 内存在两个不同的 $\xi_1,\ \xi_2$, 使得 $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\min\limits_{0<x<1}\dfrac{1}{f(x)}$;

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{|f''(x)|}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant 4$.

证

(1) 由题设可知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 由最值定理知, $\exists\xi_0\in(0,1)$, 使得 $f(\xi_0)=\max\limits_{0<x<1}f(x)$, 于是在区间 $(0,\xi_0)$ 和 $(\xi_0,1)$ 上分别使用 *Lagrange* 中值定理, 有

$$f(\xi_0)-f(0)=\max_{0<x<1}f(x)=f'(\xi_1)\xi_0,\ f(1)-f(\xi_0)=-\max_{0<x<1}f(x)=f'(\xi_2)(1-\xi_0)$$

即

$$\frac{\xi_0}{f(\xi_0)}=\frac{1}{f'(\xi_1)},\ \frac{1-\xi_0}{f(\xi_0)}=-\frac{1}{f'(\xi_2)},\ 0<\xi_1<\xi_0<\xi_2<1$$

两式相加, 即得证 $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\min\limits_{0<x<1}\dfrac{1}{f(x)}$;

(2) 由 *(1)* 可知,

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{|f''(x)|}{f(x)}\mathrm{d}x&\geqslant\frac{1}{f(\xi_0)}\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{f(\xi_0)}\int_{\xi_1}^{\xi_2}|f''(x)|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{f(\xi_0)}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2}f''(x)\mathrm{d}x\right|\\&=\frac{1}{f(\xi_0)}|f'(\xi_1)-f'(\xi_2)|=\frac{1}{f(\xi_0)}\left|-\frac{f(\xi_0)}{1-\xi_0}-\frac{f(\xi_0)}{\xi_0}\right|=\frac{1}{\xi_0(1-\xi_0)}\geqslant 4\end{aligned}$$

即所证不等式成立.

2.3.4 高阶中值问题

层次分析法

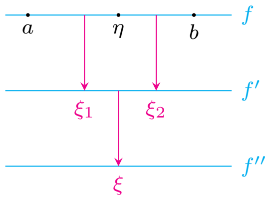


图 2.3.1

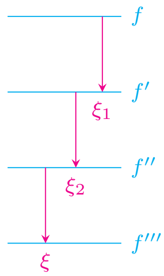


图 2.3.2

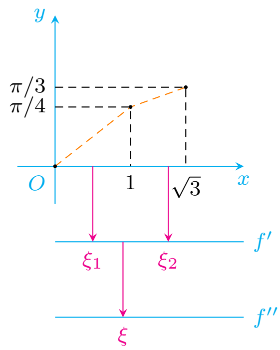


图 2.3.3

例 2.3.19. 设 $f(x) \in C[a,b] \cap D^2(a,b)$, $f(a) = f(b) = 0$, $f'_+(a) > 0$, 证明: $\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $f''(\xi) < 0$.

如图 2.3.1 所示, 因为 $f'_+(a) = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, 且 $f(a) = 0$, 因此 $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{x-a} > 0$, 所以 $\exists \eta \in (a,b)$, 使得 $f(\eta) > 0$, 在 $[a,\eta]$ 和 $[\eta, b]$ 上分别使用 *Lagrange* 中值定理, 有

$$\frac{f(\eta)-f(a)}{\eta - a} = f'(\xi_1) > 0,\ \frac{f(b)-f(\eta)}{b-\eta} = f'(\xi_2) < 0,\ \xi_1 \in (a,\eta), \xi_2 \in (\eta, b)$$

在 $[\xi_1, \xi_2]$ 满足 *Lagrange* 中值定理条件, 故 $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a,b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1} = f''(\xi) < 0.$$

例 2.3.20. 设函数 $f(x) \in C[0,1] \cap D^3(0,1)$, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 又 $F(x) = x^3 f(x)$, 证明存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $F'''(\xi) = 0$.

证法一 如图 2.3.2 所示, 欲使在 f''' 层次有一中值, 则需要在 f'' 层次中寻找一个左右端点皆为 0 值的区间, 同理 f' 层次中也需要寻找两个零点, 由已知 $F(0) = F(1) = 0$ 且 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 故由 *Rolle* 定理知, $\exists \xi_1 \in (0,1)$, 使得 $F'(\xi_1) = 0$, 又

$$F'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x),\ F''(x) = 6x f(x) + 6x^2 f'(x) + x^3 f''(x)$$

所以 $F'(0) = 0$, $F''(0) = 0$, 于是由 *Rolle* 定理知, $\exists \xi_2 \in (0, \xi_1)$, 使得 $F''(\xi_2) = 0$, 再由 $F''(x)$ 在 $[0, \xi_2]$ 上用 *Rolle* 定理知, $\exists \xi \in (0,\xi_2) \subset (0,\xi_1) \subset (0,1)$, 使得 $F'''(\xi) = 0$.

证法二 $F(x) = x^3 f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导, 且 $F(0) = F(1) = 0$, $F'(0) = F''(0) = 0$, 令 $g(x) = x^3$, 则 $g'(x) = 3x^2 > 0$, $g''(x) = 6x > 0$, $\forall x \in (0,1)$, 由 *Cauchy* 中值定理知,

$$\frac{F(1)-F(0)}{g(1)-g(0)} = \frac{F'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}$$

然后分别对 $F'(x)$ 与 $g'(x)$ 在 $[0,\xi_1]$ 和 $F''(x)$ 与 $g''(x)$ 在 $[0,\xi_2]$ 上用 *Cauchy* 中值定理知,

$$0 = \frac{F'(\xi_1)-F'(\xi_1)}{g'(\xi_1)-g'(0)} = \frac{F''(\xi_2)}{g''(\xi_2)} = \frac{F''(\xi_2)-F''(0)}{g''(\xi_2)-g''(0)} = \frac{F'''(\xi)}{g'''(\xi)} = \frac{F'''(\xi)}{6}$$

其中 $\xi_2 \in (0,\xi_1)$, $\xi \in (0,\xi_2) \subset (0,1)$, 故得 $F'''(\xi) = 0$.

例 2.3.21. 设函数 $f(x) \in C[a,b] \cap D^5(a,b)$, 证明: $\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{6}(b-a)\left[f'(a) + f'(b) + 4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(5)}(\xi).$$

证 令 $h=\dfrac{b-a}{2}$, $c=\dfrac{a+b}{2}$, 则待证式等价为

$$f(c+h)=f(c-h)+\frac{h}{3}[f'(c-h)+f'(c+h)+4f'(c)]-\frac{h^5}{90}f^{(5)}(\xi)$$

令 $h=x$, 构造辅助函数

$$\varphi(x)=f(c+x)-f(c-x)-\frac{x}{3}[f'(c-x)+f'(c+x)+4f'(c)]+\frac{x^5}{90}k$$

即证 $k=f^{(5)}(\xi)$, 因为 $f\in C[a,b]\cap D^5(a,b)$, 所以 $\varphi(x)\in C[a,b]\cap D^4(a,b)$, 因此

$$\varphi'(x)=\frac{2}{3}[f'(c+x)+f'(c-x)]-\frac{4}{3}f'(c)+\frac{x}{3}[f''(c-x)-f''(c+x)]+\frac{x^4}{18}k$$

$$\varphi''(x)=\frac{1}{3}[f''(c+x)-f''(c-x)]-\frac{x}{3}[f'''(c-x)+f'''(c+x)]+\frac{2x^3}{9}k$$

$$\varphi'''(x)=\frac{x}{3}\left[f^{(4)}(c-x)-f^{(4)}(c+x)\right]+\frac{2x^2}{3}k$$

因为 $\varphi(0)=\varphi(h)=0$, 由 *Rolle* 定理知, $\exists\xi_1\in(0,h)$, 使得 $\varphi'(\xi_1)=0$, 而 $\varphi'(0)=0$, 所以, 又由 *Rolle* 定理知, $\exists\xi_2\in(0,\xi_1)$, 使得 $\varphi''(\xi_2)=0$, 最后又因为 $\varphi''(0)=0$, 所以 $\exists\xi_3$, 使得

$$\varphi'''(\xi_3)=\frac{\xi_3}{3}\left[f^{(4)}(c-\xi_3)-f^{(4)}(c+\xi_3)\right]+\frac{2\xi_3^2}{3}k$$

又根据 *Lagrange* 中值定理, $\exists\xi_(c-\xi_3,c+\xi_3)\subset(a,b)$, 使得

$$f^{(4)}(c-\xi_3)-f^{(4)}(c+\xi_3)=f^{(5)}(\xi)(-2\xi_3)$$

即 $0=\dfrac{-2\xi_3^2}{3}f^{(5)}(\xi)+\dfrac{2\xi_3^2}{3}k\Rightarrow f^{(5)}(\xi)=k$.

特殊函数作差法

例 2.3.22. 设 $f(x)\in C\left[0,\sqrt{3}\right]\cap D^2\left(0,\sqrt{3}\right)$, 且 $f(0)=0$, $f(1)=\dfrac{\pi}{4}$, $f\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{\pi}{3}$, 证明: $\exists\xi\in(0,\sqrt{3})$, 使得 $f''(\xi)=-\dfrac{2\xi}{1+\xi^2}f'(\xi)$.

证: 如图 *2.3.3* 所示, 欲证在 f'' 层次有一中值, 则需寻找在 f' 层次的两个过渡中值, 那么就需要在 f 层次, 即通过作差的方法将第一象限的两个坐标点, 向下移动到 x 轴, 使得在 x 轴上存在 *3* 个零点, 满足这一性质的可以思考到将 $f(x)$ 与 $\arctan x$ 作差得到, 即令 $g(x)=f(x)-\arctan x$, 则 $g(0)=g(1)=g(\sqrt{3})=0$, 由 *Rolle* 中值定理知 $\exists\xi_1\in(0,1),\exists_2\in(1,\sqrt{3})$, 使 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$, 即

$$(1+\xi_1^2)f'(\xi_1)=(1+\xi_2^2)f'(\xi_2)=1$$

再令 $h(x)=\left(1+x^2\right)f'(x)$, 那么 $h(\xi_1)=h(\xi_2)$, 又由 *Rolle* 中值定理知 $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,\sqrt{3})$, 使 $h'(\xi)=0$, 整理即得待证式.

合理分配法

例 2.3.23. 设 $f(x)\in C\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\cap D\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(0)=0$, 证明: $\exists\xi\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$f''(\xi)=3f'(\xi)\tan\xi+2f(\xi).$$

证 构造辅助函数[2] $F(x)=f(x)\cdot\cos^2 x$, 那么有 $F\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=F(0)=0$, 则由 *Rolle* 定理知, $\exists\xi_1,\xi_2$ 分别属于 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 与 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$, 又

$$F'(x)=f'(x)\cos^2 x-2\sin x\cos x f(x)=\cos x\left[f'(x)\cos x-2\sin x f(x)\right]$$

---

[2]首先观察待证式的各项系数, 发现存在 $1+2=3$ 的情况, 于是利用“合理分配达到平均”思想, 组成

$$f''(\xi)-f'(\xi)\tan\xi=2\left[f'(\xi)\tan\xi+f(\xi)\right]$$

又 $\cos\xi\neq0$, 于是两边同时乘以 $\cos\xi$, 得 $[f''(\xi)\cos\xi-f'(\xi)\sin\xi]-2[f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi]=0$; 发现 [] 内是“前导后不导”形式, 则可化为 $g'(\xi)=(f'(\xi)\cos\xi)'-2(f(\xi)\sin\xi)'=0$, $g(x)=f'(x)\cos x-2f(x)\sin x$; 此为“经典构造模型”之一 (参考表 2.1), 则构造辅助函数

$$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{\int -2\tan x\mathrm{d}x}=f(x)\cdot\cos^2 x.$$

令 $g(x) = f'(x)\cos x - 2\sin x f(x)$, 则有 $g(\xi_1) = g(\xi_2) = 0$, 再由 *Rolle* 定理知, $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$g'(\xi) = 0 = f''(\xi)\cos\xi - 3f(\xi)\sin\xi - 2f(\xi)\cos\xi$$

由于 $\cos\xi \neq 0$, 所以两边同时除以 $\cos\xi$, 即得证.

补充导函数法

一般待证式中, 出现的导函数阶数是连续的, 即 0 与 1 或 1 与 2, 亦或常数与导函数直接相等的类型, 当缺失一阶导函数的时候, 需要人为补充一阶导, 之后再构造辅助函数.

例 2.3.24. 设函数 $f(x) \in C[a,b] \cap D^2(a,b)$, 且 $f(a) = f'(a) = f''(a) = f(b) = 0$, 证明: $\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $(\xi - a)^2 f''(\xi) - 2f(\xi) = 0$.

证 先令[3] $F(x) = (x-a)^2 f'(x) - 2f(x)(x-a)$, 则 $F(a) = 0$, 欲再寻找一点 η, 使得 $F(\eta) = 0$, 为此构造辅助函数

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{(x-a)^2}, & x \in (a,b] \\ 0, & x = a \end{cases}$$

则有 $\lim\limits_{x\to a^+} G(x) = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{(x-a)^2} = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right)}{(x-a)^2} = 0 = G(0)$, 因此 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $G(a) = G(b)$ 则由 *Rolle* 定理知 $\exists \eta \in (a,b)$, 使得

$$G'(\eta) = \frac{f'(\eta)(\eta-a)^2 - 2(\eta-a)f(\eta)}{(\eta-a)^4} = 0 \Rightarrow f'(\eta)(\eta-a)^2 - 2(\eta-a)f(\eta) = 0 \Rightarrow F(\eta) = 0$$

又因为 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 内可导, 故由 *Rolle* 定理知 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$F'(\xi) = 2(\xi-a)f'(\xi) + (\xi-a)^2 f''(\xi) - 2f'(\xi)(\xi-a) - 2f(\xi) = 0$$

整理即得证 $(\xi-a)^2 f''(\xi) - 2f(\xi) = 0$.

2.4 Taylor 展开与差商

定理 2.4.1 (带 Lagrange 余项的 Taylor 展开). 利用 Taylor 公式可得:

$$f(x+j) = f(x) + \frac{f(x)}{1!}j + \frac{f''(x)}{2!}j^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}j^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}j^n$$

其中 $j = 1, 2, \cdots, n-1$, $x < \xi_j < x + j$.

2.4.1 证明中值定理

例 2.4.1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数, 证明: $\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{4}{(b-a)^2}\left[f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] = f''(\xi).$$

证法一 函数 $f(x)$ 在 $x = \dfrac{a+b}{2}$ 处的一阶带 *Lagrange* 余项的 *Taylor* 公式为

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi_1)}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

[3]因为缺少一阶导项, 故考虑人为补充, 又由待证式的结构不难想到 $(gf' - fg')'$ 其中 $g = (x-a)^2$.

其中 ξ_1 位于 x, $\dfrac{a+b}{2}$ 之间, 令 $x=a,b$ 代入上式, 得

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(x_1)}{2}\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(x_2)}{2}\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

其中 $a<x_1<\dfrac{a+b}{2}$, $\dfrac{a+b}{2}<x_2<b$, $x_1<x_2$, 两式相加, 得

$$f(a)+f(b)=2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(x_1)+f''(x_2)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

改写得

$$\frac{4}{(b-a)^2}\left[f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]=\frac{f''(x_1)+f''(x_2)}{2}$$

由于函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数, 所以由最值定理, 可知

$$\min_{x\in[x_1,x_2]}f''(x)\leqslant\frac{f''(x_1)+f''(x_2)}{2}\leqslant\max_{x\in[x_1,x_2]}f''(x)$$

于是由介值定理可知存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{f''(x_1)+f''(x_2)}{2}=f''(\xi)$, 代入即得

$$\frac{4}{(b-a)^2}\left[f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]=f''(\xi).$$

证法二 设 $f(x)-2f\left(\dfrac{x+a}{2}\right)+f(a)=\dfrac{1}{4}K(x-a)^2$, 其中 K 为待定实常数, 记

$$F(x)=f(x)-2f\left(\frac{x+a}{2}\right)+f(a)-\frac{1}{4}K(x-a)^2$$

则 $F(a)=F(b)=0$, 由 *Rolle* 中值定理, $\exists c\in(a,b)$, 使得 $F'(c)=0$, 即

$$f'(c)-f'\left(\frac{c+a}{2}\right)-\frac{1}{2}K(c-a)=0$$

再由 *Lagrange* 中值定理, $\exists\xi\in\left(\dfrac{a+c}{2},c\right)$, 使得

$$f'(c)-f'\left(\frac{c+a}{2}\right)=f''(\xi)\left(c-\frac{c+a}{2}\right)$$

比较得 $f''(c)\left(c-\dfrac{c+a}{2}\right)-\dfrac{1}{2}K(c-a)=0$, 由此得 $f''(\xi)=K$.

例 2.4.2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内二阶可导, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

证法一 注意到

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\left[f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\left[f\left(a+\frac{b-a}{2}\right)-f(a)\right]$$

令 $F(x)=f\left(x+\dfrac{b-a}{2}\right)-f(x)$, $x\in\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$, 则 $F(x)$ 在 $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 上连续, 在 $\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)$ 内二阶可导, 故由 *Lagrange* 中值定理,

$$\exists\xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right),\ 使\ F\left(\frac{a+b}{2}\right)-F(a)=F'(\xi_1)\cdot\frac{b-a}{2}$$

又由 $f'(x)$ 在 $\left[\xi_1,\xi_1+\dfrac{b-a}{2}\right]$ 上用 *Lagrange* 中值定理,

$$\exists\xi\in\left(\xi_1,\xi_1+\frac{b-a}{2}\right)\subset(a,b),\ 使\ f'\left(\xi_1+\frac{b-a}{2}\right)-f'(\xi_1)=f''(\xi)\cdot\frac{b-a}{2}$$

代入上式, 即得 $f(b)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(a)=\dfrac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$.

证法二 将 $f(a), f(b)$ 分别在 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 处进行 *Taylor* 展开，得

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{a-b}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\frac{f''(\xi_1)}{2!}$$
$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\frac{f''(\xi_2)}{2!}$$

其中 $a<\xi_1<\dfrac{a+b}{2}<\xi_2<b$，两式相加，得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}\cdot\left[\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\right]$$

而 $\min(f''(\xi),f''(\xi_2))\leqslant\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\leqslant\max(f''(\xi_1),f''(\xi_2))$，由 *Darboux* 定理知，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$，从而得 $f(b)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(a)=\dfrac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$.

证法三 要证 $f(b)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(a)=\dfrac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$，即证

$$\frac{f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)}{(b-a)^2}=\frac{1}{4}f''(\xi)$$

为此，构造辅助函数 $F(x)=f(x)-2f\left(\dfrac{a+x}{2}\right)+f(a)$，$G(x)=(x-a)^2$，则 $F(x),G(x)$ 满足 *Cauchy* 中值定理的条件，故由 *Cauchy* 中值定理得

$$\frac{F(b)}{G(b)}=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}=\frac{f'(\xi_1)-f'\left(\frac{a+\xi_1}{2}\right)}{2(\xi_1-a)}=\frac{f''(\xi)\cdot\frac{\xi_1-a}{2}}{2(\xi_1-a)}=\frac{1}{4}f''(\xi)$$

其中 $\xi_1\in(a,b),\xi\in\left(\dfrac{a+\xi_1}{2},\xi_1\right)\subset(a,b)$.

证法四 设 k 为使 $f(b)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(a)=\dfrac{(b-a)^2}{4}k$ 成立的实常数，构造辅助函数

$$g(x)=f(x)-2f\left(\frac{a+x}{2}\right)+f(a)-\frac{(x-a)^2}{4}k$$

则 $g(a)=g(b)=0$，于是由 *Rolle* 定理得，存在 $\xi_1\in(a,b)$，使 $g'(\xi_1)=0$，即

$$f'(\xi_1)-f'\left(\frac{a+\xi_1}{2}\right)-\frac{k}{2}(\xi_1-a)=0$$

又 $f'\left(\dfrac{a+\xi_1}{2}\right)=f'(\xi_1)+f''(\xi)\cdot\dfrac{a-\xi_1}{2}$，其中 $\xi\in\left(\dfrac{a+\xi_1}{2},\xi_1\right)\subset(a,b)$，代入前一式，即得 $k=f''(\xi)$.

2.4.2 中值点的极限

例 2.4.3. 设 $f''(x)$ 在某区间 I 上连续，且 $f''(x_0)\neq 0\ (x_0\in I)$，对于 $x_0+h\in I$，由微分中值定理

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h)\ (0<\theta<1)$$

证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$.

证 对 $f'(x)$ 应用 *Lagrange* 日中值定理，有

$$f'(x_0+\theta h)-f'(x_0)=\theta hf''(x_0+\xi\theta)\ (0<\xi<1)$$

于是

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h)=f(x_0)+h\left[f'(x_0)+\theta hf''(x_0+\xi\theta)\right] \tag{1}$$

再根据 *Taylor* 公式有

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{1}{2}h^2f''(x_0+\eta h)\ (0<\eta<1) \tag{2}$$

比较式 *(1)*、*(2)* 得

$$\theta f''(x_0+\xi\theta)=\frac{1}{2}f''(x_0+\eta h)$$

因 $f''(x)$ 在 x_0 点连续, 所以

$$\lim_{h\to 0}\theta f''(x_0+\xi\theta)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}f''(x_0+\eta h)$$

因此有 $f''(x_0)\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}f''(x_0)$, 又因为 $f''(x_0)\neq 0$, 所以 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$.

例 2.4.4. 设 $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)\ (0<\theta<1)$, 且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$, 证明:

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$$

证 由题设知 $f(x)$ 在 $x=a$ 处具有 $n+1$ 阶导数, 故 $f(x)$ 在 a 点处的 n 阶 *Taylor* 展开为

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta_1 h)\ (0<\theta_1<1)$$

与 $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)$ 相比较, 得

$$\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta_1 h)$$

于是

$$f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta_1 h)}{n+1}h$$

由 *Lagrange* 中值定理知,

$$f^{(n+1)}(a+\theta_2(\theta h))\cdot\theta h=f^{(n+1)}(a+\theta_1 h)\cdot\frac{h}{n+1}\ (0<\theta_2<1)$$

令 $h\to 0$, 则 $\theta h,\theta_1 h,\theta_2(\theta h)\to 0$, 并注意到 $f^{(n+1)}(x)$ 连续及 $f^{(n+1)}(a)\neq 0$, 即得 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$.

例 2.4.5. 设函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内有 n 阶连续导数, 且

$$f^{(k)}(x_0)=0,k=2,3,\cdots,n-1,\text{ 且 } f^{(n)}(x_0)\neq 0$$

当 $0<|h|<\delta$ 时,

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h)\ (0<\theta<1)$$

证明: $\lim\limits_{n\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$.

证 由 *Taylor* 公式可得

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n,\ \xi\in(x_0,x_0+h)$$

由题设的条件, 可得

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)h^n \tag{1}$$

又有

$$f(x_0+n)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h),\ 0<\theta<1 \tag{2}$$

由 *(1)*、*(2)* 式可得

$$hf'(x_0+\theta h)=hf'(x_0)+\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)h^n \tag{3}$$

仿式 *(1)* 可得

$$f'(x_0+\theta h)=f'(x_0)+f^1(x_0)(\theta h)+\ldots+\frac{f^{(n)}(\eta)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1},\eta\in(x_0,\ x_0+\theta h) \tag{4}$$

将式 *(4)* 代入式 *(3)*, 注意到 $f^{(k)}(x_0)=0$, 可得

$$\frac{1}{n}f^{(n)}(\xi)=f^{(n)}(\eta)\theta^{n-1}\Rightarrow\lim_{h\to 0}\frac{1}{n}f^{(n)}(\xi)=\lim_{h\to 0}f^{(n)}(\eta)\theta^{n-1}$$

可得

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n}=f^{(n)}(x_0)\left[\lim_{h\to 0}\theta\right]^{n-1}\Rightarrow\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}.$$

2.4.3 无穷远处的极限

例 2.4.6. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有 n 阶导数且满足 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=c$ (c 为常数), $\lim\limits_{x\to\infty} f^{(n)}(x)=0$, 证明: $\lim\limits_{x\to\infty} f^{(k)}(x)=0\,(k=1,2,\cdots,n-1)$.

证 由 *Taylor* 公式可得:

$$f(x+j)=f(x)+\frac{f(x)}{1!}j+\frac{f''(x)}{2!}j^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}j^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}j^n$$

其中 $j=1,2,\cdots,n-1$, $x<\xi_j<x+j$. 从而有

$$f(x+j)-f(x)=f'(x)j+\frac{f''(x)}{2!}j^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}j^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi_j)}{n!}j^n \tag{*}$$

由于 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=c$, $\lim\limits_{x\to\infty} f^{(n)}(x)=0$, $x<\xi_j<x+j$, 可知

$$\lim_{x\to\infty} f(x+j)=c,\ \lim_{x\to\infty} f^{(n)}(\xi_j)=0$$

由式 *(*)* 可得

$$0=\lim_{x\to\infty}[f(x+j)-f(x)]=\lim_{x\to\infty}\left[f'(x)j+\frac{1}{2}f''(x)j^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}j^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi_i)}{n!}j^n\right]$$

令 $j=1$ 得

$$\begin{aligned}0&=\lim_{x\to\infty}\left[f'(x)+\frac{1}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+\frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}\right]\\&=\lim_{x\to\infty}f'(x)+\frac{1}{2!}\lim_{x\to\infty}f''(x)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\lim_{x\to\infty}f^{(n-1)}(x)\end{aligned}$$

相仿可得

$$\begin{aligned}0&=2\lim_{x\to\infty}f'(x)+\frac{2^2}{2!}\lim_{x\to\infty}f''(x)+\cdots+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\lim_{x\to\infty}f^{(n-1)}(x)\\&=3\lim_{x\to\infty}f'(x)+\frac{3^2}{2!}\lim_{x\to\infty}f''(x)+\cdots+\frac{3^{n-1}}{(n-1)!}\lim_{x\to\infty}f^{(n-1)}(x)\\&\cdots\cdots\\&=(n-1)\lim_{x\to\infty}f'(x)+\frac{(n-1)^2}{2!}\lim_{x\to\infty}f''(x)+\cdots+\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}\lim_{x\to\infty}f^{(n-1)}(x)\end{aligned}$$

不妨记 $\lim\limits_{x\to\infty} f^{(k)}(x)=a_k$ 为待定数值, 可得含有 $n-1$ 个未知量, $n-1$ 个方程构成的方程组,

$$\begin{cases}a_1+\dfrac{1}{2!}a_2+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)!}a_{n-1}=0\\2a_1+\dfrac{2^2}{2!}a_2+\cdots+\dfrac{2^{n-1}}{(n-1)!}a_{n-1}=0\\\cdots\cdots\\(n-1)a_1+\dfrac{(n-1)^2}{2!}a_2+\cdots+\dfrac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}a_{n-1}=0\end{cases}$$

系数行列式 D 为, 并将第 i 行提出公因子 i, 第 j 列提出公因子 $\dfrac{1}{j!}$, 转化为 *Vandermonde* 行列式,

$$D=\begin{vmatrix}1&\dfrac{1}{2!}&\cdots&\dfrac{1}{(n-1)!}\\2&\dfrac{2^2}{2!}&\cdots&\dfrac{2^{n-1}}{(n-1)!}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n-1&\dfrac{(n-1)^2}{2!}&\cdots&\dfrac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}\end{vmatrix}=\frac{1\cdot2\cdots(n-1)}{1\cdot2!\cdots(n-1)!}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&2&\cdots&2^{n-2}\\1&3&\cdots&3^{n-2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&n-1&\cdots&(n-1)^{n-2}\end{vmatrix}\neq0$$

可知上述齐次线性方程组仅有零解, 即 $\lim\limits_{x\to\infty} f^{(k)}(x)=a_k=0\,(k=1,2,\cdots,n-1)$.

2.4.4 关于界的估计

例 2.4.7. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有三阶导数, 且 $f(x), f'''(x)$ 有界, 证明: $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 有界.

证 由 *Taylor* 公式可知

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi_1) \tag{1}$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2) \tag{2}$$

其中 $x<\xi_1<x+1,\ x-1<\xi_2<x$, 式 *(1)* + 式 *(2)* 得

$$f(x+1)+f(x-1)=2f(x)+f''(x)+\frac{1}{6}\left[f'''(\xi_1)-f'''(\xi_2)\right]$$

由 $f(x)$ 与 $f'''(x)$ 有界, 可知 $f''(x)$ 有界, 式 *(1)* − 式 *(2)* 得

$$f(x+1)-f(x-1)=2f'(x)+\frac{1}{6}\left[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\right]$$

同理可知 $f'(x)$ 有界.

例 2.4.8. 已知 $f(x)\in C[0,2]\cap D^2(0,2)$, $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 2}\{|f(x)|,|f''(x)|\}\leqslant 1$ 证明: $\forall x\in[0,2]$, 有 $|f'(x)|\leqslant 2$.

证 由 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 2}\{|f(x)|,|f''(x)|\}\leqslant 1$ 知, $|f(x)|\leqslant 1$, $|f''(x)|\leqslant 1$, 对 $f(0)$ 和 $f(2)$ *Taylor* 展开, 有

$$\begin{cases} f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\dfrac{1}{2!}f''(\xi_1)x^2 \\ f(2)=f(x)+f'(x)(2-x)+\dfrac{1}{2!}f''(\xi_2)(2-x)^2 \end{cases}$$

作差得 $f(0)-f(2)=-2f'(x)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-2)^2$, 即

$$|2f'(x)|=\left|f(2)-f(0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-2)^2\right|\leqslant|f(2)|+|f(0)|+\left|\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2\right|+\left|\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-2)^2\right|$$

因为 $|f(x)|\leqslant 1$, $|f''(x)|\leqslant 1$, 所以

$$|f(2)|+|f(0)|\leqslant 2,\ \left|\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2\right|+\left|\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-2)^2\right|\leqslant\frac{x^2}{2}+\frac{(x-2)^2}{2}$$

因此 $2|f'(x)|\leqslant 2+\frac{x^2}{2}+\frac{(x-2)^2}{2}\leqslant 4\Rightarrow|f'(x)|\leqslant 2$.

例 2.4.9. 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $|f(x)|\leqslant M_0$, $|f'(x)|\leqslant M_1$, $|f''(x)|\leqslant M_2$, 证明: $M_1^2<4M_0M_2$.

$\forall x\in(a,+\infty)$ 和 $\forall h>0$, 由在 x 处有一阶 *Taylor* 公式

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\cdot h+\frac{f''(\xi)}{2}\cdot h^2, x<\xi<x+h$$

于是 $f'(x)=\frac{1}{h}[f(x+h)-f(x)]-\frac{f''(\xi)}{2}h$, 从而有

$$|f'(x)|\leqslant\frac{1}{h}|f(x+h)-f(x)|+\frac{|f''(\xi)|}{2}h=\frac{2M_0}{h}+\frac{M_2h}{2}$$

取 $h=2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$, 则 $|f'(x)|\leqslant 2\sqrt{M_0M_2}\Rightarrow|f'(x)|^2\leqslant 4M_0M_2$, 有 x 的任意性, 得 $M_1^2\leqslant 4M_0M_2$.

例 2.4.10. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f'(a)=f'(b)=0$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证法一 将 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 分别在 $x=a$ 和 $x=b$ 处进行 *Taylor* 展开

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+f'(a)\frac{b-a}{2}+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+f'(b)\frac{a-b}{2}+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

其中 $a<\xi_1<\frac{a+b}{2}<\xi_2<b$, 由已知 $f'(a)=f'(b)=0$ 代入上式, 得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)=\frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,\ f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)=-\frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

记 $\xi=\begin{cases}\xi_1,|f''(\xi_2)|\leqslant|f''(\xi_1)|\\ \xi_2,|f''(\xi_2)|>|f''(\xi_2)|\end{cases}$, 则 $\xi\in(a,b)$, $|f''(\xi)|=\max\left(|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\right)$, 故

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\left|f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right|\leqslant\frac{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|$$

即 $|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

证法二 由连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上用介值定理知, 存在 $x_0\in[a,b]$, 使 $f(x_0)=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$, 不妨设 $a\leqslant x_0\leqslant\frac{a+b}{2}$, 则将 $f(x_0)$ 在点 $x=a$ 处进行 *Taylor* 展开, 得存在 $\xi\in(a,x_0)\subset(a,b)$, 使

$$f(x_0)=f(a)+f'(a)\left(x_0-a\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x_0-a\right)^2=f(a)+\frac{f''(\xi)}{2}\left(x_0-a\right)^2$$

于是 $\left|f''(\xi)\right|=\frac{2\left|f(x_0)-f(a)\right|}{\left(x_0-a\right)^2}\geqslant\frac{|f(b)-f(a)|}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}=\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

证法三 令 $g_1(x)=(x-a)^2$, $g_2(x)=(x-b)^2$, 则将 $f(x)$ 与 $g_1(x)$ 和 $f(x)$ 与 $g_2(x)$ 分别在 $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ 上用两次 *Cauchy* 中值定理, 知 $\exists\eta_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$, $\xi_1\in(a,\eta_1)$, 使

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}=\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{g_1\left(\frac{a+b}{2}\right)-g_1(a)}=\frac{f'(\eta_1)}{g_1'(\eta_1)}=\frac{f'(\eta_1)-f'(a)}{g_1'(\eta_1)-g_1'(a)}=\frac{f''(\xi_1)}{g_1''(\xi_1)}=\frac{1}{2}f''(\xi_1)$$

$\exists\eta_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$, $\xi_2\in(\eta_2,b)$, 使

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(b)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}=\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(b)}{g_2\left(\frac{a+b}{2}\right)-g_2(b)}=\frac{f'(\eta_2)}{g_2'(\eta_2)}=\frac{f'(\eta_2)-f'(b)}{g_2'(\eta_2)-g_2'(b)}=\frac{f''(\xi_2)}{g_2'(\xi_2)}=\frac{1}{2}f''(\xi_2)$$

取 $\xi=\begin{cases}\xi_1, & |f''(\xi_1)|\geqslant|f''(\xi_2)|,\\ \xi_2, & |f''(\xi_1)|<|f''(\xi_2)|,\end{cases}$ 则

$$\begin{aligned}\left|f''(\xi)\right|&=\max\left(\left|f''(\xi_1)\right|,\left|f''(\xi_2)\right|\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(\left|f''(\xi_1)\right|+\left|f''(\xi_2)\right|\right)\geqslant\frac{1}{2}\left|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\right|\\&=\left|\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}-\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(b)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}\right|=\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.\end{aligned}$$

推论 2.4.1. 一般地, 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有直至 n 阶的导数 $(n\geqslant2)$, 且 $f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0\ (k=1,2,\cdots,n-1)$, 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使

$$\left|f^{(n)}(\xi)\right|\geqslant\frac{2^{n-1}\cdot n!}{(b-a)^n}|f(b)-f(a)|.$$

2.4.5 差商与导数

定义 2.4.1 (一阶差商). 设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为 $[a,b]$ 上的节点, 若 $x_i \neq x_j$, 则函数 $f(x)$ 关于节点 x_i, x_j 的一阶差商定义为

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

定义 2.4.2 (重节点差商). 若 $x_i = x_j$, 则定义重节点差商

$$f[x_i, x] = \lim_{x \to x_i} f[x_i, x] = \lim_{x \to x_i} \frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i} = f'(x_i).$$

定义 2.4.3 (二阶差商). 若 x_i, x_j, x_k 互异, 则定义二阶差商

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}.$$

若 $x_i = x_j \neq x_k$ 或 $x_i = x_j = x_k$, 则分别定义

$$f[x_i, x_i, x_k] = \frac{f[x_i, x_k] - f[x_i, x_i]}{x_k - x_i},\ f[x_i, x_i, x_i] = \lim_{\substack{x_i \to x_i \\ x_k \to x_i}} f[x_i, x_j, x_k] = \frac{1}{2} f''(x_i).$$

定义 2.4.4 (n 阶差商). 一般地, 定义 n 阶差商及 n 阶重节点差商分别为

$$f[x_{i0}, x_{i1}, \cdots, x_{in}] = \frac{f[x_{i1}, \cdots, x_{in}] - f[x_{i0}, x_{i1}, \cdots, x_{i(n-1)}]}{x_{in} - x_{i0}}$$

$$f[x_{i0}, x_{i0}, \cdots, x_{i0}] = \lim_{x_{ij} \to x_{i0}} f[x_{i0}, x_{i1}, \cdots, x_{in}] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_{i0}).$$

定理 2.4.2 (差商与导数的关系). 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在 n 阶导数, 且节点 $x_{i0}, x_{i1}, \cdots, x_{in} \in [a,b]$ (其中可有重节点), 则有

$$f[x_{i0}, x_{i1}, \cdots, x_{in}] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

其中 $\xi \in \left(\min\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} \{x_{ik}\}, \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} \{x_{ik}\} \right)$.

例 2.4.11. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导, 证明存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$f(b) = f(a) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{1}{24} f'''(\xi)(b-a)^3.$$

证法一 将 $f(a), f(b)$ 在 $x = \dfrac{a+b}{2}$ 处进行 *Taylor* 展开, 得

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{a-b}{2} + \frac{1}{2} f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{(a-b)^2}{4} + \frac{1}{6} f'''(\xi_1) \frac{(a-b)^3}{8}$$

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2} f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{(b-a)^2}{4} + \frac{1}{6} f'''(\xi_2) \frac{(b-a)^3}{8}$$

其中 $a < \xi_1 < \dfrac{a+b}{2} < \xi_2 < b$, 两式相减得

$$f(b) - f(a) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) = \frac{1}{24} \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} (b-a)^3$$

而由

$$\min\left(f'''(\xi_1), f'''(\xi_2)\right) \leqslant \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} \leqslant \max\left(f'''(\xi_1), f'''(\xi_2)\right)$$

及 *Darboux* 定理知

$$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b),\ 使得\ f'''(\xi)=\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}$$

故得证.

证法二 设 k 为使 $f(b)=f(a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{24}k(b-a)^3$ 成立的实常数，为此只需证 $k=f''(\xi)$ 即可，令 $g(x)=f(x)-f(a)-f'\left(\frac{a+x}{2}\right)(x-a)-\frac{k}{24}(x-a)^3$ 则 $g(a)=g(b)=0$，于是由 *Rolle* 定理知，$\exists\eta\in(a,b)$，使 $g'(\eta)=0$ 即

$$f'(\eta)-\frac{1}{2}f''\left(\frac{a+\eta}{2}\right)(\eta-a)-f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right)-\frac{k}{8}(\eta-a)^2=0$$

又将 $f'(\eta)$ 在 $x=\frac{a+\eta}{2}$ 处进行 *Taylor* 展开，得

$$f'(\eta)=f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right)+f''\left(\frac{a+\eta}{2}\right)\cdot\frac{\eta-a}{2}+\frac{f''(\xi)}{2!}\cdot\left(\frac{\eta-a}{2}\right)^2$$

代人上式，得 $\frac{f'''(\xi)}{2!}\cdot\left(\frac{\eta-a}{2}\right)^2-\frac{k}{8}(\eta-a)^2=0$，从而得 $k=f'''(\xi)$，其中 $\xi\in\left(\frac{a+\eta}{2},\eta\right)\subset(a,b)$，故得证.

证法三 由于要证等式中含有 $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$，因而选取重节点：$x_0=a,x_1=c=\frac{a+b}{2},x_2=c,x_3=b$，列差商表如下：

表 2.2

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
$x_0=a$	$f(a)$			
$x_1=c$	$f(c)$	$f[a,c]$		
$x_2=c$	$f(c)$	$f'(c)$	$f[a,c,c]$	
$x_3=b$	$f(b)$	$f[c,b]$	$f[c,c,b]$	$f[a,c,c,b]$

而由差商与导数的关系，得 $f[a,c,c,b]=\frac{f''(\xi)}{3!}$，其中 $\xi\in(a,b)$，由重节点差商定义，有

$$f[a,c,c,b]=\frac{f[c,c,b]-f[a,c,c]}{b-a},\ f[c,c,b]=\frac{f[c,b]-f'(c)}{b-c}$$

$$f[a,c,c]=\frac{f'(c)-f[a,c]}{c-a},\ f[c,b]=\frac{f(b)-f(c)}{b-c},\ f[a,c]=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

代人整理，即得 $f(b)=f(a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{24}f''(\xi)(b-a)^3$.

例 2.4.12. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(f'(a)+f'(b))(b-a)-\frac{1}{12}f'''(\xi)(b-a)^3.$$

证法一 将要证的等式化为 $\dfrac{f(b)-f(a)-\frac{1}{2}(f'(a)+f'(b))(b-a)}{-\frac{1}{12}(b-a)^3}=f'''(\xi)$ 为此，令

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(f'(a)+f'(x))(x-a),\ G(x)=-\frac{1}{12}(x-a)^3$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$G(x)$ 在 $[a,b]$ 上任意阶可导，于是两次用 *Cauchy* 中值定理，得

$$\frac{F(b)}{G(b)}=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}=\frac{F'(\xi_1)-F'(a)}{G'(\xi_1)-G'(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=f'''(\xi)$$

其中 $F(a)=0=F'(a)$，$G(a)=0=G'(a)$，$\xi_1\in(a,b)$，$\xi\in(a,\xi_1)\subset(a,b)$，整理即得 $f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(f'(a)+f'(b))(b-a)-\frac{1}{12}f'''(\xi)(b-a)^3$.

证法二 设 k 为使 $f(b)=f(a)+\frac{b-a}{2}(f'(a)+f'(b))-\frac{1}{12}k(b-a)^3$ 成立的实常数, 为此证明 $k=f'''(\xi)$ 即可, 令

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{x-a}{2}(f'(a)+f'(x))+\frac{1}{12}k(x-a)^3$$

则 $g(a)=g(b)=0$, 于是由 *Rolle* 定理知, 存在 $\eta\in(a,b)$, 使得 $g'(\eta)=0$, 即

$$\frac{1}{2}f'(\eta)-\frac{1}{2}f'(a)-\frac{\eta-a}{2}f'(\eta)+\frac{k}{4}(\eta-a)^2=0$$

又将 $f'(a)$ 在 $x=\eta$ 处进行 *Taylor* 展开, 得

$$f'(a)=f'(\eta)+f'(\eta)(a-\eta)+\frac{1}{2}f'''(\xi)(a-\eta)^2$$

代入上式, 即得 $k=f'''(\xi)$, 其中 $\xi\in(a,\eta)\subset(a,b)$, 故得证.

证法三 由于要证明的等式中含有 $f'(a)$ 及 $f'(b)$, 因而考虑选取重节点: $x_0=a,x_1=a,x_2=b,x_3=b$, 列差商表如下

表 2.3

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
$x_0=a$	$f(a)$			
$x_1=a$	$f(a)$	$f'(a)$		
$x_2=b$	$f(b)$	$f[a,b]$	$f[a,a,b]$	
$x_3=b$	$f(b)$	$f'(b)$	$f[a,b,b]$	$f[a,a,b,b]$

而由差商与导数的关系, 得 $f[a,a,b,b]=\frac{f'''(\xi)}{3!}$, 其中 $\xi\in(a,b)$, 又由重节点差商定义, 有

$$f[a,a,b,b]=\frac{f[a,b,b]-f[a,a,b]}{b-a},\quad f[a,a,b]=\frac{f[a,b]-f'(a)}{b-a}$$

$$f[a,b,b]=\frac{f'(b)-f[a,b]}{b-a},\quad f[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

代入整理, 即得 $f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(f'(a)+f'(b)(b-a)-\frac{1}{12}f'''(\xi))(b-a)^3$.

2.5 Lagrange 插值与 Hermite 插值

Lagrange 插值和 Hermite 插值都是插值法的一种, 用于通过已知数据点构建一个多项式函数, 从而估计在其他点上的函数. 它们的主要区别在于插值多项式的构造方式和插值点的选择.

2.5.1 Lagrange 插值

定义 2.5.1 (Lagrange 插值多项式). 经过数据点 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$ 而次数不高于 n 的 *Lagrange* 插值多项式为

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right)y_k.$$

定理 2.5.1. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f(a)=f(b)=c$, 则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$\begin{cases} f''(\xi)\geqslant\dfrac{8(c-d)}{(a-b)^2}, & \min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}=d \\ f''(\xi)\leqslant\dfrac{8(c-d)}{(a-b)^2}, & \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}=d. \end{cases}$$

证 由于函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}=d$ (对于 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}=d$ 类似可证), 所以 $\exists x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)=d$, 作 *Lagrange* 插值多项式:

$$p_2(x)=\frac{c(x-x_0)(x-b)}{(a-x_0)(a-b)}+\frac{d(x-a)(x-b)}{(x_0-a)(x_0-b)}+\frac{c(x-a)(x-x_0)}{(b-a)(b-x_0)}$$

则 $p(x)$ 与 $f(x)$ 在 a,x_0,b 三点有相同的函数值，设 $F(x)=f(x)-p(x)$, 那么 $F(a)=F(x_0)=F(b)=0$, 由 *Rolle* 定理, $\exists\xi_1\in(a,x_0),\xi_2\in(x_0,b)$, 使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$$

在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用 *Rolle* 定理, $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$, 使得 $F''(\xi)=0$, 即

$$f''(\xi)=F''(\xi)+p''(\xi)=p''(\xi)=\frac{2(c-d)}{\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2-\left(x_0-\dfrac{a+b}{2}\right)^2}$$

即得证

$$\begin{cases} f''(\xi)\geqslant\dfrac{8(c-d)}{(a-b)^2}, & \min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}=d\\ f''(\xi)\leqslant\dfrac{8(c-d)}{(a-b)^2}, & \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}=d.\end{cases}$$

推论 2.5.1. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$, 则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$\begin{cases} f''(\xi)\geqslant-\dfrac{8d}{(a-b)^2}, & \min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}=d\\ f''(\xi)\leqslant-\dfrac{8d}{(a-b)^2}, & \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}=d.\end{cases}$$

证 在定理 *2.5.1* 中令 $c=0$, 即得证.

2.5.2 Hermite 插值

插值多项式要求在插值节点上函数值相等, 有的实际问题还要求在节点上导数值相等, 甚至高阶导数值也相等, 满足这种要求的插值多项式称为 *Hermite* 插值多项式.

例 2.5.1. 给定 $f(x)=x^{3/2},x_0=\dfrac14,x_1=1,x_2=\dfrac94$, 试求 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac14,\dfrac94\right]$ 上的三次 Hermite 插值多项式 $p(x)$, 使之满足 $p(x_i)=f(x_i),p'(x_1)=f'(x_1)\ (i=0,1,2)$, 并写出余项表达式.

由所给节点可求出

$$f_0=f\left(\frac14\right)=\frac18,f_1=f(1)=1,f_2=f\left(\frac94\right)=\frac{27}{8},f'(x)=\frac32x^{1/2},f'(1)=\frac32$$

那么差商表为

表 2.4

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商
$x_0=\frac14$	$f_0=\frac18$		
$x_1=1$	$f_1=1$	$f[x_0,x_1]=\dfrac{f_1-f_0}{x_1-x_0}=\dfrac76$	
$x_2=\frac94$	$f_2=\frac{27}{8}$	$f[x_1,x_2]=\dfrac{f_2-f_1}{x_2-x_1}=\dfrac{19}{10}$	$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\dfrac{11}{30}$

故可令

$$H_3(x)=\frac{1}{8}+\frac{7}{6}\left(x-\frac{1}{4}\right)+\frac{11}{30}\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1)+A\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1)\left(x-\frac{9}{4}\right)$$

再由 $p'(1)=f'(1)=\frac{3}{2}$，解得 $A=-\frac{14}{225}$，于是所求的三次 *Hermite* 插值多项式为

$$H_3(x)=-\frac{14}{225}x^3+\frac{263}{450}x^2+\frac{233}{450}x-\frac{1}{25}$$

余项为

$$\begin{aligned}R(x)=f(x)-H_3(x)&=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1)^2\left(x-\frac{9}{4}\right)\\&=\frac{1}{4!}\frac{9}{16}\xi^{-5/2}\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1)^2\left(x-\frac{9}{4}\right)\end{aligned}$$

其中 $\xi\in\left(\frac{1}{4},\frac{9}{4}\right)$.

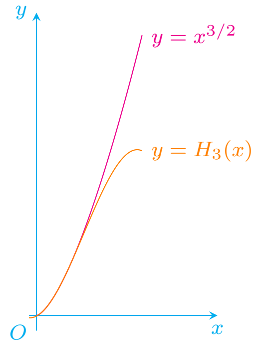


图 2.5.1

例 2.5.2. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 三阶导数连续，$f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$，证明：$\exists\xi\in(-1,1)$，使得 $f'''(\xi)=3$.

证法一： 令[4]

$$H_3(x)=f(0)(x+1)+\frac{1-2f(0)}{2}(x+1)x+\frac{1}{2}(x+1)x(x-1)$$

构造 $F(x)=f(x)-H_3(x)$，那么有 $F(-1)=F(0)=F(1)=0$，由 *Rolle* 定理 $\exists\xi_1\in(-1,0),\xi_2\in(0,1)$，使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$$

而 $F'(0)=f'(0)-H_3'(0)=0$，则有 $F'(\xi_1)=F'(0)=F'(\xi_2)=0$ 故又由 *Rolle* 定理 $\exists\xi_3\in(\xi_1,0),\xi_4\in(0,\xi_2)$，使得

$$F''(\xi_3)=F''(\xi_4)=0$$

最后由 *Rolle* 定理知 $\exists\xi\in(\xi_3,\xi_4)\subset(-1,1)$，使得 $F'''(\xi)=0$ 而

$$F'''(\xi)=f'''(\xi)-H_3'''(\xi)=f'''(\xi)-3=0$$

即得证.

证法二 将 $f(1)$ 和 $f(-1)$ 在 $x=0$ 处 *Taylor* 展开，并作差，下略.

定理 2.5.2. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导，且 $ab<0, a\neq b, f(a)=c, f(0)=d, f(b)=e, f'(0)=f$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f'''(\xi)=\frac{6}{ab}\left[f+\frac{d-c}{a}+\frac{a(e-d)+b(d-c)}{b(b-a)}\right].$$

证 由所给节点可求出

$$f_0=f(a)=c, f_1=f(0)=d, f_2=f(b)=e$$

那么差商表为

表 2.5

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商
a	c		
0	d	$-\dfrac{d-c}{a}$	
b	e	$\dfrac{e-d}{b}$	$\dfrac{a(e-d)+b(d-c)}{ab(b-a)}$

故可令

$$H_3(x)=c-\frac{d-c}{a}(x-a)+\frac{a(e-d)+b(d-c)}{ab(b-a)}(x-a)x+A(x-a)x(x-b)$$

[4]由 $f_0=f(-1)=0, f_1=f(0), f_2=f(1)=1$ 作差商，下同例题 2.5.1

由 $p_3'(0)=f'(0)=f$, 解得 $A=\dfrac{f+\dfrac{d-c}{a}+\dfrac{a(e-d)+b(d-c)}{b(b-a)}}{ab}$ 于是

$$H_3(x)=c-\frac{d-c}{a}(x-a)+\frac{a(e-d)+b(d-c)}{ab(b-a)}(x-a)x+\frac{f+\dfrac{d-c}{a}+\dfrac{a(e-d)+b(d-c)}{b(b-a)}}{ab}(x-a)x(x-b)$$

则 $H_3(x)$ 与 $f(x)$ 在 $a,0,b$ 三点有相同的函数值, 在 0 点有相同的导数值, 设 $F(x)=f(x)-H_3(x)$, 则 $F(a)=F(0)=F(b)=0$, 由 *Rolle* 定理知, $\exists\xi_1\in(a,0),\xi_2\in(0,b)$, 使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$$

由于 $F'(x)=f'(x)-p_3'(x)$, 所以 $F'(0)=f'(0)-p'(0)=0$, 在 $[\xi_1,0]$ 和 $[0,\xi_2]$ 上应用 *Rolle* 定理, 则 $\exists\xi_3\in(\xi_1,0),\xi_4\in(0,\xi_2)$, 使得

$$F''(\xi_3)=F''(\xi_4)=0$$

最后在 $[\xi_3,\xi_4]$ 上应用 *Rolle* 定理, $\exists\xi\in(\xi_3,\xi_4)$, 使得 $F'''(\xi)=0$, 而 $F'''(x)=f'''(x)-p_3'''(x)$, 则 $f'''(\xi)=p'''(\xi)$, 即

$$f'''(\xi)=\frac{6}{ab}\left[f+\frac{d-c}{a}+\frac{a(e-d)+b(d-c)}{b(b-a)}\right].$$

与例题 2.5.1 不同但同样典型的例子是“两点三次 Hermite 插值”, 插值节点取 x_k 及 x_{k+1}, 插值多项式为 $H_3(x)$, 满足条件

$$\begin{cases}H_3(x_k)=y_k, & H_3(x_{k+1})=y_{k+1}\\ H_3'(x_k)=m_k, & H_3'(x_{k+1})=m_{k+1}\end{cases}$$

定理 2.5.3 (两点三次 Hermite 插值)**.** 采用基函数方法, 令

$$H_3(x)=\alpha_k(x)y_k+\alpha_{k+1}(x)y_{k+1}+\beta_k(x)m_k+\beta_{k+1}(x)m_{k+1}$$

其中 $\alpha_k(x),\alpha_{k+1}(x),\beta_k(x),\beta_{k+1}(x)$ 是关于节点 x_k 及 x_{k+1} 的三次 Hermite 插值基函数, 它们应分别满足以下条件:

$$\begin{array}{lll}\alpha_k(x_k)=1 & \alpha_k(x_{k+1})=0 & \alpha_k'(x_k)=\alpha_k'(x_{k+1})=0\\ \alpha_{k+1}(x_k)=0 & \alpha_{k+1}(x_{k+1})=1 & \alpha_{k+1}'(x_k)=\alpha_{k+1}'(x_{k+1})=0\\ \beta_k(x_k)=\beta_k(x_{k+1})=0 & \beta_k'(x_k)=1 & \beta_k'(x_{k+1})=0\\ \beta_{k+1}(x_k)=\beta_{k+1}(x_{k+1})=0 & \beta_{k+1}'(x_k)=0 & \beta_{k+1}'(x_{k+1})=1\end{array}$$

解得基函数, 那么有

$$\begin{aligned}H_3(x)=&\left(1+2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2y_k+\left(1+2\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2y_{k+1}\\&+(x-x_k)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2m_k+(x-x_{k+1})\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2m_{k+1}.\end{aligned}$$

定理 2.5.4. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导, 且 $f(a)=c,f(b)=d,f'(a)=e,f'(b)=f$, 则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$f'''(\xi)=6\frac{f(b-a)-2(d-c)+e(b-a)}{(b-a)^3}.$$

证 作三次 *Hermite* 插值多项式:

$$H_3(x)=c+e(x-a)+\frac{(d-c)-e(b-a)}{(b-a)^2}(x-a)^2+\frac{f(b-a)-2(d-c)+e(b-a)}{(b-a)^3}(x-a)^2(x-b)$$

则 $H_3(x)$ 与 $f(x)$ 在 a,b 两点有相同的函数值与导数值, 设 $F(x)=f(x)-H_3(x)$, 则 $F(a)=F(b)=0$, 由 *Rolle* 定理, $\exists\xi_1\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi_1)=0$, 由于

$$F'(x)=f'(x)-H_3'(x)=f'(x)+e+2\frac{(d-c)-e(b-a)}{(b-a)^2}(x-a)+\frac{f(b-a)-2(d-c)+e(b-a)}{(b-a)^3}\left[2(x-a)(x-b)+(x-a)^2\right]$$

则 $F'(a)=F'(b)=0$, 在 $[a,\xi_1]$ 和 $[\xi_1,b]$ 上应用 *Rolle* 定理, 则 $\exists\xi_2\in(a,\xi_1),\xi_3\in(\xi_1,b)$, 使得

$$F''(\xi_2)=F''(\xi_3)=0$$

最后在 $[\xi_2,\xi_3]$ 上应用 *Rolle* 定理, 即 $\exists\xi\in(\xi_2,\xi_3)$, 使得 $F'''(\xi)=0$, 即得证.

推论 2.5.2. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导, 且 $f(a)=a,f(b)=b,f'(a)=f'(b)=0$, 则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$f'''(\xi)=-\frac{12}{(a-b)^2}.$$

证 令 $c=a,d=b,e=f=0$, 即得证。

例 2.5.3. 设函数 $f\in C[0,1]\cap D^3(0,1)$, $f(0)=2$, $f(1)=1$, $f'(0)=0$, $f'(1)=4$ 证明: 存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'''(\xi)=24+24\xi$.

令 $g(x)=f(x)-x^4$, 则 $g\in C[0,1]\cap D^3(0,1)$ 那么 $\begin{cases}x_k=0, & x_{k+1}=1\\ y_k=2, & y_{k+1}=0\\ m_k=0, & m_{k+1}=0\end{cases}$, 因此

$$H_3(x)=2(1+x)(x-1)^2=4x^3-6x^2+2$$

构造 $F(x)=g(x)-H_3(x)$ 有 $F(0)=F(1)=0$, 由 *Rolle* 定理 $\exists\xi_1\in(0,1)$ 使得 $F'(\xi_1)=0$, 又 $F'(0)=F'(\xi_1)=F'(1)=0$, 由 *Rolle* 定理得 $\exists\xi_2\in(0,\xi_1),\xi_3\in(\xi_1,1)$ 使得 $F''(\xi_i)=0,i=2,3$, 再根据 *Rolle* 定理得 $\exists\xi\in(\xi_2,\xi_3)\subset(0,1)$ 使得 $F'''(\xi)=0$ 即

$$f'''(\xi)-4!\xi-24=0\Rightarrow f'''(\xi)=24\xi+24.$$

2.6 导数的综合应用

2.6.1 极值问题

极值、最值

求极值的方法步骤一般如下:

(1) 求可疑点, 可疑点包括:

- (i) 稳定点 (亦称驻点或逗留点, 皆值一阶导数等于零的点);
- (ii) 导数不存在的点;
- (iii) 区间端点.

(2) 对可疑点进行判断, 基本方法是:

(i) 直接利用定义判断;

(ii) 利用实际背景来判断;

(iii) 查看一阶导数的符号, 当 x 从左向右穿越可疑点 x_0 时,
若 $f'(x)$ 由 "正" 变 "负", 则 $f(x_0)$ 为严格极大值点;
若 $f'(x)$ 由 "负" 变 "正", 则 $f(x_0)$ 为严格极小值点;
若 $f'(x)$ 不变号, 则 $f(x_0)$ 不是极值.

(iv) 若 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\begin{cases} >0, & \text{则 } f(x_0) \text{ 为严格极小值,} \\ <0, & \text{则 } f(x_0) \text{ 为严格极大值;} \end{cases}$

(v) $f^{(k)}(x_0)=0\ (k=1,2,\cdots,n-1)$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$,
若 n 为偶数, 则 $f(x_0)$ 为极值: $\begin{cases} f^{(n)}(x_0)>0, & \text{严格极小值,} \\ f^{(n)}(x_0)<0, & \text{严格极大值;} \end{cases}$
若 n 为奇数, 则 $f(x_0)$ 不是极值.

例 2.6.1. 求函数 $f(x)=\left|x\left(x^2-1\right)\right|$ 的极值以及在 $[-2,2]$ 上的最值.

$f(x)=\operatorname{sgn}\left(x\left(x^2-1\right)\right)\cdot x\left(x^2-1\right)$, 那么 $f'(x)=\operatorname{sgn}\left(x\left(x^2-1\right)\right)\cdot\left(3x^2-1\right)$ $(x\neq 0,\pm 1)$, 令 $f'(x)=0$, 得 $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$f''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\operatorname{sgn}\left(x\left(x^2-1\right)\right)\Big|_{x=\frac{\sqrt{3}}{3}}\cdot 6x\Big|_{x=\frac{\sqrt{3}}{3}}=-2\sqrt{3}<0$$

故 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 处取极大值, 又 $f(x)$ 是偶函数, 所以在 $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 处亦取极大值, 当 $x=0,\pm 1$ 时, $f(0)=f(1)=f(-1)=0\leqslant f(x)(\forall x)$, 故为最小值, 也是极小值; $f(2)=f(-2)=6\geqslant f(x)(\forall x\in[-2,2])$, 故 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上最大值为 6, 最小值为 0.

例 2.6.2. 设 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 可导, $f(0)=1$, $f(x)>0$,

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f\left(x+h\cdot\cos^2 x\right)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=\mathrm{e}^{x\cos^2 x+\tan x}$$

求 $f(x)$ 的表达式及极值.

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\left[\frac{f\left(x+h\cdot\cos^2 x\right)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\frac{f\left(x+h\cdot\cos^2 x\right)}{f(x)}=x\cos^2 x+\tan x$, 等式左边化为

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{f\left(x+h\cdot\cos^2 x\right)-f(x)}{f(x)}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 x}{f(x)}\frac{f\left(x+h\cdot\cos^2 x\right)-f(x)}{h\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x}{f(x)}\cdot f'(x)$$

即

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=x+\tan x\cdot\sec^2 x\Rightarrow[\ln f(x)]'=x+\tan x\cdot\sec 2x\Rightarrow\ln f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2 x+C$$

又 $f(0)=1$, 解得 $C=0$, 于是 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2 x}$, 则

$$f'(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2 x}\cdot\left(x+\tan x\cdot\sec^2 x\right)$$

因为 e^x 恒大于 0, 因此只需讨论 $x+\tan x\cdot\sec^2 x$ 的符号即可, 令 $g(x)=x+\tan x\cdot\sec^2 x$, 对 $g(x)$ 求导得

$$g'(x)=1+\sec^4 x+4\tan^2 x\sec^2 x>1$$

所以 $g(x)\nearrow$, 而 $g(0)=0$, 故当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 时, $g(x)<0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f(x)\searrow$; 当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时, $f(x)\nearrow$, 所以当 $x=0$ 时, $f(x)$ 取得极小值, 无极大值, 且 $f(0)=1$.

例 2.6.3 (2014 数一). 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y=0$ 确定, 求 $f(x)$ 的极值.

方程 $y^3+xy^2+x^2y=0$ 两端对 x 求导, 得

$$3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0 \tag{*}$$

并令 $y'=0$, 得 $y^2+2xy=0$, 解得 $y=0$ 或 $y=-2x$, 显然 $y=0$ 不满足原方程, 将 $y=-2x$ 代入原方程得 $-6x^3+6=0\Rightarrow x_0=1$, 那么 $f(1)=-2$, $f'(1)=0$, (*) 式两端对 x 再次求导, 得

$$6y'^2+3y^2y''+4yy'+2xy'^2+2xyy''+2y+4xy'+x^2y''=0$$

将 $x=1$, $f(1)=-2$, $f'(1)=0$ 代入上式得 $f''(1)=\dfrac{4}{9}>0$, 则函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值, 极小值为 $f(1)=-2$.

极值点偏移

例 2.6.4. 已知函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}, x\in\mathbb{R}$, 如果有 $f(x_1)=f(x_2)$ 且 $x_1\neq x_2$, 求证 $x_1+x_2>2$.

证法一 由 $f(x_1)=f(x_2)$ 得 $\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{\mathrm{e}^{x_2}}{\mathrm{e}^{x_1}}\Rightarrow \ln\dfrac{x_2}{x_1}=x_2-x_1$, 不妨设 $0<x_1<1<x_2$, 作换元 $t=\dfrac{x_2}{x_1}$, 那么 $t>1$, 且

$$x_1=\frac{\ln t}{t-1}, x_2=\frac{t\ln t}{t-1}$$

于是要证 $\forall t>1, \dfrac{t\ln t+\ln t}{t-1}>2$, 构造函数 $F(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}$, 那么 $F'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$, 所以 $F(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增, 所以 $F(t)>F(1)=0$, 即得待证式成立.

证法二 由题可得 $\ln x_2-\ln x_1=x_2-x_1$, 即 $\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=1$, 要证 $x_1+x_2>2$, 即证 $x_1+x_2>2\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}$, 不妨设 $0<x_1<1<x_2$, 作换元 $t=\dfrac{x_2}{x_1}$, 那么原不等式可化为 $\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}$, 由证法一可得该不等式成立, 所以原命题成立.

定理 2.6.1 (对数平均不等式 (ALG)). 对任意 $0<a<b$, 满足 $\sqrt{ab}<\dfrac{b-a}{\ln b-\ln a}<\dfrac{a+b}{2}$.

2.6.2 不等式与函数凹凸性及拐点

不等式与凸函数之间有着密切的关系, 凸函数在不等式中起着重要的作用.

不等式

定理 2.6.2 (均值不等式). 对任意 n 个实数 $x_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 有 调和平均数 $\leqslant$ 几何平均数 $\leqslant$ 算术平均数 $\leqslant$ 平方平均数, 即

$$\begin{array}{ccccccc} H_n & \leqslant & G_n & \leqslant & A_n & \leqslant & Q_n \\ \| & & \| & & \| & & \| \\ \sqrt[n]{\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}} & & \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{i=1}^n x_i} & & \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i & & \sqrt{\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{array}$$

其中等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

例 2.6.5. 试比较 π^{e} 和 e^π 的大小, 并说明理由.

法一: 只需比较 $\dfrac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$ 与 $\dfrac{\ln\pi}{\pi}$ 的大小, 令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ $(x\geqslant\mathrm{e})\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$ $(x>\mathrm{e})$, 于是 $f(x)$ 在 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减, 又 $\mathrm{e}<\pi$, 从而 $f(\pi)<f(\mathrm{e})$, 即 $\dfrac{\ln\pi}{\pi}<\dfrac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$, 故 $\mathrm{e}^\pi>\pi^{\mathrm{e}}$.

法二: 记 $\pi=\mathrm{e}+\lambda$, 则 $\lambda>0$, 于是

$$\frac{\pi^{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^\pi}=\frac{(\mathrm{e}+\lambda)^{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}+\lambda}}=\frac{1}{\mathrm{e}^\lambda}\left(\frac{\mathrm{e}+\lambda}{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}^x}\left[\left(1+\frac{\lambda}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{\mathrm{e}}{\lambda}}\right]^\lambda<\frac{1}{\mathrm{e}^\lambda}\mathrm{e}^\lambda=1\Rightarrow \mathrm{e}^\pi>\pi^{\mathrm{e}}.$$

例 2.6.6 (1995 数学 (二)). 设 $f(x)$ 二阶可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$, $f''(x)>0$, 证明 $f(x)\geqslant x$.

证法一 要证 $f(x)\geqslant x$, 只需证 $f(x)-x\geqslant 0$, 为此, 令 $g(x)=f(x)-x$, 则由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$, 得 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$, 所以 $g'(x)=f'(x)-1=f'(x)-f'(0)$, 又由 $f''(x)=(f'(x))'>0$ 知, $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增, 于是当 $x<0$ 时, $g'(x)<0$; 当 $x>0$ 时, $g'(x)>0$, 从而知 $x=0$ 为 $g(x)$ 的极小值点也是最小值点,, 故 $g(x)\geqslant g(0)=0$, 即 $f(x)\geqslant x$.

证法二 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 可知, $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0, f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$, 由题设 $f(x)$ 二阶可导, 将 $f(x)$ 在 $x=0$ 点进行 *Taylor* 展开, 得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间, 故由 $f''(x)>0$ 得 $f(x)\geqslant f(0)+f'(0)x=x$ (等号仅当 $x=0$ 时成立).

证法三 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 及 $f(x)$ 连续可知, $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0, f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$, 又由 $f''(x)=(f'(x))'>0$ 知 $f'(x)$ 严格单调递增, 于是由 *Lagrange* 中值定理得

当 $x>0$ 时, $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(\xi_1)>f'(0)=1$, 其中 $\xi_1\in(0,x)$, 故 $f(x)>x$;

当 $x<0$ 时, $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(\xi_2)<f'(0)=1$, 其中 $\xi_2\in(x,0)$, 故 $f(x)>x$;

当 $x=0$ 时, $f(0)=0$, $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 都有 $f(x)\geqslant x$.

推论 2.6.1. 一般地, 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$, 且 $f''(x)>0$, 则 $f(x)\geqslant Ax$.

例 2.6.7. 证明: $\left|\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}-\cos y\right|\leqslant\dfrac{1}{2}\cdot|x-y|$, $x\neq y$.

证 将 $\sin x$ 在 $x=y$ 处 *Taylor* 展开, 得

$$\sin x=\sin y+\cos y(x-y)-\frac{1}{2}\sin\xi(x-y)^2$$

其中 ξ 介于 x 与 y 之间, 那么待证等式化简为

$$\left|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}-\cos y\right|=\left|\frac{|\sin\xi|}{2}\right||x-y|$$

又 $\sin\xi\leqslant 1$, 即得待证式成立.

定理 2.6.3 (Cauchy 不等式). 设 a_k,b_k 为任意实数 $(i=1,2,\cdots,n)$, 则

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$$

其中等号当且仅当 a_k 与 b_k 成比例时成立.

凸函数的多种定义

定义 2.6.1 (凸函数 A). 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, $f(x)$ 在 I 上称为凸函数, 当且仅当 $\forall x_1,x_2\in I,\forall\lambda\in(0,1)$, 有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

式中的 $\leqslant$ 改为 $<$ 便是严格凸的定义.

定义 2.6.2 (凸函数 B). 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, $f(x)$ 称为 I 上的凸函数, 当且仅当 $\forall x_1,x_2\in I$, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

式中的 $\leqslant$ 改为 $<$ 便是严格凸的定义.

定义 2.6.3 (凸函数 C). 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, $f(x)$ 称为凸函数, 当且仅当 $\forall x_1, \cdots, x_n \in I$, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

式中的 $\leqslant$ 改为 $<$ 便是严格凸的定义.

定义 2.6.4 (凸函数 D). 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 当且仅当曲线 $y=f(x)$ 的切线恒保持在曲线以下, 称 $f(x)$ 为凸函数. 若除切点之外, 切线严格保持在曲线的下方, 则称 $f(x)$ 为严格凸的.

例 2.6.8. 已知 $f(x)$ 为二阶导的正值函数, 且 $f(0)=f'(0)=1$, , 则

A. $f(2) \leqslant \mathrm{e}^2 \leqslant \sqrt{f(1)f(3)}$ B. $\mathrm{e}^2 \leqslant f(2) \leqslant \sqrt{f(1)f(3)}$

C. $\sqrt{f(1)f(3)} \leqslant \mathrm{e}^2 \leqslant f(2)$ D. $\sqrt{f(1)f(3)} \leqslant f(2) \leqslant \mathrm{e}^2$

因为 $f(x)$ 为一正值函数, 且 $f(x)f''(x) \geqslant [f'(x)]^2$, 于是有

$$\frac{f(x)f''(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)} \geqslant 0 \Rightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' \geqslant 0 \Rightarrow (\ln f(x))'' \geqslant 0$$

那么 $g(x)=\ln f(x)$ 为一下凸函数, 那么 $\dfrac{g(1)+g(3)}{2} = \dfrac{1}{2}(\ln f(1)+\ln f(3)) = \ln\sqrt{f(1)f(3)}$, 并且根据凸函数的性质, 有

$$\frac{g(1)+g(3)}{2} \geqslant g\left(\frac{1+3}{2}\right) = \ln f(2) \Rightarrow \ln\sqrt{f(1)f(3)} \geqslant \ln f(2) \Rightarrow f(2) \leqslant \sqrt{f(1)f(3)}$$

将 $g(x)$在 $x=0$ 处 *Taylor* 展开, 得

$$g(x)=g(0)+g'(0)x+\frac{1}{2}g''(\theta)x^2 \geqslant g(0)+g'(0)x=x$$

于是得 $f(x) \geqslant \mathrm{e}^x$, 因此 $f(2) \geqslant \mathrm{e}^2$, 综上所述, 选 *B*.

定理 2.6.4. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 则 $f(x)$ 为凸函数的充要条件是: $\forall x_0 \in r$, $\exists \alpha$, 使得 $\forall x \in I$ 有 $f(x) \geqslant \alpha(x-x_0)+f(x_0)$.

推论 2.6.2. 设 $f(x)$ 在区间 I 内部可导, 则 $f(x)$ 在 I 上为凸的充要条件是: $\forall x_0 \in I^\circ$, 有

$$f(x) \geqslant f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \ (\forall x \in I).$$

推论 2.6.3. 若 $f(x)$ 在区间 I 上为凸的, 则 $\forall x_0 \in I^\circ$, 在曲线 $y=f(x)$ 上一点 $(x_0, f(x_0))$ 可作一条直线

$$L: y=\alpha(x-x_0)+f(x_0)$$

使曲线 $y=f(x)$ 位于直线 L 上方.

定理 2.6.5 (分离性定理). 若 f 为严格凸函数, 则除点 $(x_0, f(x_0))$ 之外曲线严格地在直线 L 的上方, 直线 L 称为 $y=f(x)$ 的支撑.

定理 2.6.6. 设 $f(x)$ 在区间 I 上有导数, 则 $f(x)$ 在 I 上为凸函数的充要条件是 $f'(x) \nearrow (x \in I)$.

定理 2.6.7 (Jensen 不等式). 若 $f(x)$ 在 I 上有定义, 则 $\forall q_i \geqslant 0$: $q_1+q_2+\cdots+q_n=1, \forall x_1,x_2,\cdots,x_n \in I$, 有

$$f\left(q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_nx_n\right) \leqslant q_1f\left(x_1\right)+q_2f\left(x_2\right)+\cdots+q_nf\left(x_n\right);$$

$\forall p_i \geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 不全为零, $\forall x_1,x_2,\cdots,x_n \in I$, 有

$$f\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right) \leqslant \frac{p_1f\left(x_1\right)+p_2f\left(x_2\right)+\cdots+p_nf\left(x_n\right)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}.$$

例 2.6.9. 证明当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$.

证法一 设 $f(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x$, 则 $f'(x)=\cos x-\dfrac{2}{\pi}, f''(x)=-\sin x<0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 于是 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上为凸函数, 又 $f(0)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, 故当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $f(x)>0$, 即 $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$.

证法二 设 $f(x)=\sin x$, 则 $f'(x)=\cos x, f''(x)=-\sin x<0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 于是 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是凸函数, 从而由凸函数的定义, 有

$$f(x)=f\left[\frac{2x}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}+\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\cdot 0\right]>\frac{2x}{\pi}\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right)+\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\cdot f(0)=\frac{2x}{\pi}$$

即得 $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

证法三 设 $f(x)=\sin x$, 对于 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 将 $f(t)$ 分别在 $[0,x]$ 和 $\left[x,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上应用 *Lagrange* 中值定理,

$$\exists\xi\in(0,x),\ 使得\ \frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=\cos\xi$$

即 $\dfrac{\sin x}{x}=\cos\xi$, 又 $\exists\eta\in\left(x,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 使得 $\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}-\sin x}{\dfrac{\pi}{2}-x}=\cos\eta$, 即 $\dfrac{1-\sin x}{\dfrac{\pi}{2}-x}=\cos\eta$, 又因为 $\cos x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内严格单调递减, $\xi<\eta$, 所以 $\cos\xi>\cos\eta$, 从而 $\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{1-\sin x}{\dfrac{\pi}{2}-x}$, 即得 $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

拐点

定义 2.6.5 (拐点). 连续曲线凹与凸部分的分界点称为曲线的拐点.

定理 2.6.8 (拐点存在的必要条件). 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 具有二阶导数, 则点 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点的必要条件是 $f''(x_0)=0$.

例 2.6.10 (2008 数二). 求曲线 $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标.

因为 $y'=\dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\dfrac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}$, $y''=\dfrac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}=\dfrac{10(x+1)}{9\sqrt[3]{x^4}}$, 显然 $y''(-1)=0$, $y''(0)$ 不存在, 由 y'' 的表达式可知在 $x=-1$ 两侧 y' 异号, 而 $x=0$ 两侧 y' 不变号, 因此拐点坐标为 $(-1,-6)$.

例 2.6.11 (2018 数二). 求曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程.

$y'=2x+\dfrac{2}{x}$, $y''=2-\dfrac{2}{x^2}$, 令 $y''=0\Rightarrow x=1$ (舍负), 拐点为 $(1,1)$, 切线的斜率为 $y'(1)=4$, 因此拐点处的切线方程为 $y=4x-3$.

例 2.6.12 (2011 数二). 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}t^3+t+\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t+\dfrac{1}{3} \end{cases}$ 确定, 求函数 $y=y(x)$ 的极值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

由题意 $x'(t)=t^2+1$, $x''(t)=2t$, $y'(t)=t^2-1$, $y''(t)=2t$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{t^2-1}{t^2+1},\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{x'^3(t)}=\frac{4t}{(t^2+1)^3}$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0\Rightarrow t=\pm1$, 当 $t=1$ 时, $x=\dfrac{5}{3}$, $y=-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}>0$, 所以 $y=-\dfrac{1}{3}$ 为极小值, 当 $t=-1$ 时, $x=-1$, $y=1$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}<0$, 所以 $y=1$ 为极大值.

令 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0\Rightarrow t=0\Rightarrow x=y=\dfrac{1}{3}$, 当 $t<0$ 时, $x<\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}<0$, 则曲线 $y=y(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$ 上是凸的, 当 $t>0$ 时, $x>\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}>0$, 则曲线 $y=y(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$ 上是凹的, 点 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ 是曲线的拐点.

2.6.3 导数的几何意义与曲线的曲率

导数的几何意义

导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率, 曲线 $y=f(x)$ 在点 M 的切线方程为 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, 法线方程 $y=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$ $(f'(x_0)\neq0)$.

例 2.6.13 (2008 数一). 求曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

等式 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 两端对 x 求导, 得 $\cos(xy)(y+xy')+\dfrac{y'-1}{y-x}=1$, 并令 $x=0$, $y=1$, 解得 $y'(0)=1$, 于是该曲线在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$.

例 2.6.14 (2010 数二). 曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x\ (a\neq0)$ 相切, 则 a 等于

A. 4e　　B. 3e　　C. 2e　　D. e

设曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x\ (a\neq0)$ 的公切点为 (x_0,y_0), 则 $\begin{cases} x_0^2=a\ln x_0 \\ 2x_0=\dfrac{a}{x_0} \end{cases}$, 解得 $x_0=\sqrt{\mathrm{e}}$, 那么 $a=2\mathrm{e}$, 故选 C.

例 2.6.15. 求对数螺线 $r=\mathrm{e}^{\theta}$ 在 $(r,\theta)=\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程.

由图 *4.2.4* 知对数螺线的参数方程为 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^{\theta}\cos\theta \\ y=\mathrm{e}^{\theta}\sin\theta \end{cases}$ 那么

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1$$

因此在 $(r,\theta)=\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow(x,y)=\left(0,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\right)$ 处的切线的直角坐标方程为 $x+y=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.

曲线的曲率

定义 2.6.6 (曲率). 在曲线 L 上, 点 N 沿曲线 L 趋于点 M 时, 如果极限 $\lim\limits_{\Delta s\to0}\bar{K}=\lim\limits_{\Delta s\to0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ 存在, 则称此极限值为曲线 L 在点 M 处的曲率, 记作 $K=\lim\limits_{\Delta s\to0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$. 在 $\lim\limits_{\Delta s\to0}\dfrac{\Delta\alpha}{\delta s}=\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$ 存在的条件下, K 也可以表示为 $K=\left|\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|$. ($\Delta\alpha$ 为动点 N 移动到 M 时切线转过的角度, Δs 为弧段 $\widehat{NM}$ 的长度).

定理 2.6.9 (曲率的计算公式). 设曲线的直角坐标方程是 $y=f(x)$, 且 $f(x)$ 具有二阶导数, 则曲率公式为

$$K=\frac{|y''|}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}$$

若曲线方程由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 给出, 则可利用参数方程确定的函数的求导法, 求出 y'_x 及 y''_x 代入曲率公式即可.

例 2.6.16 (2012 数二). 求曲线 $y=x^2+x\ (x<0)$ 上曲率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标.

$y'=2x+1$, $y''=2$, 那么 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow(2x+1)^2=1\Rightarrow x=0,-1$, 又 $x<0$, 故坐标为 $(-1,0)$.

例 2.6.17 (2018 数二). 求曲线 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率.

法一: 求出各分量代入曲率公式 $K=\dfrac{|y''x'-x''y'|}{\left[(x')^2+(y')^2\right]^{3/2}}$,

$$x'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-3\cos^2 t\sin t\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{3\sqrt{2}}{4},\ x''\left(\frac{\pi}{4}\right)=6\cos t\sin^2 t-3\cos^3 t\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sin^2\cos t\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{4},\ y''\left(\frac{\pi}{4}\right)=6\sin t\cos^2 t-3\sin^3 t\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

于是 $K=\dfrac{2}{3}$.

法二: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}=-\tan t$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{1}{3\cos^4 t\sin t}$, 于是 $K=\dfrac{|y''|}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}=\dfrac{2}{3}$.

2.6.4 导数不等式证明中的应用

例 2.6.18. 设 $\{a_n\}$ 为常数列, 且 $\left|\sum\limits_{k=1}^n a_k\sin(kx)\right|\leqslant|\sin x|$, $\left|\sum\limits_{k=1}^n a_{n-k+1}\sin(kx)\right|\leqslant|\sin x|$, 证明:

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k\right|\leqslant\frac{2}{n+1}.$$

证 分别令 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^n a_k\sin(kx)$, $g(x)=\sum\limits_{k=1}^n a_{n-k+1}\sin(kx)$, 则 f,g 在定义域内连续, 且 $f(0)=g(0)=0$, 于是

$$f'(x)=\sum_{k=1}^n ka_k\cos kx,\ g'(x)=\sum_{k=1}^n ka_{n-k+1}\cos kx$$

由 *Lagrange* 中值定理知, $\exists\xi_1,\xi_2\in(0,x)$, 使得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi_1)x\Rightarrow f(x)=f'(\xi_1)x,\ g(x)-g(0)=g'(\xi_2)x\Rightarrow g(x)=g'(\xi_2)x$$

因此 $f'(\xi_1)+g'(\xi_2)=\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{g(x)}{x}$, 一方面

$$\left|f'(\xi_1)+g'(\xi_2)\right|=\left|\frac{f(x)}{x}+\frac{g(x)}{x}\right|\leqslant\left|\frac{f(x)}{x}\right|+\left|\frac{g(x)}{x}\right|\leqslant 2\left|\frac{\sin x}{x}\right|\to 2\ \ (x\to 0)$$

另一方面当 $x \to 0$ 时, $\xi_1, \xi_2 \to 0$, 则

$$\left|f'(0)+g'(0)\right| \to \left|\sum_{k=1}^{n} k a_k + \sum_{k=1}^{n} k a_{n-k+1}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} k a_k + \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}[k+(n-k+1)]a_k\right| = (n+1)\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|$$

所以, 当 $x \to 0$ 时, 有 $(n+1)\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant 2 \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \dfrac{2}{n+1}$.

第 3 章

一元函数积分学

"埋头苦干是第一, 发白才知智叟. 呆勤能补拙是良训, 一分辛苦一分才."

——华罗庚

一元函数积分学是微积分的另一个重要分支, 主要研究一元函数的不定积分、定积分和积分应用. 下面简要介绍一元函数积分学的几个重要概念:

1. 不定积分: 不定积分是积分学中的一种基本概念, 也称为原函数. 对于一元函数 $f(x)$, 其不定积分记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$, 表示求函数 $f(x)$ 的反导函数. 不定积分的结果是一个函数, 其导数为原函数 $f(x)$.

2. 定积分: 定积分是积分学中的另一个重要概念, 表示函数在一个区间上的积分值. 对于一元函数 $f(x)$, 其在区间 $[a,b]$ 上的定积分表示为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 表示函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的面积或有符号的累积量. 定积分可以理解为曲线下的面积, 也可以用来计算函数在给定区间上的平均值等.

3. 积分法: 积分法是求解不定积分和定积分的方法. 常见的积分法包括换元法、分部积分法、三角代换法等. 通过运用这些积分法, 可以求解各种类型的积分, 包括有理函数、三角函数、指数函数等的积分.

4. 积分应用: 积分在物理学、工程学、经济学等领域有着广泛的应用. 例如, 积分可以用来计算曲线下的面积、求解物体的质心、计算定积分表示的总量等. 积分应用也包括微积分基本定理、积分中值定理等.

一元函数积分学是微积分的重要组成部分, 它与微分学相辅相成, 共同构成了微积分学的理论体系. 通过学习一元函数积分学, 可以更深入地理解函数的面积、累积量和平均值等概念, 为解决实际问题提供了有力的数学工具.

3.1 不定积分

3.1.1 基础类型

多项式型

常用多项式不定积分公式:

$ax+b$

(1) $\displaystyle\int (ax+b)^n \mathrm{d}x = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$ (2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x(ax+b)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{b}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + C$ (4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(ax+b)}\mathrm{d}x = \frac{a}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| - \frac{1}{bx} + C$

(5) $\displaystyle\int \frac{x}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}(ax+b-b\ln|ax+b|) + C$

(6) $\displaystyle\int \frac{x^2}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a^3}\left[(ax+b)^2 - 4b(ax+b) + 2b^2\ln|ax+b|\right] + C$

$x^2 \pm \alpha^2$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\arctan\frac{x}{\alpha} + C$ (8) $\displaystyle\int \frac{1}{\pm x^2 \mp \alpha^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{x\mp\alpha}{\pm x+\alpha}\right) + C$

---

ax^2+b

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{b}} + C$

例 3.1.1. 求下列不定积分.

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^8(1+x^2)}$.	(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^{10})}$.	(3) $\displaystyle\int \frac{x^{11}}{(1+x^8)^2}$.	(4) $\displaystyle\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}\mathrm{d}x$.
(5) $\displaystyle\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{(1+x^8)^2}$.	(6) $\displaystyle\int \frac{x^{14}}{(x^5+1)^4}\mathrm{d}x$.	(7) $\displaystyle\int \frac{x^5\mathrm{d}x}{x^6-x^3-2}$.	(8) $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4-2x^2-1}$.
(9) $\displaystyle\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{x^4-x^2+2}$.	(10) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\mathrm{d}x$.	(11) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$.	(12) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}$.

(1) 运用倒代换

$$\text{原式} \xlongequal{\frac{1}{x}=t} -\int \frac{t^8\mathrm{d}t}{t^2+1} = -\int \left(t^6-t^4+t^2-1\right)\mathrm{d}t - \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$
$$= -\frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + t - \arctan t + C = -\frac{1}{7x^7} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} - \arctan\frac{1}{x} + C.$$

(2) 原式 $\displaystyle\xlongequal{\frac{1}{x}=t} -\int \frac{t^9\mathrm{d}t}{1+t^{10}} = -\frac{1}{10}\int \frac{\mathrm{d}\left(t^{10}+1\right)}{t^{10}+1} = -\frac{1}{10}\ln\left(t^{10}+1\right) + C = -\frac{1}{10}\ln\left(x^{-10}+1\right) + C.$

(3) 原式 $\displaystyle\xlongequal{x^4=t} \frac{1}{4}\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \frac{t}{2(t^2+1)}\right] = \frac{1}{8}\left(\arctan x^4 - \frac{x^4}{x^8+1}\right) + C.$

(4) 与上题类似,

$$I \xlongequal{x^4=t} \frac{1}{4}\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{t^2+3t+2} = \frac{1}{4}\int \mathrm{d}t - \frac{1}{4}\int \frac{3t+2}{t^2+3t+2}\mathrm{d}t = \frac{t}{4} - \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(t^2+3t+2\right)}{t^2+3t+2} - \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}\right]$$

$$= \frac{t}{4} - \frac{3}{8}\ln\left(t^2+3t+2\right) + \frac{\sqrt{5}}{8}\ln\left(\frac{t-\frac{\sqrt{5}}{2}}{t+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right) + C = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{8}\ln\left(x^8+3x^4+2\right) + \frac{\sqrt{5}}{8}\ln\left(\frac{2x^4-\sqrt{5}}{2x^4+\sqrt{5}}\right) + C.$$

(5) 与上题类似, 并注意 $(\arctan t)' = \dfrac{1}{1+t^2}$,

$$原式 \xlongequal{x^4=t} \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \xlongequal{u=\arctan t} \frac{1}{4}\int\cos^2 u\mathrm{d}u = \frac{1}{8}\int(\cos 2u+1)\mathrm{d}u = \frac{\sin 2u}{16} + \frac{u}{8} + C$$
$$= \frac{x^4}{8\left(1+x^8\right)} + \frac{\arctan x^4}{8} + C.$$

(6) 因为 $\dfrac{x^{14}\mathrm{d}x}{\left(x^5+1\right)^4} = \dfrac{x^{14}\mathrm{d}x}{x^{20}\left(1+x^{-5}\right)^4} = -\dfrac{1}{5}\left(1+x^{-5}\right)^{-4}\mathrm{d}\left(1+x^5\right)$, 所以

$$原式 = -\frac{1}{5}\int\left(1+x^{-5}\right)^{-4}\mathrm{d}\left(1+x^{-5}\right) = \frac{1}{15}\left(1+x^{-5}\right)^{-3} + C = -\frac{3x^{10}+3x^5+1}{15\left(x^5+1\right)^3} + C.$$

(7) $原式 = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int\frac{x^3\mathrm{d}x^3}{\left(x^3-2\right)\left(x^3+1\right)} = \dfrac{1}{9}\displaystyle\int\left(\frac{2}{x^3-2}+\frac{1}{x^3+1}\right)\mathrm{d}x^3 = \dfrac{1}{9}\ln\left[\left(x^3-2\right)^2\left|x^3+1\right|\right] + C.$

(8) $原式 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x}{\left(x^2-1\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}}\right| + C.$

(9) 用“凑微分”的方法, 有

$$原式 = \frac{1}{2}\int\frac{x^2\mathrm{d}x^2}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} = \frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\mathrm{d}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} + \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left(x^4-x^2+2\right) + \frac{1}{2\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{7}}\right) + C.$$

(10) 注意到 $x^2 = [(x-1)+1]^2$, 所以

$$\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}\mathrm{d}x = \int\frac{[(x-1)+1]^2}{(1-x)^{100}}\mathrm{d}x = \int\left[(1-x)^{-98} - 2(1-x)^{-99} + (1-x)^{-100}\right]\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{97(1-x)^{97}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{99(1-x)^{99}} + C.$$

(11) 注意到 $1 = \dfrac{x^2+1}{2} - \dfrac{x^2-1}{2}$.

$$原式 = \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}\mathrm{d}x \xlongequal[v=x+\frac{1}{x}]{u=x-\frac{1}{x}} \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+2} - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}v}{v^2-2}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{v-\sqrt{2}}{v+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| + C.$$

(12) 对分母进行因式分解.

$$原式 = \int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)} = \int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-\sqrt{3}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&=\int\left(\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{Fx+G}{x^2+\sqrt{3}x+1}\right)\mathrm{d}x\\
&\xlongequal[\left(0,\frac{1}{3},-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{3},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{3}\right)]{(A,B,D,E,F,G)}\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}+\frac{1}{6\sqrt{3}}\int\frac{3x+2\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{6\sqrt{3}}\int\frac{3x-2\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

其中 $\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=\frac{1}{3}\arctan x+C$,

$$
\begin{aligned}
\int\frac{3x+2\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}&=\frac{3}{2}\int\frac{2x+\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}\mathrm{d}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{3}x+1}\\
&=\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right)}{x^2+\sqrt{3}x+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\\
&=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right)+\sqrt{3}\arctan\left(2x+\sqrt{3}\right)+C,
\end{aligned}
$$

同理

$$
\int\frac{3x-2\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\ln\left(x^2-\sqrt{3}x+1\right)-\sqrt{3}\arctan\left(2x-\sqrt{3}\right)+C,
$$

综上原式$=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{\arctan\left(2x+\sqrt{3}\right)}{6}+\frac{\arctan\left(2x-\sqrt{3}\right)}{6}+\frac{\arctan x}{3}+C.$

例 3.1.2. 求下列不定积分.

(1) $\int\frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\mathrm{d}x.$	(2) $\int\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\mathrm{d}x.$	(3) $\int\frac{x^n}{\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}}\mathrm{d}x.$	(4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}.$

(1) 当 $n\neq 0$ 时,

$$
原式=\int\frac{x^n\cdot x^{n-1}}{x^n+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int\frac{x^n\mathrm{d}x^n}{x^n+1}=\frac{1}{n}\int\mathrm{d}x^n-\frac{1}{n}\int\frac{\mathrm{d}x^n}{x^n+1}=\frac{x^n}{n}-\frac{\ln|x^n+1|}{n}+C,
$$

当 $n=0$ 时, 原式 $=\int\frac{\mathrm{d}x}{2x}=\frac{1}{2}\ln|x|+C.$

(2) 当 $n\neq 0$ 时,

$$
\begin{aligned}
原式&=\int\frac{x^{2n}x^{n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int\frac{x^{2n}\mathrm{d}x^n}{(x^{2n}+1)^2}=\frac{1}{n}\int\frac{(x^{2n}+1)-1}{(x^{2n}+1)^2}\mathrm{d}x^n=\frac{1}{n}\int\frac{\mathrm{d}x^n}{x^{2n}+1}-\frac{1}{n}\int\frac{\mathrm{d}x^n}{(x^{2n}+1)^2}\\
&=\frac{1}{n}\arctan x^n-\frac{1}{n}\left[\frac{x^n}{2\left(x^{2n}+1\right)}+\frac{1}{2}\arctan x^n\right]+C=\frac{1}{2n}\left(\arctan x^n-\frac{x^n}{x^{2n}+1}\right)+C,
\end{aligned}
$$

当 $n=0$ 时, 原式 $=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{1}{4}\ln|x|+C.$

(3) 令 $P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$, 于是

$$
P'(x)=1+x+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}
$$

于是 $x^n=n!(P(x)-P'(x))$, 故

$$
原式=n!\int\left(1-\frac{P'(x)}{P(x)}\right)\mathrm{d}x=n!(x-\ln P(x))+C=n!\left(x-\ln\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)+C.
$$

(4) 先将被积函数分解成部分分式之和, 可以证明:

$$
\frac{1}{1+x^{2n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}
$$

记多项式 $x^{2n}+1$ 的 $2n$ 个根为 $a_k(k=1,2,\cdots,2n)$, 显然 $a_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{2k-1}{2n}\pi$, 其中 $\mathrm{i}^2=-1$, 于是

$$
|a_k|=1,\ a_k^{2n}=-1,\ \bar{a}_k=a_{2n-k+1},a_k\bar{a}_k=1,\ a_k+\bar{a}_k=2\cos\frac{2k-1}{2n}\pi
$$

设 $\dfrac{1}{1+x^{2n}}=\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{A_k}{x-a_k}\Rightarrow 1=\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{A_k\left(1+x^{2n}\right)}{x-a_k}$，令 $x\to a_i$，由 *L'Hospital* 法则，得

$$1=\lim_{x\to a_i}\sum_{k=1}^{2n}\frac{A_k\left(1+x^{2n}\right)}{x-a_k}=\lim_{x\to a_i}\frac{A_i\left(1+x^{2n}\right)}{x-a_i}=\lim_{x\to a_i}\left(2nA_ix^{2n-1}\right)=2nA_i\frac{a_i^{2n}}{a_i}=-\frac{2nA_i}{a_i}$$

即 $A_k=-\dfrac{a_k}{2n}\ (k=1,2,\cdots,2n)$，于是，

$$\frac{1}{1+x^{2n}}=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{a_k}{x-a_k}=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{x-a_k}+\frac{\bar{a}_k}{x-\bar{a}_k}\right)=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k+\bar{a}_k)\,x-2a_k\bar{a}_k}{x^2-(a_k+\bar{a}_k)\,x+a_k\bar{a}_k}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi+1}$$

最后得到

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int\frac{1-x\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi+1}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\int\frac{2x-2\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi+1}\mathrm{d}x\right)$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin^2\frac{2k-1}{2n}\pi\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi\right)^2+\sin^2\dfrac{2k-1}{2n}\pi}\right]$$

$$=\frac{-1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\ln\left(x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1\right)\right]+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\arctan\frac{x-\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi}{\sin\dfrac{2k-1}{2n}\pi}\right)+C.$$

有理分式快速分解

例 3.1.3. 分解 $F(x)=\dfrac{x+1}{(x+2)(x+3)}$.

设 $F(x)=\dfrac{x+1}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{k_1}{x+2}+\dfrac{k_2}{x+3}$，欲求 k_1，只需等式两边乘分母 $x+2$，并令 $x=-2$ 为分母的零点，即

$$k_1=(x+1)F(x)\Big|_{x=-2}=\frac{x+1}{x+3}\Big|_{x=-2}=-1$$

同理 $k_2=(x+2)F(x)\big|_{x=-3}=\dfrac{x+1}{x+2}\Big|_{x=-3}=2$，则 $F(x)=\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{1}{x+2}$.

例 3.1.4. 分解 $F(x)=\dfrac{x+3}{(x+1)^2(x+2)}$.

设 $F(x)=\dfrac{x+3}{(x+1)^2(x+2)}=\dfrac{k_{11}}{(x+1)^2}+\dfrac{k_{12}}{x+1}+\dfrac{k_2}{x+2}$，与上题类似，

$$k_{11}=(x+1)^2F(x)\Big|_{x=-1}=\frac{x+3}{x+2}\Big|_{x=-1}=2$$

$$k_{12}=\frac{\mathrm{d}(x+1)^2F(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=-1}=\frac{x+3}{x+2}\Big|_{x=-1}=-1$$

$$k_2=(x+2)F(x)\Big|_{x=-2}=\frac{x+3}{(x+1)^2}\Big|_{x=-2}=1$$

于是 $F(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$.

例 3.1.5. (2019 数二) 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$.

设 $F(x)=\dfrac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\dfrac{k_{11}}{(x-1)^2}+\dfrac{k_{12}}{x-1}+\dfrac{k_{21}x+k_{22}}{x^2+x+1}$, 则有

$$k_{11}=(x-1)^2F(x)\Big|_{x=1}=\frac{3x+6}{x^2+x+1}\Big|_{x=1}=3$$

$$k_{12}=\frac{\mathrm{d}(x-1)^2F(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1}=\frac{-3x^2-12x-3}{(x^2+x+1)^2}\Big|_{x=1}=-2$$

并分别令 $x=0,2$, 得方程组

$$\begin{cases}k_{11}-k_{12}+k_{22}=6\\ k_{11}+k_{12}+\dfrac{2k_{21}+k_{22}}{7}=\dfrac{12}{7}\end{cases}$$

因为 $k_{11}=3,k_{12}=-2$, 故解得 $k_{21}=1,k_{22}=2$, 于是

$$F(x)=\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{-2}{x-1}+\frac{x+2}{x^2+x+1}$$

那么不定积分有

$$I=\int F(x)\mathrm{d}x=3\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}-2\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=-\frac{3}{x-1}-2\ln|x-1|+\ln\left(x^2+x+1\right)+C.$$

Ostrogradsky 法 所谓 Ostrogradsky 法, 是指关于有理真分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 的积分, 可以借助代数方法来分离成一个真分式与另外一个真分式积分的和, 使得在新的被积真分式函数中其分母次数达到最低状态, 也即在公式

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\mathrm{d}x$$

中, 如果 $P(x),Q(x)$ 已知, 且设分母 $Q(x)$ 可以分解成一次与二次类型的实因式:

$$Q(x)=(x-a)^k\cdots(x^2+px+q)^m\cdots$$

其中 $k,\cdots,m,\cdots$ 是正整数.

例 3.1.6. 试用 Ostrogradsky 法求解例题 3.1.5.

原不定积分可化为

$$\int\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x=\frac{a}{x-1}+\int\left(\frac{b}{x-1}+\frac{cx+d}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x$$

对等式两边求导, 并对比等式两边分子的系数, 有

$$\begin{cases}-a & -b & & +d & = & 6\\ -a & & +c & -2d & = & 3\\ -a & & -2c & +d & = & 0\\ & b & +c & & = & 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=-2\\ c=2\\ d=1\end{cases}$$

于是

$$\text{原式}=-\frac{3}{x-1}+\int\frac{-2}{x-1}\mathrm{d}x+\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=-\frac{3}{x-1}-2\ln|x-1|+\ln\left(x^2+x+1\right)+C.$$

例 3.1.7. 求 $\displaystyle\int\frac{x^3}{\left(x^2-2x+2\right)^2}\mathrm{d}x$.

设 $\displaystyle\int\frac{x^3}{\left(x^2-2x+2\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{Ax+B}{x^2-2x+2}+\int\frac{Dx+E}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$,

$$\left(\frac{Ax+B}{x^2-2x+2}+\int\frac{Dx+E}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x\right)'=\frac{A\left(x^2-2x+2\right)-(2x-2)(Ax+B)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}+\frac{(Dx+E)\left(x^2-2x+2\right)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$$

解得 $(A,B,D,E)=(-1,0,1,1)$, $\int\frac{x^3}{(x^2-2x+2)^2}\mathrm{d}x=-\frac{x}{x^2-2x+2}+\int\frac{x+1}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int\frac{x+1}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2-2x+2\right)}{x^2-2x+2}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+2}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+2\right)+2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2+1}\\&=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+2\right)+2\arctan(x-1)+C\end{aligned}$$

综上, 原式 $=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+2\right)+2\arctan(x-1)-\frac{x}{x^2-2x+2}+C$.

例 3.1.8. 求 $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$.

法一: 设 $\frac{x^2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=\left(\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}\right)'+\frac{Dx+E}{x^2+2x+2}$, 从而

$$x^2\equiv A\left(x^2+2x+2\right)-2(x+1)(Ax+B)+(Dx+E)\left(x^2+2x+2\right)$$

解得 $A=0,B=1,D=0,E=1$, 于是,

$$\text{原式}=\frac{1}{x^2+2x+2}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=\frac{1}{x^2+2x+2}+\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}=\frac{1}{x^2+2x+2}+\arctan(x+1)+C.$$

法二:

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int\frac{\left(x^2+2x+2\right)-(2x+2)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}-\int\frac{(2x+2)}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}-\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2+2x+2\right)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=\arctan(x+1)+\frac{1}{x^2+2x+2}+C.\end{aligned}$$

根式型

常用根式不定积分公式:

$\sqrt{a^2+x^2}\ (a>0)$

(1) $\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}+\frac{1}{2}a^2\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C.$

(2) $\int\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\mathrm{d}x=\sqrt{a^2+x^2}-a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right)+C.$

(3) $\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C.$

(4) $\int\frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\ln\left(\frac{x}{a+\sqrt{a^2+x^2}}\right)+C.$

$\sqrt{x^2-a^2}\ \left(x^2>a^2\right)$

(5) $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C.$

$\sqrt{a^2-x^2}\ \left(a^2>x^2\right)$

(6) $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$

(7) $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\mathrm{d}x=\sqrt{a^2-x^2}-a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)+C.$

(8) $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{a}+C=-\arccos\frac{x}{a}+C.$

(9) $\int\frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)+C.$

例 3.1.9. 求下列不定积分

$$(1)\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}.\quad(2)\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}.\quad(3)\int\frac{\operatorname{arccot}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x.\quad(4)\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x.$$

(1) **法一:** 倒代换

$$\text{原式}\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\int\frac{t}{\sqrt{t-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=-\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t-1}}=-2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{t-1}}{1+\left(\sqrt{t-1}\right)^2}=-2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}+C.$$

法二: $\text{原式}=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}=2\arcsin\sqrt{x}+C.$

法三: $\text{原式}=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}=\arcsin(2x-1)+C.$

(2) **法一:** $\text{原式}\xlongequal{\sqrt{x}=t}2\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=2\arctan t+C=2\arctan\sqrt{x}+C.$

法二: $\text{原式}\xlongequal[0<t<\frac{\pi}{2}]{\sqrt{x}=\tan t}2\displaystyle\int\mathrm{d}t=2t+C=2\arctan\sqrt{x}+C.$

法三: $\text{原式}=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=2\sqrt{x}+\ln|1+x|+C.$

(3) $\text{原式}\xlongequal{\operatorname{arccot}\sqrt{x}=t}-2\displaystyle\int t\mathrm{d}t=-t^2+C=-\operatorname{arccot}^2\sqrt{x}+C.$

(4) $\text{原式}\xlongequal{\sqrt{x}=t}\displaystyle\int\frac{2t^2}{\sqrt{1-t^3}}\mathrm{d}t=-\frac{4}{3}\int\mathrm{d}\sqrt{1-t^3}=-\frac{4}{3}\sqrt{1-t^3}+C=-\frac{4}{3}\sqrt{1-x^{\frac{3}{2}}}+C.$

常见的处理手法 利用公式 $\displaystyle\int\frac{P_n(x)}{R}\mathrm{d}x=Q_{n-1}(x)R+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{R}$, 其中 $R=\sqrt{ax^2+bx+c}$, $P_n(x)$ 为 n 次多项式, $Q_{n-1}(x)$ 为 $n-1$ 次多项式, λ 为常数.

Euler 代换 对于含有二次无理式的一般积分 $\displaystyle\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$, 其中 $R(u,v)$ 是二元有理函数, 则可作 Euler 代换, 它有三种形式:

(1) 若 $a>0$, 则可令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$;

(2) 若 $c>0$, 则可令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$;

(3) 对于根号内为可约的二次三项式, 则可令 $\sqrt{a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}=t\left(x-x_1\right)$.

根式代换 $\displaystyle\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ 型不定积分, 其中 $R(u,v)$ 为二元有理函数. 令 $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

例 3.1.10. 求下列不定积分

$$(1)\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}.\quad(2)\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-4}}.\quad(3)\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(4)\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.\quad(5)\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+2}}.\quad(6)\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$(7)\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4-x^2}}.\quad(8)\int x^3\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x.\quad(9)\int\frac{\sqrt{16-x^2}}{x}\mathrm{d}x.$$

$$(10)\int\frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}\mathrm{d}x.\quad(11)\int\frac{2x^3+x^2-1}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.\quad(12)\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x.$$

(1) **法一:** 原式 $\xlongequal[\sqrt{x^2-1}=x+t]{\text{第一 Euler 代换}} 2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=2\arctan t+C=2\arctan\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)+C.$

法二: 原式 $\xlongequal[\sqrt{x^2-1}=t(x-1)]{\text{第三 Euler 代换}} 2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=2\arctan t+C=-2\arctan\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}+C.$

法三: 原式 $=\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{x^2-1}}{\left(\sqrt{x^2}-1\right)^2+1}=\arctan\sqrt{x^2+1}+C.$

(2) 原式 $\xlongequal{x=\frac{1}{t}}-\int\frac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{1-4t^2}}=\frac{1}{4}\int\mathrm{d}\sqrt{1-4t^2}=\frac{\sqrt{1-4t^2}}{4}+C=\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+C.$

(3) **法一:** 三角代换.

$$\begin{aligned}\text{原式}&\xlongequal{x=\sin t}\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{1+\cos t}=\int\left(1-\frac{1}{1+\cos t}\right)\mathrm{d}t=t-\tan\frac{t}{2}+C\\&=\arcsin x-\tan\frac{\arcsin x}{2}+C=\arcsin x-\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}+C.\end{aligned}$$

法二: 原式 $=\int\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2}-\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=\arcsin x+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{1}{x}+C.$

其中

$$\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+C.$$

(4) 原式 $\xlongequal{x=\tan t}\int\cos t\mathrm{d}t=\sin t+C=\sin\arctan x+C=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C.$

(5) 三角代换.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\xlongequal{x+1=\tan t}\int\frac{\tan t-1}{\cos t}\mathrm{d}t=-\int\frac{\mathrm{d}\cos t}{\cos^2 t}-\int\sec t\mathrm{d}t\\&=\sec t-\ln|\sec t+\tan t|+C=\sqrt{(x+1)^2+1}-\ln\left|\sqrt{(x+1)^2+1}+x+1\right|+C.\end{aligned}$$

(6) Euler 代换转化为多项式函数.

$$\begin{aligned}\text{原式}&\xlongequal[\sqrt{x^2+x+1}=t-x]{\text{第一 Euler 代换}}\int\frac{2(t^2+t+1)}{t(2t+1)^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\frac{t^2+2+1}{t\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int\left[-\frac{3}{t+\frac{1}{2}}-\frac{3}{t\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{4}{t}\right]\mathrm{d}t=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t+1|+\frac{3}{2(2t+1)}+C\\&=2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}+x\right|-\frac{3}{2}\ln\left|2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1\right|+\frac{3}{2\left(2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1\right)}+C.\end{aligned}$$

(7) **法一:** $\sqrt{4-x^2}=t\Rightarrow x=\pm\sqrt{4-t^2},\ \mathrm{d}x=\mp\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4-t^2}}$, 所以

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int\frac{1}{\pm t\sqrt{4-t^2}}\cdot\frac{\mp t}{\sqrt{4-t^2}}\mathrm{d}t=-\int\frac{\mathrm{d}t}{4-t^2}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2+\sqrt{4-x^2}}\right|+C.\end{aligned}$$

法二: 利用第二种 Euler 代换,

$$\sqrt{4-x^2}=xt-2\Rightarrow x=\frac{4t}{1+t^2},\ \mathrm{d}x=\frac{4\left(1-t^2\right)}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t,\ \sqrt{4-x^2}=\frac{2\left(-1+t^2\right)}{1+t^2}$$

$$\text{原式}=-\frac{1}{2}\int\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2+\sqrt{4-x^2}}\right|+C.$$

(8) 变量代换,

$$\begin{aligned}\text{原式}&\xlongequal{4-x^2=t}\frac{1}{2}\int(t-4)\sqrt{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t-2\int t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}+C\\&=\frac{x^4\sqrt{4-x^2}}{5}-\frac{4x^2\sqrt{4-x^2}}{15}-\frac{32\sqrt{4-x^2}}{15}+C.\end{aligned}$$

(9) 法一：$\sqrt{16-x^2}=t \Rightarrow x=\pm\sqrt{16-t^2}$，$\mathrm{d}x=\mp\dfrac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{16-t^2}}$，故

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{-t^2}{16-t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{16-t^2-16}{16-t^2}\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t - 16\int \frac{\mathrm{d}t}{4^2-t^2} \\
&= t - 2\ln\left|\frac{t+4}{-t+4}\right| + C = \sqrt{16-x^2} - 2\ln\left|\frac{-x^2+8\sqrt{16-x^2}+32}{x^2}\right| + C.
\end{aligned}$$

法二：$x=4\sin t$，$0<|t|<\dfrac{\pi}{2}$，$\mathrm{d}x=4\cos t\mathrm{d}t$，所以

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= 4\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t = 4\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t = 4\int \csc t\mathrm{d}t - 4\int \sin t\mathrm{d}t \\
&= 4\cos t - 4\ln|\csc t+\cot t| + C = \sqrt{16-x^2} - 4\ln\left|\frac{4+\sqrt{16-x^2}}{x}\right| + C.
\end{aligned}$$

(10) 原式 $=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x-x^2}} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}} + \int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}$，则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x-x^2}} \xlongequal[\sqrt{1+x-x^2}=tx-1]{\text{第二 Euler 换元}} \int \frac{-2\mathrm{d}t}{1+2t} = -\ln|1+2t| + C = -\ln\left|\frac{2\sqrt{1+x-x^2}+2+x}{x}\right| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C$$

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}} = \int \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C$$

故，原式$=-\ln\left|\dfrac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right| + \dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{1-2x}{\sqrt{5}}\right) - \sqrt{1+x-x^2} + C.$

(11) 注意到 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$，那么

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{2x^3}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\left(x^2-1\right) + \arcsin x \\
&= \int \frac{\mathrm{d}\left(x^2-1\right)}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{\mathrm{d}\left(x^2-1\right)}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x = \frac{2x^2-4}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x + C.
\end{aligned}$$

(12) 注意到 $\dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x = \dfrac{\operatorname{sgn} x\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}\mathrm{d}x = \dfrac{\operatorname{sgn} x\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}}$，所以

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\operatorname{sgn} x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{sgn} x\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}} = \operatorname{sgn} x\ln\left(x-\frac{1}{x}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\right) + C \\
&= \ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right| + C.
\end{aligned}$$

例 3.1.11. 求下列不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x.$	(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$	(3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x.$
(4) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x.$	(5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}.$	(6) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\mathrm{d}x.$
(7) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^3}}\mathrm{d}x.$	(8) $\displaystyle\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\mathrm{d}x.$	(9) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}.$

(1) 令 $\sqrt[6]{x+1}=t$, 那么 $x+1=t^6$, $\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$, 故

$$\begin{aligned}\text{原式}&=6\int\frac{t^5\left(1-t^3\right)}{1+t^2}\mathrm{d}t=6\int\left(-t^6+t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{t-1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t\\&=-\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4-2t^3-3t^2+6t+3\ln\left(t^2+1\right)-6\arctan t+C\end{aligned}$$

其中 $t=\sqrt[6]{x+1}$.

(2) 令 $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}=t$, 那么 $x=\dfrac{t^3+1}{t^3-1}$, $\mathrm{d}x=-\dfrac{6t^2\mathrm{d}t}{\left(t^3-1\right)^2}$, 于是

$$\text{原式}=\int\frac{\dfrac{-6t^2\mathrm{d}t}{\left(t^3-1\right)^2}}{\left(\dfrac{2t^3}{t^2-1}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{2}{t^3-1}\right)^{\frac{4}{3}}}=-\frac{3}{2}\int\mathrm{d}t=-\frac{3}{2}t+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

(3) **法一:** 设 $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=t$, 那么 $x=\dfrac{t^2+1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=-\dfrac{4t\mathrm{d}t}{\left(t^2-1\right)^2}\mathrm{d}t$, 故

$$\begin{aligned}\text{原式}&=-4\int\frac{t}{(t-1)(t+1)^3}\mathrm{d}t=\int\left[-\frac{2}{(t+1)^3}+\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{2(t+1)}-\frac{1}{2(t-1)}\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C.\end{aligned}$$

法二: 原式 $=\displaystyle\int\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C.$

(4) 因为原式 $=\displaystyle\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}$, 所以

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}\\&=\frac{2x-3}{4}\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C.\end{aligned}$$

(5) 令 $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=t$, 则 $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\mathrm{d}x=-\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$, $1-x=\dfrac{2t^2}{1+t^2}$, $\sqrt{1-x^2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$, 则

$$\text{原式}=-\frac{1}{2}\int\frac{1+t^2}{t^4}\mathrm{d}t=\frac{1}{6t^3}+\frac{1}{2t}+C=\frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}+C.$$

(6) 令 $\sqrt{x^2+2x+2}=t-x$, $x=\dfrac{t^2-2}{2(t+1)}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2}\mathrm{d}t$, $\sqrt{x^2+2x+2}=\dfrac{t^2+2t+2}{2(t+1)}$, 则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{1}{2}\int\frac{\left(t^2+2t+2\right)^2}{\left(t^2-2\right)(t+1)^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left[1+\frac{2}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{2\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{t}{2}+\ln|t+1|+\frac{1}{2(t+1)}-\sqrt{2}\ln\left|\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right|+C\\&=\sqrt{x^2+2x+2}+\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)-\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2\left(x^2+2x+2\right)}}{x}\right|+C\end{aligned}$$

(7) 设 $\displaystyle\int\frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}}=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{1+2x-x^3}+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^3}}$, 两边对 x 求导, 得

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}=(2ax+b)\sqrt{1+2x-x^2}+\frac{\left(ax^2+bx+c\right)(1-x)}{\sqrt{1+2x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

从而有

$$x^3\equiv(2ax+b)\left(1+2x-x^2\right)+\left(ax^2+bx+c\right)(1-x)+\lambda$$

比较等式两端 x 的系数, $\begin{cases} -3a & & & & = 1 \\ 5a & -2b & & & = 0 \\ 2a & +3b & -c & & = 0 \\ & b & +c & +\lambda & = 0 \end{cases}$, 解得 $a=-\dfrac{1}{5}, b=-\dfrac{5}{6}, c=-\dfrac{19}{6}, \lambda=4$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= -\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+4\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}} \\
&= -\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)+C.
\end{aligned}$$

(8) 设 $\displaystyle\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\mathrm{d}x=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{x^2+4x+3}+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+3}}$, 从而有

$$x^3-6x^2+11x-6\equiv(2ax+b)\left(x^2+4x+3\right)+(x+2)\left(ax^2+bx+c\right)+\lambda$$

比较等式两端 x 的系数, $\begin{cases} 3a & & & & = 1 \\ 10a & +2b & & & = -6 \\ 6a & +6b & +c & & = 11 \\ & 3b & +2c & +\lambda & = -6 \end{cases} \Rightarrow a=\dfrac{1}{3}, b=-\dfrac{14}{3}, c=37, \lambda=-66,$

$$\text{原式}=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{14}{3}x+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|+C.$$

(9) 设 $x-1=\dfrac{1}{t}$, 则 $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$, 不妨设 $t>0$, 则有 $\sqrt{x^2+3x+1}=\dfrac{\sqrt{5t^2+5t+1}}{t}$, 故

$$\text{原式}=-\int\frac{t^2}{\sqrt{5t^2+5t+1}}\mathrm{d}t=(at+b)\sqrt{5t^2+5t+1}+\lambda\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{5t^2+5t+1}}$$

从而有

$$-t^2\equiv a(1+5t+5t^2)+\left(55+\frac{5}{2}\right)(at+b)+\lambda$$

比较等式两端 t 的同次幂系数, 求得 $a=-\dfrac{1}{10}, b=\dfrac{3}{20}, \lambda=-\dfrac{11}{40}$, 于是

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \left(-\frac{t}{10}+\frac{3}{20}\right)\sqrt{5t^2+5t+1}-\frac{11}{40}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{5t^2+5t+1}} \\
&= \frac{3-2t}{20}\sqrt{5t^2+5t+1}-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}}\right|+C \\
&= \frac{3x-5}{20\,(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1}-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}\,(x+1)+2\sqrt{x^3+3x+1}}{x-1}\right|+C.
\end{aligned}$$

二项微分式的积分 $\displaystyle\int x^m\left(ax^n+b\right)^p\mathrm{d}x$, 式中 m, n 和 p 为有理数, 仅在下列三种情形可化为有理函数的积分:

(1) p 为整数, 此时令 $x=z^N$, 其中 N 为分数 m 和 n 的公分母;

(2) $\dfrac{m+1}{n}$ 为整数, 此时令 $ax^n+b=z^N$, 其中 N 为分数 p 的分母;

(3) $\dfrac{m+1}{n}+p$ 为整数, 此时利用代换: $a+bx^{-n}=z^N$, 其中 N 为分数 p 的分母.

若 $n=1$, 则这些情形等价于: (1) p 为整数. (2) m 为整数. (3) $m+p$ 为整数.

例 3.1.12. 求下列不定积分

(1) $\displaystyle\int\sqrt{x^3+x^4}\mathrm{d}x.$	(2) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}\mathrm{d}x.$	(3) $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}.$	(4) $\displaystyle\int\frac{x^5\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$

(1) $\sqrt{x^3+x^4}=x^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}$，则 $m=\dfrac{3}{2}$，$n=1$，$p=\dfrac{1}{2}$，那么 $\dfrac{m+1}{n}+p=3$，故令 $x^{-1}+1=z^2$，于是

$$x=\frac{1}{z^2-1},\ \mathrm{d}x=-\frac{2z}{(z^2-1)^2}\mathrm{d}z,\ \sqrt{x^3+x^4}=\frac{z}{(z^2-1)^2}$$

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=-2\int\frac{z^2}{(z^2-1)^4}\mathrm{d}z=-2\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)^4}-2\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)^3}\\
&=\frac{z}{3(z^2-1)^3}+\frac{z}{12(z^2-1)^2}-\frac{z}{8(z^2-1)}+\frac{1}{16}\ln\frac{z+1}{z-1}+C\\
&=\frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)+C\ (x>0).
\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}=x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}$，则 $m=\dfrac{1}{2}$，$n=\dfrac{1}{3}$，$p=-2$，由于 p 为整数，故令 $x=z^6$，

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=6\int\frac{z^8}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z=6\int\left[z^4-2z^2+3-\frac{4}{z^2+1}+\frac{1}{(z^2+1)^2}\right]\mathrm{d}z\\
&=\frac{6}{5}z^5-4z^3+18z-24\arctan z+6\left[\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan z\right]+C\\
&=\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-4x^{\frac{1}{2}}+18x^{\frac{1}{6}}+\frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}-21\arctan x^{\frac{1}{6}}+C.
\end{aligned}$$

(3) $\dfrac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=x\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$，则 $m=1$，$n=\dfrac{2}{3}$，$p=-\dfrac{1}{2}$，那么 $\dfrac{m+1}{n}=3$，故令 $1+x^{\frac{2}{3}}=z^2$，

$$\text{原式}=3\int\left(z^2-1\right)^2\mathrm{d}z=\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z+C$$

其中 $z=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$.

(4) $\dfrac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}=x^5\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$，则 $m=5$，$n=2$，$p=-\dfrac{1}{2}$，那么 $\dfrac{m+1}{n}=3$，故令 $1-x^2=z^2$，

$$\text{原式}=-\int\left(1-z^2\right)^2\mathrm{d}z=-z+\frac{2}{3}z^3-\frac{1}{5}z^5+C$$

其中 $z=\sqrt{1-x^2}$.

三角函数型

常用三角函数不定积分公式:

三角函数

(1) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$ (2) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$

(3) $\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$ (4) $\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$

(5) $\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$ (6) $\int \csc x\mathrm{d}x = -\ln|\csc x + \cot x| + C$

(7) $\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$ (8) $\int \cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$

(9) $\int \tan^2 x\mathrm{d}x = \tan x - x + C$ (10) $\int \cot^2 x\mathrm{d}x = -\cot x - x + C$

(11) $\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$ (12) $\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$

(13) $\int \sin^n x\mathrm{d}x = -\frac{\sin^{n-1} x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$ (14) $\int \cos^n x\mathrm{d}x = \frac{\sin x\cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$

(15) $\int \tan^n x\mathrm{d}x = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$ (16) $\int \cot^n x\mathrm{d}x = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$

(17) $\int \sec^n x\mathrm{d}x = \frac{\sec^{n-2} x\tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$ (18) $\int \csc^n x\mathrm{d}x = -\frac{\csc^{n-2} x\cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$

(19) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$ (20) $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$

反三角函数

(21) $\int \arcsin x\mathrm{d}x = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$ (22) $\int \arccos x\mathrm{d}x = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

(23) $\int \arctan x\mathrm{d}x = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} + C$ (24) $\int \operatorname{arccot} x\mathrm{d}x = x\operatorname{arccot} x + \ln\sqrt{1+x^2} + C$

(25) $\int \operatorname{arcsec} x\mathrm{d}x = x\operatorname{arcsec} x - \operatorname{sgn}(x)\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$

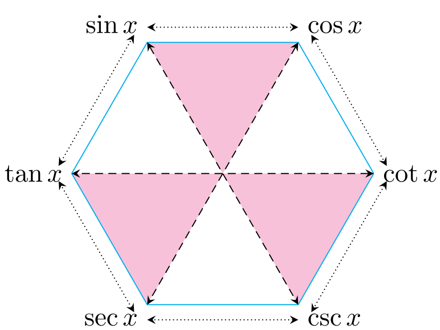
(26) $\int \operatorname{arccsc} x\mathrm{d}x = x\operatorname{arccsc} x + \operatorname{sgn}(x)\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$

各三角函数之间的关系图 下图可以很好的概括各三角函数之间的转化关系.

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccsc} x = \frac{\pi}{2}$



邻: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$

$\csc^2 x - \cot^2 x = 1$

间: $\cos x = \sin\cdot\cot x$

$\cot x = \cos\cdot\csc x$

其他情况类似

对: $\cos x\cdot\sec x = 1$

$\cot x\cdot\tan x = 1$

$\csc x\cdot\sin x = 1$

图 3.1.1

例 3.1.13. 求下列不定积分

(1) $\int \cos^5 x\mathrm{d}x.$	(2) $\int \sin^6 x\mathrm{d}x.$	(3) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}.$
(4) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x}.$	(5) $\int \tan^5 x\mathrm{d}x.$	(6) $\int \cot^6 x\mathrm{d}x.$

(1) **法一:** 因为 $\int \cos^n x\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\mathrm{d}x + C\ (\forall n \geqslant 2)$, 所以

$$原式 = \frac{1}{5}\cos^4 x\sin x + \frac{4}{5}\int \cos^3 x\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\cos^4 x\sin x + \frac{4}{15}\cos^2 x\sin x + \frac{8}{15}\sin x + C.$$

法二: 原式 $= \int \left(1-\sin^2 x\right)^2 \mathrm{d}\sin x = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$

(2) **法一:** 因为 $\int \sin^n x\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\mathrm{d}x + C\ (\forall n \geqslant 2)$, 所以

$$\begin{aligned}原式 &= -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x + \frac{5}{6}\int \sin^4 x\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\mathrm{d}x\right)\\ &= -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x\cos x - \frac{15}{48}\sin x\cos x + \frac{15}{48}x + C.\end{aligned}$$

法二: 用降幂公式再展开, 逐项积分,

$$\begin{aligned}原式 &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int \left(1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{x}{8} - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\mathrm{d}x - \frac{1}{8}\int \left(1-\sin^2 2x\right)\cos 2x\mathrm{d}x\\ &= \frac{x}{8} - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3x}{16} + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{16}\int \left(1-\sin^2 2x\right)\mathrm{d}(\sin 2x)\\ &= \frac{5x}{16} - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{16}\sin 2x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C\\ &= \frac{5x}{16} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.\end{aligned}$$

(3) 原式 $= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x} = -\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}(\cot x) = -\frac{\cot x}{\sin x} - \int \cot x\frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$
$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x} + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$, 于是 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$

(4) 原式 $= \int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right| + C = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

(5) **法一:** 因为 $\int \tan^n x\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - \int \tan^{n-2}x\mathrm{d}x + C\ (\forall n \geqslant 2)$, 所以

$$\begin{aligned}原式 &= \frac{1}{4}\tan^4 x - \int \tan^3 x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\tan^4 x - \left(\frac{1}{2}\tan^2 x - \int \tan x\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C.\end{aligned}$$

法二: 注意到 $1+\tan^2 x = \sec^2 x$, 所以

$$\begin{aligned}原式 &= \int \tan x\left(\sec^2 x - 1\right)^2 \mathrm{d}x = \left(\sec^4 x\tan x\mathrm{d}x - 2\right)\sec^2 x\tan x\mathrm{d}x + \int \tan x\mathrm{d}x\\ &= \int \sec^3 x\mathrm{d}\left(\sec x\right) - 2\int \sec x\mathrm{d}\left(\sec x\right) - \int \frac{\mathrm{d}\left(\cos x\right)}{\cos x} = \frac{1}{4}\sec^4 x - \sec^2 x - \ln|\cos x| + C.\end{aligned}$$

(6) **法一:** 因为 $\int \cot^n x\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1}x - \int \cot^{n-2}x\mathrm{d}x + C\ (\forall n \geqslant 2)$, 所以

$$\begin{aligned}原式 &= -\frac{1}{5}\cot^5 x - \int \cot^4 x\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\cot^5 x - \left(-\frac{1}{3}\cot^3 x - \int \cot^2 x\mathrm{d}x\right)\\ &= -\frac{1}{5}\cot^5 x + \frac{1}{3}\cot^3 x - \cot x - x + C.\end{aligned}$$

法二：注意到 $1+\cot^2 x=\csc^2 x$，所以

$$\begin{aligned}
原式 &= \int \cot^2 x\left(\csc^2 x-1\right)^2 \mathrm{d}x=\int \cot^2 x \csc^4 x \mathrm{d}x-2\int \cot^2 x \csc^2 x \mathrm{d}x+\int \cot^2 x \mathrm{d}x \\
&= -\int \cot^2 x\left(1+\cot^2 x\right) \mathrm{d}(\cot x)+2\int \cot^2 x \,\mathrm{d}(\cot x)+\int\left(\csc^2 x-1\right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{3}\cot^3 x-\frac{1}{5}\cot^5 x+\frac{2}{3}\cot^3 x-\cot x-x+C=-\frac{1}{5}\cot^5 x+\frac{1}{3}\cot^3 x-\cot x-x+C.
\end{aligned}$$

三角函数换元及万能公式 形如 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ (R 为有理函数) 的积分在一般情形下可利用代换 $\tan\frac{x}{2}=t$ 化为有理函数的积分, 即

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

(1) 若等式

$$R(-\sin x,\cos x)\equiv -R(\sin x,\cos x) \text{ 或 } R(\sin x,-\cos x)\equiv -R(\sin x,\cos x)$$

成立, 则最好利用相应的代换 $\cos x=t$ 或 $\sin x=t$.

(2) 若等式

$$R(-\sin x,-\cos x)\equiv R(\sin x,\cos x)$$

成立, 则最好利用代换 $\tan x=t$.

定理 3.1.1.
$$\int \sin^p x\cos^q x\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{q-1}{2}}(-1)^k \mathrm{C}_n^k \frac{\sin^{p+2k+1} x}{p+2k+1}+C, & p,q \text{ 为正奇数} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{-\frac{p+q}{2}-1}\mathrm{C}_{-\frac{p+q}{2}-1}^k \frac{\tan^{p+2k+1} x}{p+2k+1}+C, & p+q \text{ 为负偶数.}\end{cases}$$

定理 3.1.2 (高阶幂展开式). 正弦函数与余项函数的高阶幂展开式如下:

$$\cos^n x=\begin{cases}\displaystyle\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_n^k\sin((n-2k)x), & n \text{ 是奇数} \\ \displaystyle\frac{1}{2^{n-1}}\left[\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{C}_n^k\sin((n-2k)x)+\frac{1}{2}\mathrm{C}_n^{\frac{n}{2}}\right], & n \text{ 是偶数.}\end{cases}$$

$$\sin^n x=\begin{cases}\displaystyle\frac{1}{(2\mathrm{i})^{n-1}}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^k\mathrm{C}_n^k\cos((n-2k)x), & n \text{ 是奇数} \\ \displaystyle\frac{2}{(2\mathrm{i})^{n}}\left[\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}(-1)^k\mathrm{C}_n^k\cos((n-2k)x)+\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2}\mathrm{C}_n^{\frac{n}{2}}\right], & n \text{ 是偶数.}\end{cases}$$

例 3.1.14. 求下列不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3\sin x-4\cos x}$.	(2) $\displaystyle\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x$.	(3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$.
(4) $\displaystyle\int \frac{\cos x\mathrm{d}x}{\sin x(\sin x+\cos x)}$.	(5) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.	(6) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x$.

(1) 运用万能代换公式转为多项式函数.

$$I \xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} \int \frac{\dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\dfrac{6t}{1+t^2}-\dfrac{4(1-t^2)}{1+t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+3t-2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+2)(2t-1)}$$

$$= -\frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}t}{t+2} + \frac{2}{5}\int \frac{\mathrm{d}t}{2t-1} = -\frac{1}{5}\ln|t+2| + \frac{1}{5}\ln|2t-1| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\tan x/2-1}{\tan x/2+2}\right| + C.$$

(2) $\displaystyle\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}} = \frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}} + C.$

(3) 运用万能代换公式转为多项式函数.

$$I \xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} \int \frac{\dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\dfrac{4t}{1+t^2}-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+5} = \int \frac{\mathrm{d}t}{3t^2+2t+2} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{5}{9}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan x/2+1}{\sqrt{5}} + C.$$

(4) 运用万能代换公式转为多项式函数.

$$I \xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} \int \frac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}\left(\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{t^2-1}{t^3-2t^2-t}\mathrm{d}t = \int \frac{t^2-1}{t\left(t+\sqrt{2}-1\right)\left(t-\sqrt{2}-1\right)}\mathrm{d}t$$

$$= \int \left(\frac{-\sqrt{2}/2}{t+\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{2}/2}{t-\sqrt{2}-1} + \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}-1}{t+\sqrt{2}-1}\right| + \ln|t| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan x/2-\sqrt{2}-1}{\tan x/2+\sqrt{2}-1}\right| + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

(5) **法一:** 运用万能代换公式转为多项式函数, 再用奥斯特罗格拉德斯基法将其分解.

$$I \xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} \int \frac{4(t^3-t)}{(1+t^2)^2(t^2-2t-1)}\mathrm{d}t \xlongequal{Ost'} \frac{At+B}{1+t^2} + \int \left(\frac{Dt+E}{t^2-2t-1} + \frac{Ft+G}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$\left[\frac{At+B}{1+t^2} + \int \left(\frac{Dt+E}{t^2-2t-1} + \frac{Ft+G}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\right]' = \frac{-At^2-2Bt+A}{(t^2+1)^2} + \frac{Dt+E}{t^2-2t-1} + \frac{Ft+G}{t^2+1}$$

$$= \frac{4(t^3-1)}{(1+t^2)^2(t^2-2t-1)} \Rightarrow (A,B,D,E,F,G) = (1,-1,0,0,0,1)$$

所以

$$I = \frac{t-1}{t^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-2t-1} = \frac{t-1}{t^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2-2}$$

$$= \frac{t-1}{t^2+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{\tan x/2}{\tan^2 x/2+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan x/2-1-\sqrt{2}}{\tan x/2-1+\sqrt{2}}\right| + C.$$

法二:

$$\text{原式} = \int \frac{\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{1}{2}}{\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right| + C.$$

(6) 令 $\tan\dfrac{x}{2} = t$, 得

$$\text{原式} = 4\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2(1+t-t^2)} = \frac{4}{5}\int \left[\frac{1}{1+t^2} + \frac{t-2}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{1+t-t^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4}{5}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \frac{8}{5}\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} + \frac{2}{5}\int \frac{2t\mathrm{d}t}{(1+t^1)^2} + \frac{4}{5}\int \frac{\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{4}{5}\arctan t - \frac{8}{5}\left[\frac{t}{2\left(1+t^2\right)} + \frac{1}{2}\arctan t\right] - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1+t^2} + \frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{5}}{2}-\left(t-\frac{1}{2}\right)}\right| + C \\
&= -\frac{2}{5}\cdot\frac{1+2t}{1+t^2} + \frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}+t}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}-t}\right| + C = -\frac{1}{5}(\cos x + 2\sin x) + \frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\arctan 2}{2}\right)\right| + C.
\end{aligned}
$$

例 3.1.15. 求下列不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.	(2) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$.	(3) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\mathrm{d}x$.
(4) $\displaystyle\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$.	(5) $\displaystyle\int \frac{\tan^{\frac{1}{3}} x\mathrm{d}x}{(\sin x + \cos x)^2}$.	(6) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x\mathrm{d}x}{\csc^2 x + \cot^4 x}$.

(1) 原式 $\displaystyle= \int \frac{2\mathrm{d}x}{2-\sin^2 2x} = \int \frac{\mathrm{d}(\tan 2x)}{2\sec^2 2x - \tan^2 2x} = \int \frac{\mathrm{d}(\tan 2x)}{2+\tan^2 2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}} + C.$

(2) 原式 $\displaystyle= \int \frac{\tan x\sec^2 x}{\sec^4 x + \tan^4 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(\tan^2 x\right)}{2\tan^4 x + 2\tan^2 x + 1} = \frac{1}{2}\arctan\left(1+2\tan^2 x\right) + C.$

(3) 原式 $\displaystyle= \int \frac{-\cos 2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}\mathrm{d}x = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{2\cos 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x} + \frac{2\cos 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}\right)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{\sqrt{2}-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x} + C.$

(4) **法一：** 因为 $\sin x = \tan x\cdot\cos x$，所以

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\tan x}{\cos^2 x\left(\tan^3 x + 1\right)}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\tan x} \int \frac{t\mathrm{d}t}{t^3+1} = \int \frac{t\mathrm{d}t}{(t+1)(t^2-t+1)} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{t+1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t - \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}\left(t^2-t+1\right)}{t^2-t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} \\
&= \frac{1}{6}\ln\left(t^2-t+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\ln|t+1| + C \\
&= \frac{1}{6}\ln\left(\tan^2 x - \tan x + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x - 1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\ln|\tan x + 1| + C.
\end{aligned}
$$

法二： 因为 $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2+b^2-ab\right)$，所以

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)} = \frac{1}{2}\int \frac{(\sin x - \cos x)\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x\cos x} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{-(\cos x - \sin x)\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x} + \frac{1}{6}\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{1-\sin x\cos x}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x\cos x} \\
&= -\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} + \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}(1-\sin x\cos x)}{1-\sin x\cos x} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\cot x)}{\left(\cot x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
&= -\frac{1}{6}\ln\frac{(\sin x+\cos x)^2}{1-\sin x\cos x} - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\cos x - \sin x}{\sqrt{3}\sin x}\right) + C.
\end{aligned}
$$

(5) 注意到 $(\tan x)' = \sec^2 x$，则有

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\tan^{\frac{1}{3}} x\cdot\sec^2 x}{(\tan x+1)^2}\mathrm{d}x \xlongequal{\tan x = t} \int \frac{t^{\frac{1}{3}}}{(t+1)^2}\mathrm{d}t \xlongequal{t=z^3} 3\int \frac{z^3}{\left(z^3+1\right)^2}\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{3-z}{z^2-z+1}\mathrm{d}z + \int \frac{z-1}{\left(z^2-z+1\right)^2}\mathrm{d}z + \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}z}{z+1} - \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}z}{(z+1)^2}
\end{aligned}
$$

其中

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z+1}=\ln|z+1|+C,\ \int \frac{\mathrm{d}z}{(z+1)^2}=-\frac{1}{z+1}+C$$

$$\begin{aligned}\int \frac{3-z}{z^2-z+1}\mathrm{d}z &= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(z^2-z+1\right)}{z^2-z+1}+\frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\\ &= -\frac{1}{2}\ln\left(z^2-z+1\right)+\frac{5}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2z-1}{\sqrt{3}}+C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{z-1}{\left(z^2-z+1\right)^2}\mathrm{d}z &= \int \frac{z-1}{\left[\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}\mathrm{d}z \xlongequal{z-\frac{1}{2}=u} \int \frac{u-\frac{1}{2}}{\left(u^2+\frac{3}{4}\right)^2}\mathrm{d}u = \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{2u}{\left(u^2+\frac{3}{4}\right)}\mathrm{d}u}_{u^2+\frac{3}{4}=v}-\underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\left(u^2+\frac{3}{4}\right)}}_{u=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta}\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}v}{v^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{8\sqrt{3}}{9}\int \cos^2\theta\mathrm{d}\theta = -\frac{z+1}{3(z^2-z+1)}-\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2z-1}{\sqrt{3}}+C\end{aligned}$$

综上,

$$\text{原式}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan^{\frac{1}{3}}x-1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{6}\ln\left(\tan^{\frac{2}{3}}x-\tan^{\frac{1}{3}}x+1\right)+\frac{1}{3}\ln\left(\tan^{\frac{1}{3}}x+1\right)-\frac{\cos x\tan^{\frac{1}{3}}x}{\sin x+\cos x}+C.$$

(6) 分子分母同时乘以 $\sec^4 x\tan^4 x$, 有

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{\sec^2 x\tan^4 x\mathrm{d}x}{\sec^6 x\tan^2 x+\sec^4 x}=\int \frac{\sec^2 x\tan^4 x\mathrm{d}x}{(1+\tan^2 x)^2(1+\tan^2 x+\tan^4 x)}\\ &\xlongequal{\tan x=t} \int \frac{t^4\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2(t^2+t+1)(t^2-t+1)} \xlongequal{Ost'} \frac{at+b}{1+t^2}+\int\left(\frac{ct+d}{1+t^2}+\frac{et+f}{t^2+t+1}+\frac{gt+h}{t^2-t+1}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

则

$$\left[\int \frac{t^4\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2(t^2-t+1)(t^2+t+1)}\right]'=\left[\frac{at+b}{1+t^2}+\int\left(\frac{ct+d}{1+t^2}+\frac{et+f}{t^2+t+1}+\frac{gt+h}{t^2-t+1}\right)\mathrm{d}t\right]'$$

通分, 并对比等式两边分子的系数, 有

$$\begin{cases}\begin{array}{cccccccccc} & & c & & +e & & +g & & = & 0\\ -a & & & +d & +e & +f & -g & +h & = & 0\\ & -2b & +2c & & +3e & +f & +3g & -h & = & 0\\ & & & 2d & +2e & +3f & -2g & +3h & = & 1\\ & -2b & +2c & & +3e & +2f & +3g & -2h & = & 0\\ & & & 2d & +e & +3f & -g & +3h & = & 0\\ & -2b & +c & & +e & +3f & -g & +3h & = & 0\\ a & & & +d & & +f & & +h & = & 0\end{array}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=0\\ c=0\\ d=-\frac{1}{2}\\ e=\frac{1}{2}\\ f=0\\ g=-\frac{1}{2}\\ h=0\end{cases}$$

因此,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\int \frac{t\mathrm{d}t}{t^2-t+1}-\frac{1}{2}\int \frac{t\mathrm{d}t}{t^2+t+1}-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\\ &= \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{4}\ln\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]-\frac{1}{2}\arctan t+C\\ &= \frac{\tan x}{2\sec^2 x}+\frac{1}{4}\ln\frac{\tan^2 x-\tan x+1}{\tan^2 x+\tan x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2\tan x+1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2\tan x-1}{\sqrt{3}}\right]-\frac{x}{2}+C.\end{aligned}$$

指数型

常用指数函数不定积分公式:

(1) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C.$	(2) $\displaystyle\int \alpha^x \mathrm{d}x = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + C.$
(3) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{ax} \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}(ax-1)\mathrm{e}^{ax} + C.$	(4) $\displaystyle\int x^n\mathrm{e}^{ax} \mathrm{d}x = \frac{1}{a}x^n\mathrm{e}^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x.$

例 3.1.16. 求下列不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}.$	(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}.$	(3) $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x.$	(4) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\mathrm{d}x.$
(5) $\displaystyle\int \frac{1+x}{x(1+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x.$	(6) $\displaystyle\int \frac{\ln(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x}.$	(7) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}.$	(8) $\displaystyle\int \frac{1+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\left(1+\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}\right)^2}\mathrm{d}x.$

(1) **法一:** 令 $\mathrm{e}^x=t$, 那么原式$\displaystyle=\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\arctan \mathrm{e}^x+C.$

法二: 原式$\displaystyle=\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}=\arctan \mathrm{e}^x+C.$

(2) **法一:** 令 $\mathrm{e}^x=\tan t$, 那么原式$\displaystyle=\int\frac{\sec t}{\tan t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}t}{\sin t}=\int\csc t\mathrm{d}t=-\ln|\csc x+\cot x|+C.$

法二: 原式$\displaystyle\xlongequal{\mathrm{e}^x=t}\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^2}}\xlongequal{1+t^2=v^2}\int\frac{\mathrm{d}v}{v^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+1}-1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+1}+1}+C.$

(3) 原式$\displaystyle\xlongequal{\mathrm{e}^x=t}\int\frac{\ln t\mathrm{d}t}{\sqrt{t-1}}=2\int\ln t\mathrm{d}\sqrt{t-1}=2\sqrt{t-1}\ln t-2\int\frac{\sqrt{t-1}}{t}\mathrm{d}t,$

其中 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{t-1}}{t}\mathrm{d}t\xlongequal{\sqrt{t-1}=u}\int\frac{2u^2}{u^2+1}\mathrm{d}u=2u-2\arctan u+C=2\sqrt{t-1}-2\arctan\sqrt{t-1}+C$, 综上, 原式$=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-4\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C.$

(4) **法一:** 指数代换, 结合三角代换.

$$\begin{aligned}\text{原式}&\xlongequal{\mathrm{e}^x=t}\int\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\xlongequal{\sqrt{\frac{1-t^2}{1+t}}=u}-4\int\frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^2}\xlongequal{u=\tan v}-4\int\cos^2 v\mathrm{d}v\\&=-2\int(1+\cos 2v)\mathrm{d}v=-2v-\sin 2v+C=-2\arctan\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}{\mathrm{e}^x+1}-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}+C.\end{aligned}$$

法二: 指数代换, 结合 *Euler* 代换和 *Ostrogradsky* 法.

$$\begin{aligned}\text{原式}&\xlongequal{\mathrm{e}^x=t}\int\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\xlongequal[\sqrt{1-t^2}=ut+1]{\text{第二 Euler 代换}}\int\frac{1-\dfrac{2u}{u^2+1}}{1-\dfrac{2u^2}{u^2+1}}\cdot\frac{2u^2-2}{(u^2+1)^2}\mathrm{d}u=-2\int\frac{(u-1)^2}{(u^2+1)^2}\mathrm{d}u\\&\xlongequal{Ost'}-2\left(\frac{Au+B}{u^2+1}+\int\frac{Du+E}{u^2+1}\mathrm{d}u\right)\xlongequal{(A,B,D,E)=(0,1,0,1)}-2\left(\frac{1}{u^2+1}+\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}\right)\\&=\frac{-2}{u^2+1}-2\arctan u+C=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x-1}-2\arctan\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}-1}{\mathrm{e}^x}+C.\end{aligned}$$

(5) 原式$\displaystyle\xlongequal{x\mathrm{e}^x=t}\int\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t}-\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln\left|\frac{t}{1+t}\right|+C=\ln\left|\frac{x\mathrm{e}^x}{1+x\mathrm{e}^x}\right|+C.$

(6) 指数代换.

$$\begin{aligned}\text{原式}&\xlongequal{\mathrm{e}^x=t}\int\frac{\ln(t+1)}{t^2}\mathrm{d}t=-\int\ln(t+1)\mathrm{d}t^{-1}=-\frac{\ln(t+1)}{t}+\int\frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}\\&=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|-\frac{\ln(t+1)}{t}+C=\ln\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}-\frac{\ln(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x}+C.\end{aligned}$$

(7) 指数代换, 注意需要整体代换.

$$\text{原式} \xlongequal{1+\mathrm{e}^x=t} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2(t-1)} = -\int \frac{t+1}{t^2}\mathrm{d}t + \int \frac{\mathrm{d}t}{t-1} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$$
$$= \frac{1}{t} + \ln\left(1-\frac{1}{t}\right) + C = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} + \ln\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} + C.$$

(8) $\text{原式} \xlongequal{\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}=t} 4\int \frac{1+t^2}{t(1+t)^2}\mathrm{d}t = 4\int \left[\frac{1}{t} - \frac{2}{(1+t)^2}\right]\mathrm{d}t = 4\ln t + \frac{8}{1+t} + C = x + \frac{8}{1+\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}} + C.$

对数型

常用对数函数不定积分公式:

(1) $\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln x - x + C.$	(2) $\int \log_\alpha x\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln\alpha}(x\ln x - x) + C.$
(3) $\int x^n\ln x\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln x - 1] + C.$	(4) $\int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x = \ln(\ln x) + C.$

例 3.1.17. 求下列不定积分

(1) $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$	(2) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x.$	(3) $\int x\ln\left(4+x^4\right)\mathrm{d}x.$
(4) $\int x^3\ln^3 x\mathrm{d}x.$	(5) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3\mathrm{d}x.$	(6) $\int \ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x.$

(1) $\text{原式} = \int \ln x\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C.$

(2) $\text{原式} = \frac{1}{2}\int \ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x^2 = \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{x^2-1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + x + C.$

(3) 由分部积分法得,

$$\text{原式} = \frac{1}{2}\int \ln\left(4+x^4\right)\mathrm{d}x^2 = \frac{x^2}{2}\ln\left(4+x^4\right) - 2\int \frac{x^5\mathrm{d}x}{4+x^4}$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln\left(4+x^4\right) - 2\int \left(x - \frac{4x}{4+x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln\left(4+x^4\right) + 2\arctan\left(\frac{x^2}{2}\right) - x^2 + C.$$

(4) 多次利用分部积分法,

$$\text{原式} = \frac{1}{4}\int \ln^3 x\mathrm{d}\left(x^4\right) = \frac{1}{4}x^4\ln^3 x - \frac{3}{4}\int x^3\ln^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4\ln^3 x - \frac{3}{16}\int \ln^2 x\mathrm{d}\left(x^4\right)$$
$$= \frac{1}{4}x^4\ln^3 x - \frac{3}{16}x^4\ln^2 x + \frac{3}{8}\int x^3\ln x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4\ln^3 x - \frac{3}{16}x^4\ln^2 x + \frac{3}{32}\int \ln x\mathrm{d}\left(x^4\right)$$
$$= \frac{1}{4}x^4\ln^3 x - \frac{3}{16}x^4\ln^2 x + \frac{3}{32}x^4\ln x - \frac{3}{32}\int x^3\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4}x^4\left(\ln^3 x - \frac{3}{4}\ln^2 x + \frac{3}{8}\ln x - \frac{3}{32}\right) + C.$$

(5) 同样的, 多次利用分部积分法,

$$\text{原式} = -\frac{1}{2}\int \ln^3 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2x^2}\ln^3 x + \frac{3}{2}\int \frac{\ln^2 x}{x^3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2x^2}\ln^3 x - \frac{3}{4}\int \ln 2x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2x^2}\ln^3 x - \frac{3}{4x^2}\ln^2 x + \frac{3}{2}\int \frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2x^2}\ln^3 x - \frac{3}{4x^2}\ln^2 x - \frac{3}{4}\int \ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2x^2}\ln^3 x - \frac{3}{4x^2}\ln^2 x - \frac{3}{4x^2}\ln x + \frac{3}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\left(\ln^3 x + \frac{3}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}\ln x + \frac{3}{4}\right) + C.$$

(6) 利用分部积分法, 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-2\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\&= x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-2\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{1+x^2}\right)\\&= x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-2\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+2x+C.\end{aligned}$$

3.1.2 隐函数类型

例 3.1.18. 设 $y=y(x)$ 是方程 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定的隐函数, 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{y^2}$.

设齐次变换 $y=tx$ 由 $y^2(x-y)=x^2$ 可得 $x=\dfrac{1}{t^2(1-t)}$, $y=\dfrac{1}{t(1-t)}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{3t-2}{t^2(1-t)^2}\mathrm{d}t$ 于是

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{y^2}=\int t^2(1-t)^2\cdot\frac{(3t-2)}{t^3(1-t)^2}\mathrm{d}t=\int\frac{3t-2}{t}\mathrm{d}t=3t-2\ln|t|+C=\frac{3y}{x}-2\ln\left|\frac{y}{x}\right|+C.$$

3.1.3 复合类型

表格积分法

求解不定积分时, 需要多次使用分部积分时的简化运算方法. 亦可认为是分部积分法的推广公式. 设 $g_{(k+1)}$ 表示 $g_{(k)}$ $(k=0,1,2,\cdots,g_{(0)}=g)$ 积分后得到的某一个函数表达式, 则

$$\int fg\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kf^{(k)}g_{(k+1)}+(-1)^n\int f^{(n)}g_{(n)}\mathrm{d}x$$

表格积分法常用来处理 $\displaystyle\int P(x)g(x)\mathrm{d}x$ 类型的积分 (其中 $P(x)$ 表示多项式函数), 也可以得出递推表达式, 具体求解过程看以下例题.

例 3.1.19. 求不定积分 $\displaystyle\int(x^3+2x+3)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

由表格积分法得以下表格:

f'	x^3+2x+3	$3x^2+2$	$6x$	6	0
	$+\searrow$	$-\searrow$	$+\searrow$	$-\searrow$	
$\int$	e^x	e^x	e^x	e^x	e^x

故原式$=(x^3+2x+3)\mathrm{e}^x-(3x^2+2)\mathrm{e}^x+6x\mathrm{e}^x-6\mathrm{e}^x+C=(x^3-3x^2+8x-5)\mathrm{e}^x+C$.

例 3.1.20. 证明: 若 $P(x)$ 为 n 次多项式, 则 $\displaystyle\int P(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{ax}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{P^{(k)}(x)}{a^{k+1}}+C$.

证 由表格积分法:

f'	$P(x)$	$P'(x)$	$P''(x)$	$\cdots$	$P^{(n)}(x)$	$P^{(n+1)}(x)=0$
	$+\searrow$	$-\searrow$	$+\searrow$	$\cdots$	$(-1)^n\searrow$	
$\int$	e^{ax}	$\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$	$\dfrac{1}{a^2}\mathrm{e}^{ax}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{a^n}\mathrm{e}^{ax}$	$\dfrac{1}{a^{n+1}}\mathrm{e}^{ax}$

故，原式 $= \mathrm{e}^{ax}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{P^{(k)}(x)}{a^{k+1}}+C$.

例 3.1.21. 求不定积分 $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$.

由表格积分法：

f'	e^x	e^x	e^x
	$+\searrow$	$-\searrow$	
$\int$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\sin x$

故 $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x\cos x+\mathrm{e}^x\sin x-\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$

$\Rightarrow$ 原式 $=\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x-\cos x)$.

推论 3.1.1. 重要结论：

$$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{\begin{vmatrix}(\mathrm{e}^{ax})' & (\sin bx)'\\ \mathrm{e}^{ax} & \sin bx\end{vmatrix}}{a^2+b^2}+C,\quad \int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{\begin{vmatrix}(\mathrm{e}^{ax})' & (\cos bx)'\\ \mathrm{e}^{ax} & \cos bx\end{vmatrix}}{a^2+b^2}+C.$$

例 3.1.22. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

令 $\ln x=t$，则原式化为 $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t}\sin t+\mathrm{e}^{t}\cos t\right)+C=-\frac{\sin\ln x+\cos\ln x}{2x}+C$.

多初等函数复合型

组合积分法

例 3.1.23. 求不定积分 $I=\displaystyle\int \frac{\cos x}{3\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x$.

记 $J=\displaystyle\int \frac{\sin x}{3\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x$，于是

$$\begin{cases}2I+3J=\displaystyle\int \mathrm{d}x=x+C\\ 3I-2J=\displaystyle\int \frac{3\cos x-2\sin x}{3\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x=\ln|3\sin x+2\cos x|+C\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\frac{3\ln(3\sin(x)+2\cos(x))}{13}+\frac{2x}{13}+C.$$

例 3.1.24. 求不定积分 $\displaystyle\int x\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$.

法一： 由表格积分法：

f'	x	1	0
	$+\searrow$	$-\searrow$	
$\int$	$\mathrm{e}^x\sin x$	$\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x-\cos x)$	$-\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}\cos x$

故原式 $=\dfrac{x\mathrm{e}^x}{2}(\sin x-\cos x)+\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}\cos x+C$.

法二： 由分部积分法得，

$$I=\int x\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\int x\sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x\sin x-\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}(x\sin x)$$

$$\begin{aligned}
&= xe^x\sin x - \int(\sin x + x\cos x)\mathrm{d}e^x = xe^x\sin x - \int x\cos x\mathrm{d}e^x - \int e^x\sin x\mathrm{d}x \\
&= xe^x(\sin x - \cos x) + \int e^x(\cos x - \sin x)\mathrm{d}x - I \\
&\Rightarrow \frac{xe^x}{2}(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}\int e^x(\cos x - \sin x)\mathrm{d}x = \frac{xe^x}{2}(\sin x - \cos x) + \frac{e^x}{2}\cos x + C.
\end{aligned}$$

法三: 由 $\int e^x\sin x\mathrm{d}x = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$，所以

$$原式 = \int x\mathrm{d}\left(\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)\right) = \frac{xe^x}{2}(\sin x - \cos x) - \int\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)\mathrm{d}x = \frac{xe^x}{2}(\sin x - \cos x) + \frac{e^x}{2}\cos x + C.$$

法四: 令 $I = \int xe^x\sin x\mathrm{d}x$，$J = \int xe^x\cos x\mathrm{d}x$，则有

$$\begin{aligned}
(xe^x\sin x)' &= e^x\sin x + xe^x\sin x + xe^x\cos x \\
(xe^x\cos x)' &= e^x\cos x + xe^x\cos x - xe^x\sin x
\end{aligned}$$

两边积分，得

$$\begin{aligned}
I + J &= xe^x\sin x - \int e^x\sin x\mathrm{d}x \\
-I + J &= xe^x\cos x - \int e^x\cos x\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

两式相减，得

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}xe^x(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2}\int e^x\sin x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int e^x\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}xe^x(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2}\int e^x(\sin x - \cos x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{xe^x}{2}(\sin x - \cos x) + \frac{e^x}{2}\cos x + C.
\end{aligned}$$

法五: 由 $e^x\sin x = \mathrm{Im}\left(e^{(1+i)}x\right)$，

$$\begin{aligned}
原式 &= \int x\mathrm{Im}\left(e^{(1+i)x}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int xe^{(1+i)x}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\int x\mathrm{d}\left(\frac{e^{(1+i)x}}{1+i}\right)\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{xe^{(1+i)x}}{1+i} - \int\frac{e^{(1+i)x}}{1+i}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{xe^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{e^{(1+i)x}}{(1+i)^2}\right) + C \\
&= \mathrm{Im}\left(\left(\frac{x}{2} - i\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)\right)e^x(\cos x + i\sin x)\right) + C \\
&= \frac{xe^x}{2}(\sin x - \cos x) + \frac{e^x}{2}\cos x + C.
\end{aligned}$$

例 3.1.25. 计算不定积分 $\int\frac{x\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

令 $x = \sin t$，则

$$\begin{aligned}
I &= \int\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int\frac{\cos^2 t}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t = \int\frac{\sec^2 t}{\sec^4 t + \tan^2 t\sec^2 t}\mathrm{d}t \\
&= \int\frac{\sec^2 t}{2\tan^4 t + 3\tan^2 t + 1}\mathrm{d}t \xlongequal{\tan t = u} \int\frac{\mathrm{d}u}{2u^4 + 3u^2 + 1} = \int\left(\frac{2}{2u^2+1} - \frac{1}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u \\
&= \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}u\right) - \arctan u + C = \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \arcsin x + C.
\end{aligned}$$

例 3.1.26 (2023 合肥工业大学). 计算不定积分 $I = \int\frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}x$.

注意到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$，所以原积分有

$$I = \frac{1}{2}\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{1-x^2} - \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}(1-x^2)}\right]$$

现计算 $J=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}(1-x^2)}$，运用三角代换 $1+\tan^2x=\sec^2x$，有

$$J=\int\frac{\sec t\mathrm{d}t}{1-\tan^2 t}=\int\frac{\csc t\cot t}{\cot^2 t-1}\mathrm{d}t=\int\frac{\csc t\cot t}{\csc^2 t-2}\mathrm{d}t\xlongequal{\csc t=s}\int\frac{\mathrm{d}s}{2-s^2}$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}s}{1-\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{s}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\csc t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2}x}+C$$

故原式等于 $\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{2(1-x^2)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2}x}+C.$

例 3.1.27 (第四届数学竞赛决赛). 求 $\int x\arctan x\ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x.$

令 $x\ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$，则

$$t=\int x\ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}\left(1+x^2\right)=\frac{1}{2}\left[\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right)-\int 2x\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right)-x^2\right]+C$$

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int\arctan x\mathrm{d}\left[\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right)-x^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}\arctan x\left[\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right)-x^2\right]-\frac{1}{2}\left[x\ln\left(1+x^2\right)-3x+3\arctan x\right]+C$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right)-x^2-3\right]\arctan x-\frac{1}{2}\left[x\ln\left(1+x^2\right)-3x\right]+C$$

形式待定法

(1) 对于 $\int\frac{f(x)}{g^2(x)}\mathrm{d}x$ 型，存在 $h(x)$，使得

$$\int\frac{f(x)}{g^2(x)}\mathrm{d}x=\frac{h(x)}{g(x)}+C$$

其中 $f(x)=h'(x)g(x)-h(x)g'(x)$，$h(x)$ 要通过具体的等式结构另求出.

(2) 对于 $\int f(x)\mathrm{e}^{g(x)}\mathrm{d}x$ 型，存在 $h(x)$，使得

$$\int f(x)\mathrm{e}^{g(x)}\mathrm{d}x=h(x)\mathrm{e}^{g(x)}+C$$

其中 $f(x)=h'(x)+h(x)g'(x)$，同样 $h(x)$ 要通过具体的等式结构另求出.

例 3.1.28. 求下列不定积分.

(1) $\int\frac{\mathrm{e}^{-\sin x}\cdot\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x.$	(2) $\int\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x.$	(3) $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x\sin x+\cos x)^2}.$
(4) $\int\mathrm{e}^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$	(5) $\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x.$	(6) $\int\frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x.$

(1) 令 $f(x)=\mathrm{e}^{-\sin x}\cdot\sin 2x$，$g(x)=1-\sin x$，由

$$f(x)=h'(x)g(x)-h(x)g'(x)=h'(x)-h'(x)\sin x+h(x)\cos x$$

设 $h(x)=A\mathrm{e}^{-\sin x}$，那么 $h'(x)=-A\cos x\mathrm{e}^{-\sin x}$，所以

$$h'(x)-h'(x)\sin x+h(x)\cos x=A\sin x\cos x\mathrm{e}^{-\sin x}=\frac{A}{2}\sin 2x\mathrm{e}^{-\sin x}=\mathrm{e}^{-\sin x}\sin 2x$$

解得 $A=2$, 所以 $h(x)=2\mathrm{e}^{-\sin x}$.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{2\sin x\cos x\mathrm{e}^{-\sin x}}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{2\mathrm{e}^{-\sin x}(-\cos x)(1-\sin x)+2\cos x\mathrm{e}^{-\sin x}}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{h'(x)(1-\sin x)-(1-\sin x)'h(x)}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}\left(\frac{h(x)}{1-\sin x}\right) = \frac{2\mathrm{e}^{-\sin x}}{1-\sin x}+C.
\end{aligned}$$

(2) 令 $f(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\sin x}}$, $g(x)=-\dfrac{x}{2}$, 由

$$f(x)=h'(x)+h(x)\cdot g'(x)=h'(x)-\frac{1}{2}h(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}-\sqrt{\sin x}$$

设 $h(x)=2\sqrt{\sin x}+A$, 那么 $h'(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$, 所以

$$h'(x)-\frac{1}{2}h(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}-\sqrt{\sin x}-\frac{A}{2}=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}-\sqrt{\sin x}$$

解得 $A=0$, 所以 $h(x)=2\sqrt{\sin x}$.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}\right)\mathrm{d}x = \int \left[\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}h'(x)-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}h(x)\right]\mathrm{d}x \\
&= \int \mathrm{d}\left(h(x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right) = 2\sqrt{\sin x}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+C.
\end{aligned}$$

(3) **法一:** 注意到 $1=\sin^2 x+\cos^2 x$, 所以

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{x^2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\mathrm{d}x}{(x\sin x+\cos x)^2} = \int \frac{x^2\cos^2 x-x\sin x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x + \int \frac{x^2\sin^2 x+x\sin x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{x\cos x\,(x\cos x-\sin x)}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x + \int \frac{x\sin x\mathrm{d}x}{x\sin x+\cos x} \\
&= \int (\sin x-x\cos x)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x\sin x+\cos x}\right) + \int \frac{x\sin x dx}{x\sin x+\cos x} \\
&= \frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x+\cos x} - \int \frac{x\sin x\mathrm{d}x}{x\sin x+\cos x} + \int \frac{x\sin x\mathrm{d}x}{x\sin x+\cos x} = \frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x+\cos x}+C.
\end{aligned}$$

法二: 令 $f(x)=x^2$, $g(x)=x\sin x+\cos x$, 由

$$f(x)=h'(x)g(x)-h(x)g'(x)=h'(x)(x\sin x+\cos x)-h(x)x\cos x=x^2=x^2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$$

设 $h(x)=Ax^a\sin x+Bx^b\cos x$, 那么 $h'(x)=A_ax^{a-1}\sin x+Ax^a\cos x+Bbx^{b-1}\cos x-Bx^b\sin x$, 代入上式, 对比系数得 $A=1,a=0,B=-1,b=1$, 于是 $h(x)=\sin x-x\cos x$,

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{x^2\sin^2 x+x^2\cos^2 x}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{x\sin x(x\sin x+\cos x)-x\cos x(\sin x-x\cos x)}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{h'(x)(x\sin x+\cos x)-h(x)\cdot(x\sin x+\cos x)'}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}\left(\frac{h(x)}{x\sin x+\cos x}\right) = \frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x+\cos x}+C.
\end{aligned}$$

(4) 令 $f(x)=\dfrac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}$, $g(x)=\sin x$, 由

$$f(x)=h'(x)+h(x)\cdot g'(x)=h'(x)+h(x)\cdot\cos x=x\cos x-\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

设 $h(x)=\dfrac{A}{\cos x}+P(x)$, 那么 $h'(x)=\dfrac{A\sin x}{\cos^2 x}+P'(x)$, 所以

$$h'(x)+h(x)\cdot\cos x=\frac{A\sin x}{\cos^2 x}+P'(x)+A+P(x)\cos x=x\cos x-\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

各项一一对应, 得 $A=-1,P(x)=x$, 所以 $h(x)=x-\sec x$.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \mathrm{e}^{\sin x}\left(1-\frac{\sin x}{\cos^2 x}+x\cos x-1\right)\mathrm{d}x = \int \left[h'(x)\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{\sin x}\cdot\cos x h(x)\right]\mathrm{d}x \\
&= \int \mathrm{d}\left[h(x)\mathrm{e}^{\sin x}\right] = (x-\sec x)\mathrm{e}^{\sin x}+C.
\end{aligned}$$

(5) 令 $f(x)=1+x-\frac{1}{x}$, $g(x)=1+\frac{1}{x}$, 由

$$f(x)=h'(x)+h(x)g'(x)=h'(x)+h(x)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1+x-\frac{1}{x}$$

于是 $h(x)=x$, 故原式 $=\int \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\left[1+x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right]\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}\left(h(x)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\right)=x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}+C.$

(6) 令 $f(x)=x+\sin x\cos x$, $g(x)=\cos x-x\sin x$, 由

$$f(x)=h'(x)g(x)-h(x)g'(x)=h'(x)(\cos x-x\sin x)+h(x)(2\sin x+x\cos x)=x+\sin x\cos x$$

于是 $h(x)=x\sin x$, 故原式 $=\dfrac{x\sin x}{\cos x-x\sin x}+C.$

例 3.1.29. 求 $\displaystyle\int\frac{x^2+6}{(x\cos x-3\sin x)^2}\mathrm{d}x.$

法一: 令 $f(x)=x^2+6$, $g(x)=x\cos x-3\sin x$, 由

$$f(x)=h'(x)g(x)-h(x)g'(x)=h'(x)(x\cos x-3\sin x)+h(x)(x\sin x+2\cos x)$$
$$\left(x^2+6\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=h'(x)(x\cos x-3\sin x)+h(x)(x\sin x+2\cos x)$$

可知, $h(x)$ 中存在 $x\sin x$ 项和 $3\cos x$; $h'(x)$ 中存在 $x\cos x$ 项和 $-2\sin x$, 于是不妨取 $h(x)=x\sin x+3\cos x$, 故原积分等于 $\dfrac{x\sin x+3\cos x}{x\cos x-3\sin x}+C$, 经检验该函数是原积分的原函数.

法二: 运用 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, 则有

$$\begin{aligned}
I&=\int\frac{\left(x^2+6\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{(x\cos x-3\sin x)^2}\mathrm{d}x=\int\begin{vmatrix}x & 3\\ -2 & x\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}\frac{\mathrm{d}x}{(x\cos x-3\sin x)^2}\\
&=\int\begin{vmatrix}x\cos x-3\sin x & x\sin x+3\cos x\\ -2\cos x-x\sin x & -2\sin x+x\cos x\end{vmatrix}\frac{\mathrm{d}x}{(x\cos x-3\sin x)^2}\\
&=\int\frac{-2\sin x+x\cos x}{x\cos x-3\sin x}\mathrm{d}x+\int\frac{(x\sin x+3\cos x)(2\cos x+\sin x)}{(x\cos x-3\sin x)^2}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

注意到 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\cos x-3\sin x)=-(2\cos x+x\sin x)$, 故可对上式第二个积分利用分部积分公式, 得

$$\begin{aligned}
I_1&=\int\frac{(x\sin x+3\cos x)(2\cos x+\sin x)}{(x\cos x-3\sin x)^2}\mathrm{d}x=\int(x\sin x+3\cos x)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x\cos x-3\sin x}\right)\\
&=\frac{x\sin x+3\cos x}{x\cos x-3\sin x}-\int\frac{\mathrm{d}(x\sin x+3\cos x)}{x\cos x-3\sin x}=\frac{x\sin x+3\cos x}{x\cos x-3\sin x}-\int\frac{x\cos x-2\sin x}{x\cos x-3\sin x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

所以 $I=\displaystyle\int\frac{x\cos x-2\sin x}{x\cos x-3\sin x}+I_1=\frac{x\sin x+3\cos x}{x\cos x-3\sin x}+C.$

利用行列式来表述较为复杂的计算式子, 具有过程简洁, 结构紧凑, 规律性强等明显优点.

双变量代换法

例 3.1.30. 求下列不定积分.

(1) $\displaystyle\int\frac{\left(x^2+1\right)\cos x+\sin^2 x+1}{\left(x^2-1\right)\cos^2 x+4x\sin x}\mathrm{d}x.$	(2) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^{2x}-x^2+\mathrm{e}^x(1-x)\cos 2x}{\left(\mathrm{e}^x\cos x+x\sin x\right)\sqrt{\left(\mathrm{e}^{2x}-x^2\right)\cos 2x}}\mathrm{d}x.$

(1) 令 $p=x+\sin x$, $q=1-x\sin x$, 那么 $p^2-q^2=(x+\sin x)^2-(1-x\sin x)^2=\left(x^2-1\right)\cos^2 x+4x\sin x$, 并且

$$\mathrm{d}\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{q\mathrm{d}p-p\mathrm{d}q}{q^2}=\frac{\left(x^2+1\right)\cos x+\sin^2 x+1}{q^2}\mathrm{d}x\Rightarrow\left[\left(x^2+1\right)\cos x+\sin^2 x+1\right]\mathrm{d}x=q^2\mathrm{d}\left(\frac{p}{q}\right)$$

因此 $I=\displaystyle\int\frac{q^2}{p^2-q^2}\mathrm{d}\left(\frac{p}{q}\right)=\int\frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)^2-1}\mathrm{d}\left(\frac{p}{q}\right)\xlongequal{u=\frac{p}{q}}\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C$, 即

$$I=\frac{1}{2}[\ln(-x-(x+1)\sin x+1)-\ln(x-x\sin x+\sin x+1)]+C.$$

(2) 令 $p = \mathrm{e}^x \cos x + x \sin x$, $q = \mathrm{e} \sin x + x \cos x$, 那么

$$p^2 - q^2 = (\mathrm{e}^x \cos x + x \sin x)^2 - (q = \mathrm{e} \sin x + x \cos x)^2 = \left(\mathrm{e}^{2x} - x^2\right) \cos 2x$$

并且

$$\mathrm{d}\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{p\mathrm{d}q - q\mathrm{d}p}{p^2} = \frac{1}{p^2}\left[\mathrm{e}^{2x} - x^2 + \mathrm{e}^x(1-x)\cos 2x\right]\mathrm{d}x \Rightarrow \left[\mathrm{e}^{2x} - x^2 + \mathrm{e}^x(1-x)\cos 2x\right]\mathrm{d}x = p^2\mathrm{d}\left(\frac{q}{p}\right)$$

因此 $I = \int \frac{p}{\sqrt{p^2 - q^2}}\mathrm{d}\left(\frac{q}{p}\right) \xlongequal{u=\frac{q}{p}} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u = \arcsin u + C$, 即 $I = \arcsin\left(\frac{\mathrm{e}^x \sin x + x\cos x}{\mathrm{e}^x \cos x + x \sin x}\right) + C$.

3.2 定积分

定积分是微积分中的一个重要概念, 它表示在一个区间上对一个函数进行积分, 得到的结果是一个数值, 表示函数在该区间上的面积或者累积量.

3.2.1 求出不定积分后计算

根式积分

定理 3.2.1. 若 $a < b$, 则 $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}(b-a)^2$.

例 3.2.1. 计算 $\int_3^5 \sqrt{(x-3)(5-x)}\mathrm{d}x$.

由定理 3.2.1 可知原积分等于 $\frac{\pi}{2}$.

三角函数积分

例 3.2.2. 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^3}\mathrm{d}x$.

注意到 $\sin x = \frac{\sin x + \cos x}{2} - \frac{\cos x - \sin x}{2}$, 于是 $\int \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x + \cos x)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)^3}\mathrm{d}x$,
其中

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x + \cos x)^2} = \int \frac{\sec^2 x\mathrm{d}x}{\tan^2 x + 2\tan x + 1} \xlongequal{\tan x = t} \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2} = -(t+1)^{-1} + C = -(\tan x + 1)^{-1} + C$$

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)^3}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^3} = -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)^{-2} + C$$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^3}\mathrm{d}x = \left. -\frac{1}{2}(\tan x + 1)^{-1} + \frac{1}{4}(\sin x + \cos x)^{-2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$.

含绝对值类型

例 3.2.3. 计算定积分 $\int_{-2}^3 \left|x^2 + 2|x| - 3\right|\mathrm{d}x$.

由于 $\left|x^2 + 2|x| - 3\right| = \operatorname{sgn}\left(x^2 + 2\operatorname{sgn}(x)\cdot x - 3\right)\cdot\left(x^2 + 2\operatorname{sgn}(x)\cdot x - 3\right)$, 于是, 当 $x \in [-2, -1)$ 时,

$$\operatorname{sgn}(x) = -1, \operatorname{sgn}\left(x^2 - 2x - 3\right) = 1$$

当 $x \in [-1, 0)$ 时,

$$\operatorname{sgn}(x) = -1, \operatorname{sgn}\left(x^2 - 2x - 3\right) = -1$$

当 $x\in[0,1)$ 时,

$$\operatorname{sgn}(x)=1,\operatorname{sgn}\left(x^2-2x-3\right)=-1$$

当 $x\in[1,3)$ 时,

$$\operatorname{sgn}(x)=1,\operatorname{sgn}\left(x^2-2x-3\right)=1$$

所以

$$I=\int_{-2}^{-1}\left(x^2-2x-3\right)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{0}\left(x^2-2x-3\right)\mathrm{d}x-\int_{0}^{1}\left(x^2+2x-3\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}\left(x^2+2x-3\right)\mathrm{d}x=\frac{49}{3}.$$

复合类型

例 3.2.4. 计算 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\cdot\ln\sin x\cdot\ln\cos x\mathrm{d}x.$

令 $t=\sin^2 x$, 那么 $\mathrm{d}t=2\sin x\cos x\mathrm{d}x=\sin 2x\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\cdot\ln\sin x\cdot\ln\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^1\ln t\ln(1-t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{4}t\ln t\ln(1-t)\Big|_0^1-\frac{1}{4}\int_0^1\left[\ln(1-t)+\frac{t\ln t}{t-1}\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{t\ln t}{t-1}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

其中 $\displaystyle\int_0^1\frac{t\ln t}{t-1}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{(t-1+1)\ln t}{t-1}\mathrm{d}t=\int_0^1\ln t\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{\ln t}{t-1}\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{6}-1$, 所以原式$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi^2}{24}$ 另解见例题 7.2.33.

例 3.2.5. 计算 $\displaystyle\int_0^1 x\arcsin\left(2\sqrt{x(1-x)}\right)\mathrm{d}x.$

因为

$$\left[\arcsin\left(2\sqrt{x(1-x)}\right)\right]'=\frac{\dfrac{1-2x}{\sqrt{x(1-x)}}}{\sqrt{1-4x(1-x)}}=\frac{\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-4x(1-x)}}$$

所以

$$\begin{aligned}\int x\arcsin\left(2\sqrt{x(1-x)}\right)\mathrm{d}x&=\int\arcsin\left(2\sqrt{x(1-x)}\right)\mathrm{d}\frac{x^2}{2}\\&=\frac{1}{2}x^2\arcsin\left(2\sqrt{1-x}\sqrt{x}\right)-\int\frac{\left(\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\right)x^2}{2\sqrt{1-4x(1-x)}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\left(\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\right)x^2}{2\sqrt{1-4x(1-x)}}\mathrm{d}x=\int\frac{\left(\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\right)x^2}{2|2x-1|}\mathrm{d}x=\int\frac{\left(\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\right)x^2}{2(2x-1)\operatorname{sgn}(2x-1)}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\operatorname{sgn}(2x-1)}\int-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x\overset{\sqrt{x}=t}{=\!=\!=}-\frac{1}{\operatorname{sgn}(2x-1)}\int\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t&\overset{Ost'}{=\!=\!=}\sqrt{1-t^2}\left(At^3+Bt^2+Ct+D\right)+E\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}\\&\xlongequal[\left(-\frac{1}{4},0,-\frac{3}{8},0,\frac{3}{8}\right)]{(A,B,C,D,E)}\sqrt{1-t^2}\left(-\frac{t^3}{4}-\frac{3t}{8}\right)+\frac{3}{8}\arcsin t\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}I&=-\frac{1}{\operatorname{sgn}(2x-1)}\left[\sqrt{1-t^2}\left(-\frac{t^3}{4}-\frac{3t}{8}\right)+\frac{3}{8}\arcsin t\right]\\&=\frac{\sqrt{1-x}\sqrt{x}\left(4x^2+4x-3\right)-6\arcsin\sqrt{x}+3\arcsin\sqrt{x}}{8|2x-1|}\end{aligned}$$

$$\text{原式}=\left[\frac{1}{2}x^2\arcsin\left(2\sqrt{1-x}\sqrt{x}\right)-I\right]\Big|_0^1=\frac{3\pi}{16}.$$

3.2.2 运用定积分性质进行相关计算

定积分的换元变换

例 3.2.6. 设 $F(a)=\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)\mathrm{d}x$, 求 $F(-a),\ F(a^2)$.

作定积分的换元变化, 令 $t=\pi-x$, 则

$$\begin{aligned}F(-a)&=\int_0^{\pi}\ln\left(1+2a\cos x+a^2\right)\mathrm{d}x\xlongequal{t=\pi-x}-\int_{\pi}^{0}\ln\left(1-2a\cos t+a^2\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos t+a^2\right)\mathrm{d}t=F(a)\end{aligned}$$

且 $F(a^2)=\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a^2\cos x+a^4\right)\mathrm{d}x$, 注意到

$$\begin{aligned}2F(a)=F(a)+F(-a)&=\int_0^{\pi}\left[\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)+\ln\left(1+2a\cos x+a^2\right)\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}\ln\left[\left(1+a^2\right)^2-4a^2\cos^2x\right]\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a^2\cos 2x+a^4\right)\mathrm{d}x\\&\xlongequal{2x=t}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\ln\left(1-2a^2\cos t+a^4\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a^2\cos t+a^4\right)\mathrm{d}t+\int_{\pi}^{2\pi}\ln\left(1-2a^2\cos t+a^4\right)\mathrm{d}t\right]\\&\xlongequal[\text{第二项}]{u=2\pi-t}\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a^2\cos t+a^4\right)\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a^2\cos u+a^4\right)\mathrm{d}u\right]\\&=\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a^2\cos x+a^4\right)\mathrm{d}x=F(a^2).\end{aligned}$$

对称区间上的积分公式

定理 3.2.2. 函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a],a>0$ 上连续, 则 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$.

证 因为 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{a}f(x)\mathrm{d}x$, 而令 $x=-t$, 有

$$\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x=-\int_{a}^{0}f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^{a}f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^{a}f(-x)\mathrm{d}x$$

所以 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$.

推论 3.2.1. 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[-a,a],a>0$ 上连续, 且 $g(x)$ 为偶函数, 则

$$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_0^{a}[f(-x)+f(x)]g(x)\mathrm{d}x.$$

例 3.2.7. 计算下列定积分,

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x.$	(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2}x\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)\mathrm{d}x.$
(3) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos x\left(\ln\frac{1+x}{1-x}+\sin^2x\right)\mathrm{d}x.$	(4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1+2^x}\cdot\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x.$
(5) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\arctan\mathrm{e}^{x}}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x.$	(6) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x\left(1+x^{2023}\right)\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x.$

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}+\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)\cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$

(2) 原式 $\displaystyle= \frac{1}{2}x^2\ln(1+\mathrm{e}^x)\Big|_{-2}^{2} - \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\frac{x^2\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = 2\ln\frac{1+\mathrm{e}^2}{1+\mathrm{e}^{-2}} - \frac{1}{2}\int_0^2\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}+\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right)x^2\mathrm{d}x = 2\ln\frac{1+\mathrm{e}^2}{1+\mathrm{e}^{-2}} - \frac{4}{3}.$

(3) 原式 $\displaystyle= \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}+\sin^2 x+\ln\frac{1-x}{1+x}+\sin^2 x\right)\mathrm{d}\sin x = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}\sin x = \frac{2}{3}\sin^3\frac{1}{2}.$

(4) 因为 $\displaystyle\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = 1+\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx$, 所以

$$\text{原式} = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{1+2^x}+\frac{1}{1+2^{-x}}\right)\frac{\sin(2n+1)}{\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx\right)\mathrm{d}x = \pi.$$

(5) 注意到 $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}, x>0$, 且 $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi}\left(\arctan\mathrm{e}^x+\arctan\mathrm{e}^{-x}\right)\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\cos x}{1+\cos^2 x} \\ &= -\frac{\pi^2}{4}\cdot\arctan\cos x\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{8}. \end{aligned}$$

(6) $\displaystyle I = \int_0^1\left[1+x^{2023}+1+(-x)^{2023}\right]x\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x = \frac{4}{\mathrm{e}}.$

例 3.2.8. (2023 合肥工业大学) 计算 $\displaystyle I = \int_{-\pi}^{\pi} x\sin^5 x\arctan\mathrm{e}^x\mathrm{d}x.$

由推论 3.2.1 可知,

$$I = \int_0^{\pi}(\arctan\mathrm{e}^x+\arctan\mathrm{e}^{-x})x\sin^5 x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}x\sin^5 x\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi}\sin^5 x\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}\cdot 2\cdot\frac{4!!}{5!!} = \frac{4\pi^2}{15}.$$

例 3.2.9. 设 $a>0$, $f(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的连续偶函数, 证明: $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$

证 左 $\displaystyle= \int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x + \int_0^a\frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x \xlongequal{x=-t} -\int_a^0\frac{f(-t)}{1+\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t + \int_0^a\frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \int_0^a\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}+\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)f(x)\mathrm{d}x =$ 右.

例 3.2.10. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且对任何 x, y, 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 计算

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)f(x)\mathrm{d}x.$$

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\left(f(x)+f(-x)\right)\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x = f(0)\int_0^1\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}f(0).$$

周期函数的定积分

定理 3.2.3 (周期函数的定积分公式). 设 $f(x)$ 是连续的周期函数, 最小正周期为 T, 则有

(1) $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x;$

(2) $\displaystyle\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$

例 3.2.11. 计算定积分 $\displaystyle\int_0^{n\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x$, 其中 n 为正整数.

由 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$，得

$$\int_0^{n\pi} x\left|\sin x\right|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\left[x\left|\sin x\right|+(n\pi-x)\left|\sin\left(n\pi-x\right)\right|\right]\mathrm{d}x=n\pi\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x$$

又因为 $|\sin x|=\sqrt{\sin^2 x}=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}$ 的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，且 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=1$，$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=1$，所以 $\int_0^{\frac{n\pi}{2}}|\sin x|=n$，故 $\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x=n^2\pi$.

例 3.2.12. 已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足

$$a_n=\int_0^{n^2\pi}(|\cos t|+|\sin t|)\mathrm{d}t,\ b_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\left(\mathrm{e}^{-t}\sin t\right)\mathrm{d}t$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot(a_nb_n-2)$.

因为 $|\cos t|,|\sin t|$ 都是周期为 $T=\pi$ 的周期函数，那么

$$a_n=\sum_{k=0}^{n^2-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}(|\cos t|+|\sin t|)\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n^2-1}\int_0^{\pi}(|\cos t|+|\sin t|)\mathrm{d}t=4n^2$$

$$b_n=-\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2}(\sin t+\cos t)\Big|_0^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}}{2}\left(\sin\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n}\right)$$

那么

$$I=\lim_{n\to\infty}n\cdot(a_nb_n-2)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left[2n^2-2n^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}\left(\sin\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n}\right)-2\right]\xlongequal{\frac{1}{n}=t}\lim_{t\to0^+}\frac{2\mathrm{e}^t-2(\sin t+\cos t)-2t^2\mathrm{e}^t}{t^3\mathrm{e}^t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{2\left(1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+o(t^3)\right)-2\left(x-\frac{1}{6}x^3+1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right)-2t^2(1+t+o(t))}{t^3}=-\frac{4}{3}.$$

区间再现公式

定理 3.2.4 (区间再现公式). 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续[1]，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^{\frac{a+b}{2}}[f(a)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x.$$

特别地，当 $f(x)=xg(x)$ $(g(x)=g(a+b-x))$ 时，$\int_a^b xg(x)\mathrm{d}x=\dfrac{a+b}{2}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$；当 $f(x)=\dfrac{g(x)}{g(x)+g(a+b-x)}$ 时，$\int_a^b\dfrac{g(x)}{g(x)+g(a+b-x)}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(b-a)$.

例 3.2.13. 求 $\int_0^1\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-x+1}}\mathrm{d}x$.

---

[1]事实上 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x$，令 $x=a+b-t$，则

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{a+b}{2}}^a f(a+b-t)\,\mathrm{d}(-t)=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(a+b-t)\mathrm{d}t=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(a+b-x)\mathrm{d}x$$

所以有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$.

由定理 3.2.4 得,

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2-x+1}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{\pi}{4}\ln 3$$

其中 $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+1}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=\ln\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2-x+1}\right]\Big|_0^1=\ln 3.$

例 3.2.14. 计算 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^{\sqrt{2}}x}$.

法一: 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$, 那么 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, 所以

$$\text{原式}=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{-\mathrm{d}t}{1+\cot^{\sqrt{2}}t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^{\sqrt{2}}t}{1+\tan^{\sqrt{2}}t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^{\sqrt{2}}x}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}.$$

法二: 原式 $\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{1+\tan^{\sqrt{2}}x}+\frac{1}{1+\tan^{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$

推论 3.2.2. 一般地, 设 α 为任意正整数, 则 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^{\alpha}x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cot^{\alpha}x}=\frac{\pi}{4}.$

例 3.2.15. 计算 $\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)\mathrm{d}x$, 其中 $\displaystyle f(x)=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{x}}\frac{\mathrm{d}u}{1+\tan^{\sqrt{2}}u^2}$.

$$f(x)\xlongequal{u^2=t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}\left(1+\tan^{\sqrt{2}}t\right)},$$

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}\sqrt{x}=2\sqrt{x}f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x}\mathrm{d}f(x)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^{\sqrt{2}}x}=-\frac{\pi}{4}.$$

例 3.2.16. 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\left(\ln\frac{2n+k}{2n-k}+\ln\frac{n+k}{3n-k}\right)$.

由引理 1.3.2, 可知原式 $\displaystyle=\mathrm{e}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(\ln\frac{2+\frac{k}{n}}{2-\frac{k}{n}}+\ln\frac{1+\frac{k}{n}}{3-\frac{k}{n}}\right)=\mathrm{e}\int_0^1\ln\frac{(2+x)(1+x)}{(2-x)(3-x)}\mathrm{d}x$, 若用分部积分法求解则显得复杂, 不妨采用定理 3.2.4, 则

$$\int_0^1\ln\frac{(2+x)(1+x)}{(2-x)(3-x)}\mathrm{d}x\xlongequal{1+0-x=t}\frac{1}{2}\int_0^1\left[\ln\frac{(2+x)(1+x)}{(2-x)(3-x)}+\ln\frac{(3-t)(2-t)}{(1+t)(2+t)}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\ln 1\mathrm{d}x=0$$

故原极限等于 0.

3.2.3 积分作为上下限的函数

定理 3.2.5. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上连续.

定理 3.2.6. 在区间 I 上, 若函数 f 连续, $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 可导, 则 $F(x)=\displaystyle\int_{\varphi(x)}^{\phi(x)}f(t)\mathrm{d}t$ 也可导, 且

$$F'(x)=f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)-f(\phi(x))\cdot\phi'(x).$$

例 3.2.17. 设 $y=y(x)$ 由 $x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)\mathrm{d}t$ 所确定, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

易知 $y(0)=1$, 两边对 x 求导, 得

$$1=\sin^2\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right](y'-1)\Rightarrow y'=\csc^2\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right]+1$$

将 $x=0$ 代入, 得 $y'=3$.

例 3.2.18. 设 $f(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{t}\ln\frac{t}{2}\mathrm{d}t\ (x\in(1,+\infty))$, 问函数 $f(x)$ 在何处取最小值.

$f'(x)=\frac{1}{x^2}\ln\frac{x^2}{2}\cdot 2x-\frac{1}{x}\ln\frac{x}{2}=\frac{\ln x}{x}$, 令 $f'(x)=0$, 解得 $x=1$, 并且当从左到右穿过 $x=1$ 时, $f'(x)$ 由负变正, 故 $f(1)$ 是 f 的最小值 $f_{min}=\int_1^1\frac{1}{t}\ln\frac{t}{2}\mathrm{d}t=0$.

例 3.2.19. 求积分的极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^m\int_0^{\frac{1}{x}}\sin t^2\mathrm{d}t$ (其中 m 为任意整数).

令 $\frac{1}{x}=u$, 则

$$\text{原式}=\lim_{u\to0^+}\frac{\int_0^u\sin t^2\mathrm{d}t}{u^m}\overset{L'}{=\!=}\lim_{u\to0^+}\frac{\sin u^2}{mu^{m-1}}=\lim_{u\to0^+}\frac{u^{3-m}}{m}=\begin{cases}0, & m=1,2\text{ 或 }m\leqslant0,\\ \frac{1}{3}, & m=3,\\ +\infty, & m>3.\end{cases}$$

例 3.2.20. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant1\\ 2-x, & 1<x\leqslant2\end{cases}$, 记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, 0\leqslant x\leqslant2$, 求 $F(x)$.

当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时, $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^3$;
当 $1<x\leqslant2$ 时, $F(x)=\int_0^1 t^2\mathrm{d}t+\int_1^x(2-t)\mathrm{d}t=-\frac{7}{6}+2x-\frac{1}{2}x^2$,
所以 $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant1\\ -\frac{7}{6}+2x-\frac{1}{2}x^2, & 1<x\leqslant2\end{cases}$.

例 3.2.21. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续, $f(1)=\frac{5}{2}$, 且对所有 $x,t\in(0,+\infty)$, 满足条件

$$\int_1^{xt}f(u)\mathrm{d}u=t\int_1^x f(u)\mathrm{d}u+x\int_1^t f(u)\mathrm{d}u$$

求 $f(x)$ 的表达式.

等式两边同时对 t 求导, 得

$$xf(xt)=\int_1^x f(u)\mathrm{d}u+xf(t)$$

由上式可知 f 是 $(0,+\infty)$ 内的可导函数, 两边再对 x 求导, 得

$$f(xt)+txf'(xt)=f(x)+f(t)$$

令 $t=1$, 得 $f(x)+xf'(x)=f(x)+f(1)\Rightarrow f'(x)=\frac{5}{2x}\Rightarrow f(x)=\frac{5}{2}\ln x+C$, 又 $f(1)=\frac{5}{2}$, 所以

$$f(x)=\frac{5}{2}(\ln x+1).$$

例 3.2.22. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0\leqslant g(x)\leqslant1$, 证明:

(1) $0 \leqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant x-a, x \in [a,b]$;

(2) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

证

(1) 由定积分保序性可得:

$$0 \leqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x \mathrm{d}t = x-a\ (x \in [a,b]).$$

(2) 令 $b=x$, 构造辅助函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t-\int_a^{a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t} f(t)\mathrm{d}t$$

则 $F(a)=0$,

$$F'(x)=f(x)g(x)-f\left(a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)g(x)=g(x)\left[f(x)-f\left(a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)\right]$$

因为 $a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t \in [0,x]$, 且 $f(x)\nearrow$, 所以 $f(x)-f\left(a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right) \geqslant 0$, 所以 $F'(x)\geqslant 0$, 故 $F(x)\nearrow$, 所以 $F(x)\geqslant F(a)=0 \Rightarrow F(b)\geqslant 0 \Rightarrow \int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

3.2.4 积分中值定理

第一积分中值定理

定理 3.2.7 (第一积分中值定理)**.** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且不变号, 则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

例 3.2.23. 设 $a_n, b_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 且 $\int_{\sin a_n}^{a_n} \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = b_n\ln(1+b_n)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^3}{b_n^2}$.

由题意当 $n\to\infty$ 时 $b_n=0$, 故 $\int_{\sin a_n}^{a_n}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = b_n\ln(1+b_n)=b_n^2$, 于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^3}{b_n^2}=\lim_{t\to0+}\frac{t^3}{\int_{\sin t}^t \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x}=\lim_{t\to0+}\frac{1}{\mathrm{e}^{\xi^2}}\frac{t^3}{t-\sin t}=6$$

其中 $\sin t<\xi<t$.

例 3.2.24. 设 $f(x)\in D(0,1)$, $f(0)=f(1)=-2$, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 证明: $\exists\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)-f(\xi)=\xi$.

证 令 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}(f(x)+x+1)$, 有 $F(0)=-1$, $F(1)=0$, 因为 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 由积分中值定理知, $\exists\eta\in(0,1)$, 使得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(\eta)\int_0^1\mathrm{d}x=f(\eta)=0$$

而 $F(\eta)=\mathrm{e}^{-\eta}(f(\eta)+\eta+1)>0$, 因此 $\exists\xi\in(0,1)$, 使得 $F(x)\leqslant F(\xi)$, 即 $F(x)$ 的最大值一定在区间 $(0,1)$ 内取到, 由 *Fermat* 引理知, $F'(\xi)=0$, 即

$$-\mathrm{e}^{-x}(f(x)+x+1)+\mathrm{e}^{-x}(f'(x)+1)\Big|_{x=\xi}=f'(\xi)-f(\xi)=\xi.$$

例 3.2.25 (2019 数二)**.** 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$, 证明 (1) $\exists\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$; (2) $\exists\eta\in(0,1)$, 使得 $f''(\eta)<-2$.

证

(1) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F'(x)=f(x)$, 且

$$1=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=F(1)-F(0)=F'(c)(1-0)=f'(c)$$

于是 $f(c)=f(1)=1$, 故由 *Rolle* 中值定理知, $\exists\xi\in(c,1)\subset(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

(2) **法一: 反证法**令 $g(x)=f(x)+x^2$, 则 $g(0)=0$, $g(1)=2$, 假设 $\nexists\eta\in(0,1)$, 使得 $g''(\eta)<0$, 即 $\forall x\in(0,1)$, $g''(x)\geqslant 0$, 则 $g(x)$ 为下凹函数, 则有

$$\int_0^1(f(x)+x^2)\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$$

但 $\int_0^1(f(x)+x^2)\mathrm{d}x=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$, 而 $\frac{4}{3}\nleqslant 1$, 矛盾, 故假设不成立, 即 $\exists\eta\in(0,1)$, 使得 $f''(\eta)<-2$.

法二: 令 $g(x)=f(x)+ax^2+bx+c$, 使得 $g(0)=0$, $g(1)=0$, $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=0$, 故

$$\begin{cases}c=0\\1+a+b+c=0\\1+\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}+c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=-4\\c=0\end{cases}$$

即 $g(x)=f(x)+3x^2-4x$, 由第一积分中值定理知, $\exists c\in(0,1)$ 使得 $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=g(c)=0$, 又 $g(0)=0$, $g(1)=0$, 故 $\exists\xi_1\in(0,c)$, 使得 $g'(\xi_1)=0$, $\exists\xi_2\in(c,1)$, 使得 $g'(\xi_2)=0$, 再由 *Rolle* 中值定理知 $\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$, 使得 $g''(\eta)=0\Rightarrow f''(\eta)+6=0\Rightarrow f''(\eta)<-2$.

例 3.2.26. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调递增, 证明 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

证法一 要证不等式成立, 即要证 $\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$, 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增, 所以

$$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\geqslant 0$$

两边积分, 得 $\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\geqslant 0$, 而

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=0$$

所以 $\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$, 故得证.

证法二 由第一积分中值定理,

$$\begin{aligned}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\\&=f(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+f(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{(b-a)^2}{8}(f(\xi_2)-f(\xi_1))\end{aligned}$$

其中 $\xi\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$,$\xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$, 而 $f(x)$ 单调递增 $\xi_1<\xi_2$, 所以 $f(\xi_1)\leqslant f(\xi_2)$, 从而 $\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$, 故得证.

第二积分中值定理

定理 3.2.8 (第二积分中值定理 A). 在 $[a,b]$ 上, 若 $f(x)$ 非负单调递减, $g(x)$ 可积, 则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使得

$$I=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x.$$

定理 3.2.9 (第二积分中值定理 B). 在 $[a,b]$ 上, 若 $f(x)$ 非负单调递增, $g(x)$ 可积, 则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使得

$$I=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.$$

定理 3.2.10 (第二积分中值定理 C). 在 $[a,b]$ 上, 若 $f(x)$ 单调, $g(x)$ 可积, 则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使得

$$I=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.$$

例 3.2.27. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\displaystyle\int_0^x\sqrt{t}\cos t\mathrm{d}t}{x}$.

错解.

(1) 直接使用 L'Hospital 法则.

(2) 使用第一积分中值定理.

错因: *使用 L'Hospital 法则后极限振荡不存在, 故 L'Hospital 法则失效; 第一积分中值定理*

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

*其中 f 在 $[a,b]$ 上连续, g 在 $[a,b]$ 上可导, 并且 g **不变号**, 因为 $\cos t$ 在 $[0,+\infty)$ 周期性变号, 故不能使用积分中值定理.*

法一: 对分子使用分部积分公式, 有

$$\int_0^x\sqrt{t}\cos t\mathrm{d}t=\int_0^x\sqrt{t}\mathrm{d}\sin t=\sqrt{t}\sin x\Big|_0^x-\int_0^x\sin t\mathrm{d}\sqrt{t}\xlongequal{\sqrt{t}=u}\sqrt{x}\sin x-\int_0^{\sqrt{x}}\sin u^2\mathrm{d}u$$

于是原极限可化为

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\sin x-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}}\sin u^2\mathrm{d}u=0-0=0$$

其中 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin x\to0\ (x\to+\infty)$ *(无穷小量乘以有界量)*, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin u^2\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ *(Fresnel 积分)*.

法二: 运用第二积分中值定理: $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x$, 其中 f 在 $[a,b]$ 上单调, g 在 $[a,b]$ 上可积, $\xi\in[a,b]$, 于是原式可化为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(0+\sqrt{x}\int_\xi^x\cos t\mathrm{d}t\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\int_\xi^x\cos t\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\sin x-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\xi=0-0=0$$

其中 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin x\to0\ \ (x\to+\infty)$, 同理可得 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin\xi\to0\ \ (x\to+\infty)$.

例 3.2.28. 试用第二积分中值定理证明例 3.2.26.

证 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增, 所以由第二积分中值定理知, 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\begin{aligned}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x&=f(a)\int_a^\xi\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+f(b)\int_\xi^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=f(a)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+(f(b)-f(a))\int_\xi^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=(f(b)-f(a))\frac{(b-\xi)(\xi-a)}{2}\geqslant0\end{aligned}$$

故得证.

3.2.5 定积分的几何应用

平面图形的面积

定理 3.2.11 (平面图形面积公式). 平面图形由曲线 $y_1=f_1(x)$, $y_2=f_2(x)$ 和直线 $x=a$, $x=b\,(a<b)$ 所围成, 那么围成的面积计算公式为:

$$A=\int_a^b|f_1(x)-f_2(x)|\mathrm{d}x.$$

若由曲线 $r=r(\theta)\ (\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 围成, 则其面积为:

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

例 3.2.29. 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\ \left(-\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$, 求 L 所围平面图形的面积.

所求平面图形的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 6\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{12}.$$

例 3.2.30 (2012 数一). 已知曲线

$$L:\begin{cases}x=f(t)\\ y=\cos t\end{cases}\quad\left(0\leqslant t<\frac{\pi}{2}\right)$$

其中函数 $f(t)$ 具有连续导数, 且 $f(0)=0$, $f'(t)>0\ \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$, 若曲线 L 的切屑与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1, 求函数 $f(t)$ 的表达式, 并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

旋转体的侧面积和体积

定理 3.2.12 (旋转体的侧面积公式). 由 xOy 平面上的曲线 $y=f(x)\ (a\leqslant x\leqslant b)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转曲面的面积为:

$$A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

例 3.2.31. 求抛物线的一段 $y=\sqrt{2x}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$, 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积以及所得旋转面的侧面积.

设旋转体体积为 V, 旋转面的侧面积为 S, 那么

$$V=\int_0^1\pi y^2\mathrm{d}x=2\pi\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=\pi$$

$$S=2\pi\int_0^1\sqrt{2x}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2}\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2\pi}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right).$$

定理 3.2.13 (旋转体的体积公式). 由 xOy 平面上的曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$, $x=b$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积为:

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

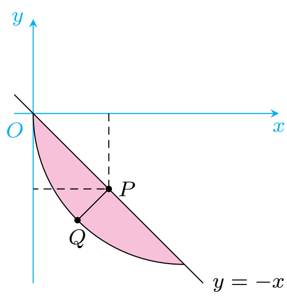
绕 y 轴旋转而成的旋转体体积为:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)\mathrm{d}x.$$

例 3.2.32. 设 $D: x^2+y^2 \leqslant 4x,\ y \leqslant -x$, 在 D 的边界 $y=-x$ 上任取一点 P, 设 P 到原点的距离为 t, 作 PQ 垂直 $y=-x$, 交 D 的边界 $x^2+y^2=4x$ 于点 Q.

(1) 试将 P, Q 的距离 $|PQ|$ 表示为 t 的函数;

(2) 求 D 绕 $y=-x$ 旋转一周的旋转体的体积.



(1) P 点的坐标为 $\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}, -\dfrac{t}{\sqrt{t}}\right)$, 所以直线 PQ 的方程为

$$y = x - \sqrt{2}\ (0 \leqslant t \leqslant 2\sqrt{2})$$

由 $\begin{cases} y = x - \sqrt{2}t \\ x^2 + y^2 = 4x \end{cases}$ 解得点 Q 的横坐标为

$$x_Q = 1 + \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{4+4\sqrt{2}t-2t^2}$$

所以 $|PQ| = \sqrt{2}\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}} - x_Q\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{4+4\sqrt{2}t-2t^2} - 1\right)$.

(2) 所求旋转体体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\sqrt{2}} |PQ|^2 \mathrm{d}t = 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}\sqrt{4+4\sqrt{2}t-2t^2} - 1\right)^2 \mathrm{d}t \\ &= \frac{20}{3}\sqrt{2}\pi - 2\sqrt{2}\pi^2. \end{aligned}$$

例 3.2.33. 求曲线 $y = \mathrm{e}^{-x}\sqrt{\sin x}\ (x \geqslant 0)$ 与 x 轴围成区域绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积.

由曲线可知定义域 $x \in [2n\pi, (2n+1)\pi]\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$, 那么体积为

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \pi y^2 \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \pi \mathrm{e}^{-2x} \sin x \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2x}(2\sin x + \cos x)\Big|_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \\ &= \frac{\pi}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-(4n+2)\pi} + \mathrm{e}^{-4n\pi}\right) = \frac{\pi}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2n\pi} = \frac{\pi}{5} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-2n\pi}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}} = \frac{\pi}{5(1-\mathrm{e}^{-2\pi})}. \end{aligned}$$

平面曲线的弧长

定理 3.2.14 (平面曲线弧长公式). 若平面曲线的方程为 $y = f(x)\ (a \leqslant x \leqslant b)$, 则 x 介于 a 与 b 之间的曲线弧长为:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

若方程由极坐标给出: $r = r(\theta)\ (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$, 则 θ 介于 α 与 β 之间的曲线弧长为:

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta.$$

若方程由参数方程给出: $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, 则 t 介于 α 与 β 之间的曲线弧长为:

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

例 3.2.34. 计算 $\int_L |y|\mathrm{d}s$, 其中 L 为双纽线 $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right)$ $(a>0)$.

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 代入直角坐标系方程, 得 $r^2 = a^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = a^2\cos 2\theta$, 由 $r=0$ 得 $\theta = \frac{\pi}{4}$, 从而双纽线在第一象限部分的方程为 $r^2 = a^2\cos 2\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$, 并且

$$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2+(r')^2}\mathrm{d}\theta = \sqrt{a^2\cos 2\theta + \frac{a^4\sin^2 2\theta}{r^2}}\mathrm{d}\theta = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta$$

由对称性 $\int_L |y|\mathrm{d}s = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\sin\theta \cdot \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\mathrm{d}\theta = 4a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

例 3.2.35 (2010 数二). 当 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ 时, 求对数螺线 $r = \mathrm{e}^\theta$ 的弧长.

$s = \int_0^\pi \sqrt{r^2+(r')^2}\mathrm{d}\theta = \sqrt{2}\int_0^\pi \mathrm{e}^\theta\mathrm{d}\theta = \sqrt{2}(\mathrm{e}^\pi - 1)$.

例 3.2.36 (2011 数一). 求曲面 $y = \int_0^x \tan t\mathrm{d}t \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 s.

因为 $y' = \tan x$, 所以

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

例 3.2.37 (2019 数二). 求曲线 $y = \ln\cos x\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}\right)$ 的弧长.

与例题 3.2.36 同样地, $s = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\tan^2 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 3$.

例 3.2.38. 点 P 在曲线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], a > 0$ 上两点 $A(a,0)$ 与 $B(0,a)$ 之间, 并且曲线 BP 的长度是曲线 AP 长度的 3 倍, 求 P 点坐标.

设 P 点坐标为 $(a\cos^3 t_0, a\sin^3 t_0)$, 并且弧微分

$$\mathrm{d}s = \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t = \sqrt{(-3a\cos^2 t\cdot\sin t)^2 + \left(3a\sin^2 t\cdot\cos t\right)^2}\mathrm{d}t = \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t}\mathrm{d}t = \frac{3a}{2}|\sin 2t|\mathrm{d}t$$

则曲线 AP 的长度是曲线 AB 长度的 $\frac{1}{4}$, 因此有

$$\int_0^{t_0}\mathrm{d}s = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}s \Rightarrow \int_0^{t_0}\sin 2t\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\mathrm{d}t \Rightarrow \cos 2t_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{6}$$

于是 P 点坐标为 $\left(\frac{3\sqrt{3}a}{8}, \frac{a}{8}\right)$.

例 3.2.39. 求曲线弧 $r = a\sin^3\frac{\theta}{3}$ $(a>0)$ 的全长.

错解. 弧微分 $\mathrm{d}s = \sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)^2]}\mathrm{d}\theta = \sqrt{a^2\sin^6\frac{\theta}{3}+a^2\sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}}\mathrm{d}\theta = a\sin^2\frac{\theta}{3}\mathrm{d}\theta$, 那么弧长为

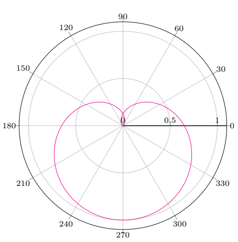


图 3.2.1

$$l = \int_0^{2\pi} a\sin^2\frac{\theta}{3}\mathrm{d}\theta = a\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\theta}{3}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{a}{2}\left(\theta - \frac{3}{2}\sin\frac{2\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \pi a + \frac{3\sqrt{3}a}{8}.$$

错因: θ 的变化范围并不是 $[0,2\pi]$, 事实上, 当 $\theta=0$ 时 $r=0$, 当 θ 从 0 开始增大时, r 也从 0 开始增大, 当 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 时, $r = a$ 达到最大; 根据对称性, 当 θ 继续增大时, θ 减少, 当 θ 增大到 3π 时, r 减少到 0, 此时, 点 (r,θ) 的轨迹已经形成一条封闭曲线, 可见, θ 的变化范围是 $[0,3\pi]$.

$$l=\int_0^{3\pi}a\sin^2\frac{\theta}{3}\mathrm{d}\theta=\frac{a}{2}\left(\theta-\frac{3}{2}\sin\frac{2\theta}{3}\right)\Big|_0^{3\pi}=\frac{3a\pi}{2}.$$

3.2.6 定积分的物理应用

例 3.2.40. 设心形线为 $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$, 试用定积分计算:
(1) 它所围成的图形的面积 A; (2) 它的长度 L; (3) 它所围成的图形 D 的重心 (D 的密度为 1); (4) 它自身的重心 C; (5) 它绕极轴旋转所得闭曲面所围立体的体积 V; (6) 它绕极轴旋转所得闭曲面的面积 S; (7) 它对极轴的转动惯量 I (线密度为 1).

(1) $A=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi}{2}a^2.$

(2) $L=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta=2\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\mathrm{d}\theta=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=8a.$

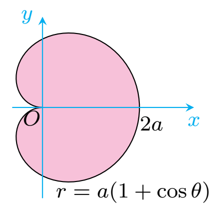


图 3.2.2

(3) 设重心坐标 C 为 (ξ,η), D 在极轴上方的一半区域为 D_1, 由对称性知 $\eta=0$, 下求 ξ,
法一: 用静力矩微元法, 这里从略.
法二: 利用二重积分求 ξ,

$$\xi=\frac{1}{M}\iint\limits_{D_1}\rho x\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{M}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}r^2\cos\theta\mathrm{d}r=\frac{a^3}{3M}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3\cos\theta\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{a^3}{3M}\int_0^{\pi}\left(\cos\theta+3\cos^2\theta++3\cos^3\theta+\cos^4\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{5a}{6}$$

其中 $M=\frac{1}{2}A\cdot\rho=\frac{1}{2}A=\frac{3\pi}{4}a^2.$

(4) 设心形线 Γ 的上半条为 Γ_1, 设 Γ,Γ_1 的重心分别为 (ξ,η) 和 (ξ_1,η_1), 由对称性知 $\xi=\xi_1,\eta=\eta_1=0$, 因为 Γ_1 对 y 轴的静力矩微元为

$$\mathrm{d}M_y=r(\theta)\cos\theta\cdot\rho\mathrm{d}s=r(\theta)\cos\theta\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta$$

从而, 有

$$M_y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}M_y=\int_0^{\pi}r(\theta)\cos\theta\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$
$$=4a^2\int_0^{\pi}\left(2\cos^5\frac{\theta}{2}-\cos^3\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta\xlongequal{\frac{\theta}{2}=t}8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^5t-\cos^3t\right)\mathrm{d}t=\frac{16a^2}{5}$$

由有 *(2)* 知, Γ 的长度为 $8a$, 于是 Γ 的质量为 $M=\frac{L}{2}\cdot\rho=4a$ 所以 $\xi=\frac{M_y}{M_1}=\frac{4a}{5}$, 从而知 $C\left(\frac{4a}{5},0\right)$.

(5) 由 $r=a(1+\cos\theta)$ 可得

$$x=a(1+\cos\theta)\cos\theta=a\left[\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]\geqslant-\frac{a}{4},\ y=a(1+\cos\theta)\sin\theta$$

体积元 $\mathrm{d}V=\pi y^2(\theta)\mathrm{d}x(\theta)$, 于是

$$\begin{aligned}V&=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{0}\pi y^2(\theta)\mathrm{d}x(\theta)-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\pi y^2(\theta)\mathrm{d}x(\theta)=\int_{\pi}^{0}y^2(\theta)\mathrm{d}x(\theta)\\&=\int_{\pi}^{0}\pi[a(1+\cos\theta)]^2[a(1+\cos\theta)\cos\theta]'\mathrm{d}\theta=\pi a^3\int_0^{\pi}\sin^3\theta(1+\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)\mathrm{d}\theta\\&\xlongequal{\cos\theta=t}\pi a^3\int_1^{-1}(t^2-1)(1+t)^2(1+2t)\mathrm{d}t=\pi a^3\int_{-1}^{1}(1+4t^2-5t^4)\mathrm{d}t=\frac{8\pi}{3}a^3.\end{aligned}$$

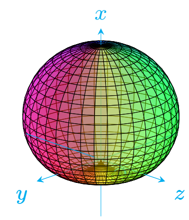


图 3.2.3

(6) 因为 $\mathrm{d}S=2\pi y(\theta)\mathrm{d}s(\theta)=2\pi r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta$, 所以, 有

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\pi}2\pi r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta=2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{\pi}\sin\theta(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\theta\\&=-2\sqrt{2}\pi a^3\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}(1+\cos\theta)=\frac{32\pi}{5}a^2.\end{aligned}$$

(7) 因为 $\mathrm{d}I=y^2(\theta)\rho\mathrm{d}s(\theta)=r^2(\theta)\sin^2\theta\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta$, 所以, 有

$$\begin{aligned}I&=2\int_0^{\pi}r^2(\theta)\sin^2\theta\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta=2\sqrt{2}a^3\int_0^{\pi}\sin^2\theta(1+\cos\theta)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}\theta\\&=64a^3\int_0^{\pi}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^7\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta\xlongequal{\frac{\theta}{2}=t}128a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^7t-\cos^9t)\mathrm{d}t=\frac{2048}{315}a^3.\end{aligned}$$

3.2.7　定积分综合性问题

积分等式命题的证明

例 3.2.41. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数, 且 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 证明:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\int_a^x(x-t)f''(t)\mathrm{d}t,\forall x\in[a,b].$$

证法一 由 N-L 公式,

$$\begin{aligned}f(x)&=f(a)+\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=f(a)+\int_a^x f'(a)\mathrm{d}t+\int_a^x\mathrm{d}t\int_a^t f''(u)\mathrm{d}u\\&=f(a)+f'(a)(x-a)+\int_a^x\mathrm{d}t\int_t^x f''(u)\mathrm{d}u=f(a)+f'(a)(x-a)+\int_a^x(x-t).\end{aligned}$$

证法二 即证 $\int_a^x(x-t)f''(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$, 由表格积分法:

f'	$(x-t)$	1	0
	$+\searrow$	$-\searrow$	
$\int$	$f''(t)$	$f'(t)$	$f(t)$

于是 $\int_a^x(x-t)f''(t)\mathrm{d}t=[(x-t)f'(t)-f(t)]_a^x=-f(x)-(x-a)f'(a)+f(a)$, 整理得证.

例 3.2.42. 设 $f(x)\in D(0,1)$, $f(0)=f(1)=-2$, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 证明: $\exists\xi\in(0,1)$, 使得

$$f'(\xi)-f(\xi)=\xi.$$

证 令 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}(f(x)+x+1)$, 有 $F(0)=-1$, $F(1)=0$, 因为 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 由积分中值定理知, $\exists\eta\in(0,1)$, 使得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(\eta)\int_0^1 \mathrm{d}x=f(\eta)=0$$

而 $F(\eta)=\mathrm{e}^{-\eta}(f(\eta)+\eta+1)>0$, 因此 $\exists\xi\in(0,1)$, 使得 $F(x)\leqslant F(\xi)$, 即 $F(x)$ 的最大值一定在区间 $(0,1)$ 内取到, 由 *Fermat* 引理知, $F'(\xi)=0$, 即

$$-\mathrm{e}^{-x}(f(x)+x+1)+\mathrm{e}^{-x}(f'(x)+1)\Big|_{x=\xi}=f'(\xi)-f(\xi)=\xi.$$

例 3.2.43. 设 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上二阶连续可导, $f(3)=0$, 证明: $\exists\xi\in(2,4)$, 使得 $f''(\xi)=3\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x$.

证 构造 $F(x)=\int_2^x f(t)\mathrm{d}t$, 那么将 $F(2),F(4)$ 分别在 $x=3$ 处 *Taylor* 展开, 有

$$F(2)=F(3)+F'(3)(2-3)+\frac{1}{2!}F''(3)(2-3)^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi_1)(2-3)^3$$
$$F(4)=F(3)+F'(3)(4-3)+\frac{1}{2!}F''(3)(4-3)^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi_2)(4-3)^3$$

注意到 $F(2)=F'(3)=0$, 那么上式化为 $\begin{cases}0=F(3)+\dfrac{1}{2}F''(3)-\dfrac{1}{6}F'''(\xi_1)\\ F(4)=F(3)+\dfrac{1}{2}F''(3)+\dfrac{1}{6}F'''(\xi_2)\end{cases}$ 即

$$F(4)=\frac{1}{6}\big(F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)\big)$$

因为 $F'''(x)=f''(x)$ 在 $[2,4]$ 上连续, 故 $F'''(x)$ 在 $[2,4]$ 上有最大值 M 和最小值 m, 使得

$$m\leqslant\frac{1}{2}\big(F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)\big)\leqslant M$$

又由连续函数的介值定理知 $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(2,4)$, 使得

$$F'''(\xi)=\frac{1}{2}\big(F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)\big)$$

故 $F(4)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}(F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2))=\dfrac{1}{3}F'''(\xi)$, 则

$$F'''(\xi)=3F(4)\Rightarrow f''(\xi)=3\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x.$$

例 3.2.44. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 二阶导函数连续, 证明: $\exists\xi\in[-1,1]$, 使得

$$\int_{-1}^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}[2f'(\xi)+\xi f''(\xi)].$$

证 构造 $F(x)=xf(x)$, 那么 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 二阶导函数连续, 并且

$$F'(x)=f(x)+xf'(x),\ F''(x)=2f'(x)+xf''(x)$$

又由 *Taylor* 展开得,

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{1}{2!}F''(\theta x)x^2\ \theta\in(0,1)$$

且 $F(0)=0,F'(0)=f(0)x$, 于是 $F(x)=f(0)x+\dfrac{1}{2}F''(\theta x)x^2$, 两边对 x 积分, 则有,

$$\int_{-1}^1 F(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(0)x\mathrm{d}x+\frac{F''(\theta x)}{2}\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{F''(\theta x)}{2}\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x$$

记 $m=\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}F''(x)$, $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}F''(x)$, 于是

$$m\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{-1}^1 F''(\theta x)x^2\mathrm{d}x\leqslant M\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x$$

即 $\dfrac{2}{3}m\leqslant\int_{-1}^1 F''(\theta x)x^2\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{2}{3}M$, 因此有 $m\leqslant\int_{-1}^1 F(x)\mathrm{d}x\leqslant M$, 对 $F''(x)$ 利用连续函数的介值定理, 即 $\exists\xi\in[-1,1]$, 使得 $3\int_{-1}^1 F(x)\mathrm{d}x=F''(\xi)$, 即得证.

例 3.2.45. 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f(a)=f(b)=0$, 试证: $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}f''(\xi)(a-b)^3.$$

证 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}(x-a)f(x)$, $G(x)=-\frac{1}{12}(x-a)^3$, 在 $[a,b]$ 上连续两次应用 *Cauchy* 中值定理,

$$\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-0}{-\frac{1}{12}(b-a)^3-0}=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}\xlongequal[a\leqslant\xi_1\leqslant b]{Cauchy\text{ 中值定理}}\frac{F\text{"}(\xi_1)}{G'(\xi_1)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}f(\xi_1)-\frac{1}{2}(\xi_1-a)f'(\xi)-0}{-\frac{1}{4}(\xi_1-a)^2-0}\xlongequal[a\leqslant\xi\leqslant\xi_1]{Cauchy\text{ 中值定理}}\frac{-\frac{1}{2}f''(\xi)(\xi-a)}{-\frac{1}{2}(\xi-a)}=f''(\xi).$$

此式同乘 $-\frac{1}{12}(b-a)^3=\frac{1}{12}(b-a)^3$, 即得所求.

例 3.2.46. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(b)(b-a)-f'(b)\frac{(b-a)^2}{2}+\frac{1}{6}(b-a)^3f''(\xi).$$

证 令 k 为使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(b)(b-a)-f'(b)\frac{(b-a)^2}{2}+\frac{1}{6}(b-a)^3k$ 成立的实常数, 构造辅助函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)(x-a)+f'(x)\frac{(x-a)^2}{2}-\frac{1}{6}(x-a)^3k$$

则 $F(a)=F(b)=0$, 故由 *Rolle* 定理知 $\exists\xi\in(a,b)$, 使 $F'(\xi)=0$, 即

$$F'(\xi)=f''(\xi)\frac{(\xi-a)^2}{2}-\frac{1}{2}(\xi-a)^2k=0$$

得证 $k=f''(\eta)$, 故得证.

例 3.2.47. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶连续的导数, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi).$$

证法一 将 $f(x)$ 在 $\frac{a+b}{2}$ 处进行 *Taylor* 展开, 有

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$$

因为 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以存在最小值 m 和最大值 M, 使 $\forall x\in[a,b]$, $m\leqslant f''(x)\leqslant M$, 于是

$$m\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f''(\xi_1)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x$$

从而 $m\leqslant\dfrac{\int_a^b f''(\xi_1)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x}{\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x}\leqslant M$, 故由介值定理知, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f''(\xi)=\frac{\int_a^b f''(\xi_1)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x}{\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x}$$

即得证 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi)$.

证法二 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 将 $F(x)$ 在 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$ 处 *Taylor* 展开得

$$F(x)=F\left(x_0\right)+F'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{F''(x)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\frac{F'''\left(\xi\right)}{3!}\left(x-x_0\right)^3$$

其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间, 将 $x=a$ 和 $x=b$ 代入上式, 并相减得

$$F\left(b\right)-F\left(a\right)=\left(b-a\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}\left(b-a\right)^3\frac{f''\left(\xi_1\right)+f''\left(\xi_2\right)}{2}$$

其中 $a<\xi_2<\dfrac{a+b}{2}<\xi_1<b$, 不妨设 $f''(\xi_1)\leqslant f''(\xi_2)$, 则 $f''(x_1)\leqslant\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\leqslant f''(\xi_2)$, 由导函数 $f''(x)$ 的 *Darboux* 定理或 $f''(x)$ 的连续性及介值定理知, $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 或 $(\xi_2,\xi_1)\subset(a,b)$, 使 $f''(\xi)=\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$, 故 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+\dfrac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi)$.

证法三 设 k 为使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+\dfrac{1}{24}(b-a)^3k$ 成立的实数, 要证结论成立, 只需证 $k=f''(\xi)$, 为此构造辅助函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-(x-a)f\left(\frac{a+x}{2}\right)-\frac{1}{24}(x-a)^3k$$

则 $F(a)=F(b)=0$, 故由 *Rolle* 定理, $\exists\eta\in(a,b)$, 使 $F'(\eta)=0$, 即

$$f(\eta)-f\left(\frac{a+\eta}{2}\right)-\frac{\eta-a}{2}f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right)-\frac{k}{8}(\eta-a)^2=0$$

又将 $f(\eta)$ 在 $x=\dfrac{a+\eta}{2}$ 处进行 *Taylor* 展开, 有

$$f(\eta)=f\left(\frac{a+\eta}{2}\right)+f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right)\frac{\eta-a}{2}+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(\frac{\eta-a}{2}\right)^2$$

其中 $\xi\in\left(\dfrac{a+\eta}{2},\eta\right)\subset(a,b)$, 比较上述两式, 得 $k=f''(\xi)$ 故得证.

证法四 取 $\rho\equiv 1$, 首先构造数值求积公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx A_0f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, 使其具有尽可能高的代数精度, 为此, 取 $f(x)=1$ 使求积公式精确成立, 则有

$$A_0=b-a$$

把 A_0 代入求积公式, 取 $f(x)=x$, 代入验算知求积公式精确成立; 再取 $f(x)=x^2$, 求积公式不精确成立, 故求积公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx(b-a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ 的代数精度为 1; 其次, 构造一次插值多项式

$$P_1\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right),\ P_1'\left(\frac{a+b}{2}\right)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

那么 $W_2(x)=\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ 且不恒为 0, 又

$$K=\int_a^b W_2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}(b-a)^3$$

那么至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\cdot\frac{1}{12}(b-a)^3$$

即得待证等式.

例 3.2.48. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶连续的导数, 证明存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))-\frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3.$$

证法一 设 k 为使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{b-a}{2}(f(a)+f(b))-\dfrac{1}{12}k(b-a)^3$ 成立的实常数, 则证 $k=f''(\xi)$, 为此构造辅助函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{x-a}{2}(f(a)+f(x))+\frac{1}{12}k(x-a)^3$$

那么 $F(a)=F(b)=0$, 由 *Rolle* 定理知, $\exists\xi_1\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi_1)=0$, 又

$$F'(x)=f(x)-\frac{1}{2}(f(x)+f(a))-\frac{x-a}{2}f'(x)+\frac{1}{4}k(x-a)^2$$

并且注意到 $F'(a)=F'(\xi_1)=0$, 再由 *Rolle* 定理知, $\exists\xi\in(a,\xi_1)\subset(a,b)$, 使得 $F''(\xi)=0$, 并且

$$F''(\xi)=-\frac{\xi-a}{2}f''(\xi)+\frac{1}{2}k(\xi-a)=0$$

即得证 $k=f''(\xi)$.

证法二 取 $\rho(x)\equiv 1$, 首先构造数值求积公式 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx A_0f(a)+A_1f(b)$, 使其具有尽可能高的代数精度, 为此, 分别取 $f(x)=1,x$ 使求积公式精确成立, 则有

$$\begin{cases}A_0 & + & A_1 & = & b-a\\ aA_0 & + & bA_1 & = & \dfrac{b^2-a^2}{2}\end{cases}\Rightarrow A_0=A_1=\frac{b-a}{2}$$

把 A_0, A_1 代入求积公式, 取 $f(x)=x^2$, 代入验算知求积公式精确成立; 再取 $f(x)=x^3$, 求积公式不精确成立, 故求积公式 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$ 的代数精度为 2; 其次, 构造二次插值多项式 $P_1(x)$, 使满足

$$P_1(a)=f(a),\ P_1'(b)=f'(b)$$

那么 $W_2(x)=(x-a)(x-b)\geqslant 0$ 且不恒为 0, 又

$$K=\int_a^b W_2(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}(b-a)^3$$

那么至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))-\frac{f''(\xi)}{2!}\cdot\frac{1}{6}(b-a)^3$$

即得待证等式.

例 3.2.49. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有三阶连续的导数, 证明至少存在一点 $\eta\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{4}\left[f(a)+3f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right]+\frac{(b-a)^4}{216}f'''(\eta).$$

证 令 k 为使 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{4}\left[f(a)+3f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right]+\frac{(b-a)^4}{216}k$ 成立的实常数, 要证结论成立, 只需证 $k=f'''(\eta)$, 为此, 将上式右端移到左端, 并将 b 改写为 x, 构造辅助函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{x-a}{4}\left[f(a)+3f\left(\frac{a+2x}{3}\right)\right]-\frac{(x-a)^4}{216}k,\ x\in[a,b]$$

则 $F(a)=F(b)=0$, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且可导, 由 *Rolle* 定理, $\exists\xi_1\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi_1)=0$, 又

$$F'(x)=f(x)-\frac{1}{4}\left[f(a)+3f\left(\frac{a+2x}{3}\right)\right]-\frac{x-a}{2}f'\left(\frac{a+2x}{3}\right)-\frac{(x-a)^3}{54}k$$

得 $F'(a)=F'(\xi_1)=0$, 故对 $F'(x)$ 在 $[a,\xi_1]$ 上用 *Rolle* 定理, 得 $\exists\xi_2\in(a,\xi_1)\subset(a,b)$, 使得 $F''(\xi_2)=0$, 即

$$F''(\xi_2)=f'(\xi_2)-f'\left(\frac{a+2\xi_2}{3}\right)-\frac{\xi_2-a}{3}f''\left(\frac{a+2\xi_2}{3}\right)-\frac{(\xi_2-a)^2}{18}k=0$$

再将 $f'(\xi_2)$ 在 $x=\dfrac{a+2\xi_2}{3}$ 处 *Taylor* 展开, 有

$$f'(\xi_2)=f'\left(\frac{a+2\xi_2}{3}\right)+f''\left(\frac{a+2\xi_2}{3}\right)\left(\xi_2-\frac{a+2\xi_2}{3}\right)+\frac{1}{2!}f'''(\eta)\left(\xi_2-\frac{a+2\xi_3}{3}\right)^2$$

其中 $\eta\in\left(\dfrac{a+2\xi_2}{3}\right)\subset(a,b)$, 比较上述两式, 即得 $k=f'''(\eta)$, 故得证.

例 3.2.50. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有三阶连续的导数, 证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{4}\left[3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+f(b)\right]-\frac{(b-a)^4}{216}f'''(\xi).$$

证 令 k 为使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{4}\left[3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+f(b)\right] - \frac{(b-a)^4}{216}k$ 成立的实常数，要证结论成立，只需证 $k = f'''(\eta)$，为此，构造辅助函数

$$F(x) = \int_x^b f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-x}{4}\left[3f\left(\frac{2x+b}{3}\right)+f(b)\right] + \frac{(b-x)^4}{216}k$$

则 $F(a)=F(b)=0$，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且可导，由 *Rolle* 定理，$\exists\xi_1\in(a,b)$，使得 $F'(\xi_1)=0$，又

$$F'(x) = -f(x) + \frac{1}{4}\left[3f\left(\frac{2x+b}{3}\right)+f(b)\right] - \frac{b-x}{2}f'\left(\frac{2x+b}{3}\right) - \frac{(b-x)^3}{54}k$$

得 $F'(\xi_1)=F'(b)=0$，故对 $F'(x)$ 在 $[\xi_1,b]$ 上用 *Rolle* 定理，得 $\exists\xi_2\in(\xi_1,b)\subset(a,b)$，使得 $F''(\xi_2)=0$，即

$$F''(\xi_2) = -f'(\xi_2) + f'\left(\frac{2\xi_2+b}{3}\right) - \frac{b-\xi_2}{3}f''\left(\frac{2\xi_2+b}{3}\right) + \frac{(b-\xi_2)^2}{18}k$$

再将 $f'(\xi_2)$ 在 $x=\frac{2\xi_2+b}{3}$ 处 *Taylor* 展开，有

$$f'(\xi_2) = f'\left(\frac{2\xi_2+b}{3}\right) + f''\left(\frac{2\xi_2+b}{3}\right)\left(\xi_2-\frac{2\xi_2+b}{3}\right) + \frac{1}{2!}f'''(\eta)\left(\xi_2-\frac{2\xi_2+b}{3}\right)^2$$

其中 $\eta\in\left(\frac{2\xi_2+b}{3}\right)\subset(a,b)$，比较上述两式，即得 $k=f'''(\eta)$，故得证.

例 3.2.51. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有四阶连续导数，证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] - \frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi).$$

证法一 令 $\begin{cases} a = c-h \\ b = c+h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \dfrac{a+b}{2} \\ h = \dfrac{b-a}{2} \end{cases}$ 那么原式等价于

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{3}[f(c-h)+4(c)+f(c+h)] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

设 k 为使上式成立的实常数，并构造

$$F(x) = \int_{c-x}^{c+x} f(t)\mathrm{d}t - \frac{x}{3}[f(c-x)+4(c)+f(c+x)] + \frac{x^5}{90}k$$

下证 $k=f^{(4)}(\xi)$，因为 $F(0)=F(x)=0$，由 *Rolle* 定理得，$\exists\xi_1\in(0,x)$，使得 $F'(\xi_1)=0$ 又

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(c+x)+f(c-x) - \frac{1}{3}[f(c-x)+4f(c)+f(c+x)] - \frac{x}{3}\left[-f'(c-x)+f'(c+x)\right] + \frac{x^4}{18}k \\ &= \frac{2}{3}[f(c+x)+f(c-x)] + \frac{x}{3}\left[f'(c-x)-f'(c+x)\right] + \frac{x^4}{18}k - \frac{4}{3}f(c) \end{aligned}$$

因为 $F'(0)=F'(\xi_1)$，由 *Rolle* 定理得，$\exists\xi_2\in(0,\xi_1)$，使得 $F''(\xi_2)=0$，且

$$\begin{aligned} F''(x) &= \frac{2}{3}\left[f'(c+x)-f'(c-x)\right] + \frac{1}{3}\left[f'(c-x)-f'(c+x)\right] + \frac{x}{3}\left[-f''(c-x)-f''(c+x)\right] + \frac{2x^3}{9}k \\ &= \frac{1}{3}\left[f'(c+x)-f'(c-x)\right] - \frac{x}{3}\left[f''(c-x)+f''(c+x)\right] + \frac{2x^3}{9}k \end{aligned}$$

又因为 $F''(0)=F''(\xi_2)$，由 *Rolle* 定理得，$\exists\xi_3\in(0,\xi_2)$，使得 $F'''(\xi_3)=0$，且

$$\begin{aligned} F'''(x) &= \frac{1}{3}\left[f''(c+x)+f''(c-x)\right] - \frac{1}{3}\left[f''(c-x)+f''(c+x)\right] - \frac{x}{3}\left[-f'''(c-x)+f'''(c+x)\right] + \frac{2x^2}{3}k \\ &= \frac{x}{3}\left[f'''(c-x)-f'''(c+x)\right] + \frac{2x^2}{3}k \end{aligned}$$

由 *Lagrange* 中值定理得，$\exists\xi\in(c-\xi_3,c+\xi_3)$，使得 $f'''(c-\xi_3)-f'''(c+\xi_3) = -2\xi_3 f^{(4)}(\xi)$，那么

$$-\frac{2}{3}\xi_3^2 f^{(4)}(\xi) + \frac{2}{3}\xi_3^2 k = 0 \Rightarrow k = f^{(4)}(\xi)$$

得证 $k=f^{(4)}(x)$，即原命题成立.

证法二 取 $\rho(x)\equiv 1$, 首先构造数值求积公式 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx A_0\cdot f(a)+A_1\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)+A_2\cdot f(b)$, 使其具有尽可能高的代数精度, 为此, 分别取 $f(x)=1,x,x^2$ 使求积公式精确成立, 则有

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = b-a \\ aA_0 + \dfrac{a+b}{2}A_1 + bA_2 = \dfrac{b^2-a^2}{2} \\ a^2A_0 + \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 A_1 + b^2A_2 = \dfrac{b^3-a^3}{3} \end{cases}$$

那么有增广矩阵

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B}) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & b-a \\ a & \dfrac{a+b}{2} & b & \dfrac{b^2-a^2}{2} \\ a^2 & \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 & b^2 & \dfrac{b^3-a^3}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-a^2r_1]{r_2-ar_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & \dfrac{b-a}{2} & b-a & \dfrac{(-b+a)^2}{2} \\ 0 & \dfrac{(b+a)^2-a^2}{4} & b^2-a^2 & \dfrac{(-b+a)^2(b+2a)}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\times\frac{2}{(a-b)^2}]{r_3-\frac{2\left[\frac{1}{4}(a+b)^2-a^2\right]}{b-a}r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & \dfrac{b-a}{2} & b-a & \dfrac{(-b+a)^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{b-a}{6} \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+(a-b)r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & \dfrac{(-5)(-b+a)}{6} \\ 0 & \dfrac{b-a}{2} & 0 & \dfrac{(-b+a)^2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{b-a}{6} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-r_2]{r_2\times\frac{2}{b-a}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{b-a}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{(-2)(-b+a)}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{b-a}{6} \end{array}\right)$$

取 $f(x)=x^3$, 代入验算知求积公式精确成立; 再令 $f(x)=x^4$, 求积公式不精确成立, 于是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

其次, 构造三次插值多项式 $P_3(x)$, 使满足

$$P_3(a)=f(a),\ P_3\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right),\ P_3(b)=f(b),\ P_3'(b)=f'(b)$$

那么 $W_4(x)=(x-a)\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)(x-b)^2\geqslant 0$ 且不恒为 0, 又

$$K=\int_a^b W_4(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{120}(b-a)^5$$

那么至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\cdot\frac{(b-a)^5}{120}$$

即得待证等式.

例 3.2.52. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导, 证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{3}(2f(a)+f(b))+\frac{(b-a)^2}{6}f'(a)-\frac{f'''(\xi)}{72}(b-a)^4.$$

证 取 $\rho\equiv 1$, 首先构造数值求积公式 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx A_0\cdot f(a)+A_1\cdot f(b)+B_0\cdot f'(a)$, 使其具有尽可能高的代数精度, 为此, 分别取 $f(x)=1,x,x^2$ 使求积公式精确成立, 则有

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = b-a \\ aA_0 + bA_1 + B_0 = \dfrac{b^2-a^2}{2} \\ a^2A_0 + b^2A_1 + 2aB_0 = \dfrac{b^3-a^3}{3} \end{cases}$$

那么有增广矩阵

$$(\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&0&b-a\\ a&b&1&\dfrac{b^2-a^2}{2}\\ a^2&b^2&2a&\dfrac{b^3-a^3}{3}\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-a^2r_1]{r_2-ar_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&0&b-a\\ 0&b-a&1&\dfrac{1}{2}(-b+a)^2\\ 0&b^2-a^2&2a&\dfrac{1}{3}(-b+a)^2(b+2a)\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{a-b}]{r_3-\frac{b^2-a^2}{b-a}r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&0&b-a\\ 0&b-a&1&\dfrac{1}{2}(-b+a)^2\\ 0&0&1&\dfrac{1}{6}(-b+a)^2\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_2]{\substack{r_2-r_3\\ r_2\times\frac{1}{b-a}}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&\dfrac{1}{3}(-2)(-b+a)\\ 0&1&0&\dfrac{b-a}{3}\\ 0&0&1&\dfrac{1}{6}(-b+a)^2\end{array}\right)$$

取 $f(x)=x^3$, 代入验算知求积公式精确成立; 再令 $f(x)=x^4$, 求积公式不精确成立, 于是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{3}(2f(a)+f(b))+\frac{(b-a)^2}{6}f'(a)$$

其次, 构造二次插值多项式 $P_2(x)$, 使满足

$$P_2(a)=f(a),\ P_2'(a)=f'(a),\ P_2(b)=f(b)$$

那么 $W_3(x)=(x-a)^2(x-b)\leqslant 0$ 且不恒为 0, 又

$$K=\int_a^b W_3(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{12}(b-a)^4$$

那么至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{3}(2f(a)+f(b))+\frac{(b-a)^2}{6}f'(a)-\frac{f'''(\xi)}{3!}\cdot\frac{1}{12}(b-a)^4$$

即得待证等式.

例 3.2.53. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上四阶可导, 证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))-\frac{(b-a)^2}{12}(f'(b)-f'(a))+\frac{f^{(4)}(\xi)}{720}(b-a)^5.$$

证法一 由定理 *2.5.3*, 以及插值定理知, $f(x)=H_3(x)+R(x)$, 其中

$$H_3(x)=\left(1+2\frac{x-a}{b-a}\right)\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^2f(a)+\left(1+2\frac{x-b}{a-b}\right)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2f(b)+(x-a)\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^2f'(a)+(x-b)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2f'(b)$$

以及

$$R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{720}(b-a)^4x$$

并且可以证明

$$\int_a^b\left(1+2\frac{x-a}{b-a}\right)\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^2\mathrm{d}x=\int_a^b\left(1+2\frac{x-b}{a-b}\right)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}$$

以及

$$\int_a^b(x-a)\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^2\mathrm{d}x=-\int_a^b(x-b)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{12}$$

于是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b H_3(x)\mathrm{d}x+\int_a^b R(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))-\frac{(b-a)^2}{12}(f'(b)-f'(a))+\frac{f^{(4)}(\xi)}{720}(b-a)^5.$$

证法二 取 $\rho\equiv 1$, 首先构造数值求积公式 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx A_0\cdot f(a)+A_1\cdot f(b)+B_0\cdot f'(a)+B_1\cdot f'(b)$, 使其具有尽可能高的代数精度, 为此, 分别取 $f(x)=1,x,x^2,x^3$ 使求积公式精确成立, 则有增广矩阵

$$(\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&b-a\\ a&b&1&1&\dfrac{b^2-a^2}{2}\\ a^2&b^2&2a&2b&\dfrac{b^3-a^3}{3}\\ a^3&b^3&3a^2&3b^2&\dfrac{b^4-a^4}{4}\end{array}\right)\xrightarrow[i=1,2,3]{r_{i+1}-a^ir_1}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&b-a\\ 0&b-a&1&1&\dfrac{(b-a)^2}{2}\\ 0&b^2-a^2&2a&2b&\dfrac{(b-a)^2(b+2a)}{3}\\ 0&b^3-a^3&3a^2&3b^2&\dfrac{(b^4-4a^3b+3a^4)}{4}\end{array}\right)$$

$$
\xrightarrow[r_4-\frac{b^3-a^3}{b-a}r_2]{r_3-\frac{b^2-a^2}{b-a}r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & b-a & 1 & 1 & \dfrac{(b-a)^2}{2} \\ 0 & 0 & -b+a & b-a & \dfrac{(b-a)^3}{6} \\ 0 & 0 & -b^2-ab+2a^2 & 2b^2-ab-a^2 & \dfrac{(b-a)^3(b+a)}{4}\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_4\times\frac{1}{(a-b)^2}]{r_4-\frac{2a^2-ab-b^2}{a-b}r_3}\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & b-a & 1 & 1 & \dfrac{(b-a)^2}{2} \\ 0 & 0 & a-b & b-a & \dfrac{(b-a)^3}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\dfrac{(b-a)^2}{12}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & b-a & 1 & 0 & \dfrac{7(b-a)^2}{12} \\ 0 & 0 & a-b & 0 & \dfrac{(b-a)^3}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\dfrac{(b-a)^2}{12}\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_2-r_3]{r_3\times\frac{1}{a-b}}\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & b-a & 0 & 0 & \dfrac{(b-a)^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{(b-a)^2}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\dfrac{(b-a)^2}{12}\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_2]{r_2\times\frac{1}{b-a}}\left(\begin{array}{cccc:c}1 & & & & \dfrac{b-a}{2} \\ & 1 & & & \dfrac{b-a}{2} \\ & & 1 & & \dfrac{(b-a)^2}{12} \\ & & & 1 & -\dfrac{(b-a)^2}{12}\end{array}\right)
$$

取 $f(x)=x^4$，代入验算知求积公式精确成立；再令 $f(x)=x^5$，求积公式不精确成立，于是

$$
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))-\frac{(b-a)^2}{12}(f'(b)-f'(a))
$$

其次，构造三次插值多项式 $P_3(x)$，使满足

$$
P_3^{(l)}(a)=f^{(l)}(a),\ P_3^{(l)}(b)=f^{(l)}(b)\ (l=0,1)
$$

那么 $W_4(x)=(x-a)^2(x-b)^2\geqslant 0$ 且不恒为 0，又

$$
K=\int_a^b W_4(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{30}(b-a)^5
$$

那么至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))-\frac{(b-a)^2}{12}(f'(b)-f'(a))+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\cdot\frac{1}{30}(b-a)^5
$$

即得待证等式.

例 3.2.54. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导数，证明：

$$
\lim_{n\to\infty}n\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right]=-\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)].
$$

证 将区间 $[a,b]$ 等分为 n 份，记 $h=\dfrac{b-a}{n},x_k=a+kh,k=0,1,\cdots,n$，则

$$
I=\lim_{n\to\infty}n\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}n\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-f(x_k))\mathrm{d}x
$$

由 *Lagrange* 中值定理，$\exists\xi_k(x)\in(x,x_k)$，使得 $f(x)-f(x_k)=(x-x_k)f'(\xi_k(x))$，于是

$$
I=-\lim_{n\to\infty}n\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}f'(\xi_k(x))(x_k-x)\mathrm{d}x
$$

由 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故由最值定理知，$\exists m_k,M_k\in[x_{k-1},x_k]$，使得 $m_k\leqslant f'(\xi_k(x))\leqslant M_k$，故

$$
\frac{1}{2}m_kh^2=m_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_k-x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{x_{k-1}}^{x_k}f'(\xi_k(x))(x_k-x)\mathrm{d}x\leqslant M_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_k-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}M_kh^2
$$

即 $m_k \leqslant \dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(\xi_k(x))(x_k-x)\mathrm{d}x \leqslant M$, 又有介值定理 $\exists\eta_k\in[x_{k-1},x_k]$, 使得

$$f'(\eta_k)=\frac{2}{h^2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(\xi_k(x))(x_k-x)\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{h^2}{2}f'(\eta_k)=\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(\xi_k(x))(x_k-x)\mathrm{d}x$$

即

$$I=-\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(\xi_k(x))(x_k-x)\mathrm{d}x=-\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{h^2}{2}f'(\eta_k)=-\frac{b-a}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f'(\eta_k)h$$

又因为 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 应用定积分的定义, 即得

$$I=-\frac{b-a}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f'(\eta_k)h=-\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)).$$

例 3.2.55 (2012 东南大学). 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有二阶连续导数, 记

$$B_n=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{2i-1}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\right),$$

试证:

$$\lim_{n\to\infty}n^2B_n=\frac{(b-a)^2}{24}\left(f'(b)-f'(a)\right).$$

证 将 $[a,b]$ 进行 n 等分, $h=\dfrac{b-a}{n}, x_0=a, x_1=a+h,\cdots,x_i=a+ih,\cdots,x_n=a+nh=b$, 则

$$B_n=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[f(x)-f\left(a+\frac{2i-1}{2}h\right)\right]\mathrm{d}x$$

在 $[x_{i-1},x_i]$ 上应用 $f(x)$ 在 $a+\dfrac{2i-1}{2}h$ 处 *Taylor* 展开, 则在 x 与 $a+\dfrac{2i-1}{2}h$ 之间必存在 ξ_i, 使得

$$f(x)=f\left(a+\frac{2i-1}{2}h\right)+f'\left(a+\frac{2i-1}{2}h\right)\left(x-a-\frac{2i-1}{2}h\right)+\frac{1}{2}f''(\xi_i)\left(x-a-\frac{2i-1}{2}h\right)^2$$

于是有

$$\begin{aligned}B_n&=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[f'\left(a+\frac{2i-1}{2}h\right)\left(x-a-\frac{2i-1}{2}h\right)+\frac{1}{2}f''(\xi_i)\left(x-a-\frac{2i-1}{2}h\right)^2\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f''(\xi_i)\left(x-a-\frac{2i-1}{2}h\right)^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因为 $f''(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上连续, 应用最值定理, $f''(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上必存在最大值 M_i 和最小值 m_i $(i=1,2,\cdots,n)$, 于是

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f''(\xi_i)\left(x-a-\frac{2i-1}{2}h\right)^2\mathrm{d}x\leqslant M_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(x-a-\frac{2i-1}{2}h\right)^2\mathrm{d}x=\frac{M_i}{12}h^3$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f''(\xi_i)\left(x-a-\frac{2i-1}{2}h\right)^2\mathrm{d}x\geqslant m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(x-a-\frac{2i-1}{2}h\right)^2\mathrm{d}x=\frac{m_i}{12}h^3$$

则

$$m_i\leqslant\frac{12}{h^3}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f''(\xi_i)\left(x-a-\frac{2i-1}{2}h\right)^2\mathrm{d}x\leqslant M_i$$

又有介值定理, 必存在 $\eta_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 使得

$$\frac{12}{h^3}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f''(\xi_i)\left(x-a-\frac{2i-1}{2}h\right)^2\mathrm{d}x=f''(\eta_i)$$

由于 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 应用定积分的定义, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n^2B_n&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}n^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{12}f''(\eta_i)h^3=\frac{(b-a)^2}{24}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f''(\eta_i)\frac{b-a}{n}\\&=\frac{(b-a)^2}{24}\int_a^b f''(x)\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{24}\left(f'(b)-f'(a)\right).\end{aligned}$$

例 3.2.56. 设 $f(x)\in C^4[0,1]$, 且满足 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+3f\left(\frac{1}{2}\right)=8\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)\mathrm{d}x$, 证明: $\exists c\in(0,1)$, 使得 $f^{(4)}(c)=0$.

证 因为 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=t+\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(t+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t$, $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t$, 所以

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t+\frac{1}{2})\mathrm{d}t-4\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t+3f\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

令 $g(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)+f\left(-x+\frac{1}{2}\right)$, $h(x)=g(x)-4g\left(\frac{x}{2}\right)$, 那么

$$h(0)=-3g(0)=-6f\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}h(0)$$

那么

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(t+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t-4\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}h(0)=0\Rightarrow\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}h(0)=0\Rightarrow\frac{1}{\frac{1}{2}-0}\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\mathrm{d}t=h(0)$$

因为 $m=\min\limits_{x\in[0,1]} h(x)\leqslant h(0)\leqslant\max\limits_{x\in[0,1]} h(x)=M$, 所以 $\exists\xi_1\in(0,\frac{1}{2})$, 使得 $h'(\xi_1)=0$, 又

$$h'(x)=g'(x)-2g'\left(\frac{x}{2}\right),g'(x)=f'\left(x+\frac{1}{2}\right)-f\left(-x+\frac{1}{2}\right)$$

所以 $h'(0)=0=h'(\xi_1)$, 由 *Rolle* 定理知, $\exists\xi_2\in(0,\xi_1)\subset\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 使得 $h''(\xi_2)=0$, 又

$$h''(x)=g''(x)-g''\left(\frac{x}{2}\right),g''(x)=f''\left(x+\frac{1}{2}\right)+f''\left(-x+\frac{1}{2}\right)$$

所以 $h''(\xi_2)=g''(\xi_2)=g''\left(\frac{\xi_2}{2}\right)$, 由 *Rolle* 定理知, $\exists\xi_3\in\left(\frac{\xi_2}{2},\xi_2\right)\subset\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 使得 $g'''(\xi_3)=0$, 而

$$g'''(x)=f'''\left(x+\frac{1}{2}\right)-f'''\left(-x+\frac{1}{2}\right)$$

所以 $f'''\left(\xi_3+\frac{1}{2}\right)=f'''\left(-\xi_3+\frac{1}{2}\right)$, 再由 *Rolle* 定理知, $\exists c\in\left(-\xi_3+\frac{1}{2},\xi_3+\frac{1}{2}\right)\subset(0,1)$ 使得 $f^{(4)}(c)=0$.

积分不等式命题的证明

例 3.2.57. 证明 $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\leqslant\int_0^1\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x-x^2}}\mathrm{d}x\leqslant\pi$.

证 $\forall x\in[0,1]$, $\frac{3}{4}\leqslant x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\leqslant 1$, 所以

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}\leqslant\int_0^1\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x-x^2}}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$$

$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=\arcsin(2x-1)\Big|_0^1=\pi$, $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\leqslant\int_0^1\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x-x^2}}\mathrm{d}x\leqslant\pi$.

例 3.2.58. 证明: $\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin(x^2)\mathrm{d}x>\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}$.

证 令 $t=x^2$, 则 $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$, 于是

$$f(x)=\int_0^{2\pi}\sin\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t+\underbrace{\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t}_{u=t-\pi}=\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}-\frac{\sin t}{2\sqrt{t+\pi}}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{2}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{t+\pi}}\right)\sin t\mathrm{d}t$$

令 $g(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}-\dfrac{1}{\sqrt{t+\pi}}$, $t\in(0,\pi)$, 那么 $g'(t)=-\dfrac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2}(t+\pi)^{-\frac{3}{2}}<0$, 则 $g(t)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减, 所以 $g(t)>g_{min}(t)=g(\pi)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, 则

$$f(x)>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}.$$

例 3.2.59. 证明: $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x<\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

证 只需证 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\cos t)\mathrm{d}t<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin t)\mathrm{d}t$, 即证

$$\sin(\cos t)<\cos(\sin t)\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

因为在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内 $\cos x\searrow$, 所以 $x>\sin x$, 所以有 $\cos(\sin x)>\cos x>\sin(\cos x)$ 得证.

推论 3.2.3. 证明: $\displaystyle\frac{2}{\pi}<\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x<1<\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2\pi}<\frac{\pi}{2}.$

证 在 $(0,1)$ 内, 有 $\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x$, 所以

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x<\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x<\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

又 $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\left(-\sqrt{1-x^2}\right)_0^1=1$, 所以 $\displaystyle\frac{2}{\pi}<\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x<1$; 又因为在 $(0,1)$ 内, 有 $1-\dfrac{x^2}{2}<\cos x<1-2\left(\dfrac{x}{\pi}\right)^2$, 所以

$$1<\frac{3\pi}{8}=\int_0^1\frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x<\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x<\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2}{\pi^2}\int_0^1\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2\pi}<\frac{\pi}{2}$$

综上: $\displaystyle\frac{2}{\pi}<\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x<1<\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2\pi}<\frac{\pi}{2}.$

例 3.2.60. 设 $a,b>0$, 函数 $f(x)$ 在 $[-a,b]$ 上非负可积, 且有 $\displaystyle\int_{-a}^b xf(x)\mathrm{d}x=0$, 证明

$$\int_{-a}^b x^2f(x)\mathrm{d}x\leqslant ab\int_{-a}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证 因为 $x\in[-a,b]$, 所以 $(x+a)(x-b)\leqslant 0\Rightarrow x^2-ab\leqslant(b-a)x$, 又 $f(x)\geqslant 0$, 所以有

$$\int_{-a}^b(x^2-ab)f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{-a}^b(b-a)xf(x)\mathrm{d}x$$

又 $\displaystyle\int_{-a}^b xf(x)\mathrm{d}x=0$, 进而得证 $\displaystyle\int_{-a}^b x^2f(x)\mathrm{d}x\leqslant ab\int_{-a}^b f(x)\mathrm{d}x.$

例 3.2.61. 设 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x)\geqslant 0$, $g(x)$ 为连续函数, $a\geqslant 0$, 证明:

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(g(x))\mathrm{d}x\geqslant f\left(\frac{1}{a}\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\right).$$

证 由 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的 *Taylor* 展开,

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

因为 $f''(\xi)\geqslant 0$, 所以有 $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, 现令

$$x=g(x),\ x_0=\frac{1}{a}\int_0^a g(x)\mathrm{d}x$$

于是有

$$f(g(x))\geqslant f\left(\frac{1}{a}\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\right)+f'\left(\frac{1}{a}\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\right)\left(g(x)-\frac{1}{a}\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\right)$$

对上式两边同时在 $[0,a]$ 上积分, 则由积分的保序性, 有

$$\begin{aligned}\int_0^a f(g(x))\mathrm{d}x&\geqslant\int_0^a f\left(\frac{1}{a}\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x+\int_0^a f'\left(\frac{1}{a}\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\right)\left(g(x)-\frac{1}{a}\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\\&=af\left(\frac{1}{a}\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\right)+f'\left(\frac{1}{a}\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\right)\int_0^a\left(g(x)-\frac{1}{a}\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x=af\left(\frac{1}{a}\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

整理得证.

例 3.2.62. 设 $f:[0,1]\to[-a,b]$ 连续, 且 $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=ab$, 证明 $0\leqslant\frac{1}{b-a}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$.

证 因为 $-a\leqslant f(x)\leqslant b$, 所以 $-\frac{a+b}{2}\leqslant f(x)-\frac{b-a}{2}\leqslant\frac{a+b}{2}$, 两边积分得

$$0\leqslant\int_0^1\left(f(x)-\frac{b-a}{2}\right)^2\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

即 $0\leqslant\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-(b-a)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{(b-a)^2}{4}\leqslant\frac{(a+b)^2}{4}$, 将 $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=ab$ 代入, 并整理得

$$0\leqslant(b-a)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b+a)^2}{4}\Rightarrow 0\leqslant\frac{1}{b-a}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2.$$

例 3.2.63. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, $f(x)>0$, 证明 $\mathrm{e}^{\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x}\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

证法一 将 $[0,1]$ n 等分, 则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$,

$$\exp\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln f\left(\frac{i}{n}\right)=\exp\lim_{n\to\infty}\ln\left[\prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[\prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

由几何平均数 $\leqslant$ 算术平均数, 得 $\left[\prod\limits_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$, 故令 $n\to\infty$, 由定积分定义得 $\mathrm{e}^{\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x}\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

证法二 令 $A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, 则由 *Taylor* 公式得

$$\ln y=\ln A+\frac{1}{A}(y-A)-\frac{1}{2\xi^2}(y-A)^2\leqslant\ln A+\frac{1}{A}(y-A)$$

其中 ξ 介于 y 与 A 之间, 令 $y=f(x)$, 代人上式, 再积分, 得

$$\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x\leqslant\ln A+\frac{1}{A}\int_0^1(f(x)-A)\mathrm{d}x=\ln A=\ln\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)$$

故得 $\mathrm{e}^{\int_0^1\ln f(x)dx}\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

例 3.2.64. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明 $\mathrm{e}^{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}\leqslant\int_0^1\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x$.

证 要证不等式两边取对数, 并且令 $g(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$, 即要证 $\int_0^1 \ln g(x)\mathrm{d}x \leqslant \ln\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)$, 记 $s=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$, 因为 $g(x)>0$, 所以 $s>0$, $\dfrac{g(x)}{s}>0$, $\dfrac{g(x)}{s}-1>-1$, 故由已知不等式: 当 $x>-1$ 时, $\ln(1+x)\leqslant x$, 可得

$$\begin{aligned}\int_0^1(\ln g(x)-\ln s)\mathrm{d}x&=\int_0^1 \ln\frac{g(x)}{s}\mathrm{d}x=\int_0^1 \ln\left[1+\left(\frac{g(x)}{s}-1\right)\right]\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\left(\frac{g(x)}{s}-1\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{s}\cdot\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x-1=0\end{aligned}$$

即得证 $\mathrm{e}^{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}\leqslant\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x$.

推论 3.2.4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(x)>0$, 则有

$$\mathrm{e}^{\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x}\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\ln\left(\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\right).$$

一般地, 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)>0$, 则

$$\ln\left((b-a)\left(\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right)^{-1}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}x\leqslant\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right).$$

更为一般地, 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $g(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导, $g''(x)<0$, 则

$$g\left((b-a)\left(\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right)^{-1}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))\mathrm{d}x\leqslant g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right).$$

例 3.2.65. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=0$, 且当 $x\in[0,1]$ 时, 有 $0<f'(x)\leqslant 1$, 证明

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\geqslant\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x.$$

证法一 要证结论, 只需证明 $\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\geqslant\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$, 为此, 令 $F(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2-\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$, $x\in[0,1]$, 则 $f(0)=0$, 且

$$F'(x)=f(x)\cdot\left[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)\right]$$

故只需证当 $x\in[0,1]$ 时, $F'(x)\geqslant 0$ 即可, 由有题设 $f(0)=0$, 且 $f'(x)>0\,(x\in[0,1])$, 所以当 $x\in[0,1]$ 时, $f(x)\geqslant f(0)=0$, 而因为 $F'(x)$ 的符号不易确定, 故再令 $g(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)$, 则 $g'(x)=2f(x)\cdot(1-f'(x))\geqslant 0$, 于是 $g(x)\geqslant g(0)=0$, 从而 $F'(x)\geqslant 0$, 故当 $x\in[0,1]$ 时, $F(x)\geqslant F(0)=0$, 因而 $F(1)\geqslant 0$, 即得 $\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\geqslant\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$.

证法二 同证法一, $f(x)>0$, 于是 $\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x>0$, 故要证结论成立, 只需证明 $\dfrac{\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x}\geqslant 1$, 为此, 令 $F(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2$, $G(x)=\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$, 则两次用 *Cauchy* 中值定理, 有

$$\frac{\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x}=\frac{F(1)-F(0)}{G(1)-G(0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{2\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t}{f^2(\xi)}=\frac{2\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^0 f(t)\mathrm{d}t}{f^2(\xi)-f^2(0)}=\frac{1}{f'(\eta)}$$

其中 $0<\xi<1$, $0<\eta<\xi$, 而由 $f(\eta)>0$, $0<f'(\eta)\leqslant 1$, 即得 $\dfrac{\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x}\geqslant 1$, 故得证.

例 3.2.66. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=0$, 且当 $x\in[0,1]$ 时, 有 $f'(x)\geqslant 1$, 证明

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^3\leqslant\frac{3}{4}\int_0^1 f^5(x)\mathrm{d}x.$$

证 因为 $f'(x)\geqslant 1>0$, 且 $f(0)=0$, 所以当 $x\in(0,1)$ 时, 有 $f(x)>0$, 则 $\frac{3}{4}\int_0^1 f^5(x)\mathrm{d}x>0$, 故要证结论成立, 即证 $\dfrac{\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^3}{\frac{3}{4}\int_0^1 f^5(x)\mathrm{d}x}\leqslant 1$, 为此, 令

$$F(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^3,\ G(x)=\frac{3}{4}\int_0^x f^5(t)\mathrm{d}t$$

则两次用 *Cauchy* 中值定理, 得

$$\begin{aligned}\frac{\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^3}{\frac{3}{4}\int_0^1 f^5(x)\mathrm{d}x}&=\frac{F(1)-F(0)}{G(1)-G(0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{4\left(\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t\right)^2}{f^4(\xi)}=\left(\frac{2\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t}{f^2(\xi)}\right)^2\\&=\left(\frac{2\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^0 f(t)\mathrm{d}t}{f^2(\xi)-f^2(0)}\right)^2=\frac{1}{[f'(\eta)]^2}\end{aligned}$$

其中 $0<\xi<1$, $0<\eta<\xi$, 而 $f'(\eta)\geqslant 1$, 即得 $\dfrac{\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^3}{\frac{3}{4}\int_0^1 f^5(x)\mathrm{d}x}\leqslant 1$, 故得证.

推论 3.2.5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, 且 $f(0)=0$, $0<f'(x)\leqslant\lambda$ (λ 为正常数), 则对任意实数 $a>0$ 及 $m>1$, 证明

$$\left(\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right)^m\geqslant\frac{m}{(2\lambda)^{m-1}}\int_0^a f^{2m-1}(x)\mathrm{d}x.$$

证 因为 $0<f'(x)\leqslant\lambda$, 且 $f(0)=0$, 所以当 $x\in[0,+\infty)$ 时, $f(x)>0$, 于是

$$\frac{m}{(2\lambda)^{m-1}}\int_0^a f^{2m-1}(x)\mathrm{d}x>0$$

故要证结论成立, 即证 $I=\dfrac{\left(\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right)^m}{\frac{m}{(2\lambda)^{m-1}}\int_0^a f^{2m-1}(x)\mathrm{d}x}\geqslant 1$, 令

$$F(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^m,\ G(x)=\frac{m}{(2\lambda)^{m-1}}\int_0^x f^{2m-1}(t)\mathrm{d}t$$

则两次用 *Cauchy* 中值定理, 有

$$\begin{aligned}I&=\frac{F(a)-F(0)}{G(a)-G(0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{\left(2\lambda\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t\right)^{m-1}}{f^{2m-2}(\xi)}=\left(\frac{2\lambda\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t}{f^2(\xi)}\right)^{m-1}\\&=\left(\frac{2\lambda\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t-2\lambda\int_0^0 f(t)\mathrm{d}t}{f^2(\xi)-f^2(0)}\right)^{m-1}=\frac{\lambda^{m-1}}{[f'(\eta)]^{m-1}}\end{aligned}$$

其中 $0<\xi<a$, $0<\eta<\xi$, 而由 $f(\eta)>0$, $0<f'(\eta)\leqslant\lambda$, 即 $I\geqslant 1$, 故得证.

例 3.2.67. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续, 在 $(0,+\infty)$ 上恒正, 且当 $x>0$ 时, $f^3(x)\leqslant 3\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$, 证明: 当 $x\geqslant 0$ 时, 恒有 $f(x)\leqslant x$.

法一： 令 $F(x)=\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$，那么 $F(x)>0$，$F'(x)=f^2(x)$，于是 $x>0$ 时有，

$$[F'(x)]^{\frac{3}{2}}\leqslant 3F(x)\Rightarrow\frac{[F'(x)]^{\frac{3}{2}}}{F(x)}\leqslant 3\Rightarrow\frac{F'(x)}{F^{\frac{2}{3}}(x)}\leqslant 3^{\frac{2}{3}}\Rightarrow\int_0^x\frac{F'(t)}{F^{\frac{2}{3}}(t)}\mathrm{d}t\leqslant 3^{\frac{2}{3}}x$$

不等式左边有 $\int_0^x F^{-\frac{2}{3}}x\mathrm{d}F(x)=3F^{\frac{1}{3}}(t)\Big|_0^x=3F^{\frac{1}{3}}(x)$，即 $F^{\frac{2}{3}}(x)\leqslant 3^{-\frac{2}{3}}x^2$，又因为 $\frac{F'(x)}{3^{\frac{2}{3}}}\leqslant F^{\frac{2}{3}}(x)$，因此

$$\frac{F'(x)}{3^{\frac{2}{3}}}\leqslant F^{\frac{2}{3}}(x)\leqslant 3^{-\frac{2}{3}}x^2\Rightarrow f^2(x)\leqslant x^2\Rightarrow f(x)\leqslant x$$

当 $x\to 0^+$ 时，$f^3(0^+)\leqslant 0\Rightarrow f(0)\leqslant 0$，综上所述，当 $x\geqslant 0$ 时，恒有 $f(x)\leqslant x$.

法二： 由题意可知，$f(x)\leqslant\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t}$，记 $g(x)=\sqrt[3]{\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t}$，那么 $g'(x)=\frac{1}{3}\left(\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot f^2(x)$，在 $[0,x]$ 区间由 *Lagrange* 中值定理知，

$$g(x)-g(0)=g'(\xi)\cdot x\Rightarrow\sqrt[3]{\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t}=\frac{1}{3}\left(\int_0^\xi f^2(t)\mathrm{d}t\right)^{-\frac{2}{3}}f^2(\xi)\cdot x$$

由 $f^3(x)\leqslant 3\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$，可得 $\frac{1}{3}f^2(\xi)\leqslant\int_0^\xi f^2(t)\mathrm{d}t$，结合 $x^{-\frac{2}{3}}$ 关于 x 单调递减可得，

$$\left(\int_0^\xi f^2\mathrm{d}t\right)^{-\frac{2}{3}}\leqslant\left(\frac{1}{3}f^3(\xi)\right)^{-\frac{2}{3}}\Rightarrow f(x)\leqslant\sqrt[3]{3}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}f^3(\xi)\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot f^2(\xi)\cdot x=x$$

当 $x\to 0^+$ 时，$f^3(0^+)\leqslant 0\Rightarrow f(0)\leqslant 0$，综上所述，当 $x\geqslant 0$ 时，恒有 $f(x)\leqslant x$.

定理 3.2.15 (Cauchy-Schwarz 不等式)**.** 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则有

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

等号当且仅当 $\alpha f(x)=\beta g(x)$ 时成立, 其中 α,β 是不同时为零的常数.

证法一 $\forall t\in\mathbb{R}$, $x\in[a,b]$, 有 $(tf(x)-g(x))^2\geqslant 0$, 即

$$t^2f^2(x)-2tf(x)g(x)+g^2(x)\geqslant 0$$

于是有 $t^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-2t\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 0,\forall t\in\mathbb{R}$ 都成立.

(1) 当 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0$ 时, 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续性知, $f(x)\equiv 0$, 此时要证的不等式中成立;

(2) 当 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x>0$ 时, 由于关于 t 的二次三项式恒大于零, 故它的判别式

$$\Delta=\left(2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2-4\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\leqslant 0$$

即得 $\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$.

证法二 要证结论, 即证 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x-\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}&\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x-\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\\&=\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(y)\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[f^2(x)g^2(y)+f^2(y)g^2(x)-2f(x)g(x)f(y)g(y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D(f(x)g(y)-f(y)g(x))^2\mathrm{d}x\geqslant 0\end{aligned}$$

其中 $D=\{(x,y)|a\leqslant x,y\leqslant b\}$, 故得 $\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$.

证法三 因为 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以 $f(x),g(x),f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 将 $[a,b]$ n 等分, 取

$$\Delta x=\frac{b-a}{n},\xi_i=x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)$$

则由离散情形的 *Cauchy-Schwarz* 不等式, 有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}f\left(x_i\right)g\left(x_i\right)\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}f^2\left(x_i\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}g^2\left(x_i\right)\right)$$

于是得 $\left(\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(x_i\right)g\left(x_i\right)\right)^2\leqslant\left(\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f^2\left(x_i\right)\right)\left(\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}g^2\left(x_i\right)\right)$, 故令 $n\to\infty$ 两边取极限, 由定积分定义得 $\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$.

证法四 构作辅助积分上限函数, 将要证不等式中的 b 改为 x, 并移项, 令

$$F(x)=\left(\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2-\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t\cdot\int_a^x g^2(t)\mathrm{d}t$$

则有 $F(a)=0,\forall x\in[a,b]$,

$$\begin{aligned}F'(x)&=2\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\cdot f(x)g(x)-f^2(x)\int_a^x g^2(t)\mathrm{d}t-g^2(x)\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t\\&=-\int_a^x\left[f^2(x)g^2(t)-2f(x)f(t)g(x)g(t)+f^2(t)g^2(x)\right]\mathrm{d}t\\&=-\int_a^x[f(x)g(t)-f(t)g(x)]^2\mathrm{d}t\leqslant0,\end{aligned}$$

于是 $\forall x\in[a,b],F(x)\leqslant F(a)=0$, 从而 $F(b)\leqslant0$, 即得证.

例 3.2.68. 已知 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数, 且满足 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$, 求函数 $f(x)$, 使得

$$I=\int_0^1(1+x^2)f^2(x)\mathrm{d}x$$

取得最小值.

由 *Cauchy-Schwarz* 不等式,

$$1^2=\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_0^1\sqrt{1+x^2}f(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^1(1+x^2)f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

所以 $I_{min}=\frac{4}{\pi}$, 为此, 只需要函数 $f(x)$ 满足

$$\int_0^1\frac{4}{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(1+x^2)f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\Rightarrow f(x)=\frac{4}{\pi(1+x^2)}.$$

例 3.2.69. 设 $a>0$ 为常数, 证明不等式

$$\int_0^\pi xa^{\sin x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{-\cos x}\mathrm{d}x\geqslant\frac{\pi^3}{4}.$$

证 令 $x=\frac{\pi}{2}+t$, 那么

$$\int_0^\pi xa^{\sin x}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}+t\right)a^{\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^{\cos t}\mathrm{d}t+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}ta^{\cos t}\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\cos t}\mathrm{d}t$$

于是由 *Cauchy-Schwarz* 不等式得

$$\int_0^\pi xa^{\sin x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{-\cos x}\mathrm{d}x=\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\cos x}\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{-\cos x}\mathrm{d}x\right)\geqslant\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\frac{\cos x}{2}}\cdot a^{\frac{-\cos x}{2}}\mathrm{d}x\right)^2=\frac{\pi^3}{4}$$

故得证.

例 3.2.70. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$, 证明 $1 \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{3}$.

证 先证左边不等式, 由 *Cauchy-Schwarz* 不等式

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \mathrm{d}x = 1$$

再证右边不等式, 因为 $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$, 所以

$$(f(x)-1)(3-f(x)) \geqslant 0 \Rightarrow f(x) + \frac{3}{f(x)} \leqslant 4$$

再由 *A-G* 不等式得

$$\sqrt{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x} \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x\right) \leqslant 2$$

所以

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x \leqslant 4 \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)} \leqslant \frac{4}{3}$$

综上 $1 \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{3}$.

推论 3.2.6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $0 < m \leqslant f(x) \leqslant M$, 则有

$$(b-a)^2 \leqslant \int_a^b f^{-1}(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2$$

证 由 *Cauchy-Schwarz* 不等式:

$$\int_a^b f^{-1}(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_a^b \sqrt{f^{-1}(x)} \cdot \sqrt{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2 = (b-a)^2$$

$$\frac{(f(x)-m)(f(x)-M)}{f(x)} = f(x) - (M+m) + \frac{mM}{f(x)} \leqslant 0 \Rightarrow f(x) + \frac{mM}{f(x)} \leqslant M+m$$

从而 $\int_a^b \left[f(x) + \frac{mM}{f(x)}\right]\mathrm{d}x \leqslant (M+m)(b-a)$, 且 $ab \leqslant \frac{(a+b)^2}{4}$,

$$\text{所以} \int_a^b \frac{mM}{f(x)}\mathrm{d}x \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4}\int_a^b \left[f(x) + \frac{mM}{f(x)}\right]^2 \leqslant \frac{(m+M)^2(b-a)^2}{4}$$

综上 $(b-a)^2 \leqslant \int_a^b f^{-1}(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2$.

例 3.2.71. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有一阶连续的导数, 且 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 0$, 证明

$$\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x \geqslant 12\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

证法一 由题设 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 0$ 及分部积分公式得

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x$$

于是

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\right)^2 = \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \\ &= \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}}^x f'(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{d}t \int_t^1 f'(t)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\mathrm{d}x\right)^2\end{aligned}$$

$$=\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)f'(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{\frac{1}{2}}xf'(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

由不等式 $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$ 及 *Cauchy-Schwarz* 不等式, 有

$$\text{上式右端}\ \leqslant 2\left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)f'(t)\mathrm{d}t\right)^2+\left(\int_{0}^{\frac{1}{2}}xf'(x)\mathrm{d}x\right)^2\right]$$

$$\leqslant 2\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^2\mathrm{d}t\cdot\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[f'(t)\right]^2\mathrm{d}t+\int_{0}^{\frac{1}{2}}x^2\mathrm{d}x\cdot\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{12}\int_{0}^{1}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$$

即得 $\displaystyle\int_{0}^{1}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\geqslant 12\left(\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x\right)^2$.

证法二 构造辅助函数, 并利用 *Cauchy-Schwarz* 不等式, 令 $g(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ 1-x, & \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$, 则

$$\int_{0}^{1}f'(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{1}{2}}xf'(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x)f'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}-\int_{0}^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x+(1-x)f(x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}+\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$$

且 $\displaystyle\int_{0}^{1}g^2(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{1}{2}}x^2\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{12}$, 于是有 *Cauchy-Schwarz* 不等式, 有

$$\left(\int_{0}^{1}f'(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_{0}^{1}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\cdot\int_{0}^{1}g^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}\int_{0}^{1}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$$

从而得 $\displaystyle\int_{0}^{1}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\geqslant 12\left(\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x\right)^2$.

例 3.2.72. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有一阶连续的导数, 且 $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}f(x)\mathrm{d}x=0$, 证明

$$\int_{0}^{1}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\geqslant 27\left(\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

证 构造辅助函数, 并利用 *Cauchy-Schwarz* 不等式, 令 $g(x)=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{3}\\ 2x-1, & \dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{3}\\ -x+1, & \dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$, 则

$$I=\int_{0}^{1}f'(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{1}{3}}(-x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}(2x-1)f'(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{2}{3}}^{1}(-x+1)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=-xf(x)\Big|_{0}^{\frac{1}{3}}+\int_{0}^{\frac{1}{3}}f(x)\mathrm{d}x+(2x-1)f(x)\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}-2\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}f(x)\mathrm{d}x+(-x+1)f(x)\Big|_{\frac{2}{3}}^{1}+\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{\frac{1}{3}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$$

且

$$\int_{0}^{1}g^2(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{1}{3}}(-x)^2\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}(2x-1)^2\mathrm{d}x+\int_{\frac{2}{3}}^{1}(-x+1)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{27}$$

于是由 *Cauchy-Schwarz* 不等式得

$$\left(\int_{0}^{1}f'(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_{0}^{1}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\cdot\int_{0}^{1}g^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{27}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$$

从而得 $\displaystyle\int_{0}^{1}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\geqslant 27\left(\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x\right)^2$.

例 3.2.73. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, 且 $f(a)$ 或 $f(b)=0$, 则有

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{(b-a)^3}{3}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

证 不妨设 $f(a)=0$ (对于 $f(b)=0$, 类似地可证), 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x-b)=f(x)(x-b)\Big|_a^b-\int_a^b (x-b)f'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b (b-x)f'(x)\mathrm{d}x$$

于是由 *Cauchy-Schwarz* 不等式得, 有

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_a^b (b-x)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant \int_a^b (b-x)^2\mathrm{d}x\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^3}{3}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x$$

即得待证等式.

推论 3.2.7. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, 且 $f(x_0)=0$, 则有

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant M\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x$$

其中 $M=\dfrac{2}{3}\max\limits_{a\leqslant x_0\leqslant b}\left\{(x_0-a)^3,(x_0-b)^3\right\}$, 特别地, 当 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$ 时, $M=\dfrac{(b-a)^3}{12}$.

例 3.2.74. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, 则有

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

证 记 $c=\dfrac{a+b}{2}$, 则由例题 *3.2.73* 可知

$$\left(\int_a^c f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{(c-a)^3}{3}\int_a^c [f'(x)]^2\mathrm{d}x$$
$$\left(\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{(b-c)^3}{3}\int_c^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x$$

于是由 *Cauchy-Schwarz* 不等式,

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2&=\left(\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 2\left[\left(\int_a^c f(x)\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\right]\\&\leqslant\frac{(b-a)^3}{12}\left[\int_a^c [f'(x)]^2\mathrm{d}x+\int_c^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x\right]=\frac{(b-a)^3}{12}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

即得待证等式.

例 3.2.75. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, 则有

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{(b-a)^5}{180}\int_a^b f''^2(x)\mathrm{d}x.$$

证 由已知 $f(a)=f(b)=0$ 以及分部积分公式得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x-a)=-\int_a^b (x-a)f'(x)\mathrm{d}x$$
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x-b)=-\int_a^b (x-b)f'(x)\mathrm{d}x$$

所以

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= -\int_a^b (x-a)f'(x)\,\mathrm{d}(x-b) = \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x + \int_a^b (x-b)f'(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

故由 *Cauchy-Schwarz* 不等式得

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 &= \frac{1}{4}\left[\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \frac{1}{4}\left(\int_a^b f''^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b [(x-a)(x-b)]^2\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{(b-a)^5}{180}\int_a^b f''^2(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

即得待证等式.

例 3.2.76. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导, 且 $f(a)=f'(a)=0$ 或 $f(b)=f'(b)=0$, 则

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{(b-a)^5}{20}\int_a^b f''^2(x)\mathrm{d}x.$$

证 不妨设 $f(a)=f'(a)=0$ *(对于 $f(b)=f'(b)=0$, 类似地证明)*, 则由分部积分公式, 有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x-b) = -\int_a^b (x-b)f'(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f'(x)\mathrm{d}\left(\frac{(b-x)^2}{2}\right) = \int_a^b \frac{(b-x)^2}{2}f''(x)\mathrm{d}x$$

于是由 *Cauchy-Schwarz* 不等式得

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_a^b \frac{(b-x)^2}{2}f''(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b \frac{(b-x)^4}{4}\mathrm{d}x\int_a^b f''^2(x)\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^5}{20}\int_a^b f''^2(x)\mathrm{d}x$$

即得待证等式.

推论 3.2.8. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 n 阶连续可导, 且 $f^{(l)}(a)=0$ 或 $f^{(l)}(b)=0$ $(l=0,1,2,\cdots n-1)$, 则有

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{(b-a)^{2n+1}}{(n!)^2(2n+1)}\int_a^b \left[f^{(n)}(x)\right]^2\mathrm{d}x.$$

证 下面以 $f^{(k)}(b)=0$ $(k=-,1,\cdots,n-1)$ 为例进行证明,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x-a) = -\int_a^b (x-a)f'(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f'(x)\mathrm{d}\frac{(x-a)^2}{2} = \int_a^b \frac{(x-a)^2}{2}f''(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^2}{1\cdot 2}\int_a^b (x-a)^2 f''(x)\mathrm{d}x = \cdots = \frac{(-1)^n}{n!}\int_a^b (x-a)^n f^{(n)}(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

于是由 *Cauchy-Schwarz* 不等式, 得

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{(n!)^2}\int_a^b (x-a)^{2n}\mathrm{d}x\cdot\int_a^b \left[f^{(n)}(x)\right]\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^{2n+1}}{(n!)^2(2n+1)}\int_a^b \left[f^{(n)}(x)\right]^2\mathrm{d}x.$$

例 3.2.77. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导, 且 $f(a)=f'(a)=f(b)=f'(b)=0$, 则有

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{(b-a)^5}{320}\int_a^b f''^2(x)\mathrm{d}x.$$

证 记 $c=\dfrac{a+b}{2}$, 则有例题 *3.2.76*, 有

$$\left(\int_a^c f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{(c-a)^5}{20}\int_a^c f''^2(x)\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^5}{640}\int_a^c f''^2(x)\mathrm{d}x$$

$$\left(\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{(b-c)^5}{20}\int_c^b f''^2(x)\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^5}{640}\int_c^b f''^2(x)\mathrm{d}x$$

从而

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 2\left[\left(\int_a^c f(x)\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\right] \leqslant \frac{(b-a)^5}{320}\int_a^b f''^2(x)\mathrm{d}x$$

即得待证等式.

推论 3.2.9. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 n 阶连续可导, 且 $f^{(l)}(a) = f^{(l)}(b) = 0\ (l = 0,1,2,\cdots,n-1)$, 则有

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{(b-a)^{2n+1}}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}\int_a^b \left[f^{(n)}(x)\right]^2\mathrm{d}x.$$

证 记 $c = \dfrac{a+b}{2}$, 由推论 3.2.8, 有

$$\left(\int_a^c f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{(c-a)^{2n+1}}{(n!)^2(2n+1)}\int_a^c \left[f^{(n)}(x)\right]^2\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^{2n+1}}{2^{2n+1}(n!)^2(2n+1)}\int_a^c \left[f^{(n)}(x)\right]\mathrm{d}x$$

$$\left(\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{(b-c)^{2n+1}}{(n!)^2(2n+1)}\int_c^b \left[f^{(n)}(x)\right]^2\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^{2n+1}}{2^{2n+1}(n!)^2(2n+1)}\int_c^b \left[f^{(n)}(x)\right]\mathrm{d}x$$

于是由基本不等式,

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 2\left[\left(\int_a^c f(x)\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\right] \leqslant \frac{(b-a)^{2n+1}}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}\int_a^b \left[f^{(n)}(x)\right]^2\mathrm{d}x.$$

推论 3.2.10. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $2n$ 阶连续可导, 且 $f^{(l)}(a) = f^{(l)}(b) = 0\ (l = 0,1,2,\cdots,n-1)$, 则有

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{(b-a)^{2n+1}}{(4n+1)!}\int_a^b \left[f^{(2n)}(x)\right]^2\mathrm{d}x.$$

例 3.2.78. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数, 且 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$, 证明:

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{4}\int_a^b |f'(t)|^2\mathrm{d}t.$$

证 注意到 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$, 那么

$$f(x) = f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \int_{\frac{a+b}{2}}^x f'(t)\mathrm{d}t,\ x \in [a,b]$$

并令

$$g_1(x) = \int_x^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|\mathrm{d}t,\ x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$$

$$g_2(x) = \int_{\frac{a+b}{2}}^x |f'(t)|\mathrm{d}t,\ x \in \left[\frac{a+b}{2}, 2\right]$$

则 $g_1(x)$, $g_2(x)$ 分别在 $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ 和 $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$ 上有连续的导数, 且

$$g_1\left(\frac{a+b}{2}\right) = g_2\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$$

当 $x \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ 时, $|f(x)| \leqslant g_1(x)$, $|f'(x)| = -g_1(x)$; 当 $x \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$ 时, $|f(x)| \leqslant g_2(x)$, $|f'(x)| = g_2(x)$, 因此

$$I = \int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant -\int_a^{\frac{a+b}{2}} g_1(x)g_1'(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b g_2(x)g_2'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(g_1^2(a)+g_2^2(b)\right)$$

于是, 由 *Cauchy-Schwarz* 不等式得,

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x &\leqslant \frac{1}{2}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|\mathrm{d}t\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(t)|\mathrm{d}t\right)^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|^2\mathrm{d}t \cdot \int_a^{\frac{a+b}{2}} \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(t)|^2\mathrm{d}t \cdot \int_{\frac{a+b}{2}}^b \mathrm{d}t = \frac{b-a}{4}\int_a^b |f'(t)|^2\mathrm{d}t\end{aligned}$$

故得证.

例 3.2.79. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ $(a>0)$ 上有连续的一阶导数, 且 $f(0)=0$, $M=\max\limits_{x\in[0,a]}|f'(x)|$, 证明

$$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{Ma^2}{2}.$$

证法一 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}(x-a) = (x-a)f(x)\Big|_0^a - \int_0^a (x-a)f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^a (a-x)f'(x)\mathrm{d}x$, 故

$$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^a (a-x)f'(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M\left|\int_0^a (a-x)\mathrm{d}x\right| = \frac{Ma^2}{2}.$$

证法二 因为 $\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x)-f(0) = f(x)$, 所以 $|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x |f'(t)\mathrm{d}t| = Mx$, 于是

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^a Mx\mathrm{d}x = \frac{Ma^2}{2}.$$

证法三 利用 *Cauchy-Schwarz* 不等式, 由题设得

$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\int_0^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^x \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M\left(\int_0^x \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^x \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = Mx$$

故 $\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^a Mx\mathrm{d}x = \frac{Ma^2}{2}$.

推论 3.2.11. 一般地, 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的一阶导数, 且 $f(a)=0$, $M=\max\limits_{x\in[0,a]}|f'(x)|$, 则

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{2}(b-a)^2.$$

例 3.2.80. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上有连续的二阶导数, 且 $f(1)=0$, $M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f''(x)|$, 证明

$$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{3}.$$

证 由 $f(x)$ 在 $x=1$ 出的 *Taylor* 展开得,

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2$$

其中 $\xi\in(0,2)$, 又 $f(1)=0$, $M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f''(x)|$ 所以有

$$f'(1)(x-1) - \frac{M}{2}(x-1)^2 \leqslant f(x) \leqslant f'(1)(x-1) + \frac{M}{2}(x-1)^2$$

两边积分得

$$f'(1)\int_0^2 (x-1)\mathrm{d}x - \frac{M}{2}\int_0^2 (x-1)^2\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant f'(1)\int_0^2 (x-1)\mathrm{d}x + \frac{M}{2}\int_0^2 (x-1)^2\mathrm{d}x$$

而 $\int_0^2 (x-1)\mathrm{d}x = 0$, $\int_0^2 (x-1)^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$, 所以 $\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{3}$.

例 3.2.81. 设在区间 $[a,b]$ 上 $f'(x)$ 绝对有界, 且 $|f'(x)| \leqslant M$, 试证

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\right| \leqslant \frac{(b-a)^2M}{4} - \frac{(f(a)-f(b))^2}{4M}.$$

证 构造辅助函数

$$g(x) = f(x) - \frac{(f(b)-f(a))(x-a)}{b-a} - f(a)$$

可得

$$\left|\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b \left[f(x) - \frac{(f(b)-f(a))(x-a)}{b-a} - f(a)\right]\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\right|$$

而 $g(a)=g(b)=0$, 可令

$$k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{1}{M},\ x_0 = \frac{a+b+k(b-a)}{2}$$

由于

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x) - kM = (1-k)M$$

根据 *Lagrange* 中值定理得

$$\begin{cases} g(x) \leqslant g(a) + g'(x)(x-a),\ x\in(a,x_0) \\ g(x) \leqslant g(b) + g'(x)(b-x),\ x\in(x_0,b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x) \leqslant (1-k)M(x-a) \\ g(x) \leqslant (1-k)M(b-x) \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^{x_0} g(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0}^b g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_a^{x_0}(1-k)M(x-a)\mathrm{d}x + \int_{x_0}^b (1-k)M(b-x)\mathrm{d}x\right| \\ &= (1-k^2)M\left(\frac{b-a}{2}\right) = \frac{M(b-a)^2}{2} - \frac{(f(b)-f(a))^2}{4M}\end{aligned}$$

即得待证等式.

3.3 反常积分

反常积分是指在积分区间上函数有无穷大或无界的情况下的积分, 无法直接通过定积分来计算的积分. 反常积分分为两类: 第一类是无穷积分, 即积分区间为无穷的情况; 第二类是间断积分, 即积分函数在积分区间上有间断点的情况.

3.3.1 反常积分的计算

定理 3.3.1 (反常积分的区间再现公式). 若 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则对任意的正整数 k, 都有

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{k}{x^2}f\left(\frac{k}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left[f(x) + \frac{k}{x^2}f\left(\frac{k}{x}\right)\right]\mathrm{d}x.$$

例 3.3.1. 计算下列反常积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\ (\alpha\in\mathbb{R})$.	(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\sqrt[3]{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$.	(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.
(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$.	(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}x$.	(6) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

(1) **法一:** 令 $x=\tan t$, 则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$,

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\tan^\alpha t}\xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{1+\cot^\alpha u}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^\alpha u}{\tan^\alpha u+1}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^\alpha u+1}{\tan^\alpha u+1}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{4}.$$

法二: 令 $x=\frac{1}{t}$, 则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}原式&=\int_{+\infty}^0\frac{-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^\alpha}\right)}=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha\mathrm{d}t}{(1+t^2)(t^\alpha+1)}=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\mathrm{d}x}{(1+x^2)(x^\alpha+1)}\\&=\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}+\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\right]=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

法三: $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$, 于是

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\int_1^0\frac{-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^\alpha}\right)}=\int_0^1\frac{t^\alpha\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$$

于是原式$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}+\int_0^1\frac{x^\alpha\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

法四: 原式 $=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{(1+x^\alpha)^{-1}+\left(1+\frac{1}{x^\alpha}\right)^{-1}}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$.

(2) 原式 $=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\sqrt[3]{x}+\arctan\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

(3) 原式 $=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$.

(4) **法一:** 令 $x=a\tan t$, 则

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(a\tan t)}{a^2\tan^2 t+a^2}\cdot a\sec^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln a+\ln\tan t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2a}\ln a+\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\tan t\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\tan t\mathrm{d}t\xlongequal{u=\frac{\pi}{2}-t}\int_{\frac{\pi}{2}}^0\ln\tan\left(\frac{\pi}{2}-u\right)(-\mathrm{d}u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cot u\mathrm{d}u$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\tan t\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cot u\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\tan x\cot x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\tan x\mathrm{d}x=0$, 原式$=\frac{\pi}{2a}\ln a$.

法二: $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\int_0^a\frac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$, 其中

$$\int_a^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\frac{a^2}{t}}\int_a^0\frac{\ln\frac{a^2}{t}}{\frac{a^4}{t^2}+a^2}\left(-\frac{a^2}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int_0^a\frac{\ln a^2-\ln t}{t^2+a^2}\mathrm{d}t$$

于是, $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\int_0^a\frac{\ln a^2}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=2\ln a\left(\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right)_0^a=\frac{\pi}{2a}\ln a$.

法三: 原式 $=\frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\mathrm{d}x\xlongequal{\frac{x}{a}=t}\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln at}{t^2+1}\mathrm{d}t=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln at+\ln\frac{a}{t}}{t^2+1}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2a}\ln a$.

(5) 令 $x=\tan t$, 则原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\mathrm{d}t}{\sec^3 t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos^3 t\mathrm{d}t$, 由表格积分法:

f'	t	1	0
	$+\searrow$	$-\searrow$	
$\int$	$\cos^3 t$	$\frac{1}{3}\cos^2 t\sin t+\frac{2}{3}\sin t$	$-\frac{1}{9}\cos^3 t-\frac{2}{3}\cos t$

$$原式 = \frac{t}{3}\cos^2 t\sin t\frac{2t}{3}\sin t + \frac{1}{9}\cos^3 t + \frac{2}{3}\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{3} - \frac{7}{9}.$$

(6) $原式 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{x\ln x}{1+x^2}+\frac{\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{x\ln x}{1+x^2}+\frac{-x\ln x}{1+x^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0.$

例 3.3.2. 计算下列反常积分.

(1) $\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$. | (2) $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$. | (3) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{1+x}+\mathrm{e}^{3-x}}$.

(1) 原式化为 $\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{(x-1)^2-1}}$, 令 $x-1=\sec\theta$, 则

$$原式 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec\theta\tan\theta}{\sec^4\theta\tan\theta}\mathrm{d}\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}\cos^2\sin\theta + \frac{2}{3}\sin\theta\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

(2) 由于 $\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)' = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^{-x}+1)^2}$, 由分部积分法, 得

$$F(x) = \int\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right) = \frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}} - \int\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}} - \ln\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right) + C$$

于是最终的积分化为

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(0) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}} - \ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)\right] + \ln 2$$

$$\begin{aligned}F(+\infty) &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}} - \ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right) - \ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)}{\mathrm{e}^x+1}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x\left[x-\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)\right]}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty}\left[x-\ln\mathrm{e}^x\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\right] = -\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) = 0\end{aligned}$$

即 $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x = \ln 2.$

(3) 由题意可得

$$I = \frac{1}{\mathrm{e}}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}} = \frac{1}{\mathrm{e}}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^2} = \frac{1}{\mathrm{e}^2}\arctan\mathrm{e}^{x-1}\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-2}.$$

例 3.3.3. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x = \int_a^{+\infty}4x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$, 求常数 a 的值.

等式左边易化简为 e^{-2a}, 等式右边由表格积分法得

$$\mathrm{e}^{-2a} = \mathrm{e}^{-2x}\left(-2x^2-2x-1\right)\Big|_a^{+\infty} = \mathrm{e}^{-2a}\left(2a^2+2a+1\right)$$

即 $2a^2+2a+1=1$, 解得 $a=0$ 或 -1.

例 3.3.4. 试证: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x\sin x}{\left(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x\right)^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4ab^2(a+b)}$ $(a,b>0,a\neq b)$.

证 注意到 $(\tan x)' = \sec^2 x$, 于是

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x\sin x}{\left(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x\right)^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\tan x}{(a^2+b^2\tan^2 x)^2}\mathrm{d}(\tan x) \xlongequal{\tan x=t} \int_0^{+\infty}\frac{t\arctan t}{(a^2+b^2t^2)^2}\mathrm{d}t\\ &= \frac{-1}{2b^2}\int_0^{+\infty}\arctan t\mathrm{d}\left(\frac{1}{a^2+b^2t^2}\right) = \frac{-1}{2b^2}\left[\frac{\arctan t}{a^2+b^2t^2}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(a^2+b^2t^2)(1+t^2)}\right]\\ &= \frac{1}{2b^2(b^2-a^2)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{b^2}{a^2+b^2t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2b^2(b^2-a^2)}\left(\frac{b}{a}\arctan\frac{bt}{a} - \arctan t\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4ab^2(a+b)}.\end{aligned}$$

例 3.3.5. 设 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$, 求 $I=\displaystyle\int_{-1}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$.

易得 $x=0,2$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点, 故积分为反常积分, 且有

$$I=\int_{-1}^{0}+\int_{0}^{2}+\int_{2}^{3}$$

且 $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x=\arctan f(x)+C$, 于是

$$I=\arctan f(x)\Big|_{-1}^{0^-}+\arctan f(x)\Big|_{0^+}^{2^-}+\arctan f(x)\Big|_{2^+}^{3}\arctan\frac{32}{27}-2\pi.$$

例 3.3.6. 计算反常积分 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|t-x|^{\frac12}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\infty}^{+\infty}|t-x|^{\frac12}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}\mathrm{d}t\xlongequal{u=t-x}\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^{\frac12}\frac{y}{u^2+y^2}=2\int_0^{+\infty}\frac{|u|^{\frac12}y\mathrm{d}u}{u^2+y^2}\\&\xlongequal{v=\frac{u^{\frac12}}{\sqrt{y}}}4\sqrt{y}\int_0^{+\infty}\frac{v^2\mathrm{d}v}{v^4+1}=2\sqrt{y}\int_0^{+\infty}\frac{v^2+1}{v^4+1}\mathrm{d}v=2\sqrt{y}\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{v^2}}{v^2+\frac{1}{v^2}}\mathrm{d}v\\&=2\sqrt{y}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(v-\frac1v\right)}{\left(v-\frac1v\right)^2+2}=2\sqrt{y}\int_0^{+\infty}\cdot\frac{1}{\sqrt2}\arctan\left(v-\frac1v\right)\Big|_0^{+\infty}=\sqrt2\pi\sqrt{y}.\end{aligned}$$

定理 3.3.2. 若 $a,b>0$, 则

$$\int_0^{+\infty}f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac1a\int_0^{+\infty}f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\mathrm{d}t$$

其中函数 $f(x)$ 的积分均有意义.

证 令 $ax-\dfrac{b}{x}=t$, 那么 $x=\dfrac{1}{2a}\left(t+\sqrt{t^2+4ab}\right)$, $\mathrm{d}x=\dfrac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{+\infty}f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\left(\int_{-\infty}^{0}+\int_0^{+\infty}\right)f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2a}\left[\int_0^{+\infty}f\left(\sqrt{u^2+4ab}\right)\frac{\sqrt{u^2+4ab}-u}{\sqrt{u^2+4ab}}\mathrm{d}u+\int_0^{\infty}f\left(t^2+4ab\right)\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t\right]\\&=\frac1a\int_0^{+\infty}f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

例 3.3.7. 已知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 试证 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2x^2-\frac{b^2}{x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\mathrm{e}^{-2ab}$.

证 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(ax+\frac{b}{x}\right)^2+2ab}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2ab}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(ax+\frac{b}{x}\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{2ab}}{a}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+4ab)}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\mathrm{e}^{-2ab}$.

例 3.3.8. 计算积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2nx)\ln(\cos x)\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2nx)\ln(\cos x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\mathrm{d}\sin(2nx)=\frac{1}{2n}\ln(\cos x)\sin(2nx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2nx)\cdot(-\sin x)}{\cos x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2nx)\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2nx)\mathrm{d}x-\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2n+1)}{\cos x}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{x=t-\frac{\pi}{2}}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\mathrm{d}t=\frac{(-1)^{n-1}}{2n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt)\right]\mathrm{d}t=(-1)^{n-1}\frac{\pi}{4n}.\end{aligned}$$

例 3.3.9. 设 m,n 为自然数, 求 $\int_0^1 t^n \ln^m t\mathrm{d}t$.

利用分部积分法获得递推公式,

$$I_m=\int_0^1 t^n\ln^m t\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}\int_0^1 \ln^m t\mathrm{d}t^{n+1}=\frac{1}{n+1}\ln^m t\cdot t^{n+1}\Big|_0^1-\frac{m}{n+1}\int_0^1 t^n\ln^{m-1}t\mathrm{d}t=-\frac{m}{n+1}I_{m-1}$$
$$=\left(-\frac{m}{n+1}\right)\left(-\frac{m-1}{n+1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{n+1}\right)I_0=(-1)^m\frac{m!}{(n+1)^m}\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=(-1)^m\frac{m!}{(n+1)^{m+1}}.$$

定理 3.3.3 (Euler 积分). $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$

证 被积函数 $f(x)=\ln\sin x$ 在 $x=0$ 点的右邻域内无界, 由 *L'Hospital* 法则求得 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln\sin x}{x^{-\frac{1}{2}}}=0$, 故由广义积分的比较判别法知广义积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$ 收敛, 同理可证: 广义积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x$ 收敛, 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\ln\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x\xlongequal{x=2t}\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\ln\sin 2t\mathrm{d}t=2\ln 2\cdot\frac{\pi}{4}+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\mathrm{d}t+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\mathrm{d}t$$
$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\mathrm{d}t+2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin u\mathrm{d}u\quad\left(\text{这里 } u=\frac{\pi}{2}-t\right)=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I$$

解方程得 $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

例 3.3.10. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}n^3\left(\tan\int_0^{\pi}\sqrt[n]{\sin x}\mathrm{d}x+\sin\int_0^{\pi}\sqrt[n]{\sin x}\mathrm{d}x\right).$$

由 $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B},\sin(A-B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B,\tan x-\sin x\sim\dfrac{x^3}{2}(x\to 0)$

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}n^3\left[\tan\int_0^{\pi}\left(\sqrt[n]{\sin x}-1\right)\mathrm{d}x-\sin\int_0^{\pi}\left(\sqrt[n]{\sin x}-1\right)\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[n\int_0^{\pi}\left(\sqrt[n]{\sin x}-1\right)\mathrm{d}x\right]^3$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\int_0^{\pi}\left(\sqrt[n]{\sin x}-1\right)\mathrm{d}x}{\frac{1}{n}}\right]^3\xlongequal{\frac{1}{n}=t}\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\lim_{t\to 0+}\frac{\sin^t x-1}{t}\right]\xlongequal{L'}\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\ln(\sin x)\mathrm{d}x\right]^3$$
$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin x)\mathrm{d}x\right]^3=-\frac{(\pi\ln 2)^3}{2}.$$

例 3.3.11. 计算积分 $I_n=\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)}$.

设

$$\frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{x+k}$$

其中 A_k 为待定系数. 将 $\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)$ 同乘等式两边, 然后令 $x\to -k$, 得

$$A_k=\frac{1}{(-k)(-k+1)\cdots(-1)\cdot 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(-k+n)}=(-1)^k\frac{1}{k!(n-k)!}=(-1)^k\frac{\mathrm{C}_n^k}{n!}$$

$$I_n=\int_1^{+\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\mathrm{C}_n^k}{n!}\frac{1}{x+k}\right]\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\mathrm{C}_n^k}{n!}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x+k}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^k\ln(x+k)\Big|_1^{+\infty}$$

注意到

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^k\ln(x+k)&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^k\ln\left[x\left(1+\frac{k}{x}\right)\right]=\ln x\cdot\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^k+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^k\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\\&=\ln x\cdot(1-1)^n+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^k\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\to 0\ \ (x\to+\infty)\end{aligned}$$

因此 $I_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\ln(1+k)$.

3.3.2 反常积分敛散性

积分的收敛域

例 3.3.12. 求积分的收敛域.

$$(1)\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{1+x^2}\mathrm{d}x.\quad\Bigg|\quad(2)\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^q}{x^p}\mathrm{d}x.$$

(1) 当 $a\geqslant 0$ 时, $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{1+x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_a^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\arctan a$, 原积分收敛; 当 $a<0$ 时, 原积分显然发散, 于是, 积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的收敛域为 $a\geqslant 0$ 的一切 a 值.

(2) 若 $q=0$, 则由于积分 $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 仅当 $p>1$ 时收敛, 而积分 $\displaystyle\int_0^{A}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 仅当 $p\leqslant 1$ 时收敛, 故积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin 1}{x^p}\mathrm{d}x$ 对于任何的 p 值及 $q=0$ 发散;
若 $q\neq 0$, 则积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^q}{x^p}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^{-p}\sin x^q\mathrm{d}x$

敛散性的判断

例 3.3.13. 判断广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\alpha}}{\ln^{\beta}\left(1+\frac{1}{x}\right)}\mathrm{d}x$ 收敛性.

当 $x\to+\infty$ 时, $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\sim\dfrac{1}{x}$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, 所以 $\dfrac{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\alpha}}{\ln^{\beta}\left(1+\frac{1}{x}\right)}\sim\dfrac{1}{x^{\alpha-\beta}}$ $(x\to+\infty)$, 由此可知, 当 $\alpha-\beta>1$ 时, 原积分收敛, 其余情况均发散.

例 3.3.14. 判定反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$ 的敛散性.

原积分的敛散性的判定等价于判定以下级数的连续性

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}\overset{x-n\pi=t}{=\!=\!=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{(t+n\pi)\mathrm{d}t}{1+(t+n\pi)^6\sin^2 t}$$

记 $a_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{(t+n\pi)\mathrm{d}t}{1+(t+n\pi)^6\sin^2 t}$ 则 $a_n\leqslant\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\pi(n+1)\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^6\sin^2 t}=\pi(n+1)\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^6\sin^2 t}$, 其中

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^6\sin^2 t}&=\int_0^{\pi}\frac{\csc^2 t\mathrm{d}t}{\csc^2 t+(n\pi)^6}=-\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\cot t}{1+(n\pi)^6+\cot^2 t}\\&=-\frac{1}{\sqrt{\pi^6n^6+1}}\arctan\left(\frac{\cot t}{\sqrt{\pi^6n^6+1}}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{\pi^6n^6+1}}\end{aligned}$$

即 $a_n\leqslant\dfrac{\pi^2(n+1)}{\sqrt{\pi^6n^6+1}}$, 由比较判别法的极限形式可知, 它与 $\dfrac{1}{n^2}$ 构成的 $p=2$ 的 $p-$级数具有相同的敛散性, 所以级数收敛, 从而可得积分也收敛.

无穷限反常积分的敛散性与无穷远处的极限

例 3.3.15. 设有下列命题

(1) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续是奇函数, 则 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=0$;

(2) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 又 $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 则 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(3) $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 均发散, 则 $\displaystyle\int_{a}^{+\infty}[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$ 可能发散, 也可能收敛;

(4) 若 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 均发散, 则不能确定 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是否收敛.

则以上命题中正确的个数是

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

命题 (1) 显然错误, 不妨令 $f(x)=x$, 则 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}x$ 发散, 一般地, 若 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上是奇函数, 且 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\displaystyle\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛; 同样地, 命题 (2) 显然错误, 也令 $f(x)=x$, 则 $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} x\mathrm{d}x=0$, 但 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}x$ 发散; 命题 (3) 正确, 对于不同名的函数的线性组合, 其组合后的收敛性与各函数的收敛性无关; 命题 (4) 错误, 对于相同的函数, 若 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 均发散, 则 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 一定发散, 综上, 选 A.

3.3.3 反常积分的极限

例 3.3.16. 设 $\varphi(x)=\displaystyle\int_{0}^{x}\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t$, 求 $\varphi'(0)$.

因为 $\varphi'(0)=\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_{0}^{x}\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x}$, 但不能用 L'Hospital 法则, 故

$$\int_{0}^{x}\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t\xlongequal{\frac{1}{t}=u}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\cos u}{u^2}\mathrm{d}u=\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{1}{u^2}\mathrm{d}\sin u=\frac{\sin u}{u^2}\bigg|_{\frac{1}{x}}^{+\infty}+\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{2\sin u}{u^3}\mathrm{d}u=-x^2\sin\frac{1}{x}+\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{2\sin u}{u^3}\mathrm{d}u$$

所以

$$\left|\frac{\int_{0}^{x}\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x}\right|\leqslant|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|+\frac{1}{|x|}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{2}{u^3}\mathrm{d}u=|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|+|x|\to0\ (x\to0)$$

所以 $\varphi'(0)=0$.

例 3.3.17. 设 $0<a<d$, $A_n=\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(a+kd)$, $G_n=\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1}(a+kd)}$, 试证 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{G_n}{A_n}=\frac{2}{\mathrm{e}}$.

证 由于 $\displaystyle\frac{G_n}{A_n}=\frac{\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1}(a+kd)}}{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(a+kd)}=\frac{\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1}(a+kd)}}{a+\frac{1}{2}(n-1)d}\xlongequal{c=\frac{a}{d}}\frac{\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1}\frac{c+k}{n}}}{\frac{c}{n}+\frac{n-1}{2n}}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\frac{c+k}{n}=\int_{0}^{1}\ln x\mathrm{d}x=-1\quad\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c}{n}+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{G_n}{A_n}=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

定理 3.3.4 (Frullani 积分定理). 形如 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x\ (a>0,b>0)$, 其中 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续, 且 $f(0^+),f(+\infty)\in\mathbb{R}$, 则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=(f(+\infty)-f(0^+))\ln\frac{a}{b}.$$

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在, 但积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 存在, 则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=-f(0)\ln\frac{a}{b}.$$

例 3.3.18. 求下列积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}\mathrm{d}x.$	(2) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{\ln x}\mathrm{d}x.$
(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos ax}{x}\cos bx\mathrm{d}x.$	(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$

(1) 取 $f(x)=\arctan x$, 则 $f(+\infty)=\dfrac{\pi}{2}$, $f(0^+)=0$, 故原积分 $=\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{a}{b}$.

(2) 令 $\ln x=-t$, 原式化为 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-bt}-\mathrm{e}^{-at}}{t}\mathrm{d}t=\ln\frac{a}{b}$.

(3) 当 $a=b$ 时, 积分化为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos^2 ax}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\cos ax-\cos^2 ax}{x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos^2 ax}{x}\mathrm{d}x$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos ax-\cos^2 ax}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos ax}{x}\xlongequal{L'}\lim\limits_{x\to0}a\sin ax=0$, 故 $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\cos ax-\cos^2 ax}{x}\mathrm{d}x$ 为正常积分, 而

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos^2 ax}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\cos ax}{x}\mathrm{d}x-\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 ax}{x}\mathrm{d}x$$

由 *Dirichlet* 判别法, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos ax}{x}\mathrm{d}x$ 收敛, 又

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 ax}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\frac{1+\cos 2x}{2}}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x}+\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2ax}{2x}\mathrm{d}x$$

由 *Dirichlet* 判别法知 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2ax}{2x}\mathrm{d}x$ 收敛, 但 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x}$ 发散, 从而当 $a=b$ 时, 原积分发散;

当 $a>b$ 时,

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos ax}{x}\cos bx\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{2\sin^2\frac{a}{2}x}{x}\cos bx\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{a}{2}x\left(2\sin\frac{a}{2}x\cos bx\right)}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{a}{2}x\left[\sin\left(\frac{a}{2}+b\right)x+\sin\left(\frac{a}{2}-b\right)x\right]}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}[\cos(-b)x-\cos(a+b)x]+\frac{1}{2}[\cos bx-\cos(a-b)x]}{x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos bx-\cos(a+b)}{x}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos bx-\cos(a-b)x}{x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

取 $f(x)=\cos x$，则 $f(0^+)=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在，但 $\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ 存在，于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos ax}{x}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{a+b}{b}+\frac{1}{2}\ln\frac{a-b}{b}=\frac{1}{2}\ln\frac{a^2-b^2}{b^2}=\ln\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

若 $a<b$，$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos ax}{x}\cos bx\mathrm{d}x=\ln\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$，总之，当 $a\neq b$ 时，原积分 $=\ln\frac{\sqrt{|a^2-b^2|}}{b}$.

(4) 先将 $\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)$ 展开，

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-1}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{x^2}\left[\frac{x(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^{2x}-1}-\frac{x}{\mathrm{e}^{2x}-1}-\frac{1}{2}\right]\\&=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{x}{\mathrm{e}^{2x}-1}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2x}\left(\frac{2}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{2}{\mathrm{e}^{2x}-1}-\frac{1}{x}\right)\\&=\frac{1}{2x}\left(-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}+\frac{2}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{2}{x}+\mathrm{e}^{-x}-\frac{2}{\mathrm{e}^{2x}-1}+\frac{1}{x}-\mathrm{e}^{-2x}\right)\\&=-\frac{1}{2x}(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x})+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)-\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}-1}-\frac{1}{2x}+\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right)\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x}-\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=&\int_0^{+\infty}-\frac{1}{2x}(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\mathrm{d}x\\&-\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}-1}-\frac{1}{2x}+\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right)\end{aligned}$$

在上式右端第二个积分中令 $x=2t$，于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2t}-1}-\frac{1}{2t}+\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2}\right)\mathrm{d}t$$

因此

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln 2.$$

3.3.4 反常积分综合性问题

例 3.3.19. 求曲线 $y=2\mathrm{e}^{-x}\sin x\ (x\geqslant 0)$ 与 x 轴围成的无界图形的面积 S.

由积分的几何意义，得

$$S=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A|2\mathrm{e}^{-x}\sin x|\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}|2\mathrm{e}^{-x}\sin x|\mathrm{d}x=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$$

由于 $\int\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x+\cos x)+C$，所以

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x+\cos x)\Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi}=-\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}(-1)^{n+1}-\mathrm{e}^{-n\pi}(-1)^n\right]$$

代入以上面积计算的积分结果，得

$$\begin{aligned}S&=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}(-1)^{n+1}-\mathrm{e}^{-n\pi}(-1)^n\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}+\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\pi}=\frac{\mathrm{e}^{-\pi}+1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}=\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{\mathrm{e}^{\pi}-1}.\end{aligned}$$

例 3.3.20 (2023 四川大学). 计算 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}x\int_x^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t^2}\mathrm{d}t$.

法一： 设 $f(x)=\int_x^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t^2}\mathrm{d}t, g(x)=\frac{1}{x}$，于是由函数型 *Stolz* 定理以及第一积分中值定理，可知

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\xlongequal{Stolz}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+\pi)-f(x)}{g(x+\pi)-g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x+\pi}-\frac{1}{x}}\left(\int_{x+\pi}^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t^2}\mathrm{d}t-\int_x^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t^2}\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{x\to+\infty}(x+\pi)x\int_x^{x+\pi}\frac{|\sin t|}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\lim_{x\to+\infty}(x+\pi)x\frac{1}{\xi^2}\int^{\pi}|\sin t|\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x+\pi)}{\xi^2}$$

因为 $\xi\in(x,x+\pi)$, 故 $\frac{x(x+\pi)}{(x+\pi)^2}<\frac{x(x+\pi)}{\xi^2}<\frac{x(x+\pi)}{x^2}$, 故由夹逼准则得原极限等于 $\frac{2}{\pi}$.

法二: 由题意可知,

$$\int_x^{x+\pi}\frac{|\sin t|}{t^2}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{x+n\pi}^{x+(n+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t^2}\mathrm{d}t$$

由第一积分中值定理可知, $\exists\xi_n\in(x+n\pi,x+(n+1)\pi)$, 使得

$$\int_{x+n\pi}^{x+(n+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\xi_n^2}\int_{x+n\pi}^{x+(n+1)\pi}|\sin t|\mathrm{d}t = \frac{1}{\xi_n^2}\int_0^{\pi}|\sin t|\mathrm{d}t = \frac{2}{\xi_n^2}$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{[x+(n+1)\pi]^2}<\frac{2}{\xi_n^2}<\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(x+n\pi)^2}$$

一方面,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(x+n\pi)^2}<\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(x+n\pi)(x+n\pi-\pi)}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x+n\pi-\pi}-\frac{1}{x+n\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{x-\pi}-\frac{1}{x+n\pi}\right)<\frac{2}{\pi}\frac{1}{x-\pi}$$

另一方面,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{[x+(n+1)\pi]^2}>\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{[x+(n+1)\pi][x+(n+2)\pi]}>\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{x+(n+1)\pi}-\frac{1}{x+(n+2)\pi}\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{x+\pi}-\frac{1}{x+(n+2)\pi}\right]$$

最后由夹逼准则易得原极限等于 $\frac{2}{\pi}$.

3.4 特殊构型积分补充

3.4.1 Euler 积分

Euler 积分在概率论和统计学中有重要的应用, 特别是在 Gauss 分布的概率密度函数中. 这个积分在实际计算中比较困难, 因为它没有一个基本的初等函数的原函数, 因此无法通过常规的积分技巧来计算.

Euler 积分及其基本变形

定义 3.4.1 (第二型 Euler 积分). $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\ (\alpha>0)$.

基本变形:

$$\Gamma(\alpha)=2\int_0^{+\infty}t^{2\alpha-1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\ (\alpha>0),\ \Gamma(\alpha)=\int_0^1\ln^{\alpha-1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\ (\alpha>0).$$

定理 3.4.1 (第二型递推性质). $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$, 并且 $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(n+1)=n!$.

又因为 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, 由定理 3.4.1 进行递推, 可得

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

Γ 函数只在 x 正半轴有定义, 利用递推性质可定义 $\alpha\leqslant 0$ 时的 $\Gamma(\alpha)$.

定理 3.4.2 (第二型余元公式). $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\ (0<\alpha<1)$.

定理 3.4.3 (第二型倍元公式). $\Gamma(2\alpha)=\dfrac{2^{2\alpha-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)$ $(\alpha>0)$.

定义 3.4.2 (第一型 Euler 积分). $\mathrm{B}(p,q)=\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ $(p,q>0)$.

基本变形:

$$\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta,\ \mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}\mathrm{d}u,\ \mathrm{B}(p,q)=\int_0^1\frac{x^{p-1}+x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\mathrm{d}x.$$

定理 3.4.4 (对称性质). $\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$.

定理 3.4.5 (第一型递推性质). $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p,q-1)=\dfrac{p-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p-1,q)$. 特别地, 对于正整数 m,n, 有

$$\mathrm{B}(m,n)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

定理 3.4.6 (第一型余元公式). $B(p,1-p)=\dfrac{\pi}{\sin p\pi}$ $(0<p<1)$. 特别地, $B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\pi$.

定理 3.4.7 (Dirichlet 定理). $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

利用 Euler 积分表示其他积分

例 3.4.1. 已知 $I_n=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{t-1}}{t^n}\mathrm{d}t$ $(n\geqslant 2)$, 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$.

$I_n=\displaystyle\int_1^{+\infty}(t-1)^{\frac{1}{2}}t^{-n}\mathrm{d}t$ 并令 $\dfrac{1}{t}=x$, 于是

$$I_n=\int_0^1\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{1}{2}}x^{n-2}\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)^{\frac{1}{2}}x^{n-\frac{5}{2}}\mathrm{d}x=\mathrm{B}\left(n-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{B}\left(n-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}{\mathrm{B}\left(n-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{3}{2}}{n}\cdot\frac{B\left(n-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)}{B\left(n-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)}=1.$$

3.4.2 Dirichlet 积分

引理 3.4.1 (Dirichlet 核). 在区间 $(0,\pi)$ 上定义 $D_n=\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}$, $n\in\mathbb{N}_+$, 则有

$$\int_0^{\pi}D_n(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

证 显然, D_n 在 $x=0$ 处无定义, 但是 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}D_n(x)=\frac{2n+1}{2}$, 因此 D_n 在 $[0,\pi]$ 可积, 因为有三角恒等式

$$2\sin\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\mathrm{d}x\right)=\sin\frac{(2n+1)x}{2}$$

于是，$D_n=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx$，所以，不难得到

$$\int_0^\pi D_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^\pi\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

定理 3.4.8 (Dirichlet 积分等式). $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$

证 易知该反常积分条件收敛，根据引理 *3.4.1* 有，$\displaystyle\int_0^\pi\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，考虑将其分母换为 x 所产生的影响，由 *L'Hospital* 法则，有

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}=O(x)\ \ (x\to 0)$$

因此 f 在 $[0,\pi]$ 上常义可积，由 *Riemann-Lebesgue* 定理，有

$$\lim_{n\to\infty}f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\mathrm{d}x=0$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

最后，作代换 $t=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x$，即得

$$\int_0^\pi\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

3.4.3 Lobachevsky 积分法

定理 3.4.9 (Lobachevsky 积分法). 若 $f(x)$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 范围内满足 $f(x+\pi)=f(x)$ 及 $f(\pi-x)=f(x)$，则

$$\int_0^{+\infty}f(x)\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x.$$

当 $f(x)=1$ 时，便是 Dirichlet 积分.

3.4.4 Fresnel 积分与 Fejér 积分

定理 3.4.10 (Fresnel 积分等式). $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

定理 3.4.11 (Fejér 积分). 假设 $k\in\mathbb{N}^+$，则有以下四种形式的 Fejér 积分:

(1) $$\int_0^\pi\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n=2k\\ \pi, & n=2k-1;\end{cases}$$

(2) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x=\begin{cases}2\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{(-1)^{k-1}}{2k-1}, & n=2k\\ \dfrac{\pi}{2}, & n=2k-1;\end{cases}$$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x=n\pi$;

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{n\pi}{2}$.

3.4.5 Laplace 积分

定理 3.4.12 (Laplace 积分等式). $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos bx}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2a}\mathrm{e}^{-ab},\ \int_0^{+\infty}\frac{x\sin bx}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-ab}\quad(a,b>0)$.

推论 3.4.1. 当 $4q>p^2$ 时, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{\sqrt{4q-p^2}}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}}\cos\frac{p}{2}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=-\frac{2\pi}{\sqrt{4q-p^2}}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}}\sin\frac{p}{2}.$$

3.5 留数定理及其应用

留数定理是复变函数论中的一个重要定理, 用于计算复函数在孤立奇点处的积分值. 具体来说, 留数定理指出, 如果一个复函数在某个孤立奇点处解析 (即在该点附近可展开成幂级数), 那么该函数在该孤立奇点处的留数就等于以该孤立奇点为中心的 Laurent 级数展开式中负幂次的系数.

3.5.1 留数

若点 a 为函数 $f(z)$ 的解析点, 存在邻域 $|z-a|<R$, $f(x)$ 在领域内解析, 这时若在邻域内作圆 $C:|z-a|=r<R$, 那么根据 Cauchy 定理

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$$

若点 b 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 则函数在 $0<|z-b|<R$ 内解析, 这是若作圆 $C:|z-a|=r<R$, 由于围道内有奇点, 所以

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z\ \text{不一定为零}$$

在 $0<|z-b|<R$ 的环域内 $f(z)$ 有 Laurent 展开:

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n(z-b)^n,\ a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z-b|=r}\frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

令 $n=-1$, 即得

$$\oint_{|z-b|=r}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}a_{-1}.$$

定义 3.5.1 (留数). 若 b 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 定义函数 $f(z)$ 在孤立奇点 b 的留数等于 $f(z)$ 在 b 的空心邻域内 Laurent 展开式中 $(z-b)^{-1}$ 幂的系数 a_{-1}, 并记作 $\mathrm{Res}[f(b)]$.

3.5.2 留数定理

如果我们要计算一闭合围道积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$, 假设闭合围道内部, 被积函数除有限几个孤立奇点 b_k, 根据复连通区域 Cauchy 定理, 作小圆 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 将每个奇点包围, 则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(b_k)].$$

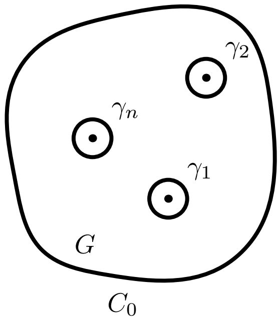


图 3.5.1

定理 3.5.1 (留数定理). 设 C 为简单闭合围道, G 为 C 的内区域, 若除 G 内有限个孤立奇点 b_k, $k=1,2,\ldots,n$ 外, 函数在 $\overline{G}$ 内解析, 则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(b_k)].$$

3.5.3 留数计算

一阶极点

在 b 点的某一空心邻域内

$$f(z) = \frac{1}{z-b}\phi(z)$$

$\phi(z)$ 在含中心 b 点的邻域内解析, $\phi(b) \neq 0$, 作 Taylor 展开

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z-b)^n$$

于是

$$\mathrm{Res}[f(b)] = \alpha_0 = \phi(b)$$

由连续性

$$\mathrm{Res}[f(b)] = \lim_{z\to b}(z-b)f(z)$$

特别常见的情况, 当 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$ 和 $Q(z)$ 在 b 点及其邻域内解析, b 是 $Q(z)$ 的一阶零点, $P(b)\neq 0$, 则

$$\operatorname{Res}[f(b)]=\lim_{z\to b}(z-b)\frac{P(z)}{Q(z)}=P(b)\lim_{z\to b}\frac{z-b}{Q(z)}\xlongequal{L'}\frac{P(b)}{Q'(b)}$$

高阶极点

设 $z=b$ 是 $f(z)$ 的 m 阶极点

$$f(z)=(z-b)^{-m}\phi(z)$$

$\phi(z)$ 在 b 的某个邻域内解析

$$\phi(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n(z-b)^n$$

$\phi(b)\neq 0$, 则

$$\operatorname{Res}[f(b)]=\alpha_{m-1}=\frac{1}{(m-1)!}\phi^{(m-1)}(b)$$

将 b 换成极限 $z\to b$, 有

$$\operatorname{Res}[f(b)]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to b}\frac{\mathrm{d}^{m-1}[(z-b)^m f(z)]}{\mathrm{d}z^{m-1}}.$$

本性奇点或高阶极点

对于本性奇点时只能求 Laurent 展开系数 a_{-1}.

对于高阶极点, 很多情况下求展开系数往往比用高阶极点的留数公式简单, 对于 m 阶极点即求 $\phi(z)=(z-b)^m f(z)$ 的 Taylor 展开系数 a_{m-1}.

例 3.5.1. 函数 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z^2+1)^2}$, 求 $\operatorname{Res}[f(z)]$.

函数在 $z=\mathrm{i}$ 有二阶极点, 这时

$$\phi(z)=(z-\mathrm{i})^2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z^2+1)^2}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z+\mathrm{i})^2}$$

要求 $m-1=1$ 次项的系数 α_1, 用待定系数法, 令 $z-\mathrm{i}=t$, 于是

$$(t+\mathrm{i})(t+2\mathrm{i})^2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n t^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n!}t^n$$

即

$$(-4\mathrm{i}-8t+\cdots)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n t^n=\mathrm{e}^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n!}t^n$$

先比较两边 0 次项系数

$$-4\mathrm{i}\alpha_0=\mathrm{e}^{-1}$$

得 $\alpha_0=\dfrac{\mathrm{i}}{4\mathrm{e}}$, 再比较两边 *1* 次项系数

$$-4\mathrm{i}\alpha_1-8\alpha_0=\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{e}}$$

得 $\alpha_1=-\dfrac{3}{4\mathrm{e}}$, 所以

$$\operatorname{Res}[f(i)]=-\frac{3}{4\mathrm{e}}.$$

3.5.4 留数定理的应用

有理三角函数的积分

考虑积分 $I=\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$, 其中 R 是 $\cos\theta$, $\sin\theta$ 的有理函数, 作变换

$$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}=\frac{z^2+1}{2z},\ \sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z},\ \mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

积分路径变换为 z 平面上的单位圆 $|z|=1$, 于是

$$I=\oint_{|z|=1}R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=2\pi\sum_{|z|<1}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z}R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right)\right].$$

例 3.5.2. 计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}$ $|\varepsilon|<1$.

作变换 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 那么有

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{1}{1+\varepsilon\dfrac{z^2+1}{2z}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=\frac{1}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{2}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\mathrm{d}z=2\pi\sum_{|z|<1}\mathrm{Res}\left[\frac{2}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\right]$$

解方程 $\varepsilon z^2+2z+\varepsilon=0$, 可得被积函数两个一阶极点为

$$z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

其中 $|z_1|<1$, $|z_2|>1$, 于是

$$I=2\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{2}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\right]_{z=z_1}=2\pi\frac{2}{2\varepsilon z+2}\bigg|_{z=z_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

例 3.5.3. 计算积分 $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos^2\theta}$.

由 $\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$, $\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$, 于是原式等价为

$$I=\oint_{\Gamma:|z|=1}\frac{4z\mathrm{d}z}{\mathrm{i}(z^4+6z^2+1)}\overset{z^2=u}{=\!=\!=}\frac{4}{\mathrm{i}}\oint_{\Gamma}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+6u+1}=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{4}{\mathrm{i}}f\left(-3+2\sqrt{2}\right)\right]=\sqrt{2}\pi.$$

将 $z^2=u$ 替换后, 当 z 绕 Γ 一周时, u 亦在其上绕二周.

例 3.5.4. 计算 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$.

由 $\cos 2\theta=\frac{1}{2}(z^2+z^{-2})$, $\cos\theta=\frac{1}{2}(z+z^{-1})$, $\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$, 于是

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{1}{2}(z^2+z^{-2})}{5-2(z+z^{-1})}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=\frac{\mathrm{i}}{4}\oint_{|z|=1}\frac{(z^4+1)\mathrm{d}z}{z^2\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}=-\frac{\pi}{2}\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{Res}[f(z)]$$

其中 $f(z)=\dfrac{(z^4+1)}{z^2\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}$, 那么有

$$\mathrm{Res}[f(0)]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^2\cdot\frac{(z^4+1)}{z^2\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}\right]=\frac{5}{2},\ \mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{z^4+1}{z^2(z-2)}\bigg|_{z=\frac{1}{2}}=-\frac{17}{6}$$

于是 $I=-\frac{\pi}{2}\left(-\frac{17}{6}+\frac{5}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$.

例 3.5.5. 计算 $I=\int_0^{\pi}\frac{\cos m\theta}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$, m 是正整数.

积分号下的函数为 x 的偶函数，故 $I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos m\theta}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$，令

$$I_1=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos m\theta}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta,\ I_2=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin m\theta}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

故有

$$I_1+\mathrm{i}I_2=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{i}}{2}\oint_{|z|=1}\frac{z^m}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}\mathrm{d}z$$

并且在圆周内部仅有一个一阶极点 $z=\frac{1}{2}$，于是

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z^m}{z-2}\right]_{z=\frac{1}{2}}=-\frac{1}{3\cdot 2^{m-1}}$$

由留数定理，

$$I_1+\mathrm{i}I_2=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{i}}{2}\cdot\frac{1}{-3\cdot 2^{m-1}}=\frac{\pi}{3\cdot 2^{m-1}}$$

知

$$I_1=\frac{\pi}{3\cdot 2^{m-1}},\ I_2=0$$

故所求积分 $I=\frac{1}{2}I_1=\frac{\pi}{3\cdot 2^m}$.

有理函数无穷积分

考虑积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{d}x$, 其中 $R(x)$ 为有理函数, 无穷积分定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\substack{R_1\to+\infty\\R_2\to+\infty}}\int_{-R_1}^{R_2}f(x)\mathrm{d}x$$

对于有理函数 $R(x)=P_n(x)/Q_m(x)$, 只有当分母多项式 $Q_m(x)$ 次数比分子多项式 $P_n(x)$ 次数至少大 2 时积分存在

$$m-n\geqslant 2$$

若积分存在, 则

$$I=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}R(x)\mathrm{d}x$$

计算 $\int_{-R}^{R}R(x)\mathrm{d}x$, 从复平面上看, 这是一个沿实轴的复变积分, 为应用留数定理, 必须先构造适当的围道, 我们补上以原点为圆心, R 为半径的上半圆 C_R, 如图 3.5.2 所示.

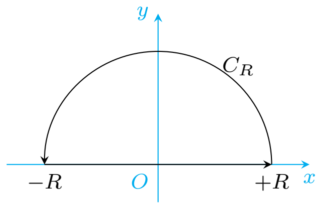


图 3.5.2

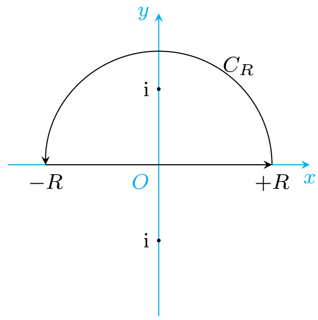


图 3.5.3

于是

$$\oint_C R(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} R(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} R(z)\mathrm{d}z$$

任何有理函数只有有限个的孤立奇点, 所以 $R(z)$ 在上半平面只有有限个孤立奇点, R 足够大时, 则围道包围上半平面所有的奇点, 由留数定理又有

$$\oint_C R(z)\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{\text{上半平面}} \mathrm{Res}[R(z)]$$

对于无穷积分存在的有理函数 $R(z)$, 满足分母多项式次数比分子多项式次数至少大 2, 则

$$\lim_{z\to\infty} zR(z) = \lim_{z\to\infty} z\frac{P_n(x)}{Q_m(z)} = 0$$

由大圆弧定理

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} R(z)\mathrm{d}z = 0$$

于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x = 2\pi \mathrm{i} \sum_{\text{上半平面}} \mathrm{Res}[R(z)]$$

例 3.5.6. 计算积分 $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$.

令 $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^3}$, $I = \displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x$, 考虑围道如图 *3.5.3* 所示, 则有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\text{上半平面}} \mathrm{Res}[R(z)] = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(i)]$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2!}\lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}^2\left[(z-\mathrm{i})^3\dfrac{1}{(1+z^2)^3}\right]}{\mathrm{d}z^2} = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2(z+\mathrm{i})^{-3}}{\mathrm{d}z^2}\right|_{z=\mathrm{i}} = 2\pi\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{3}{16}\mathrm{i}\right) = \frac{3\pi}{8}$$

因为 $\displaystyle\lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{1}{(1+z^2)^3} = 0$, 由大圆弧定理

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}\pi\cdot 0 = 0$$

于是原积分等于 $\dfrac{3\pi}{8}$.

例 3.5.7. 计算反常积分 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.

令 $f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, $I=\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)\mathrm{d}x$, 则有 $z_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 于是

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R}f(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{Res}[f(z)]=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z_1)]$$

$$=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{1!}\lim_{z\to z_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-z_1)^2\frac{1}{\left(z^2+z+1\right)^2}\right]=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-\bar{z}_1)^{-2}\Big|_{z=z_1}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

因为 $\displaystyle\lim_{z\to\infty}z\cdot f(z)=0$, 由大圆弧定理 $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=0$, 故原积分等于 $\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

含三角函数的无穷积分

考虑积分 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}x$, $p>0$, 其中 $R(x)$ 为有理函数, 积分的实部和虚部分别为

$$\mathrm{Re}\,I=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\cos px\mathrm{d}x,\ \mathrm{Im}\,I=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\sin px\mathrm{d}x$$

当且仅当有理函数 $R(x)=P_n(x)/Q_m(x)$ 的分母多项式 $Q_m(x)$ 次数比分子多项式 $P_n(x)$ 的次数大 1 时无穷积分存在.

$$m-n\geqslant 1$$

对于积分 I 同样考虑围道积分

$$\oint_C R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R}R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}x+\int_{C_R}R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{Res}\left[R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\right]$$

引理 3.5.1 (Jordan 引理). 设在 $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$ 的范围内, 当 $|z|\to\infty$ 时, $Q(z)$ 一致地趋近于 0, 则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z=0$$

其中 $p>0, C_R$ 是以原点为圆心, R 为半径的上半圆.

对于 $R(z)$, 满足分母多项式次数比分子多项式次数至少大 1, 则

$$\lim_{z\to\infty}R(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}=0$$

由 Jordan 引理

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z=0$$

于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{Res}\left[R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\right].$$

例 3.5.8. 计算积分 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$, $a>0$.

令 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+a^2}$，因为被积函数 $f(x)\sin x$ 为偶函数

$$\int_0^{+\infty} f(x)\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x$$

考虑围道积分

$$\oint_C f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x+\int_{C_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\operatorname{Res}\left[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right]$$

易知，$z=a\mathrm{i}$ 为上半平面的唯一奇点，且为一阶极点

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+a^2}\right]=\left.\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{2z}\right|_{z=\mathrm{i}a}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a}$$

所以

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x+\int_{C_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z=\pi\mathrm{e}^{-a}\mathrm{i}$$

因为 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$，由 *Jordan* 引理 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z=0$，于是 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x=\pi\mathrm{e}^{-a}\mathrm{i}$，于是

$$I=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\pi\mathrm{e}^{-a}\mathrm{i}=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-a}.$$

例 3.5.9. 计算反常积分 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x.$

令 $f(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^3}$，那么 $f(x)\cos x$ 为偶函数，于是

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x$$

考虑围道积分

$$\oint_C f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x+\int_{C_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\operatorname{Res}\left[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right]$$

易知，$z=\mathrm{i}$ 为上半平面的唯一奇点，且为三阶极点，于是

$$\phi(z)=(z-\mathrm{i})^3\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(1+z^2)^3}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})^3}$$

要求系数 α_2，用待定系数法，令 $z-\mathrm{i}=t$，于是

$$(t+2\mathrm{i})^3\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n t^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n!}t^n$$

即

$$\left(-8\mathrm{i}-12t+6\mathrm{i}t^2+\cdots\right)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n t^n=\mathrm{e}^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n!}t^n$$

先比较两边 *0* 次项系数

$$-8\mathrm{i}\alpha_0=\mathrm{e}^{-1}$$

得 $\alpha_0=\dfrac{\mathrm{i}}{8\mathrm{e}}$，再比较两边 *1* 次项的系数

$$-8\mathrm{i}\alpha_1-12\alpha_0=\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{e}}$$

得 $\alpha_1=-\dfrac{5}{16\mathrm{e}}$，再比较两边 *2* 此项的系数

$$-8\mathrm{i}\alpha_2-12\alpha_1+6\mathrm{i}\alpha_0=-\frac{1}{2\mathrm{e}}$$

解得 $\alpha_2=-\dfrac{7\mathrm{i}}{16\mathrm{e}}$，即

$$\operatorname{Res}\left[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right]=-\frac{7\mathrm{i}}{16\mathrm{e}}$$

所以

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x+\int_{C_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z=\frac{7\pi}{8\mathrm{e}}$$

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$，由 *Jordan* 引理 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z=0$，于是 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x=\dfrac{7\pi}{8\mathrm{e}}$，于是

$$I=\operatorname{Re}\frac{1}{2}\cdot\frac{7\pi}{8\mathrm{e}}=\frac{7\pi}{16\mathrm{e}}.$$

实轴上有奇点的情形

设被积函数在实轴上有奇点, 则积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 为瑕积分, 假设瑕点为 c, 瑕积分定义为: 存在一点 c 及邻域 (δ_1, δ_2), 有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta_1 \to 0} \int_a^{c-\delta_1} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\delta_2} \int_{c+\delta_2}^b f(x)\mathrm{d}x$$

如果这两个极限都不存在, 但是 $\lim\limits_{\delta \to 0} \left[\int_a^{c-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x\right]$ 存在, 定义瑕积分的主值为:

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta \to 0} \left[\int_a^{c-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x\right]$$

当然, 如果瑕积分存在, 则主值也存在, 且它们一定相等, 所以, 我们考虑

$$I = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{R \to \infty \\ \delta \to 0}} \left[\int_{-R}^{c-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\delta}^R f(x)\mathrm{d}x\right]$$

因为实轴上 c 点是被积函数的奇点, 必须绕过奇点来构成闭合的积分围道, 如图 3.5.4 所示.

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\text{一二象限}} \mathrm{Res}[f(z)] = \int_{-R}^{c-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z + \int_{c+\delta}^R f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$$

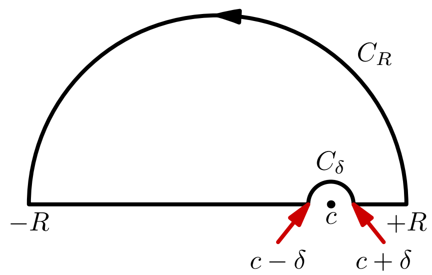


图 3.5.4

对于大圆弧积分, 我们可以用大圆弧定理或 Jordan 引理处理, 对于小圆弧 C_δ 的积分, 则需要用到小圆弧定理.

第 4 章

向量代数与空间解析几何

“数缺形时少直观, 形少数时难入微;
数形结合百般好, 隔离分家万事休.”
——华罗庚

向量代数与空间解析几何是数学中的一个重要分支, 主要研究向量、向量空间和空间中的点、直线、平面等几何对象之间的关系. 以下是向量代数与空间解析几何的几个重要概念和内容:

1. 向量: 向量是表示大小和方向的量, 通常用有序数对或有序数组表示. 向量可以进行加法、数乘等运算, 具有方向和模长（大小）的性质. 在向量代数中, 研究向量的性质、运算规则以及向量空间的结构.

2. 向量空间: 向量空间是由一组向量构成的集合, 满足一定的运算规则和性质, 如封闭性、结合律、分配律等. 向量空间是线性代数的基础, 包括了向量的线性组合、线性相关性、线性无关性等概念.

3. 空间解析几何: 空间解析几何是研究空间中点、直线、平面等几何对象的位置关系和性质的数学分支. 通过向量代数的工具, 可以方便地描述和研究空间中的几何问题, 如点的坐标、直线的方程、平面的方程等.

4. 点、直线、平面的位置关系: 在空间解析几何中, 研究点、直线、平面之间的位置关系是一个重要的问题. 通过向量的表示和运算, 可以确定点是否在直线上、直线是否平行、平面是否垂直等问题.

5. 空间曲线与曲面: 空间解析几何还涉及到空间曲线和曲面的研究, 如参数方程、曲线的切线、曲面的法线等. 通过向量代数和微积分的方法, 可以描述和分析空间中的曲线和曲面的性质.

向量代数与空间解析几何是数学中的重要分支, 它不仅在数学理论研究中有着重要作用, 也在物理学、工程学、计算机图形学等应用领域有广泛的应用.

4.1 向量代数

4.1.1 模、方向角、投影

定义 4.1.1 (投影). $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影记为 $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}$, 且 $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$.

例 4.1.1. 设 $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, -3, 1)$, 试在 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 所决定的平面内, 求与 $\vec{a}$ 垂直, 且模为 $\sqrt{93}$ 的向量.

法一: 设所求向量为 $\vec{c} = (x, y, z)$, 则由题设有 $\vec{c} \perp \vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{c} \perp \vec{a}$, $|\vec{c}| = \sqrt{93}$, 而 $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - 7\vec{k}$, 于是有 $\begin{cases} -2x & -3y & -7z & = 0 \\ 2x & +y & -z & = 0 \\ x^2 & +y^2 & +z^2 & = 93 \end{cases}$, 解得 $x = \pm 5$, $y = \mp 8$, $z = \pm 2$, 从而 $\vec{c} = \pm(5, -8, 2)$.

法二: 设所求向量为 $\vec{c}$, 则由题设有 $\vec{c} \perp \vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{c} \perp \vec{a}$, $|\vec{c}| = \sqrt{93}$, 于是 $\vec{c} // (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$, 从而得

$$\vec{c} = |\vec{c}| \cdot \left(\pm \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}}{|(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}|} \right) = \pm(5, -8, 2).$$

法三: 设所求向量为 $\vec{c}$, 则可设 $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = (2\lambda + \mu, \lambda - 3\mu, -\lambda + \mu)$, 由已知 $\vec{c} \perp \vec{a}$ 得 $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$, 即

$$2(2\lambda + \mu) + \lambda - 3\mu - (-\lambda + \mu) = 0$$

解得 $\mu = 3\lambda$, 又 $|\vec{c}| = \sqrt{93}$, 所以 $\sqrt{(2\lambda + \mu)^2 + (\lambda - 3\mu)^2 + (\mu - \lambda)^2} = \sqrt{93}$, 代入 $\mu = 3\lambda$, 得 $\lambda^2 = 1$, 解得 $\lambda = \pm 1, \mu = \pm 3$, 故 $\vec{c} = \pm(5, -8, 2)$.

例 4.1.2. 设向量 $\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b}$ 分别垂直于向量 $7\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$, 试求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角.

因为 $(\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}) \perp (7\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b})$, 所以 $7\boldsymbol{a}^2 - 15\boldsymbol{b}^2 = -16\boldsymbol{ab}$, 同理可得 $7\boldsymbol{a}^2 + 8\boldsymbol{b}^2 = 30\boldsymbol{ab}$, 联立解得 $\begin{cases} \boldsymbol{b}^2 = 2\boldsymbol{ab} \\ \boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{b}^2 \end{cases}$, 于是 $\cos < \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} > = \dfrac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = \dfrac{1}{2}$, 因此 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$.

4.1.2 数量积、向量积、混合积

数量积

定义 4.1.2 (向量的数量积 (点乘积或内积)). 向量 $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ 与 $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ 的数量积是一个数 $|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos\left(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}\right)$ (其中 $0 \leqslant (\widehat{a, b}) \leqslant \pi$), 记作 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 为零向量时, 则定义 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$, 数量积 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 的坐标表示式为

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

定义 4.1.3 (向量正交). 两个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 垂直 (或称正交), 记作 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, 特别地, 规定零向量与任一向量垂直.

数量积有以下基本性质:

(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$.

(2) $(\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$.

(3) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$.

(4) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

向量积

定义 4.1.4 (向量的向量积 (叉乘积或外积)). 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个向量 $\boldsymbol{c}$, 记为 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, 即 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{c}$ 的模等于 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\left(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}\right)$, $\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面,且 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 顺次构成右手系. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 为零向量时, 则定义 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, 向量积 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 坐标表示式为

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

向量积有以下的性质:

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$.

(2) $(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.

(3) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$.

(4) $\boldsymbol{a} // \boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$.

定理 4.1.1 (二重外积公式). $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$.

例 4.1.3 (2023 四川大学). 设向量 $\vec{a} = (1,2,3), \vec{b} = (4,5,6), \vec{c} = (7,8,9)$, 求 $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$.

法一: 由向量积的计算公式计算 $\vec{b} \times \vec{c}$:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \left(\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \right) = (-3, 6, -3)$$

进一步计算 $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} \right) = (-24, -6, 12).$$

法二: 由二重外积公式: $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$, 其中

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 50, \ \vec{a} \cdot \vec{b} = 32$$

于是得 $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = (-24, -6, 12)$.

定理 4.1.2 (Lagrange 恒等式). 对于任意两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 满足以下恒等关系式:

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} \end{vmatrix}.$$

混合积

定义 4.1.5 (向量的混合积). 设 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}, \boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}, \boldsymbol{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$, 则称 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积, 记为 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$.

定理 4.1.3 (共面条件). 混合积是一数量, 其几何意义为: 混合积的绝对值等于以 $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为相邻三条棱的平行六面体的体积. 因此, 向量 $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是 $(a\times b)\cdot c=0$.

4.2 空间解析几何

4.2.1 空间平面与直线

定理 4.2.1 (线轴夹角余弦平方和公式). 设一直线与三坐标轴的夹角依次为 α,β,γ, 则有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

证 设直线上一点坐标为 $P(x_0,y_0,z_0)$, 坐标轴的单位向量依次为 $\boldsymbol{i}=(1,0,0),\boldsymbol{j}=(0,1,0),\boldsymbol{k}=(0,0,1)$, 由夹角余弦公式

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{\boldsymbol{p}\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{p}|\cdot|\boldsymbol{i}|}=\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}\\ \cos\beta=\dfrac{\boldsymbol{p}\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{p}|\cdot|\boldsymbol{j}|}=\dfrac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}\\ \cos\gamma=\dfrac{\boldsymbol{p}\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{p}|\cdot|\boldsymbol{k}|}=\dfrac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}\end{cases}$$

上式平方相加即得证.

定理 4.2.2 (线面夹角余弦平方和公式). 设一直线与三坐标平面的夹角依次为 u,v,w, 则有

$$\cos^2u+\cos^2v+\cos^2w=2.$$

证 设直线与 x,y,z 轴的夹角依次为 α,β,γ, 于是有

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{\pi}{2}-u\\ \beta=\dfrac{\pi}{2}-v\\ \gamma=\dfrac{\pi}{2}-w\end{cases}$$

且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, 所以

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-v\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-w\right)=1$$

即 $\sin^2u+\sin^2v+\sin^2w=1$, 从而有 $\cos^2u+\cos^2v+\cos^2w=2$.

4.2.2 空间平面、直线的方程及位置关系

平面束方程

例 4.2.1. 试用平面束方程方法判断直线

$$L_1:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2},\ L_2:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$$

是否在同一平面上, 若不在同一平面上, 试求两直线的距离.

L_1 的一般方程为 $\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2y-z+1=0 \end{cases}$，则平面束方程为

$$x-y+1+\lambda(2y-z+1)=0 \Rightarrow x+(2\lambda-1)y-\lambda z+1+\lambda=0$$

那么平面束的法向量为 $\vec{n}=(1,2\lambda-1,-\lambda)$，那么 $(1,2\lambda-1,-\lambda)\cdot(1,3,4)=0 \Rightarrow \lambda=1$，那么平面方程为 $x+y-z+2=0$，但直线 L_2 上的一点 $(0,-1,2)$，并不在该平面上，故两直线不可能同一平面，两直线的方向向量，以及线上一点的坐标分别为

$$\vec{s}_1=(1,1,2),\ P_1=(-1,0,1),\ \vec{s}_2=(1,3,4),\ P_2=(0,-1,2)$$

故距离为 $d=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\dfrac{(\vec{s}_1\times\vec{s}_2)}{|\vec{s}_1\times\vec{s}_2|}\right|=\left|(1,-1,1)\cdot\dfrac{(-2,-2,2)}{2\sqrt{3}}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

4.2.3 曲面及其方程

曲面与直线的关系

例 4.2.2. 求曲面 $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=1$ 上的点与直线

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+1}{12}$$

的距离的最小值.

直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z+1}{12}$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=3t-1 \\ y=4t-1 \\ z=12t-1 \end{cases}$$

直线上任意一点可表示为 $(3t-1,4t-1,12t-1)$，球心的坐标为 $(2,3,-1)$，那么有

$$d=\sqrt{(3t-1-2)^2+(4t-1-3)^2+(12t-1+1)^2}-1=\sqrt{169\left(t-\frac{25}{169}\right)^2+\frac{3600}{169}}-1$$

故最小值为 $d_{min}=\sqrt{\dfrac{3600}{169}}-1=\dfrac{47}{13}$.

例 4.2.3. 在直角坐标系中，球面 S 与直线 $L_1:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+4}{6}=\dfrac{z-6}{4}$ 相切与点 $A(1,-4,6)$，与直线 $L_2:\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-2}{-6}$ 相切与点 $B(4,-3,2)$.

(1) 求球面 S 的方程;

(2) 设点 P 为球面 S 上的动点，过点 P 任作三条两两垂直的弦，记它们的长度分别为 a,b,c，求证：$a^2+b^2+c^2$ 为定值.

(1) 设球心坐标为点 $Q(x,y,z)$，根据题意可知，过点 A 且垂直于 L_1 的平面方程为

$$\Pi_1: 3(x-1)+6(y+4)+4(z-6)=0 \tag{1}$$

同理，过点 B 且垂直于 L_2 的平面方程为

$$\Pi_2: 2(x-4)+(y+3)-6(z-2)=0 \tag{2}$$

并且由 $|QA|^2=|QB|^2$，可得

$$(x-1)^2+(y+4)^2+(z-6)^2=(x-4)^2+(y+3)^2+(z-2)^2 \tag{3}$$

联立 (1)、(2) 和 (3) 解得球心坐标为 $Q(-5,3,0)$，易知，球面半径为 $R=11$，所以球面 S 的方程分别为

$$(x+5)^2+(y-3)^2+z^2=121.$$

(2) 通过平移，可将球心平移至坐标原点，其他参数保持不变，再通过旋转，可将三条两两垂直的弦旋转到与三条两两垂直的坐标轴平行，设点 P 的坐标为 (x,y,z)，则三条弦与球面 S 交于点

$$E(-x,y,z),G(x,-y,z),H(x,y,-z)$$

因此

$$a^2+b^2+c^2=|PE|^2+|PG|^2+|PH|^2=4\left(x^2+y^2+z^2\right)=484.$$

切平面与法线

本小节内容需先了解“多元函数微分学”相关知识后阅读.

定理 4.2.3 (切平面方程). 曲面 $\Sigma : F(x,y,z)=0$, 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\left(F'_x,F'_y,F'_z\right)\Big|_P$$

那么过点 P 的切平面方程方程为

$$F'_x(P)(x-x_0)+F'_y(P)(y-y_0)+F'_z(P)(z-z_0)=0.$$

定理 4.2.4 (法线方程). 由定理 4.2.3 得到切平面的方程后, 其法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F'_x(P)}=\frac{y-y_0}{F'_y(P)}=\frac{z-z_0}{F'_z(P)}.$$

例 4.2.4 (2013 数一). 曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为

A. $x-y+z=-2$ B. $x+y+z=0$ C. $x-2y+z=-3$ D. $x-y-z=0$

$F(x,y,z)=x^2+\cos(xy)+yz+x=0,\ P=(0,1,-1)$, 那么

$$F'_x(P)=2x-y\sin(xy)+1\Big|_P=1,\ F'_y(P)=-x\sin(xy)+z\Big|_P=-1,\ F'_z(P)=y\Big|_P=1$$

于是法向量 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$, 切平面方程为

$$1\cdot(x-0)-1\cdot(y-1)+1\cdot(z+1)=0\Rightarrow(x-y+z=-2)$$

故选 A.

例 4.2.5 (2014 数一). 求曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程.

$F(x,y,z)=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)-z,\ P=(1,0,1)$, 那么

$$F'_x(P)=2(1-\sin y)x-y^2\cos x\Big|_P=2,\ F'_y(P)=-x^2\cos y+2(1-\sin x)y\Big|_P=-1,\ F'_z(P)=-1$$

所以曲面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-1,-1)$, 则切平面方程为

$$2(x-1)+(-1)(y-0)+(-1)(z-1)=0\Rightarrow 2x-y-z=1.$$

平面类型的讨论

例 4.2.6. 求直线 $\begin{cases}x=mt+a\\ y=nt+b\\ z=t\end{cases}$ $-\infty<t<+\infty$ 绕 Oz 旋转一周所成曲面的方程, 并根据参数的不同取值讨论曲面的形状.

曲面的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{(mt+a)^2+(mt+b)^2}\cos\theta\\ y=\sqrt{(mt+a)^2+(mt+b)^2}\sin\theta\\ z=t,\theta\in[0,2\pi]\end{cases}$ 消去参数得 $x^2+y^2=(mz+a)^2+(nz+b)^2$, 于是

(1) 母线与 z 轴平行时 $(m=n=0)$, 此时 $x^2+y^2=a^2+b^2$, 为圆柱面;

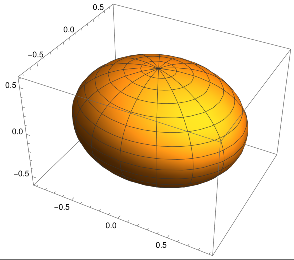
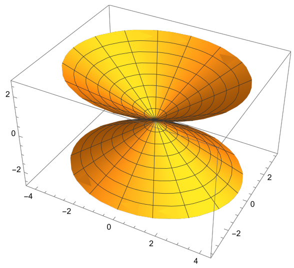
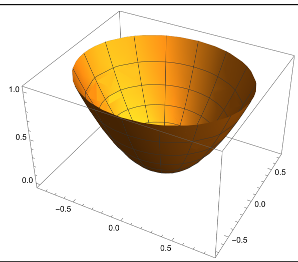
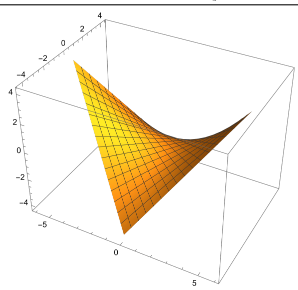
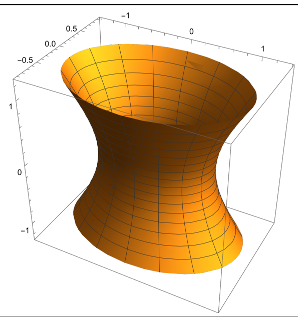
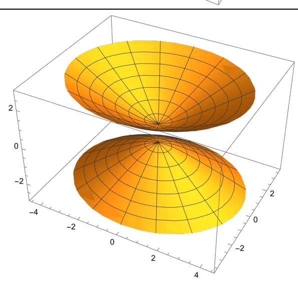
(2) 母线与 z 轴异面时 $(mb-na\neq0)$, 此时 $x^2+y^2-(m^2+n^2)\left(z+\dfrac{ma+nb}{m^2+n^2}\right)^2=\dfrac{(mb-na)^2}{m^2+n^2}$, 为旋转单叶双曲面;

(3) 母线与 z 轴相交时 $(mb-na=0)$, 此时 $x^2+y^2=(m^2+n^2)\left(z+\dfrac{ma+nb}{m^2+n^2}\right)^2$, 为直圆锥面.

常见的空间曲面及其方程

下表是常见的空间曲面及其对应的方程.

表 4.1: 空间曲面及其对应方程

曲面名称	图例	直角坐标系方程	参数方程
椭球面		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$\begin{cases} x=a\sin u\cos v \\ y=\sin u\sin v \\ z=c\cos u \\ u\in[0,\pi], v\in[0,2\pi] \end{cases}$
椭圆锥面		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$	$\begin{cases} x=av\cos u \\ y=bv\sin u \\ z=cv \\ u\in[0,2\pi], v\in\mathbb{R} \end{cases}$
椭圆抛物面		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$	$\begin{cases} x=av\cos u \\ y=bv\sin u \\ z=u^2 \\ u\in[0,2\pi], v\in[0,+\infty) \end{cases}$
双曲抛物面		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$	$\begin{cases} x=a(u+v) \\ y=b(u-v) \\ z=4uv \\ u,v\in\mathbb{R} \end{cases}$
单叶双曲面		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$\begin{cases} x=a\cosh u\cos v \\ y=b\cosh u\sin v \\ z=c\sinh u \\ u\in\mathbb{R}, v\in[0,2\pi] \end{cases}$
双叶双曲面		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	$\begin{cases} x=a\sqrt{u^2-1}\cos v \\ y=b\sqrt{u^2-1}\sin v \\ z=cu \\ u\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty), v\in\mathbb{R} \end{cases}$

4.2.4 空间曲线及其方程

空间曲线绕直线旋转的曲面方程

定理 4.2.5 (空间曲线绕直线旋转的曲面方程). 设空间曲线 $\Gamma: \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$, 直线 $L: \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$, 记 $M_0=(x_0,y_0,z_0), \boldsymbol{\tau}=(l,m,n)$, 在曲线 Γ 上任取一点 $M(x,y,z)$, 而过点 M 的纬圆上任意一点 $P(X,Y,Z)$ 满足条件 $\begin{cases} \left|\overrightarrow{M_0P}\right|=\left|\overrightarrow{M_0M}\right| \\ \overrightarrow{M_0M}\perp\boldsymbol{\tau}. \end{cases}$

常见的曲线及其对应方程

摆线 摆线是一种具有特定形状的曲线, 也被称为牛顿螺线或纽曼线. 它是由一个固定点上的一根线不断转动而形成的曲线, 其特点是曲线上的每个点到固定点的距离与该点在曲线上的位置成正比.

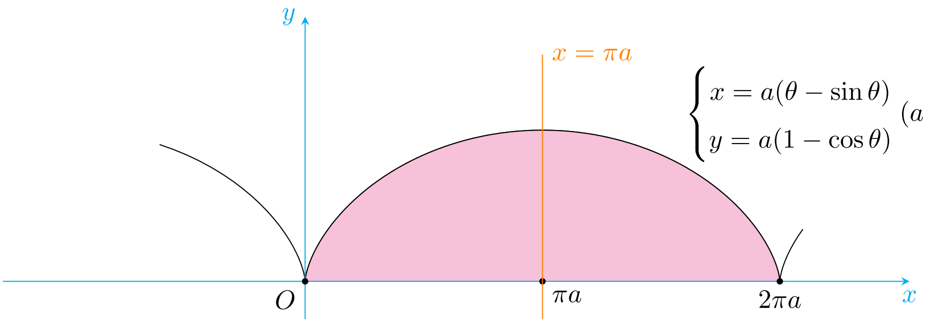


图 4.2.1: 摆线

箕舌线 箕舌线在数学中常用于曲线绘制和几何分析, 具有一定的研究和应用价值. 它的特殊形状和几何性质使其在数学教学和研究中具有一定的重要性.

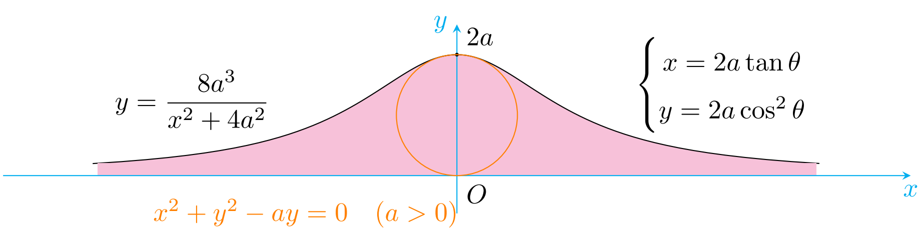


图 4.2.2: 箕舌线

双纽线 双纽线是一种特殊的曲线形状, 也称为双纽结或双纽环. 它是一种具有对称性的闭合曲线, 形

状类似于一个双环结构. 双纽线的数学表达式通常可以用参数方程或极坐标方程表示.

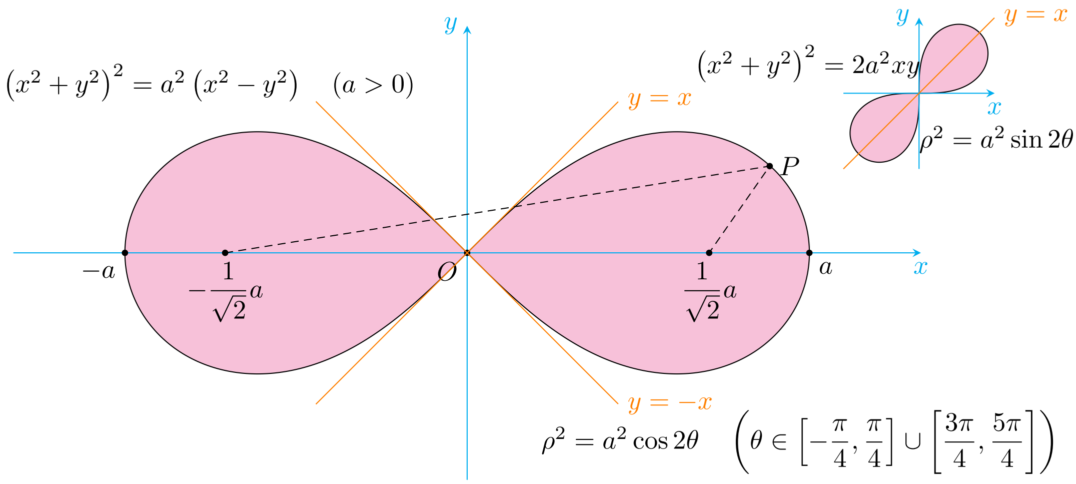


图 4.2.3: 双纽线

对数螺线 对数螺线是一种特殊的曲线形状, 也称为对数螺旋线或阿基米德螺线.

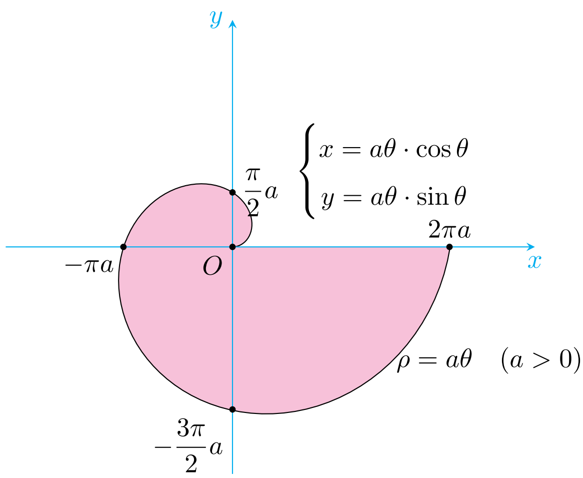


图 4.2.4: 对数螺线

星形线 在数学中, 星形线的定义比较宽泛, 可以包括多种形状. 例如, 五角星、六角星、七角星等都可以看作是一种星形线. 星形线的数学表达式可以有多种形式, 常见的包括极坐标方程、参数方程或直角坐标方程, 具体形式取决于所描述的具体星形线的形状和特征.

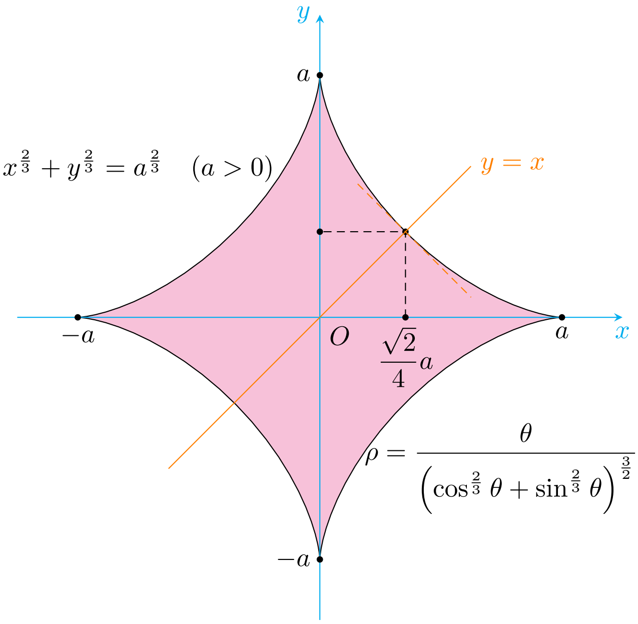


图 4.2.5: 星形线

心形线 心形线是一种具有象征意义和浪漫情感的特殊曲线形状, 其外形类似于一个心形. 在数学上, 心形线可以用不同的数学表达式来描述, 常见的包括参数方程、极坐标方程或直角坐标方程.

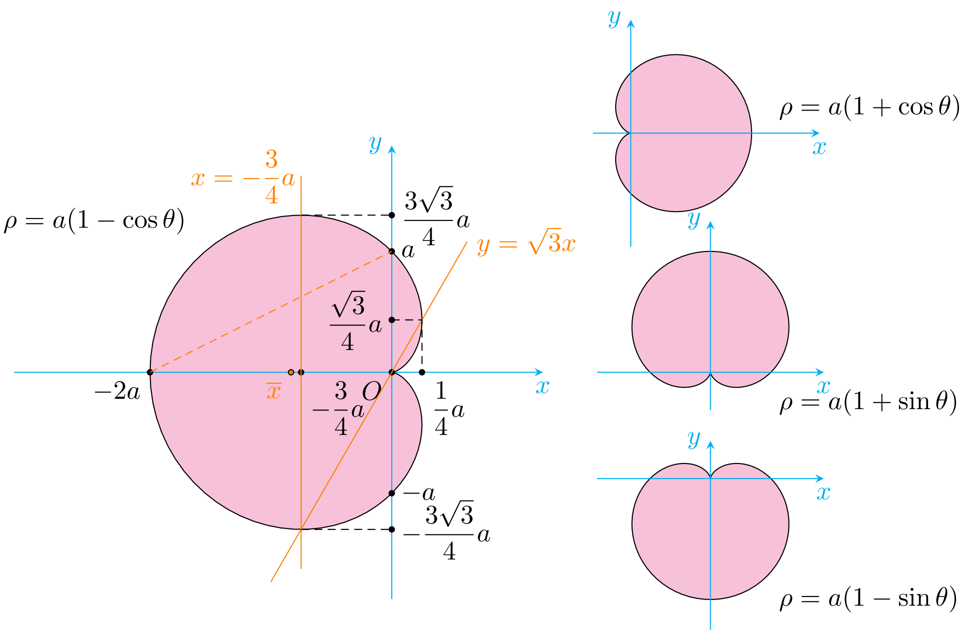
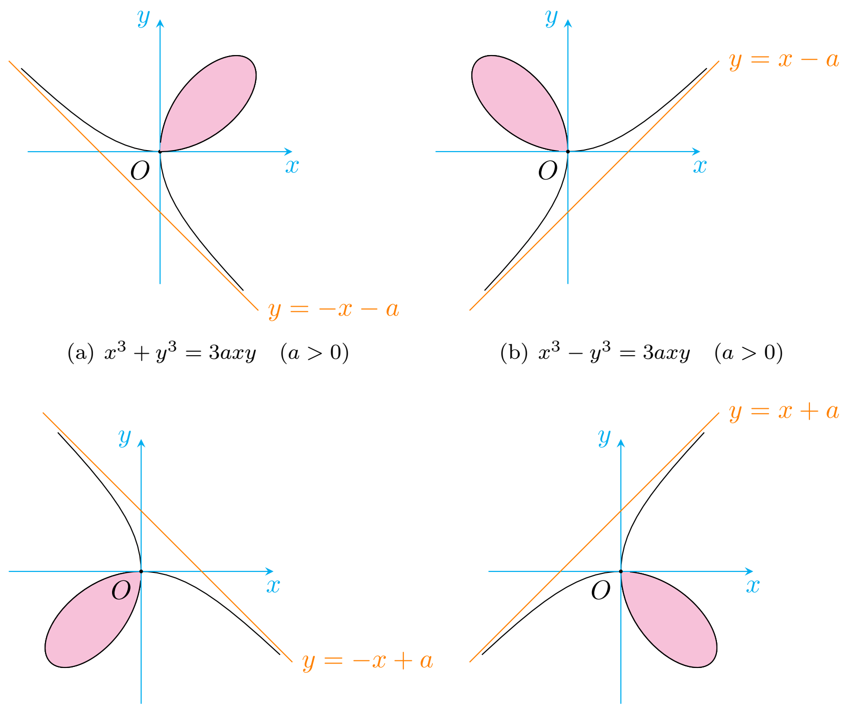


图 4.2.6: 心形线

叶形线 叶形线是一种特殊的曲线形状, 其轮廓类似于植物叶子的形状, 因此得名为叶形线. 在数学上,

叶形线可以用不同的数学表达式来描述, 常见的包括参数方程、极坐标方程或直角坐标方程.



(a) $x^3+y^3=3axy \quad (a>0)$

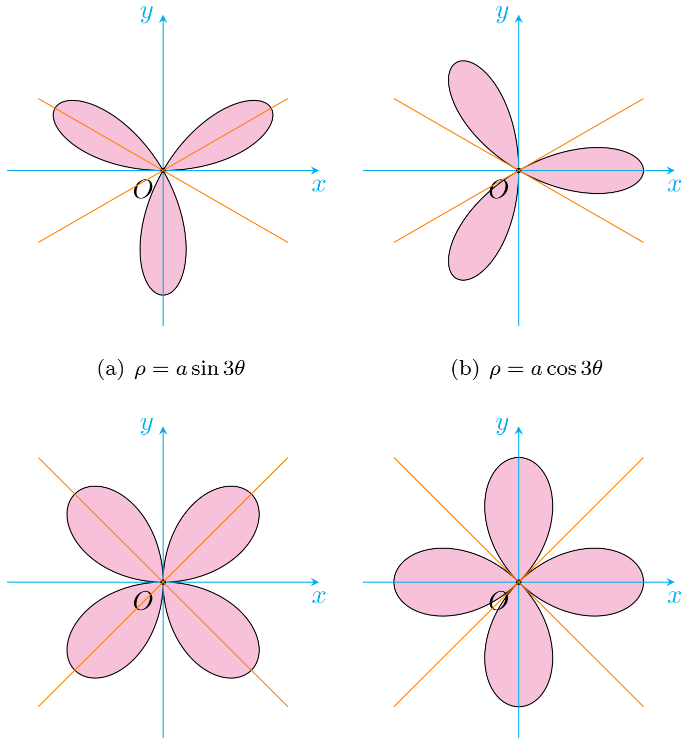
(b) $x^3-y^3=3axy \quad (a>0)$

(c) $x^3+y^3=-3axy \quad (a>0)$

(d) $x^3-y^3=-3axy \quad (a>0)$

图 4.2.7: 叶形线

玫瑰线 玫瑰线是一种经典的数学曲线, 其形状类似于玫瑰花的花瓣. 玫瑰线的美妙之处在于其优美的几何形状和对称性, 不同的 n 值可以得到不同朵花瓣的玫瑰线, 每一朵花瓣都充满了艺术感和美感.



(a) $\rho = a\sin 3\theta$　(b) $\rho = a\cos 3\theta$

(c) $\rho = a\sin 2\theta$　(d) $\rho = a\cos 2\theta$

图 4.2.8: 玫瑰线

第 5 章

多元函数微分学

“立志于物理学的人，不懂下列的事情是不行的：
第一是数学，第二是数学，第三是数学.”
——伦琴

多元函数微分学是微积分的一个重要分支, 主要研究多元函数的导数、偏导数、全微分以及相关的梯度、散度、旋度等概念. 以下是多元函数微分学的几个重要内容和概念:

1. 多元函数: 多元函数是指具有多个自变量的函数, 通常表示为 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, 其中 $x_1, x_2, ..., x_n$ 是自变量. 多元函数可以是标量值函数（只有一个输出值）或者矢量值函数（输出值是一个向量）.

2. 偏导数: 对于多元函数 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, 它的偏导数表示函数在某一个自变量上的变化率, 其他自变量保持不变. 偏导数的计算类似于一元函数的导数, 可以求得关于每个自变量的偏导数.

3. 全微分: 多元函数的全微分是对函数的微小变化进行线性逼近的结果, 它包含了所有偏导数的信息. 全微分可以用来描述函数在某一点的局部性质, 如切线、法线、极值等.

4. 梯度: 对于标量值函数 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, 它的梯度是一个向量, 表示函数在每个方向上的变化率. 梯度的方向是函数增长最快的方向, 梯度的大小表示函数的变化速率.

5. 散度和旋度: 对于矢量值函数 $\mathbf{F}(x, y, z)$, 它的散度和旋度分别描述了矢量场的发散和旋转性质. 散度表示场的流入流出情况, 旋度表示场的旋转程度.

多元函数微分学在物理学、工程学、经济学等领域有着广泛的应用, 例如在物体运动、电磁场分析、优化问题等方面都需要用到多元函数微分学的知识.

5.1 多元函数的极限与连续

5.1.1 多元函数的极限

定义 5.1.1 (二元函数的极限). 设二元函数 $f(x, y)$ 在区间 (a, b) 的某去心邻域内有定义, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta >$

0, 当 $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ 时恒有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

则称

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=A.$$

在二元函数极限的定义中, 动点 (x,y) 在 (a,b) 的邻近以任意路径趋向于点 (a,b) 时, 函数值 $f(x,y)$ 与常数 A 需任意地接近. 这些任意路径是不可能一一取到的. 若取两条不同的路径让 $(x,y)\to(a,b)$, 而 $f(x,y)$ 取不同的极限, 则可推知: $(x,y)\to(a,b)$ 时 $f(x,y)$ 的极限不存在.

通常求二元函数极限的方法如下:

(1) 利用定义求极限;

(2) 利用路径法;

(3) 在 $(x,y)\to(0,0)$ 时化为极坐标求极限, 即 $(x,y)\to(0,0)\Leftrightarrow\rho\to0^+$;

(4) 利用无穷小量乘以有界变量仍为无穷小量;

(5) 利用夹逼准则求极限.

例 5.1.1. 用换元法求下列极限

$$(1)\ \lim_{x,y\to0}\frac{xy^2}{x^2+y^2+y^4}.\quad\Bigg|\quad(2)\ \lim_{x,y\to0}\frac{3y^3+2x^2y}{x^2-xy+y^2}.\quad\Bigg|\quad(3)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{x^2y^2}}.$$

(1) 原式 $\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\rho^3\cos\theta\sin^2\theta}{\rho^2+\rho^4\sin^4\theta}=\cos\theta\sin^2\theta\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\rho}{1+\rho^2\sin^4\theta}=0.$

(2) 原式 $\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\left(3\sin^3\theta+2\cos^2\theta\sin\theta\right)\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\rho}{1-\cos\theta\sin\theta}=0.$

(3) 原式 $\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{1-\cos\rho^2}{\rho^2\mathrm{e}^{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta}}=\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}\rho^4}{\rho^2}=\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\rho^2}{2}=0.$

例 5.1.2. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$

A. 不存在　　B. 等于 2　　C. 等于 $\dfrac{1}{2}$　　D. 等于 0

法一: 令 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 于是原极限等于 $\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{2\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^4\cos^4\theta+\rho^2\sin^2\theta}=2\cos^2\theta\sin\theta\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\rho^3}{\rho^4\cos^4\theta+\rho^2\sin^2\theta}=\infty$, 即不存在, 选 A.

法二: 取 $x\to0$, $y=x$, 则有 $(x,y)\to(0,0)$, 于是

$$\lim_{x\to0,y=x}\frac{2x^2\cdot x}{x^4+x^2}=\lim_{x\to0,y=x}\frac{2x^3}{(1+x^2)x^2}=0$$

再取 $x\to0$, $y=x^2$, 同理 $(x,y)\to(0,0)$, 于是

$$\lim_{x\to0,y=x^2}\frac{2x^2\cdot x^2}{x^4+x^4}=1$$

发现两条不同的趋向路径, 算出的极限值不同, 又因为极限值具有唯一性, 故原式的极限值不存在.

5.1.2 多元函数的连续性与可微性

定义 5.1.2. 若 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=f(a,b)$ 则称 $f(x,y)$ 在 (a,b) 内连续.

定理 5.1.1. 多元初等函数在其有定义的区域上连续.

定理 5.1.2. 若 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上连续, 则 $f(x,y)$ 在 D 上为有界函数, $f(x,y)$ 在 D 上取到最大值与最小值.

连续、偏导数存在、可微及偏导数连续之间的关系

$$\begin{tikzcd}
\text{二元函数连续} \arrow[rr, leftrightarrow, "\times" marking] \arrow[dr, "\times" marking] & & \text{二元函数偏导数存在} \arrow[dl, "\times" marking] \\
& \text{二元函数可微} \arrow[ul, bend left] \arrow[ur, bend right] \arrow[d, bend left, "\times" marking] & \\
& \text{二元函数偏导数连续} \arrow[u, bend left] &
\end{tikzcd}$$

图 5.1.1

判断函数在某点处可微性的一般步骤

(1) 判断 $f(x,y)$ 在 (a,b) 处的两个偏导数是否存在, 若不存在, 则 $f(x,y)$ 在 (a,b) 点不可微; 若存在, 则求出两个偏导数 $f_x'(a,b)$ 和 $f_y'(a,b)$;

(2) 求出 $(x,y)\neq(a,b)$ 时的两个偏导函数 $f_x'(x,y)$ 和 $f_y'(x,y)$, 若它们在 (a,b) 点处连续, 则 $f(x,y)$ 在该点处可微, 否则按 (3) 继续判断;

(3) 求二重极限
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)-f(a,b)-f_x'(a,b)x-f_y'(a,b)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
若极限等于 0, 则 $f(x,y)$ 在 (a,b) 点可微, 否则 (包括极限不存在的情况) 不可微.

例 5.1.3. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$, $z(t)=f\left(\mathrm{e}^{2t}-1,\arctan t\right)$, 求 $z'(0)$.

错解. $z'(t)=f_x'\cdot\left(2\mathrm{e}^{2t}\right)+f_y'\cdot\dfrac{1}{1+t^2}\Rightarrow z'(0)=2f_x'(0,0)+\dfrac{1}{2}f_y'(0,0)$, 下求 $f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$, 由定义
$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)}{x}=0$$
$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)}{y}=0$$
那么 $z'(0)=0$.

错因: 只有函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数, 那么复合函数 $z=f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]$ 在点 (x,y) 的两个偏导数

才存在. 对于本题, 即外层函数 f 在 $(0,0)$ 可微, 才能使用链式求导法则.

先判断 f 在 $(0,0)$ 处是否可微,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^3}=\cos^2\theta\sin\theta\neq0$$

则 f 在 $(0,0)$ 处不可微, 于是

$$z'(0)=\lim_{t\to0}\frac{z(t)-z(0)}{t-0}=\lim_{t\to0}\frac{\left(\mathrm{e}^{2t}-1\right)^2\arctan t}{t\left[\left(\mathrm{e}^{2t}-1\right)^2+\arctan^2 t\right]}=\lim_{t\to0}\frac{4t^2}{4t^2+t^2+o(t^2)}=\frac{4}{3}.$$

例 5.1.4. 已知函数 $f(x,y)=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0;\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性与可微性.

连续性证明

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1-\mathrm{e}^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}=-\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$$

即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续;

可微性证明

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1-\mathrm{e}^{x^3}}{x^2}-0}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\mathrm{e}^{x^3}}{x^3}=-1=f_x'(0,0)$$

$$\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0=f_y'(0,0)$$

于是

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\dfrac{1-\mathrm{e}^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}-0-(-1)x-0}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1-\mathrm{e}^{x(x^2+y^2)}+x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\lim_{\rho\to0^+}\frac{1-\mathrm{e}^{\rho^3\cos\theta}+\rho^3\cos\theta}{\rho^3}$$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\frac{-\rho^3\cos\theta+\rho^3\cos\theta+o\left(\rho^3\cos\theta\right)}{\rho^3}=0$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

例 5.1.5. 设 $f'(0)=k$, 试证明 $\displaystyle\lim_{\substack{a\to0^-\\b\to0^+}}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k$.

证 用拟合法, $k=\dfrac{b}{b-a}\cdot k-\dfrac{a}{b-a}\cdot k$, 那么

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b}{b-a}\cdot\frac{f(b)-f(0)}{b-0}-\frac{a}{b-a}\cdot\frac{f(a)-f(0)}{a-0}$$

因为 $a<0<b$, 得 $\left|\dfrac{a}{b-a}\right|<1, \left|\dfrac{b}{b-a}\right|<1$.

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-k\right|\leqslant\left|\frac{b}{b-a}\right|\cdot\left|\frac{f(b)-f(0)}{b-0}-k\right|+\left|\frac{a}{b-a}\right|\cdot\left|\frac{f(a)-f(0)}{a-0}-k\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{f(b)-f(0)}{b-0}-k\right|+\left|\frac{f(a)-f(0)}{a-0}-k\right|\to0\ (a\to0^-,b\to0^+).$$

例 5.1.6. 讨论如下向量函数的连续性: 设 $(u,v)=F(x,y)=(f(x,y),g(x,y))$, 其中

$$u=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{(x^2+y^2)^\alpha}\ln(|x|+|y|), & \text{当 } x^2+y^2\neq 0 \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } x^2+y^2=0 \text{ 时}\end{cases}$$

$$v=g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{(x^2+y^2)^\alpha}\ln(|x|+|y|), & \text{当 } x^2+y^2\neq 0 \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } x^2+y^2=0 \text{ 时}\end{cases}.$$

显然 $f(x,y),g(x,y)$ 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时连续, 因此 $(x,y)\neq(0,0)$ 时 F 连续. 下面只研究 $(0,0)$ 点的情况, 因为

$$\begin{aligned}u^2+v^2&=\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{2\alpha}}\ln^2(|x|+|y|)=\left(x^2+y^2\right)^{1-2\alpha}\ln^2(|x|+|y|)\\&\to\begin{cases}0, & \text{当 } \alpha<\dfrac12 \text{ 时}\\ +\infty, & \text{当 } \alpha\geqslant\dfrac12 \text{ 时}\end{cases}\quad(r^2=x^2+y^2\to 0 \text{ 时}).\end{aligned}$$

故当且仅当 $\alpha<\dfrac12$ 时 F 在点 $(0,0)$ 连续, 下面对上式中的极限进行补充证明. 当 $\alpha\geqslant\dfrac12$ 时, 显然极限为 $+\infty$. 现设 $\alpha<\dfrac12$, 记 $\mu=1-2\alpha$, 则 $\mu>0$,

$$\left(x^2+y^2\right)^{1-2\alpha}\ln^2(|x|+|y|)=\frac{(x^2+y^2)^\mu}{(|x|+|y|)^{2\mu}}\cdot(|x|+|y|)^{2\mu}\ln^2(|x|+|y|)$$

这时

$$0\leqslant\frac{(x^2+y^2)^\mu}{(|x|+|y|)^{2\mu}}=\frac{(x^2+y^2)^\mu}{(x^2+2|x|\,|y|+y^2)^\mu}\leqslant\frac{(x^2+y^2)^\mu}{(x^2+y^2)^\mu}=1$$

但 $(|x|+|y|)^{2\mu}\ln^2(|x|+|y|)\to 0$, 所以

$$\left(x^2+y^2\right)^{1-2\alpha}\ln^2(|x|+|y|)\to 0\ (r\to 0).$$

5.1.3 二元函数的 Taylor 展开

定理 5.1.3 (二元函数的 Taylor 展开唯一性). 假设 $f(x,y)$ 具有 $n+1$ 阶连续偏导数, 若用某种方法得到展开式:

$$f(x,y)=\sum_{i+j=0}^{n}A_{ij}\left(x-x_0\right)^i\left(y-y_0\right)^j+o\left(\rho^n\right)$$

其中 $\rho=\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}$, 则必有

$$A_{ij}=\frac{C_{i+j}^i}{(i+j)!}\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}f(x,y)\bigg|_{(x_0,y_0)}=\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}f\left(x_0,y_0\right).$$

例 5.1.7. 设 $f(x,y)$ 连续, $f(0,0)=0$, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微且 $f_y'(0,0)=1$, 求

$$I=\lim_{x\to 0^+}\frac{\displaystyle\int_0^{x^3}\mathrm{d}t\int_{\sqrt[3]{t}}^{x}f(t,u)\mathrm{d}u}{1-\sqrt[3]{1-x^5}}.$$

当 $x\to 0^+$ 时, $1-\sqrt[3]{1-x^5}\sim\dfrac13x^5$, 考虑交换积分次序,

$$\int_0^{x^3}\mathrm{d}t\int_{\sqrt[3]{t}}^{x}f(t,u)\mathrm{d}u=\iint\limits_{\substack{0\leqslant t\leqslant x^3\\0\leqslant u\leqslant u}}f(t,u)\mathrm{d}t\mathrm{d}u=\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^{u^3}f(t,u)\mathrm{d}t$$

于是,

$$I=\lim_{x\to0+}\frac{\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^{u^3}f(t,u)\mathrm{d}t}{\frac{1}{3}x^5}\overset{L'}{=}3\lim_{x\to0+}\frac{\int_0^{x^3}f(t,x)\mathrm{d}t}{5x^4}\overset{L'}{=}3\lim_{x\to0+}\frac{3x^2f(x^3,x)}{20x^3}=\frac{9}{20}\lim_{x\to0+}\frac{f(x^3,x)}{x}$$

其中 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f(x^3,x)}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f(\xi,x)}{x}$, $\xi\in(0,x^3)$, 由二元函数的 *Taylor* 公式可得:

$$f(\xi,x)=f(0,0)+f'_x(0,0)\xi+f'_y(0,0)x+o(x)$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(\xi,x)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{f(0,0)+f'_x(0,0)\xi+f'_y(0,0)x+o(x)}{x}=\lim_{x\to0+}\left[\frac{f'_x(0,0)\xi}{x}+f'_y(0,0)+\frac{o(x)}{x}\right]=1$$

其中 $\left|\dfrac{f'_x(0,0)\xi}{x}\right|<\dfrac{f'_x(0,0)x^2}{x}\to0$, 于是原式 $=\dfrac{9}{20}$.

5.2 多元函数的偏导数

在多元函数中, 偏导数是描述函数对于各个自变量的变化率的概念. 对于一个多元函数 $f(\boldsymbol{x})$, 其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 对于第 i 个自变量 x_i 的偏导数记作 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, 表示在其他自变量保持不变的情况下, 函数 f 对于 x_i 的变化率.

5.2.1 偏导数与隐函数

偏导数

定义 5.2.1 (偏导数). 函数 f 对 x 在 (a,b) 处的偏导为:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}=f'_x(a,b)=\lim_{\square\to0}\frac{f(a+\square,b)-f(a,b)}{\square}=\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}.$$

例 5.2.1. 设 $z=uv$, $x=\mathrm{e}^u\cos v$, $y=\mathrm{e}^u\sin v$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

$\begin{cases}x=\mathrm{e}^u\cos v\\ y=\mathrm{e}^u\sin v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\\ v=\arctan\dfrac{y}{x}\end{cases}\Rightarrow z=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\cdot\arctan\dfrac{y}{x}$, 所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\cdot\frac{-y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\cdot\frac{x}{x^2+y^2}$$

例 5.2.2 (2012 数二). 设 $z=f\left(\ln x+\dfrac{1}{y}\right)$, 其中函数 $f(u)$ 可微, 求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

易得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-f'\cdot\dfrac{1}{y^2}$, 于是 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

例 5.2.3 (2015 数二). 设函数 $f(u,v)$ 满足 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$, 则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 与 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 依次是

A. $\dfrac{1}{2},0$ B. $0,\dfrac{1}{2}$ C. $-\dfrac{1}{2},0$ D. $0,-\dfrac{1}{2}$

法一: 令 $u=x+y,\ v=\dfrac{y}{x}$, 解得 $\begin{cases} x=\dfrac{u}{1+v} \\ y=\dfrac{uu}{1+v} \end{cases}$ 那么 $f(u,v)=\dfrac{u^2(1-v^2)}{(1+v)^2}=\dfrac{u^2(1-v)}{1+v}$, 于是

$$\frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{\substack{u=1\\v=1}}=\frac{2u(1-v)}{1+v}\bigg|_{\substack{u=1\\v=1}}=0,\ \frac{\partial f}{\partial v}\bigg|_{\substack{u=1\\v=1}}=\frac{-2u^2}{(1+v)^2}\bigg|_{\substack{u=1\\v=1}}=-\frac{1}{2}.$$

法二: 令 $u=x+y,\ v=\dfrac{y}{x}$, 当 $u=v=1$ 时, 解得 $x=y=\dfrac{1}{2}$, 方程 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$ 两边分别对 $x,\ y$ 求偏导数, 得

$$f'_u+f'_v\left(-\frac{y}{x^2}\right)=2x,\ f'_u+f'_v\frac{1}{x}=-2y$$

把 $x=y=\dfrac{1}{2}$ 代入上两式, 最终解得选 D.

例 5.2.4 (2009 数二). 设 $z=(x+\mathrm{e}^y)^x$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(1,0)}$.

由 $z=(x+\mathrm{e}^y)^x$, 得 $z(x,0)=(x+1)^x$, 那么

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(1,0)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+1)^x\bigg|_{x=1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{x\ln(x+1)}\bigg|_{x=1}=\mathrm{e}^{x\ln(x+1)}\left[\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}\right]\bigg|_{x=1}=2\ln 2+1.$$

例 5.2.5. 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数, 又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定: $\mathrm{e}^{xy}-xy=2$ 和 $\mathrm{e}^x=\displaystyle\int_0^{x-t}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, 由 $\mathrm{e}^{xy}-xy=2$ 可得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{y}{x}$, 方程 $\mathrm{e}^x=\displaystyle\int_0^{x-t}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 两边对 x 求导,

$$\mathrm{e}^x=\frac{\sin(x-z)}{x-z}\cdot\left(1-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1-\frac{\mathrm{e}^x(x-z)}{\sin(x-z)}$$

代入 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, 得 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial f}{\partial y}+\left[1-\dfrac{\mathrm{e}^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right]\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

例 5.2.6. 函数 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{|x|}{y}}$ 在 $(0,1)$ 处

A. $f'_x(0,1)=f'_y(0,1)=1$ B. $\mathrm{d}f\big|_{(0,1)}=\mathrm{d}y$

C. $\mathrm{d}f\big|_{(0,1)}=\mathrm{d}x$ D. $\mathrm{d}f\big|_{(0,1)}$ 不存在

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\left[x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{|x|}{y}}\right]=0$, 于是

$$\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(0+\Delta x,1)-f(0,1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{\Delta x+(1-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{\Delta x}{1}}}{\Delta x}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(0+\Delta x,1)-f(0,1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{\Delta x+(1-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{-\Delta x}{1}}}{\Delta x}=1$$

则 $f'_x(0,1)=1$, 同理可得 $f'_y(0,1)=0$, 并且

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{f(0+\Delta x,1+\Delta y)-f(0,1)-\left[f'_x(0,1)\Delta x+f'_y(0,1)\Delta y\right]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{\Delta x+(\Delta y)\arcsin\sqrt{\dfrac{|\Delta x|}{1+\Delta y}}-0-\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\arcsin\sqrt{\frac{|\Delta x|}{1+\Delta y}}\cdot\frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0\ \left(\arcsin\sqrt{\frac{|\Delta x|}{1+\Delta y}}\to0,\left|\frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\leqslant1\right)$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,1)$ 处可微, 所以 $\mathrm{d}f\big|_{(0,1)}=1\cdot\mathrm{d}x+0\cdot\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$, 选 C.

隐函数

定理 5.2.1 (隐函数存在定理 A). 设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数, 且

$$F(x_0,y_0,z_0)=0,\ F_z'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$$

则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内能确定唯一一个连续且具有连续导数的函数 $z=f(x,y)$, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}.$$

定理 5.2.2 (隐函数存在定理 B). 由方程组确定的隐函数的导数, 方程组

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}\tag{1}$$

两边同时对 x 求偏导可得

$$\begin{cases}F_x'+F_u'\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v'\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\ G_x'+G_u'\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v'\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}\tag{2}$$

若 $\begin{vmatrix}F_u' & F_v'\\ G_u' & G_v'\end{vmatrix}\neq 0$, 则方程组 (1) 确定了两个隐函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$, 且 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\ \dfrac{\partial v}{\partial x}$ 可由方程组 (2) 求出, 同理可得 $\dfrac{\partial u}{\partial y},\ \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

例 5.2.7. 设 $F(x,y,z)$ 连续可偏导, $F_y'\cdot F_z'\neq 0$, 且 $F(1,1,-2)=0$, 则在点 $(1,1,-2)$ 邻域内, 由 $F(x,y,z)=0$

A. 既可确定 x 为 y,z 的二元函数, 也可确定 y 为 x,z 的二元函数

B. 既可确定 x 为 y,z 的二元函数, 也可确定 z 为 x,y 的二元函数

C. 既可确定 y 为 x,z 的二元函数, 也可确定 z 为 x,y 的二元函数

D. 可确定 x 为 y,z 的二元函数, y 为 x,z 的二元函数, z 为 x,y 的二元函数

根据定理 5.2.1, $F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}$$

因此确定 z 为 x,y 的二元函数, 需要 $F_z'\neq 0$; 确定 x 为 y,z 的二元函数, 需要 $F_x'\neq 0$; 确定 y 为 x,z 的二元函数, 需要 $F_y'\neq 0$, 而 $F_y'\cdot F_z'\neq 0$ 得 $F_y'\neq 0$, $F_z'\neq 0$, 因此可确定 y 为 x,z 的二元函数, 也可确定 z 为 x,y 的二元函数, 故选 C.

例 5.2.8 (2018 数三). 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\ln z+\mathrm{e}^{z-1}=xy$ 确定, 求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}$.

法一： 求偏导，$\frac{1}{z}\cdot z'_x+\mathrm{e}^{z-1}\cdot z'_x=y$，代入 $x=2,y=\frac{1}{2},z=1$，求得 $z'_x\left(2,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

法二： 求全微分：$\frac{1}{z}\mathrm{d}z+\mathrm{e}^{z-1}\mathrm{d}z=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\Rightarrow\mathrm{d}z=\frac{yz}{1+z\mathrm{e}^{z-1}}\mathrm{d}x+\frac{xz}{1+z\mathrm{e}^{z-1}}\mathrm{d}y$，那么 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=\frac{1}{4}$.

法三： 公式法：令 $F(x,y,z)=\ln z+\mathrm{e}^{z-1}-xy$，那么 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=-\left.\frac{F'_x}{F'_y}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=\left.\frac{y}{\frac{1}{z}+\mathrm{e}^{z-1}}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=\frac{1}{4}$.

5.2.2 全微分形式不变性

定义 5.2.2 (全微分的定义). 设点 $P_0(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 定义域 D 的一个内点，如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的全增量 Δz 可表示为

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y-0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

其中 A, B 是与 Δx, Δy 无关的常量，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微，并称函数 $z=f(x,y)$ 的全增量 Δz 的线性主部 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的全微分，记作

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y\ \ (\mathrm{d}x=\Delta x,\ \mathrm{d}y=\Delta y)$$

当函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微时，有

$$\mathrm{d}z=f'_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f'_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y.$$

定理 5.2.3 (全微分的形式不变性). 设函数 $z=f(u,v),u=\varphi(x,y)$ 及 $v=\psi(x,y)$ 分别具有连续偏导数，则 $z=f(u,v)$ 的全微分

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

若把 u 和 v 视为中间变量，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 的全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

不论是 u 和 v 自变量还是中间变量，以上微分形式保持不变，这一性质称为一阶全微分形式不变性.

例 5.2.9. 设 $f(x,y)=x\cos\frac{x}{y}+(2-y)\ln\arctan\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$，求 $f'_x(0,2)$.

利用全微分不变性，

$$\mathrm{d}f(x,y)=\cos\frac{x}{y}\mathrm{d}x-x\sin\frac{x}{y}\cdot\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}-\ln\arctan\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

因为 $\mathrm{d}f(0,2)=\mathrm{d}x-\ln\arctan(-1)\mathrm{d}y$，所以 $f_x(0,2)=1$.

例 5.2.10. 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x-2z=\mathrm{e}^{y+3z}-1$ 所确定的函数，求 $2\frac{\partial z}{\partial x}-3\frac{\partial z}{\partial y}$.

由全微分的形式不变性，得 $\mathrm{d}x-2\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{y+3z}(\mathrm{d}y+3\mathrm{d}z)$，即

$$\mathrm{d}z=\frac{1}{3\mathrm{e}^{y+3z}+2}\mathrm{d}x-\frac{\mathrm{e}^{y+3z}}{3\mathrm{e}^{y+3z}+2}\mathrm{d}y$$

于是 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{3\mathrm{e}^{y+3z}+2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\mathrm{e}^{y+3z}}{3\mathrm{e}^{y+3z}+2}$，那么 $2\frac{\partial z}{\partial x}-3\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

例 5.2.11. 设 $\mathrm{e}^x - xyz = 0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

由方程 $\mathrm{e}^x - xyz = 0$ 两边分别求微分, 得

$$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x - yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z = 0$$

整理得, $\mathrm{d}z = \dfrac{yz-\mathrm{e}^x}{xy}\mathrm{d}x - \dfrac{z}{y}\mathrm{d}y$, 由全微分不变性, 得 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{yz-\mathrm{e}^x}{xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{z}{y}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{yz-\mathrm{e}^x}{xy}\right) = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial x} - \mathrm{e}^x}{y} = \frac{yz-\mathrm{e}^x(1+xy)}{xy^2}.$$

例 5.2.12. 设 $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y}$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

由方程 $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y}$ 两边分别求微分, 得

$$\frac{z\mathrm{d}x - x\mathrm{d}z}{z^2} = \frac{y}{z}\cdot\frac{y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}y}{y^2}$$

整理得, $\mathrm{d}z = \dfrac{z}{x+z}\mathrm{d}x + \dfrac{z^2}{y(x+z)}\mathrm{d}y$, 由全微分不变性, 得 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{z}{x+z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z^2}{y(x+z)}$.

例 5.2.13. 设 $z + \mathrm{e}^z = xy$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

由方程 $z+\mathrm{e}^z = xy$ 两边分别求微分, 得

$$\mathrm{d}z + \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

整理得, $\mathrm{d}z = (y-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$, 由全微分不变性, 得 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y - \mathrm{e}^x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y-\mathrm{e}^x) = 1.$$

例 5.2.14. 设 $z = z(x,y)$ 是由 $z\mathrm{e}^x = xy$ 所确定的函数, 求 $\mathrm{d}z$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

由方程 $z\mathrm{e}^x = xy$ 两边分别求微分, 得

$$\mathrm{e}^x\mathrm{d}z + z\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

整理得, $\mathrm{d}z = \dfrac{y-z\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}y$, 由全微分不变性, 得 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y-z\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-z\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(1-\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{e}^x\right) = \frac{1-x}{\mathrm{e}^x}.$$

例 5.2.15 (2006 年江苏省高等数学竞赛题). 已知由 $x = z\mathrm{e}^{y+z}$ 可确定 $z = z(x,y)$, 求 $\mathrm{d}z|_{(\mathrm{e},0)}$.

由方程 $x = z\mathrm{e}^{y+z}$ 两边分别求微分, 得

$$\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{y+z}\mathrm{d}z + z\mathrm{e}^{y+z}(\mathrm{d}z + \mathrm{d}y)$$

整理得, $\mathrm{d}z = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{y+z}(1+z)} - \dfrac{z}{1+z}\mathrm{d}y$, 所以 $\mathrm{d}z|_{(\mathrm{e},0)} = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}\mathrm{d}x - \dfrac{1}{2}\mathrm{d}y$.

例 5.2.16 (2015 数二). 若函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 所确定, 求 $\mathrm{d}z|_{(0,0)}$.

由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 两边分别求微分, 得

$$\mathrm{e}^{x+2y+3z}(\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y + 3\mathrm{d}z) + yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z = 0$$

整理得, $\mathrm{d}z = -\dfrac{\mathrm{e}^{x+2y+3z}+yz}{3\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xy}\mathrm{d}x - \dfrac{2\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xz}{3\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xy}\mathrm{d}y$, 所以 $\mathrm{d}z|_{(0,0)} = -\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x - \dfrac{2}{3}\mathrm{d}y$.

例 5.2.17 (2016 数一). 设函数 $f(u,v)$ 可微, $z = z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z,y)$ 确定, 求 $\mathrm{d}z|_{(0,1)}$.

由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 两边分别求微分，得

$$z\mathrm{d}x+(x+1)\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x\cdot f(x-z,y)+x^2\left[f_1'(\mathrm{d}x-\mathrm{d}z)+f_2'\mathrm{d}y\right]$$

整理得，$\mathrm{d}z=\dfrac{2xf(x-z,y)+x^2f_1'-z}{x+1}\mathrm{d}x+\dfrac{2y+x^2f_2'}{x+1}\mathrm{d}y$，所以 $\mathrm{d}z|_{(0,1)}=-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$.

例 5.2.18 (第九届数学竞赛决赛). 设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且满足

$$\mathrm{d}f(x,y)=y\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+x(1+y)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$$

及 $f(0,0)=0$，求 $f(x,y)$.

对方程 $\mathrm{d}f(x,y)=y\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+x(1+y)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$ 两边积分，有 $f(x,y)=xy\mathrm{e}^y+C$，又 $f(0,0)=0$，所以 $f(x,y)=xy\mathrm{e}^y$.

例 5.2.19 (2021 数一). 设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,\mathrm{e}^x)=x(x+1)^2$，$f\big(x,x^2\big)=2x^2\ln x$，则 $\mathrm{d}f(1,1)$

A. $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$ B. $\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$ C. $\mathrm{d}y$ D. $-\mathrm{d}y$

由题意 $\begin{cases}f_1'(x+1,\mathrm{e}^x)+\mathrm{e}^xf_2'(x+1,\mathrm{e}^x)=(x+1)^2+2x(x+1)\\ f_1'\big(x,x^2\big)+2xf_2'\big(x,x^2\big)=4x\ln x+2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1\\ f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f_1'(1,1)=0\\ f_2'(1,1)=1\end{cases}$，因此

$$\mathrm{d}f(1,1)=f_1'(1,1)\mathrm{d}x+f_2'(1,1)\mathrm{d}y=\mathrm{d}y$$

故选 C.

例 5.2.20. 设函数 $f(x,y)$ 可微且 $\begin{cases}f(x+1,\ln(x+1))=(x+1)^3+x\ln(x+1)(x+1)^{\ln(x+1)}\\ f\big(x^2,x-1\big)=x^4\mathrm{e}^{x-1}+(x-1)\big(x^2-1\big)x^{2(x-1)}\end{cases}$ 则 $\mathrm{d}f(1,0)$

A. $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$ B. $\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$ C. $2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$ D. $\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y$

令 $g(x)=x\ln(x+1)(x+1)^{\ln(x+1)}$，$h(x)=(x-1)\big(x^2-1\big)x^{2(x-1)}$，那么

$$\begin{cases}f(x+1,\ln(x+1))=(x+1)^3+g(x)\\ f\big(x^2,x-1\big)=x^4\mathrm{e}^{x-1}+h(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f_1'(x+1,\ln(x+1))+\dfrac{1}{x+1}f_2'(x+1,\ln(x+1))=3(x+1)^2+g'(x)\\ 2xf_1'\big(x^2,x-1\big)+f_2'\big(x^2,x-1\big)=4x^3\mathrm{e}^{x-1}+x^4\mathrm{e}^{x-1}+h'(x)\end{cases}$$

则 $\begin{cases}f_1'(1,0)+f_2'(1,0)=3+g'(0)\\ 2f_1'(1,0)+f_2'(1,0)=5+h'(1)\end{cases}$ 其中

$$g'(0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{g(o+\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\ln(\Delta x+1)(\Delta x+1)^{\ln(\Delta x+1)}=0$$
$$h'(1)=\lim_{\Delta x\to1}\frac{h(1+\Delta x)-h(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\left[(1+\Delta x)^2-1\right](1+\Delta x)^{2\Delta x}=0$$

所以 $\begin{cases}f_1'(1,0)+f_2'(1,0)=3\\ 2f_1'(1,0)+f_2'(1,0)=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f_1'(1,0)=2\\ f_2'(1,0)=1\end{cases}\Rightarrow\mathrm{d}f(1,0)=f_1'(1,0)\mathrm{d}x+f_2'(1,0)\mathrm{d}y=2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y.$

5.2.3 复合函数微分法 (链式法则)

对自变量作变量替换

例 5.2.21 (2023 四川大学). 设 $x=u+v^2,y=u^2-v^3,z=2uv$，求 $\left.\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{u=2\\v=1}}$.

对方程组 $\begin{cases} x = u + v^2 \\ y = u^2 - v^3 \end{cases}$ 等式两边同时对 x 求导得

$$\begin{pmatrix} 1 & 2v \\ 2u & -3v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \left(\frac{3v}{3v+4u}, \frac{2u}{3v^2+4uv}\right)$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{6v^3 + 4u^2}{3v^2 + 4uv}$$

再对上式两边的 y 求偏导，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{8u\left(4uv+3v^2\right) - \left(6v^3+4u^2\right)\cdot(4v)}{\left(4uv+3v^2\right)^2} \frac{2}{4u+3v} + \frac{18v^2 \cdot \left(4uv+3v^2\right) - \left(6v^3+4u^2\right)\cdot(4u+6v)}{\left(4uv+3v^2\right)^2} \cdot \frac{-1}{4uv+3v^2}$$

代入 $u=2, v=1$，可得 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{u=2 \\ v=1}} = \dfrac{26}{121}$.

例 5.2.22. 试用关系 $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v = \arctan\dfrac{y}{x}$, 将 $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ 变成关于 u, v 的方程.

依赖关系如图 5.2.1 所示，

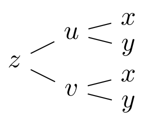


图 5.2.1

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{-y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{x}{x^2+y^2}$$

于是

$$\begin{aligned}(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} &= (x+y)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{-y}{x^2+y^2}\right) - (x-y)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{x}{x^2+y^2}\right) \\ &= \left(\frac{x^2+xy}{x^2+y^2} - \frac{xy-y^2}{x^2+y^2}\right)\frac{\partial z}{\partial u} + \left(\frac{-xy-y^2}{x^2+y^2} - \frac{x^2-xy}{x^2+y^2}\right)\frac{\partial z}{\partial v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0.\end{aligned}$$

例 5.2.23. 试用关系 $u = x^2 - y^2, v = 2xy$, 将 $\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$ 变成关于 u, v 的方程.

依赖关系如图 5.2.2 所示，于是有

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2x\frac{\partial W}{\partial u} + 2y\frac{\partial W}{\partial v} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = 2x\frac{\partial}{\partial u} + 2y\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\frac{\partial W}{\partial u} + 2y\frac{\partial W}{\partial v}\right) = 2\frac{\partial W}{\partial u} + 2x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right) + 2y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right) = 2x\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right) + 2y\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right) = 2x\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + 2y\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v}$$

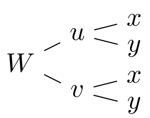


图 5.2.2

同理

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right) = 2x\frac{\partial^2 W}{\partial v \partial u} + 2y\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}$$

故

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 2\frac{\partial W}{\partial u} + 4x^2\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + 4xy\frac{\partial^2 W}{\partial v \partial u} + 4xy\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} + 4y^2\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -2\frac{\partial W}{\partial u} + 4y^2\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} - 4xy\frac{\partial^2 W}{\partial v \partial u} - 4xy\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} + 4x^2\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}$$

两式相加得

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = (4x^2+4y^2)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} = 0.$$

例 5.2.24. 试将方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 变换为极坐标的形式.

因为 $z=z(x,y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 所以依赖关系如图 5.2.3 所示, 于是有

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta,\quad \frac{\partial z}{\partial \theta}=-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta$$

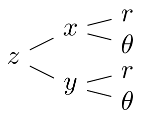


图 5.2.3

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{1}{r}\sin\theta,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{1}{r}\cos\theta$$

即

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta},\quad \frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\\&=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{1}{r}\sin\theta\right)-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{1}{r}\sin\theta\right)\\&=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\cos^2\theta-\frac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial r}\frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\\&\quad-\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}\frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{1}{r}\sin^2\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}\frac{1}{r^2}\sin^2\theta+\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

同理, 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=&\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\sin^2\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}\frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial r}\frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\\&+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{1}{r}\cos^2\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}\frac{1}{r^2}\cos^2\theta-\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

将上述结果代入原方程, 化简即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}=0.$$

例 5.2.25. 设 $u=x+y$, $v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, 试用 u, v 作新自变量变换方程

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

(假设出现的二阶偏导数都连续.)

依赖关系如图 5.2.4 所示,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)+\frac{2}{x^3}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{2}{x^3}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{1}{x^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \tag{1}$$

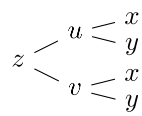


图 5.2.4

同理有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{2}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{1}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \tag{2}$$

并且

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)-\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\\&=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x^2y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \qquad (3)\end{aligned}$$

将式 (1)、(2)、(3) 代入 $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 化简得

$$uv(uv-4)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+2v\frac{\partial z}{\partial v}=0.$$

例 5.2.26. z 为 x,y 的可微函数, 试将方程

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$$

变成 $w=w(u,v)$ 的方程, 假设

$$x=u,\ y=\frac{u}{1+uv},\ z=\frac{u}{1+uw}.$$

已知 $z=\dfrac{u}{1+uw}$, $w=w(u,v)$, $u=x$, $v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}$, 于是存在关系如图 5.2.5 所示,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{1+uw-uw}{(1+uw)^2}+\frac{-u^2}{(1+uw)^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 1+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1-u^2\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\cdot\dfrac{1}{x^2}\right)}{(1+uw)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-u^2}{(1+uw)^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)=\frac{u^2}{(1+uw)^2y^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}$$

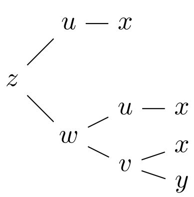


图 5.2.5

于是

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2-u^2\left(x^2\dfrac{\partial w}{\partial u}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\right)}{(1+uw)^2}+\frac{u^2}{(1+uw)^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{u^2}{(1+uw)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{u^2}-\frac{\partial w}{\partial u}\cdot x^2=1\Rightarrow\frac{\partial w}{\partial u}=0.$$

例 5.2.27. 取 u, v 为新的自变量, 而 $w=w(u,v)$ 为新函数, 变化下列方程:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\ u=x+y,\ v=\frac{y}{x},\ w=\frac{z}{x}.$$

由已知得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=1,\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{x^2},\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{x},\ \frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{z}{x^2},\ \frac{\partial w}{\partial y}=0,\ \frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{x}$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot x+w=\left(\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot x+w=x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}+w$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\frac{\partial w}{\partial y}=x\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)=x\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}$$

令 $R=\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=w-\left(1+\frac{y}{x}\right)\frac{\partial w}{\partial v}$, 于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial R}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial R}{\partial v}\left(-\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left[w-(1+v)\frac{\partial w}{\partial v}\right]\left(-\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}(1+v)^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$$

由于 $x\neq 0,\ 1+v\neq 0$, 故原方程变为 $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$.

例 5.2.28. 取 u, v 为新的自变量, 而 $w=w(u,v)$ 为新函数, 变化下列方程:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(1+\frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\ u=x,\ v=x+y,\ w=x+y+z.$$

由已知得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1,\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=1$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-1+\frac{\partial w}{\partial x}=-1+\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=-1+\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-1+\frac{\partial w}{\partial y}=-1+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-1+\frac{\partial w}{\partial v}$$

令 $R=\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}$, 于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial R}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}$$

$$\frac{y}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-1\right)=\left(\frac{v}{u}-1\right)\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right]=\left(\frac{\partial v}{\partial u}-1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

将上述结果代入原方程得 $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$.

例 5.2.29. 取 u, v 为新的自变量, 而 $w=w(u,v)$ 为新函数, 变化下列方程:

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\ x=\sin u,\ y=\sin v,\ z=\mathrm{e}^w.$$

由已知

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}}=\sec u,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v}=\sec v$$

$$\frac{\partial z}{\partial w}=\mathrm{e}^w\cdot\frac{\partial w}{\partial x}=\mathrm{e}^w\cdot\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^w\sec u\frac{\partial w}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^w\sec v\frac{\partial w}{\partial v}$$

于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial w^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^w\sec u\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\mathrm{e}^w\sec u\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^w\sec^2 u\left[\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\tan u\frac{\partial w}{\partial u}\right]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\mathrm{e}^w\sec^2 v\left[\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\tan v\frac{\partial w}{\partial v}\right]$$

将上述结果代入原方程, 并注意到 $1-x^2=\cos^2 u,\ 1-y^2=\cos^2 v$, 化简即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=0.$$

求变换中的常数

例 5.2.30. 设变换 $\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + ay \end{cases}$，可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 化简为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 求常数 a, 其中 $z = z(x, y)$ 具有连续的二阶偏导数.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} = -2\dfrac{\partial z}{\partial u} + a\dfrac{\partial z}{\partial v}$, 由此得到

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -2\frac{\partial}{\partial u} + a\frac{\partial}{\partial v}$$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(-2\frac{\partial}{\partial u} + a\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(-2\frac{\partial z}{\partial u} + a\frac{\partial z}{\partial v}\right) = 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4a\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(-2\frac{\partial z}{\partial u} + a\frac{\partial z}{\partial v}\right) = -2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}
\end{aligned}$$

由 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 得 $(10+5a)\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + (6+a-a^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$, 于是有 $\begin{cases} 10+5a \neq 0 \\ 6+a-a^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3.$

例 5.2.31. 设函数 $z = z(u, v)$ 有连续 2 阶导数, 并且变换 $u = x + 2y, v = x + ay$ 能将方程 $2z''_{xx} + z''_{xy} - z''_{yy} = 0$ 变成 $z''_{uv} = 0$, 求 a.

因为 $z = z(u, v)$, $u = x + 2y$, $v = x + ay$, 所以依赖关系如图 *5.2.4* 所示, 那么有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial n} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$$

同理有

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2\frac{\partial z}{\partial u} + a\frac{\partial z}{\partial v}$$

于是

$$z''_{xx} = z''_{uu} + z''_{vv}, \; z''_{xy} = 2z''_{uu} + az''_{vv}, \; z''_{yy} = 4z_{uu} + a^2 z''_{vv}$$

因此

$$0 = 2z''_{xx} + z''_{xy} - z''_{yy} = (2 + a - a^2)z''_{vv} = (1+a)(2-a)z''_{vv}$$

得 $a = -1$ 或 $a = 2$, 但 $a = 2$ 不合题意, 否则 $u = x + 2y = v$, 整个 xOy 平面将变成 $u = v$ 的一条直线, 将不可逆, 故 $a = -1$.

5.2.4 高阶全微分

定义 5.2.3 (二阶全微分). 设函数 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 x_0 处可微, 则

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$$

若函数 f 在开集 D 上的每一点都可微, 则对于给定的 $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n$, 全微分 $\mathrm{d}y$ 是 D 上的一个 n 元函数:

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$$

若 f 在 D 上有二阶连续偏导数, 则 $\mathrm{d}y$ 就有一阶连续偏导数, 于是函数 $\mathrm{d}y$ 继续可微, 它的微分记作 d^2y, 称为 f 的二阶微分.

定义 5.2.4 (高阶全微分). 二阶微分实际上仍然是函数的全微分, 因此我们只需按照全微分的定义按部就班地计算二阶微分:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 y=\mathrm{d}(\mathrm{d} y)=\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \mathrm{~d} x_i\right) & =\sum_{i=1}^n \mathrm{~d}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right) \mathrm{d} x_i \\ & =\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i} \mathrm{~d} x_j\right) \mathrm{d} x_i=\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i} \mathrm{~d} x_j \mathrm{~d} x_i \end{aligned}$$

用同样的方法可以继续定义三阶微分. 于是用数学归纳法可以定义 k 阶全微分:

$$\mathrm{d}^k y=\mathrm{d}\left(\mathrm{d}^{k-1} y\right)$$

但是随着阶数的增加, 计算复杂度呈指数级增长, 为了使得形式上的简洁, 我们可以把一阶全微分等式的右侧看作一个算子对 y 作用:

$$\begin{aligned} \mathrm{d} y & =\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathrm{~d} x_1+\frac{\partial}{\partial x_2} \mathrm{~d} x_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n} \mathrm{~d} x_n\right) y \\ \mathrm{d}^k y & =\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathrm{~d} x_1+\frac{\partial}{\partial x_2} \mathrm{~d} x_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n} \mathrm{~d} x_n\right)^k y \end{aligned}$$

这里的算子

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathrm{~d} x_1+\frac{\partial}{\partial x_2} \mathrm{~d} x_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n} \mathrm{~d} x_n\right) .$$

定理 5.2.4. 当 x 与 y 是独立的自变量时 $\mathrm{d}^2 x=\mathrm{d}(\mathrm{d} x)=0,\ \mathrm{d}^2 y=\mathrm{d}(\mathrm{d} y)=0$.

例 5.2.32. 已知 $x^2+2 x y-y^2=a^2$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{~d} x^2}$.

法一: 设 $F(x, y)=x^2+2 x y-y^2-a^2=0$, 则

$$\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{~d} x}=-\frac{F_x^{\prime}}{F_y^{\prime}}=-\frac{2 x+2 y}{2 x-2 y}=\frac{y+x}{y-x}$$

那么

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{~d} x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} x}\left(\frac{y+x}{y-x}\right)=\frac{\left(y^{\prime}+1\right)(y-x)-\left(y^{\prime}-1\right)(y+x)}{(y-x)^2}=\frac{2 y-2 x y^{\prime}}{(y-x)^2}=\frac{2 y^2-4 x y-2 x^2}{(y-x)^3}=\frac{2 a^2}{(x-y)^3} .$$

法二: 对等式两边全微分, 有

$$2 x \mathrm{~d} x+2 y \mathrm{~d} x+2 x \mathrm{~d} y-2 y \mathrm{~d} y=0 \Rightarrow x \mathrm{~d} x+y \mathrm{~d} x+x \mathrm{~d} y-y \mathrm{~d} y=0$$

对上式再微分一次, 并注意到 $\mathrm{d}^2 x=0$, 于是

$$\mathrm{d} x^2+0+\mathrm{d} y \mathrm{~d} x+0+\mathrm{d} x \mathrm{~d} y+x \mathrm{~d}^2 y-\mathrm{d} y^2-y \mathrm{~d}^2 y=0 \Rightarrow \mathrm{d} x^2+2 \mathrm{~d} x \mathrm{~d} y-\mathrm{d} y^2+(x-y) \mathrm{d}^2 y=0$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{~d} x^2}=\frac{1+2 \frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{~d} x}-\left(\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{~d} x}\right)^2}{y-x}=\frac{1+2\left(\frac{y+x}{y-x}\right)-\left(\frac{y+x}{y-x}\right)^2}{y-x}=\frac{2 a^2}{(x-y)^3} .$$

5.2.5 高阶偏导数

例 5.2.33. 设函数 $u=f\left(\ln \sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

试求函数 f 的表达式.

令 $t=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$，于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=f'(t)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=f'(t)\cdot\frac{x}{x^2+y^2}\\\frac{\partial u}{\partial y}&=f'(t)\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=f'(t)\cdot\frac{y}{x^2+y^2}\\\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}&=f''(t)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2+f'(t)\cdot\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=f''(t)\cdot\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2+f'(t)\cdot\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{aligned}$$

于是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(t)\cdot\frac{1}{x^2+y^2}=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\Rightarrow f''(t)=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{5}{2}}=\mathrm{e}^{5t}$$

两边积分两次得 $f(t)=\dfrac{1}{25}\mathrm{e}^{5t}+C_1t+C_2$.

例 5.2.34. 已知 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+2y\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$，其中 f，φ 皆为二次可微函数.

(1) 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(2) 当 $f=\varphi$，且 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-by^2$ 时，求 $f(y)$.

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{y}{x}f'\left(\dfrac{y}{x}\right)+2\varphi'\left(\dfrac{x}{y}\right)$，那么

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+2\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\right]=-\frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{2x}{y^2}\varphi''\left(\frac{x}{y}\right).$$

(2) 当 $f=\varphi$，$x=a$ 时

$$I=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-\frac{y}{a^2}f''\left(\frac{y}{a}\right)-\frac{2a}{y^2}f''\left(\frac{a}{y}\right)=-by^2$$

令 $y=au$ 得 $I=u^3f''(u)+2f''\left(\dfrac{1}{u}\right)=a^3bu^4$，用 $\dfrac{1}{u}$ 替换 u 得 $J=\dfrac{1}{u^3}f''\left(\dfrac{1}{u}\right)+2f''(u)=\dfrac{a^3b}{u^4}$，联立 I 和 J，消去 $f''\left(\dfrac{1}{u}\right)$ 得 $f''(u)=\dfrac{1}{3}a^3b\left(\dfrac{2}{u^4}-u\right)$，两次积分得

$$f(u)=\frac{1}{9}a^3b\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{2}u^3\right)+C_1u+C_2$$

所以 $f(y)=\dfrac{1}{9}a^3b\left(\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{2}y^3\right)+C_1y+C_2$，其中 C_1，C_2 是常数.

例 5.2.35. 若函数 $f(x,y,z)$ 满足 $f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)$，则称它为 n 次齐次函数，试证可微的 n 次齐次函数满足关系式:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf.$$

证 由于 f 可微，且 $f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)$，那么有

$$xf_1'+yf_2'+zf_3'=nt^{n-1}f(x,y,z)$$

令 $t=1$，即得等式.

例 5.2.36. 设 $u=f(z)$，其中 z 为方程式

$$z=x+y\varphi(z)$$

所定义的变量 (为 x 和 y 的隐函数). 证明 Lagrange 公式

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\varphi^n(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

证 u 是 x,y 的复合函数, 存在依赖关系如图 5.2.6 所示,
由隐函数求导法则, 可得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\varphi(z)}{1-y\varphi'(z)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1-y\varphi'(z)}$, 用数学归纳法, 当 $n=1$ 时,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f'(z)\varphi(z)}{1-y\varphi'(z)}$$

同理可得, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{f'(z)}{1-y\varphi'(z)}$, 所以有 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi(z)\dfrac{\partial u}{\partial x}$, 这就是待证式当 $n=1$ 时的情况. 现假设当 $n-1$ 时等式成立, 来证明对 n 的情况也成立. 事实上,

$$u - z \begin{matrix} \diagup\, x \\ \diagdown\, y \end{matrix}$$

图 5.2.6

$$\begin{aligned}I&=\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial y^{n-1}}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}\left[\varphi^{n-1}(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi^{n-1}(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\\&=\frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}\left[(n-1)\varphi^{n-2}(z)\cdot\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi^{n-1}(z)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right]\end{aligned}$$

$$J=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\varphi^{n-1}(z)\frac{\partial u}{\partial y}\right]=\frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}\left[(n-1)\varphi^{n-2}(z)\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\varphi^{n-1}(z)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right]$$

由于 $z_y'=\varphi(z)z_x'$ 及 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi(z)\dfrac{\partial u}{\partial x}$, 有 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}$, 故 $I=J$, 等式成立.

例 5.2.37. 若 $u=\dfrac{x+y}{x-y}$, 求 $\left.\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}\right|_{(2,1)}$.

因为 $u=1+\dfrac{2y}{x-y}$, 所以

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m}=(-1)^m\frac{m!2y}{(x-y)^{m+1}}=-2m!\left[\frac{1}{(y-x)^m}+\frac{x}{(y-x)^{m+1}}\right]$$

由于

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+1}u}{\partial x^m\partial y}&=-2m!\left[\frac{-m}{(y-x)^{m+1}}+\frac{-(m+1)x}{(y-x)^{m+2}}\right]\\\frac{\partial^{m+2}u}{\partial x^m\partial y^2}&=-2m!\left[(-1)^2\frac{m(m+1)}{(y-x)^{m+2}}+(-1)^2\frac{(m+1)(m+2)x}{(y-x)^{m+3}}\right]\\&\ \vdots\\\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}&=-2m!\left[(-1)^n\frac{m(m+n-1)!}{(y-x)^{m+n}}+(-1)^n\frac{(m+n)!x}{(y-x)^{m+n+1}}\right]\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}\right|_{(2,1)}&=-2m!\left[(-1)^n\frac{m(m+n-1)!}{(-1)^{m+n}}+(-1)^n\frac{2(m+n)!}{(-1)^{m+n+1}}\right]\\&=2(-1)^m(m+n-1)!(2m+2n-m)=2(-1)^m(m+n-1)!(m+2n).\end{aligned}$$

5.2.6 偏微分方程

例 5.2.38. 已知可微函数 $f(u,v)$ 满足

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}=2(u-v)\mathrm{e}^{-(u+v)}$$

且 $f(u,0)=u^2\mathrm{e}^{-u}$,

(1) 记 $g(x,y)=f(x,y-x)$, 求 $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}$;

(2) 求 $f(u,v)$ 的表达式.

(1) 由题意, $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(x,y-x)}{\partial x}=f'_u-f'_v=2(u-v)\mathrm{e}^{-(u+v)}=2(2x-y)\mathrm{e}^{-y}$

(2) 由 *(1)* 可知, $f(x,y-x)=g(x,y)=\displaystyle\int 2(2x-y)\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x+\varphi(y)=\frac{1}{2}(2x-y)^2\mathrm{e}^{-y}+\varphi(y)$, 令 $x=y=u$, 得

$$f(u,0)=\frac{1}{2}u^2\mathrm{e}^{-y}+\varphi(u)=u^2\mathrm{e}^{-u}$$

于是 $\varphi(u)=\dfrac{1}{2}u^2\mathrm{e}^{-u}$, 再令 $x=u, y-x=v$, 那么 $f(u,v)=\left(u^2+v^2\right)\mathrm{e}^{-(u+v)}$.

例 5.2.39. 设函数 $u=u(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数, 并且满足等式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

(1) 证明: 用变量代换 $\xi=x-y$, $\eta=x+y$ 可将上式转化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$;

(2) 求满足 $u(x,2x)=x$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x,2x)}=x^2$ 和 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 的函数 $u(x,y)$.

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\dfrac{\partial \xi}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\dfrac{\partial \eta}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$, 于是 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$, 同理可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

又 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 故得证 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

(2) 由 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$ 两边对 η 积分得 $\dfrac{\partial y}{\partial \xi}=f(\xi)$, 两边再对 ξ 积分得

$$u(\xi,\eta)=\int f(\xi)\mathrm{d}\xi+g(\eta)=F(\xi)+g(\eta)$$

又 $\xi=x-y$, $\eta=x+y$, 于是 $u(x,y)=F(x-y)+g(x+y)$, 则 $u(x,2x)=F(-x)+g(3x)=x$,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x,2x)}=F'(-x)+g'(3x)=x^2\Rightarrow -F(-x)+\frac{1}{3}g(3x)=\frac{1}{3}x^3+C$$

于是 $\begin{cases}F(-x) & + & g(3x) & = & x\\ -F(-x) & + & \dfrac{1}{3}g(3x) & = & \dfrac{1}{3}x^3+C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F(x) & = & -\dfrac{1}{4}x & + & \dfrac{1}{4}x^3 & + & C\\ g(x) & = & \dfrac{1}{4}x & + & \dfrac{1}{108}x^3 & + & C\end{cases}$, 故

$$u(x,y)=F(x-y)+g(x+y)=\frac{(x+y)^3}{108}+\frac{(x-y)}{4}+\frac{1}{2}y.$$

5.3 极值

5.3.1 二元函数的极值

定理 5.3.1 (二元函数取极值的必要条件). 可偏导的二元函数 $f(x,y)$ 在 (a,b) 取极值的必要条件是

$$f'_x(a,b)=0\ f'_y(a,b)=0$$

称点 (a,b) 为 $f(x,y)$ 的驻点.

定理 5.3.2 (二元函数取极值的充分条件). 若 $f(x,y)$ 在 (a,b) 处二阶偏导函数连续, (a,b) 是 $f(x,y)$ 的驻点, 令

$$A=f''_{xx}(a,b),\ B=f''_{xy}(a,b),\ C=f''_{yy}(a,b)$$

(1) 当 $\Delta=B^2-AC<0,\ A>0$ 时, $f(a,b)$ 为极小值;

(2) 当 $\Delta=B^2-AC<0,\ A<0$ 时, $f(a,b)$ 为极大值;

(3) 当 $\Delta=B^2-AC>0$ 时, $f(a,b)$ 不是 f 的极值;

例 5.3.1 (2009 数二). 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$, 则点 $(0,0)$

A. 不是 $f(x,y)$ 的连续点　　B. 不是 $f(x,y)$ 的极值点

C. 是 $f(x,y)$ 的极大值点　　D. 是 $f(x,y)$ 的极小值点

$A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=1,\ B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0,\ C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$, 又在点 $(0,0)$ 处, $B^2-AC<0,\ A>0$, 故 $(0,0)$ 为函数 $z=f(x,y)$ 的一个极小值点, 选 D.

例 5.3.2 (2009 数一). 求二元函数 $f(x,y)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$ 的极值.

令 $\begin{cases}f'_x(x,y)=2x\left(2+y^2\right)=0\\ f'_y(x,y)=2x^2y+\ln y+1=0\end{cases}$, 解得驻点 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$, 因此

$$A=f''_{xx}\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=4+2y^2\Big|_{(0,\frac{1}{\mathrm{e}})}=4+\frac{2}{\mathrm{e}^2},\ B=f''_{xy}(x,y)=4xy\Big|_{(0,\frac{1}{\mathrm{e}})}=0,\ C=f''_{yy}(x,y)=2x^2+\frac{1}{y}\Big|_{(0,\frac{1}{\mathrm{e}})}=\mathrm{e}$$

则 $B^2-AC=-4\mathrm{e}-\dfrac{2}{\mathrm{e}}<0$, 又 $A>0$, 从而 $f\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值, 极小值为 $f\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

例 5.3.3. 求函数 $f(x,y)=3(x-2y)^2+x^3-8y^3$ 的极值, 并证明 $f(0,0)=0$ 不是 $f(x,y)$ 的极值.

由 $\begin{cases}f'_x= & 3x^2 & +6x & -12y=0\\ f'_y= & -24y^2 & +24y & -12x=0\end{cases}\Rightarrow$ 驻点 $\begin{cases}P_1(-4,2)\\ P_2(0,0)\end{cases}$, 且

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x+6\ B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-12\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-48y+24$$

在 P_1 处 $A=-18,\ B=-12,\ C=-72,\ \Delta=-1152<0$, 且 $A<0$, 所以 $f(-4,2)=64$ 为极大值; 在 P_2 处 $A=6,\ B=-12,\ C=24,\ \Delta=0$, 所以不能用 Δ 来证明 $f(0,0)$ 不是极值, 下面用极值的定义来判断, 任取 $(0,0)$ 的去心邻域

$$U_\delta^\circ=\left\{(x,y)\mid 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta\right\}$$

(1) 在 $y=0$ 上, 取 $(x_n,y_n)=\left(\dfrac{1}{n},0\right)(n\in\mathbb{N}^*)$, 则当 n 充分大时, 显然有 $(x_n,y_n)\in U_\delta^\circ$, 且

$$f\left(x_n,y_n\right)=f\left(\frac{1}{n},0\right)=\frac{1}{n^2}\left(3+\frac{1}{n}\right)>0$$

(2) 在 $x=ky(0<k<2)$ 上, 有 $f(ky,y)=\left(k^3-8\right)y^2\left(y-\dfrac{3(2-k)}{4+2k+k^2}\right)$, 故取 $y=\dfrac{4(2-k)}{4+2k+k^2}(>0)$ 时 $f(ky,y)=\left(k^3-8\right)y^2\dfrac{2-k}{4+2k+k^2}<0$, 即取

$$\left(x_k,y_k\right)=\left(\frac{4k(2-k)}{4+2k+k^2},\frac{4(2-k)}{4+2k+k^2}\right)$$

时有

$$f\left(x_k,y_k\right)=f\left(\frac{4k(2-k)}{4+2k+k^2},\frac{4(2-k)}{4+2k+k^2}\right)$$

$$=\left(k^3-8\right)\frac{16(2-k)^3}{\left(4+2k+k^2\right)^3}=-\frac{16(2-k)^4}{\left(4+2k+k^2\right)^2}<0$$

又因为

$$\lim_{k\to 2^-}\left(x_k,y_k\right)=\lim_{k\to 2^-}\left(\frac{4k(2-k)}{4+2k+k^2},\frac{4(2-k)}{4+2k+k^2}\right)=(0,0)$$

所以当 k 小于 2 且充分接近 2 时, $(x_k,y_k)\in U_\delta^\circ$. 由上述 *(1)* 和 *(2)* 可得, 在 $P_2(0,0)$ 的任意小邻域 U_δ° 内, 既存在点 (x_n,y_n), 使得 $f\left(x_n,y_n\right)>0$, 也存在点 (x_k,y_k), 使得 $f\left(x_k,y_k\right)<0$, 故 $f(0,0)=0$ 不是极值.

定理 5.3.3 (Hesse 矩阵与极值定理). 设 P_0 为稳定点, 若在 P_0 处 Hesse 矩阵

$$\boldsymbol{H}(P_0)=\begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & \cdots & f''_{x_1x_n}\\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & \cdots & f''_{x_2x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \cdots & f''_{x_nx_n}\end{pmatrix}$$

为正定的, 则 f 在 P_0 处取极小值; 若 $\boldsymbol{H}\left(P_0\right)$ 为负定的, 则 f 在 P_0 处取极大值; 若 $\boldsymbol{H}\left(P_0\right)$ 为不定的, 则 f 在 P_0 处无极值. 关于正定性的介绍可阅读定理 14.2.1.

例 5.3.4. 求函数 $f(x,y)=x^4+y^4-(x+y)^2$ 的极值.

令 $\begin{cases} f'_x(x,y)=4x^3-2(x+y)=0\\ f'_y(x,y)=4y^3-2(x+y)=0\end{cases}$ 解得驻点 $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$, $P_3(-1,-1)$, 又

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2-2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y^2-2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-2$$

由 *Hesse* 矩阵 $\boldsymbol{H}(P_1)=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{H}(P_2)=\begin{pmatrix}10 & -2\\ -2 & 10\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{H}(P_3)=\begin{pmatrix}10 & -2\\ -2 & 10\end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{H}(P_1)$ 不定, 故 $(0,0)$ 不是极值点; $\boldsymbol{H}(P_2)$ 正定, 故 $(1,1)$ 为极小值点; $\boldsymbol{H}(P_3)$ 正定, 故 $(-1,-1)$ 为极小值点, 综上, f 的极小值为 $f(1,1)=f(-1,-1)=-2$.

例 5.3.5 (2004 数一). 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数, 求 $z=z(x,y)$ 的极值点与极值.

在 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 两边对 x, y 求偏导, 得 $\begin{cases} 2x-6y-2y\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ -6x+20y-2z-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}-2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 令 $\begin{cases} z'_x=0\\ z'_y=0\end{cases}$,

得 $\begin{cases} x=3y\\ z=y\end{cases}$ 代入 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 得 $\begin{cases} x=9\\ y=3\\ z=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-9\\ y=-3\\ z=-3\end{cases}$ 并且

$$\begin{aligned}
0=&2-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\\
0=&-6-2\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\\
0=&20-2\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{H}(P_1)=\left.\begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy}\\ z''_{yx} & z''_{yy}\end{pmatrix}\right|_{(9,3,3)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{3}\end{pmatrix}$ 正定, 故点 $(9,3)$ 是 $z(x,y)$ 的极小值点, 极小值为 $z(9,3)=3$, 同理可得 $\boldsymbol{H}(P_2)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{3}\end{pmatrix}$ 负定, 从而点 $(-9,-3)$ 是 $z(x,y)$ 的极大值点, 极大值为 $z(-9,-3)=-3$.

例 5.3.6 (2012 数一). 求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

法一: 令 $\begin{cases} f_x'(x,y)=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}-x^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0 \\ f_y'(x,y)=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0 \end{cases}$ 解得驻点 $P_1(1,0)$, $P_2(-1,0)$, 且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-3xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+x^3e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+xy^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+x^2ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

由 Hesse 矩阵 $\boldsymbol{H}(P_1)=\begin{pmatrix}-2e^{-\frac12} & 0\\ 0 & -e^{-\frac12}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{H}(P_2)=\begin{pmatrix}2e^{-\frac12} & 0\\ 0 & e^{-\frac12}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{H}(P_1)$ 负定, 故 $(1,0)$ 为极大值点; $\boldsymbol{H}(P_2)$ 正定, 故 $(-1,0)$ 为极大值点, 因此 f 的极大值为 $f(1,0)=e^{-\frac12}$; 极小值为 $f(-1,0)=-e^{-\frac12}$.

法二: 在驻点 $(1,0)$ 处,

$$A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,0)}=-2e^{-\frac12},\ B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=0,\ C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,0)}=-e^{-\frac12}$$

由于 $AC-B^2=2e^{-1}>0$, 且 $A<0$, 故 $(1,0)$ 为极大值点, $f(1,0)=e^{-\frac12}$ 为极大值; 在驻点 $(-1,0)$ 处,

$$A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(-1,0)}=2e^{-\frac12},\ B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(-1,0)}=0,\ C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(-1,0)}=e^{-\frac12}$$

由于 $AC-B^2=2e^{-1}>0, A>0$, 故 $(-1,0)$ 为极小值点, $f(-1,0)=-e^{-\frac12}$ 为极小值.

例 5.3.7 (2015 数二). 已知函数 $f(x,y)$ 满足 $f_{xy}''(x,y)=2(y+1)e^x$, $f_x'(x,0)=(x+1)e^x$, $f(0,y)=y^2+2y$, 求 $f(x,y)$ 的极值.

方程 $f_{xy}''(x,y)=2(y+1)e^x$ 两边对 y 求积分, 得 $f_x'=e^x(y+1)^2+\varphi(x)$, 并令 $y=0$, 与 $f_x'(x,0)=(x+1)e^x$ 对比得 $\varphi(x)=xe^x$, 那么 $f_x'(x,y)=e^x(y+1)^2+xe^x$, 两边再对 x 求积分, 得

$$f(x,y)=(y+1)^2e^x+(x-1)e^x+\psi(y)$$

又 $f(0,y)=y^2+2y$, 得 $\psi(y)=0$, 则 $f(x,y)=(y+1)^2e^x+(x-1)e^x$, 因此 $\begin{cases} f_x'=(y+1)^2e^x+xe^x=0\\ f_y'=2(y+1)e^x=0\end{cases}$ 得 $x=0$, $y=-1$, 且 $f_{xx}''=(y+1)^2e^x+(x+1)e^x$, $f_{xy}''=2(y+1)e^x$, $f_{yy}''=2$, 则 $\boldsymbol{H}(0,-1)=\left.\begin{pmatrix}z_{xx}'' & z_{xy}''\\ z_{yx}'' & z_{yy}''\end{pmatrix}\right|_{(0,-1)}$ 正定, 于是 $f(x,y)$ 在 $(0,-1)$ 处取得极小值, $f(0,-1)=-1$.

例 5.3.8 (2023 数一). 求函数 $f(x,y)=\left(y-x^2\right)\left(y-x^3\right)$ 的极值.

法一: 令 $\begin{cases} f_x'(x,y)=5x^4-3x^2y-2xy=0\\ f_y'(x,y)=2y-x^3-x^2=0\end{cases}$ 解得驻点为 $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$, $P_3\left(\frac23,\frac{10}{27}\right)$, 且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=20x^3-6xy-2y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3x^2-2x=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

由 Hesse 矩阵得 $\boldsymbol{H}(P_1)=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$ 为不定, 故 $(0,0)$ 非极值点; $\boldsymbol{H}(P_2)=\begin{pmatrix}12&-5\\-5&2\end{pmatrix}$ 为不定, 故 $(1,1)$ 非极值点; $\boldsymbol{H}(P_3)=\begin{pmatrix}\frac{100}{27} & -\frac83\\ -\frac83 & 2\end{pmatrix}$ 为正定, 故 $\left(\frac23,\frac{10}{27}\right)$ 为极小值点, 且函数的极小值为 $f\left(\frac23,\frac{10}{27}\right)=-\frac{4}{27^2}$.

法二: 计算二阶偏导以及二阶混合偏导, 有

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2y-6xy+20x^3$$
$$B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2x-3x^2, C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$$

(i) 当驻点为 $(x,y)=(0,0)$ 时, 有 $A=0,B=0,C=2$, 此时 $AC-B^2=0$, 多元函数取得极值的充分条件失效, 由 $f(x,y)=\left(y-x^2\right)\left(y-x^3\right)$ 可知 $f(0,0)=0$, 取 $y=2x^2$, 当 x 为充分小的正数时, $f(x,y)=x^4(2-x)>0$; 取 $y=2x^3$, 当 x 为充分小的正数时, $f(x,y)=x^5(2x-1)<0$, 由极值点的定义可知, $(0,0)$ 点不是 $f(x,y)$ 的极值点;

(ii) 当驻点为 $(x,y)=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{10}{27}\right)$ 时, 有

$$A=\frac{100}{27},B=-\frac{8}{3},C=2$$

则 $AC-B^2=\dfrac{100}{27}\cdot 2-\left(-\dfrac{8}{3}\right)^2=\dfrac{8}{27}>0$ 且 $A=\dfrac{100}{27}>0$, 故 $f(x,y)$ 在 $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{10}{27}\right)$ 取得极小值;

(iii) 当驻点为 $(x,y)=(1,1)$ 时, 有

$$A=12,B=-5,C=2$$

此时 $AC-B^2=12\cdot 2-(-5)^2=-1$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处不取极值, 综上可知, $f(x,y)$ 仅有一个极小值点 $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{10}{27}\right)$ 且取得极小值为

$$f\left(\frac{2}{3},\frac{10}{27}\right)=\left(\frac{10}{27}-\frac{4}{9}\right)\left(\frac{10}{27}-\frac{8}{27}\right)=-\frac{4}{729}.$$

5.3.2 条件极值

二元函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值. 构造 Lagrange 函数:

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=\varphi(x,y)=0\end{cases}$$

解得满足方程组所有点 (x,y), 即为可能的极值点, 然后再逐一判定.

单项链等法

当目标函数 $f(x,y,z)=mx^ay^bz^c\ \ (mabc\neq 0)$ 时, 可构造出相等的项, 将其放在等号一边使其连等, 消除 λ.

例 5.3.9. 设 $x,\ y,\ z>0$, 求 $f(x,y,z)=8xyz$, 在条件 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ \ (a,b,c>0)$ 下的最大值.

$F(x,y,z,\lambda)=8xyz+\lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right)$, 那么

$$\begin{cases}F'_x=8yz+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0\xrightarrow{\text{乘 }x}-8xyz=\dfrac{2\lambda x^2}{a^2}\\ F'_y=8xz+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0\xrightarrow{\text{乘 }y}-8xyz=\dfrac{2\lambda y^2}{b^2}\\ F'_z=8xy+\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0\xrightarrow{\text{乘 }z}-8xyz=\dfrac{2\lambda z^2}{c^2}\\ F'_\lambda=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0\end{cases}$$

由此可得 $\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\\ y=\dfrac{b}{\sqrt{3}}\\ z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}\end{cases}$, 故 $f_{max}=\dfrac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

齐次构造法

如果目标函数 f 是齐次的, 同时约束条件可以转化成齐次函数 $g(x,y,z)=c$ 的形式. 若此时目标函数 $f(x,y,z)$ 为 m 次齐次函数, $g(x,y,z)$ 为 n 次齐次函数 $(m,n\neq 0)$, 则可以构造出这个式子: $f(x,y,z)=-\dfrac{cn}{m}\lambda$, 此时再求出 λ 的值即可求出目标函数 $f(x,y,z)$ 的最值.

例 5.3.10 (2010 数三)**.** 求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值.

令 $F(x,y,z,\lambda)=xy+2yz+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-10\right)$, 解方程组 $\begin{cases}F_x'=2\lambda x+y=0\\ F_y'=2\lambda y+x+2z=0\\ F_z'=2\lambda z+2y=0\\ F_\lambda'=x^2+y^2+z^2-10=0\end{cases}$ 那么

$$\frac{x}{2}\cdot F_x'+\frac{y}{2}\cdot F_y'+\frac{z}{2}\cdot F_z'=0\Rightarrow xy+2yz=-10\lambda$$

由于 x,y,z 全为 0 显然不成立, 因此 $\begin{vmatrix}2\lambda&1&0\\1&2\lambda&2\\0&2&2\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda=0,\pm\dfrac{\sqrt5}{2}$, 故 $u_{min}=-5\sqrt5$, $u_{max}=5\sqrt5$.

多约束条件

例 5.3.11 (2019 数一)**.** 已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6\\4x+2y+z=30\end{cases}$ 求 C 上的点到 xOy 坐标平面的距离的最大值.

设 $P(x,y,z)\in C$, 到 xOy 坐标平面的距离为 $d=|z|$, 则目标函数 $f(x,y,z)=z^2$, 约束函数为 $x^2+2y^2-z-6=0$ 及 $4x+2y+z-30=0$, 则构造 *Lagrange* 函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda\left(x^2+2y^2-z-6\right)+\mu(4x+2y+z-30)=0$$

所以 $\begin{cases}F_x'=2\lambda x+4\mu=0\\F_y'=4\lambda y+2\mu=0\\F_z'=2z-\lambda+\mu=0\\F_\lambda'=x^2+2y^2-z-6=0\\F_\mu'=4x+2y+z-30=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=1\\z=12\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-8\\y=-2\\z=66\end{cases}$ 得驻点 $(4,1,12)$ 和 $(-8,-2,66)$, 故曲线 C 上的点到 xOy 坐标平面的距离的最大值 $d_{max}=66$.

三角代换

例 5.3.12. 求 $f(x,y)=3x^2-2xy+2y^2$ 在单位圆周 $x^2+y^2=1$ 上的最大值和最小值.

令 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$, 那么 $f(\theta)=3\cos^2\theta+2\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac12\left[5-\sqrt5\sin(2\theta-\varphi)\right]$, 其中 $\varphi=\arctan\dfrac12$, 由 $\theta\in[0,2\pi]$ 可知 $2\theta-\varphi\in[-\varphi,4\pi-\varphi]$, 所以 $\sin(2\theta-\varphi)\in[-1,1]$, 故 $f_{max}=\dfrac{5+\sqrt5}{2}$, $f_{min}=\dfrac{5-\sqrt5}{2}$.

5.3.3 多元函数的最值问题

求连续函数在有界闭域 D 上最值的步骤:

(1) 求 D 内的驻点和不可导点;

(2) 用求极值的方法求 D 的边界上最值的可疑点;

(3) 比较这些点的函数值的大小.

例 5.3.13 (2005 数二). 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$, 并且 $f(1,1)=2$, 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

由 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$ 知, $\frac{\partial f}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-2y$, 那么 $f(x,y)=x^2-y^2+C$, 又 $f(1,1)=2$, 求得 $C=2$, 因此 $f(x,y)=x^2-y^2+2$, 那么 $f''_{xx}=2$, $f''_{xy}=0$, $f''_{yy}=-2$, 令 $f'_x=0$, $f'_y=0$, 得可疑极值点 $P(0,0)$, 所以 $\boldsymbol{H}(P)=\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}$ 不定, $P(0,0)$ 不是极值点, 从而也非最值点,

再考虑边界情况, $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上的情形, 作 *Lagrange* 函数 $F(x,y,\lambda)=x^2-y^2+2+\lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right)$, 那么

$$\begin{cases}F'_x=2x(\lambda+1)=0\\ F'_y=\dfrac{y(\lambda-4)}{2}=0\\ F'_\lambda=x^2+\dfrac{y^2}{4}-1=0\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=0\\y=\pm2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\pm1\\y=0\end{cases}$ 代入 $f(x,y)$, 得 $f(0,\pm2)=-2$, $f(\pm1,0)=3$, 综上, $z=f(x,y)$ 在区域 D 上的最大值为 3, 最小值为 -2.

5.4 方向导数与梯度

方向导数和梯度是多元函数微积分中与偏导数密切相关的概念, 用于描述函数在某一点处的变化率和最大增长率.

5.4.1 方向导数的计算

定义 5.4.1 (方向导数). 设 $\boldsymbol{l}$ 是空间的常向量, P_0 是定点, 动点 P 使得 $\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\boldsymbol{l}$ 方向相同, 则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}\xlongequal{\text{def}}\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)-f(P_0)}{|P_0P|}.$$

定理 5.4.1 (方向导数的计算). 设 $f(x,y,z)$ 在点 (a,b,c) 处可微, 则函数 $f(x,y,z)$ 在点 (a,b,c) 处沿任一方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数存在, 且若 $\boldsymbol{l}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, 则有计算公式

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(a,b,c)}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b,c)}\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b,c)}\cos\beta+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(a,b,c)}\cos\gamma$$

例 5.4.1 (2017 数一). 函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $\boldsymbol{n}=\{1,2,2\}$ 的方向导数为

A. 12　　B. 6　　C. 4　　D. 2

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2,0)}=4$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,2,0)}=1$, $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,2,0)}=0$, 且 $\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right\}$, 因此 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}=4\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}+0\times\frac{2}{3}=2.$

例 5.4.2 (1996 数一). 求函数 $u=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数.

$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2}$, $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,0,1)}=0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2}$, 方向 $\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$, 方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=\frac{-2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{1}{3}$, 那么 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+0\times\frac{-2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$.

例 5.4.3. 求函数 $u=\mathrm{e}^{xy}+x^2yz$ 在点 $(1,2,1)$ 处沿 x 轴负方向的方向导数.

由公式

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(a,b,c)}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b,c)}\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b,c)}\cos\beta+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(a,b,c)}\cos\gamma$$

其中 $(a,b,c)=(1,2,1)$, $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(-1,0,0)$ 且 $f'_x=y\mathrm{e}^{xy}+2yzx$, 所以方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{1,2,1}=f'_x(1,2,1)\cos\alpha=-\left(2\mathrm{e}^2+4\right).$$

例 5.4.4. 求函数 $u=xy^2z^3$ 处沿曲面 $x^2+y^2=5$ 的外法向的方向导数.

已知 $F=x^2+y^2-5=0$, $\boldsymbol{l}=2(x,y,0)$, 故曲面在 P 的外法向的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\gamma=0$$

并且

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right|_P=(y^2z^3,2xyz^3,2xy^2z^2)|_P=(-4,-4,12)$$

于是

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_P=u'_x(P)\cos\alpha+u'_y(P)\cos\beta+u'_z(P)\cos\gamma=-\frac{4}{\sqrt{5}}-\frac{8}{\sqrt{5}}+0=-\frac{12}{\sqrt{5}}.$$

5.4.2 梯度的计算

定理 5.4.2 (方向导数与梯度的关系). 设 $f(x,y,z)$ 在点 (a,b,c) 处可微, 则函数 $f(x,y,z)$ 在点 (a,b,c) 处沿梯度

$$\mathbf{grad}\,f|_{(a,b,c)}=\left(f'_x(a,b,c),f'_y(a,b,c),f'_z(a,b,c)\right)$$

的方向导数取最大值, 且其值为梯度的模, 即

$$\max_{l}\left\{\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(a,b,c)}\right\}=|\mathbf{grad}\,f|_{(a,b,c)}|=\sqrt{\left(f'_x(a,b,c)\right)^2+\left(f'_y(a,b,c)\right)^2+\left(f'_z(a,b,c)\right)^2}$$

例 5.4.5 (2012 数一). 求 $\left.\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\right|_{(2,1,1)}$.

由梯度的定义 $\mathbf{grad}\,f(x,y,z)=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\}$, 那么 $\left.\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\right|_{(2,1,1)}=\left.\left(y,x-\frac{z}{y^2},\frac{1}{y}\right)\right|_{(2,1,1)}=\{1,1,1\}$, 或 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

例 5.4.6 (1992 数一). 函数 $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\mathbf{grad}\,u|_M$.

$$\mathbf{grad}\,u|_M=\left.\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k})\right|_{(1,2,-2)}=\frac{2}{9}\{1,2,-2\}.z$$

例 5.4.7 (2015 数一). 已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$, 曲线 $C:x^2+y^2+xy=3$, 求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

函数 f 在点 (x,y) 处的最大方向导数为

$$\sqrt{{f_x'}^2+{f_y'}^2}=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$$

构造 *Lagrange* 函数 $F(x,y,\lambda)=(1+y)^2+(1+x)^2+\lambda\left(x^2+y^2+xy-3\right)$，所以 $\begin{cases}F_x'=\lambda(2x+y)+2x+2=0\\F_y'=\lambda(x+2y)+2y+2=0\\F_\lambda'=x^2+y^2+xy-3=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$，代入 $\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$ 中，得 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数为 3.

例 5.4.8. 已知 a,b 为实数，函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点 $(3,4)$ 的方向导数中沿方向 $\boldsymbol{l}=-3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ 的方向导数最大，且最大值为 10.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 求曲面 $z=2+ax^2+by^2\ (z\geqslant 0)$ 的面积.

(1) 函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点 $(3,4)$ 的梯度为

$$\mathbf{grad}\, z\Big|_{3,4}=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Big|_{(3,4)}=(6a,8b)$$

因沿梯度的方向导数取最大值，其值等于梯度的模，所以有

$$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\Big|_{(3,4)}=\left|\mathbf{grad}\, z\Big|_{(3,4)}\right|=10\Rightarrow \boldsymbol{l}^0=\left(\frac{6a}{10},\frac{8b}{10}\right)=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$$

于是 $a=-1,\ b=-1$.

(2) 曲面 $z=2-x^2-y^2\ (z\geqslant 0)$ 是由 yOz 平面上的曲线 $y=\sqrt{2-z}\ (0\leqslant z\leqslant 2)$ 绕 z 轴旋转而成，于是所求曲面的面积为

$$S=2\pi\int_0^2 y\sqrt{1+(y'(z))^2}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^2\sqrt{2-z}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{2\sqrt{2-z}}\right)^2}\mathrm{d}z=\pi\int_0^2\sqrt{9-4z}\mathrm{d}z=-\frac{\pi}{6}(9-4z)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{13}{3}\pi.$$

第 6 章

多元函数积分学

“给我最大快乐的，不是已懂得知识，而是不断的学习；
不是已达到的高度，而是继续不断的攀登.”
——高斯

多元函数积分学是微积分的另一个重要分支, 主要研究多元函数的积分、重积分、曲线积分、曲面积分等概念. 以下是多元函数积分学的几个重要内容和概念:

1. 重积分: 对于二元函数 $f(x,y)$, 它的重积分表示在平面区域上对函数的积分, 可以用来计算平面区域上的面积、质量、质心等物理量. 重积分可以分为二重积分和三重积分, 分别对应于在平面区域和立体区域上的积分.

2. 曲线积分: 对于矢量值函数 $\mathbf{F}(x,y,z)$ 和曲线 C, 曲线积分表示矢量场沿曲线的积分, 可以用来计算矢量场沿曲线的功、流量等物理量. 曲线积分可以分为第一类曲线积分和第二类曲线积分, 分别对应于标量场和矢量场的情况.

3. 曲面积分: 对于矢量值函数 $\mathbf{F}(x,y,z)$ 和曲面 S, 曲面积分表示矢量场通过曲面的积分, 可以用来计算矢量场通过曲面的流量、通量等物理量. 曲面积分可以分为第一类曲面积分和第二类曲面积分, 分别对应于标量场和矢量场的情况.

4. Green 公式、Stokes 公式和 Gauss 公式: 这三个公式分别是描述平面区域、曲线和曲面上积分之间关系的重要定理. Green 公式将平面区域的积分与曲线的积分联系起来, Stokes 公式将曲面的积分与曲线的积分联系起来, Gauss 公式将立体区域的积分与曲面的积分联系起来.

多元函数积分学在物理学、工程学、地理学等领域有着广泛的应用, 例如在电磁场分析、流体力学、地形分析等方面都需要用到多元函数积分学的知识. 通过学习多元函数积分学, 可以更深入地理解多元函数在空间中的积分性质.

6.1 重积分

重积分是对多元函数在一个区域上进行积分的过程. 在二维空间中, 重积分可以是对平面区域上的函数进行积分; 在三维空间中, 重积分可以是对立体区域上的函数进行积分.

6.1.1 重积分定义

二重积分

定义 6.1.1 (二重积分). 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数, 将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$, 其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域, 也表示它的面积, 在每个 $\Delta\sigma_i$ 上取一点 (ξ_i,η_i), 作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\ \ (i=1,2,\cdots,n)$, 并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$, 如果当各小闭区域的直径中的最大值 λ 趋近于零时, 这和式极限存在, 则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在闭区间 D 上的二重积分, 记作 $\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, 即

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

其中 $\mathrm{d}\sigma$ 称为面积元.

例 6.1.1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{2n^4}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} i^2\sin\dfrac{j\pi}{2n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2\sin\frac{j\pi}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\sin\left(j\frac{\pi}{2n}\right)=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin y\mathrm{d}y=\frac{1}{3}.$$

例 6.1.2 (2010 数一). 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$.

由二重积分的定义

$$\begin{aligned}I&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n\left(1+\frac{i}{n}\right)n^2\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{(1+x)(1+y^2)}=\ln 2\cdot\arctan 1.\end{aligned}$$

例 6.1.3. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{(n+1)(n+2)}$.

利用二重积分的定义, 得

$$\begin{aligned}I&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\\&=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

三重积分

定义 6.1.2 (三重积分). 设 $f(x,y,z)$ 是空间闭区域 Ω 上的有界函数, 将 Ω 任意分成 n 个小区域 $\Delta v_1, \Delta v_2, \cdots, \Delta v_n$, 其中 Δv_i 表示第 i 个小区域, 也表示它的体积, 在每个 Δv_i 上取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i), 作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$, 并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$, 如果当各小区域的直径中的最大值 λ 趋近于零时, 这和式极限存在, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在闭区间 Ω 上的三重积分, 记作 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$, 即

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

其中 $\mathrm{d}v$ 称为体积元.

例 6.1.4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{2n^5}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} i^2\sin\dfrac{\pi j}{2n}\cos\dfrac{k}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\sin\frac{\pi j}{2n}\cos\frac{k}{n} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_0^1\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)\mathrm{d}y\int_0^1\cos z\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3\pi}\cdot\sin 1 = \frac{\sin 1}{3}.$$

重积分大小的比较

比较二重积分的大小, 本质上涉及用二重积分的不等式性质和函数的单调性进行分析讨论.

例 6.1.5 (2005 数一). 设 $I_1 = \iint\limits_{D}\cos\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$, $I_2 = \iint\limits_{D}\cos\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma$, $I_3 = \iint\limits_{D}\cos\left(x^2+y^2\right)^2\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D = \left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant 1\right\}$, 则

A. $I_3 > I_2 > I_1$ B. $I_1 > I_2 > I_3$ C. $I_2 > I_1 > I_3$ D. $I_3 > I_1 > I_2$

在区域 $D = \left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant 1\right\}$ 上有 $0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1$, 从而有

$$0\leqslant\left(x^2+y^2\right)^2\leqslant x^2+y^2\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 1<\frac{\pi}{2}$$

又因为 $\cos x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上为单调递减函数, 于是

$$0\leqslant\cos\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\cos\left(x^2+y^2\right)\leqslant\cos\left(x^2+y^2\right)^2$$

于是 $I_3 > I_2 > I_1$, 选 A.

例 6.1.6. 设区域 $D = \left\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2\right\}, I_1 = \iint\limits_{D}(x+y)\mathrm{d}\sigma, I_2 = \iint\limits_{D}\sin(x+y)\mathrm{d}\sigma$, 则下列结论正确的是

A. $8\pi > I_1 > I_2$ B. $8\pi\geqslant I_1\geqslant I_2$ C. $I_1 > 8\pi > I_2$ D. $I_1\geqslant 8\pi\geqslant I_2$

作出积分区域后可分析 $x+y$ 的取值范围，

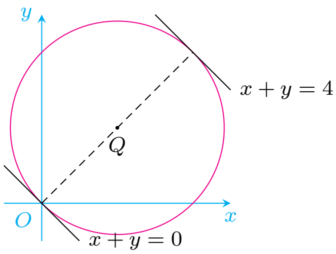


图 6.1.1

由图 *6.1.1* 易知，$0 \leqslant x+y \leqslant 4$，所以 $x+y \geqslant \sin(x+y)$，但取等的条件为 $(x,y)=(0,0)$，而在该点出的二重积分为 *0*，因此

$$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}\sigma > \iint\limits_D \sin(x+y)\mathrm{d}\sigma$$

排除 B、D 选项，又因为当 $x+y=4$ 时，有

$$4\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = 8\pi$$

并且同样地在 $(2,2)$ 点处的二重积分为 0，因此 $8\pi > I_1$，故选 A.

例 6.1.7. 设 $I_1 = \iint\limits_D \dfrac{x+y}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_2 = \iint\limits_D \sqrt{\dfrac{x+y}{4}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_3 = \iint\limits_D \sqrt[3]{\dfrac{x+y}{4}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，且

$$D = \left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant 2\right\}$$

则有

A. $I_1 < I_2 < I_3$　　B. $I_2 < I_3 < I_1$　　C. $I_3 < I_1 < I_2$　　D. $I_3 < I_2 < I_1$

由图 *6.1.1* 知，$0 < \dfrac{x+y}{4} < 1$，且 $\dfrac{x+y}{4} < \sqrt{\dfrac{x+y}{4}} < \sqrt[3]{\dfrac{x+y}{4}}$，因此 $I_1 < I_2 < I_3$，选 A.

例 6.1.8 (2019 数二). 已知平面区域 $D = \left\{(x,y)\middle||x|+|y| \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right\}$，记 $I_1 = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_2 = \iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_3 = \iint\limits_D \left(1-\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则

A. $I_3 < I_2 < I_1$　　B. $I_2 < I_1 < I_3$　　C. $I_1 < I_2 < I_3$　　D. $I_2 < I_3 < I_1$

作出积分区域 D:

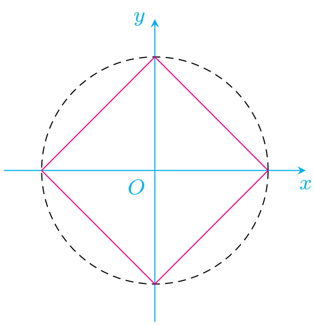


图 6.1.2

在区域 D 上，有 $0 \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$，那么

$$\sin\sqrt{x^2+y^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$$

下面比较 $1-\cos\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $\sin\sqrt{x^2+y^2}$，令 $u=\sqrt{x^2+y^2} \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，那么

$$1-\cos\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2} = 1-\cos u-\sin u = 1-\sqrt{2}\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right) \leqslant 0$$

故 $1-\cos\sqrt{x^2+y^2} \leqslant \sin\sqrt{x^2+y^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$，所以 $I_3 < I_2 < I_1$，选 A.

6.1.2 重积分的计算及相关方法

重积分的性质

例 6.1.9 (1993 年数三). 设 $f(x,y)$ 连续, 且

$$f(x,y)=xy+\iint\limits_{D} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其中 D 是由 $y=0,y=x^2,x=1$ 所围成区域, 求 $f(x,y)$.

设 $A=\iint\limits_{D} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, 则 $f(x,y)=xy+A$, 等式两边分别积分, 得

$$A=\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}(xy+A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(xy+A)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^5+Ax^2\right)\mathrm{d}x=\frac{4A+1}{12}$$

即 $A=\frac{1}{8}$, 于是 $f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$.

例 6.1.10. 计算二重积分 $\iint\limits_{D} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi,a>0)$ 与 x 轴围成的区域.

因为 $y=a(1-\cos t)$, $\mathrm{d}x=a(1-\cos t)\mathrm{d}t$, 于是

$$\iint\limits_{D} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)}y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi a}y^3(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}a^4(1-\cos t)^4\mathrm{d}t=\frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^4\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\frac{t}{2}=u}\frac{a^4}{3}\cdot 2^4\cdot 2\int_0^{\pi}\sin^8 u\mathrm{d}u=\frac{a^4}{3}\cdot 2^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 u\mathrm{d}u=\frac{a^4}{3}\cdot 2^6\cdot\frac{1\times3\times5\times7}{2\times4\times6\times8}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{35\pi}{12}a^4.$$

例 6.1.11. 设 D 由 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 x 围成, 求 $\iint\limits_{D}(x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

$$I=\iint\limits_{D}(x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)}(x+2y)\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}(xy+y^2)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\left[(t-\sin t)(1-\cos t)^2+(1-\cos t)^3\right]\mathrm{d}t$$

令 $I_1=\int_0^{2\pi}t(1-\cos t)^2\mathrm{d}t$, $I_2=\int_0^{2\pi}\sin t(1-\cos t)^2\mathrm{d}t$, $I_3=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\mathrm{d}t$, 则

$$I_1=\int_0^{2\pi}t\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^2\mathrm{d}t\xlongequal{\frac{t}{2}=u}16\int_0^{\pi}u\cdot\sin^4 u\mathrm{d}u\xlongequal{\int_0^{\pi}x\cdot f(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x}16\pi\cdot\frac{1\times3}{2\times4}\cdot\frac{\pi}{2}=3\pi^2$$

$$I_3=\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^3\mathrm{d}t=8\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{t}{2}\mathrm{d}t\xlongequal{\frac{t}{2}=u}32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 u\mathrm{d}u=32\times\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\cdot\frac{\pi}{2}=5\pi$$

且 $I_2=\int_0^{2\pi}\sin t(1-\cos t)^2\mathrm{d}t\xlongequal[\text{偶倍奇零}]{u=\pi-t}0$, 故 $I=I_1-I_2+I_3=3\pi^2+5\pi$.

运用分部积分法

例 6.1.12. 计算 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_1^{\sqrt{y}}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\mathrm{d}x$.

由分部积分公式,

$$I=\int_0^1\left[\int_1^{\sqrt{y}}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=y\int_1^{\sqrt{y}}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\mathrm{d}x\bigg|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 y\mathrm{d}\left[\int_1^{\sqrt{y}}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\mathrm{d}x\right]=0-\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1+y}\mathrm{d}y=1-2\sqrt{2}.$$

例 6.1.13. 计算二重积分 $I=\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-x^3}^1(3x^2-1)\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y$.

令 $\varphi(x)=\displaystyle\int_{x-x^3}^1\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y$, 于是原式可化为

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1(3x^2-1)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}(x^3-x)=(x^3-x)\varphi(x)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1(x^3-x)(3x^2-1)\mathrm{e}^{(x-x^3)^2}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{(x-x^3)^2}\mathrm{d}(x-x^3)^2=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{(x-x^3)^2}\Big|_{x=0}^{x=1}=0.\end{aligned}$$

例 6.1.14. 计算二重积分 $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1 x^3\sin y^3\mathrm{d}y$.

令 $\varphi(x)=\displaystyle\int_{x^2}^1\sin y^3\mathrm{d}y$, 于是原式可化为

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 x^3\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}x^4=\frac{1}{4}x^3\varphi(x)\Big|_{x=0}^{x=1}-\frac{1}{4}\int_0^1 x^4\cdot(-2x\sin x^6)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 x^5\sin x^6\mathrm{d}x=\frac{1}{12}\int_0^1\sin x^6\mathrm{d}x^6=\frac{-\cos x^6}{12}\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{1-\cos 1}{12}.\end{aligned}$$

交换积分顺序

例 6.1.15 (2004 数一). 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t)=\displaystyle\int_0^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$, 则 $F'(2)$ 等于

A. $2f(2)$. B. $f(2)$. C. $-f(2)$. D. 0.

交换积分次序, $F(t)=\displaystyle\int_1^t\mathrm{d}x\int_1^x f(x)\mathrm{d}y=\int_1^t(x-1)f(x)\mathrm{d}x$, 于是 $F'(2)=(2-1)f(2)=f(2)$, 故选 B.

例 6.1.16. 计算 $I=\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^y\frac{\sin z}{1-z}\mathrm{d}z$.

逐次交换积分顺序, 得

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}z\int_z^x\frac{\sin z}{1-z}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}z\int_z^1\mathrm{d}x\int_z^x\frac{\sin z}{1-z}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{\sin z}{1-z}\frac{(1-z)^2}{2}\mathrm{d}z=\frac{1-\sin 1}{2}.$$

例 6.1.17. 计算 $I=\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}y\int_y^1 y\sqrt{1+z^4}\mathrm{d}z$.

逐次交换积分顺序, 得

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}z\int_x^z y\sqrt{1+z^4}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z\mathrm{d}x\int_x^z y\sqrt{1+z^4}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z\frac{z^2-x^2}{2}\sqrt{1+z^4}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}\int_0^1 z^3\sqrt{1+z^4}\mathrm{d}z=\frac{1}{12}\int_0^1\sqrt{1+z^4}\mathrm{d}(1+z^4)=\frac{(1+z^4)^{\frac{3}{2}}}{18}\Big|_0^1=\frac{2\sqrt{2}-1}{18}.\end{aligned}$$

例 6.1.18. 计算 $I=\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}z\int_0^{1-x-z}(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}y$.

逐次交换积分顺序，得

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z}\mathrm{d}x\int_0^{1-x-z}(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z}\mathrm{d}y\int_0^{1-y-z}(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z}(1-y-z)(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}(1-y-z)(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}z\\&=\int_0^1\frac{1-y}{2}\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\Big|_0^{1-y}\mathrm{d}y=\frac{1}{4\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

例 6.1.19. 求极限 $I=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\displaystyle\int_0^{\sqrt{t}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^t\sin y^2\mathrm{d}y}{\left(\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}t^2}-1\right)\arctan t^{\frac{3}{2}}}$.

$$\int_0^{\sqrt{t}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^t\sin y^2\mathrm{d}y=\int_0^t\sin y^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x=\int_0^t\sqrt{y}\sin y^2\mathrm{d}y,\ I=\lim_{t\to0^+}\frac{\displaystyle\int_0^t\sqrt{y}\sin y^2\mathrm{d}y}{-\dfrac{2}{\pi}t^{\frac{7}{2}}}\overset{L'}{=\!=}-\frac{\pi}{7}.$$

例 6.1.20. 计算 $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{1+y^2}\mathrm{d}y+3\int_0^1\mathrm{d}y\int_1^{\sqrt{2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x$.

对前部分交换积分次序，后部分采用极坐标换元，

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{1+y^2}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\sqrt{1+y^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1+y^2}\mathrm{d}y-\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

$$\begin{aligned}3\int_0^1\mathrm{d}y\int_1^{\sqrt{2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x&=3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\sec\theta}^{\sqrt{2}}\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\sec^2\theta}\mathrm{d}\tan\theta=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}-\int_0^1\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

两式相加得 $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}-\dfrac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

例 6.1.21. 计算 $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-y^2}\mathrm{d}x+\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}y\int_{\ln y}^1\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-y^2}\mathrm{d}x$.

交换积分次序先 x 后 y 有，

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\mathrm{e}^x}\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-y^2}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\int_0^{\mathrm{e}^x}\sqrt{1-\left(\frac{y}{\mathrm{e}^x}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{y}{\mathrm{e}^x}\right)$$

其中 $\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}^x}\sqrt{1-\left(\frac{y}{\mathrm{e}^x}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{y}{\mathrm{e}^x}\right)\overset{\frac{y}{\mathrm{e}^x}=\sin t}{=\!=\!=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4},\ \int_0^1\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1=\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}$,

综上，原式等于 $\dfrac{\pi-1}{2}(\mathrm{e}^2-1)$.

圆代换与球代换

例 6.1.22 (2011 数二). 设平面区域 D 由直线 $y=x$, 圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴所围成, 计算 $\displaystyle\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$.

圆的极坐标为 $r=2\sin\theta$, 于是

$$I=\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2\cos\theta\sin\theta r\mathrm{d}r=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\mathrm{d}\sin\theta=\frac{7}{12}.$$

例 6.1.23 (2015 数一). 设 D 是第一象限中由曲线 $2xy=1,4xy=1$ 与直线 $y=x,y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域, 函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 则 $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

A. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$.　　B. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$.

C. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \mathrm{d}r$.　　D. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \mathrm{d}r$.

积分区域可用极坐标表示为 $D = \left\{(r,\theta) \,\middle|\, \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}, \frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}} \leqslant r \leqslant \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}\right\}$, 于是有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r.$$

故选 B.

例 6.1.24. 设函数 $f(u)$ 连续, 区域 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 2y\}$, 则 $\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

A. $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(xy)\mathrm{d}y$.　　B. $2\int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy)\mathrm{d}x$.

C. $\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} f\left(r^2\sin\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}r$.　　D. $\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} f\left(r^2\sin\theta\cos\theta\right) r\mathrm{d}r$.

在直角坐标系下

$$\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} f(xy)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(xy)\mathrm{d}y$$

故排除 A、B, 在极坐标下

$$\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} f\left(r^2\sin\theta\cos\theta\right) r\mathrm{d}r$$

故选 D.

例 6.1.25. 计算三重积分 $I = \iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是两个球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 和 $x^2+y^2+z^2=z$ 围成的区域.

由球坐标变化, $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$, 则 $\Omega' = \left\{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \cos\varphi \leqslant r \leqslant 2\cos\varphi\right\}$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} r\cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} r^3 \mathrm{d}r \\ &= \frac{15\pi 2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos^5\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{5\pi}{4}. \end{aligned}$$

例 6.1.26. 设积分区域 $\Omega_t: x^2+y^2+z^2 \leqslant 2tz$, $f(0)=0$, $f'(0)=15$, 求极限

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^5} \iiint\limits_{\Omega_t} f\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}V.$$

法一: 由三重积分的球坐标计算方法, 积分区域可用球坐标变量表示为

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant r \leqslant 2t\cos\varphi$$

故三重积分表示为 $g(t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\mathrm{d}\varphi \int_0^{2t\cos\varphi} f\left(r^2\right) r^2 \mathrm{d}r$, 设 $F'(r) = f\left(r^2\right) r^2$, 则

$$g(t) = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[F(2t\cos\varphi) - F(0)\right]\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(2t\cos\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi - 2\pi F(0) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$= -2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(2t\cos\varphi)\mathrm{d}\cos\varphi - 2\pi F(0) = \frac{\pi}{t}\int_0^{2t} F(u)\mathrm{d}u - 2\pi F(0)$$

故

$$I = \lim_{t\to 0+}\frac{1}{t^5}\iiint\limits_{\Omega_t} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V = \pi\lim_{t\to 0+}\frac{\displaystyle\int_0^{2t} F(u)\mathrm{d}u - 2tF(0)}{t^6} \xlongequal{L'} \pi\lim_{t\to 0+}\frac{2F(2t)-2F(0)}{6t^5}$$
$$= \frac{\pi}{3}\lim_{t\to 0+}\frac{F(2t)-F(0)}{t^5} \xlongequal{L'} \frac{\pi}{3}\lim_{t\to 0+}\frac{2F'(2t)}{5t^4} = \frac{2\pi}{15}\lim_{t\to 0+}\frac{4t^2 f(4t^2)}{t^4} = \frac{32\pi}{15}f'(0) = 32\pi.$$

法二: 有题意可假设 $f(x) = 15x + o(x)$, 并令 $g(t) = \iiint\limits_{\Omega_t} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$, 于是

$$g(t) = \iiint\limits_{\Omega_t}\left[15(x^2+y^2+z^2) + o(x^2+y^2+z^2)\right]\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2t\cos\varphi}\left[15r^2+o(r^2)\right]r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$
$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\left[3r^5+o(r^5)\right]\Big|_0^{2t\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi = -6\pi\cdot 32t^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\mathrm{d}\cos\varphi + o(t^5) = 32\pi t^5 + o(t^5)$$

所以 $\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{g(t)}{t^5} = 32\pi$.

例 6.1.27. 设 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上连续可导的函数, $f(x)\neq 0$ 且 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)} = c > 0$, 记

$$F(t) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}V,\ \ G(t) = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\sigma$$

求函数 $h(t)$, 使得 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{F(t)}{h(t)G(t)} = 1$.

由三重积分的球坐标计算公式和二重积分的极坐标计算公式, 得

$$F(t) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r)r^2\mathrm{d}r = 4\pi\int_0^t f(r)r^2\mathrm{d}r$$
$$G(t) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r)r\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^t f(r)r^2\mathrm{d}r$$

由 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)} = c > 0$ 知, $\exists X_0 > 0$, 当 $x > X_0$ 时, $f(x)$ 与 $f'(x)$ 同号, 故 $f(x) > 0$ 时, $f(x)$ 单调递增, 则

$$\lim_{t\to+\infty}F(t) = +\infty,\ \ \lim_{t\to+\infty}G(t) = +\infty,\ \ \int_{X_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = +\infty$$

那么

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{F(t)}{tG(t)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{4\pi\displaystyle\int_0^t f(r)r^2\mathrm{d}r}{2\pi t\displaystyle\int_0^t f(t)t\mathrm{d}t} = 2\lim_{t\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_0^t f(r)r^2\mathrm{d}r}{t\displaystyle\int_0^t f(t)t\mathrm{d}t} \xlongequal{L'} 2\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)t^2}{\displaystyle\int_0^t f(t)t\mathrm{d}t + f(t)t^2}$$
$$\xlongequal{L'} 2\lim_{t\to+\infty}\frac{2tf(t)+t^2f'(t)}{3tf(t)+t^2f'(t)} = 2\lim_{t\to+\infty}\frac{2\dfrac{tf'(t)}{f(t)}}{3+\dfrac{tf'(t)}{f(t)}} = \frac{2(2+c)}{3+c}$$

故 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{F(t)}{\dfrac{2(2+c)}{3+c}tG(t)} = 1$, 所以取 $h(t) = \dfrac{2(2+c)}{3+c}t$ 即为所求函数.

Jacobian 行列式

例 6.1.28. 设 D 是 $y=\sqrt{x},\ x=\sqrt{y}$ 和 $x^2+y^2-x-y+\dfrac{1}{4}=0,\ \left(x,y\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\right)$ 围成的封闭区域, 求积分

$$\iint\limits_D \left(x-y^2\right)\left(y-x^2\right)(1-4xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

令 $u=x-y^2,\ v=y-x^2$, 那么 $D'=\left\{(u,v)|u,v\geqslant 0,u+v\leqslant\dfrac{1}{4}\right\}$

$$|J|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{1}{\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|}=\frac{1}{|1-4xy|}$$

$$\text{原式}=\iint\limits_{D'}uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}u\int_0^{\frac{1}{4}-u}uv\mathrm{d}v=\int_0^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}u^3-\frac{1}{4}u^2+\frac{1}{32}u\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{6144}.$$

例 6.1.29. 设 $z=z(x,y)$ 是由 $\varphi(y-bz)=x-az$ 确定的隐函数, 其中 φ 是连续可微函数, 且 $a-b\varphi'(y-bz)\neq 0$, 求二重积分

$$I=\iiint\limits_D \left(az_x'+bz_y'\right)\mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D 是由 $x=0,\ y=0,\ x+y=1$ 所围成的区域.

令 $F(x,y,z)=x-az-\varphi(y-bz)$, 那么

$$F_x'=1,\ F_y'=-\varphi'(y-bz),\ F_z'=-a+b\varphi'(y-bz)$$

当 $a-b\varphi'(y-bz)=\neq 0$ 时, 由隐函数求导公式, 得

$$z_x'=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{1}{a-b\varphi'(y-bz)},\ z_y'=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{\varphi'(y-bz)}{a-b\varphi'(y-bz)}$$

于是 $az_x'+bz_y'=1$, 代入被积函数表达式, 得 $I=\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 令 $u=x-y,\ v=x+y,\ J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{2}$, 且变换后的积分区域为 $D_{uv}=\{(u,v):-v\leqslant u\leqslant v,0\leqslant v\leqslant 1\}$, 所以二重积分化为

$$I=\iint\limits_{D_{uv}}\mathrm{e}^{\frac{u}{v}}\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}\mathrm{e}^{\frac{u}{v}}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{4}.$$

例 6.1.30 (2007 湖南大学)**.** 计算积分

$$I=\iint\limits_D\frac{(x+y)[\ln(x+y)-\ln y]}{\sqrt{2-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中区域 D 为 $x=0,x+y=1,y=x$ 所围成的三角形区域.

原式改写为 $I=\iint\limits_D\dfrac{(x+y)\ln\left(1+\dfrac{x}{y}\right)}{\sqrt{2-(x+y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则令 $u=x+y,v=\dfrac{x}{y}$, 那么 $\begin{cases}x=\dfrac{uv}{1+v}\\ y=\dfrac{u}{1+v}\end{cases}$, 并且

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{v}{1+v} & \dfrac{u}{(1+v)^2}\\ \dfrac{1}{1+v} & \dfrac{-u}{(1+v)^2}\end{vmatrix}=-\frac{u}{(1+v)^2}$$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{u\ln(1+v)}{\sqrt{2-u}}|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{u\ln(1+v)}{\sqrt{2-u}}\cdot\frac{u}{(1+v)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\int_0^1\frac{u^2}{\sqrt{2-u}}\mathrm{d}u\cdot\int_0^1\frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2}\mathrm{d}v=\frac{2}{15}\left(32\sqrt{2}-43\right)\cdot\frac{1}{2}(1-\ln 2)=\frac{32\sqrt{2}-43}{15}(1-\ln 2).\end{aligned}$$

例 6.1.31. 设 Ω 是由曲面 $z=y^2, z=4y^2\ (y>0)$, 平面 $z=x, z=2x$ 及 $z=2$ 所围区域, 求积分

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\sqrt{z}}{y^3}\cos\frac{z}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

令 $u=\dfrac{z}{y^2}, v=\dfrac{z}{x}, z=z$, 即 $x=\dfrac{z}{v}, y=\sqrt{\dfrac{z}{u}}, z=z$, Ω' : $0\leqslant z\leqslant 2, 1\leqslant v\leqslant 2, 1\leqslant u\leqslant 4$.

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,z)}=\begin{vmatrix}0 & -\dfrac{z}{v^2} & \dfrac{1}{v}\\ -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{z}{u^3}} & 0 & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{uz}}\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-\frac{z}{2v^2}\left(\frac{z}{u}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\sqrt{z}}{y^3}\cos\frac{z}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iiint\limits_{\Omega'}u^{\frac{3}{2}}\cos u|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega'}u^{\frac{3}{2}}\cos u\cdot\frac{z}{2v^2}\left(\frac{z}{u}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2}\int_1^4\cos u\mathrm{d}u\int_1^2\frac{1}{v^2}\mathrm{d}v\int_0^2 z^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}z=\frac{4\sqrt{2}}{7}(\sin 4-\sin 1).\end{aligned}$$

例 6.1.32. 设 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ 有连续偏导数, 一一对应地将区域 D' 映射到 xOy 平面的区域 D, 满足 $J\neq 0$, 且

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v},\ \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u}$$

证明: $\displaystyle\iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$

证 由已知得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2=\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2$$

两式相加

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\left[\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\left[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right]\\&=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right]\end{aligned}$$

另外

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2$$

从而

$$\mathrm{d}u\mathrm{d}v=|J^{-1}|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2}$$

综上所述, 得证 $\displaystyle\iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$

四重积分换元

例 6.1.33. 求 $\displaystyle\iiiint\limits_{V}\sqrt{\frac{1-x^2-y^2-z^2-u^2}{1+x^2+y^2+z^2+u^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}u$, 其中 V 为 $x,y,z,u\geqslant 0$, $x^2+y^2+z^2+u^2\leqslant 1$.

法一：用球坐标

$$x=r\cos\psi,\ y=r\sin\psi\cos\varphi,\ z=r\sin\psi\sin\varphi\cos\theta,\ u=r\sin\psi\sin\varphi\sin\theta$$

此时

$$J=\frac{\partial(x,y,z,u)}{\partial(r,\psi,\varphi,\theta)}=r^3\sin^2\phi\sin\varphi,\ x^2+y^2+z^2+u^2=r^2$$

$$V=\left\{(r,\phi,\varphi,\theta)\middle|0\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant 1\right\}$$

故原积分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\psi\mathrm{d}\psi\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi^2}{16}\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}r^2\mathrm{d}r^2$$
$$\xlongequal{r^2=\sin t}\frac{\pi^2}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t-\sin^2 t\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{16}\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

法二：用双极坐标

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=\rho\cos\varphi,\ u=\rho\sin\varphi$$

此时

$$J=\frac{\partial(x,y,z,u)}{\partial(r,\theta,\rho,\varphi)}=r\rho,\ x^2+y^2+z^2+u^2=r^2+\rho^2$$

$$V=\left\{(r,\theta,\rho,\varphi)\middle|0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},r\geqslant 0,\rho\geqslant 0,r^2+\rho^2\leqslant 1\right\}$$

故原积分

$$I=\iiiint\limits_V\sqrt{\frac{1-r^2-\rho^2}{1+r^2+\rho^2}}r\rho\mathrm{d}r\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\iint\limits_{\substack{r^2+\rho^2\leqslant 1\\ r,\rho\geqslant 0}}\sqrt{\frac{1-r^2-\rho^2}{1+r^2+\rho^2}}r\rho\mathrm{d}r\mathrm{d}\rho=\frac{\pi^2}{16}\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

分区积分及对称性的应用

定理 6.1.1 (重积分的对称性). (1) 二重积分情形:

(i) 若积分区域 D 关于 x 轴对称, 而 D_1 是 D 中对应于 $y\geqslant 0$ 的部分, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}2\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,-y)=f(x,y),\\ 0, & f(x,-y)=-f(x,y).\end{cases}$$

(ii) 若积分区域 D 关于 y 轴对称, 而 D_1 是 D 中对应于 $x\geqslant 0$ 的部分, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}2\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(-x,y)=f(x,y),\\ 0, & f(-x,y)=-f(x,y).\end{cases}$$

(iii) 若积分区域 D 关于 x 轴和 y 轴均对称, 而 D_1 是 D 中对应于 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 的部分, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}4\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(-x,y)=f(x,-y)=f(x,y),\\ 0, & f(-x,y)\text{ 或 }f(x,-y)=-f(x,y).\end{cases}$$

(2) 三重积分情形:

(i) 若积分区域 Ω 关于 xOy 平面对称, 而 Ω_1 是 Ω 中对应于 $z\geqslant 0$ 的部分, 则

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v=\begin{cases}2\iiint\limits_{\Omega_1}f(x,y,z)\mathrm{d}v, & f\text{ 关于 }z\text{ 为偶函数},\\ 0, & f\text{ 关于 }z\text{ 为奇函数}.\end{cases}$$

如果积分区域 Ω 关于 xOz 或 yOz 平面对称, 那么也有类似的结果.

(ii) 若积分区域 Ω 关于 xOy 平面和 xOz 平面均对称, 而 Ω_1 是 Ω 中对应于 $z \geqslant 0, y \geqslant 0$ 的部分, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \begin{cases} 4\displaystyle\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}v, & f \text{ 关于 } y,z \text{ 均为偶函数}, \\ 0, & f \text{ 关于 } y \text{ 或 } z \text{ 为奇函数}. \end{cases}$$

如果积分区域 Ω 关于 xOz 平面和 yOz 平面均对称, 或者关于 xOy 平面和 yOz 平面均对称, 那么也有类似的结果.

(iii) 如果积分区域 Ω 关于 3 个坐标平面均对称, 而 Ω_1 是 Ω 中位于第一卦限的部分, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \begin{cases} 8\displaystyle\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}v, & f \text{ 关于 } x,y,z \text{ 均为偶函数}, \\ 0, & f \text{ 关于 } x \text{ 或 } y \text{ 或 } z \text{ 为奇函数}. \end{cases}$$

例 6.1.34. 计算积分.

(1) $\displaystyle\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \left|xy - \frac{1}{4}\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(2) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 5} \operatorname{sgn}\left(x^2 - y^2 + 3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(3) $\displaystyle\iint\limits_{|x|\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2} \sqrt{|y - x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(4) $\displaystyle\iint\limits_{0\leqslant x,y\leqslant 2} [x+y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ($[\cdot]$ 表示不大于 $\cdot$ 最大整数).

(5) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \frac{|xy|\left(1+\mathrm{e}^{x^2}\right)}{2+\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{e}^{y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(6) (2024 数一) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant 1 \\ -1\leqslant y\leqslant 1}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(1) $\left|xy - \dfrac{1}{4}\right| = \begin{cases} \dfrac{1}{4} - xy, & (x,y) \text{ 在双曲线 } xy = \dfrac{1}{4} \text{ 之下} \\ xy - \dfrac{1}{4}, & (x,y) \text{ 在双曲线 } xy = \dfrac{1}{4} \text{ 之上} \end{cases}$, 如图 (a) 所示, 将积分区域划分为三个区域, 于是

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{D_2\cup D_3} \left(\frac{1}{4} - xy\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_1} \left(xy - \frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}} \mathrm{d}x \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - xy\right)\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{4}}^1 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{4x}} \left(\frac{1}{4} - xy\right)\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{4}}^1 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{4x}}^1 \left(xy - \frac{1}{4}\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{3}{64} + \frac{\ln 2}{16} + \frac{1}{16}\left(\frac{3}{4} + \ln 2\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4} + \ln 2\right). \end{aligned}$$

(2) 被积函数 $\operatorname{sgn}\left(x^2 - y^2 + 3\right) = \begin{cases} 1, & x^2 - y^2 + 3 > 0 \\ 0, & x^2 - y^2 + 3 = 0 \\ -1, & x^2 - y^2 + 3 < 0 \end{cases}$, 如图 (b) 所示, 被积函数和积分区域都关于坐标轴对称, 因此只要计算第一象限的部分, 再乘 4 即为原积分值, 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 5 \\ x,y\geqslant 0}} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x^2+3}} \mathrm{d}y - 4\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x^2+5}}^{\sqrt{5-x^2}} \mathrm{d}y + 4\int_1^{\sqrt{5}} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{5-x^2}} \mathrm{d}y \\ &= 8\int_0^1 \sqrt{x^2+3}\mathrm{d}x - 4\int_0^1 \sqrt{5-x^2}\mathrm{d}x + 4\int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{5-x^2}\mathrm{d}x = 6\ln 3 + 5\pi - 20\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

(3) 如图 (c) 所示,

$$I=\iint\limits_{|x|\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2}\sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{|x|\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant 2}\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{|x|\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x^2}\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2}\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{x^2}\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}.$$

(4) 如图 (d) 所示, 原式 $=S_{ABCD}+2S_{CDEF}+3S_{\triangle EFG}+3S_{\triangle CDG}=6.$

(5) 积分区域关于 x,y 都对称, 且具有轮换对称性, 则有

$$\text{原式}=4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\x,y\geqslant 0}}\frac{xy\left(1+\mathrm{e}^{x^2}\right)}{2+\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{e}^{y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\x,y\geqslant 0}}\left[\frac{xy\left(1+\mathrm{e}^{x^2}\right)}{2+\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{e}^{y^2}}+\frac{yx\left(1+\mathrm{e}^{y^2}\right)}{2+\mathrm{e}^{y^2}+\mathrm{e}^{x^2}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=2\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\x,y\geqslant 0}}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{a^4}{4}.$$

(6) 积分区域关于 x 轴对称, 被积函数是 y 的偶函数, 那么

$$\text{原式}=2\iint\limits_{\substack{\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{1-y^2}}^{1}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{1-y^2}}^{1}\frac{\mathrm{d}\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$=2\int_0^1\sqrt{1+y^2}\mathrm{d}y-2=y\sqrt{1+y^2}+\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\Big|_0^1-2=\sqrt{2}-2+\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

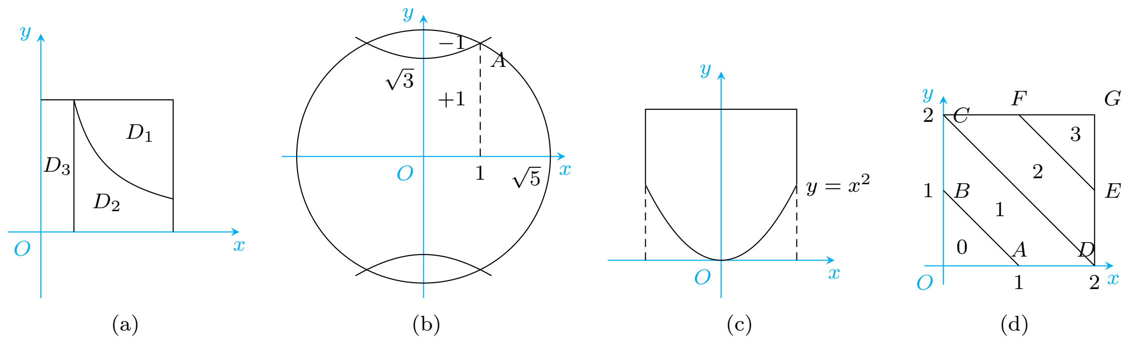


图 6.1.3

例 6.1.35. 设函数 $f(x)$ 满足

$$f(x)=x^2+x\int_0^{x^2}f\left(x^2-t\right)\mathrm{d}t+\iint\limits_{D}f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D 是以 $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ 为顶点的三角形, 且 $f(1)=0$, 求 $\displaystyle\int_0^1f(x)\mathrm{d}x$.

令 $\displaystyle\iint\limits_{D}f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$, 那么 $f(x)=x^2+x\displaystyle\int_0^{x^2}f(x^2-t)\mathrm{d}t+A$, 将 x 替换为 xy 得

$$f(xy)=x^2y^2+xy\int_0^{x^2y^2}f(x^2y^2-t)\mathrm{d}t+A\Rightarrow f(xy)=x^2y^2+xy\int_0^{x^2y^2}f(u)\mathrm{d}u+A$$

对等式两边二重积分得

$$A=\iint_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D\left[xy\int_0^{x^2y^2}f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+A\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $\iint_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1x^2\mathrm{d}x\int_{-1}^x y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{9}$, $\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2$, 作 $y=-x$, 将 D 划分为关于 x 轴对称的 D_1 和关于 y 轴对称的 D_2, 并令函数 $g(x,y)=\int_0^{x^2y^2}f(u)\mathrm{d}u$, 关于 x 和 y 都是奇函数, 利用二重积分的对称性知

$$\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

故 $A=-\frac{2}{9}$, 又由已知条件 $f(0)=1$, 那么

$$0=1+\int_0^1 f(1-t)\mathrm{d}t-\frac{2}{9}\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{7}{9}.$$

例 6.1.36. 求积分 $I=\int_{-1}^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1-z^2}\frac{\left(\cos x+\sin y+\sqrt{3}z\right)^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

记 $\Omega=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\right\}$, 由对称性得

$$\begin{aligned}
I&=\iiint_\Omega\frac{\left(\cos x+\sin y+\sqrt{3}z\right)^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2+1}\mathrm{d}V=\iiint_\Omega\frac{(\cos x+\sin y)^2+3z^2+2\sqrt{3}z(\cos x+\sin y)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2+1}\mathrm{d}V\\
&=\iiint_\Omega\frac{(\cos x+\sin y)^2+3z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2+1}\mathrm{d}V=\iiint_\Omega\frac{(\cos x+\sin y)^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2+1}\mathrm{d}V+3\iiint_\Omega\frac{z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2+1}\mathrm{d}V\\
&=\iiint_\Omega\frac{\cos^2x+\sin^2y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2+1}\mathrm{d}V+3\iiint_\Omega\frac{z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2+1}\mathrm{d}V\\
&=\frac{1}{2}\iiint_\Omega\frac{\cos^2x+\cos^2y+\sin^2x+\sin^2y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)+1}\mathrm{d}V+3\iiint_\Omega\frac{z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2+1}\mathrm{d}V\\
&=\iiint_\Omega\frac{\mathrm{d}V}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2+1}+3\iiint_\Omega\frac{z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2+1}\mathrm{d}V\\
&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\frac{r^2}{r^4+1}\mathrm{d}r+3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\sin\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\frac{r^4}{r^4+1}\mathrm{d}r\\
&=4\pi\int_0^1\frac{r^4+r^2}{r^4+1}\mathrm{d}r=4\pi+\sqrt{2}\pi\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

其中 $\int_0^1\frac{r^4+r^2}{r^4+1}\mathrm{d}r=\int_0^1\frac{r^4+1+r^2-1}{r^4+1}\mathrm{d}r=\int_0^1\mathrm{d}r+\int_0^1\frac{r^2-1}{r^4+1}\mathrm{d}r$,

$$\int\frac{r^2-1}{r^4+1}\mathrm{d}r=\int\frac{1-\frac{1}{r^2}}{\left(r+\frac{1}{r}\right)^2-2}\mathrm{d}r\xlongequal{r+\frac{1}{r}=t}\int\frac{\mathrm{d}t}{\left(t-\sqrt{2}\right)\left(t+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{r+\frac{1}{r}-\sqrt{2}}{r+\frac{1}{r}+\sqrt{2}}\right|+C.$$

6.1.3 反常二重积分与含参变量积分

反常二重积分

定义 6.1.3 (反常二重积分). 若 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 为反常积分, 则取 D', 使 $D'\subset D$ 并且 $\iint_{D'}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 为一般的二重积分, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{D'\to D}\iint_{D'}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

事实上, 当反常二重积分可积时, 其计算方法与一般二重积分基本相同.

例 6.1.37. 计算二重积分 $I=\displaystyle\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

令 $x=ar\cos\theta,\ y=br\sin\theta$, 那么 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$, 故

$$I=ab\iint\limits_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\1\leqslant r\leqslant+\infty}}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{+\infty}r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=\frac{\pi ab}{\mathrm{e}}.$$

例 6.1.38. 求不定积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-ax}}{x}\cos x\mathrm{d}x,\ a>0.$

注意到

$$\int_a^b\mathrm{e}^{-yx}\cos x\mathrm{d}y=-\frac{\cos x}{x}\int_a^b\mathrm{e}^{-yx}\mathrm{d}(-yx)=-\frac{\cos x}{x}\left(\mathrm{e}^{-yx}\right)\Big|_{y=a}^{y=b}=-\frac{\mathrm{e}^{-bx}-\mathrm{e}^{-ax}}{x}\cos x$$

所以 $\displaystyle\int_0^a\mathrm{e}^{-yx}\cos x\mathrm{d}y=\frac{1-\mathrm{e}^{-ax}}{x}\cos x$, 交换积分次序可知: 原式 $=\displaystyle\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-yx}\cos x\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-yx}\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-yx}\mathrm{d}(\sin x)=\mathrm{e}^{-yx}\sin\Big|_{x=0}^{x=+\infty}-\int_0^{+\infty}\sin x\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-yx}\right)\\&=-y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-yx}\sin x\mathrm{d}x=y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-yx}\mathrm{d}(\cos x)=y\left(\mathrm{e}^{-yx}\cos x\Big|_{x=0}^{x=+\infty}+y\int_0^{+\infty}\cos x\mathrm{e}^{-yx}\mathrm{d}x\right)\\&\Rightarrow\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-yx}\cos x\mathrm{d}x=\frac{y}{1+y^2}\end{aligned}$$

故

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-ax}}{x}\cos x\mathrm{d}x=\int_0^a\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)\Big|_0^a=\frac{1}{2}\ln\left(1+a^2\right).$$

例 6.1.39. 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x.$

注意到 $\dfrac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x}=\displaystyle\int_3^5\cos(xy)\mathrm{d}y$, 所以原式$=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_3^5\mathrm{e}^{-2x}\cos(xy)\mathrm{d}y$,

由于 $|\mathrm{e}^{-2x}\cos(xy)|\leqslant\mathrm{e}^{-2x}$, 且 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$ 收敛, 所以 $\displaystyle\int_3^5\cos(xy)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[3,5]$ 一致收敛, 再结合 $\mathrm{e}^{-2x}\cos(xy)$ 为 $[0,+\infty)\times[3,5]$ 上的连续函数, 所以

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_3^5\mathrm{e}^{-2x}\cos(xy)\mathrm{d}y=\int_3^5\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\cos(xy)\mathrm{d}x\\&=\int_3^5\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{4+y^2}\left[-2\cos(xy)+y\sin(xy)\right]_0^{+\infty}\mathrm{d}y=2\int_3^5\frac{\mathrm{d}y}{4+y^2}\\&=\arctan\frac{y}{2}\Big|_3^5=\arctan\frac{5}{2}-\arctan\frac{3}{2}=\arctan\frac{4}{19}.\end{aligned}$$

例 6.1.40. 计算 $I=\displaystyle\iint\limits_D\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\cos\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是全平面.

用极坐标, 化为先 θ 后 ρ 次序的二次积分,

$$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\rho\mathrm{e}^{-\rho^2}\cos\rho^2\mathrm{d}\theta=2\pi\int_0^{+\infty}\rho\mathrm{e}^{-\rho^2}\cos\rho^2\mathrm{d}\rho.$$

其中,

$$\begin{aligned}\int\rho\mathrm{e}^{-\rho^2}\cos\rho^2\mathrm{d}\rho&=\int\frac{4\rho\cos\rho^2}{4\mathrm{e}^{\rho^2}}\mathrm{d}\rho=\int\frac{2\rho\cos\rho^2+2\rho\sin\rho^2-2\rho\left(\sin\rho^2-\cos\rho^2\right)}{4\mathrm{e}^{\rho^2}}\mathrm{d}\rho\\&=\int\frac{\left(2\rho\cos\rho^2+2\rho\sin\rho^2\right)4\mathrm{e}^{\rho^2}-8\rho\mathrm{e}^{\rho^2}\left(\sin\rho^2-\cos\rho^2\right)}{16\mathrm{e}^{\rho^2}}\mathrm{d}\rho\end{aligned}$$

$$= \int \mathrm{d}\left(\frac{\sin\rho^2-\cos\rho^2}{4\mathrm{e}^{\rho^2}}\right) = \frac{\sin\rho^2-\cos\rho^2}{4\mathrm{e}^{\rho^2}} + C$$

所以, $I = 2\pi\cdot\left.\frac{\sin\rho^2-\cos\rho^2}{4\mathrm{e}^{\rho^2}}\right|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

例 6.1.41. 计算 $\iint\limits_D \frac{x^2+y^2-2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D: x^2+y^2\geqslant 2, x\leqslant 1$.

注意到 D 关于 x 轴对称, 且被积函数关于 y 变量为偶函数, 记 x 轴上方部分积分区域为 D_1, 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则在极坐标下, D_1 可以描述为两部分, 如图 6.1.4 所示, 记作

$$D_1': \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, \sqrt{2}\leqslant r\leqslant\sec\theta,\ D_2': \frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi, \sqrt{2}\leqslant r\leqslant+\infty$$

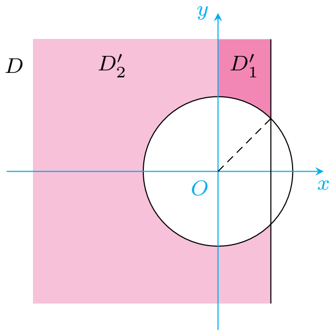


图 6.1.4

$$\begin{aligned}
I &= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{2}}^{\sec\theta}\frac{r^2-2}{r^5}r\mathrm{d}r + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{r^2-2}{r^5}r\mathrm{d}r\\
&= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{3r^3}-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sec\theta}\mathrm{d}\theta + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{2}{3r^3}-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{+\infty}\mathrm{d}\theta\\
&= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2\cos^3\theta}{3}-\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\mathrm{d}\theta + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{d}\theta\\
&= 2\left[\frac{2}{3}\left(\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right)-\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{3}\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\cdot\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\\
&= 2\cdot\left(\frac{\pi}{3\sqrt{2}}-\frac{5}{9}-\frac{\pi}{6\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{9}\right)+\frac{\sqrt{2}}{3}\pi = \frac{4\sqrt{2}}{9}-\frac{10}{9}+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi
\end{aligned}$$

例 6.1.42. 计算 $I = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{x,y\}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

由题意

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r\sin\theta\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r\cos\theta\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r = -2\sqrt{2}\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\\
&= -\sqrt{2}\cdot 2\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r = -\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = -\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2}.
\end{aligned}$$

含参变量积分

含参变量积分是指在积分运算中, 被积函数中包含一个或多个参数的情况. 这种情况下, 参数被视为常数, 而不是变量, 因此在积分时需要将参数视为常数处理.

定理 6.1.2 (含参变量积分求导公式). 设 $f(t,x), f_x(t,x)$ 在 $R=[a,b]\times[p,q]$ 上连续, $\alpha(x),\beta(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上其值含于 $[p,q]$ 内的可微函数, 则函数

$$F(t,x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t,x)\mathrm{d}t$$

在 $[a,b]$ 上可微, 且

$$F'(t,x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t,x)\mathrm{d}t = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(t,x)\mathrm{d}t + f[\beta(x),x]\beta'(x) - f[\alpha(x),x]\alpha'(x).$$

例 6.1.43. 已知 $F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{\left(xt+x^2\right)}\mathrm{d}t$, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

法一: 由含参变量积分求导公式, 有

$$
\begin{aligned}
I&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{\left(xt+x^2\right)}\mathrm{d}t=\left[\int_{\sin x}^{\cos x}(t+2x)\mathrm{e}^{\left(xt+x^2\right)}\mathrm{d}t-\sin x\mathrm{e}^{\left(x\cos x+x^2\right)}-\cos x\mathrm{e}^{\left(x\sin x+x^2\right)}\right]_{x=0}\\
&=\int_0^1 t\mathrm{d}t-1=-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

法二: 由题意,

$$
F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{\left(xt+x^2\right)}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{x^2}\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{xt}\mathrm{d}t\xlongequal{xt=u}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\int_{x\sin x}^{x\cos x}\mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\left(\mathrm{e}^{x\cos x}-\mathrm{e}^{x\sin x}\right)
$$

其中 $x\neq 0$, 且 $F(0)=1$, 所以考虑导数定义式, 有

$$
\left.\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\left(\mathrm{e}^{x\cos x}-\mathrm{e}^{x\sin x}\right)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}\left(\mathrm{e}^{x\cos x}-\mathrm{e}^{x\sin x}\right)-x}{x^2}
$$

由 $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$, $\sin x=x+o(x)$ 得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{x\cos x}&=1+x\cos x+\frac{1}{2}(x\cos x)^2+o\left((x\cos x)^2\right)\\
&=1+x\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)+\frac{x^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)^2+o\left(x^2\right)\\
&=1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\\
\mathrm{e}^{x\sin x}&=1+x\sin x+(x\sin x)^2+o\left((x\sin x)^2\right)=1+x^2+o\left(x^2\right)\\
\mathrm{e}^{x^2}&=1+x^2+o\left(x^2\right)
\end{aligned}
$$

将上述展开式代入原极限式, 化简最终求得原极限等于 $-\dfrac{1}{2}$.

例 6.1.44. 设 $f(x)$ 为连续函数, $t>0$, 区域 Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=t^2\ (t>0)$ 所围成的部分, 定义三重积分 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}f\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}v$, 求 $F'(t)$.

利用柱坐标系, 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\\z=z\end{cases}$, 则由 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\x^2+y^2+z^2=t^2\end{cases}$ 联立得 $z^2=z+t^2$, 解得 $z=\dfrac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}:=b^2(t)$, 于是区域 Ω 在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant b^2(t)$, 从而

$$
F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{b(t)}r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}}f\left(r^2+z^2\right)\mathrm{d}z=2\pi\int_0^{b(t)}r\left[\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}}f\left(r^2+z^2\right)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}r
$$

记 $g(t,r)=r\left[\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}}f\left(r^2+z^2\right)\mathrm{d}z\right]$, 则由 $f(x)$ 的连续知, $g(t,r)$ 及 $\dfrac{\partial g(t,r)}{\partial r}$ 连续, 于是由含参变量积分的求导公式, 得

$$
\begin{aligned}
F'(t)&=2\pi\left[\int_0^{b(t)}\frac{\partial g}{\partial t}\mathrm{d}r+g(t,b(t))\cdot b'(t)\right]\\
&=2\pi\left[\int_0^{b(t)}rf\left(t^2\right)\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}r+b(t)\int_{b^2(t)}^{\sqrt{t^2-b^2(t)}}f\left(b^2(t)+z^2\right)\mathrm{d}z\cdot b'(t)\right]\\
&=2\pi tf\left(t^2\right)\int_0^{b(t)}\frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}r=-\pi tf\left(t^2\right)\int_0^{b(t)}\frac{\mathrm{d}\left(t^2-r^2\right)}{\sqrt{t^2-r^2}}\\
&=2\pi tf\left(t^2\right)\left(t-\sqrt{t^2-b^2(t)}\right)=2\pi tf\left(t^2\right)\left(t-b^2(t)\right)=\pi t()f\left(t^2\right)\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right).
\end{aligned}
$$

例 6.1.45. 求 $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\int_0^x\mathrm{e}^{nt}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-t)^k}{k!}\mathrm{d}t\right]$.

记 $f_k(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{nt}\frac{(x-t)^k}{k!}\mathrm{d}t$，那么 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_k(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{nt}\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{d}t=f_{k-1}(x)$，于是

$$f_k''(x)=f_{k-1}'(x)=f_{k-2}(x),\ \cdots,\ f_k^{(k)}(x)=f_0(x)$$

由于 $f_0'(x)=\left(\int_0^x \mathrm{e}^{nt}\mathrm{d}t\right)'=\mathrm{e}^{nx}$，$f_0''(x)=n\mathrm{e}^{nx}$，$\cdots$，$f_0^{(n)}(x)=n^{n-1}\mathrm{e}^{nx}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\int_0^x \mathrm{e}^{nt}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-t)^k}{k!}\mathrm{d}t\right]=\sum_{k=0}^{n-1}f_k^{(n)}(x)=f_0^{(n)}(x)+\sum_{k=1}^{n-1}\left[f_k^{(k)}(x)\right]^{(n-k)}=\sum_{k=1}^{n}f_0^{(k)}(x)=\frac{1-n^n}{1-n}\mathrm{e}^{nx}.$$

6.1.4 重积分的积分中值定理

定理 6.1.3 (二重积分中值定理). 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 函数 $g(x,y)$ 在 D 上可积且不变号, 则 $\exists(\xi,\eta)\in D$, 使得

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例 6.1.46. 已知 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\mathrm{d}v\int_{\ln(1+v)}^v\sin\left(u^2\right)\mathrm{d}u}{x^k}=c\neq0$, 求 c.

错解. 记积分区域为 D，则由二重积分中值定理知，$\exists(\xi,\eta)\in D$，使得 $\iint\limits_D\sin\left(u^2\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\sin\left(\eta^2\right)\iint\limits_D\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，下求 D 的面积 S，记 $I_1=\frac{1}{2}x^2$，$I_2=\int_0^x\ln(1+t)\mathrm{d}t$，于是

$$I_2=\int_0^x\ln(1+t)\mathrm{d}t=x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)$$

因此 $S=I_1-I_2=\frac{1}{2}x^2-x\ln(1+x)+x-\ln(1+x)$，故极限式化为

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2\left[\frac{1}{2}x^2-x\ln(1+x)+x-\ln(1+x)\right]}{x^k}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2\left[\frac{1}{2}x^2-x^2+\frac{1}{2}x^3+x-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]}{x^k}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x^5}{6}}{x^k}$$

因为 $c\neq0$，所以分子与分母等阶，因此 $c=\frac{1}{6}$.

错因: 对二重积分中值定理内容了解不透彻，该定理说的是：若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，函数 $g(x,y)$ 在 D 上可积且不变号，则存在一点 $(\xi,\eta)\in D$，使得

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

法一: 先使用 *L'Hospital* 法则，将二重积分转化为定积分，再使用积分中值定理，有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\mathrm{d}v\int_{\ln(1+v)}^v\sin\left(u^2\right)\mathrm{d}u}{x^k}\xlongequal{L'}\lim_{x\to0^+}\frac{\int_{\ln(1+x)}^x\sin\left(u^2\right)\mathrm{d}u}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\xi^2[x-\ln(1+x)]}{kx^{k-1}}$$

其中 $x\leftarrow\ln(1+x)<\xi<x\ (x\to0^+)$，因此原极限等于 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^4}{kx^{k-1}}$，因此 $k=5,c=\frac{1}{10}$.

法二: 因为 $\sin\left(u^2\right)$ 在积分区间内不变号，因此 $\int_{\ln(1+v)}^v\sin\left(u^2\right)\mathrm{d}u\sim\int_{\ln(1+v)}^v u^2\mathrm{d}u$，又因为 $\ln(1+v)\sim v\ (v\to0^+)$，因此原极限等价为

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\mathrm{d}v\int_{\ln(1+v)}^v\sin\left(u^2\right)\mathrm{d}u}{x^k}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x[v-\ln(1+v)]\xi_v^2\mathrm{d}v}{x^k}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\frac{1}{2}v^4\mathrm{d}v}{x^k}=c$$

因为 $c\neq0$，因此分子与分母等阶，即 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}x^5}{x^k}=c\Rightarrow c=\frac{1}{10}$.

例 6.1.47. 设区域 D 为 $x^2+y^2\leqslant r^2$, 求极限 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

由二重积分的积分中值定理知, $\exists(\xi,\eta)\in D$, 使得

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi r^2\cdot\mathrm{e}^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)$$

于是, $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim\limits_{\xi,\eta\to 0}\mathrm{e}^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)=1$.

例 6.1.48 (2009 南京工业大学). 求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^2}\displaystyle\int_0^t\mathrm{d}x\int_0^{t-x}\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}y$.

由二重积分的积分中值定理知, $\exists(\xi,\eta)\in\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant t,0\leqslant y\leqslant t-x\}$, 使得

$$\int_0^t\mathrm{d}x\int_0^{t-x}\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}y=\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{\xi^2+\eta^2}$$

于是, $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^2}\displaystyle\int_0^t\mathrm{d}x\int_0^{t-x}\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\xi,\eta\to 0^+}\mathrm{e}^{\xi^2+\eta^2}=\dfrac{1}{2}$.

例 6.1.49 (2016 年天津市 (理工)). 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个领域内连续, 求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F'(t)}{t}$ 其中

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由二重积分的积分中值定理知, $\exists(\xi,\eta)\in x^2+y^2\leqslant t^2$, 使得

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi t^2 f(\xi,\eta)$$

于是, $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F'(t)}{t}=\lim\limits_{\xi,\eta\to 0^+}\dfrac{2\pi t f(\xi,\eta)}{t}=2\pi t f(0,0)$.

例 6.1.50 (第十届“景润杯”). 计算极限 $\lim\limits_{R\to+\infty}\iint\limits_{D_R}\mathrm{e}^{-x}\arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D_R 是由 $x=R,y=0,y=\dfrac{2}{R}x-1$ 所围成.

由二重积分的积分中值定理知, $\exists(\xi,\eta)\in D_R$, 使得

$$\iint\limits_{D_R}\mathrm{e}^{-x}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-\xi}\arctan\frac{\eta}{\xi}\iint\limits_{D_R}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{R}{4}\mathrm{e}^{-\xi}\arctan\frac{\eta}{\xi}$$

其中 $R\in\left(\dfrac{R}{2},R\right)$, $\eta\in(0,1)$, 故

$$\left|\iint\limits_{D_R}\mathrm{e}^{-x}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|=\mathrm{e}^{-\xi}\arctan\frac{\eta}{\xi}\iint\limits_{D_R}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{R}{4}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2}}\arctan\frac{\eta}{\xi}\to 0\ (R\to+\infty)$$

所以 $\lim\limits_{R\to+\infty}\iint\limits_{D_R}\mathrm{e}^{-x}\arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

例 6.1.51. 证明:

$$\frac{\pi\left(R^2-r^2\right)}{R+K}\leqslant\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\leqslant\frac{\pi\left(R^2-r^2\right)}{r-K}$$

其中 $0<K=\sqrt{a^2+b^2}<r<R$, $D:r^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2$.

证 函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$ 在环形闭域 $D: r^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2$ 上连续, 则由积分中值定理知, 存在 $P_0(\xi,\eta)\in D$, 使

$$\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=\frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2}}\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\frac{1}{|P_0P_1|}\pi\left(R^2-r^2\right)$$

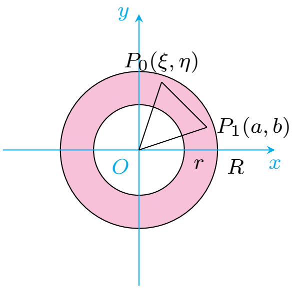


图 6.1.5

由图 6.1.5 知, $r\leqslant|OP_0|\leqslant R$, 且存在关系

$$r-K\leqslant|OP_0|-|OP_1|\leqslant|P_0P_1|\leqslant|OP_1|+|OP_0|\leqslant R+K$$

所以

$$\frac{1}{R+K}\leqslant\frac{1}{|P_0P_1|}\leqslant\frac{1}{r-K}$$

代入上式得证不等式成立.

6.1.5 重积分的应用

重积分在几何上的应用

例 6.1.52. 求球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 和抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围的立体 (含在抛物面内部) Ω 的体积 V.

法一: "先一后二"法, 配合柱坐标

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}}\mathrm{d}z=\frac{19}{6}\pi.$$

法二: "先二后一"法

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega_1}\mathrm{d}v+\iiint\limits_{\Omega_2}\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_{z_1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_{z_2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\pi\left(\sqrt{3z}\right)^2\mathrm{d}z+\int_1^2\pi\left(\sqrt{4-z^2}\right)^2\mathrm{d}z=\frac{19}{6}\pi.$$

法三: 利用球坐标

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\varphi\int_0^2\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{3\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho=\frac{19}{6}\pi.$$

例 6.1.53. 求由方程 $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2+\dfrac{z^4}{c^4}=z$ 所确定的曲面 Σ 所围成空间立体 Ω 的体积, 其中 a,b,c 为正常数.

利用广义球坐标公式 $\begin{cases}x=a\rho\cos\theta\sin\varphi\\ y=b\rho\sin\theta\sin\varphi\\ z=c\rho\cos\varphi\end{cases}$, 于是 $\left|\dfrac{\partial x,y,z}{\partial\rho,\theta,\varphi}\right|=abc\rho^2\sin\varphi$, 且

$$\Omega'=\left\{(\rho,\theta,\varphi)\middle|0\leqslant\theta\leqslant2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\rho\leqslant\left(\frac{c\cos\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}$$

$$V=\iiint\limits_{\Omega'}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\left(\frac{c\cos\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\right)^{\frac{1}{3}}}abc\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho=\frac{2}{3}\pi abc^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{2}{3}\pi abc^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\left(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi\right)+2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{2}{3}\pi abc^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2\cos^4\varphi-2\cos^2\varphi+1}\mathrm{d}\varphi$$

$$\xlongequal{\cos^2\varphi=t}\frac{\pi}{3}abc^2\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{2t^2-2t+1}=\frac{\pi}{3}abc^2\cdot\arctan(2t-1)\Big|_0^1=\frac{\pi^2}{6}abc^2.$$

重积分在力学上的应用

定理 6.1.4 (物体的质量). 若一物体占有区域 $V, \rho=\rho(x,y,z)$ 为它在点 (x,y,z) 的密度, 则该物体的质量等于 $M=\iiint\limits_V \rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

例 6.1.54. 设某物体所在的空间区域为 $\Omega: x^2+y^2+2z^2\leqslant x+y+2z$, 密度函数为 $x^2+y^2+z^2$, 求质量 $M=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

将 $x^2+y^2+2z^2\leqslant x+y+2z$ 化为

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left[\sqrt{2}\left(z-\frac{1}{2}\right)\right]^2\leqslant 1$$

于是 Ω 为一椭球, 令 $u=x-\frac{1}{2}$, $v=y-\frac{1}{2}$, $w=\sqrt{2}\left(z-\frac{1}{2}\right)$, 则区域 $\Omega\to\Omega': u^2+v^2+w^2\leqslant 1$, 且 *Jacobian* 行列式 $J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}=\dfrac{1}{\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\sqrt{2}\end{vmatrix}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 于是

$$\begin{aligned}M&=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint\limits_{\Omega'}\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint\limits_{\Omega'}\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint\limits_{\Omega'}\left(u+v+\frac{w}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w+\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint\limits_{\Omega'}\frac{3}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint\limits_{\Omega'}\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w+0+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4\pi}{3}\end{aligned}$$

记 $I=\iiint\limits_{\Omega'}\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$, 则

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^4\mathrm{d}\rho=\frac{4\pi}{5}$$

由对称性知, $\iiint\limits_{\Omega'}u^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\iiint\limits_{\Omega'}v^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\iiint\limits_{\Omega'}w^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\frac{I}{3}=\frac{4\pi}{15}$, 故

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{4\pi}{15}+\frac{4\pi}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{15}\right)+\frac{\pi}{\sqrt{2}}=\frac{5}{6}\sqrt{2}\pi.$$

定理 6.1.5 (物体的质心). 物体的质心坐标 (x_0,y_0,z_0) 按下列公式来计算

$$\begin{cases}x_0=\dfrac{1}{M}\iiint\limits_V \rho x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\\ y_0=\dfrac{1}{M}\iiint\limits_V \rho y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\\ z_0=\dfrac{1}{M}\iiint\limits_V \rho z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\end{cases}$$

若物体是均匀的, 则 $\rho=1$.

例 6.1.55. 求以下列曲面为界的均匀物体的质心坐标.

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2},\ z=c.$	(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\ x,y,z\geqslant 0.$

(1) 令 $x=ar\cos\theta, y=br\sin\theta, z=z$, 则质量为

$$M=\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=ab\int_0^c \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{z}{c}} r\mathrm{d}r=\frac{\pi abc}{3}$$

设质心坐标为 (x_0,y_0,z_0), 由对称性知, $x_0=y_0=0$, 而

$$z_0=\frac{1}{M}\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{M}\int_0^c z\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{z}{c}} r\mathrm{d}r=\frac{3c}{4}$$

于是质心坐标为 $\left(0,0,\dfrac{3c}{4}\right)$.

(2) 令 $x=a\rho\sin\varphi\cos\theta,\ y=b\rho\sin\varphi\cos\theta,\ z=c\rho\cos\varphi$, 则质量为

$$M=abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{\pi abc}{6}$$

设质心坐标为 (x_0,y_0,z_0), 那么

$$x_0=\frac{1}{M}\iiint\limits_V x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{a^2bc}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{3}{8}a$$

由对称性知质心坐标为 $\left(\dfrac{3}{8}a,\dfrac{3}{8}b,\dfrac{3}{8}c\right)$.

定理 6.1.6 (转动惯量). 积分

$$I_{xy}=\iiint\limits_V \rho z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ I_{yz}=\iiint\limits_V \rho x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ I_{zx}=\iiint\limits_V \rho y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

分别称为物体对坐标平面的转动惯量;

$$I_l=\iiint\limits_V \rho r^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 r 为物体各点 (x,y,z) 与轴 l 的距离, 特别地, 对于坐标轴 Ox,Oy,Oz 分别有

$$I_x=I_{xy}+I_{xz},\ I_y=I_{yx}+I_{yz},\ I_z=I_{zx}+I_{zy}$$

物体对坐标原点的转动惯量 $I_0=I_{xy}+I_{yz}+I_{zx}$.

与重积分有关的不等式证明

例 6.1.56. 证明不等式 $\dfrac{\pi}{4}\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)<\left(\displaystyle\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2<\dfrac{16}{25}$.

证 因为

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2&=\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\iint\limits_{0\leqslant x,y\leqslant 1}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\geqslant\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ x,y\geqslant 0}}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{e}^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\end{aligned}$$

又因为 $\mathrm{e}^x<1+x+\dfrac{x^2}{2}\ (x<0)$, 所以 $\mathrm{e}^{-x^2}<1-x^2+\dfrac{x^4}{2}$, 于是

$$\left(\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2<\left[\int_0^1\left(1-x^2+\frac{x^4}{2}\right)\mathrm{d}x\right]^2=\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right)^2<\frac{16}{25}.$$

例 6.1.57. 设正值函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$$

证明: $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)(b-a+A)$.

证 记 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant y\leqslant b\}$, 则

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b f(x)\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y = \iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\iint\limits_D \left[\frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{e}^{f(y)} + \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{e}^{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{f(x)+f(y)}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \iint\limits_D \left(\frac{f(x)+f(y)}{2}+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b \left(\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)+1\right)\mathrm{d}y = (b-a)^2 + \int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y = (b-a)(b-a+A)
\end{aligned}$$

故得证.

例 6.1.58. 设 $f\in[a,b]$, 不恒为 0, 满足 $0\leqslant f(x)\leqslant M$, 证明:

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2 + \frac{M^2(b-a)^4}{12}.$$

证 设 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x,y\leqslant b\}$, 那么

$$I_1 = \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \iint\limits_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_2 = \left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2 = \iint\limits_D f(x)f(y)\sin x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_3 = \left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2 = \iint\limits_D f(x)f(y)\cos x\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故

$$\begin{aligned}
I_1-I_2-I_3 &= \iint\limits_D f(x)f(y)(1-\cos x\cos y-\sin x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(x)f(y)[1-\cos(x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_D f(x)f(y)\cdot 2\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint\limits_D M^2\cdot\frac{(x-y)^2}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

即得证 $\displaystyle\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2 + \frac{M^2(b-a)^4}{12}$.

例 6.1.59. 设函数 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上单调递减且连续的正值函数, 证明

$$\frac{\displaystyle\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x} \leqslant \frac{\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}.$$

证法一 要证不等式成立, 即证 $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$, 为此

$$I = \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \int_0^1 yf(y)\mathrm{d}y - \int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x \int_0^1 f(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 f^2(x)f(y)(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

又因为 $I = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \int_0^1 f^2(y)\mathrm{d}y - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 yf^2(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 f^2(y)f(x)(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则有

$$2I = \int_0^1 \int_0^1 f(x)f(y)(x-y)[f(y)-f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因为 $f(x)$ 单调递减, 所以当 $y \geqslant x$ 时, $f(y) \leqslant f(x)$, 从而 $2I \geqslant 0$, 故得证.

证法二 $\dfrac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x} - \dfrac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x} = \dfrac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$, 上式右边分母显然为正, 上式右边分子令为 $F(x) = \int_0^x tf^2(t)\mathrm{d}t \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$, 则

$$\begin{aligned} F'(x) &= xf^2(x) \cdot \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + f(x)\int_0^x tf^2(t)\mathrm{d}t - f^2(x)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t - xf(x)\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t \\ &= f^2(x)\left[\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t\right] + f(x)\left[\int_0^x (t-x)f^2(t)\mathrm{d}t\right] = f(x)\left[\int_0^x (x-t)f(t)f(x)\mathrm{d}t - \int_0^x (x-t)f^2(t)\mathrm{d}t\right] \\ &= f(x)\left[\int_0^x (x-t)f(t)[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t\right]. \end{aligned}$$

因 $f(x)$ 单调减少, 所以当 $x > t$ 时, $f(x)-f(t) < 0$, 因此 $F'(x) < 0$, 所以 $F(x)$ 单调减少, 所以 $F(x) \leqslant F(0) = 0$, 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时, 命题得证.

例 6.1.60 (第五届数学竞赛决赛). 设 $I = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 函数 $f(x,y)$ 在 D 上有连续的二阶偏导数, 其中 $D = \{(x,y)|0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, 若对任何 x,y 有 $f(0,y) = f(x,0) = 0$, 且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \leqslant A$, 证明: $I \leqslant \dfrac{A}{4}$.

证 令 $g(x,y) = (1-x)(1-y)$, 那么

$$\begin{aligned} \iint\limits_D g(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 g(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 g(x,y)\mathrm{d}_y\frac{\partial f}{\partial x} \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x\left[g(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y\right] = -\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y \\ &= -\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}_x f = -\int_0^1 \mathrm{d}y\left[f(x,y)\frac{\partial g}{\partial y}\bigg|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f(x,y)\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}\mathrm{d}x\right] \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I \end{aligned}$$

所以

$$I = \iint\limits_D g(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \leqslant A\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = A\left[\int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x\right]^2 = \frac{A}{4}.$$

例 6.1.61 (广东省 1991 年竞赛题). 设二元函数 $f(x,y)$ 在区域 $D = \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 上具有连续的四阶偏导数, 并且 $f(x,y)$ 在区域 D 的边界上恒为 0, 又已知 $\left|\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right| \leqslant 3$, 试证明:

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{1}{48}.$$

证 令 $g(x,y) = xy(1-x)(1-y)$, 那么

$$\iint\limits_D g(x,y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 g(x,y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 g(x,y)\mathrm{d}_y\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \left[g(x,y)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\bigg|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y \right] \\
&= -\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y = -\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}_y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\
&= -\int_0^1 \mathrm{d}x \left(\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\mathrm{d}y \right) = \iint\limits_D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

同理可得

$$
\iint\limits_D f(x,y)\frac{\partial^4 g}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
$$

则

$$
\iint\limits_D g(x,y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(x,y)\frac{\partial^4 g}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

$$
\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{1}{4}\iint\limits_D g(x,y)\left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{3}{4}\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{4}\left[\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x\right]^2 = \frac{1}{48}.
$$

例 6.1.62. 设 $f(x,y,z)$ 在 $\Omega=\{(x,y,z)|0\leqslant x,y,z\leqslant 1\}$ 上有六阶连续偏导数，f 在边界上恒为零，且 $\left|\dfrac{\partial^6 f(x,y,z)}{\partial x^2\partial y^2\partial z^2}\right|\leqslant M$，证明: $\left|\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right|\leqslant \dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{M}{6^3}$.

证 令 $g(x,y,z)=xyz(x-1)(y-1)(z-1)$，因为 f,g 在 Ω 上均有六阶连续偏导数，且 f 在边界上恒为零，故

$$
\iiint\limits_\Omega g(x,y,z)\frac{\partial^6 f(x,y,z)}{\partial x^2\partial y^2\partial z^2}\mathrm{d}V = \iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\frac{\partial^6 g(x,y,z)}{\partial x^2\partial y^2\partial z^2}\mathrm{d}V = 8\iiint \Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V
$$

所以

$$
\left|\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{1}{8}\iiint\limits_\Omega g(x,y,z)\left|\frac{\partial^6 f(x,y,z)}{\partial x^2\partial y^2\partial z^2}\right|\mathrm{d}V \leqslant \frac{M}{8}\left[\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x\right]^3 = \frac{1}{8}\cdot\frac{M}{6^3}
$$

例 6.1.63. 设 $f(x,y)$ 在区域 $D: x^2+y^2\leqslant 1$ 上有连续的二阶偏导数，且满足 $f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\leqslant M$ 及 $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，证明:

$$
\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{\pi\sqrt{M}}{4}.
$$

证 由二元函数的 *Taylor* 公式，存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(0,0) + \left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f\bigg|_{(0,0)} + \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\bigg|_{(\theta x,\theta y)} \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2 f_{xx}(\theta x,\theta y)+2xyf_{xy}(\theta x,\theta y)+y^2 f_{yy}(\theta x,\theta y)\right]
\end{aligned}
$$

由 *Cauchy* 不等式，得

$$
\left|\left(x^2,\sqrt{2}xy,y^2\right)\cdot\left(f_{xx}(\theta x,\theta y),\sqrt{2}f_{xy}(\theta x,\theta y),f_{yy}(\theta x,\theta y)\right)\right| \leqslant \sqrt{M}(x^2+y^2)
$$

所以

$$
\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{\sqrt{M}}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{M}}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi\sqrt{M}}{4}.
$$

例 6.1.64 (第十五届北京市数学竞赛). 设区域 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，证明

$$
\frac{4\sqrt[3]{2}\pi}{3} \leqslant \iiint\limits_\Omega \sqrt[3]{x+2y-2z+5}\mathrm{d}v \leqslant \frac{8\pi}{3}.
$$

证 由 *Cauchy* 不等式, 当 $(x,y,z)\in\Omega$, 即 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 时, 有

$$(x+2y-2z)^2\leqslant\left[1^2+2^2+(-2)^2\right]\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)\leqslant 9$$

于是, $-3\leqslant x+2y-2z\leqslant 3$, 从而 $2\leqslant x+2y-2z+5\leqslant 8$, 故

$$\frac{4\sqrt[3]{2}\pi}{3}=\sqrt[3]{2}\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v\leqslant\iiint\limits_{\Omega}\sqrt[3]{x^2+2y-2z}\mathrm{d}v\leq 2\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\frac{8\pi}{3}.$$

例 6.1.65. 设 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 3$, 证明 $28\sqrt{3}\pi\leqslant\iiint\limits_{\Omega}(x+y-z+10)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\leqslant 52\sqrt{3}\pi$.

证 由 *Cauchy* 不等式, 当 $(x,y,z)\in\Omega$, 即 $x^2+y^2+z^2\leqslant 3$ 时, 有

$$(x+y-z)^2\leqslant\left[1^2+1^2+(-1)^2\right]^2\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\leqslant 9$$

于是, $7\leqslant x+y-z\leqslant 13$, 故

$$28\sqrt{3}\pi=7\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v\leqslant\iiint\limits_{\Omega}(x+y-z+10)\mathrm{d}v\leqslant 13\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=52\sqrt{3}\pi.$$

6.2 曲线积分

曲线积分是对向量场沿着曲线进行积分的数学工具, 用于描述向量场沿着曲线的积分值. 曲线积分可以分为第一类曲线积分和第二类曲线积分.

6.2.1 两类曲线积分

第一类曲线积分的计算

定义 6.2.1 (对弧长的曲线积分 (第一类曲线积分)). $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$, 如果函数 $f(x,y)$ 在曲线 L 上连续, 则 $f(x,y)$ 在曲线 L 上对弧长的曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 一定存在.
上述概念可以推广到空间, 如果 $f(x,y,z)$ 是定义在空间中分段光滑曲线 L 上的有界函数, 则函数 $f(x,y,z)$ 在曲线 L 上对弧长的曲线积分是

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i.$$

定理 6.2.1. 第一类曲线积分有如下基本性质:

(1) $\int_L[f_1(x,y)\pm f_2(x,y)]\mathrm{d}s=\int_L f_1(x,y)\mathrm{d}s+\int_L f_2(x,y)\mathrm{d}s+$;

(2) $\int_L kf(x,y)\mathrm{d}s=k\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$, 其中 k 为常数;

(3) 若 $L=L_1+L_2$, 且 L_1 与 L_2 无公共点, 则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{L_1}f(x,y)\mathrm{d}s+\int_{L_2}f(x,y)\mathrm{d}s.$$

定理 6.2.2 (轴对称性). 若积分弧段 L 关于 y 轴对称, 则

$$I=\begin{cases}2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s, & f(x,y)=f(-x,y)\\ 0, & f(x,y)=-f(-x,y)\end{cases}$$

其中 $L_1=\{(x,y)\mid(x,y)\in L, x\geqslant 0\}$.
若积分弧段 L 关于 x 轴对称, 则

$$I=\begin{cases}2\int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s, & f(x,y)=f(x,-y)\\ 0, & f(x,y)=-f(x,-y)\end{cases}$$

其中 $L_2=\{(x,y)\mid(x,y)\in L, y\geqslant 0\}$.

定理 6.2.3 (轮换对称性). 若把 x 与 y 对调后, L 不变, 则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_L f(y,x)\mathrm{d}s.$$

例 6.2.1. 设曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$ 求 $\oint_L (x^2+2y^2+z)\mathrm{d}s$.

有轮换对称性 $\oint_L x^2\mathrm{d}s=\oint_L y^2\mathrm{d}s=\oint_L z^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$, $\oint_L x\mathrm{d}s=\oint_L y\mathrm{d}s=\oint_L z\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L (x+y+z)\mathrm{d}s$,
因此

$$\oint_L (x^2+2y^2+z)\mathrm{d}s=\oint_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s+\frac{1}{3}\oint_L (x+y+z)\mathrm{d}s=a^2\oint_L \mathrm{d}s+0=2\pi a^3.$$

例 6.2.2. 设 $L:\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3\\ x+y+z=3\end{cases}$ 求 $\oint_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$.

将球心平移到坐标原点, 即 $\begin{cases}X=x-1\\ Y=y-1\\ Z=z-1\end{cases}$ 那么 $L':\begin{cases}X^2+Y^2+Z^2=3\\ X+Y+Z=0\end{cases}$ 因此

$$\begin{aligned}\oint_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s&=\oint_{L'} [(X+1)^2+(Y+1)^2+(Z+1)^2]\mathrm{d}s\\ &=\oint_{L'} (X^2+Y^2+Z^2)\mathrm{d}s+2\oint_{L'} (X+Y+Z)\mathrm{d}s+3\oint_{L'} \mathrm{d}s=6\oint_{L'} \mathrm{d}s=12\sqrt{3}\pi.\end{aligned}$$

定理 6.2.4 (第一类曲线积分化为定积分). (1) 直角坐标形式

平面曲线 L 由直角坐标 $y=y(x), a\leqslant x\leqslant b$ 给出, 则:

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

(2) 参数方程形式

平面曲线 L 由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta \end{cases}$ 给出, 则:

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

(3) 极坐标形式

平面曲线 L 由极坐标 $r=r(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 给出, 则:

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta.$$

(4) 空间曲线 Γ 由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta \end{cases}$ 给出, 则:

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\omega'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

例 6.2.3. 设 L 是由点 $O(0,0)$, $A(2,0)$ 及 $B(2,2)$ 所围成的三角形的周界, 计算曲线积分 $\oint_L(x+y)\mathrm{d}s$.

$OA: y=0,\ x\in[0,2],\ \int_{\overline{OA}}(x+y)\mathrm{d}s=\int_0^2 x\mathrm{d}x=2;\ AB: x=2,\ y\in[0,2],\ \int_{\overline{AB}}(x+y)\mathrm{d}s=\int_0^2(2+y)\mathrm{d}y=6;$

$$OB: y=x,\ x\in[0,2],\ \int_{\overline{OB}}(x+y)\mathrm{d}s=\int_0^2(2x)\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=4\sqrt{2}$$

因此 $\oint_L(x+y)\mathrm{d}s=8+4\sqrt{2}$.

例 6.2.4 (2009 数一). 已知曲线 $L: y=x^2\ \left(0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\right)$, 求 $\int_L x\mathrm{d}s$.

$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$, 于是

$$\int_L x\mathrm{d}s=\int_0^{\sqrt{2}}x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{6}.$$

例 6.2.5. 设 $\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 求曲线积分 $\int_\Gamma(x+y)^2\mathrm{d}s$.

法一: 由 $x+y=-z$, 于是 $\int_\Gamma(x+y)^2\mathrm{d}s=\int_\Gamma z^2\mathrm{d}s$, 由轮换对称性知

$$\int_\Gamma x^2\mathrm{d}s=\int_\Gamma y^2\mathrm{d}s=\int_\Gamma z^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$

又 $x^2+y^2+z^2=a^2$, 于是

$$\int_\Gamma(x+y)^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_\Gamma(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{a^2}{3}\int_\Gamma\mathrm{d}s=\frac{2\pi}{3}a^3.$$

法二: 由 $z=-(x+y)$, 代入 $x^2+y^2+z^2=a^2$, 得 $x^2+y^2+xy=\dfrac{a^2A}{2}$, 故由旋转变换

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y),\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)$$

将其转换为 $3X^2+Y^2=a^2$, 并令 $X=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\cos t, Y=a\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$, 可得 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\cos t-a\sin t\right) \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\cos t+a\sin t\right) \\ z=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}a\cos t \\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi \end{cases}$$

又 $\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\mathrm{d}t=a\mathrm{d}t$, 于是

$$I=\int_0^{2\pi}(x(t)+y(t))^2\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\cos t\right)^2\cdot a\mathrm{d}t=\frac{2}{3}a^3\int_0^{2\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

第二类曲线积分的计算

定义 6.2.2 (对坐标的曲线积分 (第二类曲线积分)).

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$$

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

如果函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在有向曲线 L 上连续时, 上述积分都存在. 类似地, 在空间中有向曲线 Γ 上对坐标 x,y,z 的曲线积分

$$\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i$$

$$\int_L Q(x,y,z)\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i$$

$$\int_L R(x,y,z)\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i.$$

定理 6.2.5. $\displaystyle\int_{\widehat{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\int_{\widehat{BA}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$

定理 6.2.6 (第二类曲线积分化为定积分). (1) 设函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在有向曲线 L 上连续, L 的参数方程为 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\beta)$, 且 $x'(t)$, $y'(t)$ 连续, 而 $t=\alpha$ 时对应于起点 A, $t=\beta$ 时对应于终点 B, 则

$$\int_{\widehat{AB}}P(x,y)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta P[x(t),y(t)]x'(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_{\widehat{AB}}Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta Q[x(t),y(t)]y'(t)\mathrm{d}t$$

(2) 如果曲线 L 由方程 $y=y(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 给出, 曲线 L 的起点 A 的横坐标为 $x=a$, 终点 B 的横坐标为 $x=b$, 函数 $y(x)$ 具有连续的一阶导数, 则

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b P[x,y(x)]\mathrm{d}x$$
$$\int_{\widehat{AB}} Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b Q[x,y(x)]y'(x)\mathrm{d}x$$

(3) 如果曲线 L 由方程 $x=x(y)$ $(c\leqslant y\leqslant d)$ 给出, 曲线 L 的起点 A 的横坐标为 $y=c$, 终点 B 的横坐标为 $y=d$, 函数 $x(y)$ 具有连续的一阶导数, 则

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)\mathrm{d}x=\int_c^d P[x(y),y]x'(y)\mathrm{d}y$$
$$\int_{\widehat{AB}} Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d Q[x(y),y]\mathrm{d}y$$

(4) 对于空间曲线积分, 如果函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在有向曲线 Γ 上连续, Γ 的参数方程为 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$, 且 $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ 连续, 而 $t=\alpha$ 时对应于起点 A, $t=\beta$ 时对应于终点 B, 则

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y,z)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)\mathrm{d}t$$
$$\int_{\widehat{AB}} Q(x,y,z)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)\mathrm{d}t$$
$$\int_{\widehat{AB}} R(x,y,z)\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\mathrm{d}t.$$

例 6.2.6 (2004 数一). 设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分, 求曲线积分 $\displaystyle\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x$.

正向圆周在第一象限内可表示为 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta\\ y=\sqrt{2}\sin\theta\\ \theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}$ 于是

$$\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+2\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi}{2}.$$

例 6.2.7. 设 L 是从点 $A(-1,1)$ 沿曲线 $x^2+y^2=-2y$ $(y\geqslant -1)$ 到点 $B(-1,-1)$ 的有向线段, $f(x)$ 是连续函数, 计算

$$I=\int_L x[f(x)+1]\mathrm{d}y-\frac{y^2[f(x)+1]+2yf(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

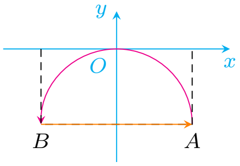


图 6.2.1

错解. 补一有向线段 $\overrightarrow{BA}$, 然后用 Green 公式计算,

令 $P=-\dfrac{y^2[f(x)+1]+2yf(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, $Q=x[f(x)+1]$, 那么 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=\cdots$.

错因: 这道题考查了第二型曲线积分的计算, 注意到题目只说 f 连续, 并没有说**可导**, 所以不能用 Green 公式, 只能用基本方法将 I 化为定积分来计算.

令 $x=\cos t, y=\sin t-1$, $(0\leqslant t\leqslant\pi)$ 代入 I 并化简, 有

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi}\cos t[f(\cos t)+1]\cos t\mathrm{d}t+\frac{(\sin t-1)^2[f(\cos t)+1]+2(\sin t-1)f(\cos t)}{\sin t}\sin t\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\pi}\left\{\cos^2 t[f(\cos t)+1]+(\sin t-1)[f(\cos t)+1]+(2\sin t-2)f(\cos t)\right\}\mathrm{d}t\\&=2\int_0^{\pi}(1-\sin t)\mathrm{d}t=2(t+\cos t)\Big|_0^{\pi}=2\pi-4.\end{aligned}$$

方向导数与两类曲线积分的联系

例 6.2.8. 设 $u(x,y)$ 于圆盘 $D=\left\{(x,y):x^2+y^2\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$ 内有二阶连续的偏导数, 并且满足:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(x^2+y^2\right)\sin^6\left(x^2+y^2\right)$$

记 D 的正向边界曲线为 ∂D, ∂D 的外法线向量为 $\vec{n}$, 求 $\displaystyle\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}s$.

设 $\vec{T}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 对应的正向切线的单位向量, 则单位向量为 $\vec{n}=(\cos\alpha,-\cos\beta)$, 由题设可知 $u(x,y)$ 可微, 故由方向导数计算公式和两类曲线积分之间的关系, 得

$$I=\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}s=\oint_{\partial D}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\beta-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha\right)\mathrm{d}s=\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x$$

于是由 Green 公式和二重积分的极坐标计算公式, 得

$$I=\iint\limits_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\sin^6\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}r^2\sin^6 r^2\mathrm{d}r=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\sin^6 u\mathrm{d}u$$

又因为 $\sin^n x=\begin{cases}\dfrac{1}{(2\mathrm{i})^{n-1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^k\mathrm{C}_n^k\cos((n-2k)x)\\ \dfrac{2}{(2\mathrm{i})^n}\left[\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}(-1)^k\mathrm{C}_n^k\cos((n-2k)x)+\dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2}\mathrm{C}_n^{\frac{n}{2}}\right]\end{cases}$ $\Rightarrow\sin^6 x=-\dfrac{1}{8}\cos^3 2x+\dfrac{3}{16}\cos 4x-\dfrac{3}{8}\cos 2x+\dfrac{5}{16}$, 由分部积分公式

$$\int u\cos nu\mathrm{d}u=\frac{\cos nu}{n^2}+\frac{u\sin nu}{n}+C$$

分别取 $n=2,4,6$, 得 $I=\pi\left(\dfrac{17}{72}+\dfrac{5\pi^2}{128}\right)$.

6.2.2　Green 公式

定理 6.2.7 (Green 公式). Green 公式给出了平面上有限条逐段光滑封闭曲线上的线积分与它们所包围区域上的二重积分的关系:

$$\oint_{L^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里 L^+ 表示沿 L 的正向取积分. 正向指前进时保持在左边的方向, 当 D 为单连通区域时, 即是逆时针方向; 当 D 为多联通区域时, 外边界为逆时针方向, 内边界为顺时针方向. P, Q 要求在区域 D 内直到边界 L 上连续, 并且连续偏导数. 由此可得 D 的面积公式为:

$$S=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{L^+} x\mathrm{d}y=-\oint_{L^-} y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x.$$

计算封闭曲线上的线积分

例 6.2.9. 已知 L 是区域 $D:\dfrac{x}{2}\leqslant y\leqslant 2x,\ 1\leqslant xy\leqslant 2$ 的正向边界曲线, 求

$$\oint_L \mathrm{e}^{x^2y^2}\left[\left(y-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(x+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y\right].$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$, $v=xy$, 那么 $x=\sqrt{\dfrac{v}{u}}$, $y=\sqrt{uv}$, $\mathrm{d}u=\mathrm{d}\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}$, $\mathrm{d}v=\mathrm{d}(xy)=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$, L' 是区域 $D':\dfrac{1}{2}\leqslant u\leqslant 2,\ 1\leqslant v\leqslant 2$ 的正向边界曲线, 于是

$$\begin{aligned}I&=\oint_L \mathrm{e}^{x^2y^2}\left[\left(y-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(x+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y\right]=\oint_L \mathrm{e}^{x^2y^2}\left(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\frac{x}{y}\cdot\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}\right)\\&=\oint_{L'}\mathrm{e}^{v^2}\left(\mathrm{d}v+\frac{1}{u}\mathrm{d}u\right)=\iint\limits_{D'}\frac{2v\mathrm{e}^{v^2}}{u}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}u\int_1^2\frac{2v\mathrm{e}^{v^2}}{u}\mathrm{d}v=2\ln 2(\mathrm{e}^4-\mathrm{e}).\end{aligned}$$

例 6.2.10. 设 Γ 为 $x^2+y^2=2x(y\geqslant 0)$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A(2,0)$ 的一段弧, 连续函数 $f(x)$ 满足

$$f(x)=x^2+\int_\Gamma y[f(x)+\mathrm{e}^x]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x+xy^2)\mathrm{d}y$$

求 $f(x)$.

设 $\displaystyle\int_\Gamma y[f(x)+\mathrm{e}^x]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x+xy^2)\mathrm{d}y=a$, 那么

$$\begin{aligned}a&=\left(\int_{\Gamma+\overline{AO}}-\int_{\overline{AO}}\right)y[f(x)+\mathrm{e}^x]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x+xy^2)\mathrm{d}y=-\iint\limits_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^x-xy^2)-\frac{\partial}{\partial y}(y(f(x)+\mathrm{e}^x))\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\iint\limits_D(\mathrm{e}^x-y^2-x^2-a-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+a\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho+\frac{\pi a}{2}\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta+\frac{\pi a}{2}=\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi a}{2}\Rightarrow a=\frac{3\pi}{2(2-\pi)}\Rightarrow f(x)=x^2+\frac{3\pi}{2(2-\pi)}.\end{aligned}$$

例 6.2.11. 计算积分 $I=\displaystyle\oint_{L^+}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{[(\alpha x+\beta y)^2+(\gamma x+\delta y)^2]^\alpha}$ $(\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0)$, 其中 L^+ 为椭圆 $(\alpha x+\beta y)^2+(\gamma x+\delta y)^2=1$, 取逆时针方向.

L 上 $(\alpha x+\beta y)^2+(\gamma x+\delta y)^2=1$, 因此

$$I=\oint_{L^+}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=2\iint\limits_{(\alpha x+\beta y)^2+(\gamma x+\delta y)^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令 $u=\alpha x+\beta y$, $v=\gamma x+\delta y$, 作变换, 有 $I=2\displaystyle\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}|J|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}$$

因此 $I=\dfrac{2}{|\alpha\delta-\beta\gamma|}\displaystyle\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\dfrac{2\pi}{|\alpha\delta-\beta\gamma|}$.

含有奇点形式

例 6.2.12. 设 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\right\}$, ∂D 为 D 的正向边界, 求

$$I=\int_{\partial D}\frac{\left(x\mathrm{e}^{x^2+4y^2}+y\right)\mathrm{d}x+\left(4y\mathrm{e}^{x^2+4y^2}-x\right)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}.$$

设 $l: x^2+4y^2=\varepsilon^2$, ε 充分小且大于 0, 取顺时针, 如图 6.2.2 所示,

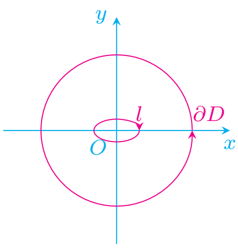


图 6.2.2

则有

$$\int_{\partial D}=\int_{\partial D+l-l}=\int_{\partial D+l}+\int_{l-}:=I_1+I_2$$

设 $P=\dfrac{x\mathrm{e}^{x^2+4y^2}+y}{x^2+4y^2}$, $Q=\dfrac{4y\mathrm{e}^{x^2+4y^2}-x}{x^2+4y^2}$, 那么

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{8xy\mathrm{e}^{x^2+4y^2}\left(x^2+4y^2-1\right)+x^2-4y^2}{\left(x^2+4y^2\right)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

因此 $I_1=\displaystyle\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$, 下求 I_2,

$$I_2=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{l-}\underbrace{\left(x\mathrm{e}^{x^2+4y^2}+y\right)}_{P_1}\mathrm{d}x+\underbrace{\left(4y\mathrm{e}^{x^2+4y^2}-x\right)}_{Q_1}\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_\varepsilon}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{-2}{\varepsilon^2}\iint_{x^2+4y^2\leqslant\varepsilon^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{-2}{\varepsilon^2}\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon}{2}=-\pi$$

故 $I=0-\pi=\pi$.

例 6.2.13. 计算 $\displaystyle\oint_{C^+}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$, C 为以 $(1,0)$ 为圆心, 以 R 为半径的圆周 $(R\neq 1)$, 设 C^+ 表示其上的方向为逆时针方向.

当 $R<1$ 时, 满足 Green 公式的条件, 则

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{4x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-4x^2}{\left(4x^2+y^2\right)^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{4x^2+y^2}\right)$$

所以 $\displaystyle\oint_{C^+}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=0\ (x,y\neq 0)$;

当 $R>1$ 时, 取 $\varepsilon>0$ 充分小, 使得 Γ_ε : $4x^2+y^2=\varepsilon^2$, 且 Γ_ε^+ 表示其上的方向为顺时针方向, 记 C 与 Γ 所围成区域为 D, 则 $\displaystyle\oint_{C^++\Gamma_\varepsilon^+}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=0$, 那么

$$\oint_{C^+}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\oint_{\Gamma_\varepsilon^-}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{\Gamma_\varepsilon^-}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\pi\varepsilon^2=\pi.$$

例 6.2.14. 设 $f(x,y)$ 单位圆上有连续的偏导数, 且在边界上取值为零, 求证:

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\iint_D\frac{x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi f(0,0).$$

其中 D 为圆环域: $\varepsilon^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1$.

证 记 L_1 : $x^2+y^2=1$ (逆时针方向), L_2 : $x^2+y^2=\varepsilon^2$ (顺时针方向),

$$\iint_D\frac{x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{L_2}\frac{-yf(x,y)\mathrm{d}x+xf(x,y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L_2}-yf(x,y)\mathrm{d}x+xf(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{2\pi}^{0}[(-\varepsilon\sin\theta)(-\varepsilon\sin\theta)+\epsilon\cos\theta\cdot\epsilon\cos\theta]\,f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= -\int_{0}^{2\pi}f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta = -2\pi f(\varepsilon\cos\theta^*,\varepsilon\sin\theta^*)\ \ (\theta^*\in[0,2\pi])$$

故 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\iint\limits_D \dfrac{x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\pi f(0,0).$

外法向量形式

例 6.2.15. 设 $u(x,y)$ 于圆盘 $D: x^2+y^2\leqslant\pi$ 内有二阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{\pi-x^2-y^2}\sin\left(x^2+y^2\right)$$

记 D 的正向边界曲线为 ∂D, ∂D 的外法线向量为 $\boldsymbol{n}$, 求 $\displaystyle\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}s$.

令 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta)$, 则 $\dfrac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta$, ∂D 的单位切向量 $\boldsymbol{\tau}=(-\cos\beta,\cos\alpha)$, 于是

$$\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\int_{\partial D}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta\right)\mathrm{d}s=\int_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x=\iint\limits_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D \mathrm{e}^{\pi-x^2-y^2}\sin\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\pi}}\rho\mathrm{e}^{\pi-\rho^2}\sin\left(\rho^2\right)\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{t=\rho^2}\pi\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\pi-t}\sin t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi}+1\right).$$

例 6.2.16. 设函数 $u(x,y)$ 在区域 $D=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant\pi\right\}$ 上有二阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{\pi-x^2-y^2}\cdot\sin\left(x^2+y^2\right)$$

记 D 的正向边界曲线为 L, L 的外法向量为 $\vec{n}$, 求 $\displaystyle\oint_L\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}s$.

因为

$$\oint_L\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}s=\iint\limits_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以

$$\oint_L\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}s=\iint\limits_D\mathrm{e}^{\pi-x^2-y^2}\cdot\sin\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\pi}}\rho\mathrm{e}^{\pi-\rho^2}\sin\rho^2\mathrm{d}\rho=\pi\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\pi-t}\sin t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi}+1\right)$$

积分与路径无关问题

该部分内容可能需要结合第八章“微分方程”的知识, 若不熟悉常见的微分方程求解, 可暂缓阅读.

定义 6.2.3 (单连通与复连通区域). 若平面区域 D 内任一闭曲线所围的部分都属于 D, 则称 D 为平面单连通区域, 否则称为复连通区域. 通俗地讲, 平面单连通区域就是不含有“洞”的区域.

定理 6.2.8 (路径无关). 设函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在区域 D 内具有一阶连续偏导数, 若对于 D 内的任意指定的两点 A,B 以及 D 内从点 A 到点 B 的两条任意曲线 L_1,L_2, 等式

$$\int_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_2} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

恒成立, 则称曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关, 否则称与路径有关.

设在单连通区域 D 内 P,Q 具有一阶连续偏导数, 则下述 6 个说法等价

(1) $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关;

(2) $\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 其中 L 是区域 D 内任意分段光滑闭曲线.

(3) $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=du(x,y)$;

(4) $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y},\forall(x,y)\in D$;

(5) $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$ 为全微分方程;

(6) $Pi+Qj$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度.

例 6.2.17. 计算 $\int_{\widehat{AB}}\dfrac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\dfrac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$, 其中 $\widehat{AB}$ 是自点 $A(-1,0)$ 沿 $y=x^2-1$ 到点 $B(2,3)$ 的弧段.

错解. 错解一: 因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 所以与路径无关, 选取 l_4^- 作为积分路径, 则

$$I=\int_0^3\frac{-1}{1+y^2}\mathrm{d}y+\int_{-1}^2\frac{-3}{x^2+9}\mathrm{d}x=-\arctan 3-\arctan\frac{2}{3}-\arctan\frac{1}{3}=-\arctan\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2}$$

错因: l_1 与 l_3^- 所围成的区域必须是一个单连通区域, 因为原点 $(0,0)$ 无定义, 所以不能取 l_4^- 作为积分路径.

错解二: 因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 所以与路径无关, 选取 l_5 作为积分路径, 则

$$I=\int_0^3\frac{-1}{1+y^2}\mathrm{d}y+\int_{-1}^2\frac{-3}{x^2+9}\mathrm{d}x=\int_0^3\frac{2\mathrm{d}y}{4+y^2}=\arctan\frac{3}{2}$$

错因: 路径 l_5 上含有无定义点 $(0,0)$, 故不能选取该路径作积分.

记 $l_2:\overrightarrow{BA}$, $l_3:x^2+y^2=\varepsilon^2$ 方向: 顺时针, $l_4:\overrightarrow{BCA}$, $l_5:\overrightarrow{AFB}$, $l_6:\overrightarrow{ADEB}$, 则有向线段 l_1, l_2, l_3 围成的区域记为 D_1, 且 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

法一: l_3 围成的区域记为 D_ε 由 Green 公式,

$$\begin{aligned}I&=\left(\oint_{l_1+l_2+l_3}\right)\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\&=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\left(\int_{\overrightarrow{BA}}+\int_{l_3}\right)\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\&=0-\int_{-1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{2x^2+2x+1}+\frac{2}{\varepsilon^2}\iint_{D_\varepsilon}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{4}-\arctan 5+2\pi\\&=\pi+\arctan\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

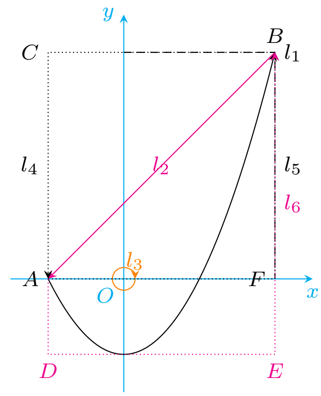


图 6.2.3

法二: 因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 所以与路径无关, 选取 l_6 作为积分路径, 则有

$$\begin{aligned}I&=\int_{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EB}}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_0^{-1}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}+\int_{-1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}+\int_{-1}^{3}\frac{2\mathrm{d}y}{4+y^2}\\&=\frac{\pi}{2}+\arctan 2+\arctan\frac{3}{2}+\arctan\frac{1}{2}=\pi+\arctan\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

法三: $I=\displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}}\frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y=\int_{(-1,0^-)}^{(2,3)}\mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=\int_{-\pi}^{\arctan\frac{3}{2}}\mathrm{d}\theta=\arctan\frac{3}{2}+\pi.$

例 6.2.18. 已知 $\varphi(0)=\dfrac{1}{2}$, 求连续可微函数 $\varphi(x)$, 使得曲线积分 $\displaystyle\int_A^B[\mathrm{e}^x+\varphi(x)]y\mathrm{d}x-\varphi(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关.

令 $P=[\mathrm{e}^x+\varphi(x)]y$, $Q=-\varphi(x)$, 因为积分与路径无关, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow\varphi'(x)+\varphi(x)=-\mathrm{e}^x$$

该方程为一阶线性微分方程, 有通解公式

$$\varphi(x)=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\left[\int(-\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+C\mathrm{e}^{-x}$$

又因为 $\varphi(0)=\dfrac{1}{2}$, 解得 $C=1$, 因此 $\varphi(x)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$.

二重积分分部积分

定理 6.2.9 (二重积分分部积分公式)**.** 设 D 是由一条或几条按段光滑的封闭曲线围成的平面有界闭区域, 若函数 u,v 在闭区域 D 上有连续的一阶偏导数, 则

$$\iint_D u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D}uv\mathrm{d}y-\iint_D v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad\iint_D u\frac{\partial v}{dy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\oint_{\partial D}uv\mathrm{d}x-\iint_D v\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例 6.2.19 (2023 西北大学)**.** 设 D 是由简单光滑闭曲线 L 围成的区域, $f(x,y)$ 在 D 上具有连续的偏导数, 记作: $d=\max\limits_{(x,y)\in D}\sqrt{x^2+y^2}$,

(1) 证明: $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_L x\cdot f\mathrm{d}y-\iint_D x\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(2) 若 $\forall(x,y)\in L$, 有 $f(x,y)=0$, 证明:

$$\iint_D f^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant d^2\iint_D\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证

(1) 有 *Green* 公式得

$$\iint\limits_D u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D}uv\mathrm{d}y-\iint\limits_D v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令 $u=x$, $v=f$, 则有 $\iint\limits_D x\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_L x\cdot f\mathrm{d}y-\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 整理得证;

(2) 由 (1) 可得, $\iint\limits_D f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_L f^2(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)-\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(x\frac{\partial f^2}{\partial x}+y\frac{\partial f^2}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 又 $\forall(x,y)\in L$, 有 $f(x,y)=0$, 于是 $\int_L f^2(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=0$, 故 $\iint\limits_D f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(x\frac{\partial f^2}{\partial x}+y\frac{\partial f^2}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 于是由 *Cauchy-Schwarz* 不等式得,

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y&\leqslant\iint\limits_D\left|xf\frac{\partial f}{\partial x}+yf\frac{\partial f}{\partial y}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_D|f|\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\leqslant d\iint\limits_D|f|\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant d\left[\iint\limits_D f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdot\iint\limits_D\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

即 $\left(\iint\limits_D f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant d\cdot\left[\iint\limits_D\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{2}}$, 不等式两边平方, 即得证.

例 6.2.20. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D:x^2+y^2\leqslant1$ 上有二阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}$, 证明:

$$\iint\limits_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2\mathrm{e}}.$$

证法一 积分区域 D 是圆形域, 考虑采用极坐标, 然后利用已知等式化简被积函数. 令 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, 则

$$D=\{(\rho,\theta)|0\leqslant\rho\leq1,0\leqslant\theta\leq2\pi\}$$

于是

$$\iint\limits_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\left(\rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\theta.$$

记 L_ρ 为半径是 $\rho\,(0\leqslant\rho\leqslant1)$ 的圆周 (逆时针方向), D_ρ 为 L_ρ 包围的区域, 则

$$\int_0^{2\pi}\left(\rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\theta=\oint_{L_\rho}-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y.$$

由 *Green* 公式及已知等式, 得

$$\text{上式}=\iint\limits_{D_\rho}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_\rho}\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\rho\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r=\pi\left(1-\mathrm{e}^{-\rho^2}\right)$$

故

$$\iint\limits_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\rho\pi\left(1-\mathrm{e}^{-\rho^2}\right)\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2\mathrm{e}}.$$

证法二 由 *Green* 公式, 可导出二重积分的分部积分公式:

$$\iint\limits_D u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D}uv\mathrm{d}y-\iint\limits_D v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \iint\limits_D u\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\oint_{\partial D}uv\mathrm{d}x-\iint\limits_D v\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 D 是由一条分段光滑闭曲线所围成的闭区域, ∂D 为 D 的正向边界.

令 $u=\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$, 则由上述公式, 有

$$\iint\limits_D x\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\oint_{\partial D}\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

再令 $u=\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=y=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)$, 类似地, 有

$$\iint\limits_D y\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\oint_{\partial D}\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

于是

$$\iint\limits_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\oint_{\partial D}\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为在边界 ∂D 上, $x^2+y^2=1$, 所以利用 *Green* 公式, 得

$$\begin{aligned}
\text{上式}&=\frac{1}{2}\oint_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(1-x^2-y^2\right)\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(1-\rho^2\right)\rho\mathrm{e}^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2\mathrm{e}}.
\end{aligned}$$

例 6.2.21 (首届数学竞赛数学类决赛). 设 $f(x,y)$ 是 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上二次连续可微函数, 满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2y^2$, 计算积分

$$I=\iint\limits_D\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由 *Green* 公式, 可导出二重积分的分部积分公式:

$$\iint\limits_D u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D}uv\mathrm{d}y-\iint\limits_D v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad \iint\limits_D u\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\oint_{\partial D}uv\mathrm{d}x-\iint\limits_D v\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 D 是由一条分段光滑闭曲线所围成的闭区域, ∂D 为 D 的正向边界.

令 $u=\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x}$, 则由上述公式, 有

$$\iint\limits_D u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D}\sqrt{x^2+y^2}\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

再令 $u=\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{y}$, 类似地, 有

$$\iint\limits_D u\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\oint_{\partial D}\sqrt{x^2+y^2}\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x-\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

于是

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\oint_{\partial D}\sqrt{x^2+y^2}\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\sqrt{x^2+y^2}\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\\
&\quad-\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

因为在边界 ∂D 上, $x^2+y^2=1$, 所以利用 *Green* 公式, 得

$$\begin{aligned}
\text{上式}&=\oint_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x-\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\cdot x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D x^2y^2\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint\limits_D x^2y^2\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^5(1-\rho)\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{168}
\end{aligned}$$

例 6.2.22 (第十三届数学竞赛非数学预赛补赛). 设函数 $f(x,y)$ 在闭区间 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上具有二阶连续偏导数, 且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2+y^2$, 求

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(\tan r-\sin r)^2}.$$

记 $D_r=x^2+y^2\leqslant r^2$, 由 Green 公式, 可导出二重积分的分部积分公式:

$$\iint\limits_{D_r}u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D_r}uv\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_r}v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \iint\limits_{D_r}u\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\oint_{\partial D_r}uv\mathrm{d}x-\iint\limits_{D_r}v\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 D_r 是由一条分段光滑闭曲线所围成的闭区域, ∂D_r 为 D_r 的正向边界.

令 $u=\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=x=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)$, 则由上述公式, 有

$$\iint\limits_{D_r}x\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_r}\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\oint_{\partial D_r}\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\iint\limits_{D_r}\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

再令 $u=\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=y=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)$, 类似地, 有

$$\iint\limits_{D_r}y\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_r}\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\oint_{\partial D_r}\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\iint\limits_{D_r}\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

于是

$$\iint\limits_{D_r}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\oint_{\partial D_r}\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\iint\limits_{D_r}\left(x^2+y^2\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因为在边界 ∂D_r 上, $x^2+y^2=r^2$, 所以利用 Green 公式, 得

$$\begin{aligned}\text{上式}&=\frac{r^2}{2}\oint_{\partial D_r}\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\iint\limits_{D_r}\left(x^2+y^2\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{r^2}{2}\iint\limits_{D_r}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\iint\limits_{D_r}\left(x^2+y^2\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_r}\left[r^2\left(x^2+y^2\right)-\left(x^2+y^2\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^r\left(r^2\rho^3-\rho^5\right)\mathrm{d}\rho=\frac{\pi r^6}{12}\end{aligned}$$

另一方面, $(\tan r-\sin r)^2=\left(r+\dfrac{r^3}{3}-r+\dfrac{r^3}{6}+o\left(r^3\right)\right)^2\sim\dfrac{r^6}{4}$, $r\to 0^+$.

综上, 原式$=\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{\pi r^6}{12}\cdot\dfrac{4}{r^6}=\dfrac{\pi}{3}$.

例 6.2.23. 设 $u(x,y)$ 在 $D:x^2+y^2\leqslant 1$ 上有二阶连续偏导数, 且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{x^2+y^2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}\cdot\mathrm{e}^x$, 试求

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}\left(x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(\tan t-\arctan t)^2}.$$

令 $D_t:x^2+y^2\leqslant t^2$, 由 Green 公式可得二重积分分部积分公式,

$$\begin{cases}\displaystyle\iint\limits_{D_t}x\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D_t}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{x^2+y^2}{2}\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_t}\frac{x^2+y^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\\displaystyle\iint\limits_{D_t}y\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\oint_{\partial D_t}\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{x^2+y^2}{2}\mathrm{d}x-\iint\limits_{D_t}\frac{x^2+y^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{cases}$$

于是

$$I=\iint\limits_{D_t}\left(x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{t^2}{2}\oint_{\partial D_t}\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\iint\limits_{D_t}(x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_t}\left[t^2-(x^2+y^2)\right]\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_t}\left[t^2-(x^2+y^2)\right](x^2+y^2)\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{\mathrm{e}^\xi}{2(\mathrm{e}^\xi+\mathrm{e}^\eta)}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t\left[t^2-r^2\right]r^3\mathrm{d}r=\frac{\mathrm{e}^\xi}{2(\mathrm{e}^\xi+\mathrm{e}^\eta)}\cdot 2\pi\cdot\frac{t^6}{12}$$

其中 $(\xi,\eta)\in D_t$, 那么

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}\left(x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(\tan t-\arctan t)^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{\mathrm{e}^\xi\pi t^6}{12(\mathrm{e}^\xi+\mathrm{e}^\eta)}}{\left(-\frac{2}{3}t^3\right)^2}=\frac{3\pi}{32}.$$

例 6.2.24 (第九届数学竞赛决赛). 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant a^2\right\}$ 上是有一阶连续偏导数, 且满足

$$f(x,y)|_{x^2+y^2=a^2}=a^2,\ 以及\ \max_{(x,y)\in D}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]=a^2$$

其中 $a>0$. 证明: $\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{4}{3}\pi a^4.$

证 由 *Green* 公式, 可导出二重积分的分部积分公式:

$$\iint\limits_D u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D}uv\mathrm{d}y-\iint\limits_D v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad\iint\limits_D u\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\oint_{\partial D}uv\mathrm{d}x-\iint\limits_D v\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 D 是由一条分段光滑闭曲线所围成的闭区域, ∂D 为 D 的正向边界.
令 $\frac{\partial v}{\partial x}=1=\frac{\partial x}{\partial x}$, $u=f(x,y)$, 则由上述公式, 有

$$\iint\limits_D u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D}xf(x,y)\mathrm{d}y-\iint\limits_D x\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

再令 $\frac{\partial v}{\partial y}=1=\frac{\partial y}{\partial y}$, $u=f(x,y)$, 则有

$$\iint\limits_D u\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\oint_{\partial D}yf(x,y)\mathrm{d}x-\iint\limits_D y\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以由 *Cauchy-Schwarz* 不等式,

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|=\frac{1}{2}\oint_{\partial D}|xf(x,y)\mathrm{d}y-yf(x,y)\mathrm{d}x|+\frac{1}{2}\iint\limits_D\left|x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\leqslant a^2\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\leqslant\pi a^4+\frac{a}{2}\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^4+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{4}{3}\pi a^4$$

6.3 曲面积分

曲面积分是对矢量场在曲面上进行积分的数学概念, 类似于曲线积分, 但是在三维空间中考虑曲面而不是曲线. 曲面积分可以分为两类: 第一类曲面积分和第二类曲面积分.

6.3.1 两类曲面积分

第一型曲面积分的计算

定义 6.3.1 (对面积的曲面积分 (第一型曲面积分)). 设 Σ 为空间的有界曲面, 函数 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上定义, 将 Σ 任意地分割为 n 个小曲面 $\Sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$, Σ_i 的面积为 $\Delta S_i, \Sigma_i$ 的直径为 $d_i, \lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\}$, 在 Σ_i 上任取点 (x_i,y_i,z_i), 则函数 f 沿 Σ 的**第一型曲面积分**定义为

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i,y_i,z_i\right)\Delta S_i$$

这里右端的极限存在, 且与分割 Σ 的方式无关, 与点 (x_i,y_i,z_i) 的取法无关. 当 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续时, f 在 Σ 上的第一型曲面积分存在, 即可积.

定理 6.3.1 (偶倍奇零性). (1) 若曲面 Σ 的点关于 $x=0$ 对称, f 在 Σ 上可积, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\begin{cases}0, & \text{若 } f(-x,y,z)=-f(x,y,z),\\ 2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S, & \text{若 } f(-x,y,z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

这里 Σ_1 是 Σ 的 $x\geqslant 0$ 的部分曲面.

(2) 若曲面 Σ 的点关于 $y=0$ 对称, f 在 Σ 上可积, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\begin{cases}0, & \text{若 } f(x,-y,z)=-f(x,y,z),\\ 2\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S, & \text{若 } f(x,-y,z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

这里 Σ_2 是 Σ 的 $y\geqslant 0$ 的部分曲面.

(3) 若曲面 Σ 的点关于 $z=0$ 对称, f 在 Σ 上可积, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\begin{cases}0, & \text{若 } f(x,y,-z)=-f(x,y,z),\\ 2\iint\limits_{\Sigma_3} f(x,y,z)\mathrm{d}S, & \text{若 } f(x,y,-z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

这里 Σ_3 是 Σ 的 $z\geqslant 0$ 的部分曲面.

定理 6.3.2 (第一型曲面积分化为二重积分). 假设曲面 $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ 为有界的光滑曲面, 其参数方程为

$$\boldsymbol{r}=(x,y,z)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),\ (u,v)\in D$$

$D\subset\mathbb{R}^2$ 为有界闭域, Σ 与 D 的点一一对应, 其中函数 $x,y,z\in\mathscr{C}^{(1)}(D)$. 令

$$E=\boldsymbol{r}_u'\cdot\boldsymbol{r}_u',\ F=\boldsymbol{r}_v'\cdot\boldsymbol{r}_v',\ G=\boldsymbol{r}_u'\cdot\boldsymbol{r}_v'$$

若函数 $f \in \mathscr{C}(\Sigma)$, 则函数 $f(x,y,z)$ 沿曲面 Σ 的第一型曲面积分存在, 且有

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EF-G^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

特别, 取参数 u,v 为 x,y, 或 y,z, 或 z,x:

(1) 若曲面 Σ 的方程为 $z=z(x,y),(x,y)\in D$, D 为 xOy 平面上的有界闭域, 函数 $z(x,y)$ 在 D 上连续可微, 函数 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z_x')^2+\left(z_y'\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(2) 若曲面 Σ 的方程为 $x=x(y,z),(y,z)\in D_1$, D_1 为 yOz 平面上的有界闭域, 函数 $x(y,z)$ 在 D_1 上连续可微, 函数 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_1} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(x_y'\right)^2+(x_z')^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

(3) 若曲面 Σ 的方程为 $y=y(z,x),(z,x)\in D_2$, D_2 为 zOx 平面上的有界闭域, 函数 $y(z,x)$ 在 D_2 上连续可微, 函数 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_2} f(x,y(z,x),z)\sqrt{1+(y_z')^2+(y_x')^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

例 6.3.1. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$, 式中 Σ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z \geqslant 0$.

由于

$$\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

所以

$$\begin{aligned}
I = \iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S &= \iint\limits_{D_{xy}}\left(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\left(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}y \\
&= \int_{-a}^{a}\left(\pi ax+2a\sqrt{a^2-x^2}\right)\mathrm{d}x = 4a\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \pi a^3.
\end{aligned}$$

例 6.3.2. 计算曲面积分

$$I = \iint\limits_{\Sigma}\frac{2\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}+\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\cos^2 y}-\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}$$

其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

由 $\dfrac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}=\dfrac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}=\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}=\mathrm{d}S$ 将原式积分化为第一型曲面积分, 得

$$I = \iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{y}{\cos^2 y}-\frac{1}{\cos^2 z}\right)\mathrm{d}S$$

由于曲面 Σ 关于三个坐标平面对称，$\dfrac{2}{\cos^2 x}$ 是关于 x 的偶函数，$\dfrac{y}{\cos^2 y}$ 关于 y 为奇函数，$\dfrac{1}{\cos^2 z}$ 关于 z 为偶函数，应用第一型曲面积分的偶倍奇零性，得

$$I=4\iint\limits_{\Sigma(x\geqslant 0)}\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}S+0-2\iint\limits_{\Sigma(z\geqslant 0)}\frac{1}{\cos^2 z}\mathrm{d}S$$

$\Sigma(x\geqslant 0)$ 的方程是 $x=\sqrt{1-y^2-z^2}$，$D_{yz}:y^2+z^2\leqslant 1$；$\Sigma(z\geqslant 0)$ 的方程是 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，$D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 1$，由于曲面 $\Sigma(x\geqslant 0)$ 与 $\Sigma(z\geqslant 0)$ 的方程关于 x,z 具有轮换性，所以

$$\iint\limits_{\Sigma(x\geqslant 0)}\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma(z\geqslant 0)}\frac{1}{\cos^2 z}\mathrm{d}S\Rightarrow I=2\iint\limits_{\Sigma(z\geqslant 0)}\frac{1}{\cos^2 z}\mathrm{d}S$$

将曲面积分化为区域 D_{xy} 上的二重积分，并在区域 D_{xy} 上用极坐标计算，有

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I=2\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\sec^2\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\sec^2\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=4\pi\int_0^1\sec^2\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\sqrt{1-\rho^2}=4\pi\cdot\tan x\Big|_0^1=4\pi\tan 1.$$

例 6.3.3. 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}yz(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+zx(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xy(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{4Rx-x^2-y^2}\ (R\geqslant 1)$ 在柱面 $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=1$ 之内部分的上侧.

记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4Rx=0\ (z\geqslant 0,R\geqslant 1)$，则曲面 Σ 的法向量为

$$\vec{n}=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)=(x-2R,y,z)$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x-2R}=\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$$

代入曲面积分得，

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\left[yz(y-z)\cdot\frac{x-2R}{z}+zx(z-x)\cdot\frac{y}{z}+xy(x-y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2R\iint\limits_{\Sigma}y(z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

记曲面 Σ 在 xOy 平面上的投影区域为 $D:\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2\leqslant 1$，由偶倍奇零性，则

$$I=2R\iint\limits_{D}y\left(\sqrt{4Rx-x^2-y^2}-y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2R\iint\limits_{D}y\sqrt{4Rx-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2R\iint\limits_{D}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2R\iint\limits_{D}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho=-2R\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho=-\frac{\pi R}{2}.$$

例 6.3.4. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S$，其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=2az\ (a>0)$ 被圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所割下的部分曲面.

利用柱面坐标 $x=a\sin\theta$，$y=y$，$z=a(1+\cos\theta)$，那么 Σ 在参数平面上的投影为

$$D:-\sqrt{2a^2\cos\theta(\cos\theta+1)}\leqslant y\leqslant\sqrt{2a^2\cos\theta(\cos\theta+1)},\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

并且 $\mathrm{d}S=\sqrt{EF-G^2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}y=a\mathrm{d}\theta\mathrm{d}y$，记 $y(\theta)=\sqrt{2a^2\cos\theta(\cos\theta+1)}$，并由对称性，

$$I=a^2\iint\limits_{D}(1+\cos\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}y=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{-y(\theta)}^{y(\theta)}(1+\cos\theta)\mathrm{d}y=2\sqrt{2}a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\xlongequal{\sqrt{\cos\theta}=\sin t}8\sqrt{2}a^3\int_0^{\pi 2}(\sin^2 t+\sin^4 t)\mathrm{d}t=8\sqrt{2}a^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{16}\right)=\frac{7\pi a^3}{\sqrt{2}}.$$

例 6.3.5. 设 P 为椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上一动点, 若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直, 求点 P 的轨迹 C, 并计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})\,|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S$$

其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

设 $P(x_0,y_0,z_0)$, z 轴上的单位向量为 $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$, 椭球面方程为

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-yz-1=0$$

则椭球面 S 上动点 P 的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)_P=(2x_0,2y_0-z_0,2z_0-y_0)$$

由题意有 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}=0\Rightarrow 2z_0=y_0$, 又因为 P 在 S 上, 于是

$$\begin{cases}x_0^2+y_0^2+z_0^2-y_0z_0-1=0\\ 2z_0=y_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x^2+3y^2=4\\ 2z-y=0\end{cases}$$

下求曲面积分, 先计算 $\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$, 因为 $z=z(x,y)$, 于是

$$\begin{cases}2x+2z\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ 2y+2z\dfrac{\partial z}{\partial y}-z-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{y-2z}\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z-2y}{2z-y}\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}&=\sqrt{1+\frac{4x^2}{(y-2z)^2}+\frac{(z-2y)^2}{(2z-y)^2}}=\sqrt{\frac{4x^2+4y^2+4z^2-4yz+y^2+z^2-4yz}{(2z-y)^2}}\\&\xlongequal{x^2+y^2+z^2-yz=1}\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|2z-y|}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{4x^2+3y^2\leqslant 4}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\cdot\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|2z-y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{4x^2+3y^2\leqslant 4}\left(x+\sqrt{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\sqrt{3}\iint\limits_{4x^2+3y^2\leqslant 4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{3}}=2\pi.\end{aligned}$$

例 6.3.6 (第十一届数学竞赛初赛). 计算积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\sin\varphi(\cos\theta-\sin\theta)}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$.

由 $x^2+y^2+z^2=1$ 得 $\begin{cases}x=\sin\varphi\cos\theta\\ y=\sin\varphi\sin\theta\\ z=\cos\varphi\end{cases}$ 并且

$$\begin{aligned}E&=x_\varphi'^2+y_\varphi'^2+z_\varphi'^2=(\cos\varphi\cos\theta)^2+(\cos\varphi\sin\theta)^2+(-\sin\varphi)^2=1\\ F&=x_\varphi'x_\theta'+z_\varphi'x_\theta'+z_\varphi'x_\theta'=-\cos\varphi\cos\theta\cdot\sin\varphi\sin\theta+\cos\varphi\sin\theta\cdot\sin\varphi\cos\theta=0\\ G&=x_\theta'^2+y_\theta'^2+z_\theta'^2=(-\sin\varphi\sin\theta)^2+(\sin\varphi\cos\theta)^2=\sin\varphi^2\end{aligned}$$

那么

$$\sqrt{EG-F^2}=|\sin\varphi|=\sin\varphi\ \ (\varphi\in[0,\pi])$$

于是原积分化为

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}S\xlongequal[z=w]{x=\frac{x+y}{\sqrt{2}},\ y=\frac{x-y}{\sqrt{2}}}\iint\limits_{\Sigma'}\mathrm{e}^{\sqrt{2}u}\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma'}\mathrm{e}^{\sqrt{2}w}\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\sqrt{2}\cos\varphi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\sqrt{2}\pi\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}}-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}\right).$$

第二型曲面积分的计算

定义 6.3.2 (有向曲面). 通常遇到的曲面都是双侧的, 规定正侧的曲面称为有向曲面.

定义 6.3.3 (对坐标的曲面积分 (第二型曲面积分)). 设 Σ 为光滑的有向曲面, $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 都是定义在 Σ 上的有界函数, 将曲面 Σ 任意分成 n 个小曲面 ΔS_i $(i=1,2,\cdots,n)$, 在每个小曲面上任取一点 $N_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$, 曲面 Σ 的正侧在点 N_i 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}_i=\cos\alpha_i\boldsymbol{i}+\cos\beta_i\boldsymbol{j}+\cos\gamma_i\boldsymbol{k}$$

有向小曲面 ΔS_i 在 xOy 平面上投影为 $\Delta S_{i,xy}=\Delta S_i\cos\gamma_i$, 如果当各小曲面直径的最大值 $\lambda\to0$, 和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i,xy}$ 的极限存在, 则称此极限为函数 $R(x,y,z)$ 沿有向曲面 Σ 的正侧上对坐标 x,y 的曲面积分, 记作 $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 即

$$\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i,xy}$$

类似地, 函数 $P(x,y,z)$ 沿有向曲面 Σ 的正侧上对坐标 y,z 的曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i,yz}$$

其中 $\Delta S_{i,yz}=\Delta S_i\cos\alpha_i$, 函数 $Q(x,y,z)$ 沿有向曲面 Σ 的正侧上对坐标 z,x 的曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i,zx}$$

其中 $\Delta S_{i,zx}=\Delta S_i\cos\beta_i$.

定理 6.3.3. 若 Σ 表示有向曲面的正侧, 该曲面的另一侧为负侧, 记为 Σ^-, 则有

$$\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{\Sigma^-}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

即当积分曲面改变为相反侧时, 对坐标的曲面积分也要变号.

计算第二类曲面积分的基本方法是通过投影转化为二重积分的计算; 转化过程可概括为“一代二投三定向”. 现以形如 $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的曲面积分为例, 具体阐述如下:

(1) 选择 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 中所含的两个变量 x, y 作为自变量, 将曲面积分 Σ 的方程表示为函数 $z=z(x,y)$, 再将函数 $z(x,y)$ 代替 $R(x,y,z)$ 中的变量 z, 则复合二元函数 $R(x,y,z(x,y))$ 就是二重积分的被积函数.

(2) 将曲面 Σ 投影到与 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 这两个变量同名的 xOy 坐标面上, 得投影区域 D_{xy}, 这就是二重积分的积分区域, 这样就把对坐标的曲面积分化为二重积分:

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(3) 根据题中给定的曲面 Σ 的方向决定上述等式右端的符号. 如果 Σ 取上侧, 应取正号; 反之为负号. 此外, 如果曲面 Σ 上的法向量始终垂直于 z 轴方向 (即曲面的法向量垂直于投影方向), 则曲面积分的值为零.

值得注意的是: 曲面 Σ 的表达式 $z=z(x,y)$ 必须是单值函数, 否则, 应先将 Σ 分成两部分 Σ_1 和 Σ_2 之和: $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$, 使得 Σ_1 和 Σ_2 的表达式 $z=z(x,y)$ 都是单值函数.

类似的可计算 $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 和 $\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$.

例 6.3.7. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1\ (x,y\geqslant 0)$ 的外侧.

xOy 平面将 Σ 分为上、下两部分, 分别记作 Σ_1 和 Σ_2, 如图 6.3.1 所示, 记在 xOy 平面上的投影区域为 D_{xy},

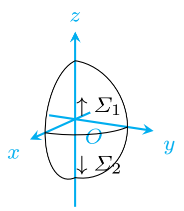


图 6.3.1

$$\begin{aligned}
I &= \left(\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}\right)xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + (-1)\iint\limits_{D_{xy}} xy\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-r^2}r\mathrm{d}r \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r = 1\cdot\frac{2}{15}=\frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

例 6.3.8. 计算曲面积分 $I=\oint\!\!\oint\limits_{\Sigma}\left(\dfrac{2}{\cos^2 x}+\dfrac{y}{\cos^2 y}-\dfrac{1}{\cos^2 z}\right)\mathrm{d}S$, 其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$.

由于 Σ 关于 xOz 面对称, 而 $\dfrac{y}{\cos^2 y}$ 关于 y 是奇函数, 故 $\oint\!\!\oint\limits_{\Sigma}\dfrac{y}{\cos^2 y}\mathrm{d}S=0$, 由有轮换对称性, 则

$$I=\oint\!\!\oint\limits_{\Sigma}\frac{1}{\cos^2 z}\mathrm{d}S = 2\oint\!\!\oint\limits_{\Sigma\uparrow}\sec^2 z\mathrm{d}S$$

且 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, 所以 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 因此

$$\begin{aligned}
I &= 2\iint\limits_{D_{xy}}\sec^2\sqrt{1-x^2-y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\sec^2\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1-r^2}}r\mathrm{d}r \\
&\xlongequal{\sqrt{1-r^2}=t} 4\pi\int_0^1\sec^2 t\mathrm{d}t = 4\pi\tan t\Big|_0^1 = 4\pi\tan 1
\end{aligned}$$

例 6.3.9. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\dfrac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}+\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$, 式中 Σ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

根据轮换对称性知，只要计算一个积分，不妨计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$，并令 $\begin{cases}x=a\rho\cos\theta\\ y=b\rho\sin\theta\end{cases}$ 于是

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}\frac{2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=\frac{2ab}{c}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{d}\rho=4\pi\frac{ab}{c}$$

于是原式 $=4\pi\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)=\frac{4\pi}{abc}(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)$.

例 6.3.10. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧.

根据轮换对称性知，只要计算一个积分，不妨计算 $\iint\limits_{\Sigma}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D_{xy}}\left[c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\right]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_{xy}}\left[c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\right]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=4c\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4c\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\\&=8\pi c\left[-\frac{1}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R=\frac{8}{3}\pi cR^3\end{aligned}$$

于是原式 $\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c)$.

三重积分分部积分

定理 6.3.4 (三重积分分部积分公式). 该定理是定理 6.2.9 推广到三维的形式，设 Ω 是由一张或几张分片光滑的双侧封闭曲面围成的空间有界闭区域，若 u,v 在闭区域 Ω 上有连续的一阶偏导数，则

$$\begin{cases}\iiint\limits_{\Omega}u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\partial\Omega}uv\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iiint\limits_{\Omega}v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\\ \iiint\limits_{\Omega}u\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\partial\Omega}uv\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\iiint\limits_{\Omega}v\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\\ \iiint\limits_{\Omega}u\frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\partial\Omega}uv\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iiint\limits_{\Omega}v\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{cases}$$

例 6.3.11 (第八届数学竞赛决赛). 设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega=\left\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant 1\right\}$ 上具有连续的二阶偏导数，且满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

因为

$$\iiint\limits_{\Omega}u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\partial\Omega}uv\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iiint\limits_{\Omega}v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\iiint\limits_{\Omega}u\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\partial\Omega}uv\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\iiint\limits_{\Omega}v\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\iiint_{\Omega} u\frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\partial\Omega} uv\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iiint_{\Omega} v\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

所以

$$\begin{aligned}
I=&\oiint_{x^2+y^2+z^2=1}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\
&-\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant1}\left[\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
=&\frac12\oiint_{x^2+y^2+z^2=1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)-\frac12\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant1}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac32}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
=&\frac12\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant1}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left[1-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac12\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho\left(1-\rho^2\right)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

例 6.3.12. 设函数 $f(x,y,z)$ 在 $\Omega=\left\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant1\right\}$ 上具有连续的二阶偏导数, 且满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac32}$$

求极限 $\displaystyle\lim_{r\to0^+}\frac{\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant r^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}V}{\sin r(\tan r-\sin r)^2}$.

记 $\Omega_r:x^2+y^2+z^2\leqslant r^2$, 由三重积分分部积分公式:

$$\iiint_{\Omega_r}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}V=\oiint_{\partial\Omega_r}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iiint_{\Omega_r}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}V$$

同理可得,

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\Omega_r}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}V\\
=&\oiint_{\partial\Omega_r}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)-\iiint_{\Omega_r}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}V\\
=&\iiint_{\Omega_r}\left(r-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega_r}\left(r-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac32}\mathrm{d}V\\
=&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^r(r-\rho)\rho^5\mathrm{d}\rho=\frac{2\pi r^7}{21}
\end{aligned}$$

且 $\sin r(\tan r-\sin r)^2\sim r\left(r+\dfrac{r^3}{3}-r+\dfrac{r^3}{6}\right)=\dfrac{r^7}{4}$, $r\to0^+$, 故原极限 $=\dfrac{8\pi}{21}$.

第二型曲面积分的分部积分公式

定理 6.3.5 (第二型曲面积分的分部积分公式). 设光滑曲面 Σ 的边界曲线 Γ 按段光滑, 函数 $P_i(x,y,z)$, $Q_i(x,y,z)$, $R_i(x,y,z)$ $(i=1,2)$ 在 Σ (连同 Γ) 上有连续的一阶偏导数, 则

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma}\left(R_1\frac{\partial R_2}{\partial y}-Q_1\frac{\partial Q_2}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(P_1\frac{\partial P_2}{\partial z}-R_1\frac{\partial R_2}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(Q_1\frac{\partial Q_2}{\partial x}-P_1\frac{\partial P_2}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\oint_{\Gamma}P_1P_2\mathrm{d}x+Q_1Q_2\mathrm{d}y+R_1R_1\mathrm{d}z-\iint_{\Sigma}\left(R_2\frac{\partial R_1}{\partial y}-Q_2\frac{\partial Q_1}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

$$+\left(P_2\frac{\partial P_1}{\partial z}-R_2\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(Q_2\frac{\partial Q_1}{\partial x}-P_2\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Σ 的方向与 Γ 的方向满足右手定则.

证 由 *Stokes* 公式

$$\oint_\Gamma P_1P_2\mathrm{d}x=\iint_\Sigma \frac{\partial}{\partial z}(P_1P_2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial}{\partial y}(P_1P_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Sigma P_1\left(\frac{\partial P_2}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P_2}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)+\iint_\Sigma P_2\left(\frac{\partial P_1}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P_1}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

移项得

$$\iint_\Sigma P_1\left(\frac{\partial P_2}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P_2}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)=\oint_\Gamma P_1P_2\mathrm{d}x-\iint_\Sigma P_2\left(\frac{\partial P_1}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P_1}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

同理可得

$$\iint_\Sigma Q_1\left(\frac{\partial Q_2}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\partial Q_2}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)=\oint_\Gamma Q_1Q_2\mathrm{d}y-\iint_\Sigma Q_2\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\partial Q_1}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)$$

$$\iint_\Sigma R_1\left(\frac{\partial R_2}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{\partial R_2}{\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\right)=\oint_\Gamma R_1R_2\mathrm{d}z-\iint_\Sigma R_2\left(\frac{\partial R_1}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{\partial R_1}{\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\right)$$

三式相加即得证.

6.3.2 Gauss 公式、Stokes 公式

Gauss 公式与 Stokes 公式, 它们都是重要的数学定理, 用于描述向量场在不同维度下的积分关系.

1. Gauss 公式: 高斯公式是关于向量场的散度的一个重要定理, 也称为散度定理.
2. Stokes 公式: 斯托克斯公式是关于向量场的旋度的一个定理, 描述了曲面和曲线之间的关系.

Gauss 公式

定理 6.3.6 (Gauss 公式)**.** 设空间封闭区域 Ω 由分片光滑闭曲面 Σ 所围成, $P(x,y,z),Q(x,y,z)$ 与 $R(x,y,z)$ 在 Ω 内具有连续的一阶偏导数, 则

$$\oiint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

这里 Σ 是 Ω 的整个边界曲线的外侧.

例 6.3.13. 设光滑曲面 S 是有界区域 V 的边界, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

(1) $\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$	(2) $\iint_S xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$
(3) $\iint_S \frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}S.$	(4) $\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S.$

(1) 因为 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=3\left(x^2+y^2+z^2\right)$, *所以*

$$\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint_V\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(2) 因为 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$, 所以 $\iint\limits_S xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

(3) 因为 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 所以

$$\iint\limits_S \frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}S=2\iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

(4) 因为 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u$, 所以

$$\iint\limits_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S=\iiint\limits_V \Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

例 6.3.14. 求 $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为立方体 $0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant a,\ 0\leqslant z\leqslant a$ 的外表面.

原式 $=2\iiint\limits_V (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a(x+y+z)\mathrm{d}z=3a^4$.

例 6.3.15. 求 $\iint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外表面.

原式 $=3\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{12\pi}{5}a^5$.

例 6.3.16. 计算 $\iint\limits_S\left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$, 其中 S 为部分圆锥面 $x^2+y^2=z^2\ (0\leqslant z\leqslant h)$, $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

合并 $S_1: z=h, x^2+y^2\leqslant h^2$ 组成封闭曲面: $S+S_1$, 它是空间区域 V 的边界, 那么

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{S+S_1}\left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)\mathrm{d}S=2\iiint\limits_V(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h\rho\mathrm{d}\rho\int_\rho^h(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+z)\mathrm{d}z=\frac{\pi h^4}{2}\end{aligned}$$

又因为 $\iint\limits_{S_1}\left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)\mathrm{d}S=h^2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi h^4$, 所以原式 $=I-\pi h^4=-\frac{\pi h^4}{2}$.

例 6.3.17. 证明公式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z,t)\mathrm{d}S+\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ (t>0)$$

证 作变量代换 $x=tu,\ y=tv,\ z=tw$, 则

$$\begin{aligned}I&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1^2} t^3 f(tu,tv,tw,t)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\right]\\&=\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}\left[t^3\left(\frac{\partial f}{\partial x}u+\frac{\partial f}{\partial y}v+\frac{\partial f}{\partial z}w+\frac{\partial f}{\partial t}\right)+3t^2 f\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} t^3\left\{\frac{1}{t}\left[\frac{\partial}{\partial x}(fx)+\frac{\partial}{\partial y}(fy)+\frac{\partial}{\partial z}(fz)\right]\right\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w+\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} t^3\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{t}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(fx)+\frac{\partial}{\partial y}(fy)+\frac{\partial}{\partial z}(fz)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{t}\iint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}(fx\cos\alpha+fy\cos\beta+fz\cos\gamma)\mathrm{d}S+\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ (t>0)
\end{aligned}
$$

其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=t^2$ 上向外法线的方向余弦, 显然

$$\cos\alpha=\frac{x}{t},\ \cos\beta=\frac{y}{t},\ \cos\gamma=\frac{z}{t}$$

于是

$$\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2}(fx\cos\alpha+fy\cos\beta+fz\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{t}\mathrm{d}S=t\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f\mathrm{d}S$$

即得证.

例 6.3.18. 设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $\left(1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\right)$ 的下侧, $f(x)$ 是连续函数, 计算

$$I=\iint\limits_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[yf(xy)+2y+x]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[zf(xy)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

错解. 补 $\Sigma_1: x^2+y^2\leqslant 1, z=1$ 方向取下侧, $\Sigma_2: x^2+y^2\leqslant 4, z=2$ 方向取上侧, 后用 *Gauss* 公式, 下略.
错因: 题目说 f 连续, 并没有说它可导, 所以 $f'(xy)$ 不一定存在, 因此不能使用 *Gauss* 公式.

曲面 Σ 在 xOy 面上的投影区域为 $D=\left\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\right\}$, 且 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 并且

$$\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma}(P,Q,R)\left(-f_x',-f_y',1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

于是

$$
\begin{aligned}
I&=-\iint\limits_{D}\left\{[xf(xy)+2x-y]\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+[yf(xy)+2y+x]\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+[f(xy)+1]\sqrt{x^2+y^2}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&=\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2|r|\cdot r\mathrm{d}r\xlongequal{r>0}2\pi\int_1^2 r^2\mathrm{d}r=\frac{14}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

例 6.3.19. 设 Σ 为任意闭曲面,

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{4}{3}y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(3y-\frac{1}{3}z^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(1) 证明 Σ 为椭球面 $x^2+4y^2+z^2=1$ 时, I 达到最大值;

(2) 求 I 的最大值 I_{max}.

(1) 令 $P=x-\frac{1}{3}x^3$, $Q=-\frac{4}{3}y^3$, $R=3y-\frac{1}{3}z^3$, 那么

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1-x^2-4y^2-z^2$$

由 *Gauss* 定理知, $I=\iiint\limits_{\Omega}(1-x^2-4y^2-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 为使 I 最大, 要求 Ω 是使得 $1-x^2-4y^2-z^2\geqslant 0$ 的最大空间区域, 即

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid 1-x^2-4y^2-z^2\geqslant 0\right\}$$

Σ 是 Ω 的表面, 即为椭球面 $x^2+4y^2+z^2=1$.

(2) 即求 $I=\displaystyle\iiint\limits_{x^2+4y^2+z^2\leqslant1}(1-x^2-4y^2-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 令 $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=\dfrac{r}{2}\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$ 则有

$$|J|=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right|=\left\|\begin{matrix}\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta\\ \dfrac{1}{2}\sin\varphi\sin\theta & \dfrac{r}{2}\cos\varphi\sin\theta & \dfrac{r}{2}\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}r^2\sin\varphi$$

因此

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1(1-r^2)r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\cdot2\pi\cdot2\int_0^1(r^2-r^4)\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{15}.$$

例 6.3.20. 求曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Σ 是由 $z=\mathrm{e}^y\ (0\leqslant y\leqslant1)$ 绕 z 轴旋转一周所得的曲面, 方向取下侧.

取 $\Sigma_1: x^2+y^2\leqslant1,\ z=\mathrm{e}$, 方向取上侧, 则由 *Gauss* 公式得,

$$\begin{aligned}I&=\left(\ \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}\right)[4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y]=-\iint\limits_{\Sigma_1}4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\mathrm{e}^2-1)\pi.\end{aligned}$$

例 6.3.21. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$, 其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 上侧, a 为大于零的常数.

取 $\Sigma_1: z=0, x^2+y^2\leqslant a^2$, 方向取上侧, 并记 $\Sigma+\Sigma_1$, 围成的有界闭区域为 Ω, 于是

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1+0+\frac{2z+2a}{a}=3+\frac{2}{a}z$$

于是由 *Gauss* 公式得

$$\begin{aligned}&\oiint\limits_{\Sigma^-+\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{(z+a)^2}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(3+\frac{2}{a}z\right)\mathrm{d}V=3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V+\frac{2}{a}\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V\\&=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi a^3+\frac{2}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho=2\pi a^3+\frac{4\pi}{a}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^a\rho^3\mathrm{d}\rho\\&=2\pi a^3-\frac{\pi a^3}{2}=\frac{3\pi a^3}{2}\end{aligned}$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}=\iint\limits_{\Sigma_1}-\oiint\limits_{\Sigma^-+\Sigma_1}=a\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{3\pi a^3}{2}=-\frac{\pi a^3}{2}.$$

例 6.3.22. 计算曲面积分

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+}(x+y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2y+\sin(z+x)]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z+\mathrm{e}^{x+y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Σ^+ 为曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外表面.

由 Gauss 公式得 $I=\iiint\limits_{\Omega}(1+2+3)\mathrm{d}V$, 其中 Ω 为 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|\leqslant 1$, 作旋转变换 $\begin{cases}u=x-y+z\\ v=y-z+x\\ w=z-x+y\end{cases}$, 此时 Σ 变成 $|u|+|v|+|w|=1$, 并且有

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{vmatrix}}=\frac{1}{4}$$

故[1] $I=\dfrac{3}{2}\iiint\limits_{\Omega'}\mathrm{d}V=\dfrac{3}{2}\times 8\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1=2.$

例 6.3.23. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为下半椭球面

$$\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y-2)^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ z\leqslant 0$$

的上侧.

补一平面 $S:\dfrac{(x-1)^2}{a^2}+\dfrac{(y-2)^2}{b^2}\leqslant 1,\ z=0$ 方向取下侧, 由 Gauss 公式, 得

$$\iint\limits_{\Sigma}+\iint\limits_{S}=\oiint\limits_{\Sigma+S}=-\oiint\limits_{(\Sigma+S)^-}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=-2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}V$$

其中 $P=x^2+y,\ Q=y^2+z,\ R=z^2+x,\ \Omega=\left\{(x,y,z)\mid\dfrac{(x-1)^2}{a^2}+\dfrac{(y-2)^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1\right\}$, 并且注意到

$$\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}V=\overline{x}\cdot V=1\cdot\frac{4}{3}\pi abc=\frac{4}{3}\pi abc,\quad \iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}V=\overline{y}\cdot V=2\cdot\frac{4}{3}\pi abc=\frac{8}{3}\pi abc$$

用截面法求 $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V$,

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V=\int_{-c}^{0}z\mathrm{d}z\iint\limits_{\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y-1)^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi ab\int_{-c}^{0}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)z\mathrm{d}z=-\frac{\pi abc^2}{4}$$

又

$$\iint\limits_{S}(x^2+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{S}(z^2+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D}(z^2+x)\mathrm{d}\sigma=-\iint\limits_{D}x\mathrm{d}\sigma=-\overline{x}\cdot A=-\pi ab$$

所以

$$\iint\limits_{\Sigma}=-\oiint\limits_{(\Sigma+S)^-}-\iint\limits_{S}=-2\left(\frac{4}{3}\pi abc+\frac{8}{3}\pi abc-\frac{\pi abc^2}{4}\right)+\pi ab=\pi ab\left(\frac{c^2}{2}-8c+1\right).$$

例 6.3.24. 计算曲面积分

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

其中 $\Sigma^+:1-\dfrac{z}{7}=\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{16}\ (z\geqslant 0)$ 的上侧.

---

[1]因为有 8 个卦限, 每个卦限中均为正四面体, 故体积为 $8\times\dfrac{1}{6}$.

用 Σ_1^+ 表示以原点为中心, ε 为半径的上半球面, Σ_1^- 则表示内侧, Σ_2^- 表示 $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{16}\leqslant 1$ 的下表面, σ^- 表示 $x^2+y^2\leqslant\varepsilon^2$ 的下表面, 由 *Gauss* 公式得

$$\begin{aligned}
I &= \oiint_{\Sigma^+}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \left(\oiint_{\Sigma^++\Sigma_1^-+\Sigma_2^-}-\oiint_{\Sigma_1^-}-\oiint_{\Sigma_2^-}\right)\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\\
&= \iiint_\Omega 0\mathrm{d}V+\oiint_{\Sigma_1^+}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}-\oiint_{\Sigma_2^-}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\\
&= \frac{1}{\varepsilon^3}\oiint_{\Sigma_1^+}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{\varepsilon^3}\left(\oiint_{\Sigma_1^++\sigma^-}-\oiint_{\sigma^-}\right)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \frac{3}{\varepsilon^3}\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant\varepsilon^2\\ z\geqslant 0}}\mathrm{d}V = \frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac12\cdot\frac43\pi\varepsilon^3 = 2\pi.
\end{aligned}$$

例 6.3.25. 求 $I=\oiint_\Sigma\dfrac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(x+a)y\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}$, 且 $\Omega=\left\{(x,y,z)|-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\leqslant z\leqslant 0, a>0\right\}$, Σ 为 Ω 的边界曲面外侧.

$I=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\oiint_\Sigma ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(x+a)y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$, 记 $\Sigma_1: z=0(x^2+y^2\leqslant a^2)$, 取上侧。

$$\begin{aligned}
\oiint_{\Sigma_1+\Sigma} ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(x+a)y\mathrm{d}z\mathrm{d}x &= \iiint_\Omega(3a+2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&= 3a\iiint_\Omega\mathrm{d}v+2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\cos\theta\sin\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\\
&= 3a\cdot\frac43\pi a^3\cdot\frac12+0 = 2\pi a^4
\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}
\oiint_\Sigma = \oiint_{\Sigma_1+\Sigma}-\oiint_{\Sigma_1} &= 2\pi a^4-\oiint_{\Sigma_1}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(x+a)y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 2\pi a^4-2\oiint_{\Sigma_1}(x+a)y\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\
&= 2\pi a^4-2\iint_{D_{xz}}(x+a)\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 2\pi a^4
\end{aligned}$$

所以 $I=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\cdot\oiint_\Sigma ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(x+a)y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\dfrac{2\pi a^4}{\sqrt{a^2+1}}$.

例 6.3.26. 已知点 $A(1,0,0)$ 与点 $B(1,1,1)$, Σ 是由直线 $\overline{AB}$ 绕 z 轴旋转一周而成的旋转曲面介于平面 $z=0$ 与 $z=1$ 之间部分的外侧, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有连续导数, 计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma[xf(xy)-2x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[y^2-yf(xy)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

易得旋转曲面方程为 $x^2+y^2=1+z^2\ (0\leqslant z\leqslant 1)$, 添加以下辅助面:

$$\Sigma_0: x^2+y^2\leqslant 1, z=0,\ \text{方向向下}$$

$$\Sigma_1: x^2+y^2\leqslant 1, z=1,\ \text{方向向上}$$

并且令 $P=xf(xy)-2x$, $Q=y^2-yf(xy)$, $R=(z+1)^2$, 那么

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2y+2z$$

由 *Gauss* 公式得,

$$I=\left(\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_0}-\iint\limits_{\Sigma_1}\right)\left[(xf(xy)-2x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^2-yf(xy)\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(2y+2z)\mathrm{d}V-(-\pi)-(8\pi)=2\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V-7\pi=2\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1+z^2}\mathrm{d}\sigma-7\pi=\frac{3}{2}\pi-7\pi=-\frac{11\pi}{2}.$$

例 6.3.27. 求 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\mathrm{d}S}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}$, 其中曲面 Σ 是方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (a,b,c>0)$$

确定的椭球面.

记 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$, 取 $\vec{n}$ 为曲面 Σ 指向外侧的法向量, 则

$$\vec{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)=\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{a^2},\frac{2z}{a^2}\right)$$

对应的单位向量, 即方向余弦构成的向量为

$$\vec{n}^{\circ}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{4x^2}{a^4}+\dfrac{4y^2}{a^4}+\dfrac{4z^2}{a^4}}}\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{a^2},\frac{2z}{a^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{a^4}+\dfrac{z^2}{a^4}}}\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{a^2},\frac{z}{a^2}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

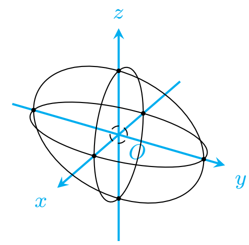


图 6.3.2

于是

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\left(\dfrac{x}{a^2},\dfrac{y}{b^2},\dfrac{z}{c^2}\right)}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}\cdot\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

补 $\Sigma_\varepsilon: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2\ (\varepsilon>0)$, 取内侧, Ω_ε 是 Σ_ε 所围成立体区域, 因此

$$I=\left(\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_\varepsilon}-\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\right)\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=-\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}\mathrm{d}V=\frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3=4\pi.$$

例 6.3.28. (第十一届数学竞赛决赛) 设 Ω 是由光滑简单封闭曲面 Σ 围成的有界闭区域, 函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上具有连续二阶导数, 且 $f(x,y,z)|_{(x,y,z)\in\Sigma}=0$, 记 ∇f 为 $f(x,y,z)$ 的梯度, 并令

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

证明, 对任意常数 $C>0$, 恒有

$$C\iiint\limits_{\Omega}f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{C}\iiint\limits_{\Omega}(\Delta f)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\geqslant 2\iiint\limits_{\Omega}|\nabla f|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

证 由 Gauss 公式, 得

$$\oiint_{\Sigma} f\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+f\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+f\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(f\Delta f+|\nabla f|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

因为 $f(x,y,z)|_{(x,y,z)\in\Sigma}=0$, 所以上式左端等于 0.

$$\iiint_{\Omega}|\nabla f|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\iiint_{\Omega}f\Delta f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\leqslant\left(\iiint_{\Omega}f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iiint_{\Omega}(\Delta f)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{2}}$$

故对任意的 C 均有,

$$C\iiint_{\Omega}f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{C}\iiint_{\Omega}(\Delta f)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\geqslant2\left(\iiint_{\Omega}f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iiint_{\Omega}(\Delta f)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant2\iiint_{\Omega}|\nabla f|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

例 6.3.29. 设 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上的连续函数, 且满足

$$f(x,y,z)=(x+y+z)^2+\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $\Sigma: x^2+y^2=5z\ (0\leqslant z\leqslant1)$, 方向为下侧, 求 $f(x,y,z)$ 的表达式.

令 $\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=A$, 并且

$$\iint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{x^2+y^2\leqslant5}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt5}\rho^2\cos^2\theta\rho\mathrm{d}\rho=-\frac{25\pi}{4}$$

于是, $f(x,y,z)=(x+y+z)^2+A-\dfrac{25\pi}{4}$, 两边积分得

$$A=\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\left[(x+y+z)^2+A-\frac{25\pi}{4}\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

添加一平面 $\Sigma_1: z=1, x^2+y^2\leqslant5$, 方向取上侧, 则由 Gauss 公式

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}\left[(x+y+z)^2+A-\frac{25\pi}{4}\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega}2(x+y+z)\mathrm{d}V=2\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}V=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt5}r\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{5}}^{1}z\mathrm{d}z=\frac{10\pi}{3}$$

且 $\iint_{\Sigma_1}\left[(x+y+z)^2+A-\dfrac{25\pi}{4}\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$, 所以 $A=\dfrac{10\pi}{3}$, 于是 $f(x,y,z)=(x+y+z)^2-\dfrac{35}{12}\pi$.

Stokes 公式

定理 6.3.7 (Stokes 积分法). 设 Σ 是逐段光滑的单闭曲线 Γ 所包围的非封闭光滑双侧曲面, 取某定侧 Σ^+, 按右手规则确定 Γ 的正向 Γ^+, Ω 是空间的立体区域, 使得 $\Sigma\subset\Omega$, 函数 P, Q, R 在 Ω 上连续可微, 则有 Stokes 公式:

$$\begin{aligned}&\oint_{\Gamma^+}P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\\=&\iint_{\Sigma^+}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint_{\Sigma^+}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z&\mathrm{d}z\mathrm{d}x&\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}=\iint_{\Sigma^+}\begin{vmatrix}\cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}\mathrm{d}S\end{aligned}$$

定理 6.3.8. 空间曲线积分与路径无关的充要条件: 设 G 是空间的面单连通区域, 函数 P,Q,R 在 G 上连续可微, 则下列四条陈述相互等价:

(1) $\forall(x,y,z)\in\Omega,\ \dfrac{\partial R}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial z},\ \dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x},\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$;

(2) $\forall A,B\in\Omega,\ \displaystyle\int_A^B P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 与路线无关;

(3) $\forall\Gamma\subset\Omega$, Γ 为封闭曲线, $\displaystyle\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0$;

(4) 存在可微函数 $u(x,y,z)$, 使得 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$, 且

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^x P\left(x,y_0,z_0\right)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^y Q\left(x,y,z_0\right)\mathrm{d}y+\int_{z_0}^z R(x,y,z)\mathrm{d}z+C$$

或

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^x P(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^y Q\left(x_0,y,z\right)\mathrm{d}y+\int_{z_0}^z R\left(x_0,y_0,z\right)\mathrm{d}z+C$$

这里 $\left(x_0,y_0,z_0\right),(x,y,z)\in G$.

例 6.3.30. 计算 $I=\displaystyle\int_\Gamma(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$, 其中 Γ 是柱面 $x^2+y^2=R^2$ 和平面 $x+z=R$ 相交的椭圆, 且从 x 轴正向看去, Γ 的方向是逆时针的.

设 Σ 为平面 $x+y=R$ 被柱面截下部分的上侧, 则由 *Stokes* 公式, 有

$$I=\iint\limits_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint\limits_\Sigma -2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2\mathrm{d}z\mathrm{d}x-2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\iint\limits_{D_{yz}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2\iint\limits_{D_{zx}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-2\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi R^2-0-2\pi R^2=-4\pi R^4.$$

例 6.3.31 (第九届数学竞赛预赛). 设曲线 Γ 为在 $x^2+y^2+z^2=1,\ x+z=1,\ x\geqslant0,\ y\geqslant0,\ z\geqslant0$ 上从 $A(1,0,0)$ 到 $B(0,0,1)$ 的一段, 求 $I=\displaystyle\oint_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$.

记 Γ_1 为 B 到 A 的直线段, 则

$$x=t,y=0,z=1-t,0\leqslant t\leqslant1$$

$$\int_{\Gamma_1}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_0^1 t\,\mathrm{d}(1-t)=-\frac{1}{2}$$

$$\oint_{\Gamma+\Gamma_1}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint\limits_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint\limits_\Sigma -\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_{zx}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\iint\limits_{D_{yz}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\frac{\pi}{2\sqrt2}$$

$$I=\oint_{\Gamma+\Gamma_1}-\int_{\Gamma_1}=\oint_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\frac12-\frac{\pi}{2\sqrt2}.$$

例 6.3.32 (2001 数一). 计算

$$I=\oint_L\left(y^2-z^2\right)\mathrm{d}x+\left(2z^2-x^2\right)\mathrm{d}y+\left(3x^2-y^2\right)\mathrm{d}z$$

其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线, 从 z 轴正方向看去, L 为逆时针方向.

设 Σ 为平面 $x+y+z=2$ 的上侧被 L 所围成的部分, Σ 在 xOy 面的投影区域为

$$D_{xy}=\{(x,y)|\ |x|+|y|\leqslant 1\}$$

Σ 的单位向量为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$, 于是由 *Stokes* 公式得

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}}&\dfrac{1}{\sqrt{3}}&\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2&2z^2-x^2&3x^2-y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}(4x+2y+3z)\mathrm{d}S\\&=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_{D_{xy}}(x-y+6)\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint\limits_{D_{xy}}(x-y+6)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

由二重积分的对称性知 $\displaystyle\iint\limits_{D_{xy}}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$, 所以 $I=-12\displaystyle\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-24.$

例 6.3.33. 求曲线积分

$$I=\oint_L(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

其中 L 是两球面

$$x^2+y^2+z^2=1\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$$

的交线, 积分方向从 z 轴正向看为逆时针方向.

由 $\begin{cases}x^2&+&y^2&+&z^2&=1\\(x-1)^2&+&(y-1)^2&+&(z-1)^2&=4\end{cases}\Rightarrow x+y+z=0$, 平面 $x+y+z=0$ 上, 曲线 L 所包围的圆域为 Σ, 即

$$\Sigma=\{(x,y,z)|x+y+z=0,x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$$

于是, 由 *Stokes* 公式得

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ y-z&z-x&x-y\end{vmatrix}\mathrm{d}S=-2\iint\limits_{\Sigma}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\mathrm{d}S\\&=-\frac{6}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=-\frac{6}{\sqrt{3}}\cdot\pi\cdot 1^2=-2\sqrt{3}\pi.\end{aligned}$$

例 6.3.34. 设 L 为空间某封闭光滑曲线, P, Q, R 为空间中具有一阶连续偏导数的函数, 证明:

$$\left|\oint_{L^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\right|\leqslant\max_{(x,y,z)\in S}\sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2}\cdot S$$

其中 S 表示 L 上展开的 (以 L 为边界的) 某曲面, 同时也用它表示曲面的面积.

证 由 *Cauchy-Schwarz* 不等式,

$$\begin{aligned}\text{左端}&\xlongequal{Stokes}\iint\limits_{S}[(R_y'-Q_z')\cos\alpha+(P_z'-R_x')\cos\beta+(Q_x'-P_y')\cos\gamma]\mathrm{d}S\\&\leqslant\iint\limits_{S}\sqrt{[(R_y'-Q_z')^2+(P_z'-R_x')^2+(Q_x'-P_y')^2]\cdot(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)}\mathrm{d}S\\&\leqslant\max_{(x,y,z)\in S}\sqrt{(R_y'-Q_z')^2+(P_z'-R_x')^2+(Q_x'-P_y')^2}\cdot\iint\limits_{S}\mathrm{d}S=\text{右端}\end{aligned}$$

例 6.3.35. 设 $f(x)$ 一阶连续可导,

$$R(x,y,z)=\int_0^{x^2+y^2}f(z-t)\mathrm{d}t$$

曲面 Σ 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $y+z=1$ 所截的下面部分的内侧, L 为 Σ 的正向边界, 求

$$I=\oint_L 2xzf\left(z-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x+\left[x^3+2yzf\left(z-x^2-y^2\right)\right]\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

证 记 $P(x,y,z)=2xzf\left(z-x^2-y^2\right)$, $Q(x,y,z)=x^3+2yzf\left(z-x^2-y^2\right)$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-4xyzf'\left(z-x^2-y^2\right),\ \frac{\partial P}{\partial z}=2x\left(f\left(z-x^2-y^2\right)+zf'\left(z-x^2-y^2\right)\right)$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2-4xyzf'\left(z-x^2-y^2\right),\ \frac{\partial Q}{\partial z}=2y\left(f\left(z-x^2-y^2\right)+zf'\left(z-x^2-y^2\right)\right)$$

令 $u=z-t$, 则 $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$, 于是 $R(x,y,z)=\displaystyle\int_{z-x^2-y^2}^{z}f(u)\mathrm{d}u$,

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{z-x^2-y^2}^{z}f(u)\mathrm{d}u\right)=2xf\left(z-x^2-y^2\right),\ \frac{\partial R}{\partial y}=2yf\left(z-x^2-y^2\right)$$

于是

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=-2yzf'\left(z-x^2-y^2\right)=-2yzf'(0)\\
&\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=2xzf'\left(z-x^2-y^2\right)=2xzf'(0)\\
&\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2
\end{aligned}$$

则由 *Stokes* 公式知,

$$\begin{aligned}
I&=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint_{\Sigma}-2yzf'(0)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2xzf'(0)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

补面 $\Sigma_1:\begin{cases}y+z=1\\z=x^2+y^2\end{cases}$, 方向取下侧, 由 *Gauss* 公式可知,

$$\begin{aligned}
I&=\left(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)\left(-2yzf'(0)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2xzf'(0)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\
&=-\iint_{\Sigma_1}\left(-2yzf'(0)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2xzf'(0)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)=3\iint_{x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{5}{4}}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\rho\cos\theta\\y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\rho\sin\theta-\dfrac{1}{2}\end{cases}$, 于是 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\dfrac{5}{4}\rho$, 所以 $I=3\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{5}{4}\rho^2\cos^2\theta\frac{5}{4}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{75\pi}{64}$.

6.4 多元积分学的应用与场论概述

场论是物理学中的一个重要分支, 主要研究空间中的场的性质和相互作用. 场可以是标量场 (只有大小没有方向) 或者矢量场 (有大小和方向), 描述了空间中各个点的物理量. 在场论中, 多元积分学的概念和方法经常被用来描述和计算场的性质和相互作用.

6.4.1 多元积分学的应用

下表是各积分的应用公式及物理意义.

应用	积分形式：二重积分	积分形式：三重积分	积分形式：曲线积分	积分形式：曲面积分
几何量	平面面积 $S=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$	立体体积 $V=\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	弧长 $L=\int_L \mathrm{d}s$	曲面面积 $S=\iint\limits_\Sigma \mathrm{d}S$
质量	$m=\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	$m=\iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	$m=\int_L \rho(x,y,z)\mathrm{d}s$	$m=\iint\limits_\Sigma \rho(x,y,z)\mathrm{d}S$
质心	$\overline{x}=\dfrac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{m}$ $\overline{y}=\dfrac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{m}$	$\overline{x}=\dfrac{\iiint\limits_\Omega x\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{m}$ $\overline{y}=\dfrac{\iiint\limits_\Omega y\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{m}$ $\overline{z}=\dfrac{\iiint\limits_\Omega z\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{m}$	$\overline{x}=\dfrac{\int_L x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{m}$ $\overline{y}=\dfrac{\int_L y\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{m}$ $\overline{z}=\dfrac{\int_L z\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{m}$	$\overline{x}=\dfrac{\iint\limits_\Sigma x\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}{m}$ $\overline{y}=\dfrac{\iint\limits_\Sigma y\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}{m}$ $\overline{z}=\dfrac{\iint\limits_\Sigma z\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}{m}$
转动惯量	$I_x=\iint\limits_D y^2\cdot\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $I_y=\iint\limits_D x^2\cdot\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $I_0=I_x+I_y$	$I_x=\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\cdot\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ $I_y=\iiint\limits_\Omega (x^2+z^2)\cdot\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ $I_z=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\cdot\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ $I_0=I_x+I_y+I_z$	$I_x=\int_L (y^2+z^2)\cdot\rho\mathrm{d}s$ $I_y=\int_L (x^2+z^2)\cdot\rho\mathrm{d}s$ $I_z=\int_L (x^2+y^2)\cdot\rho\mathrm{d}s$ $I_0=I_x+I_y+I_z$	$I_x=\iint\limits_\Sigma (y^2+z^2)\cdot\rho\mathrm{d}S$ $I_y=\iint\limits_\Sigma (x^2+z^2)\cdot\rho\mathrm{d}S$ $I_z=\iint\limits_\Sigma (x^2+y^2)\cdot\rho\mathrm{d}S$ $I_0=I_x+I_y+I_z$
通量				$\Phi=\iint\limits_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 向量场: $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$
变力做功			$W=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 力: $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$	

例 6.4.1. 设 C 是曲线 $x^2+y^2=2(x+y)$, 求 $\oint_C (2x^2+3y^2)\mathrm{d}s$.

由轮换对称性，以及形心公式得: $\oint_C (2x^2+3y^2)\mathrm{d}s=5\oint_C x^2\mathrm{d}s=5\oint_C y^2\mathrm{d}s=\frac{5}{2}\oint_C (x^2+y^2)\mathrm{d}s=5\oint_C (x+y)\mathrm{d}s=5(\bar{x}+\bar{y})\oint_C \mathrm{d}s=5(\bar{x}+\bar{y})\cdot 2\pi r=20\sqrt{2}\pi$.

例 6.4.2. 设 V 是曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}-1$ 所围成的立体,

(1) 计算 $I=\iiint\limits_V \left(\sqrt{2}x+z\right)^2\mathrm{d}V$;

(2) 若流速场 $\boldsymbol{v}=(P,Q,R)$, 其中 $P=\dfrac{x}{r_0^{\frac{3}{2}}}$, $Q=\dfrac{y}{r_0^{\frac{3}{2}}}$, $R=\dfrac{z}{r_0^{\frac{3}{2}}}$, $r_0=x^2+y^2+z^2$, 求 $\boldsymbol{v}$ 由 V 内部流向外部的流量.

(1) 将 $\left(\sqrt{2}x+z\right)^2$ 展开，并且注意到 $2\sqrt{2}xz$ 关于 x 为奇函数，且被积空间关于 xOy 面对称，又有 x 与 y 轮换对此，则

$$I=\iiint\limits_V \left(2x^2+z^2+2\sqrt{2}xz\right)\mathrm{d}V=\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{V_1} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V+\iiint\limits_{V_2} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$$

其中 V_1 为曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与 xOy 面所围成的空间, V_2 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}-1$ 与 xOy 面所围成的空间, 则

$$I_1=\iiint\limits_{V_1} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{5}$$

$$I_2=\iiint\limits_{V_2}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0}\left[\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{z+1}(r^2+z^2)r\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\int_{-1}^{0}\left[\frac{1}{4}(z+1)^4+\frac{1}{2}z^2(z+1)^2\right]\mathrm{d}z=\frac{2\pi}{15}$$

故 $I=I_1+I_2=\dfrac{8\pi}{15}$.

(2) 流量 $\Phi=\oiint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, S 取外侧, 所以 $\Phi=\oiint\limits_S\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 记 $S_1:x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$ 其中方向向内, 则

$$\Phi=\oiint\limits_S=\oiint\limits_{S+S_1-S_1}=\oiint\limits_{S+S_1}+\oiint\limits_{S_1^-}$$

并且

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\ \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\ \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

因此 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$, 则有 *Gauss* 公式 $\oiint\limits_{S+S_1}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=0$, 且

$$\Phi'=\oiint\limits_{S_1^-}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{S_1^-}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}\mathrm{d}V=4\pi$$

因此 $\Phi=4\pi$.

定义 6.4.1 (环流量). 设有向量场

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

其中函数 P、Q 与 R 均连续, Γ 是 $\boldsymbol{A}$ 的定义域内的一条分段光滑的有向闭曲线, $\boldsymbol{\tau}$ 是 Γ 在点 (x,y,z) 处的单位切向量, 则积分

$$\oint_\Gamma\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s$$

称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 沿有向曲线 Γ 的环流量.

例 6.4.3. 设向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=\left(z^2,x^2,y^2\right)$, 以点 $M_0(1,1,0)$ 为圆心, ε 为半径, 在 xOy 面上作一圆盘 Σ_ε, 面积为 σ_ε, Γ 为该圆盘的正向边界, $\boldsymbol{\tau}$ 为 Γ 上点 (x,y,z) 处的单位切向量, 求 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\dfrac{1}{\sigma_\varepsilon}\oint_\Gamma\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s$.

由题意知 $\sigma_\varepsilon=\pi\varepsilon^2$, 并且由 *Stokes* 公式得

$$\oint_\Gamma\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\oint_\Gamma z^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y+y^2\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z^2 & x^2 & y^2\end{vmatrix}=\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}2y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$
$$=\iint\limits_{(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant\varepsilon^2}2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\varepsilon}(r\cos\theta+1)r\mathrm{d}r=2\pi\varepsilon^2$$

于是 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\dfrac{1}{\sigma_\varepsilon}\oint_\Gamma\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\dfrac{2\pi\varepsilon^2}{\pi\varepsilon^2}=2$.

6.4.2 梯度、散度和旋度

定义 6.4.2 (Hamilton 算符). $\boldsymbol{\nabla}:=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right):=\boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ 为一向量算符.

利用 Hamilton 算符, 可以写出梯度、散度和旋度的定义.

定义 6.4.3. 设 $u=u(x,y,z)$ 为光滑的数量场 (“光滑” 指 $u(x,y,z)$ 有连续偏导数),

$$\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

为光滑的向量场 (“光滑” 指 P,Q,R 有连续偏导数), 则由 u 和 $\boldsymbol{A}$ 产生的梯度、散度和旋度为:

$$\begin{aligned}
&\textbf{grad}\, u:=\boldsymbol{\nabla} u:=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right):=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{A}:=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}:=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\\
&\operatorname{rot}\boldsymbol{A}:=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}:=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ P&R&Q\end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

例 6.4.4. 设 $u=z\left(x^2+3\right)$, 求向量场 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla} u$ 通过球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上半部分的流量 Q, 指向球外.

因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla} u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}=2xz\boldsymbol{i}+\left(x^2+3\right)\boldsymbol{k}$, 所以

$$Q=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}^{\circ}\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

取 $\Sigma_1: x^2+y^2\leqslant 1$ 方向竖直向下, $D:\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\right\}$, 则

$$Q=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1-\Sigma_1}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}+\oiint\limits_{\Sigma_1^-}$$

其中, 由 *Gauss* 公式 $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}2z\mathrm{d}V=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}$, 且

$$\begin{aligned}
\oiint\limits_{\Sigma_1^-}2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D}\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(r^2\cos^2\theta+3\right)r\mathrm{d}r\\
&=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta+\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}+3\pi
\end{aligned}$$

因此 $Q=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}+3\pi=\dfrac{15\pi}{4}$.

定理 6.4.1 (方向导数与 Hamilton 算符). 设 $u=u(x,y,z)$, 则函数 $u(x,y,z)$ 的方向导数计算公式为

$$\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{\nabla} u\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

其中 $\boldsymbol{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$.

例 6.4.5 (2005 数一). 设函数 $u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{18}$, 单位向量 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$, 求 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}$.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right|_{(1,2,3)}=3\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

6.4.3 梯度、散度、旋度的基本公式及其应用

以下 u, v, f 都是 (x, y, z) 的函数, 有连续偏导数, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是向量函数, c 为常数,

$$\boldsymbol{r}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0),\ r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

关于梯度的公式

$(1)\boldsymbol{\nabla}(cu)=c\boldsymbol{\nabla}u$	$(2)\boldsymbol{\nabla}(u\pm v)=\boldsymbol{\nabla}u\pm\boldsymbol{\nabla}v$
$(3)\boldsymbol{\nabla}(uv)=v\boldsymbol{\nabla}u+u\boldsymbol{\nabla}v$	$(4)\boldsymbol{\nabla}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\boldsymbol{\nabla}u-u\boldsymbol{\nabla}v}{v^2}$
$(5)\boldsymbol{\nabla}(f(u))=f'(u)\boldsymbol{\nabla}u$	$(6)\boldsymbol{\nabla}(f(u,v))=f'_u\boldsymbol{\nabla}u+f'_v\boldsymbol{\nabla}v$
$(7)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{r})=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$	$(8)\boldsymbol{\nabla}(f(r))=f'(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$

关于散度的公式

$(9)\boldsymbol{\nabla}\cdot(c\boldsymbol{A})=c\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$	$(10)\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}$
$(11)\boldsymbol{\nabla}\cdot(u\boldsymbol{A})=u\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}u\cdot\boldsymbol{A}$	$(12)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{r}=3$

关于旋度的公式

$(13)\boldsymbol{\nabla}\times(c\boldsymbol{A})=c\boldsymbol{\nabla}\times A$	$(14)\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}$
$(15)\boldsymbol{\nabla}\times(u\boldsymbol{A})=u\boldsymbol{\nabla}\times A+\boldsymbol{\nabla}u\times\boldsymbol{A}$	$(16)\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$

混合运算

$(17)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times A)+\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times B)+(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}$

$(18)\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times A)-\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times B)$

$(19)\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}$

$(20)\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}u)=\boldsymbol{\Delta}u=\nabla^2u=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}$

$(21)\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}u)=\boldsymbol{0}$	$(22)\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=0$
$(23)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{A}$	$(24)\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{A}$

注意

$$(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}=\left(B_x\frac{\partial}{\partial x}+B_y\frac{\partial}{\partial y}+B_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{A},\ (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}=\left(A_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{B}$$

定义 6.4.4 (Laplace 算符). $\boldsymbol{\Delta}:=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, 并且有

$$\nabla^2:=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}:=\boldsymbol{\Delta}$$

f 为函数, 则 $\nabla^2 f$ 为标量; 若 $\boldsymbol{A}=(A_x, A_y, A_z)$ 是向量, 则 $\nabla^2\boldsymbol{A}=\left(\nabla^2A_x, \nabla^2A_y, \nabla^2A_z\right)$ 为向量.

例 6.4.6 (2001 数一). 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 求 $\operatorname{div}(\mathbf{grad}\, r)\big|_{(1,-2,2)}$.

$$原式=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}r\Big|_{(1,-2,2)}=\nabla^2r\Big|_{(1,-2,2)}=\frac{\partial^2r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2r}{\partial z^2}\Big|_{(1,-2,2)}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big|_{(1,-2,2)}=\frac{2}{3}.$$

例 6.4.7 (2012 数一)**.** 计算 $\mathbf{grad}\left(xy+\dfrac{z}{y}\right)\Bigg|_{(2,1,1)}$.

$$\nabla\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Bigg|_{(2,1,1)}=y\nabla x+x\nabla y+\frac{y\nabla z-z\nabla y}{y^2}\Bigg|_{(2,1,1)}=(y,x,0)+\frac{(0,-z,y)}{y^2}\Bigg|_{(2,1,1)}=(1,1,1).$$

例 6.4.8. 求向量场 $\boldsymbol{A}=2x^3yz\boldsymbol{i}-x^2y^2z\boldsymbol{j}-x^2yz^2\boldsymbol{k}$ 的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 在点 $M(1,1,2)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}=(2,2,-1)$ 的方向导数 $\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{l}}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\Bigg|_M$.

设 $P=2x^3yz$, $Q=-x^2y^2z$, $R=-x^2yz^2$, 那么

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=6x^2yz-2x^2yz-2x^2yz=2x^2yz$$

并且

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{l}}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\Bigg|_M=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\Bigg|_M\cdot\boldsymbol{l}^\circ=\nabla\left(2x^2yz\right)\Bigg|_M\cdot\boldsymbol{l}^\circ=\left(4xyz,2x^2z,2x^2y\right)\Bigg|_M\cdot\frac{1}{3}(2,2,-1)=\frac{22}{3}.$$

例 6.4.9. 设 $\nabla\cdot[\nabla f(r)]=0$, 求 $f(r)$.

原式 $=\nabla\cdot\left[f'(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right]=\dfrac{f'(r)}{r}\nabla\cdot\boldsymbol{r}+\nabla\dfrac{f'(r)}{r}\cdot\boldsymbol{r}=3\dfrac{f'(r)}{r}+\dfrac{r\nabla f'(r)-f'(r)\nabla r}{r^2}\boldsymbol{r}=3\dfrac{f'(r)}{r}+\dfrac{f''(r)\cdot\boldsymbol{r}-f'(r)\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}}{r^2}\boldsymbol{r}=$ $f''(r)+2\dfrac{f'(r)}{r}=0$, 解微分方程, 可得 $f(r)=\dfrac{C_1}{r}+C_0$.

第 7 章

无穷级数

“数学主要的目标是公众的利益和自然现象的解释.”

——傅立叶

无穷级数是数学中一个重要的概念, 它是由无限个项相加而成的数列. 无穷级数的研究涉及到收敛性、发散性、求和等概念. 以下是无穷级数的一些基本内容和重要概念:

1. 收敛和发散: 一个无穷级数如果当项数趋于无穷时, 其部分和趋于一个有限的值, 我们称这个无穷级数是收敛的; 如果部分和趋于无穷大或者不存在极限, 我们称这个无穷级数是发散的.

2. 常见的无穷级数: 常见的无穷级数包括等比级数、调和级数、幂级数等. 等比级数是形如 $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$ 的级数, 其中 a 是首项, r 是公比; 调和级数是形如 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ 的级数; 幂级数是形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 的级数, 其中 c_n 是系数, x 是变量.

3. 收敛性的判别法: 判断一个无穷级数是否收敛的方法有很多, 常见的包括比较判别法、比值判别法、根值判别法、积分判别法等. 这些方法可以帮助我们判断无穷级数的收敛性, 进而求出其和.

4. 级数的运算: 对于收敛的级数, 我们可以进行加法、减法、乘法等运算. 此外, 级数还可以进行逐项求导、逐项积分等操作, 这些操作可以帮助我们研究级数的性质.

无穷级数在数学中有着广泛的应用, 例如在数学分析、物理学、工程学等领域都有着重要的地位. 通过学习无穷级数, 我们可以更深入地理解数列和级数的性质, 为解决实际问题提供了有力的数学工具.

7.1 常数项级数

7.1.1 常数项级数的敛散性及其判别法

定义 7.1.1 (常数项级数). 设有数列 $\{u_n\} : u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$, 将其各项依次累加所得的式子 $u_1 + u_2 +$

$\cdots+u_n+\cdots$ 称为 (常数项) 无穷级数, 简称 (常数项) 级数, 记作 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$.

定义 7.1.2 (常数项级数收敛). 设给定常数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

称 $S_n=\sum_{i=1}^{n}u_i=u_1+u_2+\cdots+u_n$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 n 项部分和, 若 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$ (有限值), 则称级数 (1) 收敛; 若 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 不存在, 则称级数 (1) 发散.

常数项级数的基本性质:

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$ 有相同的敛散性 (k 是不为零的常数).

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n, \sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 均收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 亦收敛, 且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n.$$

(3) 在级数中去掉或添加有限项, 不影响级数的敛散性 (但收敛时, 级数和一般会改变).

(4) 收敛级数任意加括号后所成的级数仍收敛. 如果正项级数加括号后所成的级数收敛, 则原级数收敛.

(5) 级数收敛的必要条件: 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

例 7.1.1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 的敛散性的下列结论中, 正确的是

A. 因 $1+\frac{1}{n}>1$ 故级数收敛

B. 因 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}=0$ 故级数收敛

C. 因 $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}<\frac{1}{n}$ 故级数收敛

D. 级数发散

p-级数中的 p 表示为常数, 与 n 无关, 所以选项 A 错误, 事实上, $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}=1$, 其中 $\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$ (重要极限), 则原级数的敛散性与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 同敛散, 又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 发散, 选 D.

例 7.1.2. 判别级数的敛散性 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+2^n)\ln\frac{n+1}{n}$.

将所给级数的一般项作适当变形, 有

$$\begin{aligned}a_n&=\ln\left[2^n\left(\frac{1}{2^n}+1\right)\right]\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left[n\ln 2+\ln\left(\frac{1}{2^n}+1\right)\right]\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=\ln 2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\ln\left(\frac{1}{2^n}+1\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

可见, $\lim_{n\to\infty}a_n=\ln 2$, 即 $a_n\lim_{n\to\infty}\not\to 0$, 不满足级数收敛的必要条件, 故级数发散.

7.1.2 正项级数的审敛法

为了迅速而又准确地判断一个级数的敛散性, 掌握以下几个已知其敛散性的级数往往是有益的.

定义 7.1.3 (几何级数). 若有几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$, 那么当 $|r|<1$ 时收敛, 且其和为 $\frac{a}{1-r}$; 当 $|r|\geqslant 1$ 时发散.

定义 7.1.4 (调和级数). 称 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 为调和级数, 并且该级数是发散的.

定义 7.1.5 (p-级数). 若有 p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, 那么当 $p>1$ 时收敛, 当 $p\leqslant 1$ 时发散.

定理 7.1.1 (正项级数收敛的充要条件). 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是其部分和数列 $\{s_n\}$ 有上界.

定理 7.1.2 (比较审敛法). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数, 且 $u_n\leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 (“大收敛, 小发散”).
特别地, 条件 $u_n\leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$ 可改为 $u_n\leqslant cv_n(n\geqslant k, c>0)$, 结论仍然成立.

定理 7.1.3 (比较审敛法的极限形式). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数, 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$, 则有

(1) 当 $0<l<+\infty$时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同收敛或同发散;

(2) 当 $l=0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l=+\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

例 7.1.3 (2009 数一). 设有两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$, 若 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ 则

A. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 收敛

B. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 发散

C. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2b_n^2$ 收敛

D. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2b_n^2$ 发散

若令 $a_n=b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n=0, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 却有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2b_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 故排除 A, D; 若取 $a_n=b_n=\frac{1}{n}$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n=0, \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散, 却有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 故排除 B; 又 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2b_n^2$ 均为正项级数, 且

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0,\ \lim_{n\to\infty}|b_n|=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2b_n^2}{|b_n|}=\lim_{n\to\infty} an^2\cdot\lim_{n\to\infty}|b_n|=0$$

由正项级数比较判别法的极限形式知: 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2b_n^2$ 收敛, 因此选 C.

定理 7.1.4 (比值审敛法). 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, 则当 $\rho<1$ 时, 级数收敛; 当 $\rho>1$ 时, 级数发散; 当 $\rho=1$ 时, 级数可能收敛, 也可能发散.

特别地, 当 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定发散; 当 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$ 时, 级数可能收敛, 也可能发散.

定理 7.1.5 (根值审敛法). 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$, 则当 $\rho<1$ 时, 级数收敛; 当 $\rho>1$ 时, 级数发散; 当 $\rho=1$ 时, 级数可能收敛, 也可能发散.

定理 7.1.6 (积分判别法). 设 $f(x)$ 为 $[1,+\infty)$ 上的非负递减函数, 则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

例 7.1.4. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$ 的敛散性.

法一: 利用级数收敛的必要条件, 因为 $\dfrac{n^n}{n!}=\dfrac{n\cdot n\cdots n}{1\cdot 2\cdots n}>1(n>1)$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{n!}\neq 0$, 故由级数收敛的必要条件知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$ 发散.

法二: 利用比较判别法, 因为当 $n>2$ 时, 有 $\dfrac{n^n}{n!}=\dfrac{n\cdot n\cdot n\cdots n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}>n$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ 发散, 所以由比较判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$ 发散.

法三: 利用比值判别法, 记 $u_n=\dfrac{n^n}{n!}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}>1$, 由比值判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$ 发散.

法四: 利用根值判别法, 由 *Stirling* 公式: $n!\sim\sqrt{2n\pi}\cdot\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n (n\to\infty)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}}{\sqrt[n]{\sqrt{2n\pi}}}=\mathrm{e}>1$$

故由根值判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$ 发散.

例 7.1.5. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7^n}{8^n-5^n}$ 的敛散性.

法一: 利用比值判别法, 记 $u_n=\dfrac{7^n}{8^n-5^n}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n+1}}{8^{n+1}-5^{n+1}}\cdot\frac{8^n-5^n}{7^n}=7\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{5}{8}\right)^n}{8-5\left(\frac{5}{8}\right)^n}=\frac{7}{8}<1$$

故由比值判别法知原级数收敛.

法二: 利用根值判别法, 记 $u_n=\dfrac{7^n}{8^n-5^n}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{7^n}{8^n-5^n}}=\frac{7}{8}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{1-\left(\frac{5}{8}\right)^n}}=\frac{7}{8}<1$$

故由根值判别法知原级数收敛.

法三: 利用比较判别法的极限形式, 记 $u_n=\dfrac{7^n}{8^n-5^n}$, 则 $u_n\sim\dfrac{7^n}{8^n}=\left(\dfrac{7}{8}\right)^n (n\to\infty)$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{7}{8}\right)^n$ 收敛, 故由比较判别法的极限形式知原级数收敛.

例 7.1.6. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$ 的敛散性.

法一： 利用级数敛散的定义，分别记 u_n, S_n 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$ 的通项和部分和，则

$$u_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

于是

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\right)-\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\right]=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{2}+1\\&=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\sqrt{2}+1\to-\sqrt{2}+1\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

故原级数收敛.

法二： 令 $f(x)=\sqrt{x}, u_n$ 为原级数的通项，将 $f(x)$ 分别在 $[n,n+1]$ 和 $[n+1,n+2]$ 上用 *Lagrange* 中值定理，有

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{2\sqrt{\xi_1}},\quad \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=\frac{1}{2\sqrt{\xi_2}}$$

其中 $n<\xi_1<n+1, n+1<\xi_2<n+2$，于是

$$\begin{aligned}0<-u_n&=\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)-\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\xi_1}}-\frac{1}{2\sqrt{\xi_2}}=\frac{\sqrt{\xi_2}-\sqrt{\xi_1}}{2\sqrt{\xi_1}\sqrt{\xi_2}}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\xi_2-\xi_1}{\sqrt{\xi_1}\sqrt{\xi_2}\left(\sqrt{\xi_1}+\sqrt{\xi_2}\right)}<\frac{2}{2\xi_1\cdot2\sqrt{\xi_1}}=\frac{1}{2\xi_1^{\frac{3}{2}}}<\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，故由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-u_n)$ 收敛，从而原级数 $\sum\limits_{k=1}^{n}u_n$ 收敛.

法三： 利用比较判别法的极限形式，记 u_n 为原级数的通项，则

$$\begin{aligned}u_n&=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\\&=-\frac{2}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}\sim-\frac{1}{4\left(\sqrt{n}\right)^3}\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

所以 $0<-u_n\sim\frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}$，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，故由比较判别法的极限形式知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-u_n)$ 收敛，从而原级数 $\sum\limits_{k=1}^{n}u_n$ 收敛.

例 7.1.7. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{2}}{2^n}$ 的敛散性.

法一： 因为 $0\leqslant\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{2}}{2^n}<\frac{n}{2^n}$，所以转而考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 的收敛玻，记 $u_n=\frac{n}{2^n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\frac{1}{2}<1$$

于是由比值判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 收敛，从而由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\cos^2\frac{n\pi}{2}}{2^n}$ 收敛.

法二： 同法一，先考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 的敛散性，因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2}=\frac{1}{2}<1$$

所以由根值判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^2}$ 收敛，进而由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\cos^2\frac{n\pi}{2}}{2^n}$ 收敛.

法三： 因为 $\cos^2\frac{n\pi}{2}=\frac{1+\cos n\pi}{2}=\frac{1+(-1)^n}{2}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{2}}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\cdot\frac{1+(-1)^n}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{2^{2k}}.$$

记 $u_k=\dfrac{2k}{2^{2k}}$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{u_k}=\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\dfrac{2k}{2^{2k}}}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\sqrt[k]{2k}}{4}=\dfrac{1}{4}<1$，故级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{2k}{2^{2k}}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos^2\dfrac{n\pi}{2}}{2^n}$ 收敛.

例 7.1.8. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

法一： 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}=1$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故由比较判别法的极限形式知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 发散.

法二： 利用微分中值定理，因为 $\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上满足 *Lagrange* 定理的条件，所以由 *Lagrange* 中值定理知，存在 $\xi_n\in(n,n+1)(n\geqslant 1)$，有 $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n=\dfrac{1}{\xi_n}$，从而有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$，又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 发散，故由比较判别法知，原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 发散.

法三： 由 *Taylor* 公式，有 $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$，又 $\dfrac{1}{2n^2}-o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\sim\dfrac{1}{2n^2}(n\to\infty)$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n^2}-o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ 收敛. 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故由级数的性质，得原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 发散.

法四： 利用级数敛散的定义，记原级数的部分和为 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$，则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln k\right]=\ln(1+n)\to+\infty\quad(n\to\infty)$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 发散.

法五： 利用广义积分与级数的联系

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}[\ln(n+1)-\ln n]=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

因为 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\ln b=+\infty$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 发散.

例 7.1.9. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 收敛，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$.

证 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{k}$，$S_0=0$，$S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$，则 $S_n-S_{n-1}=\dfrac{a_n}{n}$，且

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S\Rightarrow S_n=S+\varepsilon_n,\ (n\geqslant 1,\ \varepsilon_n\to 0,\ n\to\infty)$$

令 $b_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，则 $\forall n\in\mathbb{N}$，有

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{S_1+(S_2-S_1)+\cdots+(S_n-s_{n-1})}{n}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k(S_k-S_{k-1})}{n}=\frac{S+\varepsilon_1+\sum\limits_{k=2}^{n}k(\varepsilon_k-\varepsilon_{k-1})}{n}\\&=\frac{S}{n}+\frac{\varepsilon_1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}k(\varepsilon_k-\varepsilon_{k-1})=\frac{S}{n}+\varepsilon_n-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\varepsilon_k\end{aligned}$$

而因为 $\varepsilon_k\to 0\ (k\to\infty)$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\varepsilon_k=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}}{n-1}\cdot\dfrac{n-1}{n}=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

例 7.1.10. 设数列 $\{u_n\}$ 满足 $u_1=3,\ u_2=5$, 当 $n\geqslant 3$ 时, $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{u_n}$ 收敛.

证法一 由已知得 $u_n>0$, 且 $\{u_n\}$ 是单调增加的, 所以 $u_n=u_{n-2}+u_{n-1}<2u_{n-1}$, 于是得

$$u_n=u_{n-2}+u_{n-1}>\frac{1}{2}u_{n-1}+u_{n-1}=\frac{3}{2}u_{n-1}$$

从而得

$$u_n>\frac{3}{2}u_{n-1}>\left(\frac{3}{2}\right)^2u_{n-2}>\cdots>\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}u_1=3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

即 $\dfrac{1}{u_n}<\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ 收敛, 故由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{u_n}$ 收敛.

证法二 由已知得 $u_n>0$, 且 $\{u_n\}$ 是单调增加的, 所以 $u_n=u_{n-2}+u_{n-1}<2u_{n-1}$, 于是得

$$u_n=u_{n-2}+u_{n-1}>\frac{1}{2}u_{n-1}+u_{n-1}=\frac{3}{2}u_{n-1}$$

从而得 $\dfrac{u_n^{-1}}{u_{n-1}{}^{-1}}=\dfrac{u_{n-1}}{u_n}<\dfrac{2}{3}<1$, 故由达朗贝尔判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{u_n}$ 收敛.

证法三 将递推关系式改写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix}u_n\\u_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{n-1}\\u_{n-2}\end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix}u_2\\u_1\end{pmatrix}$$

记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$, 求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, 其对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}\lambda_2\\1\end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2)=\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\1&1\end{pmatrix}$, 则有 $\boldsymbol{X}^{-1}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&-\lambda_2\\-1&\lambda_1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}\lambda_1&\\&\lambda_2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}^{-1}$,

$$\boldsymbol{A}^{n-2}=\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}\lambda_1&\\&\lambda_2\end{pmatrix}^{n-2}\boldsymbol{X}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}&-\lambda_2\lambda_1^{n-1}+\lambda_1\lambda_2^{n-1}\\\lambda_1^{n-2}-\lambda_2^{n-2}&-\lambda_2\lambda_1^{n-2}+\lambda_1\lambda_2^{n-2}\end{pmatrix}$$

于是由 $\begin{pmatrix}u_n\\u_{n-1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{n-2}\begin{pmatrix}u_2\\u_1\end{pmatrix}$ 得

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}\right)u_2+\left(-\lambda_2\lambda_1^{n-1}+\lambda_1\lambda_2^{n-1}\right)u_1\right]$$

从而

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{u_2\left[\dfrac{1}{\lambda_1}-\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n-1}\right]+u_1\left[-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}+\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n-1}\right]}{u_2\left[1-\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n}\right]+u_1\left[-\lambda_2+\lambda_1\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n}\right]}$$

因为 $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|<1$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{u_{n+1}}}{\frac{1}{u_n}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}<1$, 故由正项级数的比值判别法, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{u_n}$ 收敛.

7.1.3 交错级数

定理 7.1.7 (Leibniz 定理). 若 $\{u_n\}$ 单调递减, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nu_n$ 收敛.

例 7.1.11. 判别级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 的敛散性.

法一: 将通项化简为

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n}+(-1)^n\right)}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+(-1)^n\right)}$$

于是

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+(-1)^n\right)}$$

对于 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，由 *Leibniz* 判别法知收敛，对于 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+(-1)^n\right)}$，该级数为正项级数，且 $\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+(-1)^n\right)}\sim\frac{1}{n}(n\to\infty)$，而 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+(-1)^n\right)}$ 发散，从而知原级数发散.

法二： 将通项的分母有理化，原级数可化为

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

而 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由 *Leibniz* 判别法知 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ 收敛，从而得原级数发散.

法三： 对原级数重新分组，依次每两项加括号，得到一个新级数 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$：

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2k}+1}-\frac{1}{\sqrt{2k+1}-1}\right)+\cdots$$

其通项 $u_k=\frac{1}{\sqrt{2k}+1}-\frac{1}{\sqrt{2k+1}-1}=\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-2}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}<0$，所以新级数 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ 是负项级数，又由

$$u_k=\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-2}{2k}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k}}-2}{2k}\sim-\frac{1}{k}(k\to\infty)$$

知 $(-u_k)\sim\frac{1}{k}(k\to\infty)$，所以级数 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ 发散，故由级数收敛的性质得原级数发散.

原级数通项 $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\sim\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(n\to\infty)$，但原级数发散，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 却是收敛的. 由此可见：对于变号级数不能用比较判别法的极限形式判别.

例 7.1.12. 设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$，$b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t\ (n=1,2,\cdots)$，

(1) 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$；

(2) 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛，并求其和.

(1) 由推论 1.3.4 知，$b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{ 大于 1 的奇数}\end{cases}$，并且

$$a_n\xlongequal{x=\cos t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\cdot\sin^2 t\mathrm{d}t=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{(n+2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}\\ \frac{(n-1)!!}{(n+2)!!}, & n\text{ 大于 1 的奇数}\end{cases}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{(n+2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{n!!}{(n-1)!!}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{1}{n+2}\to0, & n\text{ 为正偶数}\\ \frac{(n-1)!!}{(n+2)!!}\cdot\frac{n!!}{(n-1)!!}=\frac{1}{n+2}\to0, & n\text{ 大于 1 的奇数}\end{cases}$$

故 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$.

(2) 由 (1) 可知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+2}$ 为交错级数, 由 Leibniz 定理, 知级数收敛, 并令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+2}}{n+2}$, 则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{n+2}=\frac{x^2}{1+x}\quad(-1<x<1)$$

即 $S(x)=S(0)+\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{t^2}{1+t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t^2-t+\ln|1+t|\Big|_0^x=\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x), x\in(-1,1]$, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_n}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+2}=S(1)=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

7.1.4 一般数项级数的判别法

定义 7.1.6 (绝对收敛与条件收敛). 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

判别任意项级数收敛的常用方法:

(1) 绝对值判别法: 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛;

(2) 交错级数一般使用 Leibniz 判别法;

(3) 将级数分解成两个收敛级数之和.

判别级数发散的常用方法:

(1) 证明级数的一般项的极限不存在或不为零;

(2) 将级数按某种方式加括号后所得级数发散;

(3) 将级数分解为一个收敛级数与一个发散级数之和.

定理 7.1.8. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是任意项级数, 其中 $\sum$ 的上标都是 ∞, 下标并非总是 1,

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散.

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 不一定收敛.

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 绝对收敛.

(5) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 不一定收敛.

(6) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n}$ 不一定收敛.

(7) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛.

(8) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm u_{n+1})$ 收敛.

7.1.5 其他判别法

定理 7.1.9 (Kummer 判别法). 设 $a_n > 0,\ b_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$

(1) 若存在常数 $\alpha > 0$, 使得 $\dfrac{b_n}{b_{n+1}} a_n - a_{n+1} \geqslant \alpha\ (n = 1, 2, \cdots)$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛;

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ 发散, 且 $\dfrac{b_n}{b_{n+1}} a_n - a_{n+1} \leqslant 0\ (n = 1, 2, \cdots)$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

定理 7.1.10 (Raabe 判别法). 设 $a_n > 0,\ n = 1, 2, \cdots$

(1) 若存在 $r > 1$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant r$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若对充分大的 n 都有 $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 7.1.11 (Raabe 判别法的极限形式). 设 $a_n > 0,\ n = 1, 2, \cdots$, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{l}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\ (n \to \infty)$$

, 则当 $l > 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 当 $l < 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 7.1.12 (Gauss 判别法). 设 $a_n > 0,\ n = 1, 2, \cdots$, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\ (n \to \infty)$$

则当 $\beta > 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 当 $\beta < 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 7.1.13 (Frink 判别法). 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n = \rho$, 则当 $\rho < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 当 $\rho > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

7.2 幂级数

幂级数可以在某个区间内收敛, 也可以在某些点处发散. 对于幂级数, 我们通常关心以下几个问题:

1. 收敛半径: 幂级数的收敛半径 R 是一个非负实数, 表示幂级数在哪些区间内收敛. 收敛半径的计算可以使用根试验、比值试验、比较试验等方法.

2. 收敛区间: 根据收敛半径 R, 我们可以确定幂级数的收敛区间. 在收敛区间内, 幂级数可以表示为某个函数的展开形式.

3. 函数表示: 在收敛区间内, 幂级数可以表示为一个函数的展开形式. 这种展开形式有助于我们研究函数的性质和行为.

4. 求和: 在幂级数的收敛区间内, 我们可以通过幂级数的求和来计算函数在某一点的值, 或者对函数进行近似.

7.2.1 下降阶乘幂

定义 7.2.1 (下降阶乘幂). $x^{\underline{m}} = x(x-1)\cdots(x-m+1)\ \ (m \in \mathbb{N}_+)$.

定义 7.2.2 (上升阶乘幂). $x^{\overline{m}} = x(x+1)\cdots(x+m-1)\ \ (m \in \mathbb{N}_+)$.

定义 7.2.3. $x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1$.

定理 7.2.1 (阶乘与阶乘幂). $n! = n^{\underline{n}} = 1^{\overline{n}}$.

定理 7.2.2. $\Delta(x^{\underline{m}}) = mx^{\underline{m-1}}$.

证 $\Delta(x^{\underline{m}}) = (x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} = (x+1)x\cdots(x-m+2) - x\cdots(x-m+2)(x-m+1) = mx(x-1)\cdots(x-m+2) = mx^{\underline{m-1}}$.

定义 7.2.4 (不定和). $g(x) = \Delta f(x) \iff \sum g(x)\delta x = f(x) + C$.

定义 7.2.5 (定和). $\sum_a^b g(x)\delta x = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$.

(1) $\sum_a^a g(x)\delta x = f(a) - f(a) = 0$;

(2) $\sum_a^{a+1} g(x)\delta x = f(a+1) - f(a) = g(a)$;

(3) $\sum_a^{b+1} g(x)\delta x - \sum_a^b g(x)\delta x = f(b+1) - f(a) - f(b) + f(a) = g(b)$.

定理 7.2.3. $\sum_a^b g(x)\delta x = \sum\limits_{k=a}^{b-1} g(k) = \sum\limits_{a\leqslant k<b} g(k)\ \ (b \geqslant a)$.

定理 7.2.4. $\sum_a^b g(x)\delta x + \sum_b^c g(x)\delta x = \sum_a^c g(x)\delta x$.

定理 7.2.5. $\sum\limits_{0\leqslant k<n} k^{\underline{m}} = \dfrac{k^{\underline{m+1}}}{m+1}\Bigg|_0^n = \dfrac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}\ \ (m, n \in \mathbb{N}_+)$.

定义 7.2.6. $x^{\underline{-m}} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}\ \ (m > 0)$.

定理 7.2.6. $x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}}\ \ (m, n \in \mathbb{Z})$.

定理 7.2.7. $\sum_a^b x^{\underline{m}}\delta x = \begin{cases} \dfrac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\Bigg|_a^b, & m \neq -1 \\ H_x\Big|_a^b, & m = -1 \end{cases}$, 其中 $H_x = \sum\limits_{k=1}^{x} \dfrac{1}{k}$ 称为调和级数.

定义 7.2.7. $\mathrm{E}f(x)=f(x+1)$.

定理 7.2.8 (分部和公式). $\sum u\Delta v=uv-\sum \mathrm{E}v\Delta u$.

$f=\sum g$	$\Delta f=g$	$f=\sum g$	$\Delta f=g$
$x^{\underline{0}}=1$	0	2^x	2^x
$x^{\underline{1}}=x$	1	c^x	$(c-1)c^x$
$x^{\underline{2}}=x(x-1)$	$2x$	$\dfrac{c^x}{c-1}$	c^x
$x^{\underline{m}}$	$mx^{\underline{m-1}}$	cf	$c\Delta f$
$\dfrac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}$	$x^{\underline{m}}$	$f+g$	$\Delta f+\Delta g$
H_x	$x^{\underline{-1}}=\dfrac{1}{x+1}$	fg	$f\Delta g+\mathrm{E}v\Delta f$

例 7.2.1 (第五届数学竞赛初赛). 判断级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性, 若收敛, 则求其和.

令 $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{\substack{1\leqslant k<n+1\\ k\in\mathbb{N}_+}}\frac{H_k}{(k+1)(k+2)}=\sum\nolimits_1^{n+1}\frac{H_x}{(x+1)(x+2)}\delta x$, 那么记

$$u(x)=H_x\ ,\Delta v(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=-\frac{1}{x+2}-\left(-\frac{1}{x+1}\right)$$

因此

$$\Delta u(x)=x^{\underline{-1}},\ v(x)=-\frac{1}{x+1}=-x^{\underline{-1}},\ \mathrm{E}v(x)=-(x+1)^{\underline{-1}}$$

于是

$$\begin{aligned}S_n&=\sum\nolimits_1^{n+1}\frac{H_x}{(x+1)(x+2)}\delta x=-x^{\underline{-1}}H_x\Big|_1^{n+1}+\sum\nolimits_1^{n+1}(x+1)^{\underline{-1}}x^{\underline{-1}}\delta x\\&=-(n+1)^{\underline{-1}}H_{n+1}+1^{\underline{-1}}H_1+\sum\nolimits_1^{n+1}x^{\underline{-2}}\delta x=\frac{1}{2}-\frac{H_{n+1}}{n+2}-x^{\underline{-1}}\Big|_1^{n+1}\\&=1-\frac{1}{n+2}-\frac{H_{n+1}}{n+2}=1-\frac{1}{n+1}-\frac{H_n}{n+2}\end{aligned}$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H_n}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+\gamma+\alpha(n)}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n+2}=0\ \ (\alpha(n)\to 0)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$, 因此级数收敛, 且其和为 1.

7.2.2 幂级数的性质

定义 7.2.8 (幂级数). 形如 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的函数项级数称为 $x-x_0$ 的幂级数, 其中 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 称为幂级数的项 $(x-x_0)^n$ 的系数. 当 $x_0=0$ 时, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 称为 x 的幂级数.

定理 7.2.9 (Abel 定理). 若幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0\,(x_0 \neq 0)$ 处收敛, 则它在满足不等式 $|x| < |x_0|$ 的一切 x 处绝对收敛; 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 处发散, 则它在满足不等式 $|x| > |x_0|$ 的一切 x 处发散.

定义 7.2.9 (收敛半径与收敛区间). 由 Abel 定理可知, 必存在 $R > 0$, 当 $|x| < R$ 时, 幂级数绝对收敛; 当 $|x| > R$ 时, 幂级数发散, 则称 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, $(-R, R)$ 为其收敛区间.

特别地, 当 $x = R$ 与 $x = -R$ 时, 幂级数可能收敛, 也可能发散; 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 仅在 $x = 0$ 处收敛, 其他点处都发散, 则 $R = 0$, 收敛域为 $\{0\}$; 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 处处收敛, 则 $R = \infty$, 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

定理 7.2.10. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,(a_n \neq 0)$, 其收敛半径为 R, 则 $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 或 $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

定理 7.2.11 (奇偶次项幂级数的收敛半径). 对于只含有偶次项 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x - x_0)^{2n}$ 或只含有奇次项 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x - x_0)^{2n+1}$ 的幂级数的收敛半径为: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$, 则 $R = \dfrac{1}{\sqrt{\rho}}$; 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$, 则 $R = \dfrac{1}{\sqrt{\rho}}$.

定理 7.2.12 (幂级数的运算性质). 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2, 当 $R_1 \neq R_2$ 时, 令 $R = \min\{R_1, R_2\}$, 则有

(1) $k \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} k a_n x^n, |x| < R_1$, 其中 k 为常数;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, |x| < R$;

(3) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n, |x| < R$, 其中 $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

定理 7.2.13 (幂级数的性质). 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R(R > 0)$, 则有

(1) 和函数 $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛域上连续, 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在端点 $x = R$ (或 $x = -R$) 处收敛, 则 $s(x)$ 在 $x = R$ 处左连续 (或在 $x = -R$ 处右连续);

(2) 和函数 $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛区间上可导, 且有逐项求导公式

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

(3) 和函数 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在收敛域上可积, 且有逐项求积公式

$$\int_0^x s(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

7.2.3 函数展开为幂级数

常见函数的幂级数展开式

(1) $\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!},\ |x|<+\infty$

(2) $a^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\ln^n a\dfrac{x^n}{n!},\ |x|<+\infty$

(3) $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1},\ x\in(-1,1]$

(4) $-\ln(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n},\ |x|<1$

(5) $\ln\dfrac{1+x}{1-x}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x|<1$

(6) $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ |x|<+\infty$

(7) $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!},\ |x|<+\infty$

(8) [1]$\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x|<1.$

(9) [2]$\arcsin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)},\ |x|<1$

(10) $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n,\ |x|<1$

(11) $\dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n,\ |x|<1$

(12) $\dfrac{2}{(1-x)^3}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n,\ |x|<1$

(13) $\dfrac{m}{(1-x)^{m+1}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+m)^{\underline{m}}x^n,\ |x|<1$

(14) $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n,\ |x|<1$

(15) $\dfrac{x^q}{1+x^p}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{np+q},\ |x|<1$

(16) $(1+x)^\alpha=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dbinom{\alpha}{n}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\alpha^{\underline{n}}}{n!}x^n,\ |x|<1$

(17) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\ |x|<1$

例 7.2.2. 写出下列函数关于 x 的幂级数展开式

---

[1] $\arctan x=\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\left(-t^2\right)^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

[2] 由 $(\arcsin x)'=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}+n-1\right)}{n!}\left(-x^2\right)^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2}x^{2n}$

则 $\arcsin x=\displaystyle\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2}t^{2n}\right]\mathrm{d}t=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}$

(1) e^{-x^2}.	(2) $\cos^2 x$.	(3) $\sin^3 x$.	(4) $\dfrac{x^{10}}{1-x}$.	(5) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.
(6) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.	(7) $\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$.	(8) $\dfrac{x}{2+x-x^2}$.	(9) $\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$.	(10) $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

(1) $\mathrm{e}^{-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-x^2)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{n!}\quad(|x|<+\infty)$.

(2) $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}\quad(|x|<+\infty)$.

(3) 注意到 $\sin^3 x=\dfrac{3}{4}\sin x-\dfrac{1}{4}\sin 3x$，于是

$$\begin{aligned}\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x&=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(3x)^{2n+1}\\&=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\quad(|x|<+\infty).\end{aligned}$$

(4) $\dfrac{x^{10}}{1-x}=x^{10}\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\sum\limits_{n=10}^{\infty}x^n\quad(|x|<1)$.

(5) $\dfrac{1}{(1-x)^2}=(1-x)^{-2}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-2)(-2-1)\cdots(-2+n-1)}{n!}(-x)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n\quad(|x|<1)$.

(6) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad(|x|<1)$.

(7) 由 $(1+x)^\alpha$ 展开式得

$$(1+x^2)^{-2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)(-2-1)\dots(-2+n-1)}{n!}(x^2)^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^{2n}$$

故 $\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}=x^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^{2n+2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}\quad(|x|<1)$.

(8) 因为 $\dfrac{x}{2+x-x^2}=\dfrac{x}{3}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2-x}\right)=\dfrac{x}{3}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)$，所以

$$\frac{x}{2+x-x^2}=\frac{x}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^{n+1}\quad(|x|<1).$$

(9) 因为 $\arctan\dfrac{A-B}{1+AB}=\arctan A-\arctan B$，所以

$$\arctan\frac{1-2x}{1+2x}=\arctan 1-\arctan 2x=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}(2x)^{2n+1}\quad\left(x\neq-\frac{1}{2}\right).$$

(10) $(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{3}{2}-n+1\right)}{n!}(-x^2)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\quad(|x|<1)$.

例 7.2.3. 写出下列函数关于 x 的幂级数展开式

(1) $(1+x)\ln(1+x)$.	(2) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x$.	(3) $\arctan\dfrac{2-2x}{1+4x}$.
(4) $\arctan\dfrac{2x}{2-x^2}$.	(5) $x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$.	(6) $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$.

(1) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)=(1+x)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ $|x|<1$，又 $|x|=1$ 时，级数收敛，因此原级数的收敛域为 $|x|\leqslant 1$.

(2) $f(x)=\dfrac{1}{4}\cdot 2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dfrac{1}{2}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$ $(|x|<1)$.

(3) **法一**：由 $\arctan\dfrac{A-B}{1+AB}=\arctan A-\arctan B$，于是

$$\arctan\frac{2-2x}{1+4x}=\arctan 2-\arctan(2x)=\arctan 2-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}(2x)^{2n+1}\ \left(|x|<\frac{1}{2}\right)$$

当 $|x|=\dfrac{1}{2}$ 时，级数为交错级数，且满足 *Leibniz* 判别法的条件，因此原级数的收敛域为 $|x|\leqslant\dfrac{1}{2}$.

法二：$f'(x)=\left(\arctan\dfrac{2-2x}{1+4x}\right)'=-\dfrac{2}{1+4x^2}$，于是

$$\arctan\frac{2-2x}{1+4x}=-2\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2}+\arctan 2=-2\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4t^2)^n\right]\mathrm{d}t+\arctan 2$$

$$=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^n\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t+\arctan 2=\arctan 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$$

收敛域的求法同法一.

(4) 由于 $f'(x)=\left(\arctan\dfrac{2x}{2-x^2}\right)'=\dfrac{4+2x^2}{4+x^4}$，故

$$\arctan\frac{2x}{2-x^2}=\int_0^x\frac{4+2t^2}{4+t^4}\mathrm{d}t=\int_0^x\left(1+\frac{t^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t^4}{4}\right)^n\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{[\frac{n}{2}]}\frac{t^{2n}}{2^n}\right]\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{[\frac{n}{2}]}\frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}\ (|x|<\sqrt{2})$$

当 $|x|=\sqrt{2}$ 时，级数为

$$\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{[\frac{n}{2}]}\frac{1}{2n+1}\ \text{及}\ -\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{[\frac{n}{2}]}\frac{1}{2n+1}$$

它们均由两收敛级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{4n+1}\ \text{及}\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{4n+3}$$

逐项相加并乘以常数 $\sqrt{2}$ 及 $-\sqrt{2}$ 而得，故它们收敛，因此原级数的收敛域为 $|x|\leqslant\sqrt{2}$.

(5) $f(x)=x\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}(x^2)^{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$ $(|x|<1)$ 当 $|x|=1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ 收敛，因此原级数的收敛域为 $|x|\leqslant 1$.

(6) 因为 $\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，所以

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}=\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right]\mathrm{d}t$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

于是，

$$\text{原式}=x\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]-\left[1+\frac{1}{2}x^2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{2n+2}\right]$$

$$=-1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}\right]\ (|x|\leqslant 1).$$

例 7.2.4 (2003 数一). 将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

由 $\arctan\dfrac{A-B}{1+AB}=\arctan A-\arctan B$, 所以

$$f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}=\arctan 1-\arctan 2x=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n+1}}{2n+1}$$

于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n+1}}{2n+1}\bigg|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{4}-f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1-1}{1+1}=\frac{\pi}{4}.$$

例 7.2.5 (2007 数三). 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数, 并指出其收敛区间.

因为 $\dfrac{1}{x^2-3x-4}=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x+1}\right)$, 其中

$$\frac{1}{x-4}=\frac{1}{(x-1)-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x-1}{3}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}\quad x\in(-2,4)$$

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x-1+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\dfrac{x-1}{2}+1}=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}\quad x\in(-1,3)$$

故 $\dfrac{1}{x^2-3x-4}=-\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{1}{3^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right](x-1)^n\quad x\in(-1,3).$

例 7.2.6. 求函数

$$f(x)=\arctan\left(\frac{2x}{2-x^2}\right)+\frac{1}{4}\ln\left|x^2-2x+2\right|-\frac{1}{4}\ln\left|x^2+2x+2\right|-\frac{1}{2}\arctan(x+1)-\frac{1}{2}\arctan(x-1)$$

关于 x 的幂级数展开式和收敛半径.

显然 $x^2\pm 2x+2>0$, 故

$$f(x)=\arctan\left(\frac{2x}{2-x^2}\right)+\frac{1}{4}\ln\left(x^2-2x+2\right)-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+2x+2\right)-\frac{1}{2}\arctan(x-1)-\frac{1}{2}\arctan(x+1)$$

对 $f(x)$ 求导, 整理可得 $f'(x)=\dfrac{2x^2}{x^4+4}$, 由于

$$\frac{1}{4+x^4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x^4}{4}}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{4^n}$$

其中 $\dfrac{x^4}{4}<1$, 故得其收敛半径为 $R=\sqrt{2}$, 于是

$$f'(x)=\frac{2x^2}{x^4+4}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{4^n}$$

对上式两端在 $[0,x]$ 上积分, 且 $f(0)=0$, 得

$$f(x)-f(0)=\int_0^x\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{4n+2}}{4n}\mathrm{d}t$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n\frac{t^{4n+2}}{4n}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)2^{2n+1}}.$$

7.2.4 幂级数的收敛域及和函数

求幂级数的收敛域

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域的一般方法是, 先由公式

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

求出收敛半径, 若 $R=0$, 则幂级数仅在 $x=0$ 处收敛; 若 $R=+\infty$, 则幂级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$; 若 $0<R<+\infty$, 则再考察幂级数在 $x=-R$ 和 $x=R$ 处的敛散性, 进而确定幂级数的收敛域是 $(-R,R),[-R,R),(-R,R]$ 或 $[-R,R]$ 之中的某一区间.

例 7.2.7. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^3+1}x^n$ 的收敛域.

令 $a_n=\dfrac{n^2}{n^3+1}$, 则收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+1}\cdot\frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^2}=1$$

在 $x=-1$ 处, 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2}{n^3+1}$, 这是交错级数, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^3+1}=0$, 故由 *Leibniz* 判别法可知级数收敛, 在 $x=1$ 处, 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^3+1}$, 因为 $\dfrac{n^2}{n^3+1}\geqslant\dfrac{1}{n+1}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 发散, 故由比较判别法知级数发散, 因此, 级数的收敛域为 $[-1,1)$.

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的收敛域的方法有两种: 一种是作变量代换: $y=x-x_0$, 得到级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_ny^n$, 可按前述方法求得其收敛域, 进而可求得原级数的收敛域, 另一种是使用比值法.

例 7.2.8. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\dfrac{(x-5)^n}{n^n}$ 的收敛域.

法一: 令 $y=x-5$, 得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\left(\dfrac{y}{n}\right)^n$, 其收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$$

当 $y=-\mathrm{e}$ 时, 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n}$, 这是交错级数, 可以证明: $\dfrac{n!\mathrm{e}}{n^n}$ 不趋于零 $(n\to\infty)$, 级数发散; 当 $y=\mathrm{e}$ 时, 级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n}$, 显然也发散, 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\left(\dfrac{y}{n}\right)^n$ 的收敛域为 $(-\mathrm{e},\mathrm{e})$, 从而可知原级数的收敛域为 $(5-\mathrm{e},5+\mathrm{e})$.

法二: 因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\dfrac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{n!\dfrac{(x-5)^n}{n^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^n|x-5|=\frac{|x-5|}{\mathrm{e}}$$

根据正项级数的比值判别法, 当 $\rho<1$, 即 $|x-5|<\mathrm{e}$, $5-\mathrm{e}<x<5+\mathrm{e}$ 时, 所给级数绝对收敛; 当 $\rho\geqslant1$, 即 $x\geqslant5+\mathrm{e}$ 或 $x\leqslant5-\mathrm{e}$ 时, 由于级数的一般项不趋于零, 故级数发散, 综上, 级数的收敛域为 $(5-\mathrm{e},5+\mathrm{e})$.

例 7.2.9 (2009 数三). 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^n-(-1)^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径.

令 $a_n=\dfrac{\mathrm{e}^n-(-1)^n}{n^2}$, 则

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{n+1}-(-1)^{n+1}}{\mathrm{e}^n-(-1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}+\left(\dfrac{-1}{\mathrm{e}}\right)^n}{1-\left(\dfrac{-1}{\mathrm{e}}\right)^n}=\mathrm{e}$$

于是收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

例 7.2.10 (2020 数三). 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2,6)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛区间为

A. $(-2,6)$　　B. $(-3,1)$　　C. $(-5,3)$　　D. $(-17,15)$

因为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n$ 收敛区间为 $(-2,6)$, 所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n$ 的收敛半径为 4, 令 $t=x-2$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n=(x-2)\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^{n-1}=t\sum_{n=1}^{\infty} na_nt^{n-1}=t\sum_{n=1}^{\infty}(a_nt^n)'$$

因而幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nt^n$ 的收敛半径为 4, 又因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[(x+1)^2\right]^n$$

则 $(x+1)^2<4$, 解得 $-3<x<1$, 故选 B.

求幂级数的和函数

求幂级数在其收敛域内的和函数的基本方法是: 利用幂级数的四则运算、幂级数在其收敛域内可以逐项微分、逐项积分的性质以及幂级数的和函数在其收敛区间端点处的单侧连续性等.

例 7.2.11. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(3+x)^{2n}$ 的和函数.

因为 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\ln(1+x)$, 所以有 $\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+x)^{2n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(3+x)^2\right]^n}{n}=-\ln\left[1-(x+3)^2\right]\ (-4<x<-2).$$

例 7.2.12. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n\cdot 8^n}$ 的和函数.

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n\cdot 8^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{3n}$, 那么

$$S'(x)=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{3n-1}\Rightarrow\frac{x}{2}S'(x)=\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{3n}-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{8-x^3}-\frac{3}{2}$$

解得 $S'(x)=\frac{24}{8x-x^4}-\frac{3}{x}$, 两边对 x 积分得

$$\int S(x)\mathrm{d}x=24\int\frac{\mathrm{d}x}{8x-x^4}-3\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\ln\left(8-x^3\right)+C$$

又 $S(0)=0$, 解得 $C=\ln 8$, 于是幂级数的和函数 $S(x)=\ln\frac{8}{8-x^3}$.

例 7.2.13. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2-n+1}{n\cdot 2^{2n+1}}(x-1)^n$ 的和函数.

易求得幂级数的收敛区间为 $(-3,5)$，并将原幂级数化为 $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n^2-n+1}{n}\cdot\left(\dfrac{x-1}{4}\right)^n$，令 $y=\dfrac{x-1}{4}$，有

$$S(y)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2-n+1}{n}\cdot y^n=\frac{1}{2}y^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n-1)y^{n-2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}y^n:=\frac{y^2}{2}S_1(y)+\frac{1}{2}S_2(y)$$

于是

$$\int_0^y S_1(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n-1)\int_0^y t^{n-2}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}y^{n-1}=\frac{1}{1+y}\Rightarrow S_1(y)=-\frac{1}{(1+y)^2}\ (|y|<1)$$

又 $S_2(y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{y^n}{n}=\ln(1+y)\ (-1<x\leqslant 1)$，故

$$S(y)=\frac{y^2}{2}S_1(y)+\frac{1}{2}S_2(y)=-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{1+y}\right)^2+\frac{1}{2}\ln(1+y)\ (|y|<1)$$

于是，所求幂级数的和函数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2-n+1}{n\cdot 2^{2n+1}}(x-1)^n=S\left(\frac{x-1}{4}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{x+3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2\ (-3<x<5).$$

例 7.2.14. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$ 的收敛区间及和函数.

易得级数的收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$，又因为 $n^3=(n+1)(n^2-n+1)-1$，于是 $\dfrac{n^3}{(n+1)!}=\dfrac{1}{(n-2)!}+\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$，那么

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}(-x)^n=-\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{(n-2)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{(n+1)!}\\&=-\frac{x}{2}+x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^{n-2}}{(n-2)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}-\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}\\&=-\frac{x}{2}+x^2\mathrm{e}^{-x}+(\mathrm{e}^{-x}-1+x)+\frac{1}{x}\left(\mathrm{e}^{-x}-1+x-\frac{x^2}{2}\right)=\mathrm{e}\left(x^2+1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\quad x\neq 0\end{aligned}$$

显然，当 $x=0$ 时，和函数为 0，因此 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}\left(x^2-1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$

例 7.2.15. 求 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$.

因为 $\dfrac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\dfrac{1}{k!(k+2)}$，于是考虑 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}}{n!(n+2)}$，则

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x\mathrm{e}^x$$

所以

$$S(x)=S(0)+\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=(t-1)\mathrm{e}^t\Big|_0^x=(x-1)\mathrm{e}^x+1$$

则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=S(1)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

对于有些系数含有阶乘符号的幂级数，求其和函数的一种行之有效的方法是：首先设法建立关于和函数的微分方程，然后求解微分方程，即得所求和函数.

例 7.2.16. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$ 的和函数.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$, 易求得收敛区间为 $(-1,1)$, 那么

$$S'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n+2}=1+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n+1}=1+x\left[x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}\right]'=1+xS(x)+x^2S'(x)$$

即 $S'(x)-\frac{x}{1-x^2}S(x)=\frac{1}{1-x^2}$, 该方程为一阶非齐次线性微分方程, 由通解公式

$$S(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{1}{1-x^2}\cdot\mathrm{e}^{-\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}+C\right]=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{C}{\sqrt{1-x^2}}$$

又 $S(0)=0$, 解得 $C=0$, 于是幂级数的和函数 $S(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

综合运用

例 7.2.17. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}x^n$ 的收敛域及和函数.

记 $u_n=\frac{n+1}{n}$, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}=1$ 知, 收敛半径 $R=1$. 又当 $x=\pm1$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}(\pm1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(\pm1)^n+\sum_{n=1}^{\infty}(\pm1)^n\frac{1}{n}$$

发散, 故原级数的收敛域为 $(-1,1)$. 设和函数为 $S(x)$, 即

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}x^n,\ x\in(-1,1)$$

两边在 $(0,x)$ 上积分, 得

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}t^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{n+1}{n}t^n\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}$$

即 $\frac{1}{x}\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, 然后两边分别对 x 求导, 得

$$\left(\frac{1}{x}\int_0^x S(t)\mathrm{d}t\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$$

于是

$$\frac{1}{x}\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=-\ln(1-x)+C$$

即 $\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=-x\ln(1-x)+Cx$, 两边再次求导, 得

$$S(x)=\frac{x}{1-x}-\ln(1-x)+C$$

因为 $S(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续, 且 $S(0)=0$, 所以 $C=0$, 所以原级数的和函数为

$$S(x)=\frac{x}{1-x}-\ln(1-x),\ x\in(-1,1).$$

例 7.2.18. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 的收敛域及和函数, 并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 的和.

记 $u_n=n+1$, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$ 知, 收敛半径 $R=1$. 又当 $x=\pm1$ 时,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\pm1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\pm1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}n(\pm1)^n$$

发散，故原级数的收敛域为 $(-1,1)$. 设和函数为 $S(x)$，即 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$，$x\in(-1,1)$.两边在 $(0,x)$ 上积分，得

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(n+1)t^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}$$

即 $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}\Rightarrow\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\dfrac{x}{1-x}\overset{\text{求导}}{\Rightarrow}S(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$，$x\in(-1,1)$. 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{1}{2^{n-1}}=x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\bigg|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{x}{(1-x)^2}\bigg|_{x=\frac{1}{2}}=2$$

.

例 7.2.19 (2014 数学 (三)). 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

记 $u_n=(n+1)(n+3)$，则由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)}=1$ 知，收敛半径 $R=1$. 又当 $x=\pm1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)(\pm1)^n$ 发散，故原级数的收敛域为 $(-1,1)$.

设和函数为 $S(x)$，即 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$，$x\in(-1,1)$.两边在 $(0,x)$ 上积分，得

$$\begin{aligned}\int_0^x S(t)\mathrm{d}t&=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)t^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(n+1)(n+3)t^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^{n+1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(n+2)t^{n+1}\mathrm{d}t\right)'+\frac{x}{1-x}\\&=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'+\frac{x}{1-x}=\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

于是 $S(x)=\left[\dfrac{3x-2x^2}{(1-x)^2}\right]'=\dfrac{x+3}{(1-x)^3}$，$x\in(-1,1)$.

例 7.2.20 (首届数学竞赛预赛). 已知 $u_n(x)$ 满足 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x$ (n 为正整数)，且 $u_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和.

由 $u_n'(x)-u_n(x)=x^{n-1}\mathrm{e}^x$ 得，$u_n(x)=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left[\displaystyle\int x^{n-1}\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\dfrac{x^n}{n}\mathrm{e}^x+C\mathrm{e}^x$，又因为 $u_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$，所以 $C=0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=-\mathrm{e}^x\ln(1-x)$，$x\in(-1,1)$.

例 7.2.21. 设 $a_0=1,a_1=-2,a_2=\dfrac{7}{2}$，

$$a_{n+1}=-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)a_n\ (n\geqslant 2)$$

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$.

收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n+1}}=1$，所以 $|x|<1$ 时幂级数收敛，

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\sum_{n=3}^{\infty}a_nx^n=1+2x+\frac{7}{2}x^2+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

当 $n\geqslant 2$ 时, 由

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=(-1)\frac{n+2}{n+1}a_n=(-1)^2\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}a_{n-1}=\cdots=(-1)^{n-1}\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\cdots\frac{4}{3}a_2\\&=(-1)^{n-1}\frac{n+2}{3}\cdot\frac{7}{2}=(-1)^{n-1}\frac{7}{6}(n+2)\end{aligned}$$

故

$$S(x)=1-2x+\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{6}\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$$

其中

$$\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n=\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\left(x^{n+1}\right)'=\left[\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^nx^{n+1}\right]'=-\left[\frac{x^4}{1+x}\right]'=-\frac{4x^3+3x^4}{(1+x)^2}$$

故 $S(x)=1-2x+\dfrac{7}{2}x^2-\dfrac{7}{6}\dfrac{4x^3+3x^4}{(1+x)^2}$.

例 7.2.22. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域及和函数.

因为 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+2}{(n+2)(n^3+2)}=0$, 所以 $R=+\infty$, 收敛域为 $(-\infty,+\infty)$, 又

$$\frac{n^3+2}{(n+1)!}=\frac{(n-1)n(n+1)}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\ (n\geqslant 2)$$

及级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n-2)!},\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!},\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)!}{(n+1)!}$ 的收敛域都为 $(-\infty,+\infty)$, 因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n-2)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)!}{(n+1)!}:=S_1(x)+S_2(x)+S_3(x)$$

其中

$$\begin{aligned}S_1(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^{n+2}=(x-1)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}=(x-1)^2\mathrm{e}^{x-1}\\S_3(x)&=\frac{1}{x-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{x-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}=\frac{\mathrm{e}^{x-1}-1}{x-1}\end{aligned}$$

$S_2(x)=\mathrm{e}^{x-1}$, 因此幂级数的和函数为

$$S(x)=\begin{cases}(x^2-2x+2)\mathrm{e}^{x-1}+\dfrac{\mathrm{e}^{x-1}-1}{x-1}, & x\neq 1\\2, & x=1\end{cases}.$$

例 7.2.23 (2019 江苏年竞赛题). 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{8^n(2n-1)}x^{3n-1}$ 的收敛域与和函数.

记 $a_n=\dfrac{n}{8^n(2n-1)}x^{3n-1}$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{3n+2}}{8^{n+1}(2n+1)}\cdot\frac{8^n(2n-1)}{nx^{3n-1}}\right|=\left|\frac{x}{2}\right|^3$$

$|x|<2$ 时原级数收敛, $|x|>2$ 时原级数发散; 当 $x=\pm 2$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{8^n(2n-1)}(\pm 2)^{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^nn}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq 0$$

所以原级数发散, 因此原级数的收敛域为 $(-2,2)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{8^n(2n-1)}x^{3n-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1+1}{8^n(2n-1)}x^{3n-1}=\frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{3n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{8^n(2n-1)}$$

其中，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2x}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{3k}=\dfrac{x^2}{2(8-x^3)}$，现求第二项的和.

当 $x\in(0,2)$ 时，令 $\dfrac{x}{2}=t^{\frac{2}{3}}$，则

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{8^n(2n-1)}&=\frac{t}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n-1}}{2n-1}=\frac{t}{2x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\frac{t^{2n-1}}{2n-1}\mathrm{d}t\right)'\\&=\frac{t}{2x}\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(t^{2n-1}\right)'}{2n-1}\mathrm{d}t=\frac{t}{2x}\int_0^t\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\frac{t}{4x}\ln\frac{1+t}{1-t}=\frac{\sqrt{x}}{8\sqrt{2}}\ln\frac{2\sqrt{2}+x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}-x^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

当 $x\in(-2,0)$ 时，令 $\dfrac{x}{2}=-t^{\frac{3}{2}}\ (t>0)$，则

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{8^n(2n-1)}&=\frac{t}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}t^{2n-1}=\frac{t}{2x}\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(t^{2n-1}\right)'\mathrm{d}t\\&=-\frac{t}{2x}\int_0^t\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{t}{2x}\arctan t=-\frac{\sqrt{-x}}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x\sqrt{-x}}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

综上，所求和函数为

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2(8-x^3)}+\dfrac{\sqrt{x}}{8\sqrt{2}}\ln\dfrac{2\sqrt{2}+x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}-x^{\frac{3}{2}}}, & 0\leqslant x<2\\ \dfrac{x^2}{2(8-x^3)}-\dfrac{\sqrt{-x}}{4\sqrt{2}}\arctan\dfrac{x\sqrt{-x}}{2\sqrt{2}}, & -2<x<0\end{cases}$$

例 7.2.24. 设 $\alpha=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2\tan\dfrac{x}{2}}{1-(1+x)^{\int_0^x\sin^2\sqrt{t}\mathrm{d}t}}$，求常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\sin^{n-1}\alpha$ 的和.

对极限式做恒等变换，有

$$\begin{aligned}\alpha&=-\lim_{x\to0^+}\frac{x^2\tan\dfrac{x}{2}}{\exp\displaystyle\int_0^x\sin^2\sqrt{t}\mathrm{d}t\ln(1+x)-1}=-\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{x^3}{2}}{\displaystyle\int_0^x\sin^2\sqrt{t}\mathrm{d}t\ln(1+x)}\\&=-\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{2}x^2}{\displaystyle\int_0^x\sin^2\sqrt{t}\mathrm{d}t}\overset{L'}{=\!=}-\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\sin^2\sqrt{x}}=-1\end{aligned}$$

为求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\sin^{n-1}\alpha$ 的和，先求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 的和函数 $S(x)$，显然它的收敛域为 $(-1,1)$，当 $x\in(-1,1)$ 时，由幂级数在收敛区间的解析性质，有

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\\&=x\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=2}^{\infty}x^n\right)''+\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'\\&=x\left(x^2\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)''+\left(x\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''+\left(\frac{x}{1-x}\right)'\\&=\frac{2x}{(1-x)^3}+\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1+x}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

由于 $|\sin\alpha|=|\sin(-1)|<1$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin^{n-1}\alpha=S(\sin\alpha)=\frac{1-\sin1}{(1+\sin1)^3}.$$

例 7.2.25. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$，$a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)\ (n\geqslant0)$，证明：级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}$ 收敛并求它的和.

证法一 令 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，那么

$$
\begin{aligned}
1=(1-x-x^2)f(x)&=(1-x-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}\\
&=a_0+(a_1-a_0)x+\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+2}-a_{n+1}-a_n)x^{n+2}
\end{aligned}
$$

比较系数得 $a_0=1$，$a_1=a_0$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，从而有 $a_n\geqslant n$，故 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$，故

$$
\frac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}=\frac{a_{n+2}-a_n}{a_na_{n+2}}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}
$$

所以 $\lim\limits_{m\to+\infty}\sum\limits_{n=0}^{m}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)=\lim\limits_{m\to+\infty}\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{m+1}}-\frac{1}{a_{m+2}}\right)=1+1=2.$

证法二 对 $(x^2+x-1)f(x)=-1$ 求 $n+2$ 阶导，

$$
\sum_{k=0}^{n+2}\mathrm{C}_{n+2}^{k}(x^2+x-1)^{(k)}f^{(n+2-k)}(x)=0
$$

故

$$
(x^2+x-1)f^{(n+2)}(x)+(n+2)(2x+1)f^{(n+1)}(x)+(n+2)(n+1)f^{(n)}(x)=0
$$

将 $x=0$，代入上式，并化简得

$$
f^{(n+1)}(0)=\frac{1}{n+2}\left[f^{(n+2)}(0)-(n+2)(n+1)f^{(n)}(0)\right]
$$

于是有

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(n+2)!}{(n+1)!}\cdot\frac{f^{(n+1)}(0)}{f^{(n)}(0)f^{(n+2)}(0)}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{n!(n+2)!}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{n+2}\frac{f^{(n+2)}(0)-(n+2)(n+1)f^{(n)}(0)}{f^{(n)}(0)f^{(n+2)}(0)}\right]\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}n!\frac{f^{(n+2)}(0)-(n+2)(n+1)f^{(n)}(0)}{f^{(n)}(0)f^{(n+2)}(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{f^{(n)}(0)}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)!}{f^{(n+2)}(0)}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{f^{(n)}(0)}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!}{f^{(n)}(0)}=\frac{1}{f(0)}+\frac{1}{f'(0)}=1+1=2.
\end{aligned}
$$

7.2.5 幂级数的应用

证明不等式

例 7.2.26. 设 $x>0,x\neq1$，证明 $0<\frac{x\ln x}{x^2-1}<\frac{1}{2}$.

证 当 $0<x<1$ 或 $x>1$ 时，x^2-1 与 $x\ln x$ 同号，所以 $\frac{x\ln x}{x^2-1}>0$，令 $x=\frac{1+t}{1-t}$，则 $\frac{x\ln x}{x^2-1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}-t\right)\cdot\ln\frac{1+t}{1-t}$，$0<|t|<1$，而由 $\ln\frac{1+t}{1-t}$ 的幂级数展开式，有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}-t\right)\ln\frac{1+t}{1-t}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-t\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+2}}{2n+1}\right)\\
&=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}t^2+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)t^{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}t^2-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{2n}}{4n^2-1}
\end{aligned}
$$

记 $u_n=\frac{t^{2n}}{4n^2-1}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n+1}{u_n}=t^2\Rightarrow\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{t^{2n}}{4n^2-1}$ 收敛，且和大于 0，于是 $0<\frac{x\ln x}{x^2-1}<\frac{1}{2}$.

例 7.2.27. 设 $x>0, x\neq 1$, 证明 $\dfrac{\ln x}{x-1}\leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

证 要证 $\dfrac{\ln x}{x-1}\leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, 即证 $I=\dfrac{\ln x}{x-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\leqslant 0$, 为此

$$I \xlongequal[0<|t|<1]{x=\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2} \frac{1}{t}\ln\frac{1+t}{1-t}-\frac{2}{1-t^2}=\frac{2}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}-2\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-4nt^{2n}}{2n+1}\leqslant 0$$

故得证 $\dfrac{\ln x}{x-1}\leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

例 7.2.28. 设 $0<x<1$, 证明: $3\ln\dfrac{1+x}{1-x}<\dfrac{6x-4x^3}{1-x^2}$.

证 因为 $3\ln\dfrac{1+x}{1-x}=6\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x|<1$, 于是要证

$$6\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}<\frac{6x-4x^3}{1-x^2}$$

又 $6x+2x^3\leqslant 6\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, 只需证

$$6x+2x^3<4x+\frac{2x}{1-x^2}\Rightarrow 2x+2x^3-\frac{2x}{1-x^2}>0\Rightarrow 1-x^4>1$$

而 $0<x<1$, 故上式成立, 即得待证不等式.

求和问题

例 7.2.29. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ 与 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)(2n-1)}$ 的和.

令 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}x^{3n-1}$, 那么 $S'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{3n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n+1}=\frac{x}{1+x^3}$, $|x|<1$, 于是

$$S(1)=\int_0^1 S'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x}{1+x^3}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\frac{3}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)-\frac{1}{3}\ln(x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\bigg|_0^1=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\ln 2$$

因为 $\dfrac{1}{(3n-1)(2n-1)}=\dfrac{2}{2n-1}-\dfrac{3}{2n-1}$, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)(2n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2}{2n-1}-\frac{3}{3n-1}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$$

令 $Q(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, 那么

$$Q'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}\quad |x|<1$$

因此 $2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=2Q(1)=2Q(0)+2\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=2\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$, $3\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}=3S(1)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2$, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)(2n-1)}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\ln 2.$$

例 7.2.30. 设 $a_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\cdots)$,

(1) 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}}{a_n}$;

(2) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+n^2}{a_n}$ 的和.

(1) 因为 $\Gamma(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\ (\alpha>0)$, 且 $\Gamma(\alpha+1)=\Gamma(\alpha)$, 因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n)}{n\Gamma(n)}=0.$$

(2) 又因为 $a_n=\Gamma(n+1)=n!$, 因此级数转化为 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+n^2}{n!}$, 为此构造幂级数 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+n^2}{n!}x^n$, 那么

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n!}=\mathrm{e}^x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^n=\mathrm{e}^x+x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}\right)'=\mathrm{e}^x+x\left(x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)'\\&=\mathrm{e}^x+x(x\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+n^2}{a_n}=S(1)=3\mathrm{e}.\end{aligned}$$

例 7.2.31. 设 $a_n=\displaystyle\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x,\ n=1,2,\cdots$,

(1) 证明: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k}=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$;

(2) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 的和.

(1) 化积分为求和形式

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x\xlongequal{t=x-k\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}(k\pi+t)|\sin(k\pi+t)|\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}(k\pi+t)\sin t\mathrm{d}t=\pi\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)=n^2\pi\end{aligned}$$

因此 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k}=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

(2) 令 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$, 即求 $S\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 的值, 为此,

$$\begin{aligned}S(x)&=x\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=xS_1(x)\\S_1(x)&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2t^{n-1}\mathrm{d}t\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\right)'=\left(x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)'=(xS_2(x))'\\S_2(x)&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}\mathrm{d}t\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}\\&\Rightarrow S_1(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}\Rightarrow S(x)=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}\Rightarrow S\left(\frac{1}{2}\right)=6.\end{aligned}$$

例 7.2.32. 证明: $\displaystyle\lim_{m,n\to+\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$ 存在, 并求之.

因为

$$\int_{-1}^{0} x^{i+j-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{i+j}x^{i+j}\Big|_{-1}^{0} = -\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$$

所以

$$\begin{aligned}
S_{m,n} &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j} = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{-1}^{0} x^{i+j-1}\mathrm{d}x = -\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{0}\left(\sum_{j=1}^{n}x^{i+j-1}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{0}\frac{x^i(1-x^n)}{1-x}\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0}\frac{1}{1-x}\sum_{i=1}^{m}\left(x^i - x^{n+i}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-1}^{0}\frac{x-x^{m+1}}{(1-x)^2}\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0}\frac{x^{n+1}-x^{n+m+1}}{(1-x)^2}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

而 $x\in[-1,0]$，$(1-x)^2 \geq 1$，所以 $\int_{-1}^{0}\frac{x^i}{(1-x)^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{0}x^i\mathrm{d}x$，又 $\lim_{i\to+\infty}\int_{-1}^{0}x^i\mathrm{d}x = 0$，所以 $\lim_{i\to+\infty}\int_{-1}^{0}\frac{x^i}{(1-x)^2}\mathrm{d}x = 0$，所以 $\lim_{m,n\to+\infty}S_{m,n} = -\int_{-1}^{0}\frac{x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

计算积分

例 7.2.33. 用幂级数展开方式求例 3.2.4.

同样地，换元得到 $I = \frac{1}{4}\int_0^1 \ln t\ln(1-t)\mathrm{d}t$，并且 $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\ |x|<1$，所以[3]

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{4}\int_0^1 \ln t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{t^n\ln t}{n}\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{\ln t\,\mathrm{d}\left(t^{n+1}\right)}{n(n+1)} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{t^{n+1}\ln t}{n(n+1)}\Big|_0^1 - \frac{1}{n(n+1)}\int_0^1 t^n\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = \frac{1}{4}\left(2-\frac{\pi^2}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{24}.
\end{aligned}$$

7.3 Fourier 级数

Fourier 级数是函数项级数的一种特殊形式. 它是研究和表示周期函数的有力工具.

7.3.1 Fourier 系数

定义 7.3.1 (Fourier 系数). 形如 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ 的级数称为 Fourier 级数或三角级数. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 且能展开为 Fourier 级数, 即

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx).$$

若积分

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, n = 0,1,2\cdots$$

---

[3] $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} - \left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - 1\right] = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}xx, n = 1, 2\cdots$$

都存在, 则称 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 其中 a_0, a_n, b_n, $n = 1, 2, \cdots$ 称为 $f(x)$ 的 Fourier 系数.

定理 7.3.1 (Dirichlet 收敛定理). 设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数, 如果它满足

(1) 一个周期内除有限个第一类间断点外都连续;

(2) 一个周期内至多只有有限个极值点.

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛, 并且当 x 为 $f(x)$ 的连续点时, 级数收敛于 $f(x)$; 当 x 为 $f(x)$ 的间断点时, 级数收敛于 $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$.

7.3.2 周期为 $2l$ 的 Fourier 展开

定义 7.3.2 (正弦级数与余弦级数). 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 且能展开成 Fourier 系数, 即

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

(1) 当 $f(x)$ 为奇函数时

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0$$

此时 $f(x)$ 的 Fourier 级数表达式为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$ 仅含正弦项, 称为正弦级数;

(2) 当 $f(x)$ 为偶函数时

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0$$

此时 $f(x)$ 的 Fourier 级数表达式为: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$, 此式仅含余弦项, 称为余弦级数.

定理 7.3.2 (Fourier 展开). 设 $f(x)$ 的周期为 $2l$, 且满足收敛定理的条件, 则其在 $[-l, l]$ 上的 Fourier 级数展开式为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

其中 Fourier 系数 a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 取值为:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x,\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

特别地, 进行变量代换 $z = \frac{\pi}{l}x$, 于是区间 $-l \leqslant x < l$ 变换为 $-\pi \leqslant z < \pi$, 存在周期为 2π 的函数 $F(z)$ 使得 $f(x) = f\left(\frac{lx}{\pi}\right) = F(z)$, 对 $F(z)$ 进行 Fourier 展开, 最后将 $z = \frac{\pi}{l}x$ 回代即可.

定义 7.3.3 (周期延拓与奇偶延拓). 若 $f(x)$ 仅在 $[-\pi,\pi)$ 上有定义, 此时需要将其展开为 Fourier 级数, 则需要在 $[-\pi,\pi)$ 外补充 $f(x)$ 的定义, 使其成为周期为 2π 的周期函数. 这种方法称为周期延拓. 若 $f(x)$ 仅给出 $[0,\pi]$ 上的定义, 若要将其展开为正弦级数, 则需补充 $[-\pi,0]$ 的定义, 使其成为奇函数, 这种方法称为函数的奇延拓; 若要将其展开为余弦级数, 则需补充 $[-\pi,0]$ 的定义, 使其称为偶函数, 这种方法称为函数的偶延拓. 进行奇偶延拓后, 补充周期延拓即可将函数 $f(x)$ 进行 Fourier 展开. 给出函数 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 的定义同理.

例 7.3.1. 在所指定的区间内把下列函数展开为 Fourier 级数.

(1) 在区间 $(0,2l)$ 内展开 $f(x)=\begin{cases} A & ,0<x<l \\ 0 & ,l<x<2l \end{cases}$.	(2) 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内展开 $f(x)=x$
(3) 在区间 $(0,2\pi)$ 内展开 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$.	(4) 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内展开 $f(x)=\lvert x\rvert$.

(1) 由于

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\int_0^{l} A\mathrm{d}x = A; \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\int_0^{l} A\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = 0; \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\int_0^{l} A\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{A}{n\pi}[1-(-1)^n] \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi x}{l} = \begin{cases} A & ,0<x<l \\ \dfrac{A}{2} & ,x=l \\ 0 & ,l<x<2l \end{cases}$$

(2) 因为 $f(x)=x$ 是奇函数, 从而 $a_0=a_n=0$, 且

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\mathrm{d}x = (-1)^{n-1}\frac{2}{n}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为 $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n} = x.$

(3) 由于

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)\mathrm{d}x = 0; \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx\mathrm{d}x = \frac{\pi-x}{2n\pi}\sin nx\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\mathrm{d}x = 0; \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\mathrm{d}x = -\frac{\pi-x}{2n\pi}\cos nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n} = \dfrac{\pi-x}{2}.$

(4) 因为 $f(x)=|x|$ 为偶函数, 从而 $b_n=0$, 且

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}x = \pi; \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1] \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为 $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} = |x|.$

例 7.3.2. 将函数 $f(x)=1-x^2\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开为余弦级数, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

由题意 $l=\pi$, $b_n=0\ (n=1,2,\cdots)$, 那么 $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\mathrm{d}x=2-\frac{2\pi^2}{3}$,

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-x^2}{n}\sin nx-\frac{2x}{n^2}\cos nx+\frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Big|_0^{\pi}=-\frac{4}{n^2}(-1)^n\end{aligned}$$

于是 $f(x)=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, 将 $x=0$ 代入可得 $f(0)=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 又由 $f(x)=1-x^2$ 知 $f(0)=1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

例 7.3.3. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. 的和.

法一: 由 $(1+x)^{\alpha}$ 的二项展开式, 取 $\alpha=-\frac{1}{2}$, $x=-t^2$, 则有

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n},\quad -1<t<1$$

$\forall x\in(-1,1)$, 上式两边分别在 $(0,x)$ 或 $(x,0)$ 上积分, 有

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

又因为 $\forall k\geqslant1$, $\frac{2k-1}{2k}<\frac{2k}{2k+1}$, 所以有 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, 于是

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{(2n+1)^{\frac{3}{2}}}$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$ 收敛, 故当 $x=\pm1$ 时, 上述关于 $\arcsin x$ 的等式也成立, 即有

$$\forall x\in[-1,1],\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

令 $x=\sin u$, 则上式化为

$$u=\sin u+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}\sin^{2n+1}u,\quad -\frac{\pi}{2}<u\leqslant\frac{\pi}{2}$$

再将上式两端从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 积分, 得

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{8}&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}u\,\mathrm{d}u=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},\end{aligned}$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, 故得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

法二: 将函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\pi,\pi]$ 上展开成 *Fourier* 级数, 因为 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上为偶函数, 所以其 *Fourier* 系数为

$$b_0=0,\ a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3},\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=\frac{4\cdot}{n^2},\ (n=1,2,\cdots)$$

于是由收敛定理有

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cdot\cos nx\ (-\pi<x\leqslant\pi)$$

当 $x=\pi$ 时, 有 $\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, 即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

7.3.3 Fourier 级数综合性问题

已知 Fourier 展开求 Fourier 系数

例 7.3.4. 设 $f(x)$ 是在周期为 2 的周期函数且 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & 1<x<2\end{cases}$ $f(x)$ 的 Fourier 级数为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x)$, 则 $n\geqslant 1$ 时, 求 a_n.

对于周期为 $2l$ 的周期函数的 Fourier 级数为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}\right)+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ 系数 $a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$, $n=1,2,\cdots$, 由题意知, $f(x)$ 的周期为 2, 故 $l=1$, 所以 $a_n=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x dx$, 即

$$\begin{aligned}a_n&=\int_0^2 f(x)\cos n\pi x dx=\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=\int_0^1 x\cos n\pi x dx\\&=\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\bigg|_0^1=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}.\end{aligned}$$

定义 7.3.4 (平均收敛). 若函数列 $f_n(x)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f_n(x)-S(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=0$, 则称 $f_n(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 平均收敛于 $S(x)$.

引理 7.3.1. 若 $f(x),g(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 平方可积, 则

(1) $f(x)g(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 可积, 且

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

(2) $f(x)+g(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 可积, 且

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)+g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

定理 7.3.3 (均方逼近). 若 $f(x)$ 以 2π 为周期, 在 $[-\pi,\pi]$ 上平方可积, 则在所有 n 阶多项式 $T_n(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$ 中, 当 $T_n(x)$ 取 $f(x)$ 的 Fourier 级数的 n 阶部分和 $S_n(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 时, $f(x)$ 与 $T_n(x)$ 的均方误差最小, 即

$$\min\|f(x)-T_n(x)\| =\|f(x)-S_n(x)\|.$$

第 8 章

微分方程

“读读欧拉, 读读欧拉, 他是我们大家的老师.”

——拉普拉斯

微分方程是数学中的一个重要分支, 它研究的是包含未知函数及其导数的方程. 微分方程在物理学、工程学、经济学等领域中有广泛的应用.

微分方程可以分为常微分方程和偏微分方程两大类 (本章将不讨论偏微分方程). 常微分方程中, 未知函数只依赖于一个自变量, 而偏微分方程中, 未知函数依赖于多个自变量. 常微分方程的解可以是一个函数, 也可以是一个函数族. 解的形式和性质取决于方程的类型和边界条件. 解常微分方程的方法包括分离变量法、变量代换法、特解法、级数法等.

8.1 一阶微分方程

一阶微分方程是指只涉及一个未知函数及其导数的微分方程. 通常形式为: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$, 其中 y 是未知函数, x 是自变量, $f(x,y)$ 是关于 x 和 y 的函数. 解一阶微分方程通常需要使用微积分知识和积分技巧. 常见的一阶微分方程包括变量分离微分方程、可分离变量微分方程、齐次微分方程等.

8.1.1 变量分离方程

定义 8.1.1 (变量分离方程). 形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(x)$ 的方程称为变量分离微分方程.

例 8.1.1. (把原方程化为分离变量方程) 求下列微分方程的通解

(1)$\tan x \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = 5.$	(2)$x^2y' + y + 1.$	(3)$y\mathrm{d}x + (x^2 - 4x)\mathrm{d}y = 0.$
(4)$3\mathrm{e}^x \tan y\mathrm{d}x + (1 - \mathrm{e}^x)\sec^2 y\mathrm{d}y = 0.$	(5)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1 - y^2)\tan x.$	(6)$y' \tan x = y \ln y.$

(1) 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y+5}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\tan x}$，两边积分得 $\ln|y+5|=\ln\sin x+\ln C$，即 $y=C\sin x-5$.

(2) 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y+1}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}$，两边积分得 $\ln|y+1|=C-\frac{1}{x}$，即 $y=C\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}-1$.

(3) 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{\mathrm{d}x}{4x-x^2}$，两边积分得 $\ln|y|=\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x}{4-x}\right|+\ln C$，即 $y=\sqrt[4]{\dfrac{Cx}{4-x}}$.

(4) 原方程化为 $\dfrac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}y}{\sin y\cos y}$，两边积分得 $3\ln|\mathrm{e}^x-1|=\ln C|\tan y|$，即 $(\mathrm{e}^x-1)^3=C\tan y$.

(5) 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{1-y^2}=\tan x\mathrm{d}x$，两边积分得 $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+y}{1-y}\right|=-\ln C|\cos x|$，即 $\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}=C\sec x$.

(6) 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y\ln y}\cot x\mathrm{d}x$，两边积分得 $\ln|\ln y|=\ln C|\sin x|$，即 $y=C\mathrm{e}^{\sin x}$.

例 8.1.2. 求微分方程 $\cos y\mathrm{d}x+\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\sin y\mathrm{d}y=0$ 满足 $y(0)=\dfrac{\pi}{4}$ 的特解.

原式化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}}=-\tan y\mathrm{d}y$，两边积分，得 $\ln|\cos y|=\ln(1+\mathrm{e}^x)+\ln C$，即 $\cos y=C(1+\mathrm{e}^x)$，又 $y(0)=\dfrac{\pi}{4}$，故 $C=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，所以该微分方程的特解为 $y=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\mathrm{e}^x)$.

例 8.1.3. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，且 $\dfrac{f(x)}{F(x)}=-2$，$F(0)=1$，求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x$.

因为 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，所以 $F'(x)=f(x)$，且 $f(x)=-2F(x)$，则

$$F'(x)=-F(x)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}F(x)}{F(x)}=-2\mathrm{d}x$$

两边积分得 $F(x)=C\mathrm{e}^{-2x}$，又 $F(0)=1$，所以 $C=1$，于是

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}.$$

例 8.1.4. 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内严格单调递增且可导，$x=f^{-1}(y)$ 为其反函数，

$$\forall x,y>0,xy\leqslant\frac{1}{2}\left[xf(x)+yf^{-1}(y)\right]$$

求 $f(x)$ 的解析式.

令 $y=f(u)$，则由题设知

$$xf(u)\leqslant\frac{1}{2}[xf(x)+uf(u)]\Rightarrow x[f(u)-f(x)]\leqslant f(u)(u-x)$$

于是 $\forall x\in(0,+\infty)$，可得

$$\lim_{u\to x^+}\frac{f(u)-f(x)}{u-x}\leqslant\lim_{u\to x^+}\frac{f(u)}{x}\Rightarrow f'_+(x)\leqslant\frac{f(x)}{x}$$
$$\lim_{u\to x^-}\frac{f(u)-f(x)}{u-x}\geqslant\lim_{u\to x^-}\frac{f(u)}{x}\Rightarrow f'_-(x)\geqslant\frac{f(x)}{x}$$

又因为 $f'_-(x)-f'_+(x)$，则必有 $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，分离变量积分可得该方程的通解为 $f(x)=Cx$，又因为函数在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递增，则 $C>0$，即 $f(x)=Cx$，其中 C 为正常数.

8.1.2 齐次微分方程

定义 8.1.2 (齐次微分方程). 形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的方程称为齐次微分方程.

例 8.1.5. 求微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$ 的通解.

令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, 代入原方程, 化为 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{u}$, 再化为 $u\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}$, 两边积分 $\displaystyle\int u\mathrm{d}u=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}$, 解得 $\dfrac{u^2}{2}=\ln|Cx|$, 故原方程的通解为 $\dfrac{1}{2}\dfrac{y^2}{x^2}=\ln|Cx|$, 其中 C 是任意常数.

例 8.1.6. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{\ln\left(x^2+y^2\right)-2\ln x}$ 的通解.

原式 $\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{y}{x}=\ln^{-1}\left[1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right]\xRightarrow{\frac{y}{x}=z}\ln\left(1+z^2\right)\mathrm{d}z=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, 两边积分, 得

$$z\ln\left(1+z^2\right)-2z+2\arctan z=\ln|x|+C$$

即 $\dfrac{y}{x}\ln\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)-\dfrac{2y}{x}+2\arctan\dfrac{y}{x}=\ln|x|+C.$

例 8.1.7 (1996 数学 (三)). 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ 的通解.

原式 $\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}-\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\xRightarrow{\frac{y}{x}=z}\dfrac{\mathrm{d}z}{-\sqrt{1+z^2}}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, 两边积分, 得

$$-\ln\left|\sqrt{1+z^2}+z\right|=\ln|x|+\ln C$$

即 $\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}+z}=Cx\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}+y=C.$

可化为齐次方程的微分方程形如方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

其中 a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 为常数, 且 $c_1^2+c_2^2\neq 0$. 当 $\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\neq 0$ 时, 令 $x=X+h,y=Y+k$, 由 $\begin{cases}a_1h+b_1k+c_1=0\\a_2h+b_2k+c_2=0\end{cases}$ 解出 h 与 k, 可将原方程化为齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{Y}{X}}{a_2+b_2\frac{Y}{X}}\right)=g\left(\frac{Y}{X}\right)$$

当 $\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}=0$ 时, 即 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k$, 可设 $u=a_2x+b_2y$, 代人原方程后可化为可分离变量的微分方程, 即有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{ku+c_1}{u+c_2}\right)=g(u),\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a_2+b_2g(u).$$

8.1.3 线性微分方程

定义 8.1.3 (一阶线性微分方程). 形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)$ 的方程称为一阶线性微分方程.

定理 8.1.1 (通解公式). 对于一阶线性微分方程, 则有通解公式为

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int q(x)\cdot\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right].$$

例 8.1.8. 用一阶线性微分方程的通解公式, 求解例题 8.1.5.

原方程化为 $yy'-\frac{1}{x}y^2=x$, 即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}y^2\right)-\frac{2}{x}\left(\frac{1}{2}y^2\right)=x$, 令 $z=\frac{1}{2}y^2$, 上式化为 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x}z=x$, 由公式得通解为

$$z=\mathrm{e}^{2\int\frac{\mathrm{d}x}{x}}\left[\int x\mathrm{e}^{-2\int\frac{\mathrm{d}x}{x}}\mathrm{d}x+C\right]=x^2(\ln|x|+C)$$

故原方程的通解为 $\frac{1}{2}y^2=x^2(\ln|x|+C)$.

例 8.1.9 (2009 数二). 设非负函数 $y=y(x)\ (x\geqslant 0)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$, 当曲线 $y=y(x)$ 过原点时, 其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域 D 的面积为 2, 求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

法一: 令 $y'=p(x)$, 则 $y''=p'(x)$, 代入原方程, 得 $p'(x)-\frac{1}{x}p(x)=-\frac{2}{x}\ (x>0)$, 由通解公式, 得通解为

$$y'=p(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}x}{x}}\left[\int\left(-\frac{2}{x}\right)\cdot\mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}}{x}}+C_1\right]=2+C_1x$$

两边积分, 解得 $y=2x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2$, $(x>0)$, 而由已知 $y(0)=0$, 有 $\lim\limits_{x\to 0^+}y(x)=0$, 于是得 $C_2=0$, 从而 $y=2x+\frac{1}{2}C_1x^2$, 又由定积分的几何意义, 有 $2=\int_0^1\left(2x+\frac{1}{2}C_1x^2\right)\mathrm{d}x=1+\frac{1}{6}C_1$, 解得 $C_1=6$, 从而得 $y=2x+3x^2$, 由求根公式, 解得 $x=\frac{1}{3}(\pm\sqrt{3y+1}-1)$, 因为 $0\leqslant x<1$, 且 $y=y(x)$ 非负, 所以 $x=\frac{1}{3}(-\sqrt{3y+1}-1)$ 舍去, 从而得 $x=\frac{1}{3}(\sqrt{3y+1}-1), 0<y<5$, 故所求体积为

$$V=5\pi-\pi\int_0^5x^2\,\mathrm{d}y=5\pi-\frac{\pi}{9}\int_0^5(\sqrt{3y+1}-1)^2\,\mathrm{d}y=\frac{17\pi}{6}.$$

法二: 方程两边同时除以 x^2, 化为 $\frac{xy''-y'}{x^2}=-\frac{2}{x^2}$, 即 $\left(\frac{y'}{x}\right)'=\left(\frac{2}{x}\right)'$, 于是得 $\frac{y'}{x}=\frac{2}{x}+C_1$, 即 $y'=2+C_1x$, 两边积分, 得 $y=2x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2$, 而由 $y(0)=0$, 得 $C_2=0$, 从而 $y=2x+\frac{C_1}{2}x^2$, 又由定积分的几何意义, 有 $2=\int_0^1\left(2x+\frac{1}{2}C_1x^2\right)\mathrm{d}x=1+\frac{1}{6}C_1$, 解得 $C_1=6$, 于是 $y=2x+3x^2$, 故所求旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_0^1xy(x)\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1x\left(2x+3x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{17\pi}{6}.$$

法三: 将方程 $xy''-y'+2=0$, 化简为 $xy''+y'-2y'+2=0$, 即 $(xy'-2y+2x)'=0$. 于是得 $xy'-2y+2x=C_1$, 即 $y'-\frac{2}{x}y=-2+\frac{C_1}{x}$, 由通解公式, 其通解为

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\left(-2+\frac{C_1}{x}\right)\cdot\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_2\right]=x^2\left(\frac{2}{x}-\frac{C_1}{2x^2}+C_2\right)=2x-\frac{C_1}{2}+C_2x^2$$

而由已知 $y(0)=0$, 代入得 $C_1=0$, 于是 $y=2x+C_2x^2$, 又由定积分的几何意义, 有 $2=\int_0^1\left(2x+C_2x^2\right)\mathrm{d}x=1+\frac{C_2}{3}$, 解得 $C_2=3$, 从而得 $y=2x+3x^2$, 故所求旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_0^1xy(x)\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1\left(2x^2+3x^3\right)\mathrm{d}x=\frac{17\pi}{6}.$$

8.1.4 Bernoulli 微分方程

定义 8.1.4 (Bernoulli 微分方程). 形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)y^n$, $n\neq 0,1$ 的方程称为 *Bernoulli 微分方程*.

例 8.1.10. 将例题 8.1.5 化为 Bernoulli 方程, 并求其通解.

原方程化为 $y'-\frac{1}{x}y=xy^{-1}$, 此为 *Bernoulli* 方程, 其中 $n=-1$, 令 $z=y^{1-n}=y^2$, 代入上述方程, 化简得 $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}z=x$, 即 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x}z=2x$, 由公式得通解为

$$z=\mathrm{e}^{2\int\frac{\mathrm{d}x}{x}}\left[\int 2x\mathrm{e}^{-2\int\frac{\mathrm{d}x}{x}}\mathrm{d}x+C\right]=x^2(2\ln|x|+C)$$

故原方程的通解为 $y^2=x^2(2\ln|x|+C)$.

例 8.1.11 (2023 合肥工业大学). 设 $f(x)$ 是连续函数, 且满足 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$, 求 $f(x)$.

由题意可得 $f(0)=1$, 对方程两边 x 同时求导得

$$f'(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^x f^2(x)=f(x)+\mathrm{e}^x f^2(x)$$

该方程为 *Bernoulli* 方程, 令 $z(x)=\frac{1}{f(x)}$, 那么有 $z'(x)+z(x)=-\mathrm{e}^x$, 由通解公式得

$$z(x)=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\left[\int-\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+C\mathrm{e}^{-x}$$

且 $z(0)=1$, 解得 $C=\frac{3}{2}$, 故 $f(x)=\frac{2}{3\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x}$.

例 8.1.12. 求微分方程 $y'\cos y=(1+\cos x\sin y)\sin y$ 的通解.

令 $\sin y=z$, 那么原方程可化为 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=z(z\cos x+1)$ 即 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-z=z^2\cos x$, 再令 $z^{-1}=u$, 整理上式得 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=-\cos x$, 由通解公式:

$$u=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\left[-\int\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1\right]=-\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)+C_1\mathrm{e}^{-x}$$

回代 $u=\frac{1}{\sin y}$, 得原方程的通解为 $\frac{2}{\sin y}+\cos x+\sin x=C\mathrm{e}^{-x}$.

例 8.1.13 (第十四届大学生数学竞赛). 求方程的通解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}x\ln x\sin y+\cos y(1-x\cos y)\mathrm{d}x=0$.

令 $\cos y=u$, 那么 $u'=-\sin y\cdot y'$, 原式化为 $u'-\frac{1}{x\ln x}u=-\frac{u^2}{\ln x}$, 则

$$\text{原式}\xrightarrow[n=2]{z=u^{1-n}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x\ln x}z=\frac{1}{\ln x}\Rightarrow z=\mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}}\left[\int\frac{1}{\ln x}\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$z=\frac{x+C}{\ln x}\Rightarrow\cos y=\frac{\ln x}{x+C}.$$

8.1.5 恰当方程与积分因子

恰当方程

定义 8.1.5 (全微分方程). 对于微分方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$$

若 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 则该方程称为恰当方程或全微分方程.

例 8.1.14. 求微分方程 $(\sin y-y\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x+(x\cos y+\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x$ 的通解

记 $P(x,y)=\sin y-y\mathrm{e}^{-x}$, $Q(x,y)=x\cos y+\mathrm{e}^{-x}$, 则由

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\cos y-\mathrm{e}^{-x}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

知原方程为全微分方程, 且曲线积分 $\displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关, 取 $(x_0,y_0)=(0,0)$, 原函数为

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^x P(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^x(-2x)\mathrm{d}x+\int_0^y\left(x\cos y+\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}y=-x^2+x\sin y+y\mathrm{e}^{-x}\end{aligned}$$

故原方程的通解为 $u(x,y)\equiv C$, 即 $x\sin y+y\mathrm{e}^{-x}-x^2\equiv C$.

例 8.1.15. 求微分方程 $y''\left(3y'^2-x\right)=y'$ 的通解.

原方程化为 $y''\left(3y'^2-x\right)-y'=0$, 且注意到 $\mathrm{d}\left(y'^3\right)=3y'^2$, $\mathrm{d}(xy')=y'+xy''$, 于是原式化为

$$\mathrm{d}\left(y'^3-xy'\right)=0\Rightarrow y'^3-xy'=C_1$$

令 $p=y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 那么 $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}y}{p}$, 则 $p^3-xp=C_1$, 即 $x=p^2-\dfrac{C_1}{p}$, 两边全微分得

$$\mathrm{d}x=2p\mathrm{d}p+\frac{C_1\mathrm{d}p}{p^2}$$

代入 $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}y}{p}$, 得 $\mathrm{d}y=\left(2p^2+\dfrac{C_1}{p}\right)\mathrm{d}p$, 为变量分离方程, 于是两边积分得

$$\int\mathrm{d}y=\int\left(2p^2+\frac{C_1}{p}\right)\mathrm{d}p\Rightarrow y=\frac{2}{3}p^3+C_1\ln p+C_2$$

其中 $x=p^2-\dfrac{C_1}{p}$.

以下一些简单函数的全微分公式, 将对我们较快地进行这种重新组合有所帮助.

(1) $x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=\mathrm{d}(xy)$	(2) $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(x^2+y^2\right)$
(3) $\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}=\mathrm{d}\left(\dfrac{y}{x}\right)$	(4) $\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{y^2}=\mathrm{d}\left(-\dfrac{x}{y}\right)$
(5) $\dfrac{2xy\mathrm{d}y-y^2\mathrm{d}x}{x^2}=\mathrm{d}\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$	(6) $\dfrac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$
(7) $\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left[\ln\left(x^2+y^2\right)\right]$	(8) $\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)$
(9) $\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2-y^2}=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(\ln\dfrac{x+y}{x-y}\right)$	(10) $\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{xy}=\mathrm{d}\left(\ln\dfrac{y}{x}\right)$

积分因子

定理 8.1.2 (积分因子). 若微分方程 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 不满足 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 令 $\Delta_\partial=\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 那么对于以下特殊情况, 可确定积分因子.

(1) 若 $\dfrac{\Delta_\partial}{Q}$ 与 y 无关, 则有积分因子 $\mu(x)=\exp\displaystyle\int\frac{\Delta_\partial}{Q}\mathrm{d}x$.

(2) 若 $\dfrac{\Delta_\partial}{P}$ 与 x 无关, 则有积分因子 $\mu(y)=\exp\displaystyle\int\frac{-\Delta_\partial}{P}\mathrm{d}y$.

(3) 若满足 $f\left(mx^a+ny^b\right)=\dfrac{\Delta_\partial}{max^{a-1}Q-nby^{b-1}P}$, 则有积分因子

$$\mu(xy)=\exp\int f\left(mx^a+ny^b\right)\mathrm{d}\left(mx^a+ny^b\right).$$

(4) 若满足 $f\left(\sqrt{x^ay^b}\right)=\dfrac{2\sqrt{x^ay^b}\Delta_\partial}{x^{a-1}y^{b-1}(ayQ-bxP)}$, 则有积分因子

$$\mu(xy)=\exp\int f\left(\sqrt{x^ay^b}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x^ay^b}\right).$$

例 8.1.16. 求解下列方程的通解.

(1) $\left(x+y^2\right)\mathrm{d}x-2xy\mathrm{d}y=0.$	(2) $(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0.$
(3) $(1+xy)y\mathrm{d}x+(1-xy)x\mathrm{d}y=0.$	(4) $x\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x^2}{y}-y^3\right)\mathrm{d}y.$

(1) $P(x,y)=x+y^2$, $Q=-2xy$, 于是 $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)=-\dfrac{2}{x}$, 于是有积分因子

$$\mu(x)=\exp\left(-2\int\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)=\frac{1}{x^2}$$

方程两边同时乘以积分因子 $\mu(x)$, 并化简为 $\mathrm{d}(\ln|x|)+\mathrm{d}\left(-\dfrac{y^2}{x}\right)=0$, 故原方程的通解为

$$\ln|x|-\frac{y^2}{x}\equiv C.$$

(2) $\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-2$, 于是 $\dfrac{-2}{2(xQ-yP)}=-\dfrac{1}{x^2+y^2}$, 则有积分因子

$$\mu(xy)=\exp\left(-\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{x^2+y^2}$$

方程两边同时乘以积分因子 $\mu(xy)$, 得 $\dfrac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\dfrac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y=0$, 整理得

$$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}+\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0\Rightarrow\mathrm{d}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)+\mathrm{d}\left(\frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{2}\right)=0$$

故原方程的通解为 $\arctan\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\equiv C.$

(3) $\Delta_\partial=4xy$, 于是 $\dfrac{2x^2y^2\cdot\Delta_\partial}{x^3y^3[4(-2xy)]}=-\dfrac{1}{xy}$, 则有积分因子 $\mu(xy)=\exp\left(-\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}xy}{xy}\right)=\dfrac{1}{xy}$, 方程两边同时乘以积分因子 $\mu(xy)$, 得 $\dfrac{1+xy}{x}\mathrm{d}x+\dfrac{1-xy}{y}\mathrm{d}y=0$, 整理得

$$\begin{aligned}\frac{1+xy}{x}\mathrm{d}x+\frac{1-xy}{y}\mathrm{d}y&=\frac{\mathrm{d}x}{x}+y\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}y}{y}-x\mathrm{d}y=\left(\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}y}{y}\right)+(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)\\&=\frac{1}{xy}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)+\frac{1}{xy}\left(\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}y}{y}\right)=\frac{y}{x}\cdot\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}+\frac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2y^2}\\&=\mathrm{d}\left(\ln\frac{x}{y}\right)+\mathrm{d}\left(-\frac{1}{xy}\right)=\mathrm{d}\left(\ln\frac{x}{y}-\frac{1}{xy}\right)=0\end{aligned}$$

故原方程的通解为 $\ln\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{xy}\equiv C.$

(4) 方程化为 $x\mathrm{d}x+\left(y^3-\frac{x^2}{y}\right)\mathrm{d}y=0$, 那么 $\Delta_\partial=\frac{2x}{y}$, 那么有积分因子 $\mu(y)=\exp\int\frac{-\Delta_\partial}{P}\mathrm{d}y=\frac{1}{y^2}$, 方程两边同时乘以积分因子 $\mu(y)$, 得 $\frac{x}{y^2}\mathrm{d}x+\left(y-\frac{x^2}{y^3}\right)\mathrm{d}y=0$, 整理得

$$\frac{x}{y^2}\mathrm{d}x+\left(y-\frac{x^2}{y^3}\right)\mathrm{d}y=\frac{2x}{y^2}\mathrm{d}x+2\left(y-\frac{x^2}{y^3}\right)\mathrm{d}y=2y\mathrm{d}y+\frac{2xy\mathrm{d}x}{y^3}-\frac{2x^2\mathrm{d}y}{y^3}=\mathrm{d}(y^2)+\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{y^2}\right)=0$$

故原方程的通解为 $y^2+\frac{x^2}{y^2}\equiv C$.

定理 8.1.3. 若 $\mu=\mu(x,y)$ 是微分方程 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的一个积分因子, 使得

$$\mu(x,y)P(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)Q(x,y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}\Phi(x,y)$$

则 $\mu(x,y)g(\Phi(x,y))$ 也是该方程的一个积分因子, 其中 g 是任意一可微的非零函数.

定理 8.1.4 (积分因子的存在性定理)**.** 如果微分方程 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 有通解 $u(x,y)=C$, 那么它总有一个积分因子 $\mu=\mu(x,y)$, 同时 $\mu\varphi(u)$ 也是该方程的一个积分因子, 并且方程的积分因子必须具有 $\mu\varphi(u)$ 的形式, 其中 $\varphi(u)$ 是 u 的任意一个可微函数.

例 8.1.17. 求解下列方程.

(1) $x(4y\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y)+y^3(3y\mathrm{d}x+5x\mathrm{d}y)=0.$ | (2) $\left(x^3y-2y^2\right)\mathrm{d}x+x^4\mathrm{d}y=0.$

(1) 对第一组, 有

$$x(4y\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y)=x[(2y\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y)+2y\mathrm{d}x]=x[2\,\mathrm{d}(xy)+2y\mathrm{d}x]=2x\,\mathrm{d}(xy)+2xy\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(2x^2y\right)$$

则其积分因子和二元函数为

$$\mu_1=1,\ u_1=2x^2y$$

对第二组, 有

$$y^3(3y\mathrm{d}x+5x\mathrm{d}y)=3y^4\mathrm{d}x+5xy^3\mathrm{d}y$$

易见它有一个积分因子 $\mu_2=\frac{1}{xy^4}$, 相乘后得

$$\frac{3}{x}\mathrm{d}x+\frac{5}{y}\mathrm{d}y=3\mathrm{d}(\ln|x|)+5\mathrm{d}(\ln|y|)=\mathrm{d}\left(\ln\left|x^3y^5\right|\right)$$

相应地有 $u_2=\ln\left|x^3y^5\right|$, 根据积分因子的存在性定理, 可以考虑选择适当的可微函数 φ 与 $\tilde{\varphi}$ 使得

$$1\cdot\varphi\left(2x^2y\right)=\frac{1}{xy^4}\tilde{\varphi}\left(\ln\left|x^3y^5\right|\right)$$

取 $\varphi\left(2x^2y\right)=2x^2y$, $\tilde{\varphi}\left(\ln\left|x^3y^5\right|\right)=2x^3y^5$, 则得到原方程的一个积分因子 $\mu=2x^2y$, 将它乘原方程两边, 得

$$2x^2y\mathrm{d}\left(2x^2y\right)+6x^2y^5\mathrm{d}x+10x^3y^4\mathrm{d}y=0$$

即

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(2x^2y\right)^2+2y^5\mathrm{d}x^3+2x^3\mathrm{d}y^5=\mathrm{d}\left(2x^4y^2\right)+\mathrm{d}\left(2x^2y^5\right)=\mathrm{d}\left(2x^4y^2+2x^3y^5\right)=0$$

故原方程的通解为 $x^4y^2+x^3y^5=C$.

(2) 将方程改写为

$$x^3y\mathrm{d}x+x^4\mathrm{d}y+\left(-2y^2\right)\mathrm{d}x=0$$

即

$$x^3(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)+\left(-2y^2\right)\mathrm{d}x=0\Rightarrow x^3\,\mathrm{d}(xy)+\left(-2y^2\right)\mathrm{d}x=0$$

第一组有积分因子 $\mu_1=\frac{1}{x^3}$ 和原函数 $u_1=xy$; 第二组有积分因子 $\mu_2=\frac{1}{-2y^2}$ 和原函数 $u_2=x$, 现寻找可微函数 φ 与 $\tilde{\varphi}$, 使得

$$\frac{1}{x^3}\varphi(xy)=\frac{1}{-2y^2}\tilde{\varphi}$$

取 $\varphi(xy)=\dfrac{1}{(xy)^2}$, $\tilde{\varphi}=-\dfrac{2}{x^5}$, 则得到原方程的一个积分因子 $\mu=\mu(x,y)=\dfrac{1}{x^5y^2}$, 将它乘原方程两边, 得

$$\frac{\mathrm{d}(xy)}{x^2y^2}-\frac{2}{x^5}\mathrm{d}x=0$$

即

$$\mathrm{d}\left(-\frac{1}{xy}\right)+\mathrm{d}\left(\frac{1}{2x^4}\right)=0$$

故原方程的通解为 $\dfrac{1}{2x^4}-\dfrac{1}{xy}=C.$

8.2 高阶微分方程

高阶微分方程是指涉及一个未知函数及其多阶导数的微分方程. 通常形式为:

$$F\left(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}\right)=0$$

其中 y 是未知函数, $y^{(i)}$ $(i=0,1,\cdots,n)$ 是 y 的 i 阶导数, F 是关于 $x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}$ 的函数, 解高阶微分方程需要使用微积分知识、积分技巧以及一些特定的方法, 如常数变易法、特征方程法等.

8.2.1 常系数齐次线性微分方程

二阶常系数线性齐次微分方程的通解

定理 8.2.1 (二阶常系数线性齐次微分方程的通解结构). 设

$$y''+py'+qy=0 \tag{1}$$

(1) 特征方程有两个相异实根 $r_1\neq r_2$, 则方程 (1) 的通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$;

(2) 特征方程有两个相等实根 $r_1=r_2=r$, 则方程 (1) 的通解为 $Y=(C_1+C_2x)\,\mathrm{e}^{rx}$;

(3) 特征方程有一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$, 则方程 (1) 的通解为

$$Y=\mathrm{e}^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$$

例 8.2.1. 求解下列微分方程的通解.

(1) $y''-12y'+35y=0$	(2) $y''+2y'+3y=0$	(3) $y'''-6y''+3y'+10y=0$
(4) $y^{(4)}-2y'''+2y''-2y'+y=0$	(5) $y'''-2y''+5y'=0$	(6) $y'''-2y''+y'-2y=0$

(1) 特征方程 $r^2-12r+35=0\Rightarrow r_1=5,r_2=7$, 因此微分方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{5x}+C_2\mathrm{e}^{7x}$.

(2) 特征方程 $r^2+2r+3=0\Rightarrow r_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$, 因此微分方程的通解为 $y=\mathrm{e}^{-x}\left(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x\right)$.

(3) 特征方程 $r^3-6r^2+3r+10=0\Rightarrow r_1=-1,r_2=2,r_3=5$, 因此微分方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}C_2\mathrm{e}^{2x}+C_3\mathrm{e}^{5x}$.

(4) 特征方程 $r^4-2r^3+2r^2-2r+1=0\Rightarrow(r-1)^2\left(r^2+1\right)=0$ 得二重实根 1, 单重共轭复根 $\pm\mathrm{i}$, 因此微分方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{x}+C_3\cos x+C_4\sin x$$

(5) 特征方程 $r^3-2r^2+5r=0 \Rightarrow r_1=0, r_{2,3}=1\pm 2\mathrm{i}$, 因此微分方程的通解为 $y=C_1+\mathrm{e}^x(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)$.

(6) 特征方程 $r^3-2r^2+r-2=0 \Rightarrow r_1=2, r_2=-1, r_3=1$, 因此微分方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-x}+C_3\mathrm{e}^x$.

例 8.2.2 (第十三届数学竞赛决赛). 求区间 $[0,1]$ 上的连续函数 $f(x)$, 使之满足

$$f(x)=1+(1-x)\int_0^x yf(y)\mathrm{d}y+x\int_x^1(1-y)f(y)\mathrm{d}y.$$

分别令 $x=0,1$, 代入关系式, 得 $f(0)=f(1)=1$, 并对关系式求导, 有

$$f'(x)=-\int_0^x yf(y)\mathrm{d}y+\int_x^1(1-y)f(y)\mathrm{d}y$$

再次求导有

$$f''(x)+f(x)=0$$

该常系数齐次线性微分方程的特征方程为 $r^2+1=0$, 特征根为 $r=\pm i$, 故通解为

$$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$$

代入初值 $f(0)=f(1)=1$, 得

$$C_1=1,\ C_2=\frac{1-\cos 1}{\sin 1}=\tan\frac{1}{2}$$

故所求函数为

$$f(x)=\cos x+\tan\frac{1}{2}\sin x.$$

n 阶常系数线性齐次微分方程

定理 8.2.2 (n 阶常系数线性齐次微分方程通解结构). 设 n 阶常系数线性齐次微分方程是

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0 \tag{2}$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是常数, 代数方程

$$r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0$$

称为微分方程 (2) 的特征方程, 特征方程的根叫作微分方程 (2) 的特征根.

(1) 如果 r_1 是特征方程的单根, 则

$$y=C\mathrm{e}^{r_1x}$$

是微分方程 (2) 的解;

(2) 如果特征方程有一对共轭复根 $r_1=\alpha+i\beta, r_2=\alpha-i\beta$, 则

$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$$

是微分方程 (2) 的解;

(3) 如果 r_1 是特征方程的 k 重根, 则

$$y=\left(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1}\right)\mathrm{e}^{r_1x}$$

是微分方程 (2) 的解;

(4) 如果 $r_1=\alpha+i\beta, r_2=\alpha-i\beta$ 都是特征方程的 k 重根, 则

$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}\left[\left(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1}\right)\cos\beta x+\left(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1}\right)\sin\beta x\right]$$

是微分方程 (2) 的解.

8.2.2 常系数非齐次线性微分方程

二阶常系数非齐次线性微分方程的通解结构

例 8.2.3 (1993 数三). 设二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=k\mathrm{e}^x$ 的一个特解为 $y=\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^x$, 试确定 a,b,k, 并求该方程的通解.

法一: 将特解 $y=\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^x$ 代人原方程, 得

$$(4+2a+b)\mathrm{e}^{2x}+(3+2a+b)\mathrm{e}^x+(1+a+b)x\mathrm{e}^x=k\mathrm{e}^x$$

比较两边同类项的系数, 得 $2a+b=-4, 2a+b-k=-3, a+b=-1$, 解得 $a=-3, b=2, k=-1$ 故原方程为

$$y''-3y'+2y=-\mathrm{e}^x$$

又对应的齐次线性方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0$, 解得特征根为 $r_1=1, r_2=2$, 于是可设原方程的特解形式为 $y^*=cx\mathrm{e}^x$, 把它代人原方程中得 $c=1$, 故由通解结构知原方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^x$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

法二: 由已知及通解的结构与特解形式, 得 e^{2x} 与 e^x 应是对应齐次线性方程的特解, $x\mathrm{e}^x$ 是非齐次线性方程的一个特解. 于是特征方程为

$$r^2+ar+b=(r-1)(r-2)=r^2-3r+2$$

即得 $a=-3, b=2$, 又将 $y^*=x\mathrm{e}^x$ 代人原方程 $y''-3y'+2y=k\mathrm{e}^x$ 中得 $k=-1$, 故原方程为 $y''-3y'+2y=-\mathrm{e}^x$, 其通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^x$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

法三: 由已知及通解的结构与特解形式, 得 $\mathrm{e}^{2x}, \mathrm{e}^x$ 是对应齐次线性方程的特解, $x\mathrm{e}^x$ 是非齐次线性方程的一个特解, 分别代人对应的方程, 得

$$\begin{cases}4+2a+b=0,\\1+a+b=0,\\(2+x)+a(1+x)+bx=k\end{cases}$$

解得 $a=-3, b=2, k=-1$, 故原方程为 $y''-3y'+2y=-\mathrm{e}^x$, 其通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^x$ 其中 C_1, C_2 为任意常数.

例 8.2.4. 设 $y=\mathrm{e}^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$ (C_1, C_2 为任意常数) 为某二阶常系数齐次线性微分方程的通解, 求该微分方程.

法一: 由二阶常系数齐次线性微分方程的通解公式, 可知特征方程的根应为 $\lambda_{1,2}=1\pm i$, 从而特征方程为 $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=(\lambda-1-i)\cdot(\lambda-1+i)=0$, 即 $\lambda^2-2\lambda+2=0$. 故所求微分方程为 $y''-2y'+2y=0$.

法二: 设所求微分方程为 $y''+py'+qy=0$, 其中 p,q 为常数. 将已知解 $y=\mathrm{e}^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$ 代人上述方程, 得

$$\mathrm{e}^x\sin x\left[p(C_1-C_2)+qC_1-2C_2\right]+\mathrm{e}^x\cos x\left[p(C_1+C_2)+qC_2+2C_1\right]=0$$

因为 $\mathrm{e}^x\sin x$ 与 $\mathrm{e}^x\cos x$ 线性无关, 所以

$$p(C_1-C_2)+qC_1-2C_2=0, p(C_1+C_2)+qC_2+2C_1=0$$

解得 $p=-2, q=2$, 故所求微分方程为 $y''-2y'+2y=0$.

法三: 设所求微分方程为 $y''+py'+qy=0$, 其中 p,q 为常数. 因为 $y=\mathrm{e}^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$ 为上述方程的通解, 所以 $y_1=\mathrm{e}^x\sin x$ 和 $y_2=\mathrm{e}^x\cos x$ 为 $y''+py'+qy=0$ 的特解, 代人方程, 得

$$\begin{cases}p(\cos x+\sin x)+q\sin x+2\cos x=0\\p(\cos x-\sin x)+q\cos x-2\sin x=0\end{cases}$$

改写为矩阵形式, 有 $\begin{pmatrix}\cos x+\sin x & \sin x\\\cos x-\sin x & \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cos x\\2\sin x\end{pmatrix}$, 而

$$\begin{pmatrix}\cos x+\sin x & \sin x\\\cos x-\sin x & \cos x\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\\sin x-\cos x & \cos x+\sin x\end{pmatrix}$$

且 $\begin{vmatrix}\cos x+\sin x & \sin x\\ \cos x-\sin x & \cos x\end{vmatrix}=1$, 所以

$$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x-\cos x & \cos x+\sin x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\cos x\\ 2\sin x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$$

故所求微分方程为 $y''-2y'+2y=0$.
法四: 由通解 $y=\mathrm{e}^x\left(C_1\sin x+C_2\cos x\right)$, 求出 y',y'':

$$y'=\mathrm{e}^x\left[(C_1-C_2)\sin x+(C_1+C_2)\cos x\right],\quad y''=\mathrm{e}^x\left(-2C_2\sin x+2C_1\cos x\right)$$

消去 C_1 与 C_2, 得 $y''-2y'+2y=0$, 此即为所求微分方程.

例 8.2.5. 已知 $y_1=x$, $y_2=x+\sin x$, $y_3=\mathrm{e}^x+x$ 为某二阶非齐次线性微分方程的三个特解, 求该微分方程, 并求其通解.

因为 $\dfrac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x}\neq C$, 所以 y_2-y_1 与 y_3-y_2 线性无关, 从而得所求微分方程的通解为 $y=C_1\sin x+C_2\mathrm{e}^x+x$, 分别求一、二阶导数, 并解出 C_1, C_2,

$$\begin{cases}y' &= C_1\cos x + 7C_2\mathrm{e}^x + 1\\ y'' &= -C_1\sin x + C_2\mathrm{e}^x\end{cases}$$

即得所求的微分方程为

$$(\cos x-\sin x)y''+2\sin x\cdot y'-(\sin x+\cos x)y=2\sin x-x(\sin x+\cos x).$$

例 8.2.6 (1997 数二)**.** 设某个二阶常系数非齐次线性微分方程有三个特解:

$$y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x},\ y_2=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x},\ y_3=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}$$

求该微分方程, 并给出其通解.

因为 $\dfrac{y_1-y_3}{(y_1-y_2)+(y_1-y_3)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x}}\neq C$, 于是该方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^x$$

分别求一、二阶导数, 有

$$y'=-C_1\mathrm{e}^{-x}+2C_2\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x(x+1),\ y''=C_1\mathrm{e}^{-x}+4C_2\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x(x+2)$$

于是

$$\begin{pmatrix}-\mathrm{e}^{-x} & 2\mathrm{e}^{2x}\\ \mathrm{e}^{-x} & 4\mathrm{e}^{2x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y'-\mathrm{e}^x(x+1)\\ y''-\mathrm{e}^x(x+2)\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathrm{e}^{-x} & 2\mathrm{e}^{2x}\\ \mathrm{e}^{-x} & 4\mathrm{e}^{2x}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}y'-\mathrm{e}^x(x+1)\\ y''-\mathrm{e}^x(x+2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^x[y''-\mathrm{e}^x(x+2)]-\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^x[y'-\mathrm{e}^x(x+1)]\\ \dfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-2x}[y''-\mathrm{e}^x(x+2)]+\dfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-2x}[y'-\mathrm{e}^x(x+1)]\end{pmatrix}$$

消去 C_1, C_2 得该微分方程为 $y''-y'-2y=(1-2x)\mathrm{e}^x$.

微分算子法

微分算子法是在求解非齐次线性微分方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$$

的一个特解时常采用的一种方法. 具体地说, 在求解常系数微分方程上述方程时, 可以先求解其特征方程, 得到相应齐次方程的通解, 再求出非齐次方程的一个特解即可.

定义 8.2.1 (微分算子). 为了求非齐次方程的一个特解, 引入微分算子:

$$\mathrm{D}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},\ \mathrm{D}^2=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2},\ \cdots,\ \mathrm{D}^n=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$$

以及算子多项式

$$L(\mathrm{D})=\mathrm{D}^n+a_1\mathrm{D}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\mathrm{D}+a_n$$

这样一来, 微分方程可以写成

$$L(\mathrm{D})y=f(x)$$

显然, 如果记 $\frac{1}{\mathrm{D}}f(x)$ 为此方程的任一解, 则

$$L(\mathrm{D})\left(\frac{1}{L(\mathrm{D})}f(x)\right)=f(x)$$

因此, 在形式上可以把 $\frac{1}{\mathrm{D}}f(x)$ 看成是 $L(\mathrm{D})$ 的逆算子.

定理 8.2.3. $\frac{1}{\mathrm{D}}f(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$.

定理 8.2.4. 对于任意常数 a, $\frac{1}{\mathrm{D}-a}f(x)=\mathrm{e}^{ax}\int \mathrm{e}^{-ax}f(x)\mathrm{d}x$.

定理 8.2.5. 对于任意常数 α 和 β, $\frac{1}{L(\mathrm{D})}(\alpha u(x)+\beta v(x))=\alpha\frac{1}{L(\mathrm{D})}u(x)+\beta\frac{1}{L(\mathrm{D})}v(x)$.

定理 8.2.6. $\frac{1}{L_1(\mathrm{D})L_2(\mathrm{D})}f(x)=\frac{1}{L_1(\mathrm{D})}\left(\frac{1}{L_2(\mathrm{D})}f(x)\right)=\frac{1}{L_2(\mathrm{D})}\left(\frac{1}{L_1(\mathrm{D})}f(x)\right)$.

定理 8.2.7 (算子特性). (1) $F(\mathrm{D})=\mathrm{D}^m$, $\frac{1}{F(\mathrm{D})}f^{(m)}(x)=f(x)$;

(2) $F(\mathrm{D})=\mathrm{D}-k$ 时, $\frac{1}{F(\mathrm{D})}\mathrm{e}^{bx}=\frac{e^{bx}}{b-k}$, $b\neq k$;

(3) $F(\mathrm{D})=(\mathrm{D}-b)(\mathrm{D}-a)$ 时, $\frac{1}{F(\mathrm{D})}f(x)=\frac{1}{\mathrm{D}-b}\frac{1}{\mathrm{D}-a}f(x)$, 当 $ab\neq 0$ 时, $\frac{1}{\mathrm{D}-b}\frac{1}{\mathrm{D}-a}=\frac{1}{ab}$;

(4) $\frac{1}{F(\mathrm{D})}\mathrm{e}^{kx}=\frac{1}{F(k)}\mathrm{e}^{kx}$, $F(k)\neq 0$;

(5) $\frac{1}{F(\mathrm{D})}u(x)\mathrm{e}^{kx}=\mathrm{e}^{kx}\frac{1}{F(\mathrm{D}+k)}u(x)$;

(6) $\frac{1}{F(\mathrm{D})}[f_1(x)+f_2(x)]=\frac{1}{F(\mathrm{D})}f_1(x)+\frac{1}{F(\mathrm{D})}f_2(x)$;

(7) $F(\mathrm{D})=\mathrm{D}-k$, $\frac{1}{F(\mathrm{D})}x^\alpha=\left(-\sum_{n=0}^{\alpha}\frac{\mathrm{D}^n}{k^{n+1}}\right)x^\alpha$.

例 8.2.7 (2010 数学 (一)). 求微分方程 $y''-3y'+2y=2x\mathrm{e}^x$ 的通解.

记 $\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, $\mathrm{I}y=y$, 则原方程可改写为 $\left(\mathrm{D}^2-3\mathrm{D}+2\mathrm{I}\right)y=2x\mathrm{e}^x$, 即 $(\mathrm{D}-\mathrm{I})(\mathrm{D}-2\mathrm{I})y=2x\mathrm{e}^x$, 令 $(\mathrm{D}-2\mathrm{I})y=z(x)$, 则有 $(\mathrm{D}-\mathrm{I})z(x)=2x\mathrm{e}^x$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}z(x)}{\mathrm{d}x}-z(x)=2x\mathrm{e}^x$, 解得

$$z(x)=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left[\int 2x\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}+C_1\right]=\mathrm{e}^x\left(x^2+C_1\right)$$

再由 $(\mathrm{D}-2\mathrm{I})y=z(x)$ 化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2y=\mathrm{e}^x\left(x^2+C_1\right)$, 故原方程的通解为

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left[\int\mathrm{e}^x\left(x^2+C_1\right)\cdot\mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}x}+C_2\right]=\mathrm{e}^{2x}\left[\int\mathrm{e}^{-x}\left(x^2+C_1\right)\mathrm{d}x+C_2\right]\\&=\mathrm{e}^{2x}\left[\left(-x^2\mathrm{e}^{-x}-2x\mathrm{e}^{-x}-2\mathrm{e}^{-x}\right)-C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\right]=\left(-x^2-2x-2-C_1\right)\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}\end{aligned}$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

例 8.2.8. 求微分方程 $y''+y'-2y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

记 $\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, 则原方程可改写为 $\left(\mathrm{D}^2+\mathrm{D}-2\right)y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$, 即 $(\mathrm{D}+2)(\mathrm{D}-1)y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$, 令 $z(x)=(\mathrm{D}-1)y$, 则有 $(\mathrm{D}+2)z(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}z(x)}{\mathrm{d}x}+2z=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$, 解得

$$z(x)=\mathrm{e}^{-2\int\mathrm{d}x}\left[\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\cdot\mathrm{e}^{2\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{\mathrm{e}^x}+\frac{\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)}{\mathrm{e}^{2x}}$$

再由 $(\mathrm{D}-1)y=z(x)$ 化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)}{\mathrm{e}^{2x}}$, 故原方程的通解为

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left\{\int\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{\mathrm{e}^x}+\frac{\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)}{\mathrm{e}^{2x}}\right]\cdot\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_2\right\}=\mathrm{e}^x\left\{\int\left[\frac{1}{2\mathrm{e}^x}-\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}+\frac{\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)}{\mathrm{e}^{3x}}\right]\mathrm{d}x+C_2\right\}\\&=-\frac{\left(\mathrm{e}^{3x}+1\right)\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)}{3\mathrm{e}^{2x}}+\frac{x\mathrm{e}^x}{3}+C_2\mathrm{e}^x+\frac{1}{3\mathrm{e}^x}+\frac{C_1}{\mathrm{e}^{2x}}-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

其中 $\displaystyle\int\frac{\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)}{\mathrm{e}^{3x}}\mathrm{d}x\xlongequal{\mathrm{e}^x=t}\int\frac{\ln(t+1)}{t^4}\mathrm{d}t=-\frac{1}{3}\int\ln(t+1)\mathrm{d}\frac{1}{t^3}=-\frac{1}{3}\left[\frac{\ln(t+1)}{t^3}-\int\frac{\mathrm{d}t}{t^3(t+1)}\right]$, 且

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{t^3(t+1)}\xlongequal{u=\frac{t}{t+1}}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{2}{u^2}+\frac{1}{u^3}\right)\mathrm{d}u=\ln|u|+\frac{4u-1}{2u^2}+C$$

即得 $\displaystyle\int\frac{\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)}{\mathrm{e}^{3x}}\mathrm{d}x=-\frac{\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)}{3}+\frac{-2\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)+2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x}{6\mathrm{e}^{3x}}+\frac{x}{3}+C.$

Laplace 变换法

定义 8.2.2 (Laplace 变换). 假设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上分段连续, 如果参变量积分

$$F(s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t$$

收敛, 则称函数 $F(s)$ 为 $f(x)$ 的 *Laplace* 变换, 并记为

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$$

称函数 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的 *Laplace* 逆变换, 并记为

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

常见的 Laplace 变换 (以下 $s>0,\alpha,\lambda,\ n>-1$)

$(1)\mathcal{L}\{1\}=\dfrac{1}{s}$	$(2)\mathcal{L}\{t^n\}=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$(3)\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{\alpha t}\}=\dfrac{1}{s-\alpha}$	$(4)\mathcal{L}\{t^n\mathrm{e}^{\alpha t}\}=\dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$(5)\mathcal{L}\{\sin\omega t\}=\dfrac{\omega}{s^2+\omega}$	$(6)\mathcal{L}\{\cos\omega t\}=\dfrac{s}{s^2+\omega}$
$(7)\mathcal{L}\{t\sin\omega t\}=\dfrac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$	$(8)\mathcal{L}\{t\cos\omega t\}=\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$(9)\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{\lambda t}\sin\omega t\}=\dfrac{\omega}{(s-\lambda)^2+\omega^2}$	$(10)\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{\lambda t}\cos\omega t\}=\dfrac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+\omega^2}$
$(11)\mathcal{L}\{t\mathrm{e}^{\lambda t}\sin\omega t\}=\dfrac{2\omega(s-\lambda)}{[(s-\lambda)^2+\omega^2]^2}$	$(12)\mathcal{L}\{t\mathrm{e}^{\lambda t}\cos\omega t\}=\dfrac{(s-\lambda)^2-\omega^2}{[(s-\lambda)^2+\omega^2]^2}$

例 8.2.9 (2010 数学 (一)). (用 Laplace 变换) 求解例题 8.2.7.

对方程两边进行 *Laplace* 变换, 得 $s^2Y(s)-3sY(s)+2Y(s)=\dfrac{2}{(s-1)^2}$, 解得

$$Y(s)=2\left[\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}-\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{(s-1)^3}\right]$$

所以一个特解为 $y^*=2\left(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x-\dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^x\right)$, 又对应齐次线性微分方程 $y''-3y'+2y=0$ 的通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$, 故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-\left(x^2+2x+2\right)\mathrm{e}^x.$$

8.2.3 可降阶的高阶微分方程

$y^{(n)}=f(x)$

方程特点是右端为自变量 x 的函数, 且不含有函数 y 及其导数 $y',y'',\cdots,y^{(n-1)}$, 将方程两边对 x 积分 n 次, 即得其通解

$$y=\int\mathrm{d}x\cdots\int f(x)\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{C}_i}{(n-i)!}x^{n-i}.$$

定理 8.2.8. 对于二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$, 若由特征方程 $r^2+pr+q=0$ 求出特征根为 $\lambda_1,\ \lambda_2$, 且有

$$\lambda_1+\lambda_2=-p,\ \lambda_1\cdot\lambda_2=q$$

那么方程总可以化为

$$(y'-\lambda_1y)'-\lambda_2(y'-\lambda_1y)=f(x).$$

例 8.2.10. 试用降阶法求解例题 8.2.7.

将原方程改写为 $(y'-2y)'-(y'-2y)=2x\mathrm{e}^x$, 设 $u=y'-2y$, 则上述方程化为 $u'-u=2x\mathrm{e}^x$, 解得

$$u=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left[\int 2x\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1\right]=\mathrm{e}^x\left(\int 2x\mathrm{d}x+C_1\right)=x^2\mathrm{e}^x+C_1\mathrm{e}^x$$

再求一阶微分方程 $y'-2y=x^2\mathrm{e}^x+C_1\mathrm{e}^x$ 得原方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{2x}\left[\int(x^2\mathrm{e}^x+C_1\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x+C_2\right]=-(x^2+2x+1)\mathrm{e}^x-C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

$y'' = f(x, y')$

方程的特点是右端不显含 y, 令 $y' = p(x), y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = p'$, 代入原方程即可化为一阶方程 $p' = f(x, p)$, 若其解为 $p = \varphi(x, C_1)$, 则原方程的通解为

$$y = \int \varphi(x, C_1)\mathrm{d}x + C_2.$$

$y'' = f(y, y')$

方程的特点是右端不显含自变量 x, 令 $y' = p(x)$, 并利用复合函数的求导法则, 有

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

代入原方程即可化为一阶方程

$$p \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$$

若其解为 $p = \varphi(y, C_1)$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(y, C_1)$, 则原方程的通解为

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

8.2.4 Euler 微分方程

齐次 Euler 微分方程

定义 8.2.3 (齐次 Euler 微分方程). 形如

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0.$$

的微分方程称为齐次 *Euler* 微分方程.

定理 8.2.9. 若采用记号 D 表示对 $t\ (t = \ln x)$ 求导的运算 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 那么有

$$x^k y_x^{(k)} = \mathrm{D}(\mathrm{D}-1)\cdots(\mathrm{D}-k+1)y_t = \mathrm{D}^{\underline{k}} y_t\ (k \in \mathbb{N}).$$

例 8.2.11. 求微分方程 $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ 的通解.

令 $x = \mathrm{e}^t$, $\mathrm{D} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 那么原方程化为 $(\mathrm{D}-1)(\mathrm{D}-2)y = 0$, 易得 $y = C_1 x^2 + C_2 x$.

例 8.2.12. 求 Euler 方程 $x^2 \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 4x \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 0\ (x > 0)$ 的通解.

令 $x = \mathrm{e}^t$, $\mathrm{D} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 那么原方程化为 $(\mathrm{D}+1)(\mathrm{D}+2)y = 0$, 易得 $y = \dfrac{C_1}{x} + \dfrac{C_2}{x^2}$.

例 8.2.13. 求方程 $x^3 \dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} + x \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = 0$ 的通解.

令 $x=\mathrm{e}^t$, $\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 那么原方程化为 $(\mathrm{D}-1)^3y=0$, 令 $z_1=(\mathrm{D}-1)^2y$, 则有

$$(\mathrm{D}-1)z=0\Rightarrow z_1=(\mathrm{D}-1)^2y=C_1\mathrm{e}^t$$

再令 $z_2=(\mathrm{D}-1)y$, 有

$$(\mathrm{D}-1)z_2=C_1\mathrm{e}^t\Rightarrow z_2=(\mathrm{D}-1)y=C_1t\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^t$$

进而得到

$$y=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}t}\left[\int(C_1t\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^t)\cdot\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C_3\right]=(C_1t^2+C_2t+C_3)\mathrm{e}^t$$

回代 $t=\ln x$, 得 $y=x(C_1\ln^2x+C_2\ln x+C_3)$.

非齐次 Euler 微分方程

定义 8.2.4 (非齐次 Euler 微分方程)**.** 形如

$$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x).$$

的微分方程称为非齐次 *Euler* 微分方程.

例 8.2.14. 求微分方程 $xy'+2y=4\ln x$ 的通解.

原式 $\xRightarrow{x=\mathrm{e}^t}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=4t\Rightarrow y=\mathrm{e}^{-2\int\mathrm{d}t}\left[\int4t\cdot\mathrm{e}^{2\int\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right]=(2t-1)+C\mathrm{e}^{-2t}=2\ln x-1+\dfrac{C}{x^2}$.

例 8.2.15. 求微分方程 $4x^4y'''-4x^3y''+4x^2y'=1$ 的通解.

将原方程改写为 $x^3y'''-x^2y''+xy'=\dfrac{1}{4x}$, 并令 $x=\mathrm{e}^t$, $\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, 于是原式化为

$$\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)(\mathrm{D}-2)y-\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)y+\mathrm{D}y=\mathrm{D}(\mathrm{D}-2)^2y=\frac{1}{4\mathrm{e}^t}$$

令 $(\mathrm{D}-2)^2y=z$, 那么 $z=\dfrac{1}{\mathrm{D}}\dfrac{1}{4\mathrm{e}^t}=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}t}{4\mathrm{e}^t}=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}+C_1$, 再令 $w=(\mathrm{D}-2)y$, 于是, $(\mathrm{D}-2)w=w'-2w=-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}+C_1$, 由一阶线性微分方程通解公式得

$$w=\mathrm{e}^{2\int\mathrm{d}t}\left[\int\left(-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}+C_1\right)\mathrm{e}^{-2\int\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C_2\right]=\mathrm{e}^{2t}\left[\frac{1}{12}\mathrm{e}^{-3t}-\frac{C_1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+C_2\right]=\frac{1}{12}\mathrm{e}^{-t}+\frac{C_1}{2}+C_2\mathrm{e}^{2t}$$

又 $y'-2y=w$, 再由一阶线性微分方程通解公式得

$$y=C_2x^2\ln x+C_1x^2-\frac{1}{36x}+C_3.$$

例 8.2.16. 求微分方程 $(1+x)^2y''-(1+x)y'+y=\dfrac{1}{1+x}$ 满足初值条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解.

令 $1+x=t$, 再令 $t=\mathrm{e}^u$, $\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 于是原式化为

$$\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)y-\mathrm{D}y+y=\mathrm{e}^{-u}\Rightarrow(\mathrm{D}-1)^2y=\mathrm{e}^{-u}$$

令 $z=(\mathrm{D}-1)y$, 于是上式化为 $z'-z=\mathrm{e}^{-u}$, 由一阶线性微分方程通解公式得

$$z=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}u}\left[\int\mathrm{e}^{-u}\cdot\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}u}\mathrm{d}u+C_1\right]=\mathrm{e}^u\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2u}+C_1\right]=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u}+C_1\mathrm{e}^u$$

由已知得 $z(0)=-\dfrac{1}{2(1+x)}+C_1(1+x)\Big|_{x=0}=0\Rightarrow C_1=\dfrac{1}{2}$, 又 $y'-y=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-u}+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^u$, 再求一阶微分方程通解公式

$$y=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}u}\left[\int\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^u\right)\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}u}\mathrm{d}u+C_2\right]=\mathrm{e}^u\left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2u}+\frac{1}{2}u+C_2\right]=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-u}+\frac{1}{2}u\mathrm{e}^u+C_2$$

回代 $\mathrm{e}^u=1+x$, 并 $y(0)=0$, 解得 $C_2=-\dfrac{1}{4}$, 于是该方程的特解为

$$y=\frac{x+1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{4}(x+1)-\frac{x+1}{4}.$$

例 8.2.17. 求微分方程 $x^2y''-2xy'+2y=2x^3$ 的通解.

法一: 令 $x=\mathrm{e}^t$, $\mathrm{D}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 则 $xy'=\mathrm{D}y$, $x^2y''=\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)y$, 原方程化为

$$(\mathrm{D}^2-3\mathrm{D}+2)y=2\mathrm{e}^{3t}=(\mathrm{D}-1)(\mathrm{D}-2)y=2\mathrm{e}^{3t}$$

令 $(\mathrm{D}-2)y=z$, 那么有 $(\mathrm{D}-1)z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}-z=2\mathrm{e}^{3t}$, 为一阶线性微分方程, 则有通解

$$z=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}t}\left[\int 2\mathrm{e}^{3t}\cdot\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}t}+C_1\right]=\mathrm{e}^t\left[\int 2\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t+C_1\right]=\mathrm{e}^{3t}+C_1\mathrm{e}^t$$

又 $z=(\mathrm{D}-2)y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2y=\mathrm{e}^{3t}+C_1\mathrm{e}^t$, 故又有通解公式

$$y=\mathrm{e}^{2\int\mathrm{d}t}\left[\int\left(\mathrm{e}^{3t}+C_1\mathrm{e}^t\right)\cdot\mathrm{e}^{-2\int\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C_2\right]=\mathrm{e}^{2t}\left[\mathrm{e}^t-C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\right]=\mathrm{e}^{3t}-C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{2t}$$

回代 $\mathrm{e}^t=x$, 解得该方程的通解为 $y=x^3+C_2x^2-C_1x$.
法二: 设 $y=x^k$, 代入对应齐次线性微分方程

$$x^2y''-2xy'+2y=0$$

得到 k 满足的方程, 即特征方程为 $k^2-3k+2=0$, 解得 $k_1=1$, $k_2=2$, 于是齐次 *Euler* 微分方程的通解为 $Y=C_1x+C_2x^2$, 又因为 $f(x)=2x^3$ 于是 $f\left(\mathrm{e}^t\right)=2\mathrm{e}^{3t}$, 而 *3* 不是特征根, 故可设其特解为 $y^*=a\mathrm{e}^{3t}$, 即原方程的特解为 $y^*=ax^3$, 代入原方程解得 $a=1$, 所以原方程的通解为 $y=C_1x+C_2x^2+x^3$.

例 8.2.18. 求微分方程 $x^2y''-2xy'+2y+x-2x^3=0$ 的通解.

法一: 令 $x=\mathrm{e}^t$, $\mathrm{D}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 那么原方程化为

$$(\mathrm{D}-1)(\mathrm{D}-2)y=2\mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^t$$

令 $(\mathrm{D}-2)y=z$, 那么有 $(\mathrm{D}-1)z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}-z=2\mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^t$, 为一阶线性微分方程, 则有通解

$$z=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}t}\left[\int\left(2\mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^t\right)\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C_1\right]=\mathrm{e}^t\left[\mathrm{e}^{2t}-t+C_1\right]=\mathrm{e}^{3t}-t\mathrm{e}^t+C_1\mathrm{e}^t$$

又 $z=(\mathrm{D}-2)y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2y=\mathrm{e}^{3t}-t\mathrm{e}^t+C_1\mathrm{e}^t$, 故又有通解公式

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{2\int\mathrm{d}t}\left[\int\left(\mathrm{e}^{3t}-t\mathrm{e}^t+C_1\mathrm{e}^t\right)\mathrm{e}^{-2\int\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C_2\right]=\mathrm{e}^{2t}\left[\mathrm{e}^t+(t+1)\mathrm{e}^{-t}-C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\right]\\&=\mathrm{e}^{3t}+(t+1)\mathrm{e}^t-C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{2t}=x^3+C_2x^2+x\ln x+C_1'x\end{aligned}$$

其中 $C_1'=1-C_1$.

法二: 令 $y=x^k$, 代入对应齐次线性微分方程, 即例题 *8.2.11*, 得通解为 $Y=C_1x^2+C_2x$, 又 $f(x)=2x^3-x$ 即 $f\left(\mathrm{e}^t\right)=2\mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^t$, 而 *3* 不是特征根, 但 *1* 是方程的一重特征根, 故可设其特解为 $y^*=2A\mathrm{e}^{3t}+Bt\mathrm{e}^t$, 即设原方程的特解为 $y^*=2Ax^3+Bx\ln x$, 代入原方程解得, $A=\frac{1}{2}$, $B=1$, 所以原方程的通解为 $y=x^3+C_1x^2+C_1x+x\ln x$.

8.2.5 二阶变系数线性微分方程

二阶变系数齐次线性微分方程

引理 8.2.1 (Liouville 引理)**.** 设函数 $y_1(x)$ 为二阶变系数齐次线性微分方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

的一个非零解, 则该方程的与 $y_1(x)$ 线性无关的另一个特解为

$$y_2(x)=y_1(x)\cdot\int\frac{\exp\left(-\displaystyle\int P(x)\mathrm{d}x\right)}{y_1^2(x)}\mathrm{d}x.$$

例 8.2.19 (2016 数二). 已知函数 $y_1(x)=\mathrm{e}^x$, $y_2(x)=u(x)\mathrm{e}^x$ 是二阶微分方程

$$(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$$

的两个解, 若 $u(-1)=\mathrm{e}$, $u(0)=-1$, 求 $u(x)$, 并写出该微分方程的通解.

由引理 8.2.1 知, $u(x)=\displaystyle\int\frac{\exp\left(\displaystyle\int\frac{2x+1}{2x-1}\mathrm{d}x\right)}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=C_1\int(2x-1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-C_1\mathrm{e}^{-x}(1+2x)+C_2$, 由 $u(-1)=\mathrm{e}$, $u(0)=-1$, 解得 $C_1=1$, $C_2=0$, 则 $u(x)=-\mathrm{e}^{-x}(1+2x)$, 那么 y_1 与 y_2 线性无关, 则微分方程的通解为

$$y=k_1\mathrm{e}^x-k_2\mathrm{e}^{-x}(1+2x)\ k_{1,2}\in\mathbb{R}.$$

定理 8.2.10. 设有二阶变系数齐次线性微分方程 $p_1(x)y''+p_2(x)y'+p_3(x)y=0$ 那么

(1) 当关于 r 的一元二次方程 $r^2p_1(x)+rp_2(x)+p_3(x)=0$ 的两个根

$$r_{1,2}=\frac{-p_2(x)\pm\sqrt{p_2^2(x)-4p_1(x)p_3(x)}}{2p_1(x)}$$

中至少有一个 r 是非零常数时, $y^*=\mathrm{e}^{rx}$ 是该方程的一个特解; 特别地, 当

$$p_1(x)\pm p_2(x)+p_3(x)=0$$

时, $y^*=\mathrm{e}^{\pm x}$ 是原方程的一个特解;

(2) 当 $\dfrac{p_2(x)+xp_3(x)}{p_3(x)}=a$ (其中 a 为常数) 时, $y^*=x-a$ 是该方程的一个特解; 特别地, 当

$$p_2(x)+xp_3(x)=0$$

时, $y^*=x$ 是该方程的一个特解;

(3) 当 $\alpha(\alpha-1)p_1(x)+\alpha xp_2(x)+x^2p_3(x)=0$ (α 为非零常数) 时, $y^*=x^\alpha$ 是该方程的一个特解;

(4) 当 $\dfrac{p_3(x)-p_1(x)}{p_2(x)}=-\cot x$, 时 $y^*=\sin x$ 是该方程的一个特解;

(5) 当 $\dfrac{p_3(x)-p_1(x)}{p_2(x)}=\tan x$, 时 $y^*=\cos x$ 是该方程的一个特解.

例 8.2.20. 求微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 满足初值条件 $y(0)=0$, $y'(0)=1$ 的特解.

记 $p_1(x)=2x-1$, $p_2(x)=-(2x+1)$, $p_3(x)=2$, 则有 $p_1(x)+p_2(x)+p_3(x)=0$, 且

$$\frac{p_2(x)+xp_3(x)}{p_3(x)}=-\frac{1}{2}$$

于是由定理 8.2.10 (1)(2) 可知 $y_1(x)=\mathrm{e}^x$, $y_2(x)=x+\dfrac{1}{2}$ 为原方程的两个特解, 且它们线性无关, 于是方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$, 又有初值条件 $y(0)=0$, $y'(0)=1$ 代入解得 $C_1=-1$, $C_2=2$, 于是该方程的特解为 $y=2x+1-\mathrm{e}^x$.

例 8.2.21. 求微分方程 $xy''+(x-2)y'-(2x+4)y=0$ 的通解.

记 $p_1(x)=x$, $p_2(x)=x-2$, $p_3(x)=-(2x+4)$, 则由 $r^2p_1(x)+rp_2(x)+p_3(x)=0$ 解得

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \frac{-p_2(x)\pm\sqrt{p_2^2(x)-4p_1(x)p_3(x)}}{2p_1(x)}=\frac{2-x\pm\sqrt{(x-2)^2+4x(2x+4)}}{2x} \\ &= \frac{2-x\pm|3x+2|}{2x}=1+\frac{2}{x} \text{ 或 } -2 \end{aligned}$$

于是由定理 8.2.10 (1) 知 $y_1(x)=\mathrm{e}^{-2x}$ 是该方程的一个特解, 再由引理 8.2.1 得与 $y_1(x)$ 线性无关的另一个特解为

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x)\cdot\int\frac{\exp\left(-\int P(x)\mathrm{d}x\right)}{y_1^2(x)}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-2x}\int\frac{\exp\left(-\int\frac{x-2}{x}\mathrm{d}x\right)}{\mathrm{e}^{-4x}}\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{-2x}\int x^2\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}\right) \end{aligned}$$

故由通解结构知原方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{x}\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}\right)$.

例 8.2.22. 求微分方程的通解 $\left(x^2\ln x\right)y''-xy'+y=0$ 的通解.

记 $p_1(x)=x^2\ln x$, $p_2(x)=-x$, $p_3(x)=1$, 则 $p_2(x)+xp_3(x)=0$, 于是由定理 8.2.10 (2) 知 $y_1(x)=x$ 是该方程的一个特解, 再由引理 8.2.1 得与 $y_1(x)$ 线性无关的另一个特解为

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x)\cdot\int\frac{\exp\left(-\int P(x)\mathrm{d}x\right)}{y_1^2(x)}\mathrm{d}x=x\int\frac{\exp\left(\int\frac{x}{x^2\ln x}\mathrm{d}x\right)}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= x\int\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=-x\int\ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-(\ln x+1) \end{aligned}$$

故由通解结构知原方程的通解为 $y=C_1x+C_2(\ln x+1)$.

例 8.2.23. 求微分方程 $y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=0$ 的通解.

记 $p_1(x)=\cos x$, $p_2(x)=-2\sin x$, $p_3(x)=3\cos x$, 则 $\dfrac{p_3(x)-p_1(x)}{p_2(x)}=-\cot x$, 于是由定理 8.2.10 (4) 知, $y_1(x)=\sin x$ 是该方程的一个特解, 再由引理 8.2.1 得与 $y_1(x)$ 线性无关的另一个特解为

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x)\cdot\int\frac{\exp\left(-\int P(x)\mathrm{d}x\right)}{y_1^2(x)}\mathrm{d}x=\sin x\int\frac{\exp\left(\int\frac{2\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x\right)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \\ &= \sin x\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\sin x(\tan x-\cot x) \end{aligned}$$

故由通解结构知原方程的通解为 $y=C_1\sin x+C_2\sin x(\tan x-\cot x)$.

二阶变系数非齐次线性微分方程

例 8.2.24. 试用定理 8.2.1, 求解例题 8.2.17 的通解.

记 $p_1(x)=x^2$, $p_2(x)=-2x$, $p_3(x)=2$, 则 $p_2(x)+xp_3(x)=0$ 且

$$\alpha(\alpha-1)p_1(x)+\alpha xp_2(x)+x^2p_3(x)=\left(\alpha^2-3\alpha+2\right)x^2$$

令 $\left(\alpha^2-3\alpha+2\right)=0$ 解得 $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$, 于是 $y_1(x)=x$, $y_2(x)=x^2$ 是对应齐次方程 $x^2y''-2xy'+2y=0$ 的两个线性无关的特解, 从而由通解结构知齐次方程的通解为

$$Y=C_1x+C_2x^2$$

下面利用常系数变易法求原方程的解, 将原方程改写为

$$y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=2x$$

令 $y=C_1(x)x+C_2(x)x^2$ 为原方程的解, 代入原方程, 且由

$$\begin{cases} C_2''(x) & & = & 0 \\ C_1''(x) & + \quad 2C_2'(x) & = & 2 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} C_1(x)=C_1-x^2 \\ C_2(x)=C_2+2x \end{cases}$, 故所求通解为

$$y=(C_1-x^2)x+(C_2+2x)x^2=C_1x+C_2x^2+x^3.$$

例 8.2.25. 已知 $y_1=\mathrm{e}^x$ 是微分方程 $y''+\dfrac{x}{1-x}y'-\dfrac{1}{1-x}y=x-1$ 对应的齐次线性微分方程的一个特解, 求所给二阶变系数非齐次线性微分方程的通解.

记 $p_1(x)=1,\ p_2(x)=\dfrac{x}{1-x},\ p_3(x)=-\dfrac{1}{1-x}$, 则 $p_2(x)+xp_3(x)=0$, 于是由定理 *8.2.1 (2)* 知 $y_2(x)=x$ 是该方程的一个特解, 则该方程对应的齐次线性微分方程的通解为

$$Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x$$

利用常系数变易法求原方程的同解为

$$y=-1-x-x^2+C_1\mathrm{e}^x-C_2x.$$

8.3 微分方程综合性问题

8.3.1 微分方程与函数性质

例 8.3.1 (2022 数一). 设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$ 的满足条件 $y(1)=3$ 的解, 求曲线 $y=y(x)$ 的渐近线.

根据求解公式,

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}}\left[\int(2+\sqrt{x})\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\left[2\int\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\int\sqrt{x}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+C\right]=2x+C\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$$

由 $y(1)=3$ 得 $C=\mathrm{e}$, 故 $y=2x+\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}$, $x\in[0,+\infty)$, 由于函数 $y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上没用无定义的点, 故曲线 $y=2x+\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}$ 没用铅直渐近线, 又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}\right)=+\infty$, 所以曲线 $y(x)$ 没用水平渐近线, 下计算斜渐近线

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}}{x}=2$$
$$b=\lim_{x\to+\infty}(y(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}=0$$

因此 $y=2x$ 为曲线 $y=2x+\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}$ 的斜渐近线, 也是唯一的渐近线.

例 8.3.2. 设函数 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$, 且 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f\left[(x+h)^2\right]-f\left(x^2+h\right)}{h}=1$, $f(1)=1$, 求 $f(x)$ 的表达式.

因为 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f\left[(x+h)^2\right]-f\left(x^2+h\right)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f\left[(x+h)^2\right]-f\left(x^2\right)}{h}-\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f\left(x^2\right)-f\left(x^2+h\right)}{h}=\left[f\left(x^2\right)\right]'-f'\left(x^2\right)=1$, 则

$$2xf'\left(x^2\right)-f'\left(x^2\right)=1\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}-1}\Rightarrow f(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\ln\left(2\sqrt{x}-1\right)+C$$

又 $f(1)=1$, 解得 $C=0$, 因此 $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\ln\left(2\sqrt{x}-1\right)$.

例 8.3.3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上二阶连续可导, $f(1)=0, f'(1)=1, z=\left(x^2+y^2\right)f\left(x^2+y^2\right)$ 满足 $\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=0$, 求 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值.

令 $u=x^2+y^2$，则 $z=uf(u)$，那么

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2xf(u)+2uxf'(u)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f(u)+2\left(5x^2+y^2\right)f'(u)+4x^2uf''(u)$$

利用函数 z 中 x 与 y 的对称性，易得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f(u)+2\left(x^2+5y^2\right)f'(u)+4y^2uf''(u)$$

又 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，所以

$$u^2f''(u)+3uf'(u)+f(u)=0 \tag{1}$$

(1) 式为二阶的 *Euler* 微分方程，令 $u=\mathrm{e}^t$，则 *(1)* 式化为 $\dfrac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}+f=0$，其特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+1=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=-1$，于是 *(1)* 式的通解为

$$f=\mathrm{e}^{-t}(C_1+C_2t)\Rightarrow\frac{1}{u}(C_1+C_2\ln u)$$

又 $f(1)=0$，$f'(1)=1$，解得 $C_1=0, C_2=1$，故 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，令 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$，解得 $x=\mathrm{e}$，且在 $[1,\mathrm{e}]$ 上 $f'(x)<0\Rightarrow f(x)\searrow$；在 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上 $f'(x)>0\Rightarrow f(x)\nearrow$，故 $f_{max}=\left.\dfrac{\ln x}{x}\right|_{x=\mathrm{e}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

8.3.2 微分方程与积分

微分方程与定积分

例 8.3.4 (2023 四川大学). 设函数 $f(x)$ 满足 $\displaystyle\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^xf(x)+1$，求 $f(x)$.

令 $x=0$，得 $f(0)=-1$，对方程两边求导，得 *Bernoulli* 方程：

$$f'(x)+f(x)=\mathrm{e}^{-x}f^2(x)$$

令 $z(x)=\dfrac{1}{f(x)}$，于是上式化为 $z'(x)-z(x)=-\mathrm{e}^{-x}$，由一阶线性微分方程通解公式得

$$z(x)=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left[\int-\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}+C\mathrm{e}^x$$

并且 $z(0)=-1$，得 $C=-\dfrac{3}{2}$，于是 $f(x)=\dfrac{2\mathrm{e}^x}{1-3\mathrm{e}^{2x}}$.

例 8.3.5. 求出所有在 $[0,+\infty)$ 上的正值连续函数 $g(x)$，使得 $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^x g^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\left(\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right)^2$.

对方程两边求导，得

$$\frac{1}{2}g^2(x)=\frac{2\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\cdot g(x)\cdot x-\left(\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right)^2}{x^2}$$

即

$$\left(\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right)^2-2xg(x)\int_0^x g(t)\mathrm{d}t+\frac{x^2}{2}g^2(x)=0$$

注意到当 $x\in[0,+\infty)$ 时，有 $g(x)>0$，于是 $\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t>0$，$\forall x>0$，故

$$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t=\frac{2xg(x)+\pm\sqrt{4x^2g^2(x)-2x^2g^2(x)}}{2}=xg(x)\pm\frac{1}{\sqrt{2}}xg(x)$$

两边再次求导，得

$$g(x)=\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(g(x)+xg'(x))\Rightarrow\begin{cases}g(x) & + & \left(1+\sqrt{2}\right)xg'(x) & =0\\ -g(x) & + & \left(\sqrt{2}-1\right)xg'(x) & =0\end{cases}$$

当 $g'(x)+\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)x}g(x)=0$ 时, 化为变量分离方程 $\dfrac{\mathrm{d}g(x)}{g(x)}=-\dfrac{\mathrm{d}x}{\left(1+\sqrt{2}\right)x}$, 两边积分得

$$\ln|g(x)|=-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\ln|x|+\ln C_1\Rightarrow g(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\ln x+C_1}=\mathrm{e}^{C_1}x^{1-\sqrt{2}}$$

同理可得 $g(x)=\mathrm{e}^{C_1}x^{1+\sqrt{2}}$, 由于 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为连续正值函数, 而 $x^{1-\sqrt{2}}$ 在 $x=0$ 处不连续, 所以 $g(x)=\mathrm{e}^{C_1}x^{1+\sqrt{2}}$, $x>0$.

例 8.3.6. 设 $f(x)$ 具有连续导数, 且 $\forall a\in\mathbb{R}$, $f(x+a)=\displaystyle\int_x^{x+a}\frac{t\left(t^2+1\right)}{f(t)}\mathrm{d}t+f(x)$, $f(1)=\sqrt{2}$, 求 $f(x)$.

法一: 视 a 为未知数, 令 $x=0$, 有 $f(a)=\displaystyle\int_0^a\frac{t\left(t^2+1\right)}{f(t)}\mathrm{d}t+f(0)$, 两边求导有

$$f'(a)=\frac{a\left(a^2+1\right)}{f(a)}\Rightarrow f'(a)\cdot f(a)=a\left(a^2+1\right)\Rightarrow\frac{1}{2}\left[f^2(a)\right]'=a^3+a$$
$$\Rightarrow\int f^2(a)\mathrm{d}a=\int\left(2a^3+2a\right)\mathrm{d}a\Rightarrow f^2(a)=\frac{1}{2}a^4+a^2+C$$

由 $f(1)=\sqrt{2}$ 解得 $C=\dfrac{1}{2}$, 于是 $f^2(x)=\dfrac{1}{2}x^4+x^2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(x^2+1\right)^2\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{2}}$ (由 $f(1)>0$ 可舍负).

法二: 利用导数的定义,

$$f'(x)=\lim_{a\to0}\frac{f(x+a)-f(x)}{a}=\lim_{a\to0}\frac{\displaystyle\int_x^{x+a}\frac{t\left(t^2+1\right)}{f(t)}\mathrm{d}t+f(x)-f(x)}{a}=\lim_{a\to0}\frac{\displaystyle\int_x^{x+a}\frac{t\left(t^2+1\right)}{f(t)}\mathrm{d}t}{a}=\frac{x\left(x^2+1\right)}{f(x)}$$

得 $f'(x)\cdot f(x)=x\left(x^2+1\right)$, 下同法一.

例 8.3.7. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内一阶可导, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数, 且 $g(x)$ 连续, 若

$$\int_1^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t=x^2\mathrm{e}^x-4\mathrm{e}^2-\int_1^{x-1}f(t+1)\mathrm{d}t,\ f(2)=1$$

求 $f(x)$ 的表达式.

方程两边对 x 求导得

$$g[f(x)]f'(x)=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x-f(x)$$

即

$$xf'(x)=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x-f(x)\Rightarrow f'(x)+\frac{1}{x}f(x)=(2+x)\mathrm{e}^x$$

由一阶线性微分方程通解公式得

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int(2x+1)\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}+C\right]=x\mathrm{e}^x+\frac{C}{x}$$

由 $f(2)=1$, 故 $C=2-4\mathrm{e}^2$, 故 $f(x)=x\mathrm{e}^x+\dfrac{2-4\mathrm{e}^2}{x}$ $(x>0)$.

例 8.3.8. 设 $f(x)$ 可微, 且满足 $x=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$, 求

(1) $f(x)$ 的表达式;

(2) $I(n)=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|f(t)|^n\mathrm{d}t\ (n=2,3,\cdots)$.

(1) 令 $t-x=u$, 则

$$x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_{-x}^0 uf(u)\mathrm{d}u+x\int_{-x}^0 f(u)\mathrm{d}u$$

上式两边分别对 x 求导, 得

$$1=f(x)-xf(-x)+\int_{-x}^0 f(u)\mathrm{d}u+xf(-x) \tag{1}$$

对式 (1) 求导得

$$f'(x)+f(-x)=0 \tag{2}$$

对式 (2) 再次求导得 $f''(x)-f'(-x)=0$, 并且用 $-x$ 替换式 (2) 中的 x, 得 $f'(-x)+f(x)=0$ 于是有二阶常系数齐次线性方程 $f''(x)+f(x)=0$, 且 $f(0)=1$, $f'(0)=-f(0)=-1$, 微分方程的特征方程为 $r^2+1=0$, 故它的通解为

$$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$$

代入初值条件, 得 $C_1=1$, $C_2=-1$, 故 $f(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(2) 令 $x=t+\dfrac{\pi}{4}$, 得

$$I(n)=2^{\frac{n}{2}}\int_0^{\pi}|\cos x|^n\mathrm{d}x=2^{\frac{n}{2}+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}2^{\frac{n}{2}+1}\dfrac{(n-1)!!}{n!!} & ,n=3,5,7,\cdots\\ 2^{\frac{n}{2}+1}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & ,n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

微分方程与重积分

例 8.3.9. 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 求 $\lim\limits_{t\to 0}f^{-t^2}(t)$, 其中 $f(t)$ 满足方程

$$f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2t}\rho f\left(\frac{1}{2}\rho\right)\mathrm{d}\rho=8\pi\int_0^t uf(u)\mathrm{d}u$, 所以 $f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+8\pi\int_0^t uf(u)\mathrm{d}u$, 且 $f(0)=1$, 方程两边对 t 求导, 得 $f'(t)=8\pi t\mathrm{e}^{4\pi t^2}+8\pi tf(t)$

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathrm{e}^{8\pi\int t\mathrm{d}t}\left[\int 8\pi t\mathrm{e}^{4\pi t^2}\cdot\mathrm{e}^{-8\pi\int t\mathrm{d}t}+C\right]=\mathrm{e}^{4\pi t^2}\left[8\pi\int t\mathrm{d}t+C\right]=4\pi t^2\mathrm{e}^{4\pi t^2}+C\mathrm{e}^{4\pi t^2}\\ &\xlongequal{f(0)=1}4\pi t^2\mathrm{e}^{4\pi t^2}+\mathrm{e}^{4\pi t^2}\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}f^{-t^2}(t)&=\lim_{t\to 0}\left(4\pi t^2\mathrm{e}^{4\pi t^2}+\mathrm{e}^{4\pi t^2}\right)^{-t^2}=\exp\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\ln\left(4\pi t^2\mathrm{e}^{4\pi t^2}+\mathrm{e}^{4\pi t^2}\right)\\ &=\exp\lim_{t\to 0}\frac{4\pi t^2\mathrm{e}^{4\pi t^2}+\mathrm{e}^{4\pi t^2}-1}{t^2}=\mathrm{e}^{4\pi+4\pi}=\mathrm{e}^{8\pi}.\end{aligned}$$

例 8.3.10. 设函数 $u=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, 满足 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$, 且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\iint\limits_{s^2+t^2\leqslant x^2+y^2}\frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}t}{1+s^2+t^2}$$

(1) 试求函数 $f'(x)$ 的表达式; (2) 若 $f(0)=0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x^4}$.

(1) 设 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\frac{x}{r},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\frac{x^2}{r^2}+f'(r)\frac{r-\dfrac{x^2}{r}}{r^2}=f''(r)\frac{x^2}{r^2}+f'(r)\frac{r^2-x^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f'(r)\frac{y}{r},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)\frac{y^2}{r^2}+f'(r)\frac{r-\frac{y^2}{r}}{r^2}=f''(r)\frac{y^2}{r^2}+f'(r)\frac{r^2-y^2}{r^3}$$

$$\iint\limits_{s^2+t^2\leqslant r^2}\frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}t}{1+s^2+t^2}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^r\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{1+\rho^2}=\pi\ln\left(1+r^2\right)$$

因为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\displaystyle\iint\limits_{s^2+t^2+\leqslant x^2+y^2}\frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}t}{1+s^2+t^2}$, 所以 $f''(r)+\dfrac{1}{r}f'(r)=\pi\ln\left(1+r^2\right)$,

$$f'(r)=\mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}r}{r}}\left[\int\pi\ln\left(1+r^2\right)\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}r}{r}}\mathrm{d}r+C\right]=\frac{\pi\left(1+r^2\right)}{2r}\left[\ln\left(1+r^2\right)-1\right]+\frac{C}{r}$$

即

$$f'(x)=\frac{\pi\left(1+x^2\right)}{2x}\left[\ln\left(1+x^2\right)-1\right]+\frac{C}{x}$$

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\pi\left(1+x^2\right)}{2x}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{2C-\pi-\pi x^2}{2x}\right]=\lim_{x\to0^+}\frac{2C-\pi-\pi x^2}{2x}=0$$

即 $C=\dfrac{\pi}{2}$, 所以 $f'(x)=\dfrac{\pi\left(1+x^2\right)}{2x}\left[\ln\left(1+x^2\right)-1\right]+\dfrac{\pi}{2x}$.

(2) 运用 L'Hospital 法则得到 $f'(x)$, 再将 $f'(x)=\dfrac{\pi(1+x^2)}{2x}\left[\ln\left(1+x^2\right)-1\right]+\dfrac{\pi}{2x}$ 代入得,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x^4}&\overset{L'}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)}{4x^3}=\frac{\pi}{8}\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}\left[\frac{1+x^2}{x}\ln\left(1+x^2\right)-x\right]\\&=\frac{\pi}{8}\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}\left[\frac{1+x^2}{x}\left(x^2-\frac{x^4}{2}+o\left(x^4\right)\right)-x\right]\\&=\frac{\pi}{8}\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}\left(\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)\right)=\frac{\pi}{16}.\end{aligned}$$

例 8.3.11. 设 $z=\left(x^2+y^2\right)f\left(x^2+y^2\right)$, 其中 f 具有连续二阶偏导数, $f(1)=0,\ f'(1)=1$, 且 z 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 求

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\iint\limits_D z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D:0<\varepsilon\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant1.$$

令 $x^2+y^2=t$, 则 $z=tf(t)$, 于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial t}{\partial x}f(t)+t\cdot f'(t)\frac{\partial t}{\partial x}=2xf(t)+2txf'(t)=2x\left[f(t)+2tf'(t)\right]$$

于是,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=2\left[f(t)+tf'(t)\right]+2x\left[f'(t)\cdot2x+2xf'(t)+tf''(t)\cdot2x\right]\\&=2\left[f(t)+tf'(t)\right]+4x^2\left[2f'(t)+tf''(t)\right]\end{aligned}$$

同理可得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\left[f(t)+tf'(t)\right]+4y^2\left[2f'(t)+tf''(t)\right]$, 解此 Euler 方程, 由 $f(0)=1,\ f'(0)=1$, 特解 $f(t)=\dfrac{1}{t}\ln t$, 所以 $z=tf(t)=\ln t=\ln\left(x^2+y^2\right)$, 从而可得

$$\iint\limits_D z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\ln\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\varepsilon^1 r\ln r^2\mathrm{d}r=-\pi\left(1+2\varepsilon^2\ln\varepsilon-\varepsilon^2\right)=-\pi.$$

例 8.3.12. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且满足

$$f(t)=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}\left(x^2+y^2\right)f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+t^4$$

求 $f(x)$.

采用极坐标将二重积分化为定积分，得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}(x^2+y^2)f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t\rho^3 f(\rho)\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^t\rho^3 f(\rho)\mathrm{d}\rho$$

代入原式得

$$f(t)=4\pi\int_0^t\rho^3 f(\rho)\mathrm{d}\rho+t^4$$

两边求导得

$$f'(t)=4\pi t^3 f(t)+4t^3\ f(0)=0$$

此为一阶线性微分方程，其通解为

$$f(t)=\mathrm{e}^{4\pi\int t^3\mathrm{d}t}\left[\int 4t^3\cdot\mathrm{e}^{-4\pi\int t^3\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right]=\mathrm{e}^{\pi t^4}\left[\int 4t^3\cdot\mathrm{e}^{-\pi t^4}\mathrm{d}t+C\right]=C\mathrm{e}^{\pi t^4}-\frac{1}{\pi}.$$

又有 $f(0)=0$ 得 $C=\dfrac{1}{\pi}$，于是 $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\left(\mathrm{e}^{\pi x^4}-1\right)$.

微分方程与曲面积分

例 8.3.13. 设曲线积分

$$\int_L[f'(x)+2f(x)+\mathrm{e}^x]y\mathrm{d}x+[f'(x)-x]\mathrm{d}y$$

与路径无关，且 $f(0)=0$，$f'(0)=\dfrac{1}{2}$，其中 $f(x)$ 一阶连续可导，求 $f(x)$ 的表达式.

令 $P=[f'(x)+2f(x)+\mathrm{e}^x]y$，$Q=[f'(x)-x]$，因为积分与路径无关，所以

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\Rightarrow f''(x)-f'(x)-2f(x)=\mathrm{e}^x+1$$

该方程为二阶常系数非齐次线性微分方程，令 $\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$，$\mathrm{I}f(x)=f(x)$，则有

$$(\mathrm{D}^2-\mathrm{D}-2)f(x)=\mathrm{e}^x+1\Rightarrow(\mathrm{D}-2)\underbrace{(\mathrm{D}+1)f(x)}_{z}=\mathrm{e}^x+1$$

那么 $z'-2z=\mathrm{e}^x+1$，该方程为一阶线性微分方程，有通解公式

$$z=\mathrm{e}^{2\int\mathrm{d}x}\left[\int(\mathrm{e}^x+1)\mathrm{e}^{-2\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1\right]=C_1\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}$$

因此 $f'+f=C_1\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}$，继续由通解公式

$$f=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\left[\int\left(C_1\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_2\right]=\frac{C_1}{3}\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}+C_2\mathrm{e}^{-x}$$

代入 $f(0)=0,f'(0)=\dfrac{1}{2}$，得方程组 $\begin{cases}C_1+3C_2=3\\2C_1-3C-2=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=2\\C_2=\dfrac{1}{3}\end{cases}$ 因此 $f(x)=\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-x}-\dfrac{1}{2}$.

例 8.3.14. 设对右半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 Σ 都有

$$\oiint\limits_{\Sigma}xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，求 $f(x)$ 的表达式.

设 $P=xf(x)$，$Q=-xyf(x)$，$R=-z\mathrm{e}^{2x}$，那么

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=xf'(x)+f(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}$$

由 Gauss 定理知, $I=\pm\iiint\limits_{\Omega}\left(xf'(x)+f(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$, 由 Ω 的任意性知,

$$xf'(x)+f(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}=0\Rightarrow f'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)f(x)=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x}$$

该方程为一阶线性微分方程, 有通解为

$$f(x)=\mathrm{e}^{\int\left(1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\left[\int\frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{\int\left(\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\frac{\mathrm{e}^x}{x}\left[\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+C\right]=\frac{\mathrm{e}^x}{x}(\mathrm{e}^x+C)$$

又因为

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^x}{x}(\mathrm{e}^x+C)=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^x+C}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1+x+o(x^2)+C}{x}=1$$

即 $C=-1$, 因此 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}(\mathrm{e}^x-1)$.

例 8.3.15. 设 S 是曲面 $az=x^2+y^2$, $(0\leqslant z\leqslant a)$ 的第一卦限部分上侧,

$$A=\iint\limits_{S}x^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

求满足 $f(0)=A$, $f'(0)=-A$ 的二阶可导函数 $f(x)$, 使得 $y\left(f(x)+3\mathrm{e}^{3x}\right)\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y$ 是某二元函数的全微分.

补充三个面, 分别为

$$\Sigma_1:z=a,x^2+y^2\leqslant a^2z,y\geqslant0,\ \text{方向取下侧}$$
$$\Sigma_2:x=0,\ \text{方向取前侧},\ \Sigma_3:y=0,\ \text{方向取右侧}$$

于是, 由 Gauss 定理

$$\begin{aligned}
I&=\oiint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+S}\left(x^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)=-\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=-2\iiint\limits_{\Omega}(2x+y)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(2x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{a}z\mathrm{d}z\\
&=-2\iint\limits_{D}(2x+y)\left[\frac{a^2}{2}-\frac{(x^2+y^2)^2}{2a^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a(2r\cos\theta+r\sin\theta)\left(a^2-\frac{r^4}{a^2}\right)r\mathrm{d}r\\
&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{8a^5}{21}\cos\theta+\frac{4a^5}{21}\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta=-\frac{4}{7}a^5
\end{aligned}$$

则

$$A=I-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_3}=I-\left(-a^2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)=-\frac{4}{7}a^5+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\cos\theta\mathrm{d}r=-\frac{5}{21}a^5$$

由于 $y\left(f(x)+3\mathrm{e}^{3x}\right)\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y$ 是某二元函数的全微分, 所以

$$\frac{\partial\left[yf(x)+3\mathrm{e}^{3x}\right]}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}f'(x)}{\mathrm{d}x}\Rightarrow f''(x)-f(x)=3\mathrm{e}^{2x}$$

记 $\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, 则上式可改写为 $(\mathrm{D}+1)(\mathrm{D}-1)f(x)=3\mathrm{e}^{2x}$, 令 $z(x)=(\mathrm{D}-1)f(x)$, 于是

$$z(x)=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\left[\int3\mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1\right]=\mathrm{e}^{2x}+C_1\mathrm{e}^{-x}$$

由题意可求得 $C_1=\dfrac{10}{21}a^5-1$, 且 $f'(x)-f(x)=\mathrm{e}^{2x}+C_1\mathrm{e}^{-x}$ 的通解为

$$f(x)=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left[\int\left(\mathrm{e}^{2x}+C_1\mathrm{e}^{-x}\right)\cdot\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_2\right]=\mathrm{e}^{2x}-\frac{C_1}{2}\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^x$$

并且令 $x=0$, 解得 $C_2=-\dfrac{3}{2}$, 于是 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^x-\left(\dfrac{5}{21}a^5-\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}$.

例 8.3.16. 设曲面积分

$$A=\frac{1}{a^5}\iint\limits_S\left(x^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

其中 S 是曲面 $x^2+y^2=az(0\leqslant z\leqslant a),a>0$ 第一卦限部分的外侧, 求三阶可导函数 $f(x)$, 使得满足以下条件:

(1) $f^{(i)}(0)=(-1)^iA,\ (i=0,1,2)$;

(2) 使得 $y\left[f'(x)+3\mathrm{e}^{2x}\right]\mathrm{d}x+f''(x)\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分.

法一: 曲面 $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ 的法向量的方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\dfrac{(2x,2y,-a)}{\sqrt{a^2+4x^2+4y^2}}$, 故由两类曲面积分之间的关系, 得 $A=\dfrac{1}{a^5}\iint\limits_S\dfrac{(x^2z,y^2z,z^2x)\cdot(2x,2y,-a)}{\sqrt{a^2+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}S$, 并且 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{a^6}\iint\limits_D\left(x^2\left(\frac{x^2+y^2}{a}\right),y^2\left(\frac{x^2+y^2}{a}\right),\left(\frac{x^2+y^2}{a}\right)^2x\right)\cdot(2x,2y,-a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{a^7}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^5\left(2\cos^3\theta+2\sin^3\theta-\cos\theta\right)\cdot r\mathrm{d}r=\frac{1}{7}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^3\theta+2\sin^3\theta-\cos\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{7}\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{3}-1\right)=\frac{5}{21}\end{aligned}$$

法二: 添加辅助面 $S_x:x=0,(y,z)\in D_{yz}$, 方向向内, $S_y:y=0,(z,x)\in D_{zx}$, 方向向左, $S_z:z=a,(x,y)\in D_{xy}:x^2+y^2\leqslant a^2,x\geqslant0,y\geqslant0$, 方向向上, 它们三个与 S 围成的区域为 Ω, 易得 $\iint\limits_{S_x}=\iint\limits_{S_y}=0$, 而

$$\iint\limits_{S_z}\left(x^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)=\iint\limits_{D_{xy}}a^2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\mathrm{d}r=\frac{a^5}{3}$$

由 *Gauss* 公式, 可得

$$\oiint\limits_{S_x+S_y+S_z+S}=\iiint\limits_\Omega(4xz+2yz)\mathrm{d}V$$

其中 $\Omega:x^2+y^2\leqslant az,x\geqslant0,y\geqslant0,0\leqslant z\leqslant a$, 那么

$$\begin{aligned}\iiint\limits_\Omega(4xz+2yz)\mathrm{d}V&=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^a(2x+y)\cdot2z\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}}(2x+y)\left[a^2-\left(\frac{x^2+y^2}{a}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a(2r\cos\theta+r\sin\theta)\left(a^2-\frac{r^4}{a^2}\right)r\mathrm{d}r=\frac{4a^5}{7}\end{aligned}$$

于是可得 $A=\dfrac{1}{a^5}\left(\dfrac{4a^5}{7}-\dfrac{a^5}{3}\right)=\dfrac{5}{21}$,
再求函数 $f(x)$, 由于 $y\left[f'(x)+3\mathrm{e}^{2x}\right]\mathrm{d}x+f''(x)\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分, 于是有

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y\left[f'(x)+3\mathrm{e}^{2x}\right]\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(f''(x)\right)$$

整理得 $f'''(x)-f'(x)=3\mathrm{e}^{2x}$, 该方程的齐次通解为 $r^3-r=r\left(r^2-1\right)=0\Rightarrow r_1=0,r_2=1,r_3=-1$, 那么 $Y=C_1+C_2\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$, 其特解为 $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)(\mathrm{D}+1)}3\mathrm{e}^{2x}=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$, 那么该微分方程的通解为

$$f(x)=C_1+C_2\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$$

又 $f(0)=A,f'(0)=-A,f''(0)=A$, 解得 $f(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^x-\dfrac{11}{42}\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{3}{2}$.

例 8.3.17. 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,

$$\Omega(t)=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2,z\geqslant 0,t\geqslant 0\right\}$$

$S(t)$ 是 $\Omega(t)$ 的表面, $D(t)$ 是 $\Omega(t)$ 在 xOy 平面上的投影区域, $L(t)$ 是 $D(t)$ 的边界曲线, 已知 $\forall t\in(0,+\infty)$ 恒有,

$$\oint_{L(t)} f\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s+\oiint\limits_{S(t)}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D(t)} f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma+\iiint\limits_{\Omega(t)}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}V$$

求 $f(t)$ 的表达式.

$S(t)$ 由两部分组成, 分别记作:

$$S_1(t):z=\sqrt{t^2-x^2-y^2},(x,y)\in D(t);S_2(t):z=0,(x,y)\in D(t)$$

对弧长曲线积分的直接参数方程计算法, $L(t)$ 的参数方程为

$$L(t):x=t\cos\theta,y=t\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta=t\mathrm{d}\theta$$

代入对弧长的曲线积分式, 得

$$\oint_{L(t)} f\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi} f\left(t^2\right)t\cdot t\mathrm{d}\theta=2\pi f\left(t^2\right)t^2$$

由曲面积分被积函数定义在积分曲面上和二重积分的极坐标计算方法, 得

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{S(t)}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}S&=t^2\oiint\limits_{S_1(t)}\mathrm{d}S+\oiint\limits_{S_2(t)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}S=t^2\cdot\frac{4\pi t^2}{2}+\iint\limits_{D(t)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma\\&=2\pi t^4+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t\rho^2\rho\mathrm{d}\rho=2\pi t^4+\frac{\pi}{2}t^4=\frac{5}{2}\pi t^4\end{aligned}$$

由二重积分的极坐标计算方法, 得

$$\iint\limits_{D(t)} f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t\rho f\left(\rho^2\right)\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^t\rho f\left(\rho^2\right)\mathrm{d}\rho$$

由三重积分的球坐标计算方法, 得

$$\iiint\limits_{\Omega(t)}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^t r\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}t^4$$

将上述结果代入题设等式, 得

$$2\pi t^2 f\left(t^2\right)+\frac{5}{2}\pi t^4=2\pi\int_0^t f\left(\rho^2\right)\rho\mathrm{d}\rho+\frac{\pi}{2}t^4 \tag{*}$$

整理得 $f\left(t^2\right)=\dfrac{\int_0^t f\left(\rho^2\right)\mathrm{d}\rho}{t^2}-t^2$, 由 $f(t)$ 在 $t=0$ 连续, 故

$$\lim_{t\to 0^+} f\left(t^2\right)=f(0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t f\left(\rho^2\right)\rho\mathrm{d}\rho}{t^2}-\lim_{t\to 0^+}t^2=\lim_{t\to 0^+}\frac{f\left(t^2\right)t}{2t}=\frac{f(0)}{2}$$

故 $f(0)=0$, 由等式 $(*)$ 知 $f(t)$ 可导, 对两端求导并整理得

$$f'\left(t^2\right)+\frac{1}{2t^2}f\left(t^2\right)+2=0$$

令 $u=t^2$, 有 $f'(u)+\dfrac{1}{2u}f(u)=-2$, 该方程为一阶非齐次线性微分方程, 由通解公式, 得

$$f(u)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u}}\left[\int -2\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u}}\mathrm{d}u+C\right]=\frac{1}{\sqrt{u}}\left[-2\int\sqrt{u}\mathrm{d}u+C\right]=-\frac{4}{3}u+\frac{C}{\sqrt{u}}$$

即 $f(t)=-\dfrac{4}{3}t+\dfrac{C}{\sqrt{t}}$, 其中 C 为任意常数, 由 $f(0)=0$ 得 $C=0$, 故 $f(t)=-\dfrac{4}{3}t$.

8.3.3 微分方程与幂级数

例 8.3.18 (2007 数一). 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛, 其和函数 $y(x)$ 满足

$$y''-2xy'-4y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$$

(1) 证明: $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n,\ n=1,2,\ldots$; (2) 求 $y(x)$ 的表达式.

(1) 对 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 求一、二阶导数, 有

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1},\ y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$$

并代入关系式 $y''-2xy'-4y=0$, 整理可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}4a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}2(n+2)a_nx^n$$

对比上式系数可得 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n$.

(2) 因为 $y(0)=a_0=0, y'(0)=a_1=1$, 故 $a_{2n}=0,\ n=0,1,2,\ldots,$ 且

$$a_{2n+1}=\frac{2}{2n}a_{2n-1}=\cdots=\frac{2^n}{2n\cdot(2n-2)\cdots 4\cdot 2}a_1=\frac{1}{n!}\ n=1,2,\ldots$$

从而

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=xe^{x^2}\ x\in(-\infty,+\infty).$$

例 8.3.19. 求级数 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的值.

因为 $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\searrow$, 且注意到

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{\sqrt{1\cdot 3}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdots\sqrt{(2n-1)\cdot(2n+1)}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

由 $\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}\ (a\neq b)$, 所以

$$0<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\to 0\ (n\to\infty)$$

由 *Leibniz* 定理, 原级数收敛; 收敛半径为 *1*, 这是因为

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+1}{2n+2}=1$$

由此可知幂级数在 $(-1,1)$ 内收敛, 记 $f(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$, 那么

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!n}{(2n)!!}x^{n-1},\ 2xf'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}x^n$$

于是有

$$2f'(x)-2xf'(x)=f(x)$$

及

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2(1-x)}$$

两边积分得 $\ln f(x)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, 因此 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, 即 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, 令 $x\to-1^+$ 取极限得

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\lim_{x\to-1^+}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n\right]=\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 8.3.20. 已知当 $x>0$ 时, 有 $(1+x^2)f'(x)+(1+x)f(x)=1$, 且

$$g'(x)=f(x),\ f(0)=g(0)=0$$

证明: $\dfrac{1}{4}<\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}g\left(\frac{1}{n}\right)<1$.

证 因为 $f'(x)+\dfrac{1+x}{1+x^2}f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, 由一阶线性微分方程通解公式得

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{1}{1+x^2}\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\frac{\mathrm{e}^{-\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{\arctan t}}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$$

在 $x\in(0,1]$ 上, 有

$$f(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{\arctan t-\arctan x}}{\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\arctan x<x$$

于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty}g\left(\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x<\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}<1$$

另一方面, 由 $\mathrm{e}^x>1+x,\ x\neq0$, 有

$$\begin{aligned}f(x)&\geqslant\frac{1}{1+x^2}\int_0^x\mathrm{e}^{\arctan t-\arctan x}\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{1+x^2}\int_0^x[1+(\arctan t-\arctan x)]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{1+x^2}\int_0^x\left[1+\frac{(t-x)}{1+\xi^2}\right]\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{1+x^2}\int_0^x[1+t-x]\mathrm{d}t=\frac{1}{1+x^2}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}g\left(\frac{1}{n}\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{1}{1+x^2}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\int_0^{\frac{1}{n}}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}\left(1-\frac{1}{3n}\right)\geqslant\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}\geqslant\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{3}>\frac{1}{4}\end{aligned}$$

综上得证.

例 8.3.21 (第十届数学竞赛决赛). 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdots\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{1}{n+1}$.

级数的通项化为

$$a_n=\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2(n+1)}$$

令 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}x^{2(n+1)}$, 记 $u_n(x)=\dfrac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}x^{2(n+1)}$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|&=\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+2)!!}{(2n+3)!!(n+2)}x^{2(n+1)}\cdot\frac{(2n+1)!!(n+1)}{2(2n)!!x^{2(n+1)}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)(n+1)}{(2n+3)(n+2)}x^2=x^2\end{aligned}$$

所以 $x^2<1$ 时, $f(x)$ 的幂级数收敛, 其收敛区间为 $(-1,1)$,

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1},\ f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}$$

$$\begin{aligned}f''(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(2n)!!}{(2n-1)!!}\int_0^x x^{2n-1}\mathrm{d}x\right)'\\&=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}\right)'=x\left(x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}\right)'\\&=x\left(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\cdot(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}\right)'=x\left[x\left(4x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}\right)\right]'\end{aligned}$$

$$= x\left[x(4x+f'(x))\right]' = x(8x+f'(x)+xf''(x)) \Rightarrow f''(x) - \frac{x}{1-x^2}f'(x) = \frac{8x^2}{1-x^2}$$

这是关于 $f'(x)$ 的一阶线性微分方程，其通解为

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\int \frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}\left[\int \frac{8x^2}{1-x^2}\cdot \mathrm{e}^{-\int \frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_1\right] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[8\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + C_1\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(4\arcsin x - 4x\sqrt{1-x^2} + C_1\right)$$

因为 $f'(0)=0$，可得 $C_1=0$，所以 $f'(x) = 4\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - x\right)$，积分得

$$f(x) = 4\int\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - x\right)\mathrm{d}x = 2\arcsin^2 x - 2x^2 + C_2$$

又有 $f(0)=0$，可得 $C_2=0$，所以 $f(x) = 2\arcsin^2 x - 2x^2$，于是有

$$\text{原式} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\arcsin^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

第二部分

线性代数

第 9 章

行列式

“不管数学的任一分支是多么抽象，总有一天会应用在这实际世界上.”

——罗巴切夫斯基

行列式是一个与方阵相关的数值, 它是一个重要的线性代数概念. 对于一个 $n \times n$ 的方阵 A, 其行列式记作 $|A|$ 或 $\det(A)$.

行列式的计算方法是通过对方阵的元素进行特定的运算得到的. 对于 2×2 的方阵:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

对于 3×3 的方阵, 可以使用 Sarrus 规则来计算行列式:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

行列式在线性代数中有着广泛的应用, 例如用来求解方程组的解、计算矩阵的逆、判断矩阵的可逆性、计算特征值等. 行列式的性质包括:

1. 互换行或列, 行列式变号;
2. 行或列成比例, 行列式为零;
3. 行或列加减另一行或列的倍数, 行列式不变.

行列式的计算方法和性质在解决线性代数中的各种问题时都起着重要的作用. 深入理解行列式的概念和运算规则可以帮助我们更好地理解和应用线性代数知识.

9.1 行列式的定义及其性质

行列式的性质可以帮助我们更加深入地理解行列式的本质, 同时也为行列式的计算提供了一些重要的技巧和方法.

9.1.1 逆序数

定义 9.1.1 (排列). n 级排列由 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列, 通常记为 $i_1 i_2 \cdots i_n$.

定义 9.1.2 (逆序数). 在一个排列中, 如果一对数的前后位置与大小顺序相反, 即前面的数大于后面的数, 则它们构成一个*逆序*. 一个排列中的逆序总数, 称为这个排列的逆序数, 通常记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

定义 9.1.3 (奇 (偶) 排列). 逆序数为奇数 (偶数) 的排列, 称为奇 (偶) 排列.

定义 9.1.4 (对换). 把一个排列中某两个数的位置互换, 而其余的数不动, 就得到另一个排列, 这样的一个变换称为一次对换.

定理 9.1.1. 任意一个排列经过一次对换后, 奇偶性改变.

定理 9.1.2. $n\ (n > 1)$ 级排列共有 $n!$ 种, 奇偶排列各占一半.

例 9.1.1. 选择 i 与 k, 使 $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ 成为五阶行列式中一个带负号的项.

将给定的项改写成行标自然顺序, 即

$$a_{1i}a_{25}a_{32}a_{4k}a_{53}$$

列标构成的排列 $i52k4$ 中缺 1 和 4, 令 $i = 1, k = 4, \tau(15243) = 3 + 1 = 4$, 故该项带正号; 令 $i = 4, k = 1, \tau(45213) = 3 + 3 + 1 = 7$, 故该项带负号.

9.1.2 行列式的概念

定义 9.1.5 (n 阶行列式). $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和, 这里 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是一个 n 级排列. 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时, 该项前面带正号; 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时, 该项前面带负号, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau\left(j_{j_2}\cdots j_n\right)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和. n 阶行列式有时简记为 $|a_{ij}|_n$, 而且有如下另外两种类似的定义:

$$|a_{ij}|_n = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$$

和

$$|a_{ij}|_n=\sum_{\substack{i_i i_2\cdots i_n\\ j_1 j_2\cdots j_n}}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)+\tau\left(j_{j_2}\cdots j_n\right)}a_{i_1 j_1}a_{i_2 j_2}\cdots a_{i_{n_n} j_n}.$$

由 n 级排列的性质可知, n 阶行列式共有 $n!$ 项, 其中冠以正号的项和冠以负号的项 (不算元素本身所带的负号) 各占一半.

例 9.1.2. 求 $f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1 & 2\\ 1 & x & 1 & -1\\ 3 & 2 & x & 1\\ 1 & 1 & 1 & x\end{vmatrix}$ 中 x^4 与 x^3 的系数.

只有行列式的对角线上的元素相乘才出现 x^4, 并且带正号, 于是 x^4 的系数为 2; 同理, 含 x^3 的项只有一项, 即

$$x\cdot 1\cdot x\cdot x=x^3$$

而且其列标所构成的排列为 2134, 于是 $\tau(2134)=1$, 即 x^3 的系数为 -1.

例 9.1.3. 证明 n 阶行列式微分法:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix}f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{i1} & f_{i2} & \cdots & f_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix}f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{i1} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{i2} & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn}\end{vmatrix}.$$

证 从行列式的定义出发予以证明,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix}f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{i1} & f_{i2} & \cdots & f_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn}\end{vmatrix}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{j_1\ j_2\ \cdots\ j_n}(-1)^{\tau(j_1\ j_2\ \cdots\ j_n)}\prod_{i=1}^{n}f_{i\ j_i}$$

$$=\sum_{j_1\ j_2\ \cdots\ j_n}(-1)^{\tau(j_1\ j_2\ \cdots\ j_n)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\prod_{i=1}^{n}f_{i\ j_i}=\sum_{j_1\ j_2\ \cdots\ j_n}(-1)^{\tau(j_1\ j_2\ \cdots\ j_n)}\sum_{i=1}^{n}f_{1\ j_1}f_{2\ j_2}\cdots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{i\ j_i}\cdots f_{n\ j_n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1\ j_2\ \cdots\ j_n}(-1)^{\tau(j_1\ j_2\ \cdots\ j_n)}f_{1\ j_1}f_{2\ j_2}\cdots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{i\ j_i}\cdots f_{n\ j_n}=\begin{vmatrix}f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{i1} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{i2} & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn}\end{vmatrix}.$$

9.1.3 行列式的基本性质

定理 9.1.3 (行列式的转置). 行列式 D 与它的转置行列式 $D^{\top}$ (将 D 行的项转为列的项, 如第 1 行转为第 1 列, $\cdots$, 第 n 行转为第 n 列) 相等.

定理 9.1.4 (变号定理). 互换行列式的两行 (列), 行列式变号 (例如, 交换第 1 行和第 2 行, 记为 $r_1 \leftrightarrow r_2$; 交换第 1 列和第 2 列, 记为 $c_1 \leftrightarrow c_2$).

定理 9.1.5 (行列式的数乘). 行列式的某一行(列) 中所有的元素都乘以同一数 k, 等于用数 k 乘此行列式.

推论 9.1.1. 行列式中某一行 (列) 的所有元素的公因子可以提到整个行列式的外面.

定理 9.1.6. 行列式中如果有两行 (列) 元素成比例, 则此行列式等于零.

定理 9.1.7 (行列式拆分). 若行列式的某一列 (行) 的所有元素都是两数之和, 例如第 i 列的元素都是两数之和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}+a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}+a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{22} & \cdots & a_{ni}+a'_{ni} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式之和

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{22} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 9.1.8 (行列式变换). 把行列式的某一行 (列) 的各元素乘以同一数然后加到另一行 (列) 对应的元素上, 行列式不变.

9.1.4 几种特殊的行列式

常见的行列式展开.

上三角形、下三角形、对角行列式

$$(1)\ \begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \boldsymbol{O} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \boldsymbol{O} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

副对角线方向的行列式

$$(2)\ \begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_{i,n-i+1}$$

9.2 行列式按行 (列) 展开定理

行列式按行（列）展开定理是计算行列式的一种有效方法, 适用于任意阶数的方阵. 通过按行（列）展开定理, 可以将复杂的行列式计算问题简化为一系列较小的行列式计算问题, 从而更容易地求解行列式的值.

9.2.1 行列式展开定理

定义 9.2.1 (余子式). 在 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 中, 去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后, 余下的 $n-1$ 阶行列式, 称为 a_{ij} 的余子式, 记为 M_{ij}.

定义 9.2.2 (代数余子式). 称 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.

定义 9.2.3 (k 阶子式). 在 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 中, 任意选定 k 行 k 列 $(1 \leqslant k \leqslant n)$, 位于这些行列交叉处的 k^2 个元素, 按原来顺序构成一个 k 阶行列式, 称为 D 的一个 k 阶子式.

定理 9.2.1 (按行 (列) 展开). 行列式等于它的任一行 (列) 的各元素与其对应的代数余子式乘积之和, 即按第 i 行展开, $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} (i = 1, 2, \cdots, n)$; 按第 j 列展开, $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} (j = 1, 2, \cdots, n)$.

行列式某一行 (列) 的元素与另一行 (列) 的对应元素的代数余子式乘积之和等于零, 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, i \neq j$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, i \neq j.$$

例 9.2.1. 设四阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1&8\\-2&1&4&-7\\3&0&5&-9\\a&b&c&d\end{pmatrix}$$

而 A_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元的代数余子式 $(i,j=1,2,3,4)$, 试计算

(1) $2A_{14}-2A_{24}+3A_{34}-3A_{44}$;

(2) $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$.

(1) 由于 $a_{11}A_{14}+a_{21}A_{24}+a_{31}A_{34}+a_{41}A_{44}=0$, 所以

$$2A_{14}-2A_{24}+3A_{34}+a_{44}=0\Rightarrow 2A_{14}-2A_{24}+3A_{34}-3A_{44}=-(a+3)A_{44}$$

且 $A_{44}=(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}2&0&1\\-2&1&4\\3&0&5\end{vmatrix}=7$, 所以 $2A_{14}-2A_{24}+3A_{34}-3A_{44}=-7(a+3)$.

(2) 构造一个新矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&1&8\\-2&1&4&-7\\3&0&5&-9\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

易知 $|\boldsymbol{B}|=-217$, 所以 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=-217$.

例 9.2.2 (2010 云南大学). 设四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&-5&2&d\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}$$

计算 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$, 其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式.

由于 A_{ij} 与 a_{ij} 的值无关, 现构造一个新的行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}$$

由例 *9.3.19* 知 $D_1=(a+b+c+d)(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$, 将 D_1 按第一行展开即得

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=(a+b+c+d)(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

例 9.2.3. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $\boldsymbol{A}^\top=k\boldsymbol{A}^*$ $(k>0)$, 若 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=c>0$, 求 c.

对 $\boldsymbol{A}^\top=k\boldsymbol{A}^*$ 两边取行列式, 则

$$\det\left(\boldsymbol{A}^\top\right)=\det(k\boldsymbol{A}^*)\Rightarrow\det\boldsymbol{A}=k^n(\det\boldsymbol{A})^{n-1}=k^3(\det\boldsymbol{A})^2\Rightarrow\det\boldsymbol{A}=\frac{1}{k^3}$$

又因为 $\boldsymbol{A}^\top=k\boldsymbol{A}^*$, 所以 $a_{ij}=kA_{ij}$, 其中 A_{ij} 是 a_{ij} 对应的代数余子式, 那么

$$\det\boldsymbol{A}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{3}a_{1i}^2=\frac{3c^2}{k}$$

于是 $\dfrac{1}{k^3}=\dfrac{3c^2}{k}\Rightarrow c=\dfrac{\sqrt{3}}{3k}$.

9.2.2 Laplace 展开定理

定理 9.2.2 (Laplace 展开定理). 取定行指标 $i_1,i_2,\cdots,i_p,1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n$, 遍取行列式 $\det\boldsymbol{A}$ 中第 $i_1,i_2,\cdots,i_p$ 行上的 p 阶子式, 并分别乘以相应的代数余子式, 其和即为 $\det\boldsymbol{A}$, 具体地说, 有

$$\det\boldsymbol{A}=\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_p\leqslant n}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_1i_2\cdots i_p\\ j_1j_2\cdots j_p\end{pmatrix}\left[(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{p}i_k+\sum\limits_{k=1}^{p}j_k}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_{p+1}i_{p+2}\cdots i_n\\ j_{p+1}j_{p+2}\cdots j_n\end{pmatrix}\right]$$

其中 $i_1i_2\cdots i_pi_{p+1}\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_pj_{p+1}\cdots j_n$ 都是 $1,2,\cdots,n$ 的排列, 并且 $1\leqslant i_{p+1}<i_{p+2}<\cdots\leqslant i_n,1\leqslant j_{p+1}<j_{p+2}<\cdots\leqslant j_n$.

例 9.2.4. 利用 Laplace 展开定理计算下列行列式:

$$(1)\ D=\begin{vmatrix}-4&1&2&-2&1\\0&3&0&1&-5\\2&-3&1&-3&1\\-1&-1&3&-1&0\\0&4&0&2&5\end{vmatrix}.\qquad (2)\ D=\begin{vmatrix}1&1&0&0&0&1\\x_1&x_2&0&0&0&x_3\\a_1&b_1&1&1&1&c_1\\a_2&b_2&x_1&x_2&x_3&c_2\\a_3&b_3&x_1^2&x_2^2&x_3^2&c_3\\x_1^2&x_2^2&0&0&0&x_3^2\end{vmatrix}.$$

(1) 将行列式 D 按第 1 列、第 3 列作 Laplace 展开, 得到

$$\begin{aligned}D&=\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant5}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_1&i_2\\1&3\end{pmatrix}\left[(-1)^{i_1+i_2+1+3}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_3&i_4&i_5\\2&4&5\end{pmatrix}\right]\\&=(-1)^{1+3+1+3}\begin{vmatrix}-4&2\\2&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3&1&-5\\-1&-1&0\\4&2&5\end{vmatrix}+(-1)^{1+4+1+3}\begin{vmatrix}-4&2\\-1&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3&1&-5\\-3&-3&1\\4&2&5\end{vmatrix}\\&\quad+(-1)^{3+4+1+3}\begin{vmatrix}2&1\\-1&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&-2&1\\3&1&-5\\4&2&5\end{vmatrix}\\&=-8\times(-20)-(-10)\times(-62)-7\times87=-1069.\end{aligned}$$

(2) 将行列式 D 按第 3 列、第 4 列和第 5 列作 Laplace 展开, 得到

$$\begin{aligned}D&=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant6}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_1&i_2&i_3\\3&4&5\end{pmatrix}\left[(-1)^{i_1+i_2+i_3+3+4+5}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_4&i_5&i_6\\1&2&6\end{pmatrix}\right]\\&=(-1)^{3+4+5+3+4+5}\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\x_1^2&x_2^2&x_3^2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\x_1^2&x_2^2&x_3^2\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant3}(x_i-x_j)^2.\end{aligned}$$

9.3 行列式的计算

9.3.1 具象行列式的计算

化为三角形矩阵

例 9.3.1 (2016 复旦大学). 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, 其中 $a_{ij}=\max\{i,j\}$, 求行列式 $\det\boldsymbol{A}$.

对于 $i=2,\cdots,n$, 依次将第 i 行的 -1 倍加到第 $i-1$ 行, 得

$$\det \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&2&3&\cdots&n\\3&3&3&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&n&n&n\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_{i-1}-r_i}\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&0&0\\-1&-1&0&\cdots&0&0\\-1&-1&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-1&-1&-1&\cdots&-1&0\\n&n&n&\cdots&n&n\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}n.$$

例 9.3.2. 设 $n\geqslant 2$, 计算 n 阶行列式 $D_n=\det(a_{ij})$, 其中 $a_{ij}=|i-j|$, $i,j=1,2,\cdots,n$.

从最后一行起, 依次将后一行减去前一行, 再将所得行列式的最后一行加到其他行, 得

$$D_n=\begin{vmatrix}0&1&2&\cdots&n-2&n-1\\1&0&1&\cdots&n-3&n-2\\2&1&0&\cdots&n-4&n-3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-2&n-3&n-4&\cdots&0&1\\n-1&n-2&n-3&\cdots&1&0\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-r_{i-1}}\begin{vmatrix}0&1&2&\cdots&n-2&n-1\\1&-1&-1&\cdots&-1&-1\\1&1&-1&\cdots&-1&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&-1&-1\\1&1&1&\cdots&1&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=1,\cdots,n-1]{c_j+c_n}\begin{vmatrix}n-1&n&n+1&\cdots&2n-3&n-1\\0&-2&-2&\cdots&-2&-1\\0&0&-2&\cdots&-2&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-2&-1\\0&0&0&\cdots&0&-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1).$$

例 9.3.3. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&3&4&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n-1&n&1&\cdots&n-2\\n&1&2&\cdots&n-1\end{vmatrix}$.

依次将第 n 行减去第 $n-1$ 行, 第 $n-1$ 行减去第 $n-2$ 行, $\cdots$, 第 2 行减去第 1 行, 再将各列加到第 1 列, 得

$$D_n\xlongequal[i=n,\cdots,1]{r_i-r_{i-1}}\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&1&1&\cdots&1-n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1-n&\cdots&1\\1&1-n&1&\cdots&1\end{vmatrix}\xlongequal[j=2,\cdots,n]{c_1+c_j}\left|\begin{array}{c:cccc}\frac{n(n+1)}{2}&2&3&\cdots&n\\\hdashline 0&1&1&\cdots&1-n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&1&1-n&\cdots&1\\0&1-n&1&\cdots&1\end{array}\right|$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1-n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1-n&\cdots&1\\1-n&1&\cdots&1\end{vmatrix}_{n-1}\xlongequal[j=2,\cdots,n-1]{c_1+c_j}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-1&1&\cdots&1-n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&1-n&\cdots&1\\-1&1&\cdots&1\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal[j=2,\cdots,n-1]{c_j+c_1}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&-n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-n&\cdots&0\\-1&0&\cdots&0\end{vmatrix}_{n-1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

例 9.3.4 (2008 山西师范大学). 计算 $f(x+1)-f(x)$, 其中

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & x^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & \mathrm{C}_n^2 & \mathrm{C}_n^3 & \cdots & \mathrm{C}_n^{n-1} & x^n \\ 1 & n+1 & \mathrm{C}_{n+1}^2 & \mathrm{C}_{n+1}^3 & \cdots & \mathrm{C}_{n+1}^{n-1} & x^{n+1} \end{vmatrix}.$$

由二项式定理 $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a^{n-k}b^n$,

$$f(x+1)-f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2x+1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 3x^2+3x+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & \mathrm{C}_n^2 & \mathrm{C}_n^3 & \cdots & \mathrm{C}_n^{n-1} & nx^{n-1}+\mathrm{C}_n^2x^{n-2}+\cdots+1 \\ 1 & n+1 & \mathrm{C}_{n+1}^2 & \mathrm{C}_{n+1}^3 & \cdots & \mathrm{C}_{n+1}^{n-1} & (n+1)x^n+\mathrm{C}_{n+1}^2x^{n-1}+\cdots+1 \end{vmatrix}$$

将第一列乘 -1, 第二列乘 $-x$, 第二列乘 $-x^2$, $\cdots$, 第 n 列乘 $-x^{n-1}$, 都加到最后一列, 得

$$f(x+1)-f(x)\xlongequal[j=1,\cdots,n]{c_{n+1}-x^{j-1}c_j}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & \mathrm{C}_n^2 & \mathrm{C}_n^3 & \cdots & \mathrm{C}_n^{n-1} & 0 \\ 1 & n+1 & \mathrm{C}_{n+1}^2 & \mathrm{C}_{n+1}^3 & \cdots & \mathrm{C}_{n+1}^{n-1} & (n+1)x^n \end{vmatrix}=(n+1)!x^n.$$

化为对角型矩阵

例 9.3.5 (2004 大连理工大学). 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 2-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2-n & \cdots & 1 & 1 \\ 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

第二列至第 n 列都加到第一列, 再将第一列的 -1 倍加到其他各列, 得

$$D_n\xlongequal[j=2,\cdots,n]{c_1+c_j}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 2-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal[j=2,\cdots,n]{c_j-c_1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1-n \\ 1 & 0 & \cdots & 1-n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n^2+n-2}{2}}(n-1)^{n-1}.$$

例 9.3.6 (2008 北京科技大学). 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n+x \\ 1 & 2 & \cdots & (n-1)+x & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2+x & \cdots & n-1 & n \\ 1+x & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

从第二行至第 n 行都减去第一行, 再把所有列都加到最后一列, 得对角型行列式

$$|\boldsymbol{A}| \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n+x \\ 0 & 0 & \cdots & x & -x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & x & \cdots & 0 & -x \\ x & 0 & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix} \xlongequal[j=1,\cdots,n-1]{c_n+c_j} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & x+\dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ x & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(x+\frac{n^2+n}{2}\right)x^{n-1}.$$

例 9.3.7 (2002 华东师范大学). 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 1 & x & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & x & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & x \end{vmatrix}$.

先把第一列乘二, 再把第一行除以二, 得

$$D_n \xlongequal[r_1/2]{c_1\times 2} \begin{vmatrix} x & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & x & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & x & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & x \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} x & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2-x & x-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2-x & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2-x & 0 & 0 & \cdots & x-2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,\cdots,n]{c_1+c_j} \begin{vmatrix} x+2(n-1) & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & x-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-2 \end{vmatrix}=(x+2n-2)(x-2)^{n-1}$$

例 9.3.8 (2005 北京工业大学). 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a+3 & \cdots & a+n \\ a+2 & a+3 & a+4 & \cdots & a+1 \\ a+3 & a+4 & a+5 & \cdots & a+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+n & a+1 & a+2 & \cdots & a+n-1 \end{vmatrix}.$$

从最后一行开始，每行都减去其前一行，然后各列都加到第一列，并按第一列展开，得

$$D \xlongequal[i=n,\cdots,2]{r_i-r_{i-1}} \begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a+3 & \cdots & a+n-1 & a+n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,\cdots,n]{c_1+c_j} \begin{vmatrix} \frac{1}{2}n(2a+n+1) & a+2 & a+3 & \cdots & a+n-1 & a+n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}n(2a+n+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left[a + \frac{n(n+1)}{2}\right] n^{n-1}.$$

建立递推公式

例 9.3.9. 求下列 n 阶行列式

$$(1)\ D_n = \begin{vmatrix} 2a & a^2 & & & \\ 1 & 2a & a^2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2a & a^2 \\ & & & 1 & 2a \end{vmatrix}. \quad (2)\ D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a+b & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

(1) 把 D_n 第 1 列乘 $-\frac{1}{2}a$ 加到第 2 列，再把第 2 列乘 $-\frac{2}{3}a$ 加到第 3 列，如此下去，直至把第 $n-1$ 列乘 $-\frac{n-1}{n}a$ 加到第 n 列，得

$$D_n \xlongequal[j=1,\cdots,n-1]{c_{j+1}-c_j\times\frac{j}{j+1}a} \begin{vmatrix} 2a & 0 & & & \\ 1 & \frac{3}{2}a & 0 & & \\ & 1 & \frac{4}{3}a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 1 & \frac{n+1}{n}a \end{vmatrix} = (n+1)a^n.$$

(2) 把 D_n 按第一行展开，得

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - ab \begin{vmatrix} 1 & ab & & & \\ 0 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1} = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}.$$

所以有递推公式

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$$

由此逐次递推，得

$$D_n - aD_{n-1} = b^2(D_{n-2} - aD_{n-3}) = \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1)$$

注意到

$$D_1 = a+b,\ D_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = a^2+ab+b^2$$

所以

$$D_n - aD_{n-1} = b^n$$

根据对称性，有

$$D_n - bD_{n-1} = a^n$$

若 $a=b$ (可见上题)，则 $D_n = a^n + aD_{n-1}$，由此递推，得

$$D_n = (n+1)a^n$$

若 $a \neq b$，可得 $D_n = \dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}$.

例 9.3.10 (1994 华中师范大学). 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a & -1 & & & & \\ ax & a & -1 & & & \\ ax^2 & ax & a & -1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ ax^{n-1} & ax^{n-2} & ax^{n-3} & \cdots & a & -1 \\ ax^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & ax & a \end{vmatrix}.$$

法一： 将第二列的 $-x$ 倍加到第一列，第三列的 $-x$ 倍加到第二列，以此类推，

$$D_{n+2} \xlongequal[j=1,\cdots,n]{c_j - xc_{j+1}} \begin{vmatrix} a+x & -1 & & & & \\ 0 & a+x & -1 & & & \\ 0 & 0 & a+x & -1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = a(a+x)^n.$$

法二： 先把第二列乘 a 加到第一列，并提出第一列的公因子 $x+a$，再按第一行展开，得

$$D_{n+1} = (x+a)D_n = (x+a)^2 D_{n-1} = \cdots = (x+a)^{n-1}D_2 = (x+a)^{n-1}\begin{vmatrix} a & -1 \\ ax & a \end{vmatrix} = a(x+a)^n.$$

例 9.3.11 (2006 中国科学院). 已知 α,β,γ 为实数，求 $\det \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \gamma & \alpha & \beta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma & \alpha & \beta \\ & & & \gamma & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的值.

显然，若 $\beta=0$ 或 $\gamma=0$，则 $\det \boldsymbol{A} = \alpha^n$. 因此，下设 $\beta\gamma \neq 0$ 把 $D_n = \det \boldsymbol{A}$ 按第一行展开，得

$$D_a = \alpha D_{n-1} - \beta\gamma D_{n-2}$$

令 $p+q=\alpha, pq=\beta\gamma$，则 p,q 是二次方程 $x^2-\alpha x+\beta\gamma=0$ 的根. 故有如下递推公式

$$D_n - pD_{n-1} = q(D_{n-1} - pD_{n-2})$$

由此逐次递推，得

$$D_n - pD_{n-1} = q^2(D_{n-2} - pD_{n-3}) = \cdots = q^{n-2}(D_2 - pD_1)$$

注意到

$$D_1 = \alpha = p+q,\ D_2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \beta\gamma = p^2+pq+q^2$$

所以

$$D_n - pD_{n-1} = q^{n-2}[p^2 + pq + q^2 - p(p+q)] = q^n$$

根据对称性

$$D_n - qD_{n-1} = p^n$$

若 $\alpha^2 = 4\beta\gamma$，则 $p = q$，所以 $D_n = p^p + pD_{n-1}$. 由此递推，得

$$D_n = (n+1)p^n = (n+1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n$$

若 $\alpha^2 \neq 4\beta\gamma$，则 $p \neq q$，则有

$$D_n = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p-q} = \frac{\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}\right)^{n+1} - \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}\right)^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}.$$

升阶法

例 9.3.12. 计算下列行列式 $|\boldsymbol{A}|$, $a_i \neq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$,

$$(1)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{pmatrix}. \quad \Bigg\| \quad (2)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix}.$$

(1) 把 $|\boldsymbol{A}|$ 添加一行、一列且保持值不变,

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ 0 & a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix}_{n+1} \xlongequal[i=1,\cdots,n]{r_{i+1}-a_ir_1} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=1,\cdots,n]{c_1+a_jc_{j+1}} \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{k=1}^n a_k^2 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 + \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

(2) 同样地，把 $|\boldsymbol{A}|$ 添加一行、一列且保持值不变,

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}_{n+1} \xlongequal[i=1,\cdots,n]{r_{i+1}-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=1,\cdots,n]{c_1+\frac{1}{a_j}c_{j+1}} \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{a_k} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n a_k \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right).$$

例 9.3.13 (2003 南开大学). 计算下列行列式的值:

$$D=\begin{vmatrix} a_1+b_1c_1 & a_2+b_1c_2 & \cdots & a_n+b_1c_n \\ a_1+b_2c_1 & a_2+b_2c_2 & \cdots & a_n+b_2c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1+b_nc_1 & a_2+b_nc_2 & \cdots & a_n+b_nc_n \end{vmatrix}$$

其中 $n\geqslant 3$.

法一: 利用升阶法,

$$D=\left|\begin{array}{c:cccc} 1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \hdashline 0 & a_1+b_1c_1 & a_2+b_1c_2 & \cdots & a_n+b_1c_n \\ 0 & a_1+b_2c_1 & a_2+b_2c_2 & \cdots & a_n+b_2c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1+b_nc_1 & a_2+b_nc_2 & \cdots & a_n+b_nc_n \end{array}\right|_{n+1} \xlongequal[i=1,\ldots,n]{r_{i+1}-b_ir_1} \begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ -b_1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -b_2 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left|\begin{array}{c:ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ -1 & -b_1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & -b_2 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -b_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{array}\right|_{n+2} \xlongequal[j=1,\cdots,n]{c_{j+2}+a_jc_1} \left|\begin{array}{cc:cccc} 1 & 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \hdashline -1 & -b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right| \xlongequal[n\geqslant 3]{Laplace} 0.$$

法二: 由行列式的乘法规则, 并注意到 $n\geqslant 3$, 得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=0.$$

例 9.3.14 (2017 中国科学院大学). 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & & & \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1-a_{n-1} & a_n \\ & & & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}.$$

利用升阶法, 考虑 $n+1$ 阶行列式

$$\Delta=\left|\begin{array}{c:ccccc} 1 & a_1 & & & & \\ \hdashline -1 & 1-a_1 & a_2 & & & \\ & -1 & 1-a_2 & a_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1-a_{n-1} & a_n \\ & & & & -1 & 1-a_n \end{array}\right|_{n+1} \xlongequal[i=1,\cdots,n]{r_{i+1}+r_i} 1$$

另一方面, 将 Δ 按第一行展开, 得 $\Delta=D+a_1D'$, 即 $D=1-a_1D'$, 其中 D' 是 Δ 右下角的 $n-1$ 阶子式, 由此递推, 可得

$$D=1-a_1+a_1a_2-a_1a_2a_3+\cdots+(-1)^na_1a_2\cdots a_n.$$

9.3.2 抽象行列式的计算

定理 9.3.1 (行列式的乘法公式). $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$.

例 9.3.15 (2006 数一). 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{E}$, 求 $|\boldsymbol{B}|$.

由 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{E}$ 得 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = 2\boldsymbol{E}$, 两边取行列式, 有

$$|\boldsymbol{B}| \cdot |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}| = |2\boldsymbol{E}| = 4$$

因为 $|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, 所以 $|\boldsymbol{B}| = 2$.

例 9.3.16. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 均为 4 维列向量, 又 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta})$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\gamma})$, 若 $|\boldsymbol{A}| = 3, |\boldsymbol{B}| = 2$, 求 $|\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}|$.

$$|\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}| = |3\boldsymbol{\alpha}_1, 3\boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta} + 2\gamma| = 3^3|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta} + 2\gamma| = 3^3(|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}| + 2|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \gamma|) = 27 \times 7 = 187.$$

9.3.3 Vandermonde 行列式计算

定理 9.3.2 (Vandermonde 行列式). n 阶 Vandermonde 行列式为

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

例 9.3.17. 计算下列行列式:

$$(1)\ D_{n+1} = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}. \qquad (2)\ D_{n-1} = \begin{vmatrix} 2^n - 2 & 2^{n-1} - 2 & \cdots & 2^3 - 2 & 2 \\ 3^n - 3 & 3^{n-1} - 3 & \cdots & 3^3 - 3 & 6 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n^n - n & n^{n-1} - n & \cdots & n^3 - n & n^2 - n \end{vmatrix}.$$

(1) 将 D_{n+1} 的第 $n+1$ 行依次与第 $n, n-1, \cdots, 1$ 行互换, 再将新的行列式的第 $n+1$ 行依次与第 $n, n-1, \ldots, 2$ 行互换, 如此下去, 总共经过 $n + (n+1) + \cdots + 2 + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$ 次行与行的互换, 最后得 *Vandermonde* 行列式

$$D_{n+1} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n} [(a-i) - (a-j)]$$

$$= \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (i - j) = \prod_{k=1}^{n} k!.$$

(2) 利用升阶法，将 D 添上一行一列，然后将第一行的 i 倍加到后面各行，再将第 j 列与后面的 $n-j$ 列逐次交换，$j=2,3,\cdots,n-1$，化为 Vandermonde 行列式，

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 2^n-2 & 2^{n-1}-2 & \cdots & 2^3-2 & 2\\ 0 & 3^n-3 & 3^{n-1}-3 & \cdots & 3^3-3 & 6\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & n^n-n & n^{n-1}-n & \cdots & n^3 & n^2-n\end{vmatrix}_n \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i+ir_1} \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 2 & 2^n & 2^{n-1} & \cdots & 2^3 & 2^2\\ 3 & 3^n & 3^{n-1} & \cdots & 3^3 & 3^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ n & n^n & n^{n-1} & \cdots & n^3 & n^2\end{vmatrix}$$

$$=n!\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 2^{n-1} & 2^{n-2} & \cdots & 2^2 & 2^1\\ 1 & 3^{n-1} & 3^{n-2} & \cdots & 3^2 & 3^1\\ 1 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & n^{n-1} & n^{n-2} & \cdots & n^2 & n^1\end{vmatrix}=n!(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-2} & 2^{n-1}\\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-2} & 3^{n-1}\\ 1 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-2} & n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n^2+n+2}{2}}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}(i-j).$$

例 9.3.18. 计算下列行列式:

$$(1)\ D_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1}+S/a_1\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1}+S/a_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1}+S/a_n\end{vmatrix}. \quad\Bigg\|\quad (2)\ D=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2\end{vmatrix}.$$

其中 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，且 $a_i\neq 0$.

(1) 先拆项，再利用 Vandermonde 行列式计算，

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & S/a_1\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & S/a_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & S/a_n\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)+\frac{S}{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}\begin{vmatrix}a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} & 1\\ a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} & 1\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)+(-1)^{n-1}\frac{S}{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=\left[1+(-1)^{n-1}\frac{S}{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}\right]\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

(2) 先拆项，再利用 Vandermonde 行列式计算，

$$D=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\\ -2 & -2 & -2 & \cdots & -2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 0 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\\ 2 & -2 & -2 & \cdots & -2\end{vmatrix}$$

$$
= -2\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + (-1)^n 2\prod_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}
$$

$$
= -2\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j) + (-1)^n 2\prod_{i=1}^{n} x_i \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)
$$

$$
= 2\left[-\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) + (-1)^n\prod_{i=1}^{n} x_i\right]\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).
$$

例 9.3.19 (2006 山东大学)**.** 计算 n 阶行列式

$$
D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.
$$

在 D 中增加一行一列, 凑成 $n+1$ 阶 Vandermonde 行列式:

$$
D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & y^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n}(y-x_k)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)
$$

这是关于变量 y 的恒等式, 一方面, 将上式左边 D_{n+1} 按第 D_{n+1} 列展开, 得 y 的 n 次多项式:

$$
D_{n+1} = A_{1,n+1} + yA_{2,n+1} + \cdots + y^{n-1}A_{n,n+1} + y^n A_{n+1,n+1}
$$

其中 $A_{k,n+1}$ 是 D_{n+1} 的 $(k,n+1)$ 元的代数余子式 $(1\leqslant k\leqslant n+1)$, 且 y^{n-1} 的系数为

$$
A_{n,n+1} = (-1)^{n+n+1}D = -D
$$

另一方面, 对于 D_{n+1} 的右边, 因为

$$
\prod_{k=1}^{n}(y-x_k) = y^n - \sum_{k=1}^{n} x_k y^{n-1} + \cdots + (-1)^n\prod_{k=1}^{n} x_k
$$

所以, y^{n-1} 的系数为 $-\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$, 因此, 有

$$
D = \sum_{k=1}^{n} x_k \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).
$$

第 10 章

矩阵

“我有一个对这个命题的十分美妙的证明，
这里空白太小，我写不下了．”
——费马

矩阵是数学中的一个重要概念, 它是由数个数排成矩形形式的集合. 矩阵在代数、几何、物理、工程等领域都有着广泛的应用. 以下是关于矩阵的基本概念和性质:

1. 定义: 矩阵是一个由 m 行 n 列元素排成的矩形数组, 通常表示为一个黑体大写字母, 如 $\boldsymbol{A}$. 矩阵中的每个元素可以是实数、复数或其他数域中的元素. 例如, 一个 3 行 2 列的矩阵可以表示为:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

2. 矩阵运算: 矩阵加法和减法: 对应位置的元素相加或相减. 矩阵乘法: 矩阵乘法不满足交换律, 即 $AB \neq BA$. 乘法规则为: 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 m 行 n 列的矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 n 行 p 列的矩阵, 则它们的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 是一个 m 行 p 列的矩阵. 矩阵转置: 将矩阵的行和列互换得到的新矩阵称为原矩阵的转置. 矩阵求逆: 对于可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$, 存在一个矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵. $\boldsymbol{B}$ 称为$\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

4. 应用: 矩阵在线性代数、微积分、概率论、信号处理、机器学习等领域有着广泛的应用. 例如, 在线性代数中, 矩阵可以用来表示线性变换和解决线性方程组; 在机器学习中, 矩阵可以用来表示数据集和模型参数.

通过对矩阵的运算和性质的理解, 我们可以更好地处理各种数学问题, 并在实际应用中解决复杂的计算和分析. 因此, 矩阵是数学中一个非常重要且基础的概念.

10.1 矩阵

10.1.1 矩阵的定义

定义 10.1.1 (矩阵). 由 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 按一定次序排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵 (m 行 n 列矩阵), a_{ij} 叫做矩阵的元素, 矩阵可简记为

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n} \text{ 或 } \boldsymbol{A}=(a_{ij})\,.$$

当 $m=n$ 时, 即矩阵的行数与列数相同时, 称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵; 当 $m=1$ 时, 矩阵只有一行, 称为行矩阵, 记为

$$\boldsymbol{A}=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$$

这样的行矩阵也称为 n 维行向量; 当 $n=1$ 时, 矩阵只有一列, 称为列矩阵, 记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

这样的列矩阵也称为 m 维列向量.

定义 10.1.2 (矩阵的负). 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中各元素变号得到的矩阵叫做 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵, 记作 $-\boldsymbol{A}$, 即

$$-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}\,.$$

定义 10.1.3 (零矩阵). 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素都是 0, 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 称为零矩阵, 记为 $\boldsymbol{O}$.

定义 10.1.4 (单位矩阵). 主对角线上元素都是 1, 其余元素均为零的方阵称为单位矩阵, 记为 $\boldsymbol{E}$ (或 $\boldsymbol{I}$), 即

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

定义 10.1.5 (数量矩阵). 主对角线上元素为任意常数, 而主对角线外的元素均为零的矩阵. 若对角矩阵的主对角线上的元素相等, 则称为数量矩阵.

定义 10.1.6 (三角形矩阵). 主对角线下方元素全为零的方阵称为上三角形矩阵; 主对角线上方元素全为零的方阵称为下三角形矩阵; 上、下三角形矩阵统称为三角形矩阵.

定义 10.1.7 (矩阵的转置). 把矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行列互换而得到的矩阵 $(a_{ji})_{n\times m}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵, 记为 $\boldsymbol{A}^\top$ (或 $\boldsymbol{A}'$).

定义 10.1.8 (对称矩阵). 如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 满足 $a_{ij}=a_{ji}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$, 即 $\boldsymbol{A}^\top=\boldsymbol{A}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵.

定义 10.1.9 (反对称矩阵). 如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 满足 $a_{ij}=-a_{ji}\,(i\neq j)$, $a_{ii}=0\,(i,j=1,2,\cdots,n)$, 即 $\boldsymbol{A}^\top=-\boldsymbol{A}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵.

定理 10.1.1 (方阵的对称表达). 任意 n 阶方阵都可以表示成一个对称方阵与一个反对称方阵的和.

证 设 $\boldsymbol{A}$ 为任意 n 阶方阵, 令 $\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^\top)$, $\boldsymbol{C}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^\top)$, 则

$$\boldsymbol{B}^\top=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^\top\right)^\top=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^\top\right)=B,\ \boldsymbol{C}^\top=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^\top\right)^\top=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}^\top-\boldsymbol{A}\right)=-\boldsymbol{C}$$

即 $\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵, $\boldsymbol{C}$ 为反对称矩阵, 显然 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$.

定义 10.1.10 (正交矩阵). 对方阵 $\boldsymbol{A}$, 如果有 $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top=\boldsymbol{E}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

定理 10.1.2 (正交矩阵的行列式). 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, 那么 $|\boldsymbol{A}|=\pm1$.

证 $1=\det\boldsymbol{E}=\det\left(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}\right)=\det\left(\boldsymbol{A}^\top\right)\det\boldsymbol{A}=\det^2\boldsymbol{A}\Rightarrow\det\boldsymbol{A}=\pm1$.

例 10.1.1. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶正交矩阵且 $|\boldsymbol{A}|<0$, $\boldsymbol{B}$ 是 4 阶矩阵, 若 $|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=5$, 求 $\left|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^\top\right|$.

因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top=\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$, 所以 $|\boldsymbol{A}|=\pm1$, 又 $|\boldsymbol{A}|<0$, 即 $|\boldsymbol{A}|=-1$,

$$\left|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^\top\right|=\left|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^\top\right|=|\boldsymbol{A}|\left|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^\top\right|=-|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=-|-(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})|=-(-1)^4|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=-5.$$

定义 10.1.11 (幂零矩阵). 对方阵 $\boldsymbol{A}$, 如果存在正整数 m, 使 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{0}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为幂零矩阵.

定义 10.1.12 (幂等矩阵). 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为幂等矩阵.

定义 10.1.13 (对合矩阵). 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 的方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为对合矩阵.

定义 10.1.14 (方阵的行列式)**.** 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素按原来的位置构成的行列式, 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, 记为 $|\boldsymbol{A}|$.

例 10.1.2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵, 且

$$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}|=3$$

求 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|$.

设 $f(x)=|\boldsymbol{A}-x\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x \end{vmatrix}$, 那么 $f(x)$ 一定是以 x 为变量的首项系数为 -1 的三次多项式, 又

$$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}|=3$$

所以 $f(x)=-(x-2)(x-3)(x-4)+3$, 那么 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=f(1)=9$.

定义 10.1.15 (奇异矩阵与非奇异矩阵)**.** 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵, 否则称为非奇异矩阵.

定义 10.1.16 (矩阵的迹)**.** 设有 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 的迹定义为 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\sum_{k=1}^{n}a_{kk}$.

定理 10.1.3 (迹的相关性质)**.** 又设 $\boldsymbol{B}\in M_n(K)$, $\lambda\in K$, 则

$(1)\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})+\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$	$(2)\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}^{\top}\right)=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$
$(3)\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})$	$(4)\operatorname{tr}(\lambda\boldsymbol{A})=\lambda\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$

10.1.2 矩阵的运算

矩阵的运算公式.

关于矩阵的加法运算公式	
(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$	(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$
(3) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\mathbf{0}$	(4) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$
关于数乘运算的公式	
(5) $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$	(6) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$
(7) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$	
关于矩阵乘法运算的公式	
(8) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$	(9) $k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$
(10) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$	(11) $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$
(12) $\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}$	(13) $(\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{E})$
(14) $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$	(15) $\left(\boldsymbol{A}^k\right)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$
关于矩阵转置运算的公式	
(16) $\left(\boldsymbol{A}^\top\right)^\top=\boldsymbol{A}$	(17) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^\top=\boldsymbol{A}^\top+\boldsymbol{B}^\top$
(18) $(k\boldsymbol{A})^\top=k\boldsymbol{A}^\top$	(19) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^\top=\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top$
关于方阵的行列式的公式, 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵, 则	
(20) $\left\|\boldsymbol{A}^\top\right\|=\|\boldsymbol{A}\|$	(21) $\|\lambda\boldsymbol{A}\|=\lambda^n\|\boldsymbol{A}\|$
(22) $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\|=\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$	(23) $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\|=\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\|$

需要注意的事项:

(1) 矩阵的乘法一般不满足交换律, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 有意义, 但 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 不一定有意义; 即使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 都有意义, 两者也不一定相等.

(2) 两个非零矩阵相乘, 可能是零矩阵, 从而不能从 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$ 推出 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$.

(3) 矩阵的乘法一般不满足消去律, 即不能从 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

定义 10.1.17 (矩阵相等). 设

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$$

如果 $a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等, 记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

定义 10.1.18 (矩阵加减). 设

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$$

其中 $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$, 则称 $\boldsymbol{C}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和 (或差), 记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}$.

定义 10.1.19 (矩阵数乘). 设 k 为一个常数,

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}\,,\ \boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$$

其中 $c_{ij}=ka_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$, 则称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的数量乘积, 简称数乘, 记为 $k\boldsymbol{A}$.

定义 10.1.20 (矩阵乘法). 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}\,,\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}\,,\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$, 其中

$$c_{ij}=\sum_{l=1}^{s}a_{il}b_{lj}\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积, 记为 $\boldsymbol{AB}$, 即 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

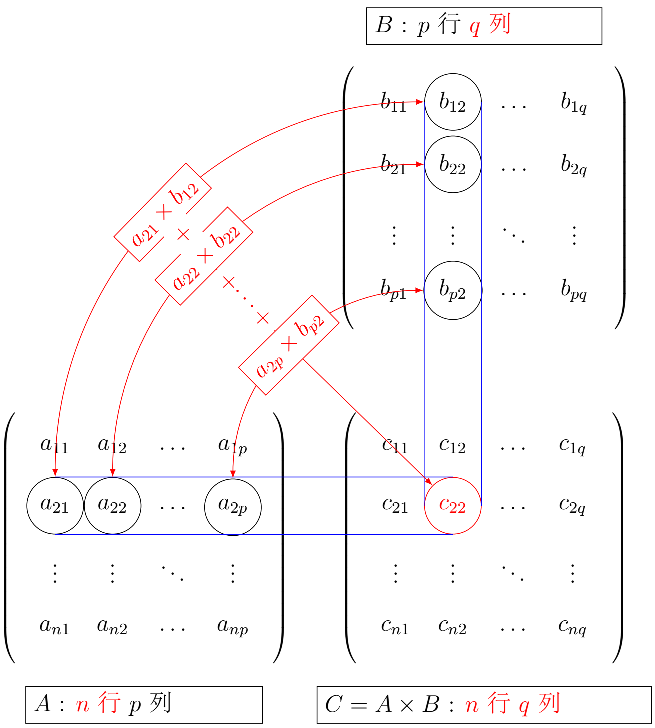


图 10.1.1

例 10.1.3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1&0\\0&b_2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_1&0&0\\0&c_2&0\\0&0&c_3\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{CA}$.

$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&0\\0&b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_1&a_{12}b_2\\a_{21}b_1&a_{22}b_2\\a_{31}b_1&a_{32}b_2\end{pmatrix}$; 同理 $\boldsymbol{CA}=\begin{pmatrix}c_1a_{11}&c_1a_{12}\\c_2a_{21}&c_2a_{22}\\c_3a_{31}&c_3a_{32}\end{pmatrix}$

例 10.1.4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是 5 阶方阵, 且 $|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=-2$, 求 $|-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}|$ 与 $|-|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}|$.

$|-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}|=|-2\boldsymbol{B}|=(-2)^5|\boldsymbol{B}|=64$, $|-|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}|=|2\boldsymbol{A}|=2^4|\boldsymbol{A}|=32$.

例 10.1.5. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 3 阶矩阵, 满足 $\boldsymbol{AB}+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 若 $|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&2&0\\1&2&0\\1&2&1\end{vmatrix}$, 求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

对 $\boldsymbol{AB}+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 使用多项式除法, 得

$$\boldsymbol{AB}+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}\Rightarrow|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=\frac{1}{|\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}|}=\frac{1}{30}.$$

10.1.3 方阵的幂

定义 10.1.21 (方阵的幂). 对 n 阶方阵 A, 定义 $\boldsymbol{A}^k=\underbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{A}}_{k\text{个}}$, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂.

例 10.1.6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^9$.

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}^2=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}6&-3&-3\\-3&6&-3\\-3&-3&6\end{pmatrix}=\boldsymbol{A},\text{ 因此 }\boldsymbol{A}^9=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^2\right)^4=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^2\right)^2=\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}.$$

利用幂零矩阵求解

例 10.1.7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&0&2&3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 求解 $\boldsymbol{A}^n$.

因为 $\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{O}$, 并且

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&0&2&3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&0&2&3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&2&9\\0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}0&0&2&9\\0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&0&2&3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&2&9\\0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

利用方阵的迹求解

定理 10.1.4 (秩一矩阵的幂). 当 $\boldsymbol{A}$ 为方阵且秩 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=1$, 则 $\boldsymbol{A}^n=[\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})]^{n-1}\boldsymbol{A}$.

例 10.1.8. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 2a & 2b & 2c & 2d \\ 3a & 3b & 3c & 3d \\ 4a & 4b & 4c & 4d \end{pmatrix}$ (a,b,c,d) 不全为 0, 求解 $\boldsymbol{A}^n$.

显然 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=1$, 则

$$\boldsymbol{A}^n=[\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})]^{n-1}\boldsymbol{A}=(a+2b+3c+4d)^{n-1}\boldsymbol{A}.$$

例 10.1.9. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 已知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似, 求 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})$, 及 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^n$, n 为大于 1 的正整数.

因为 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$, 所以

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})&=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}+\operatorname{rank}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\\ &=3+1=4\end{aligned}$$

因为 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=1$, 所以 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^n=[\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}]^{n-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=(-2)^{n-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

利用二项式展开求解

例 10.1.10. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

由 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$, 而 $\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0$, 所以当 $k\geqslant 2$ 时, 有 $\boldsymbol{B}^k=0$, 而单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 与任意矩阵可换, 由二项式定理, 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\boldsymbol{E}^{n-k}\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{E}^n+\mathrm{C}_n^1\boldsymbol{E}^{n-1}B\\ &=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

例 10.1.11 (2002 复旦大学). 证明:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{100}=\begin{pmatrix} 51 & -50 \\ 50 & -49 \end{pmatrix}.$$

证 注意到

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}(1,-1)=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^\top$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 是二阶单位矩阵, $\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^\top$, $\boldsymbol{\beta}=(1,-1)^\top$, 并且 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T=0$, 所以

$$\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^\top\right)^2=\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^\top\right)\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^\top\right)=\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\beta}^\top\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{\beta}^\top=\boldsymbol{O}$$

于是

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{100} = \left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\top}\right)^{100} = \sum_{k=0}^{100} \mathrm{C}_{100}^{k}\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\top}\right)^{k} = \boldsymbol{E}+100\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\top}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 100\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1,-1) = \begin{pmatrix} 51 & -50 \\ 50 & -49 \end{pmatrix}.$$

10.1.4 分块矩阵

定理 10.1.5 (分块矩阵的加减法). 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有相同的行数和列数, 且有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 有相同的行数和列数, 则

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}\pm\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\pm\boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1}\pm\boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\pm\boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix}.$$

定理 10.1.6 (分块矩阵的数乘). 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}$, λ 为数, 则

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda\boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}.$$

定理 10.1.7 (分块矩阵的乘法). 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times l$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $l\times n$ 矩阵, 且

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{t1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{tr} \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{i1},\boldsymbol{A}_{i2},\cdots,\boldsymbol{A}_{ii}$ 的列数分别与 $\boldsymbol{B}_{1j},\boldsymbol{B}_{2j},\cdots,\boldsymbol{B}_{ij}$ 的行数相等, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{C}_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{t}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}(i=1,\cdots,s;j=1,\cdots,r)$.

定理 10.1.8 (分块矩阵的转置). 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^{\top}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\top} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\top}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1r}^{\top} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}^{\top}\end{pmatrix}$.

定理 10.1.9 (分块矩阵的行列式). 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,m)$ 都是方阵, 则

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1|\,|\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_m|,\quad \boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^n & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m^n\end{pmatrix}.$$

10.1.5 Carlson 不等式及其应用

定理 10.1.10 (Carlson 不等式). 对于 $n\times m$ 矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}\end{pmatrix}$$

其中 $a_{ij}\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m)$, 则

$$\left[\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)\right]^{\frac{1}{m}}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{m}a_{ij}\right)^{\frac{1}{m}}$$

其中, 等号成立的充要条件是至少有一列数都是 0 或所有行中的数对应成比例.

证 记 $A_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\ (j=1,2,\cdots,m)$, $G_j=\prod_{j=1}^{m}a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,n)$, 若某个 $A_j=0$, 则由 $a_{ij}\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n)$, 得

$$a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{nj}=0$$

此时, $G_1=G_2=\cdots=G_n=0$, 从而

$$\left[\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)\right]^{\frac{1}{m}}=\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{m}a_{ij}\right)^{\frac{1}{m}}$$

若所有 $A_j>0$, 由均值不等式得

$$\frac{a_{i1}}{A_1}+\frac{a_{i2}}{A_2}+\cdots+\frac{a_{im}}{A_m}\geqslant m\left(\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}a_{ij}}{\prod\limits_{j=1}^{m}A_j}\right)^{\frac{1}{m}}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

将以上 n 个不等式相加得

$$m \geqslant m\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\prod\limits_{j=1}^{m} a_{ij}}{\prod\limits_{j=1}^{m} A_j}\right)^{\frac{1}{m}} = m\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} G_i^{\frac{1}{m}}}{\left(\prod\limits_{j=1}^{m} A_j\right)^{\frac{1}{m}}}$$

等号成立的充要条件是至少有一列数都是 0 或 $\dfrac{a_{i1}}{A_1}=\dfrac{a_{i2}}{A_2}=\cdots=\dfrac{a_{im}}{A_m}$.

例 10.1.12. 已知 $a,b,c>0$, 证明:

$$\left(a^2+ab+b^2\right)\left(b^2+bc+c^2\right)\left(c^2+ca+a^2\right)\geqslant(ab+bc+ca)^3.$$

证 构造 3×3 矩阵

$$\begin{pmatrix} a^2 & c^2 & ca \\ ab & b^2 & a^2 \\ b^2 & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

由 *Carlson* 不等式得证.

例 10.1.13. 已知 $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=14$, 求证: $a^5+\dfrac{b^5}{8}+\dfrac{c^5}{27}\geqslant 14$.

证 构造 3×5 矩阵

$$\begin{pmatrix} a^5 & a^5 & 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{b^5}{8} & \dfrac{b^5}{8} & 4 & 4 & 4 \\ \dfrac{c^5}{27} & \dfrac{c^5}{27} & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

由 *Carlson* 不等式得,

$$\left[\left(a^5+\frac{b^5}{8}+\frac{c^5}{27}\right)^2(1+4+9)^3\right]^{\frac{1}{5}} \geqslant \left(a^5\cdot a^5\cdot 1^3\right)^{\frac{1}{5}}+\left(\frac{b^5}{8}\cdot\frac{b^5}{8}\cdot 4^3\right)^{\frac{1}{5}}+\left(\frac{c^5}{27}\cdot\frac{c^5}{27}\cdot 9^3\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$\left[\left(a^5+\frac{b^5}{8}+\frac{c^5}{27}\right)^2 14^3\right]^{\frac{1}{5}} \geqslant a^2+b^2+c^2=14$$

整理得证 $a^5+\dfrac{b^5}{8}+\dfrac{c^5}{27}\geqslant 14$.

例 10.1.14. 已知 $a_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$, $n\geqslant 2$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$, 证明: $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{2-a_i}\geqslant\dfrac{n}{2n-1}$.

证 原不等式等价为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{2-a_i}\geqslant\frac{2n^2}{2n-1}$$

为此, 构造 $n\times2$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2}{2-a_1} & 2-a_1 \\ \dfrac{2}{2-a_2} & 2-a_2 \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{2}{2-a_n} & 2-a_n \end{pmatrix}$$

由 *Carlson* 不等式得,

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{2-a_i}\right)\sum_{i=1}^{n}(2-a_i)\right]^{\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt{2}n \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{2-a_i}\right)(2n-1)\geqslant 2n^2$$

整理得证 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{2-a_i}\geqslant\dfrac{n}{2n-1}$.

例 10.1.15. (第 36 届 IMO) 设 $a,b,c>0$, 且 $abc=1$, 证明: $\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(c+a)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\dfrac{3}{2}$.

证 原不等式等价为

$$\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{a^2c^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}$$

构造 3×2 矩阵

$$\begin{pmatrix}\dfrac{b^2c^2}{a(b+c)} & a(b+c)\\ \dfrac{a^2c^2}{b(a+c)} & b(a+c)\\ \dfrac{a^2b^2}{c(a+b)} & c(a+b)\end{pmatrix}$$

由 *Carlson* 不等式得,

$$\left\{\left[\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{a^2c^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}\right]\cdot2(ab+bc+ca)\right\}^{\frac{1}{2}}\geqslant ab+bc+ca$$

$$\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{a^2c^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}\geqslant\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\frac{3}{2}.$$

10.2　伴随矩阵、逆矩阵与矩阵方程

10.2.1　伴随矩阵

定义 10.2.1 (伴随矩阵的定义). 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶方阵 $(n\geqslant2)$, A 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ (或 $\mathrm{adj}\boldsymbol{A}$) 定义为

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix},$$

其中 A_{ij} 为 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的代数余子式.

伴随矩阵具有如下性质:

(1) $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\lvert\boldsymbol{A}\rvert\boldsymbol{E}$	(2) $(\lambda\boldsymbol{A})^*=\lambda^{n-1}\boldsymbol{A}^*$
(3) $\lvert\boldsymbol{A}^*\rvert=\lvert\boldsymbol{A}\rvert^{n-1}$	(4) $(\boldsymbol{A}^*)^\top=\left(\boldsymbol{A}^\top\right)^*$
(5) $(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$	(6) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, $\boldsymbol{A}^*=\lvert\boldsymbol{A}\rvert\boldsymbol{A}^{-1}$
(7) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\dfrac{1}{\lvert\boldsymbol{A}\rvert}\boldsymbol{A}$	(8) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^*$
(9) $(\boldsymbol{A}^*)^*=\begin{cases}\lvert\boldsymbol{A}\rvert^{n-2}\boldsymbol{A}, & n>2\\ \boldsymbol{A}, & n=2\end{cases}$	(10) $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}^*=\begin{cases}n, & \mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}=n\\ 1, & \mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}=n-1\\ 0, & \mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}<n-1\end{cases}$

例 10.2.1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$, 求 $\left|2\boldsymbol{B}^\top\right|$.

注意到 $\det \boldsymbol{A}=3$, 且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$, 对 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$, 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$, 得

$$3\boldsymbol{AB}=6\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\Rightarrow 3(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\Rightarrow |3(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}|=3\Rightarrow |\boldsymbol{B}|=\frac{1}{9|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|}$$

其中 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=1$, 于是 $\boldsymbol{B}=\frac{1}{9}\Rightarrow|2\boldsymbol{B}^\top|=\frac{8}{9}$.

例 10.2.2. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0&1&3\\0&0&0&-1&2\\1&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}$ 的所有代数余子式之和.

记矩阵分块矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}_{2\times3}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{O}_{3\times2}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3\\-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 $\det\boldsymbol{B}=5$, $\det\boldsymbol{C}=1$, 那么

$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=(-1)^{2\times3}|\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{C}|\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}_{3\times2}&\boldsymbol{C}^{-1}\\\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{O}_{2\times3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&5&-5&0\\0&0&0&5&-5\\0&0&0&0&5\\2&-3&0&0&0\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有代数余子式之和为 $5-5+5-5+5+2-3+1+1=6$.

例 10.2.3. 设实矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式, $|a_{ij}|$ 与 $|A_{ij}|$ 分别表示两个表达式的绝对值, 则下列结论不正确的是

A. 若 $\det\boldsymbol{A}=1$ 且对任意 i,j 均有 $a_{ij}=A_{ij}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵

B. 若 $\det\boldsymbol{A}=1$ 且对任意 i,j 均有 $a_{ij}=-A_{ij}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵

C. 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵且 $\det\boldsymbol{A}=1$, 则对任意 i,j, 有 $|a_{ij}|=|A_{ij}|$

D. 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵且 $\det\boldsymbol{A}=-1$, 则对任意 i,j, 有 $|a_{ij}|=|A_{ij}|$

由 $a_{ij}=A_{ij}$, 可知, 对于 A 选项

$$\boldsymbol{AA}^\top=\boldsymbol{AA}^*=\det\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{A}\text{ 是正交矩阵}$$

因此 A 正确; 那么 B 选项错误, 因为

$$a_{ij}=-A_{ij}\Rightarrow\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}^\top\not\Rightarrow\boldsymbol{AA}^\top=\boldsymbol{E}$$

对于 C、D 选项, 有

$$\boldsymbol{AA}^\top=\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}=\pm\boldsymbol{E}=\pm\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{A}^*=\pm\boldsymbol{A}^\top\Rightarrow|a_{ij}|=|A_{ij}|$$

因此 C,D 正确, 故选 B.

10.2.2 可逆矩阵

可逆矩阵具有如下性质:

(1) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq0$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^{\top}$ 亦可逆, 且 $\left(\boldsymbol{A}^{\top}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\top}$;

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 亦可逆, 且 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}$;

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 数 $\lambda \neq 0$, 则 $\lambda \boldsymbol{A}$ 亦可逆, 且 $(\lambda \boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{\lambda} \boldsymbol{A}^{-1}$;

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$;

(6) 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, 且均可逆, 则 $\boldsymbol{A B}$ 亦可逆, 且 $(\boldsymbol{A B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}^{-1}$.

定理 10.2.1 (矩阵逆的和). 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵, 则 $\left|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\right|=\dfrac{|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|}{|\boldsymbol{A}| \cdot|\boldsymbol{B}|}$.

证 $\left|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\right|=\left|\boldsymbol{E} \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{E}\right|=\left|\boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{B} \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left|\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}) \boldsymbol{A}^{-1}\right|=\dfrac{|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|}{|\boldsymbol{A}| \cdot|\boldsymbol{B}|}$.

定理 10.2.2 (分块矩阵的逆 A). 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,m)$ 均为可逆矩阵, 则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m^{-1}\end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1 \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_m & & & \end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,m)$ 均为可逆矩阵, 则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_m^{-1} \\ & & \iddots & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \end{pmatrix}.$$

定理 10.2.3 (分块矩阵的逆 B). 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times m$ 可逆矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{C}$ 是 $n \times m$ 矩阵, $\boldsymbol{D}$ 是 $n \times n$ 可逆矩阵, 则有以下分块矩阵的求逆公式:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{B} \boldsymbol{W} \boldsymbol{C} \boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{B} \boldsymbol{W} \\ -\boldsymbol{W} \boldsymbol{C} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{W}\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{W}=\left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C} \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{B}\right)^{-1}$.

证 为方便叙述, 记 $\boldsymbol{W}=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}$ 设 $\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_{11}&\boldsymbol{U}_{12}\\\boldsymbol{U}_{21}&\boldsymbol{U}_{22}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{U}$ 的分块与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 分块后满足乘法原则, 则根据可逆矩阵的定义 $\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{E}$, 下面直接计算 $\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}$ 的分块矩阵的乘积即可,

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_{11}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}_{12}\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_{11}&\boldsymbol{U}_{12}\\\boldsymbol{U}_{21}&\boldsymbol{U}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_{11}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_{21}&\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_{12}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_{22}\\\boldsymbol{C}\boldsymbol{U}_{11}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}_{21}&\boldsymbol{C}\boldsymbol{U}_{12}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}_{22}\end{pmatrix}$$

所以, 各个矩阵小块分别对应相等得:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_{11}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_{21}=\boldsymbol{E}_{11} \tag{1}$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_{12}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_{22}=\boldsymbol{O} \tag{2}$$
$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{U}_{11}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}_{21}=\boldsymbol{O} \tag{3}$$
$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{U}_{12}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}_{22}=\boldsymbol{E}_{22} \tag{4}$$

由 *(1)* 可得: $\boldsymbol{U}_{11}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_{21})$, 代入 *(3)* 中, 有

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_{21})+\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}_{21}=\boldsymbol{O}$$

化简后得: $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}+(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{U}_{21}=\boldsymbol{O}$, 即

$$\boldsymbol{U}_{21}=-(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}=-\boldsymbol{W}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}$$

由 *(4)* 可得: $\boldsymbol{U}_{12}=\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{E}_{22}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}_{22})$, 代入 *(2)* 中, 有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}^{-1}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}_{22})+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_{22}=\boldsymbol{O}$$

即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_{22}&=-(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}=-(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D})^{-1}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=-((\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}))^{-1}\\&=-(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D})^{-1}=-(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{D})^{-1}=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})=\boldsymbol{W}\end{aligned}$$

由 *(2)* 可得: $\boldsymbol{U}_{12}=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_{22}$ 将 $\boldsymbol{U}_{22}=\boldsymbol{W}$ 代入其中可得: $\boldsymbol{U}_{12}=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}$, 由 *(3)* 可得: $\boldsymbol{U}_{11}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_{21})$, 将 $\boldsymbol{U}_{21}=-\boldsymbol{W}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}$ 代入其中可得:

$$\boldsymbol{U}_{11}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}$$

综上所述, 即得证.

例 10.2.4. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&5\\1&2&7\\3&4&4\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

法一: 因为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$, 于是

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\begin{vmatrix}2&3&5\\1&2&7\\3&4&4\end{vmatrix}}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&7\\4&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&5\\4&4\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&5\\2&7\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&7\\4&4\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&5\\3&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&5\\1&7\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20&8&11\\17&-7&-9\\-2&1&1\end{pmatrix}.$$

法二: 将 $(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{E})$ 初等行变换为 $(\boldsymbol{E}\ \vdots\ \boldsymbol{B})$, 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$, 于是

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{E})&=\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&3&5&1&0&0\\1&2&7&0&1&0\\3&4&4&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_1]{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\r_2-2r_1}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&7&0&1&0\\0&-1&-9&1&-2&0\\0&-2&-17&0&-3&1\end{array}\right)\\&\xrightarrow[r_3+2r_2]{\substack{r_1+r_3\\r_2\times(-1)}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-10&0&-2&1\\0&1&9&-1&2&0\\0&0&1&-2&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-9r_3]{r_1+10r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-20&8&11\\0&1&0&17&-7&-9\\0&0&1&-2&1&1\end{array}\right)\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-20&8&11\\17&-7&-9\\-2&1&1\end{pmatrix}$.

法三: 设 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\-\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, 若将 $\boldsymbol{M}$ 的前 n 行施行初等行变换, 将 $\boldsymbol{M}$ 化为分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{X}\end{pmatrix}$, 那么 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}$, 则

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\-\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\left|\begin{array}{ccc:c}2&3&5&\\1&2&7&\boldsymbol{E}\\3&4&4&\\\hdashline&-\boldsymbol{E}&&\boldsymbol{O}\end{array}\right|\xrightarrow[r_3-3r_1]{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\r_2-2r_1}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&7&0&1&0\\0&-1&-9&1&-2&0\\0&-2&-17&0&-3&1\\\hdashline&-\boldsymbol{E}&&&\boldsymbol{O}&\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+2r_2]{\substack{r_1+r_3\\ r_2\times(-1)}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-10&0&-2&1\\0&1&9&-1&2&0\\0&0&1&-2&1&1\\ \hdashline &-E& & &O& \end{array}\right)\xrightarrow[r_2-9r_3]{r_1+10r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-20&8&11\\0&1&0&17&-7&-9\\0&0&1&-2&1&1\\ \hdashline &-E& & &O& \end{array}\right)$$

故得 $A^{-1}=\begin{pmatrix}-20&8&11\\17&-7&-9\\-2&1&1\end{pmatrix}$.

法四:(该方法仅对三阶矩阵有效) 第一步, 将矩阵前两列复制一份在原矩阵的右侧, 将矩阵前两行复制一份再矩阵的下侧, 再将子矩阵 $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ 复制到原矩阵的右下角, 即

$$\begin{pmatrix}2&3&5\\1&2&7\\3&4&4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&3&5&2&3\\1&2&7&1&2\\3&4&4&3&4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&3&5&2&3\\1&2&7&1&2\\3&4&4&3&4\\2&3&5&&\\1&2&7&&\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&3&5&2&3\\1&2&7&1&2\\3&4&4&3&4\\2&3&5&2&3\\1&2&7&1&2\end{pmatrix}:=B$$

第二步, 删去 B 矩阵的第一行、第一列, 得到 4×4 大小的 C 矩阵, 即 $C=\begin{pmatrix}2&7&1&2\\4&4&3&4\\3&5&2&3\\2&7&1&2\end{pmatrix}$; 第三步, 计算 C 的二阶子式, 得到矩阵 A 的伴随矩阵 A^*, 即

$$A^*=\begin{pmatrix}2\times4-7\times4&4\times5-4\times3&3\times7-5\times2\\7\times3-1\times4&4\times2-3\times5&5\times1-2\times7\\1\times4-2\times3&3\times3-4\times2&2\times2-3\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20&8&11\\17&-7&-9\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

最后一步, 选择 A^* 的第 i 行 (或列) 与 A 的第 i 列 (或行) 相乘, 即为 $|A|$, 此题 $|A|=1$, 故 $A^{-1}=\begin{pmatrix}-20&8&11\\17&-7&-9\\-2&1&1\end{pmatrix}$.

例 10.2.5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&4&6&0\\0&0&7&9\\0&0&0&10\end{pmatrix}$, $B=(2A+E)(A+2E)^{-1}$, 则 $|B-2E|$ 中所有元素的代数余子式之和为多少.

由 $B=(2A+E)(A+2E)^{-1}$, 可知

$$\begin{aligned}(B-2E)^{-1}&=\left((2A+E)(A+2E)^{-1}-2E\right)^{-1}=\left((2A+E)(A+2E)^{-1}-2(A+2E)(A+2E)^{-1}\right)^{-1}\\&=\left((-3E)(A+2E)^{-1}\right)^{-1}=\left(-3(A+2E)^{-1}\right)^{-1}=-\frac{1}{3}(A+2E)\\&=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&3&0&0\\0&6&6&0\\0&0&9&9\\0&0&0&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\0&-2&-2&0\\0&0&-3&-3\\0&0&0&-4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

因为所有代数余子式之和等于这个伴随矩阵所有元素之和, 故先求出它的伴随矩阵, 再计算伴随矩阵各个元素相加, $|B-2E|=\frac{1}{24}$, 于是 $(B-2E)^*=|B-2E|(B-2E)^{-1}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\0&-2&-2&0\\0&0&-3&-3\\0&0&0&-4\end{pmatrix}$, 因此 $|B-2E|$ 中所有元素的代数余子式之和为 $-\frac{2}{3}$.

例 10.2.6. 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$, 且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$, 其中 E 为 4 阶单位矩阵, 求矩阵 B.

因为 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E\Rightarrow B=(A-E)^{-1}\cdot 3A=3\left[A^{-1}(A-E)\right]^{-1}=3\left(A^{-1}A-A^{-1}\right)^{-1}=3\left(E-\frac{1}{|A|}A^*\right)^{-1}$, 且 $|A^*|=8$, 又 $|A^*|=|A|^{n-1}$, 故 $|A|=2$, 所以

$$B=3\left(\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{3}{2}&0&4\end{pmatrix}\right)^{-1}=3\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{3}{2}&0&-3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}$$

例 10.2.7. 设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, 求 $\left|\left(\frac{1}{4}A^2\right)^{-1}-A^*\right|$ 及 $\left[\left(\frac{1}{4}A^2\right)^{-1}-A^*\right]^*$.

$|A|=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}=2+1-1=2$, 又因为

$$(A\ \vdots\ E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_2]{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-1&1&-1&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\to 2\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-1&1&-1&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1+r_3}2\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

于是 $A^*=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&2&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$, 因为 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$, 所以 $2A^{-1}=A^*$,

$$\left(\frac{1}{4}A^2\right)^{-1}=4\left(A^2\right)^{-1}=4\frac{1}{|A||A|}\left(A^2\right)^*=\left(A^2\right)^*$$

所以

$$\left|\left(\frac{1}{4}A^2\right)^{-1}-A^*\right|=\left|\left(A^2\right)^*-A^*\right|=|A^*(A^*-E_3)|=|A^*||A^*-E_3|=-2$$

所以

$$\left[\left(\frac{1}{4}A^2\right)^{-1}-A^*\right]^*=[A^*(A^*-E_3)]^*=(A^*-E_3)^*(A^*)^*$$

$$=\begin{pmatrix}0&-2&1\\1&1&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&2&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}-3&-4&3\\3&0&-1\\-1&2&-1\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}2&2&4\\4&6&6\\6&10&12\end{pmatrix}$$

10.2.3 矩阵方程

例 10.2.8. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$, 其伴随矩阵记作 A^*, 求满足

$$A^*X\left(\frac{1}{2}A^*\right)^*=8A^{-1}X+4E$$

的矩阵 X.

$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$, 且 $\boldsymbol{AA}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = 4\boldsymbol{E}$, 于是给矩阵方程同时左乘 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{AA}^*\boldsymbol{X}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right)^* = 8\boldsymbol{AA}^{-1}\boldsymbol{X} + 4\boldsymbol{AE} \Rightarrow 4\boldsymbol{EX}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right)^* = 8\boldsymbol{EX} + 4\boldsymbol{AE} \Rightarrow \boldsymbol{X}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right)^* = 2\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}$$

并且 $\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right)^* = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}(\boldsymbol{A}^*)^* = \frac{1}{4}|\boldsymbol{A}^*|^* = \frac{1}{4}|\boldsymbol{A}|^{3-2}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$, 以及 $\det(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}) = -4 \neq 0$, 于是 $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}$ 可逆, 而 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 那么

$$\boldsymbol{X} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 10.2.9. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是数域 K 上的 n 阶已知方阵, $\det \boldsymbol{A} = \frac{1}{2}$, $\det \boldsymbol{B} = \frac{1}{3}$, 求解关于 $\boldsymbol{X}$ 的矩阵方程

$$\boldsymbol{X} + \left(\left(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{B}\right)^*\boldsymbol{A}^\top\right)^{-1} + \boldsymbol{BA}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{B}^\top\left(\boldsymbol{AB}^\top\right)^{-1}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}).$$

注意到 $(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{B})^* = |\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{B}|(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{B})^{-1} = |\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^\top)^{-1}$, 那么

$$\left(\left(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{B}\right)^*\boldsymbol{A}^\top\right)^{-1} = \left(\left|\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{B}\right|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{E}\right)^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{B}|}\boldsymbol{B} = 6\boldsymbol{B}$$

并且 $\left(\boldsymbol{B}^\top(\boldsymbol{AB}^\top)^{-1}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{B}^\top(\boldsymbol{B}^\top)^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}$, 于是

$$\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{B}^\top\left(\boldsymbol{AB}^\top\right)^{-1}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{XA}^{-1}(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{X} + 2\boldsymbol{XA}^{-1}\boldsymbol{B}$$

那么

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{2}(6\boldsymbol{B} + \boldsymbol{BA}^{-1}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1} = \frac{1}{2}(6\boldsymbol{B} + \boldsymbol{BA}^{-1}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}) = 3\boldsymbol{A} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}$$

例 10.2.10 (2016 浙江大学). 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & x & y \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a-2b & b-3 & -c \\ d-2e & e-3f & -f \\ h-2x & x-3y & -y \end{pmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使之满足

$$\boldsymbol{X} + \left(\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{B}^2\right)^{-1}\boldsymbol{A}^\top\right)^{-1} = \boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{A}^2\left(\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^\top\right)^{-1}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}).$$

先证 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 为此, 对行列式 $|\boldsymbol{B}|$ 依次将第 2 列减去第 3 列的 3 倍, 第 1 列加上第 2 列的 2 倍, 再按第 1 行拆项, 得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B}| &= \begin{vmatrix} a-2b & b-3 & -c \\ d-2e & e-3f & -f \\ h-2x & x-3y & -y \end{vmatrix} \overline{\overline{\substack{c_2-3c_3 \\ c_1+2c_2}}} \begin{vmatrix} a+6c-6 & b+3c-3 & -c \\ d & e & -f \\ h & x & -y \end{vmatrix} = -|\boldsymbol{A}| + 3(c-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ d & e & -f \\ h & x & -y \end{vmatrix} \\ &= 1 - 3(c-1)(2A_{11} - A_{12})\end{aligned}$$

其中 A_{11}, A_{12} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的前两个元素的代数余子式, 另一方面, 易知 $|\boldsymbol{A}^{-1}| = -1$, 所以 $|\boldsymbol{A}| = -1$, 于是, 有 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, 由此可知 $A_{11} = 1$, $A_{12} = 2$, 于是 $|\boldsymbol{B}| = 1$, 表明 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 因此

$$\left(\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{B}^2\right)^{-1}\boldsymbol{A}^\top\right)^{-1} = \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{A}^2\left(\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^\top\right)^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}$$

故原方程可化简为 $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{XA}^{-1}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \Rightarrow \boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}$, 所以

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{A}.$$

例 10.2.11. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$, 求解方程

$$X\left(E_n-B^{-1}A\right)^{\top}B^{\top}=E_n.$$

$$E_n=X\left(B\left(E_n-B^{-1}A\right)\right)^{\top}=X\left(BE_n-BB^{-1}A\right)^{\top}=X(B-A)^{\top}\Rightarrow X=\left((B-A)^{\top}\right)^{-1},$$

$$X=\left(\left(\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right)^{\top}\right)^{-1}=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\2&1&0&0\\ \hdashline 3&2&1&0\\4&3&2&1\end{array}\right)^{-1}$$

$$=\left(\begin{array}{c:c}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}^{-1}&O\\ \hdashline -\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}^{-1}&\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}^{-1}\end{array}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}.$$

例 10.2.12. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&5&4\\2&4&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&1&&&\\&1&1&&\\&&1&1&\\&&&1&1\\&&&&1\end{pmatrix}$, 求 X 使 $X\begin{pmatrix}O&B\\A&O\end{pmatrix}=C$.

易得 A, B 都可逆, 且 $\begin{pmatrix}O&B\\A&O\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}O&A^{-1}\\B^{-1}&O\end{pmatrix}$, 所以 $X=C\begin{pmatrix}O&A^{-1}\\B^{-1}&O\end{pmatrix}$, 且

$$C=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&&&\\&1&1&&\\&&1&1&\\ \hdashline &&&1&1\\&&&&1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\ \hdashline 0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}C_1&C_2\\O&C_3\end{pmatrix}$$

并且 $A^{-1}=\begin{pmatrix}9&-2&-2\\-2&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$, 那么

$$X=\begin{pmatrix}C_2B^{-1}&C_1A^{-1}\\C_3B^{-1}&O\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc:ccc}0&0&7&-1&-2\\0&0&-4&1&1\\1&-1&-2&0&1\\ \hdashline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{array}\right).$$

例 10.2.13. 设 4 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$, 求解矩阵方程 $AXA^{-1}=XA^{-1}+3E_4$, 并计算 X^*A.

同例题 10.2.6 的解法, 解得 $X=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}$, 由于

$$X^*A=X^*\frac{1}{|A|^{4-2}}(A^*)^*=\frac{1}{4}X^*(A^*)^*=\frac{1}{4}(A^*X)^*$$

$$
\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{A}=\frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}\right)^*=\frac{1}{4}\left(\begin{array}{cc:cc}6&0&0&0\\0&6&0&0\\ \hdashline 12&0&6&0\\0&6&0&-8\end{array}\right)^*
$$

$$
=\left(\begin{array}{c:c}\begin{vmatrix}6&0\\0&-8\end{vmatrix}\begin{pmatrix}6&0\\0&6\end{pmatrix}^* & \boldsymbol{O}\\ \hdashline -\begin{pmatrix}6&0\\0&-8\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix}12&0\\0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0\\0&6\end{pmatrix}^* & \begin{vmatrix}6&0\\0&6\end{vmatrix}\begin{pmatrix}6&0\\0&-8\end{pmatrix}^*\end{array}\right)=\begin{pmatrix}-72&0&0&0\\0&-72&0&0\\144&0&-72&0\\0&-54&0&54\end{pmatrix}.
$$

例 10.2.14. 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\1&3&0&0\\0&0&0&2\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$, 求解 $\left[\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^*\right]^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{-1}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+12\boldsymbol{E}_4$.

因为 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0&2\\-1&0\end{vmatrix}=2$, $\left[\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^*\right]^{-1}=\left[\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\right]^{-1}=8\cdot\frac{1}{2}\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{A}$, 因此原方程变成

$$
4\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{-1}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+12\boldsymbol{E}_4\Rightarrow 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+6\boldsymbol{E}_4\Rightarrow \boldsymbol{X}=6\boldsymbol{A}^{-1}\left(2\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}_4\right)^{-1}=6(2\boldsymbol{E}_4-\boldsymbol{A})^{-1}
$$

$$
\boldsymbol{X}=6\left(\begin{pmatrix}2&&&\\&2&&\\&&2&\\&&&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&0&0\\1&3&0&0\\0&0&0&2\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\right)^{-1}=6\left(\begin{array}{cc:cc}1&-2&0&0\\-1&-1&0&0\\ \hdashline 0&0&2&-2\\0&0&1&2\end{array}\right)^{-1}
$$

$$
=6\left(\begin{array}{c:c}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&-1\end{pmatrix}^{-1}&\boldsymbol{O}\\ \hdashline \boldsymbol{O}&\begin{pmatrix}2&-2\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\end{array}\right)=6\left(\begin{array}{c:c}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}&\boldsymbol{O}\\ \hdashline \boldsymbol{O}&\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&2\\-1&2\end{pmatrix}\end{array}\right)
$$

$$
=\left(\begin{array}{c:c}-2\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}&\boldsymbol{O}\\ \hdashline \boldsymbol{O}&\begin{pmatrix}2&2\\-1&2\end{pmatrix}\end{array}\right)=\begin{pmatrix}2&-4&0&0\\-2&-2&0&0\\0&0&2&2\\0&0&-1&2\end{pmatrix}.
$$

10.3 初等变换与初等矩阵

10.3.1 初等变换

定义 10.3.1 (矩阵的初等变换). 矩阵的初等行变换与初等列变换统称为*初等变换*. 下列三种关于矩阵的变换称为矩阵的*初等行 (列) 变换*:

(1) 互换矩阵中两行 (列) 的位置 $(r_i\leftrightarrow r_j, c_i\leftrightarrow c_j)$;

(2) 以一非零常数乘矩阵的某一行 (列) (kr_i, kc_j);

(3) 将矩阵的某一行 (列) 的 k 倍加到另一行 (列) 上去 (r_i+kr_j, c_i+kc_j).

例 10.3.1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

则必有

A. $\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$　　B. $\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$　　C. $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$　　D. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换得到的, 首先把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行加到第三行, 即 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$; 然后再把 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$ 的第一行与第二行互换, 即选 C.

例 10.3.2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得到 $\boldsymbol{B}$, 再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得到 $\boldsymbol{C}$, 求满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

将所述变换用相应的初等矩阵表示, 即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AE}_{12}$, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{BE}_{23}(1)$, 那么 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AE}_{12}\boldsymbol{E}_{23}(1)$, 则

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{E}_{23}(1)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

例 10.3.3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{P}^{2022}\boldsymbol{AQ}^{2023}$.

$\boldsymbol{P}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$ 相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 1、3 行互换, 故 $\boldsymbol{P}^{2022}\boldsymbol{A}$ 是把 $\boldsymbol{A}$ 的第 1、3 行互换 2022 次, 结果仍为 $\boldsymbol{A}$; 同理 $\boldsymbol{AQ}^{2023}$ 相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 2、3 列互换 2023 次, 那么结果为 $\begin{pmatrix}1&3&2\\4&6&5\\7&9&8\end{pmatrix}$.

例 10.3.4 (2006 数一). 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$, 再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$, 记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则有

A. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$　　B. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$　　C. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{AP}$　　D. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\top}$

将所述变换用相应的初等矩阵表示, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{12}(1)\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{BE}_{12}(-1)$, 于是

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}_{12}(1)\boldsymbol{AE}_{23}(1)=\boldsymbol{PAP}^{-1}$$

故选 B.

例 10.3.5 (2009 数二). 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{P}$ 均为 3 阶方阵, 且 $\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $\boldsymbol{Q}^{\top}\boldsymbol{AQ}$ 为

A. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

由题意, $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{21}(1)$, 那么

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} &= (\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{21}(1))^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{21}(1) = \boldsymbol{E}_{21}^\top(1)\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{21}(1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

故选 A.

例 10.3.6. (2021 数二) 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, 若存在下三角可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和上三角可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵, 求 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$.

对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换, 化为上三角矩阵 $\boldsymbol{B}$,

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{E}) &= \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{r_3+2r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) = (\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{P}) \end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 再对 $\boldsymbol{B}$ 作列变换 (或 $\boldsymbol{B}^\top$ 作行变换) 化为对角矩阵, 可求得 $\boldsymbol{Q}$ (或 $\boldsymbol{Q}^\top$)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} \\ \hdashline \boldsymbol{E} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[c_3+3c_1]{c_3+c_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

可得 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 或

$$(\boldsymbol{B}^\top \vdots \boldsymbol{E}) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_1]{r_3+3r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

得 $\boldsymbol{Q}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

10.3.2 初等矩阵

定义 10.3.2 (初等矩阵). 由于初等变换有 3 种, 相应可以得到 3 种初等矩阵:

(1) $\boldsymbol{E}_{ij} \Leftrightarrow$ 交换 $\boldsymbol{E}$ 的第 i, j 两行 (或列) 所得到的矩阵;

(2) $\boldsymbol{E}_i(k) \Leftrightarrow \boldsymbol{E}$ 的第 i 行 (或列) 乘以非零常数 k 所得到的矩阵;

(3) $\boldsymbol{E}_{ij}(k) \Leftrightarrow$ 把 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行或者把 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 列的 k 倍加到第 j 列所得到的矩阵.

定理 10.3.1 (初等矩阵的逆). (1) $\boldsymbol{E}_{ij}^{-1}=\boldsymbol{E}_{ij}$; (2) $\boldsymbol{E}_{i}^{-1}(k)=\boldsymbol{E}_{i}\left(\dfrac{1}{k}\right)$; (3) $\boldsymbol{E}_{ij}^{-1}(k)=\boldsymbol{E}_{ij}(-k)$.

定理 10.3.2 (初等变换与初等矩阵的联系). 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换, 相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵; 对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换, 相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

例 10.3.7. 试将矩阵 $\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}$ 写成若干个形如 $\begin{pmatrix}1&0\\x&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1&y\\0&1\end{pmatrix}$ 的矩阵的乘积.

显然, 所给矩阵非奇异, 故可经一系列初等变换化为单位矩阵, 具体地, 有

$$\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[c_2-c_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_2-c_1]{c_1-c_2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

用初等矩阵表示, 即

$$\boldsymbol{E}_{21}(-1)\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}\boldsymbol{E}_{12}(-1)\boldsymbol{E}_{21}(-1)\boldsymbol{E}_{12}(-1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

因此, 有

$$\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}_{21}^{-1}(-1)\boldsymbol{E}_{12}^{-1}(-1)\boldsymbol{E}_{21}^{-1}(-1)\boldsymbol{E}_{12}^{-1}(-1)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

例 10.3.8. 设 $a\neq 0$, 把矩阵 $\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}$ 表示成一些形如 $\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1&0\\y&1\end{pmatrix}$ 的矩阵的乘积.

考虑如何用消法变换将 $\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}$ 化为单位矩阵,

$$\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+\frac{1-a}{a}r_2]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&\dfrac{1-a}{a^2}\\a&a^{-1}\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+\frac{a-1}{a^2}r_2]{r_2-ar_1}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

将上述过程用初等矩阵表示, 得

$$\boldsymbol{E}_{12}\left(\frac{a-1}{a^2}\right)\boldsymbol{E}_{21}(-a)\boldsymbol{E}_{12}\left(\frac{1-a}{a^2}\right)\boldsymbol{E}_{21}(1)\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

因此, 有

$$\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}_{21}^{-1}(1)\boldsymbol{E}_{12}^{-1}\left(\frac{1-a}{a^2}\right)\boldsymbol{E}_{21}^{-1}(-a)\boldsymbol{E}_{12}^{-1}\left(\frac{a-1}{a^2}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\dfrac{a-1}{a}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\dfrac{1-a}{a^2}\\0&1\end{pmatrix}$$

例 10.3.9. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$ 经初等行变换变为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\-2&2&a\end{pmatrix}$

(1) 求 a 的值;

(2) 求满足 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$ 的所有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

(1) 易得 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2$, 并且 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\-2&2&a\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2\times\frac{1}{3}\\ r_3-r_2}]{\substack{r_2+2r_1\\ r_3+r_2}}\begin{pmatrix}-1&2&2\\0&1&2\\0&0&a\end{pmatrix}$, 则 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=2\Rightarrow a=0$.

(2) 记 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)$, $\boldsymbol{B}^{\top}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 求解 $\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}^{\top}$, 转化为求解三个方程组 $\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{\beta}_i$ $(i=1,2,3)$, 于是

$$\left(\boldsymbol{A}^{\top}\mid\boldsymbol{B}^{\top}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&-1&2&2\\1&-1&0&2&-1&2\\0&1&2&-2&2&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_2]{r_3-2r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&0\\0&1&-1&-2&1&-2\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

因此 $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{\beta}_i$ 的通解分别为

$$\boldsymbol{\eta}_1=k_1\boldsymbol{\xi}+\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k_1\\-2+k_1\\k_1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_2=k_2\boldsymbol{\xi}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k_2\\1+k_2\\k_2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_3=k_3\boldsymbol{\xi}+\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_3\\-2+k_3\\k_3\end{pmatrix}$$

故满足 $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}^\top$ 的解为 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)$, 当 $\det\boldsymbol{X}\neq 0$ 时, $\boldsymbol{X}$ 可逆, 即

$$\begin{vmatrix}1-k_1&1-k_2&-k_3\\-2+k_1&1+k_2&-2+k_3\\k_1&k_2&k_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\-2&1&-2\\k_1&k_2&k_3\end{vmatrix}=-2k_1+2k_2+3k_3\neq 0.$$

例 10.3.10. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&0&0&1\\-3&0&0&0\end{pmatrix}$$

求三阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 四阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$.

先对 $\boldsymbol{A}$ 作初等变换, 有

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow[\substack{r_3+3r_1\\c_2\leftrightarrow c_4}]{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

对应的初等矩阵为

$$\boldsymbol{E}_{31}(3)\boldsymbol{E}_{12}(-2)\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{24}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

于是 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{E}_{31}(3)\boldsymbol{E}_{12}(-2))^{-1}=\boldsymbol{E}_{12}(2)\boldsymbol{E}_{31}(-3)$, $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}_{24}^{-1}=\boldsymbol{E}_{24}$, 即

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

推论 10.3.1. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 分别是 $n\times m$ 和 $m\times n$ 矩阵 $(n\geqslant m)$, $\lambda\neq 0$, 求证:

$$|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=\lambda^{n-m}|\lambda\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|.$$

证 只需证 $n>m$ 的情形, 对分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\lambda\boldsymbol{E}_m\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{E}_m\end{pmatrix}$ 作初等行变换, 有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{B}&\boldsymbol{E}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\lambda\boldsymbol{E}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}&\lambda\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n&-\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{E}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{E}_m\end{pmatrix}$$

对上述二式两边同时取行列式, 可得

$$\lambda^m|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=\lambda^m\begin{vmatrix}\lambda\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{E}_m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{A}\\\lambda\boldsymbol{B}&\lambda\boldsymbol{E}_m\end{vmatrix}=\lambda^n\begin{vmatrix}\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\lambda\boldsymbol{E}_m\end{vmatrix}=\lambda^m|\lambda\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|$$

所以 $|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=\lambda^{n-m}|\lambda\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|$.

例 10.3.11. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1+a_1+x_1&a_1+x_1&\cdots&a_1+x_n\\a_2+x_1&1+a_2+x_2&\cdots&a_2+x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n+x_1&a_n+x_2&\cdots&1+a_n+x_n\end{vmatrix}$.

令 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^\top$, $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^\top$, $\boldsymbol{e}=(1,1,\cdots,1)^\top$, 那么由推论 10.3.1 可得

$$\begin{aligned}D_n&=\left|\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^\top+\boldsymbol{e}\boldsymbol{X}^\top\right|=\left|\boldsymbol{E}_n+(\boldsymbol{A},\boldsymbol{e})\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}^\top\\\boldsymbol{X}^\top\end{pmatrix}\right|=\left|\boldsymbol{E}_2+\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}^\top\\\boldsymbol{X}^\top\end{pmatrix}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{e})\right|=\left|\boldsymbol{E}_2+\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}^\top\boldsymbol{A}&\boldsymbol{e}^\top\boldsymbol{e}\\\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}&\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{e}\end{pmatrix}\right|\\&=\begin{vmatrix}1+\boldsymbol{e}^\top\boldsymbol{A}&\boldsymbol{e}^\top\boldsymbol{e}\\\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}&1+\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{e}\end{vmatrix}=\left(1+\boldsymbol{e}^\top\boldsymbol{A}\right)\left(1+\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{e}\right)-\left(\boldsymbol{e}^\top\boldsymbol{e}\right)\left(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\right)=\left(1+\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(1+\sum_{i=1}^n x_i\right)-n\sum_{i=1}^n a_ix_i\end{aligned}$$

例 10.3.12 (2008 上海交通大学). 设 $\prod_{i=1}^n a_i\neq 0$, 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&a_1+a_2&a_1+a_3&\cdots&a_1+a_n\\a_2+a_1&0&a_2+a_3&\cdots&a_2+a_n\\a_3+a_1&a_3+a_2&0&\cdots&a_3+a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_n+a_1&a_n+a_2&a_n+a_3&\cdots&0\end{vmatrix}.$$

取 $\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(-2a_1,-2a_2,\cdots,-2a_n)$, $\boldsymbol{A}^\top=\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\end{pmatrix}$, 那么

$$\begin{aligned}D&=\det\left(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right)=\det\boldsymbol{\Lambda}\cdot\det\left(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right)=(-2)^n\prod_{i=1}^n a_i\det\left(\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{A}\right)\\&=(-2)^n\prod_{i=1}^n a_i\begin{vmatrix}1-\dfrac{n}{2}&-\dfrac12\sum\limits_{j=1}^n\dfrac{1}{a_j}\\-\dfrac12\sum\limits_{i=1}^n a_i&1-\dfrac{n}{2}\end{vmatrix}=(-2)^n\prod_{i=1}^n a_i\left[(n-2)^2-\sum_{i,j=1}^n\frac{a_i}{a_j}\right].\end{aligned}$$

10.4 矩阵的秩

10.4.1 秩的相关不等式证明

定义 10.4.1 (满秩方阵). 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 若 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为满秩 (非退化) 方阵, 否则称为降秩 (退化) 方阵.

定理 10.4.1 (矩阵与向量组秩的联系). 设 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$, $\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维列向量, 则

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta})\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)+1.$$

例 10.4.1. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 分别是 $f\times m$, $f\times n$ 的矩阵, 证明: $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+n$.

证 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$, 那么

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1)\leqslant\cdots\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$$

又因为

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-1})+1\leqslant\cdots\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)+n$$

综上 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+n$ 成立.

定理 10.4.2. 对于 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$, 有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

证 不妨设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$, 则结论显然成立.

定理 10.4.3. 对于 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $m\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$.

证 提示: 用极大无关组可证明.

定理 10.4.4. 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, 则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$.

定理 10.4.5. 对于 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $n\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A},\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\}$.

证 先设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1s}\\\vdots&&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{ns}\end{pmatrix}$, 并且无论是 $b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n$ 还是 $b_{1s}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_{ns}\boldsymbol{\alpha}_n$, 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示, 于是

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{rank}(b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\cdots,b_{1s}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_{ns}\boldsymbol{\alpha}_n)\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$$

再设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\vdots\\\boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix}^{\top}$, 同理 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$, 则

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\text{ 且 }\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{B}.$$

定理 10.4.6. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵, 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\leqslant n$.

定理 10.4.7. 对于 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $s\times t$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 有 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\geqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$.

例 10.4.2. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 证明:

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E})\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})$$

这里 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵.

证 因为 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})$, 于是

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E})\leqslant\operatorname{rank}((\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}).$$

例 10.4.3. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 证明:

(1) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\geqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}-\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵, 则结论 (1) 中的等号成立当且仅当 $\boldsymbol{BA}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}$.

证

(1) 由 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}$, 且 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$, 移项得 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\geqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}-\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$;

(2) 利用分块矩阵的初等行变换, 得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}-\boldsymbol{BA}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}-\boldsymbol{BA}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$$

因为初等行变化不会改变矩阵的秩, 所以

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}-\boldsymbol{BA}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$$

即

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{BA}^{-1}\boldsymbol{B})$$

故 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}-\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$ 当且仅当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{BA}^{-1}\boldsymbol{B})=0$, 即 $\boldsymbol{BA}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}$.

例 10.4.4. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是数域 P 上的 n 阶方阵, 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 证明:

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}-\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}).$$

证 利用分块矩阵的初等行变换, 有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 于是

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB}\end{pmatrix}$$

于是, 有

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix} \geqslant \operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB}\end{pmatrix} \geqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})$$

即得证不等式.

10.4.2 秩的相关等式证明

定理 10.4.8. 对于 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $s\times t$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 有 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$.

定理 10.4.9 (秩的第一降阶定理). 若 $\boldsymbol{A}$ 是 r 阶可逆矩阵, 分块矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$, 那么

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{M}=r+\operatorname{rank}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}).$$

例 10.4.5. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{D}$ 分别为 m 阶与 n 阶可逆矩阵, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 分别为 $m\times n$ 与 $n\times m$ 矩阵, 证明:

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}-\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BD}^{-1}\boldsymbol{C}\right)=\operatorname{rank}\boldsymbol{D}-\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}\right).$$

证 利用分块矩阵的初等行变换, 得

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}\\ &\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BD}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BD}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

因为初等行变化不会改变矩阵的秩, 于是

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}\right)&=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}\\ \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BD}^{-1}\boldsymbol{C}\right)+\operatorname{rank}\boldsymbol{D}&=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BD}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

得证 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}-\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BD}^{-1}\boldsymbol{C}\right)=\operatorname{rank}\boldsymbol{D}-\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}\right)$.

推论 10.4.1. 特别地, 令 $\boldsymbol{A}=\lambda_0\boldsymbol{E}_m$, $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}_n$, 其中 λ_0 为任意非零常数, 则有

$$m-\operatorname{rank}\left(\lambda_0\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{BC}\right)=n-\operatorname{rank}\left(\lambda_0\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{CB}\right).$$

例 10.4.6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵, 且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$, 证明: 对任一 $s\times t$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$, 有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{ABC})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{BC})$.

证 利用分块矩阵的初等行变换, 得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{ABC} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{ABC} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB} \\ -\boldsymbol{BC} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{BC} \end{pmatrix}$$

因为初等行变化不会改变矩阵的秩, 所以

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{ABC} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{ABC}) + \operatorname{rank}\boldsymbol{B} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{BC} \end{pmatrix} \geqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{BC})$$

又 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank}\boldsymbol{B}$, 所以 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{ABC}) \geqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{BC})$, 又 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{ABC}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{BC})$, 故

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{ABC}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{BC}).$$

10.4.3 秩的应用

例 10.4.7. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 分别是实数域上的 3×4 和 4×3 矩阵, 且满足

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -20 & 5 & 4 \\ -35 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} -14 & 2x-5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & 3x-3 & 3 & 6 \\ -32 & 6x-7 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

求 x 的值.

由推论 *10.4.1*, 令 $\lambda_0 = 1$, 于是 $3 - \operatorname{rank}(\boldsymbol{E}_3 - \boldsymbol{AB}) = 4 - \operatorname{rank}(\boldsymbol{E}_4 - \boldsymbol{BA})$, 那么

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}_4 - \boldsymbol{BA}) = 4 - 3 + \operatorname{rank}(\boldsymbol{E}_3 - \boldsymbol{AB})$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 15 & 5-2x & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 3-3x & -2 & -6 \\ 32 & 7-6x & -4 & -13 \end{pmatrix} = 1 + \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 10 & -2 & -2 \\ 20 & -4 & -4 \\ 35 & -7 & -7 \end{pmatrix} = 2$$

解得 $x = -2$.

例 10.4.8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶矩阵, 向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 是齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系, 向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 是齐次方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系, 求 $(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解

A. $c_1\boldsymbol{\alpha} + c_2\boldsymbol{\beta}$ 其中 c_1, c_2 为任意常数

B. $c_1\boldsymbol{\alpha} + c_2\boldsymbol{\gamma}$ 其中 c_1, c_2 为任意常数

C. $c_1\boldsymbol{\beta} + c_2\boldsymbol{\gamma}$ 其中 c_1, c_2 为任意常数

D. $c_1\boldsymbol{\alpha} + c_2\boldsymbol{\beta} + c_3\boldsymbol{\gamma}$ 其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数

因为向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 是齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系, 所以

$$s = n - \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) \Rightarrow 2 = 4 - \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) \Rightarrow \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) = 2$$

同理 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) = 3$, 又因为

$$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}\right) = \operatorname{rank}[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})] \leqslant \min\{\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}), \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\} \Rightarrow \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}\right) \leqslant 2$$

当 $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}\right) = 0$ 时, $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O} \Rightarrow (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O} \Rightarrow \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) \leqslant 4$, 而 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) = 3$, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) = 2$, 与之矛盾; 当 $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}\right) = 2$ 时, 说明有 *2* 个线性无关解, $(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 是方程组的三个解, 又因为 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 是齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系, 说明 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 是特征值 *1* 对应的特征向量, $\boldsymbol{\gamma}$ 是 *-1* 对应的特征向量, 因此 $\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 或 $\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关, 故方程组有 *3* 个线性无关解, 矛盾; 所以 $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}\right) = 1 \Rightarrow s' = n - \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}\right) = 4 - 1 = 3$, 因此选 *D*.

例 10.4.9. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 证明: 存在一 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{B}$ 及一个 n 阶等幂矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC}$.

证 设 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=r$, 则存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 使得,

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$$

令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$, 并且

$$\boldsymbol{C}^2=\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=C$$

故得证.

例 10.4.10. 一个矩阵称为行 (列) 满秩矩阵, 如果它的行 (列) 向量组是线性无关的,

(1) 证明: 如果一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r, 那么有 $m\times r$ 的列满秩矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $r\times n$ 的行满秩矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$, 我们称 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解表达式;

(2) 利用 (1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&1&1&10\\3&6&1&4&2&36\\2&4&0&2&2&27\\6&12&1&7&5&73\end{pmatrix}$ 的满秩分解表达式.

(1) 因为 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=r$, 所以存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}(\boldsymbol{E}_r,\boldsymbol{O})\boldsymbol{Q}$$

令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{E}_r,\boldsymbol{O})\boldsymbol{Q}$, 则 $\boldsymbol{B}$ 是 $m\times r$ 的列满秩矩阵, $\boldsymbol{C}$ 是 $r\times n$ 的行满秩矩阵, 且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$.

(2) 用初等行变换和初等列变换将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为等价标准形, 然后求逆即可, 具体地, 有

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-6r_1}]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&2&0&1&1&10\\0&0&1&1&-1&6\\0&0&0&0&0&7\\0&0&1&1&-1&13\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_4-r_3\\ r_3\times\frac{1}{7}}]{r_4-r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&1&1&10\\0&0&1&1&-1&6\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_5-c_1\\ c_6-10c_1}]{\substack{c_2-2c_1\\ c_4-c_1}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&-1&6\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{c_5+c_3\\ c_6-6c_3}]{c_4-c_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3\leftrightarrow c_6]{c_2\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_3&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{4\times 6}$$

用矩阵表示为

$$\boldsymbol{L}_4\boldsymbol{L}_3\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{E}_{23}\boldsymbol{E}_{36}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_3&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{4\times 6}$$

其中

$$\boldsymbol{L}_1=\begin{pmatrix}1&&&\\-3&1&&\\-2&&1&\\-6&&&1\end{pmatrix},\boldsymbol{L}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&-1&&1\end{pmatrix},\boldsymbol{L}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&-1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{L}_4=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\frac{1}{7}&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{pmatrix}1&-2&0&-1&-1&-10\\&1&&&&\\&&1&&&\\&&&1&&\\&&&&1&\\&&&&&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{R}_2=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&1&-1&1&-6\\&&&1&&\\&&&&1&\\&&&&&1\end{pmatrix}$$

于是, 有

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{L}_1^{-1}\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{L}_3^{-1}\boldsymbol{L}_4^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_3\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\right)\left((\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{O})\boldsymbol{E}_{36}\boldsymbol{E}_{23}\boldsymbol{R}_2^{-1}\boldsymbol{R}_1^{-1}\right)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$$

那么

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{L}_1^{-1}\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{L}_3^{-1}\boldsymbol{L}_4^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_3\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&0&7\\6&1&7\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\left(\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{O}\right)\boldsymbol{E}_{36}\boldsymbol{E}_{23}\boldsymbol{R}_2^{-1}\boldsymbol{R}_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&0&1&1&10\\0&0&1&1&-1&6\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

第 11 章

向量

“我们的知识只是一种影像, 而不是事物本身.”

——施密特

在线性代数中, 向量是一个基本的概念, 它可以用来表示空间中的方向和大小. 向量可以是几何向量 (有大小和方向) 或者抽象向量 (只有方向). 下面是一些关于向量的基本概念和性质:

1. 向量的表示: 向量通常用箭头表示或黑体小写字母, 例如 $\vec{v}$. 在二维空间中, 向量可以表示为 $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$, 其中 v_1 和 v_2 分别是向量在x轴和y轴上的分量. 在三维空间中, 向量可以表示为 $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$.

2. 向量的运算: 向量之间可以进行加法和数乘运算. 向量的加法是指将两个向量的对应分量相加, 数乘是指一个向量乘以一个标量, 即将向量的每个分量乘以该标量.

3. 向量的模长: 向量的模长是指向量的大小, 通常表示为 $||\vec{v}||$ 或 $|\vec{v}|$. 在二维空间中, 向量 $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ 的模长为 $||\vec{v}||=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$.

4. 向量的点积: 向量的点积（内积）是一种重要的向量运算, 定义为两个向量对应分量相乘后再相加的结果, 记为 $\vec{v}\cdot\vec{w}$. 如果 $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}$, 则 $\vec{v}\cdot\vec{w}=v_1w_1+v_2w_2$.

5. 向量的叉积: 向量的叉积（外积）是二维或三维向量特有的运算, 结果是一个新的向量. 在三维空间中, 如果 $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$, 则 $\vec{v}\times\vec{w}=\begin{pmatrix}v_2w_3-v_3w_2\\v_3w_1-v_1w_3\\v_1w_2-v_2w_1\end{pmatrix}$.

向量在几何、物理和工程等领域有着广泛的应用, 是线性代数中的重要概念. 通过对向量的运算和性质的理解, 我们可以更好地处理空间中的问题, 并解决各种复杂的计算和分析.

11.1 向量的运算

11.1.1 向量的定义

定义 11.1.1 (向量的定义). 由 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的有序数组称为 n 维向量, 简称向量.

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

称为 n 维行向量, a_i 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量.

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$$

称为 n 维列向量. 由定义可以看出, n 维行 (列) 向量就是 $1 \times n(n \times 1)$ 矩阵.

定义 11.1.2 (零向量与负向量). 分量全为 0 的向量称为零向量; 设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 称 $-\boldsymbol{\alpha} = (-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$ 为 α 的负向量.

11.1.2 向量的运算

定义 11.1.3 (向量的相等). 设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 如果 $a_i = b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 相等.

定义 11.1.4 (向量的加减). 设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 则

$$\boldsymbol{\alpha} \pm \boldsymbol{\beta} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \cdots, a_n \pm b_n).$$

定义 11.1.5 (向量的数乘). 设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, k 为常数, 则 $k\boldsymbol{\alpha} = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$.

设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 均为 n 维向量, λ, μ 为实数, 则

(1) $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$. (2) $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$.

(3) $\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}$. (4) $\boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$.

(5) $1\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$. (6) $\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}$.

(7) $\lambda(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \lambda\boldsymbol{\alpha} + \lambda\boldsymbol{\beta}$. (8) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha} + \mu\boldsymbol{\alpha}$.

11.2 向量间的线性关系

11.2.1 基本概念

定义 11.2.1 (线性表示). 对于向量 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, 如果存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使得

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

成立, 则称 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合, 或称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

定义 11.2.2 (线性相关与线性无关). 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 为一组向量, 如果存在一组不全为零的数 k_1, $k_2, \cdots, k_m$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

成立, 则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关; 当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 时等式成立, 则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

11.2.2 常用结论

设

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n})^\top, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n})^\top, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn})^\top,$$
$$\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^\top,$$

这里 $m \leqslant n$.

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示的充要条件是线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{\beta}$ 有解, 即下列线性方程组有解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = b_n. \end{cases}$$

(2) (a) 令 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta})$, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示的充要条件是以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 为列向量的矩阵和以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 为列向量的矩阵有相同的秩, 即 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$.

(b) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 唯一线性表示的充要条件是 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = m$.

(c) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示的充要条件是 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) < \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$.

(3) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充要条件是齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = 0 \end{cases}$$

有非零解, 且当 $m = n$ 时, 其线性相关的充要条件是

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

(4) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充要条件是齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

只有零解, 且当 $m = n$ 时, 其线性无关的充要条件是

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

(5) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充要条件是以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 为列向量的矩阵的秩小于向量个数 m.

(6) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充要条件是以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 为列向量的矩阵的秩等于向量个数 m.

(7) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geqslant 2)$ 线性相关的充要条件是向量组中至少有一个向量是其余向量的线性组合; 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geqslant 2)$ 线性无关的充要条件是向量组中任一个向量都不能由其余向量线性表示.

(8) 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 且表达式唯一.

(9) 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示, 并且 $m>t$, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关; 或者说, 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 并且可以由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示, 则 $m\leqslant t$.

(10) 在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中, 如果有一个部分组线性相关, 则整个向量组线性相关; 如果整个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 则其任一部分组也一定线性无关.

(11) 设 r 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ir})\,(i=1,2,\cdots,m)$ 线性无关, 则在每个向量上再添加 $n-r$ 个分量所得到的 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}'_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ir},a_{i,r+1},\cdots,a_{in})\,(i=1,2,\cdots,m)$ 也线性无关.

(12) $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

(13) 一个零向量线性相关; 一个非零向量线性无关; 两个非零向量线性相关的充要条件是对应分量成比例; 含有零向量的向量组必线性相关.

(14) 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1)$, 称 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 为 n 维单位向量组, 且

(a) $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关;

(b) 任意 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 都可由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表示, 即

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n.$$

(15) 初等行变换不改变矩阵的列向量组之间的线性关系; 初等列变换不改变矩阵的行向量组之间的线性关系.

例 11.2.1. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,2)^\top,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,1,3)^\top,\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^\top,\boldsymbol{\beta}=(3,10,b,4)^\top$,

(1) a,b 取何值时, $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,3)$ 线性表示;

(2) a,b 取何值时, $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,3)$ 线性表示, 并写出表达式.

易知 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,3)$ 线性表示当且仅当

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\neq\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$$

$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_i\ (i1,2,3)$ 线性表示当且仅当

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$$

那么

$$\begin{pmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-4r_1}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&0&b-2\\0&0&a-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&b-2\\0&0&a-1&0\end{pmatrix}$$

(1) 当 $b\neq 2$ 时, 即 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\neq\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$ 时, 从而 $\boldsymbol{\beta}$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,3)$ 线性表示.

(2) 当 $b=2$ 时, 即 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\neq\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$ 时, 从而 $\boldsymbol{\beta}$ 可由用 $\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,3)$ 线性表示, 表达式如下:

(a) 当 $a=1$ 时, 表达式为 $\boldsymbol{\beta}=(-2c-1)\boldsymbol{\alpha}_1+(c+2)\boldsymbol{\alpha}_2+c\boldsymbol{\alpha}_3$, 其中 c 为任意常数.

(b) 当 $a\neq 1$ 时, 表达式为 $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

11.3 向量组的极大线性无关组和秩

11.3.1 极大线性无关组

定义 11.3.1 (极大线性无关组). 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个部分组, 且满足

(1) $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i}$ 线性无关;

(2) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中任一向量均可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ 线性表示,

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{1}$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大线性无关组, 简称极大无关组.

11.3.2 向量组的秩

定义 11.3.2 (向量组的秩). 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组中所含向量的个数称为该向量组的秩, 记为 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, 如果一个向量组仅含存焉向量, 则规定它的秩为零.

向量组的秩的性质:

(1) 若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=r$, 则

 (a) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的任何含存多于 r 个向量的部分组一定线性相关;

 (b) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的任何含 r 个向量的线性无关部分组一定是极大无关组.

(2) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\leqslant m$, 且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=m\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

(3) 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示 $\Leftrightarrow\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$.

(4) 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 唯一线性表示 $\Leftrightarrow\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=m$.

(5) 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示 $\Leftrightarrow\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$.

(6) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 等价 $\Leftrightarrow\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$.

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵, 记 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 (m 维), $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组 (n 维), 则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$.

定理 11.3.1. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,\cdots,s)$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_j\ (j=1,2,\cdots,t)$ 表示, 则

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t).$$

证 由于 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_j$ 线性表示, 不妨设

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{k=1}^{t}x_{ik}\boldsymbol{\beta}_k$$

故

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&\cdots&x_{1t}\\x_{21}&x_{22}&\cdots&x_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_{s1}&x_{s2}&\cdots&x_{st}\end{pmatrix}$$

由于矩阵乘积的秩小于等于每一个, 则

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\leqslant\operatorname{rank}\min\left\{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t),\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&\cdots&x_{1t}\\x_{21}&x_{22}&\cdots&x_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_{s1}&x_{s2}&\cdots&x_{st}\end{pmatrix}\right\}$$

即 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$.

定义 11.3.3 (向量组的等价). 两个向量组能够相互线性表示, 则称这两个向量组等价.

向量组等价的结论:

(1) 任一向量组和它的极大无关组等价;

(2) 向量组的任意两个极大无关组等价;

(3) 两个等价的线性无关的向量组所含向量的个数相同;

(4) 两个向量组等价的充要条件是它们的极大无关组等价;

(5) 等价的两个向量组有相同的秩.

例 11.3.1. 设 n 维向量组 $(I):\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k\ (k<n)$ 线性无关, 则 n 维向量组 $(II):\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 也线性无关的充要条件为

A. $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性表示

B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 线性表示

C. 向量组 (I) 与向量组 (II) 等价

D. 矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k)$ 与矩阵 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k)$ 等价

对于 A 选项, 因为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性表示, 所以 $\operatorname{rank}(II)\leqslant\operatorname{rank}(I)$, 而向量组 (I) 线性无关, 所以 $\operatorname{rank}(I)=k$, 即 $\operatorname{rank}(II)\leqslant k$, 由于无法保证 $\operatorname{rank}(II)=k$, 故不能得出 (II) 线性无关;
对于 B 选项, 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 线性表示, 所以 $\operatorname{rank}(I)\leqslant\operatorname{rank}(II)$, 同样地,

$$k=\operatorname{rank}(I)\leqslant\operatorname{rank}(II)\leqslant k\Rightarrow\operatorname{rank}(II)=k$$

因此 (II) 线性无关, 充分条件成立, 但不是必要条件, 如 $(I):\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 与 $(II):\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 均线性无关, 但 (I) 不能由 (II) 线性表示;

对于 C 选项, 由 (I) 与 (II) 等价知 (I) 与 (II) 可相互线性表示, 则 $\operatorname{rank}(I)=\operatorname{rank}(II)=k$, 故 (II) 线性无关, 充分条件成立, 同 B 选项知必须条件不成立;

因为矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k)$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k)$ 等价, 则 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=k$, 又 $(I):\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k\ (k<n)$ 线性无关, 即 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=k$, 故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 线性无关, 故选 D.

例 11.3.2. 已知 n 维向量组

$$(I):\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\ (II):\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\boldsymbol{\beta}_t$$

且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=r$, 则

A. 当 $s=r$ 时, 向量组 (I) 与 (II) 等价

B. 当 $s=t=r$ 时, 向量组 (I) 与 (II) 等价

C. 当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=r$ 时, 向量组 (I) 与 (II) 等价

D. 当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=2r$ 时, 向量组 (I) 与 (II) 等价

记向量组 $(III):\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$, 取 I 和 II 的一个极大无关组 $(I_0):\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 与 $(II_0):\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$, 那么向量组 (I) 与 (I_0) 等价, 向量组 (II) 与 (II_0) 的等价, 如果 $\operatorname{rank}(III)=r$, 那么向量组 (I_0) 与 (II_0) 都是 (III) 的一个极大无关组, 这表明向量组 (I_0) 与 (II_0) 等价, 因此, 向量组 (I) 与 (II) 等价.
另外, 考虑向量组

$$(I):\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,0)^\top,\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0,0)^\top,\ (II):\boldsymbol{\beta}_1=(0,0,1,0)^\top,\ \boldsymbol{\beta}_2=(0,0,0,1)^\top$$

则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=2$, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=4$, 但选项 A、B、D 均不成立.

例 11.3.3 (2000 数二)**.** 已知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}b1\\1\\0\end{pmatrix}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$ 具有相同的秩, 且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 求 a,b 的值.

易知 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, 即 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示, 所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是它的一个极大无关组, 由于向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 具有相同的秩, 故 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关, 从而行列式

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=0\Rightarrow a=3b$$

又 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 而 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关, 于是

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&3&b\\2&0&1\\-3&1&0\end{vmatrix}=0\Rightarrow b=5\Rightarrow a=15.$$

例 11.3.4 (2016 南京航空航天大学)**.** 设由向量组

$$(I):\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-2\\a\\4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-2\\a\\a\end{pmatrix},\ (II):\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$$

(1) 求 a 的值, 使得向量组 (I) 线性相关;

(2) 求 a 的值, 使得向量组 (I) 不能由向量组 (II) 线性表示;

(3) 在题 (1) 和 (2) 同时成立的条件下, 将向量 $\boldsymbol{\gamma}=(1,-2,-5)^\top$ 用 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(1) 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 则行列式 $\det\boldsymbol{A}=0$ 等价于向量组 (I) 线性相关, 则

$$\begin{vmatrix}1&-2&-2\\1&a&a\\a&4&a\end{vmatrix}=a^2-2a-8=0\Rightarrow a=4\text{ 或 }-2.$$

(2) 令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 由于向量组 (I) 不能由 (II) 线性表示, 说明向量组 (II) 线性相关, 如若不然, 则任一 $\boldsymbol{\alpha}_i$, 可由向量组 (II) 线性表示, 矛盾, 因此, $\det\boldsymbol{B}=0$, 则

$$\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=(a-1)^2(a+2)=0\Rightarrow a=1\text{ 或 }a=-2$$

当 $a=1$ 时, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 显然不能由 $\boldsymbol{\beta}_j$ $(j=1,2,3)$ 线性表示, 符合题意; 当 $a=-2$ 时, 将 $(\boldsymbol{B}\,\vdots\,\boldsymbol{A})$ 化简为行阶梯形, 有

$$(\boldsymbol{B}\,\vdots\,\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}1&1&-2&\vdots&1&-2&-2\\1&-2&1&\vdots&1&-2&-2\\-2&1&1&\vdots&-2&4&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3\times(-\frac{1}{6})\\r_2\times(-\frac{1}{3})\\r_1-r_2}]{\substack{r_2-r_1\\r_3+2r_1\\r_3+r_2}}\begin{pmatrix}1&0&-1&\vdots&1&-2&-2\\0&1&-1&\vdots&0&0&0\\0&0&0&\vdots&0&0&1\end{pmatrix}$$

由此可见, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_i$ $(i=1,2,3)$ 线性表示, 所以 $a=-2$ 也符合题意.

(3) 若 (1) 和 (2) 同时成立, 则 $a=-2$, 此时, 把 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\gamma})$ 化为行最简形, 有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,\vdots\,\boldsymbol{\gamma})=\begin{pmatrix}1&1&-2&\vdots&1\\1&-2&-2&\vdots&-2\\-2&1&-2&\vdots&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&2\\0&1&0&\vdots&1\\0&0&1&\vdots&1\end{pmatrix}$$

因为初等行变换不改变列向量之间的线性关系, 所以 $\boldsymbol{\gamma}=2\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

11.4 向量的内积与向量空间

11.4.1 向量的内积

定义 11.4.1 (向量的内积). 给定 $\mathbb{R}^n$ 中的向量

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^\top,\quad \boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^\top$$

则称 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积, 记为 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, 即 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\beta}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$.

内积具有下列性质:

(1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$;

(2) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$;

(3) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$;

(4) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 时, 等号成立.

定义 11.4.2 (向量的范数). 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的任意向量, 将非负实数 $\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$ 定义为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度, 记为 $\|\boldsymbol{a}\|$, 即若 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^\top$, 则有

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$$

向量的长度也称为向量的范数或模.

向量范数具有下列性质:

(1) $\|\boldsymbol{\alpha}\| \geqslant 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时, 等号成立;

(2) 对于任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和任意实数 k, 都有 $\|k\boldsymbol{\alpha}\|=|k|\|\boldsymbol{\alpha}\|$;

(3) 对于任意 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$, 有 $|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|=\left|\boldsymbol{\alpha}^{\top}\boldsymbol{\beta}\right| \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\|\cdot\|\boldsymbol{\beta}\|$.

定义 11.4.3 (向量的正交). 如果向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积等于零, 即 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 相互正交. 如果非零向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的向量两两正交, 即 $(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=0(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,s)$, 则称该向量组为正交向量组.

正交向量具有下列性质:

(1) 零向量与任何向量正交;

(2) 与自己正交的向量只有零向量;

(3) 正交向量组是线性无关的;

(4) 对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$, 有三角不等式

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$$

当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 相互正交时, 有 $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+\|\boldsymbol{\beta}\|^2$.

11.4.2 向量空间

定义 11.4.4 (向量空间). 设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 维向量组成的集合, 如果 V 关于向量的加法和数乘是封闭的, 即

若 $\boldsymbol{\alpha}\in V,\boldsymbol{\beta}\in V$, 则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$; 若 $\boldsymbol{\alpha}\in V,k\in\mathbb{R}$, 则 $k\boldsymbol{\alpha}\in V$, 则称 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间.

显然, 实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 维向量的全体构成一个向量空间, 记为 $\mathbb{R}^n$.

定义 11.4.5 (基与坐标). 在向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中, n 个线性无关的向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基. 若 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$ 为任一向量, 且

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\xi}_1+a_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\xi}_n$$

则称 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于基 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 的坐标, 记作 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\top}$.

定义 11.4.6 (基变换与坐标变换). 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 和 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的两组基, 且有

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)\boldsymbol{A}$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为由基 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 的过渡矩阵, 两个基之间的过渡矩阵是可逆矩阵.
设 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$ 在基 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 和基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 下的坐标分别为

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^\top,\quad (y_1,y_2,\cdots,y_n)^\top$$

则有

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\quad\text{或}\quad\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

称为坐标变换公式.

例 11.4.1. 在线性空间 $\boldsymbol{P}^{2\times2}$ 中定义线性变换 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$，$\boldsymbol{A}_3$ 为

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\boldsymbol{X}，\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}，\boldsymbol{A}_3(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\ (\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{P}^{2\times2})$$

求 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$，$\boldsymbol{A}_3$ 在基 $\boldsymbol{E}_{11}$，$\boldsymbol{E}_{12}$，$\boldsymbol{E}_{21}$，$\boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵.

因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{E}_{11})&=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\c&0\end{pmatrix}=a\boldsymbol{E}_{11}+c\boldsymbol{E}_{21}\\\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{E}_{12})&=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a\\0&c\end{pmatrix}=a\boldsymbol{E}_{12}+c\boldsymbol{E}_{22}\\\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{E}_{21})&=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&0\\d&0\end{pmatrix}=b\boldsymbol{E}_{11}+d\boldsymbol{E}_{21}\\\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{E}_{22})&=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&b\\0&d\end{pmatrix}=b\boldsymbol{E}_{12}+d\boldsymbol{E}_{22}\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{A}_1$ 在基 $\boldsymbol{E}_{11}$，$\boldsymbol{E}_{12}$，$\boldsymbol{E}_{21}$，$\boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}a&0&b&0\\0&a&0&b\\c&0&d&0\\0&c&0&d\end{pmatrix}$，同理可得 $\boldsymbol{A}_2$，$\boldsymbol{A}_3$ 在基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}a&c&0&0\\b&d&0&0\\0&0&a&c\\0&0&b&d\end{pmatrix}$ 以及 $\begin{pmatrix}a^2&ac&ab&bc\\ab&ad&b^2&bd\\ac&c^2&ad&cd\\bc&cd&bd&d^2\end{pmatrix}$.

定义 11.4.7 ($\mathbb{R}^n$ 的标准正交基). 向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中 n 个向量 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 满足

(1) 两两正交, 即 $\boldsymbol{\eta}_i^\top\boldsymbol{\eta}_j=0,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$;

(2) 都是单位向量, 即 $\|\boldsymbol{\eta}_i\|=1,i=1,2,\cdots,n$,

则称 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

定理 11.4.1 (Schmidt 正交化). 标准正交基的求法.

(1) 给定一线性无关向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$, 由其生成等价的 s 个向量的正交向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的公式如下:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1,\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,\\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2,\\
&\vdots\\
\boldsymbol{\beta}_s &= \boldsymbol{\alpha}_s - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_{s-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{s-1},\boldsymbol{\beta}_{s-1})}\boldsymbol{\beta}_{s-1}.
\end{aligned}
$$

(2) 给定 $\mathbb{R}^n$ 的任意一组基, 把它变为标准正交基的步骤如下:

(a) 利用 Schmidt 正交化方法, 由这组基生成有 n 个向量的正交向量组;

(b) 把正交向量组中每个向量标准化, 即单位化.

这样就得到 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基. 这一过程称为标准正交化.

例 11.4.2 (2021 数一). 已知 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, 记 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - k\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - l_1\boldsymbol{\beta}_1 - l_2\boldsymbol{\beta}_2$, 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 两两正交, 则 l_1, l_2 依次为

A. $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$ B. $-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$ C. $\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$ D. $-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$

法一: 因为 $\boldsymbol{\beta}_1$ 与 $\boldsymbol{\beta}_2$ 相互正交, 即

$$(1,0,1)\cdot(1-k,2,1-k) = 0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\beta}_1$$

同理 $\boldsymbol{\beta}_1$ 与 $\boldsymbol{\beta}_3$ 相互正交, $\boldsymbol{\beta}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_3$ 相互正交, 则

$$\begin{cases}(1,0,1)\cdot(3-l_1,1-2l_2,2-l_1)=0\\(0,2,0)\cdot(3-l_1,1-2l_2,2-l_1)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}l_1 = \frac{5}{2}\\ l_2 = \frac{1}{2}\end{cases}$$

法二: $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1$, 因此 $l_1 = \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]} = \frac{5}{2}$, $l_2 = \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]} = \frac{1}{2}$, 故选 A.

定理 11.4.2 (两组标准正交基之间的过渡矩阵). 设 $\mathbb{R}^n$ 的两组标准正交基 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 到 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{Q}$, 则存在下列关系

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n) = (\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{Q}$$

且 $\boldsymbol{Q}$ 满足 $\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}$, 即 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵.

例 11.4.3 (2009 数一). 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三维空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$, $\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为

A. $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$

由 $\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&&\\&\frac{1}{2}&\\&&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\Rightarrow(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right)\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$，因此

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right)\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\\&=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

因此选 A.

例 11.4.4. 设线性空间 $\boldsymbol{P}^3$ 的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 定义如下:

$$\boldsymbol{A}(a_1,a_2,a_3)=(2a_1-a_2,a_2-a_3,a_2+a_3)$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\eta}_2=(0,1,1)$，$\boldsymbol{\eta}_3=(0,0,1)$ 下的矩阵 $\boldsymbol{B}$;

(3) 求由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_{1,2,3}$ 到 $\boldsymbol{\eta}_{1,2,3}$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{X}$，并验证 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

(1) 因为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1=(2,0,0)=2\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2=(-1,1,1)=-\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,-1,1)=-\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

(2) 因为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1=(1,1,1)=\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_3,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2=(-1,0,2)=-\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_3=(0,-1,1)=-\boldsymbol{\eta}_2+2\boldsymbol{\eta}_3$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

(3) 因为 $\boldsymbol{\eta}_j=\sum_{i=1}^{3}k_{ij}\boldsymbol{\varepsilon}_i\ j=1,2,3$，于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_1&=k_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2+k_{31}\boldsymbol{\varepsilon}_3\Rightarrow(k_{11},k_{21},k_{31})=(1,1,0)\\\boldsymbol{\eta}_2&=k_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2+k_{32}\boldsymbol{\varepsilon}_3\Rightarrow(k_{12},k_{22},k_{32})=(0,1,1)\\\boldsymbol{\eta}_3&=k_{13}\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_{23}\boldsymbol{\varepsilon}_2+k_{33}\boldsymbol{\varepsilon}_3\Rightarrow(k_{13},k_{23},k_{33})=(0,0,1)\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，且 $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.

例 11.4.5. 在 $\boldsymbol{P}^4$ 中，求由 $\boldsymbol{\varepsilon}_{1,2,3,4}$ 到 $\boldsymbol{\eta}_{1,2,3,4}$ 的过渡矩阵，并求向量 $\boldsymbol{\xi}=(2,1,2,1)$ 对于基 $\boldsymbol{\eta}_{1,2,3,4}$ 的坐标，其中

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0,0),\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,0),\ \boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1,0),\ \boldsymbol{\varepsilon}_4=(0,0,0,1)$$

$$\boldsymbol{\eta}_1=(2,1,0,1),\ \boldsymbol{\eta}_2=(0,1,2,2),\ \boldsymbol{\eta}_3=(-2,1,2,1),\ \boldsymbol{\eta}_4=(1,3,1,2).$$

因为 $\boldsymbol{\eta}_j=\sum_{i=1}^{4}k_{ij}\varepsilon_i$，故由 $\varepsilon_{1,2,3,4}$ 到 $\boldsymbol{\eta}_{1,2,3,4}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&2&1\\1&2&1&2\end{pmatrix}$，因为 $\boldsymbol{\xi}$ 对于基 ε_1，ε_2，ε_3，ε_4 的坐标为 $(2,1,2,1)$，所以 ξ 对于基 η_1，η_2，η_3，η_4 的坐标为

$$\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&1&\frac{9}{2}&-5\\-1&-1&-2&3\\\frac{3}{2}&1&\frac{7}{2}&-4\\-1&0&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-4\\7\\-4\end{pmatrix}$$

即 $\boldsymbol{\xi}$ 对于基 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$，$\boldsymbol{\eta}_4$ 的坐标为 $(10,-4,7,-4)$.

例 11.4.6 (2003 南京航空航天大学). 已知 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换 σ 对于基

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(-1,0,2)^\top,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,1)^\top,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3=(3,-1,-6)^\top$$

的像为 $\sigma(\varepsilon_1)=(-1,0,1)^\top$, $\sigma(\varepsilon_2)=(0,-1,2)^\top$, $\sigma(\varepsilon_2)=(-1,-1,3)^\top$，

(1) 求 σ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵;

(2) 设 $\boldsymbol{x}=(1,1,1)^\top$，求 $\sigma(\boldsymbol{x})$;

(3) 已知 $\sigma(\boldsymbol{x})$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的坐标向量为 $(2,-4,-2)^\top$，求 $\boldsymbol{x}$;

(4) 证明: $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的基，并求 σ 在该基下的矩阵.

(1) 考虑 $\mathbb{R}^3$ 的自由基 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^\top$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)^\top$, $\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)^\top$，由基 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 到 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的过渡矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&1&-1\\2&1&-6\end{pmatrix}$$

即 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{P}$，且向量组 $\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 在基 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 下的矩阵表示为

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1&-1\\1&2&3\end{pmatrix}$$

即 $\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{A}$，于是，有

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{A}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}$$

因此，σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&1&-1\\2&1&-6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1&-1\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-3&3\\2&0&1\\2&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1&-1\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&9&7\\-1&2&1\\-1&3&2\end{pmatrix}.$$

(2) $\sigma(\boldsymbol{x})=\sigma(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{x}=\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}=(-7,-5,17)^\top$.

(3) 记 $\boldsymbol{y}=(2,-4,-2)^\top$，则 $\sigma(\boldsymbol{x})=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\boldsymbol{y}$，因为

$$\sigma(\boldsymbol{x})=\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$$

所以 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}22&-1&10\\1&2&0\\5&1&2\end{pmatrix}$，解非齐次线性方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$，得 $x=\begin{pmatrix}-8\\2\\18\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}4\\-2\\-9\end{pmatrix}$ 其中 k 为任意常数.

(4) 记 $\boldsymbol{\alpha}_1=\varepsilon_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$，易证，$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以是 $\mathbb{R}^3$ 的基，显然，由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵为

$$Q=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

因此，σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-2&9&7\\-1&2&1\\-1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&6&12\\0&-1&-2\\-1&2&4\end{pmatrix}.$$

第 12 章

线性方程组

> "给我五个系数, 我将画出一头大象,
> 给我六个系数, 大象将会摇动尾巴."
> ——柯西

线性方程组是由一组线性方程组成的方程系统, 通常表示为:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

其中, a_{ij} 是系数, x_i 是未知数, b_i 是常数. 线性方程组的解就是一组满足所有方程的未知数的值.

解线性方程组的方法有很多种, 其中比较常用的方法包括:

1. 高斯消元法: 通过消元和回代的方式将线性方程组化为阶梯型或行阶梯型, 从而求解未知数的值.

2. 矩阵方法: 将线性方程组表示为矩阵形式, 通过矩阵运算求解. 可以使用高斯消元法、逆矩阵、Cramer 法则等方法.

3. Cramer 法则: 通过行列式的性质, 可以得到线性方程组的解. Cramer 法则适用于系数矩阵可逆的情况.

4. 矩阵的逆: 如果系数矩阵可逆, 可以通过矩阵的逆来求解线性方程组, 即 $X = A^{-1}B$, 其中 X 是未知数矩阵, A 是系数矩阵, B 是常数矩阵.

5. 矩阵的秩: 利用矩阵的秩来判断线性方程组的解的情况. 如果系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩且等于未知数的个数, 那么方程组有唯一解; 如果系数矩阵的秩小于增广矩阵的秩, 那么方程组无解; 如果系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩但小于未知数的个数, 那么方程组有无穷解.

通过这些方法, 我们可以有效地求解线性方程组, 解决实际问题中的线性关系. 线性方程组在数学、物理、工程、经济等领域都有着广泛的应用.

12.1 齐次线性方程组

12.1.1 Cramer 法则的应用

定理 12.1.1 (Cramer 法则). 如果数域 K 上的含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$, 那么此方程组有唯一解 $\left(\dfrac{D_1}{D}, \dfrac{D_2}{D}, \cdots, \dfrac{D_n}{D}\right)$, 其中 D_j 是把 D 中第 j 列的元素换成方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 而成的行列式 $(j = 1, 2, \cdots, n)$, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

特别地, 当 $b_i = 0(i = 1, 2, \cdots, n)$ 时, 如果系数行列式 $D \neq 0$, 那么方程组只有零解; 反之, 如果方程组有非零解,那么必有 $D = 0$.

例 12.1.1 (2005 华中科技大学). 解线性方程组 $\begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 = a^3 \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 = b^3 \\ x_1 + cx_2 + c^2x_3 = c^3 \end{cases}$ 其中 a, b, c 是互不相等的常数.

利用 *Cramer* 法则求解, 因为系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a) \neq 0$$

所以方程组有唯一解, 又因为

$$D_1 = \begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ b^3 & b & b^2 \end{vmatrix} = abcD,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 1 & b^3 & b^2 \\ 1 & c^3 & c^2 \end{vmatrix} = -(ab+ac+bc)D,\ D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)D$$

因此 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = abc,\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} = -ab - ac - bc,\ x_3 = \dfrac{D_3}{D} = a + b + c.$

12.1.2 齐次方程组的一般解

定理 12.1.2 (齐次解的线性组合). 如果 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解, k 为任意数, 那么 $\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2, k\boldsymbol{\xi}_1$ 都是该齐次线性方程组的解. 因此 $Ax = 0$ 的解向量的线性组合仍是它的解向量.

定理 12.1.3 (零解与非零解的充要条件). 设齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 含有 n 个未知数和 m 个方程, 即系数矩阵 $\boldsymbol{A}$:$m\times n$ 矩阵, 则 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解的充要条件是:

(1) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})<n$;

(2) A 的列向量组线性相关;

(3) $\boldsymbol{AB}=0$ 且 $\boldsymbol{B}\neq 0$;

(4) 当 $m=n$ 时, $|\boldsymbol{A}|=0$;

亦即 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解的充要条件是:

(1) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=n$;

(2) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关;

(3) 当 $m=n$ 时, $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

定义 12.1.1 (齐次线性方程组的基础解系). 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$, 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解向量, 如果

(1) $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$,线性无关;

(2) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的任意一个解向量都可由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$, 线性表示, 则称 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$, 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

定理 12.1.4 (基础解系的个数). 设 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 含有 $\boldsymbol{n}$ 个未知数, 则基础解系所含解向量的个数为 $n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$, 即自由未知量的个数.

定义 12.1.2 (齐次方程组的通解). 若 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系, 则 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的任意一个解向量都可由它们线性表示:

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s$$

称为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的通解 (一般解或全部解), 其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为任意常数.

定义 12.1.3 (齐次线性方程组的解空间). 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解向量的全体构成的向量空间, 称为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解空间. 设 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 含有 n 个未知数, 则解空间的维数为 $n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$.

如无特别说明, 我们总假设齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 含有 n 个未知数和 m 个方程, 即系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵.

例 12.1.2. 讨论当 a, b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}$$

有解? 无解? 并求出有解时的一般解.

对方程组的增广矩阵施行初等行变换, 化为简化的行阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & \vdots & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & \vdots & b \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1 - r_2 \\ r_{3,4} + r_2}]{\substack{r_2 \leftrightarrow r_3 \\ r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 5r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b-2 \end{pmatrix}$$

(1) 当 $a \neq 0$ 或 $b \neq 2$ 时, 方程组无解;

(2) 当 $a = 0$ 且 $b = 2$ 时, 方程组有解, 此时, 易知方程组的一般解为

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.

例 12.1.3. 求 λ 的值, 使齐次线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = 0 \\ 3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解, 并求出其一般解.

方程组的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3\lambda+3 & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)$$

所以 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$ 时齐次方程组有非零解, 进一步, 当 $\lambda = 0$ 时, 对方程组的系数矩阵施行初等行变换, 得 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 此时, 方程的一般解为 $\boldsymbol{x} = k(-1,1,1)$; 当 $\lambda = 1$ 时, 系数矩阵可化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 于是, 可求得方程的一般解为 $\boldsymbol{x} = k(-1,2,1)$, 其中 k 为任意常数.

例 12.1.4. 设向量 $\boldsymbol{\alpha} = (1,2,1)^\top$, $\boldsymbol{\beta} = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)^\top$, $\boldsymbol{\gamma} = (0,0,8)^\top$, 记

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^\top, \ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\beta}^\top\boldsymbol{\alpha}$$

求线性方程组 $2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}^4\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\gamma}$.

由题意可知,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \left(1, \frac{1}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

于是

$$A^2=\left(\alpha\beta^\top\right)\left(\alpha\beta^\top\right)=\alpha\left(\beta^\top\alpha\right)\beta^\top=\left(\beta^\top\alpha\right)\alpha\beta^\top=2A$$
$$A^4=\left(A^2\right)^2=(2A)^2=4A^2=8A$$

代入方程组，得

$$16Ax=8Ax+16x+\gamma\Rightarrow(A-2E_3)x=\frac{1}{8}\gamma\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{2}&0\\2&-1&0\\1&\frac{1}{2}&-2\end{pmatrix}x=(0,0,1)^\top$$

则有增广矩阵 $M=\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{2}&0&0\\2&-1&0&0\\1&\frac{1}{2}&-2&1\end{pmatrix}$，并对 M 实行初等行变换，有

$$\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{2}&0&0\\2&-1&0&0\\1&\frac{1}{2}&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2-2r_1\\r_3-r_1}]{r_1\times(-1)}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$$

所以线性方程组的通解为

$$(x_1,x_2,x_3)^\top=k(1,2,1)^\top+\left(\frac{1}{2},1,0\right)^\top\quad k\in\mathbb{R}.$$

12.1.3 齐次方程组的基础解系

例 12.1.5 (2005 南开大学). 设齐次线性方程组

$$\begin{cases}\quad x_2+ax_3+bx_4=0\\-x_1+cx_3+dx_4=0\\ax_1+cx_2-ex_4=0\\bx_1+dx_2-ex_3=0\end{cases}$$

的一般解以 x_3, x_4 为未知量,

(1) 求 a,b,c,d,e 满足的条件;

(2) 求齐次线性方程组的基础解系.

(1) 对方程组的系数矩阵施行初等行变换，得

$$\begin{pmatrix}0&1&a&b\\-1&0&c&d\\a&c&0&-e\\b&d&-e&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-c&-d\\0&1&a&b\\0&0&bc-e-ad&0\\0&0&0&ad-e-bc\end{pmatrix}$$

显然，欲使方程组的一般解以 x_3，x_4 为自由未知量，必需 $\begin{cases}bc-ad-e=0\\ad-bc-e=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}ad=bc\\e=0\end{cases}$.

(2) 当 $a,,b,c,d,e$ 满足 *(1)* 的条件时，根据上述初等变换结果可得方程组的基础解系为

$$\xi_1=(c,-a,1,0)^\top,\ \xi_2=(d,-b,0,1)^\top.$$

例 12.1.6 (2005 西安电子科技大学). 设四元齐次线性方程组为

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0\\x_1+2x_2+x_3-x_4=0\end{cases}\tag{I}$$

已知另一四元齐次线性方程组 (II) 的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,a+2,1)^{\top},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,4,a+8)^{\top}$$

(1) 求方程组 (I) 的基础解系;

(2) 问当 a 为何值时, 方程组 (I) 与 (II) 有非零公共解? 在有非零公共解时, 求出全部非零公共解.

(1) 方程组 (I) 的系数矩阵为 $\begin{pmatrix}2&3&-1&0\\1&2&1&-1\end{pmatrix}$, *可用初等行变换化为* $\begin{pmatrix}1&0&-5&3\\0&1&3&-2\end{pmatrix}$, *故 (I) 的基础解系为*

$$\boldsymbol{\beta}_1=(5,-3,1,0)^{\top},\ \boldsymbol{\beta}_2=(-3,2,0,1)^{\top}.$$

(2) 显然, 方程组 (I) 和方程组 (II) 有非零公共解等价于

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2=k_3\boldsymbol{\alpha}_1+k_4\boldsymbol{\alpha}_2$$

其中 k_1 *与* k_2 *不同时为 0, 这归结于关于* $k_i,\ i=1,2,3,4$ *的齐次线性方程组*

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2-k_3\boldsymbol{\alpha}_1-k_4\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0} \tag{III}$$

有非零解, 且 $k_1,\ k_2$ *不同时为零, 对 (III) 的系数矩阵施行初等行变换, 得*

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-3&-2&1\\-3&2&1&-2\\1&0&-a-2&-4\\0&1&-1&-a-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-a-2&-4\\0&1&-1&-a-8\\0&0&a+1&-a-1\\0&0&0&a+1\end{pmatrix}$$

可见, 当 $a\neq-1$ *时,* $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=4$, *方程组 (III) 仅有零解; 当* $a=-1$ *时,* $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2$ *方程组 (III) 有非零解, 其通解为*

$$\boldsymbol{k}=c_1(1,1,1,0)+c_2(4,7,0,1)$$

注意到 $\begin{cases}k_1=c_1+4c_2\\k_2=c_1+7c_2\end{cases}$ *所以* $k_1,\ k_2$ *同时为零当且仅当* $c_1,\ c_2$ *同时为零, 综上所述, 当且仅当* $a=-1$ *时, 方程组 (I) 和方程组 (II) 有非零公共解, 且全部非零公共解为* $k_1+\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2$, *其中* $k_1,\ k_2$ *取不同时为零的任意常数.*

12.2 非齐次线性方程组

12.2.1 方程组与行列式

例 12.2.1. 已知线性方程组 $\begin{cases}ax_1+x_3=1\\x_1+ax_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\ax_1+bx_2=2\end{cases}$ 有解, 其中 a,b 为常数, 若 $\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}=4$, 求 $\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}$.

设 $\boldsymbol{x}$ 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$, $(1,0,0,2)^{\top}=\boldsymbol{b}$, 因为方程组有解, 则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$, 由于 $\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}=4\neq0$, 所以 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\geqslant3$, 又因为 $\boldsymbol{A}_{4\times3}$, 所以 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\leqslant3$, 于是

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=3\Rightarrow\operatorname{rank}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3\Rightarrow\det(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=0$$

对行列式 $\det(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 按最后一列展开, 得

$$\det(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=-\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}=8.$$

12.2.2 线性相关与线性无关

线性无关

例 12.2.2 (2009 数一). 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$,

(1) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$;

(2) 对 (1) 中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$, 证明: $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

(1) 对矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\xi}_1)$ 施行初等行变换, 得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\xi}_1)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

由此可解得 $\boldsymbol{\xi}_2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{k}{2},\frac{1}{2}-\frac{k}{2},k\right)^{\top}$, 其中 k 为任意常数, 再对矩阵 $(\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{\xi}_1)$ 施行初等行变换, 得

$$(\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{\xi}_1)=\left(\begin{array}{ccc:c}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

故可解得 $\boldsymbol{\xi}_3=\left(-\frac{1}{2}-a,b\right)^{\top}$, 其中 a,b 为任意常数.

(2) 由 *(1)* 的结果, 有

$$|\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3|=\begin{vmatrix}-1&\frac{k-1}{2}&-\frac{1}{2}-a\\1&\frac{1-k}{2}&a\\-2&k&b\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix}0&0&-\frac{1}{2}\\1&\frac{1-k}{2}&a\\-2&k&b\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq 0$$

所以 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

12.2.3 非齐次线性方程组解的讨论

例 12.2.3 (2016 南京大学). 讨论当 a,b 为何值时, 线性方程组

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl}x_1&+&x_2&+&x_3&+&x_4&+&x_5&=&1\\3x_1&+&2x_2&+&x_3&+&x_4&-&3x_5&=&a\\&&x_2&+&2x_3&+&2x_4&+&6x_5&=&3\\5x_1&+&4x_2&+&3x_3&+&3x_4&-&x_5&=&b\end{array}\right.$$

有解? 无解? 并求出有解时的一般解.

对方程组的增广矩阵施行初等行变换, 化为简化的行阶梯形矩阵:

$$(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{B})\xrightarrow[r_1-r_3]{\substack{r_2-3r_1+r_3\\ r_4-5r_1+r_3}}\left(\begin{array}{ccccc:c}1&0&-1&-1&-5&-2\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&a\\0&0&0&0&0&b-2\end{array}\right)$$

(1) 当 $a\neq 0$ 或 $b\neq 2$ 时，方程组无解；

(2) 当 $a=0$ 且 $b=2$ 时，方程组有解，此时，方程组的一般解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

12.3 方程组的同解与公共解

12.3.1 方程组的同解

线性方程组的同解性

定义 12.3.1 (线性方程组的同解性). 线性方程组有下列三种变换, 称为线性方程组的初等变换:

(1) 换法变换, 交换某两个方程的位置;

(2) 倍法变换, 某个方程的两端同乘以一个非零常数;

(3) 消法变换, 把一个方程的若干倍加到另一个方程上去.

在线性方程组的三种初等变换之下,线性方程组的同解性不变.

常见的同解方程组形式:

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{P}$ 为 m 阶可逆矩阵, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{PAx}=\boldsymbol{0}$ 为同解方程组, $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{PAx}=\boldsymbol{Pb}$ 为同解方程组.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵, $\boldsymbol{A}^\top$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 为同解方程组.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为同解方程组.

有关两个方程组的公共解:

(1) 由通解表达式相等求公共解此类题目一般所给条件为方程组 (I) 的基础解系及方程组 (II) 的一般表示式. 这时一般只需把方程组 (I) 的通解代人方程组 (II) 即可求得两个方程组的公共解.

(2) 由两个方程组合并为一个新的方程组求公共解此类题目一般所给条件为方程组 (I)、(II) 的一般表示式. 这时只须把两个方程组合并为方程组 (III), 则方程组 (III) 的通解即为方程组 (I)、(II) 的公共解.

定理 12.3.1 (同解与秩的等价形式). 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解, 它的充要条件为

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}.$$

定理 12.3.2. 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解, 且 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解.

例 12.3.1. 今有物不知数, 三三数之剩一, 五五数之剩二, 七七数之剩三, 问: 物几何?

设此物体个数为 z, 三三数的次数为 x_1, 五五数的次数为 x_2, 七七数的次数为 x_3, 由题意可得

$$\begin{cases} z-3x_1=1 \\ z-5x_2=2 \\ z-7x_3=3 \end{cases} \Rightarrow \bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

对增广矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 做初等行变换, 有

$$\bar{\boldsymbol{A}} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3\times\frac{1}{5}]{r_2\times\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

方程组的同解方程组为 $\begin{cases} z=7x_3+3, \\ x_1=\dfrac{7}{3}x_3+\dfrac{2}{3} \\ x_2=\dfrac{7}{5}x_3+\dfrac{1}{5} \end{cases}$ 因为 z,x_1,x_2,x_3 必须为非负整数, 则所有解为

$$\begin{cases} z=157+105c \\ x_1=52+35c \\ x_2=31+21c \\ x_3=22+15c \end{cases} \quad c=0,1,2\cdots,$$

故此物的个数为 $157+105c\ (c=0,1,2,\cdots)$.

例 12.3.2 (2015 华南理工大学). 已知齐次线性方程组

$$(I):\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases} (II):\begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

同解, 求 a,b,c.

法一: 注意到齐次方程组 *(II)* 的未知量个数大于方程的个数, 所以 *(II)* 必有非零解, 由题意设 *(I)* 与 *(II)* 同解, 因此 *(I)* 也有非零解, 对 *(I)* 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换, 得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

因为 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}<3$, 所以 $a=2$, 可求得方程组 *(I)* 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,-1)^{\top}$, 将 $\boldsymbol{\xi}$ 代入 *(II)* 可求得 $\begin{cases} b=0 \\ c=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b=1 \\ c=2 \end{cases}$, 当 $b=0$, $c=1$ 时, *(II)* 的系数矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}<\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$, 可见方程组 *(II)* 与 *(I)* 不同解; 当 $b=1$, $c=2$ 时, *(II)* 的系数矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 所以 *(II)* 与 *(I)* 同解, 综上所述, 当且仅当 $a=2$, $b=1$, $c=2$ 时, 方程组 *(I)* 与方程组 *(II)* 同解.

法二: 因为 *(I)* 与 *(II)* 同解, 所以 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为方程组 *(I)* 和 *(II)* 的系数矩阵, 因为 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\leqslant 2$, 所以 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\leqslant 2 \Rightarrow \det\boldsymbol{A}=0 \Rightarrow a=2$, 当 $a=2$ 时, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 那么

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & c \\ 2 & b^2 & c+1 \end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-1 & c-2 \\ 0 & b^2-2 & c-3 \end{pmatrix}=2 \Rightarrow \begin{cases} b-1=c-2 \\ b^2-2=c-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} b=1 \\ c=2 \end{cases}$$

当 $b=0$, $c=1$ 时, $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}=1\neq 2$, 故舍去; 当 $b=1$, $c=2$ 时, $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}=2$, 因此 $a=2$, $b=1$, $c=2$.

12.3.2 方程组的公共解

定理 12.3.3 (公共解的交集). 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}_{s\times n}$ 满足 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}_{s\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有公共解, 其公共解也满足

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{m\times n}\\ \boldsymbol{B}_{s\times n}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$

例 12.3.3. 求 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_2 + 2x_4 = 2 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$ 的公共解.

对方程组的增广矩阵施行初等行变换将其转变为最简行阶梯形, 有

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&0&1\\0&3&0&2&2\\1&-1&1&0&3\\2&3&2&2&6\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_3+\frac{2}{3}r_2\\ r_4-\frac{1}{3}r_2}]{\substack{r_3-r_1\\ r_4-2r_1}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&0&1\\0&3&0&2&2\\0&0&0&\frac{4}{3}&\frac{10}{3}\\0&0&0&\frac{4}{3}&\frac{10}{3}\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_2\times\frac{1}{3}\\ r_1-r_2}]{\substack{r_4-r_3\\ r_3\times\frac{3}{4}}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&1&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&0&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&0&1&\frac{5}{2}\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_1+\frac{2}{3}r_3]{r_2-\frac{2}{3}r_3}\left(\begin{array}{cccc:c}\underline{1}&0&1&0&2\\0&\underline{1}&0&0&-1\\0&0&0&\underline{1}&\frac{5}{2}\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

即 $\begin{cases} x_1+x_3=2\\ x_2=-1\\ x_4=\frac{5}{2}\end{cases}$, 令 $x_3=\xi$ (没有下划线), 则公共解为 $\left(2-\xi,-1,\xi,\frac{5}{2}\right)^\top$.

例 12.3.4. 已知两个四元齐次线性方程组 $(I),(II)$ 其中 (I) 的一个基础解系为

$$(1,-2,1,3)^\top,\ (3,-2,-1,3)^\top,\ (II)\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0\\ 2x_1+3x_2+ax_3+2x_4=0\end{cases}$$

若 (I) 与 (II) 有非零公共解, 求所有公共解.

由题意可知,

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\\3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}k_1+3k_2=x_1\\-2k_1-2k_2=x_2\\k_1-k_2=x_3\\3k_1+3k_2=x_4\end{cases}$$

那么有矩阵

$$\left(\begin{array}{cc:cccc}1&3&1&&&\\-2&-2&&1&&\\1&-1&&&1&\\3&3&&&&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_3+r_2\\ r_4+\frac{3}{2}r_2}]{\substack{r_2+2r_1\\ r_3-r_1\\ r_4-3r_1}}\left(\begin{array}{cc:cccc}1&3&1&0&0&0\\0&4&2&1&0&0\\\hline 0&0&1&1&1&0\\0&0&0&\frac{3}{2}&0&1\end{array}\right)$$

由上式三四行可知方程组 $(III)\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ \frac{3}{2}x_2+x_4=0\end{cases}$ 与方程组 (I) 同解, 又因为 (I) 与 (II) 有非零公共解, 即 (III) 与 (II) 有非零公共解, 那么

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&\frac{3}{2}&0&1\\1&-1&1&0\\2&3&a&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2\times\frac{2}{3}\\ r_3+2r_2\\ r_4-r_2}]{\substack{r_3-r_1\\ r_4-2r_1}}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&\frac{2}{3}\\0&0&0&\frac{4}{3}\\0&0&a-2&\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有非零解, 所以 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}<4$, 即 $a-2=0$, 解得 $a=2$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&\frac{2}{3}\\0&0&0&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 那么易得公共解.

第 13 章

矩阵的特征值与特征向量

“浅薄的学识使人远离神, 广博的学识使人接近神.”

——高斯

矩阵的特征值与特征向量是线性代数中非常重要的概念, 它们在矩阵的性质和应用中起着关键的作用.

1. 特征值: 对于一个方阵 $\boldsymbol{A}$, 如果存在一个标量 λ 和一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 使得 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$, 则称 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应于特征值 λ 的特征向量. 特征值和特征向量总是成对出现的.

2. 特征向量: 特征向量是指在矩阵作用下, 只发生缩放而不改变方向的非零向量. 特征向量描述了矩阵在某些方向上的变化规律.

3. 求解特征值和特征向量: 要求解一个矩阵的特征值和特征向量, 通常需要解特征方程 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 是矩阵, λ 是特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是特征向量, $\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵. 解特征方程可以得到特征值, 然后将特征值代入原方程组求解对应的特征向量.

4. 性质和应用: 特征值和特征向量在矩阵的对角化、矩阵的特征分解、矩阵的谱分解等方面有着重要的应用. 通过特征值和特征向量, 我们可以对矩阵进行简化和分解, 更好地理解矩阵的性质和结构.

5. 实际应用: 特征值和特征向量在物理学、工程学、计算机科学、统计学等领域都有着广泛的应用, 例如在振动分析、图像处理、信号处理、主成分分析等方面.

特征值和特征向量是矩阵理论中非常重要的概念, 对于理解和分析矩阵的性质和行为至关重要. 深入了解特征值和特征向量可以帮助我们更好地处理线性代数和相关领域的问题.

13.1 矩阵的特征值与特征向量

13.1.1 矩阵的特征值

定理 13.1.1 (特征多项式展开定理). 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n-a_1\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^k a_k\lambda^{n-k}+\cdots+(-1)^n a_n$$

其中 a_k 是 $\boldsymbol{A}$ 的所有 k 阶主子式之和, 即

$$a_k=\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n}\begin{vmatrix} a_{j_1j_1} & \cdots & a_{j_1j_k}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{j_kj_1} & \cdots & a_{j_kj_k}\end{vmatrix}$$

特别地 $a_1=\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$, $a_n=\det\boldsymbol{A}$. 对于常见的 3 阶矩阵有

$$f(\lambda)=\lambda^3-\operatorname{tr}\boldsymbol{A}\cdot\lambda^2+\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\right)\lambda-\det\boldsymbol{A}.$$

图 13.1.1 是 a_2 的形象化表达.

$$\begin{matrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\end{matrix}$$

图 13.1.1

定理 13.1.2 (特征值的积与和). 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则

$$\det\boldsymbol{A}=\prod_{i=1}^n\lambda_i,\ \operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^n\lambda_i.$$

例 13.1.1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,-1$, 如果 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$, 求 $|\boldsymbol{B}|$.

易求得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值分别是 $2,3,6$, 那么 $\det\boldsymbol{B}=2\times3\times6=36$.

定理 13.1.3 (逆矩阵的特征值). 矩阵可逆当且仅当其特征值都不等于零, 若 λ 是可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\dfrac{1}{\lambda}$ 是逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值.

定理 13.1.4 (秩一矩阵的特征值). 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=1$, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$ 及 $n-1$ 重 0 根.

例 13.1.2. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵, $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵, 如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E},3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 均不可逆, 求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

易知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $0,2,-\dfrac{2}{3}$, 那么 $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=1\times 3\times\dfrac{1}{3}=1$.

定理 13.1.5 (伴随矩阵的特征值 A). 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵, 且 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值, 则 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_i}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的全部特征值; 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶不可逆矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 有 $n-1$ 个特征值为 0, 另一个特征值为 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^*$.

定理 13.1.6 (伴随矩阵的特征值 B). 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_j\ (j=1,2,\cdots,n)$, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 的 n 个特征值为 λ_i^*, 则

$$\lambda_i^*=\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}\lambda_j\ (i=1,2,\cdots,n).$$

例 13.1.3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, 特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$, 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$, 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$ 等于

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$

由 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 得 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{E}_{31}(-1)\boldsymbol{E}_{32}(1):=\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}_{31}(-1)\boldsymbol{E}_{32}(1)$, 那么

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}&=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}_{31}(-1)\boldsymbol{E}_{32}(1))^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}_{31}(-1)\boldsymbol{E}_{32}(1)=\boldsymbol{E}_{32}(-1)\boldsymbol{E}_{31}(1)\operatorname{diag}(2,2,1)\boldsymbol{E}_{31}(-1)\boldsymbol{E}_{32}(1)\\&=\boldsymbol{E}_{32}(-1)\boldsymbol{E}_{31}(1)\boldsymbol{E}_1(2)\boldsymbol{E}_2(2)\boldsymbol{E}_{31}(-1)\boldsymbol{E}_{32}(1)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

因此选 D.

例 13.1.4. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&a\\1&3&5\\0&0&2\end{pmatrix}$, 只有两个线性无关的特征向量, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值以及 a.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-a\\-1&\lambda-3&-5\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-2)+(\lambda-2)=(\lambda-2)^3=0$, 于是特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$, 因为 $n-\operatorname{rank}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$, 于是 $\operatorname{rank}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$, 进而解得 $a=-5$.

定理 13.1.7 (特征值不等式). 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值按从小到大排列, 即 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$, 则

$$\lambda_1\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\lambda_n\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x}.$$

证 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, 使得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

不妨设 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$, 有

$$\lambda_1\sum_{k=1}^n y_k^2\leqslant\sum_{k=1}^n\lambda_ky_k^2\leqslant\lambda_n\sum_{k=1}^n y_k^2$$

即

$$\lambda_1\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\lambda_n\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x}.$$

定理 13.1.8 (行均和定理). 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和均为 k, 则 $\boldsymbol{A}$ 有一特征值为 k, 所对应特征向量为 $(1,1,\cdots,1)^\top$.

特征值在求解迭代方程中的应用

例 13.1.5. 给定 3 个数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足 $x_1=-2,y_1=1,z_1=-1$, 且当 $n\geqslant 1$ 有

$$x_{n+1}=3x_n-6y_n-z_n,\quad y_{n+1}=-x_n+2y_n+z_n,\quad z_{n+1}=x_n+3y_n-z_n$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n+y_n+z_n}{3^n+5^n}$.

由 $\begin{cases}x_{n+1}=3x_n-6y_n-z_n\\y_{n+1}=-x_n+2y_n+z_n\\z_{n+1}=x_n+3y_n-z_n\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\\z_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-6&-1\\-1&2&1\\1&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}:=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}$, 于是特征方程为

$$\lambda^3-4\lambda^2-7\lambda+10=(\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+2)=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=5,\lambda_3=-2$$

于是 $x_n+y_n+z_n=a\cdot1^n+b\cdot5^n+c\cdot(-2)^n$, 且

$$\begin{cases}x_1+y_1+z_1=-2+1-1=-2=a+5b-2c\\x_2+y_2+z_2=-11+3+3=-6=a+25b+4c\\x_3+y_3+z_3=-53+19-4=-38=a+125b-8c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=-\dfrac{2}{7}\\c=\dfrac{2}{7}\end{cases}$$

于是 $x_n+y_n+z_n=-\dfrac{2}{7}\cdot5^n+\dfrac{2}{7}(-1)^n\cdot2^n$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-\frac{2}{7}\cdot5^n+\frac{2}{7}(-1)^n\cdot2^n}{3^n+5^n}=-\dfrac{2}{7}$.

13.1.2 矩阵的特征向量

例 13.1.6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$, 求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值与特征向量.

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}$, 即 $\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$, 由于 $|\boldsymbol{A}=7\neq0|$, 所以 $\lambda\neq0$, 于是有

$$\boldsymbol{A}^*\xi=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\xi,\ (\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}^{-1}\xi=\left(\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}+2\right)\boldsymbol{P}^{-1}\xi$$

即 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}+2$ 是 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}$ 为对应的特征向量, 易求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=7$, 属于 $\lambda_{1,2}=1$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0)^\top,\ \boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1)^\top$$

属于 λ_3 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,1)^\top$, 因此, $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的三个特征向量为 $9,9,3$, 属于特征值 *9* 的两个线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1,0)^\top,\ \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}_2=(-1,-1,1)^\top$$

属于特征值 *3* 的特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}_3=(0,1,1)^\top$.

例 13.1.7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是线性空间 $\boldsymbol{P}^3$ 的线性变换, 已知

$$\boldsymbol{A}(1,0,0)=(5,6,-3),\ \boldsymbol{A}(0,1,0)=(-1,0,1),\ \boldsymbol{A}(0,0,1)=(1,2,1)$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和特征向量;

(2) 问: 能否找到 $\boldsymbol{P}^3$ 的一组基, 使 $\boldsymbol{A}$ 在这组基下的矩阵为对角矩阵? 说明理由.

(1) $\boldsymbol{A}$ 在基 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & -1 \\ -6 & \lambda & -2 \\ -3 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^3$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 对 $\lambda=2$ 求特征向量, 解齐次方程组

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -6x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

求得基础解系为: $(1,3,0)$, $(0,1,1)$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征向量为 $k_1(1,3,0)+k_2(0,1,1)$, 其中 k_1, k_2 为数域 $\boldsymbol{P}$ 中不全为零的任意数, 这些特征向量都属于特征值 2.

(2) 因为 $\boldsymbol{A}$ 只有 2 个线性无关的特征向量, 而 $\boldsymbol{P}^3$ 是 3 维线性空间, 所以找不到一组基, 使 $\boldsymbol{A}$ 在这组基下的矩阵为对角矩阵.

例 13.1.8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是线性空间 $\boldsymbol{P}^3$ 的线性变换, 已知

$$\boldsymbol{A}(1,0,0)=(8,-6,3),\ \boldsymbol{A}(1,1,0)=(14,-10,6),\ \boldsymbol{A}(1,1,1)=(8,-4,5)$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和特征向量, 并求 $\boldsymbol{P}^3$ 的一组基使 $\boldsymbol{A}$ 在这组基下的矩阵为对角矩阵.

因为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(1,0,0)&=(8,-6,3)=14(1,0,0)-9(1,1,0)+3(1,1,1) \\ \boldsymbol{A}(1,1,0)&=(14,-10,6)=24(1,0,0)-16(1,1,0)+6(1,1,1) \\ \boldsymbol{A}(1,1,1)&=(8,-4,5)=12(1,0,0)-9(1,1,0)+5(1,1,1) \end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 在基 $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 14 & 24 & 12 \\ -9 & -16 & -9 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-14 & -24 & -12 \\ 9 & \lambda+16 & 9 \\ -3 & -6 & \lambda-5 \end{vmatrix}\xlongequal[r_1-4r_3]{r_2+3r_3}\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -4\lambda+8 \\ 0 & \lambda-2 & 3\lambda-6 \\ -3 & -6 & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

对 $\lambda=-1$ 解齐次方程组

$$\begin{cases} -15x_1 - 24x_2 - 12x_3 = 0 \\ 9x_1 + 15x_2 + 9x_3 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

得基础解系: $(4,-3,1)$, 对应特征向量为 $4(1,0,0)-3(1,1,0)+(1,1,1)=(2,-2,1)$, 所以属于特征值 -1 的全部特征向量为 $k(2,-2,1)$, 其中 k 为数域 $\boldsymbol{P}$ 中任一非零数;
对 $\lambda=2$ 解齐次方程组

$$\begin{cases} -12x_1 - 24x_2 - 12x_3 = 0 \\ 9x_1 + 18x_2 + 9x_3 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

得基础解系 $(-1,0,1)$, $(0,-1,2)$, 对应于特征向量分别为

$$-(1,0,0)+(1,1,1)=(0,1,1)\ \text{及}\ -(1,1,0)+2(1,1,1)=(1,1,2)$$

所以属于特征值 2 的全部特征向量为 $k_1(0,1,1)+k_2(1,1,2)$, 其中 k_1, k_2 为数域 $\boldsymbol{P}$ 不全为 0 的任意性, 于是以

$$(2,-2,1),\ (0,1,1),\ (1,1,2)$$

为基, 则 $\boldsymbol{A}$ 在这组基下的矩阵为对角矩阵 $\mathrm{diag}(-1,2,2)$.

例 13.1.9. 设 A 是 3 阶矩阵, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 的 3 个不同特征值, 对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$, 令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,

(1) 证明: $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量;

(2) 证明: $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关;

(3) 若 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$, 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

(4) 在 (3) 的基础上证明: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 是方程组 $\left(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系.

(1) 反证法: 假设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 且对应的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}$, 那么 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\beta}$, 即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)&=\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)\\ \Rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3&=\lambda\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda\boldsymbol{\alpha}_3\\ \Rightarrow \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_3&=\lambda\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda\boldsymbol{\alpha}_3 \end{aligned}$$

即 $\Rightarrow(\lambda_1-\lambda)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2-\lambda)\boldsymbol{\alpha}_2+(\lambda_3-\lambda)\boldsymbol{\alpha}_3=0$, 即 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, 但这与题意矛盾, 故假设不成立, 即 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(2) 要证: $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关, 即证: $k_1\boldsymbol{\beta}+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}+k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$, 其中 $k_1+k_2+k_3=0$, 为此, 则有

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3\left(\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^2\boldsymbol{\alpha}_3\right)=\mathbf{0}$$

为使等式成立, 则有

$$\begin{cases} k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2=0\\ k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2=0\\ k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}$$

该行列式为 *Vandermonde* 行列式, 则其值为 $(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\neq 0$, 故 $k_1+k_2+k_3=0$, 因此 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

(3) 设矩阵 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$, 且 $\exists\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$, 不妨取 $\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}\right)$, 因此

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}\right)\xlongequal{\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}, 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\right)=\left(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则特征值方程为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0\\ -1 & \lambda & -2\\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} \lambda & -2\\ -1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-2)=0$, 因此特征值为 $\lambda_1=0, \lambda_2=\sqrt{2}, \lambda_3=-\sqrt{2}$.

(4) 为证: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 是方程组 $\left(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系, 需分别证:

(i) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 是方程组 $\left(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解;

当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$ 时, 有 $\left(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\xlongequal{\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}}\mathbf{0}$ 成立;

当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 时, 有 $\left(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\right)\xlongequal{\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}}\mathbf{0}$ 成立;

(ii) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关;

由 (2) 可知 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关 (整体无关, 部分必无关; 部分相关, 整体必相关), 故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关;

(iii) $S=n-\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E}\right)$, 其中 $S=2$.

因为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}_1$, 即 $\boldsymbol{A}$ 能相似对角化, 故 $\boldsymbol{P}^{-1}\left(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{P}$ 亦能相似对角化为矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_2$, 又因为 $\left(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E}\right)$ 的特征值为 $2,0,0$, 那么 $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E}\right)=1$, 且 $n=3$, 故 $S=n-\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E}\right)$ 成立,

综上所述, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 是方程组 $\left(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系.

13.2 矩阵相似与可对角化

13.2.1 矩阵的相似

定义 13.2.1 (矩阵的相似). 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵, 如果存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 记为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

定理 13.2.1 (矩阵相似的必要条件). 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是相似的, 则由相似矩阵的性质可得:

(1) $\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{B}$. (2) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$. (3) $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}$. (4) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$.

---

(5) $k\boldsymbol{A}\sim k\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^m\sim\boldsymbol{B}^m$, $f(\boldsymbol{A})\sim f(\boldsymbol{B})$, $\boldsymbol{A}^\top\sim\boldsymbol{B}^\top$, $\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$, $\boldsymbol{A}^*\sim\boldsymbol{B}^*$.

例 13.2.1. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\3&0&0\end{pmatrix}$, 则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}|=-6$.

例 13.2.2. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似, 求 x 与 y.

因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 故具有相同的迹和相同的行列式, 故 $\begin{cases}x-4=1+y\\4x-8=-2y\end{cases}\Rightarrow x=3,\ y=-2$.

例 13.2.3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&2&-3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&4\\0&0&-3\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&1&-5\\0&1&0\\1&1&-4\end{pmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&1&-2\\5&1&-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(1,1,-3)$, 则在 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 中与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似的矩阵有

A. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$　　B. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{D}$　　C. $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$　　D. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{D}$

矩阵相似有四个必要条件, 分别为: 秩相等, 迹相等, 行列式相等和特征多项式相等, 于是对于矩阵 $\boldsymbol{D}$ 因为 $\operatorname{tr}\boldsymbol{D}\neq\operatorname{tr}\boldsymbol{\Lambda}$, 故排除选项 B、D, 又因为矩阵相似对角矩阵等价于它的每一个特征值的重数与其对应的线性无关的特征向量个数相等, 对于矩阵 $\boldsymbol{B}$, 它的特征值显然是 $1,1,-3$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相同, 但是对于 $\lambda=1$ (二重),

$$n-\operatorname{rank}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=3-2=1\neq2(\text{特征值重数})$$

因此矩阵 $\boldsymbol{B}$ 关于特征值 1 仅一个线性无关的特征向量, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 不能相似对角化为 $\boldsymbol{\Lambda}$, 排除选项 C, 故选 A.

例 13.2.4 (2013 数一). 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充要条件为

A. $a=0,b=2$　　B. $a=0,b$ 为任意常数　　C. $a=0,b=0$　　D. $a=2,b$ 为任意常数

因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是对角矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,b,0$, 因为 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 那么

$$|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0\Rightarrow a=0$$

当 $a=0$ 时, $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)(\lambda-b)$ 那么 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,b,0$, 所以 b 为任意常数即可, 选 B.

例 13.2.5 (2009 兰州大学). 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&a&2\\2&2&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&b\end{pmatrix}$, 问 a,b 取何值时 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似? 并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

法一：由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则它们的特征多项式相同，所以 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$，即

$$\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-a & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-b\end{vmatrix}$$

得 $(\lambda+1)\big(\lambda^2-(3+a)\lambda+3a-8\big)=(\lambda+1)^2(\lambda-b)$，比较两边的系数，得 $a=1$，$b=5$，那么

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal[r_1-r_3]{r_2-r_3}(\lambda+1)^2\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

那么 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -1（二重）和 5，则对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-1,-1,0)^\top,\ \boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,-1)^\top,\ \boldsymbol{\xi}_3=(1,1,1)^\top$$

从而可得可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，容易验证有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{P}$ 即使所求.

法二：因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以具有相同的迹和相同的行列式，即 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}$，$\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{B}$，故

$$2+a=-2+b,\ -3a+8=b$$

解得 $a=1$，$b=5$.

例 13.2.6 (2017 数一). 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，则[1]

A. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似　　B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似　　D. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

因为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是上三角矩阵，所以特征值都为 $2,2,1$，那么

$$\operatorname{rank}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=1=3-2$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似；同理

$$\operatorname{rank}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=2\neq 3-2$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似，选 B.

13.2.2 可对角化

定理 13.2.2. 若存在不相等的实数 a，b，使得 $(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-b\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定能相似对角化.

证 因为 $(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-b\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，所以

$$n=\operatorname{rank}((b-a)\boldsymbol{E})=\operatorname{rank}[(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})-(\boldsymbol{A}-b\boldsymbol{E})]\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-b\boldsymbol{E})\leqslant n$$

故 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-b\boldsymbol{E})=n$，因此 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 a 的特征向量个数有 $n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})$；属于特征值 b 的特征向量个数有 $n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-b\boldsymbol{E})$，共有

$$2n-[\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-b\boldsymbol{E})]=n$$

又因为 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量等价于 $\boldsymbol{A}$ 一定能相似对角化.

---

[1] 假如三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 a,b,b，那么有

$$\boldsymbol{A}\text{ 可相似对角化}\Leftrightarrow\operatorname{rank}(b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\text{阶数}-b\text{ 的重数}$$

即只需要判断 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-b\boldsymbol{E})\overset{?}{=\!=}\text{阶数}-b$ 的重数.

例 13.2.7 (2004 数一). 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&3\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}\xlongequal[r_2+r_3]{r_1-r_2}\begin{vmatrix}\lambda-2&2-\lambda&0\\0&\lambda-4-a&\lambda-2\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)[(\lambda-5)(\lambda-4-a)+(\lambda-2)(1+a)]$, 当 $\lambda=2$ 是方程的二重根时, 则有 $(2-5)(2-4-a)=0\Rightarrow a=-2$, 于是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&-2&5\end{pmatrix}$, 此时,

$$\operatorname{rank}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&2&-3\end{pmatrix}=1=3-2$$

因此可以相似对角化; 当 2 不是方程的二重根时, $[(\lambda-5)(\lambda-4-a)+(\lambda-2)(1+a)]$ 为完全平方数, 解得 $a=-\dfrac{2}{3}$, 此时 4 是该方程的二重根, 于是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&-\frac{2}{3}&5\end{pmatrix}$, $\operatorname{rank}(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\neq1$, 于是 $a=-\dfrac{2}{3}$ 时, $\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化.

例 13.2.8. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$

(1) 已知 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 3, 求 y;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{AP}^\top(\boldsymbol{AP})$ 为对角矩阵.

(1) 因为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&0\\-1&\lambda&0&0\\0&0&\lambda-y&-1\\0&0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-1\\-1&\lambda\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\lambda-y&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda^2-1)[(\lambda-y)(\lambda-2)-1]=0$$

将 $\lambda=3$ 代入得, $y=2$.

(2) 由 *(1)* 可知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$, 那么 $\boldsymbol{A}^\top=\boldsymbol{A}$, 得 $(\boldsymbol{AP})^\top(\boldsymbol{AP})=\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}$, 而 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&4\\0&0&4&5\end{pmatrix}$, 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2|=0$ 解得 $\lambda_1=1$ (三重), $\lambda_2=9$, 对应 $\lambda_1=1$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,0)^\top,\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0,0)^\top,\ \boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,-1,1)^\top$$

标准正交化得

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0,0)^\top,\ \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,0,0)^\top,\ \boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,-1,1)^\top$$

对应于 $\lambda_2=9$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_4=(0,0,1,1)^\top$, 经过单位化后, $\boldsymbol{\beta}_4=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)^\top$, 于是

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\ (\boldsymbol{AP})^\top(\boldsymbol{AP})=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&9\end{pmatrix}.$$

例 13.2.9. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix}$ 有 3 个线性无关的特征向量, 且 $\lambda=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值.

(1) 求 x, y 的值;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

(1) 根据题设, $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值的几何重数与代数重数相等, 对于特征值 $\lambda=2$ (二重), $\boldsymbol{A}$ 有两个线性无关的特征向量, 由此可知 $\operatorname{rank}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$, 利用初等行变化, 得

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-x&-2&-y\\3&3&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+r_1\cdot x}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&x-2&-y-x\\0&0&0\end{pmatrix}$$

因此, 有 $x=2, y=-2$.

(2) 由 (1) 可知, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix}$, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-2&\lambda-4&2\\3&3&\lambda-5\end{vmatrix}\overset{r_2+2r_1}{\underset{r_3-3r_1}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\2\lambda-4&\lambda-2&0\\6-3\lambda&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-6)$$

解得 $\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=6$, 对于特征值 $\lambda_{1,2}=2$, 解齐次方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^\top$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^\top$, 对于特征值 $\lambda_3=6$, 解齐次方程组 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,3)^\top$, 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}$ 为对角矩阵.

第 14 章

二次型

> “数学是一种无限的创造力，它能够解释和预测自然界的现象.”
>
> ——欧拉

二次型是线性代数中一个重要的概念, 它是一种关于变量的二次多项式形式. 一般来说, 二次型可以表示为如下形式:

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

其中, $\boldsymbol{x}$ 是一个 n 维列向量, $\boldsymbol{A}$ 是一个对称矩阵. 二次型在数学中有着重要的应用, 特别是在矩阵理论、优化问题、特征值问题等方面.

在实际应用中, 二次型可以用来描述许多不同的问题, 例如描述物体的能量、描述椭圆的形状、优化问题中的目标函数等. 通过对二次型的研究和分析, 我们可以深入理解矩阵的性质和结构, 以及解决一些实际问题.

求解二次型的问题通常涉及到对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量的分析, 以及对二次型的矩阵形式的变换. 通过这些方法, 我们可以得到二次型的最优解、极值点等重要信息.

二次型是线性代数中一个重要的概念, 它在数学和应用领域都有着广泛的应用, 对于理解矩阵、优化问题等具有重要意义.

14.1　二次型的规范形与标准形

1. 二次型的规范形:

如果一个二次型经过合适的线性变换可以化为对角形式, 即对角元素非零, 其他元素为零, 那么这个对角形式就是二次型的规范形. 规范形可以表示为:

$$q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是对角矩阵 A 的特征值.

2. 二次型的标准形:

如果一个二次型经过合适的线性变换可以化为更简单的形式, 即对角元素为 ± 1, 其他元素为零, 那么这个形式就是二次型的标准形. 标准形可以表示为:

$$q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \ldots - x_n^2$$

其中 r 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值的个数.

14.1.1 二次型的基本概念

定义 14.1.1 (n 元二次型). 含有 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次函数

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + \\ & 2a_{1n}x_1x_n + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + \\ & 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

称为 n 元二次型.

常见的三元二次型:

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_3x_2 + fx_1x_3$$

几何意义: 三元二次型的几何图形是空间曲面.

二次型有矩阵表示.

定义 14.1.2 (二次型的矩阵表达). 在二次型表达式中取 $a_{ij} = a_{ji}$, 则

$$2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$$

于是上述二次型可以写为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

或

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2b \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} x_jx_k = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵, 称为二次型 f 的矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型 f 的秩.

例 14.1.1. 二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2ax_1x_3+2x_2x_3$$

的秩为 2, 求 a.

二次型 f 矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$, 由题意 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2\Rightarrow\det\boldsymbol{A}=0\Rightarrow a=-2$.

定义 14.1.3 (二次型的标准形). 如果二次型中只含有变量的平方项, 所有混合项 $x_ix_j(i\neq j)$ 的系数全是零, 即

$$\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x}=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$$

这样的二次型称为标准形.

定义 14.1.4 (二次型的规范形). 在标准形中, 如平方项的系数 d_j 为 $1,-1$ 或 0,

$$\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+q}^2$$

则称其为二次型的规范形.

例 14.1.2. 化二次型 $f=2x_2^2+2x_1x_3$ 为标准形, 并写出所用坐标变换.

$f=2x_2^2+\frac{1}{2}(x_1+x_3)^2-\frac{1}{2}(x_1-x_3)^2$, 令 $\begin{cases}z_1=\sqrt{2}x_2\\z_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_3)\\z_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_3)\end{cases}$ 则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$, 其中 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

例 14.1.3. 将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$$

化为标准形, 并写出所用坐标变换.

f 的标准形为

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2-2x_3)^2+2(x_2+x_3)^2-3x_3^2$$

故令 $\begin{cases}z_1&=&x_1&+&x_2&-&2x_3\\z_2&=&&&x_2&+&x_3\\z_3&=&&&&&x_3\end{cases}$ 即坐标变换 $\begin{cases}x_1&=&z_1&-&z_2&+&3z_3\\x_2&=&&&z_2&-&z_3\\x_3&=&&&&&z_3\end{cases}$, 或 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{z}$, 则有 $f=z_1^2+2z_2^2-3z_3^2$.

例 14.1.4. 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3,\ g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_2y_3$$

求可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将 f 化为 g.

f 的标准形为

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2+x_3)^2$$

故令 $\begin{cases} z_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ z_2 = x_2 + x_3 \\ z_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 + 2z_3 \\ x_2 = z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$，则 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{z}$，其中 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

同理 $g(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + (y_2 + y_3)^2$，令 $\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$ 即 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 于是

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y}$$

故 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

定义 14.1.5 (正负惯性指数). 在二次型 $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形中，正的平方项的个数 p 称为二次型的正惯性指数，负的平方项的个数 q 称为二次型的负惯性指数.

定义 14.1.6 (符号差). 正惯性指数 p 与负惯性指数 q 的差称为符号差 s，即 $s = p - q$.

例 14.1.5. 设 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + (a-1)x_2^2 + (a+2)x_3^2$ 的标准形是 $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$，求 a 的取值范围.

由题意可知 $p = 1, q = 2$，于是 $a - 1 < a < 0 < a + 2 \Rightarrow -2 < a < 0$.

例 14.1.6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，秩为 r，符号差为 s，则必有

A. r 是奇数，s 是偶数

B. s 是奇数，r 是偶数

C. r, s 均为偶数

D. r, s 或均为奇数或均为偶数

$r = p + q, s = p - q$，那么 $r + s = 2p$，从而 r, s 或均为奇数或均为偶数.

例 14.1.7. 求二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} x_j x_k$$

的符号差.

设此二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则

$$A = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

且 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \lambda(\lambda - n)^{n-1}$ (参考例题 9.3.12(2) 的解法)，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = n, \lambda_n = 0$，故符号差 $s = n - 1$.

定义 14.1.7 (非线性替换). 如果

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots\cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \qquad (*)$$

满足

$$|\boldsymbol{C}| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

称 (*) 为由 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^\top$ 到 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^\top$ 的非退化线性替换, 且 (*) 可用矩阵描述, 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

或 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$, 其中 $\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵.

如果没有特别说明, 本章所涉及的二次型均为实二次型, 即二次型中变量的系数均为实数, 所涉及的矩阵和向量都是实的.

14.1.2 二次型的常用结论

(1) 二次型与对称矩阵一一对应.

(2) 变量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^\top$ 的 n 元二次型 $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经过非退化线性替换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 后, 成为变量 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^\top$ 的 n 元二次型 $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$, 其中 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

(3) 任意的 n 元二次型 $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 都可以通过非退化线性替换化成标准形 $d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$, 其中 $d_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是实数.

(4) 任意 n 元二次型 $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 故必存在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵), 使得二次型化为标准形 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$, 且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值.

(5) 非退化线性替换保持二次型的正负惯性指数、秩、正定性等.

定理 14.1.1 (惯性定理). 任意 n 元二次型 $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 都可通过非退化线性替换化为规范形

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_{p+q}^2$$

其中 p 为正惯性指数, q 为负惯性指数, $p+q$ 为二次型的秩, 且 p, q 由二次型唯一确定, 即规范形是唯一的.

例 14.1.8. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$, 求 f 的正惯性系数.

实对称矩阵 $A_0=\frac{1}{2}(A+A^\top)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1&2&2\\0&2&\frac{1}{2}\\0&\frac{7}{2}&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&\frac{7}{2}\\2&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&1\end{pmatrix}$，设 A_0 的特征值为 λ_1，λ_2，λ_3 则 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\operatorname{tr}A_0=4\\ \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=\det A_0=-1\end{cases}$ 由 $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3<0$ 知，三个特征值中有且仅有一个特征值为负，则 f 的正惯性系数为 2.

例 14.1.9. 求二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_1+x_3)^2$$

的正惯性指数 p.

二次型 f 的矩阵为 $\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$，那么特征方程为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&1\\-1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2$$

故特征值为 $3,3,0$，因此正惯性指数 $p=2$.

定理 14.1.2. 若 $f(x_1,x_2,x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2+(c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3)^2$，令

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^\top,\ \boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)^\top,\ \boldsymbol{\gamma}=(c_1,c_2,c_3)^\top$$

则 f 的正惯性指数 $p=\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$，负惯性指数 $q=0$.

例 14.1.10. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2-x_3)^2+(x_1+2x_3)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

A. $1,0$　　B. $2,0$　　C. $3,0$　　D. $2,1$

令 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^\top$，$\boldsymbol{\beta}=(0,1,-1)^\top$，$\boldsymbol{\gamma}=(1,0,2)^\top$，易知 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=2$，则正惯性指数 $p=2$，负惯性指数 $q=0$，选 B.

例 14.1.11. (2012 数一) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，求 f 的正惯性指数.

二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，于是

$$|\lambda E-A|\xlongequal[r_2-r_3]{r_1-r_3}\begin{vmatrix}\lambda&0&-\lambda\\0&\lambda-2&-\lambda\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$$

故 A 的特征值为：0,1,4，所以正惯性指数为 2.

例 14.1.12. (2016 数二) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1, 2, 求 a 的取值范围.

二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$，则 $|\lambda E-A|=(\lambda-a-2)(\lambda-a+1)^2=0$，得特征值 $a+2$，$a-1$ (二重)，则 $a+2>0, a-1<0$，故得 $-2<a<1$.

14.1.3 运用偏导函数求标准形

运用偏导函数的思想将二次型化为标准形有以下两种情况:

(1) 如果 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中含有某变量的平方项, 即 $a_{ii}\ (i=1,\cdots,n)$ 中至少有一个不为零, 不妨设 $a_{11}\neq 0$, 记 $f_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}$, 令

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{a_{11}}f_1^2+g$$

求得 g, 此时 g 中已不含 x_1, 再记 $g_1=\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x_2}$, 并令

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{a_{11}}f_1^2+\frac{1}{a_{22}}g_1^2+h$$

此时 h 中已不含 x_1 与 x_2, 按这种方法继续运算, 可将二次型化为标准形;

(2) 如果 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中不含有任一变量的平方项, 即 $a_{ii}=0\ (i=1,\cdots,n)$, 但至少有一个 $a_{1j}\neq 0\ (j>1)$ 不为零 (a_{ij} 是 x_{ij} 项的系数), 不妨设 $a_{12}\neq 0$, 记 $f_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}, f_2=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2}$, 令

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{a_{12}}\left[(f_1+f_2)^2-(f_1-f_2)^2\right]+\varphi$$

求得 φ, 此时 φ 中已不含 x_1 与 x_2, 观察 φ 的结构, 如果 φ 中含有变量的平方项, 则按情况一中的方法进行, 否则按情况二中的方法进行, 直至二次型化为标准形.

例 14.1.13. 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$ 化为标准形.

记 $f_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}=x_1+x_2$, 令

$$f=\frac{1}{a_{11}}f_1^2+g=(x_1+x_2)^2+g$$

求得 $g=x_2^2-4x_3^2-2x_2x_3$, 记 $g_1=\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x_2}=x_2-x_3$, 令

$$g=\frac{1}{a_{22}}g_1^2+h$$

求得 $h=-5x_3^2$, 那么

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2-5x_3^2$$

作可逆线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1+x_2 \\ y_2 = x_2-x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

则有 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2-5y_3^2$.

例 14.1.14. 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 化为标准形.

二次型中不含有任一变量的平方项, 记 $f_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $f_2=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2}$, 则有

$$f_1=\frac{1}{2}(-4x_2+2x_3)=-2x_2+x_3,\ f_2=\frac{1}{2}(-4x_1+2x_3)=-2x_1+x_3$$

令

$$f=\frac{1}{a_{12}}\left[(f_1+f_2)^2-(f_1-f_2)^2\right]+\varphi=-\frac{1}{4}\left[(-2x_1-2x_2+2x_3)^2-(2x_1-2x_2)^2\right]+\varphi$$

$$= (x_1-x_2)^2-(x_1+x_2-x_3)^2+\varphi = (2x_1-x_3)(-2x_2+x_3)+\varphi = -4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3-x_3^2+\varphi$$

即 $\varphi = x_3^2$，所以

$$f(x_1,x_2,x_3) = -(x_1+x_2-x_3)^2+(x_1-x_2)^2+x_3^2$$

作可逆线性变换 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$，则有 $f(y_1,y_2,y_3) = -y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

例 14.1.15. 二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2-4(x_2-x_3)^2$$

的标准形为

A. $y_1^2+y_2^2$　　B. $y_1^2-y_2^2$　　C. $y_1^2+y_2^2-4y_3^2$　　D. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

将 f 完全展开，得

$$f = 2x_1^2-3x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$$

那么

$$f_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{2}(4x_1+2x_2+2x_3) = 2x_1+x_2+x_3$$

则

$$f = \frac{1}{a_{11}}f_1^2+g = 2x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2+\frac{1}{2}x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+x_2x_3+g$$

对比可得 $g = -\frac{7}{2}x_2^2-\frac{7}{2}x_3^2+7x_2x_3$，再令

$$g_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{1}{2}(-7x_2+7x_3) = -\frac{7}{2}x_2+\frac{7}{2}x_3$$

又 $g = \frac{1}{a_{22}}g_1^2+h$，可解出 $h=0$，因此可排除 C，D 选项，

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}^2}(2x_1+x_2+x_3)^2-\sqrt{\frac{7}{2}}^2(x_2-x_3)^2$$

作可逆线性变换 $\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(2x_1+x_2+x_3) \\ y_2 = \sqrt{\frac{7}{2}}(x_2-x_3) \\ y_3 = x_3 \end{cases}$，因此 $f(y_1,y_2,y_3) = y_1^2-y_2^2$ 选 B.

例 14.1.16. 运用标准形求例题 14.1.9 的惯性指数 p 和 q.

$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$，令 $f_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}$，则

$$f_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{2}(4x_1+2x_2+2x_3) = 2x_1+x_2+x_3$$

记 $f = \frac{1}{a_{11}}f_1^2+g$，对比可得 $g = \frac{3}{2}x_2^2+\frac{3}{2}x_3^2-3x_2x_3 = \frac{3}{2}(x_2-x_3)^2$，于是

$$f = \frac{1}{2}(2x_1+x_2+x_3)^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2$$

于是正惯性指数 $p=2$，负惯性指数 $q=0$.

14.2 正定性与矩阵的合同

正定矩阵是正实数概念的延伸——它定义了何为“正”的矩阵，一种方法是全部元素为正数，但这显然不是一个好的定义，因为它完全不涉及矩阵的具体结构。因此尝试借助正实数的概念推广至矩阵的正定性。

一个正实数 α 满足: 对任意一个矢量[1] $\boldsymbol{v}$, 矢量 $\alpha\boldsymbol{v}$ 会和 $\boldsymbol{v}$ 在同一方向上[2], 即内积为正 $\boldsymbol{v}^\top\alpha\boldsymbol{v} > 0$.

借助这个准则, 一个正的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 需要满足: 对任意一个矢量 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{A}v$ 和 $\boldsymbol{v}$ 在同一方向上, 即内积为正: $\boldsymbol{v}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} > 0$.

14.2.1 正定性

定理 14.2.1 (Hurwitz 定理)**.** 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充分必要条件: $\boldsymbol{A}$ 的各阶主子式 (顺序主子式) 都为正, 即

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为负定的充分必要条件: 奇数阶主子式为负, 偶数主子式为正, 即

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0 \; (r = 1, 2, \cdots, n).$$

定理 14.2.2 (实对称方阵的等价命题)**.** 设 $\boldsymbol{S} = (s_{ij})$ 是 n 阶实对称方阵, 则下述命题等价:

(1) 方阵 $\boldsymbol{S}$ 是正定的;

(2) 方阵 $\boldsymbol{S}$ 的每一个特征值均为正的;

(3) 存在正定对称方阵 $\boldsymbol{S}_1$, 使得 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1^2$;

(4) 存在可逆方阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{P}$;

(5) 方阵 $\boldsymbol{S}$ 的每个主子式均为正的;

(6) 方阵 $\boldsymbol{S}$ 的顺序主子式均为正的.

例 14.2.1. 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ 是否正定.

因为 $\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 5 & -2 & 0 \\ x_2 & -2 & 6 & -2 \\ x_3 & 0 & -2 & 4 \end{array}$, 所以 f 的矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式分别为

$$|5| = 5 > 0, \quad \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 26 > 0, \quad \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 84 > 0$$

所以这个二次型是正定的.

[1] 当强调方向时, 采用矢量的说法

[2] 仅描述新矢量在原矢量的分量方向上的投影是正的情况, 不要求两个矢量之间的夹角为零角即完全重合.

例 14.2.2. t 满足什么条件时, 下列二次型是正定的:

(1) $f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

(2) $f = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2tx_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

(1) 因为 $\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & t & -1 \\ x_2 & t & 1 & 2 \\ x_3 & -1 & 2 & 5 \end{array}$, 所以 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式分别为

$$|1| = 1 > 0, \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1 - t^2 > 0, \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -t(5t+4) > 0$$

所以当 $-\dfrac{4}{5} < t < 0$ 时, $f(x_1, x_2, x_3)$ 是正定的.

(2) f 的矩阵 $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & t & 5 \\ t & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式分别为

$$|1| = 1 > 0, \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2 > 0, \begin{vmatrix} 1 & t & 5 \\ t & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -t^2 + 30t - 105 > 0$$

因为 $4 - t^2$ 与 $-t^2 + 30t - 105$ 不能同时大于零, 所以无论 t 取什么值, 这个二次型都不能是正定的.

例 14.2.3. 判断二次型 $f = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$ 的正定性.

因为 $\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x & -5 & 2 & 2 \\ y & 2 & -6 & 0 \\ z & 2 & 0 & -4 \end{array}$, 所以 f 的矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式分别为

$$|-5| = -5 < 0, \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 26 > 0, \begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -80 < 0$$

即 f 是负定的.

例 14.2.4. 判断二次型 $f = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$ 的正定性.

f 的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, 任取 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 阶顺序主子式, 有

$$|\boldsymbol{A}_k| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^k} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,\cdots,k-1]{r_{i+1}-\frac{i}{i+1}r_i} \frac{1}{2^k} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{k}{k-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{k+1}{k} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{k+1}{k}>0,\ k=1,2,\cdots,n$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 正定, 从而二次型正定.

定理 14.2.3 (特征值与正定性). 若一矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的, 则其所有特征值 $\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$.

例 14.2.5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶正定矩阵, 证明 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|>8$.

证 由 $\boldsymbol{A}$ 是正定的, 则 $\lambda_{1,2,3}>0$, 那么 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=(\lambda_1+2)(\lambda_2+2)(\lambda_3+2)\geqslant 8$.

例 14.2.6 (2000 清华大学). 设 n 阶实方阵 $(n\geqslant 2)$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} b+8 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & b & 1 & \cdots & 1\\ 3 & 1 & b & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 3 & 1 & \cdots & 1 & b\end{pmatrix}$$

试求 b 的取值范围, 使 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

设 k 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}=(3,1,\cdots,1)^\top$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶顺序主子式为

$$|\boldsymbol{A}_k|=\left|\begin{pmatrix} b-1 & & & \\ & b-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}(3,1,\cdots,1)\right|=|(b-1)\boldsymbol{E}_k+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top|$$
$$=(b-1)^{k-1}|(b-1)\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}|=(b-1)^{k-1}(b+k+7)$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 的正定的充分必要条件是

$$|\boldsymbol{A}_k|>0\Leftrightarrow b>1 \text{ 且 } b>-(k+7),\ k=1,2,\cdots,n$$

所以, 当 $b>1$ 时 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

例 14.2.7 (2019 数一). 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & -1\\ 1 & a & -1\\ -1 & -1 & a\end{pmatrix}$,

(1) 求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵;

(2) 求正定矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{C}^2=(a+3)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$.

(1) **法一:** $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & 1\\ -1 & \lambda-a & 1\\ 1 & 1 & \lambda-a\end{vmatrix}\xlongequal[r_2+r_3]{r_1+r_3}\begin{vmatrix} \lambda-a+1 & 0 & \lambda-a+1\\ 0 & \lambda-a+1 & \lambda-a+1\\ 1 & 1 & \lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a+1)^2(\lambda-a-2)=0$,

因此特征值为 $\lambda_1=a+2$, $\lambda_{2,3}=a-1$ (二重), 则 λ_1 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,-1,1)^\top$, $\lambda_{2,3}$ 对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,1,0)^\top$, $\boldsymbol{\xi}_3=(1,0,1)^\top$, 下作特征向量的正交单位化,

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\xi}_2]}{[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1]}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\xi}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\xi}_3-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\xi}_3]}{[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1]}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\xi}_3]}{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2]}\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,2)^\top$$

单位化

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{||\boldsymbol{\alpha}_1||}\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\frac{1}{||\boldsymbol{\alpha}_2||}\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3=\frac{1}{||\boldsymbol{\alpha}_3||}\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

得正交矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}a+2 & & \\ & a-1 & \\ & & a-1\end{pmatrix}$.

法二: 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 1 & -1\\ 1 & a & -1\\ -1 & -1 & a\end{pmatrix}$, 于是

$$f(\lambda)=\lambda^3-\operatorname{tr}\boldsymbol{A}\lambda^2+\sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant 3}A\begin{vmatrix}a_{j_1j_1} & a_{j_1j_2}\\ a_{j_2j_1} & a_{j_2j_2}\end{vmatrix}-\det\boldsymbol{A}=\lambda^3-3a\lambda^2+3(a^2-1)\lambda-(a-1)^2(a+2)=0$$

即得特征值 $\lambda_1=a+2$, $\lambda_{2,3}=a-1$ (二重), 当 $\lambda=\lambda_1$ 时, $\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1-r_2}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 那么 r_1 可由 r_2 与 $(3,-3,0)$ 线性表示, 则

$$(2,-1,1)\times(3,-3,0)=(3,3,-3)\Rightarrow(1,1,-1)\Rightarrow\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,-1)^{\top}$$

当 $\lambda=\lambda_{2,3}$ 时, $\lambda_{2,3}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_3]{\substack{r_1+r_3\\ r_2+r_3}}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 那么

$$r_1\cdot(1,1,2)=0,\ r_1\times(1,1,2)=(-3,3,0)\Rightarrow(-1,1,0)$$

则取 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,1,0)^{\top}$, $\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,2)^{\top}$, 因此 $\boldsymbol{\xi}_{1,2,3}$ 已经两两相互正交, 则正交矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}a+2 & & \\ & a-1 & \\ & & a-1\end{pmatrix}$.

(2) 因为 $\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}a+2 & & \\ & a-1 & \\ & & a-1\end{pmatrix}$, 所以 $\boldsymbol{P}^{\top}[(a+3)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 4 & \\ & & 4\end{pmatrix}$, 即

$$(a+3)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 4 & \\ & & 4\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\top}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\top}\cdot\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\top}$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\top}\Rightarrow\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}^{\top}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & -1 & 1\\ -1 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}.$$

14.2.2 半正定性

定理 14.2.4 (对称方阵的等价命题). 设 $\boldsymbol{S}$ 是 n 阶对称方阵, 则下述命题等价:

(1) 方阵 $\boldsymbol{S}$ 是半正定的;

(2) 方阵 $\boldsymbol{S}$ 的所有特征值均为非负的;

(3) 存在 n 阶半正定对称方阵 $\boldsymbol{S}_1$, $\operatorname{rank}\boldsymbol{S}_1=\operatorname{rank}\boldsymbol{S}$, 使得 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_1^2$;

(4) 存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{P}$, $\operatorname{rank}\boldsymbol{P}=\operatorname{rank}\boldsymbol{S}$, 使得 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{P}$;

(5) 方阵 $\boldsymbol{S}$ 的所有主子式均为非负的;

(6) 方阵 $\boldsymbol{S}$ 的所有 k 阶主子式之和均为非负的, $k=1,2,\cdots,n$.

定理 14.2.5. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶非零半正定矩阵, 则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵, 且

$$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})>\det\boldsymbol{A}+\det\boldsymbol{B}.$$

例 14.2.8 (2005 武汉大学). 已知实二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+9x_4^2+2a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$, 问当 a 取何值时, f 是正定的、半正定的以及不定的二次型?

二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&a&0\\a&1&a&0\\a&a&1&0\\0&0&0&9\end{pmatrix}$, 得 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式分别为

$$\varDelta_1=1,\ \varDelta_2=(1-a)(1+a),\ \varDelta_3=(1-a)^2(1+2a),\ \varDelta_4=9\varDelta_3$$

由此可见,

(1) 当 $-\dfrac{1}{2}<a<1$ 时, f 为正定二次型;

(2) 当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 或 $a=1$, f 为半正定二次型;

(3) 当 $a<-\dfrac{1}{2}$ 或 $a>1$ 时, f 为不定二次型.

例 14.2.9 (2014 南京大学). 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{B}$ 正定, 且 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 半正定, 证明:

(1) 若 λ 是 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{B}|=0$ 的根, 则 $\lambda\geqslant 1$;

(2) $\det\boldsymbol{A}\geqslant\det\boldsymbol{B}$.

证

(1) 因为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶实对称矩阵, 所以存在可逆实矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 仍为实对称矩阵, 故又存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得,

$$\boldsymbol{Q}^{\top}\left(\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{Q}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

其中 λ_k, $(k=1,2,\cdots,n)$ 为 $\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 的特征值, 又因为

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right|=\left|\lambda\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right|=\left|\boldsymbol{P}^2\right||\lambda\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\left|\boldsymbol{P}^2\right|\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\right|=0$$

因为 $\boldsymbol{B}$ 是正定的, $\det\boldsymbol{P}^2>0$, 所以 $|\boldsymbol{B}|\left|\boldsymbol{P}^2\right|>0$, 所以 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$ 的全部特征值, 也是 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{B}|$ 的所有根, 又因为 $\boldsymbol{P}^{\top}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}$ 是实对称矩阵, 其特征值为 $\lambda_1-1,\lambda_2-1,\cdots,\lambda_n-1$, 所以 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 半正定当且仅当 $\boldsymbol{P}^{\top}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}$ 半正定, 这又等价为 $\lambda_k-1\geqslant 0$, $(k=1,2,\cdots,n)$, 即 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{B}|=0$ 的任一根 $\lambda\geqslant 1$.

(2) 由 *(1)* 可知 $\det\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\right)=\prod\limits_{i=1}^{r}\lambda_k\geqslant 1$, 所以 $\det\boldsymbol{A}\geqslant\det\boldsymbol{B}$.

例 14.2.10 (1994 华中师范大学). 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}_{s\times n}$ 均为行满秩实矩阵, $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\top}\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\top}\right)^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\top}$, 证明:

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top}-\boldsymbol{Q}$ 是半正定的;

(2) $0\leqslant\det\boldsymbol{Q}\leqslant\det\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top}\right)$.

证

(1) 由题意知: $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=m$, $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=s$, 且 $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top}\right)=m$, $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\top}\right)=s$, 所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top}$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\top}$ 均为可逆矩阵, 并且分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\top}\\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\top} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\top}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{\top}$ 是半正定的, 且与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top}-\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\top}\end{pmatrix}$ 合同, 因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top}-\boldsymbol{Q}$ 是半正定的.

(2) 易知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top}$ 是正定的, $\boldsymbol{Q}$ 是半正定的, 所以存在可逆实矩阵 P, 使得

$$\boldsymbol{P}^{\top}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top}\right)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\ (\lambda_k\geqslant 0)$$

又因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top}-\boldsymbol{Q}$ 是半正定的, 所以 $1-\lambda_k\geqslant 0$ 即 $0\leqslant\lambda_k\leqslant 1$, 其中 $k=1,2,\cdots,n$,

$$\det\left(\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}\right)=\left|\boldsymbol{P}^2\right||\boldsymbol{Q}|=\prod_{i=1}^{r}\lambda_i\leqslant 1=\left|\boldsymbol{P}^2\right|\left|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top}\right|\Rightarrow 0\leqslant\det\boldsymbol{Q}\leqslant\det\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top}\right).$$

推论 14.2.1 (实对称半正定矩阵的单调性). 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶实对称半正定矩阵, 即 $\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{B}\geqslant 0$, 则 $\det\boldsymbol{A}\geqslant\det\boldsymbol{B}\geqslant 0$.

14.2.3 矩阵的合同

例 14.2.11. 对于二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经非奇异线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 化为 $f=\boldsymbol{y}^{\top}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 必定是

A. 相等　　B. 相似　　C. 合同　　D. 具有相同的特征值

令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$, 则

$$f=\boldsymbol{x}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^{\top}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=\left(\boldsymbol{y}^{\top}\boldsymbol{C}^{\top}\right)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\top}\left(\boldsymbol{C}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\top}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$$

因此 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

例 14.2.12. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&3&0\\3&0&0\\0&0&k\end{pmatrix}$, 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同但不相似, 则常数 k 的取值范围是多少.

若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同但不相似, 说明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的正负特征值个数分别相同, 但是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值不全相同, 则

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+3&0&0\\0&\lambda+1&-2\\0&-2&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda^2-\lambda-6)$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda&-3&0\\-3&\lambda&0\\0&0&\lambda-k\end{vmatrix}=(\lambda-k)(\lambda^2-9)$$

那么 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=-2$, $\lambda_3=3$, $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=k$, $\lambda_3=3$, 所以 $k<0$ 且 $k\neq-2$.

例 14.2.13. 用行初等变换法将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&-1\\0&-1&-4\end{pmatrix}$ 化为标准形.

$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&1&0&0\\1&2&-1&0&1&0\\0&-1&-4&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&-1&-4&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-5&-1&1&1\end{array}\right)$ 由此可得 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{C}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$.

14.3 正交变换与直角坐标变换

定义 14.3.1 (正交矩阵). 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, 则存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的列向量是对应的正交规范化的特征向量.

定理 14.3.1 (正交变换与相似). 若二次型 $\boldsymbol{x}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 有 $\boldsymbol{x}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\top}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$, 则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

定理 14.3.2 (正交矩阵的行列式). 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, 那么等价为实方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式等于 ±1, 并且当 $|\boldsymbol{A}|=1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素等于该元素的代数余子式, 即 $a_{ij}=A_{ij}$; 当 $|\boldsymbol{A}|=-1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素等于该元素的代数余子式乘以 -1, 即 $a_{ij}=-A_{ij}$.

证 充分性: 设 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top}=\boldsymbol{E}$, 所以 $|\boldsymbol{A}|^2=1$, 即 $|\boldsymbol{A}|=\pm1$, 若 $|\boldsymbol{A}|=1$, 则 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\top}$, 比较等式两边对应的元素, 得 $a_{ij}=A_{ij}\ (1\leqslant i,j\leqslant n)$; 同理当 $|\boldsymbol{A}|=-1$, 可证 $a_{ij}=-A_{ij}$,
必要性: 当 $|\boldsymbol{A}|=1$ 时, 由 $a_{ij}=A_{ij}\ (1\leqslant i,j\leqslant n)$, 有 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\top}$; 当 $|\boldsymbol{A}|=-1$ 时, 由 $a_{ij}=-A_{ij}\ (1\leqslant i,j\leqslant n)$, 有 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}=-(-\boldsymbol{A})^{\top}=\boldsymbol{A}^{\top}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵.

例 14.3.1. 求例题 14.1.4 中, 是否存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 f 化为 g.

二次型 f 对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$, 其特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&1\\-1&\lambda-2&0\\1&0&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

则 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=3$, 同理可得 g 的特征值为 $0,1,2$, 因为特征值不全相等, 故 $\boldsymbol{A}\nsim\boldsymbol{B}$, 因此不存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下将 f 化为 g.

例 14.3.2. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+ax_3^2+2x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可化为标准形 $y_1^2+by_2^2-y_3^2$, 求 $a+b$.

由题意 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&a\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&&\\&b&\\&&-1\end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则

$$\begin{cases}\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}\\ \det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{B}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2+a=b\\-2=-b\end{cases}\Rightarrow a+b=2.$$

例 14.3.3. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为 3 维单位列向量, $\boldsymbol{\alpha}^{\top}\boldsymbol{\beta}=\dfrac{1}{2}$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\top}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\top}$, 求正交变换下, 二次型 $\boldsymbol{x}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的标准形.

先证明 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,

$$\boldsymbol{A}^{\top}=\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\top}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\top}\right)^{\top}=\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\top}\right)^{\top}+\left(\boldsymbol{\beta}\alpha^{\top}\right)^{\top}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\top}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\top}=\boldsymbol{A}$$

对 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 得

$$\begin{cases}\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\alpha\beta}^\top\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{\alpha\beta}^\top\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta\alpha}^\top\boldsymbol{\beta}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\dfrac{3}{2}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\end{cases}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{2}\Rightarrow\boldsymbol{\beta}^\top\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{2}$, 且 $\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}^\top\boldsymbol{\beta}=1$, 则得特征值 $\lambda_1=\frac{3}{2},\lambda_2=-\frac{1}{2}$, 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^\top$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)^\top$, 那么

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=2a_1b_1+2a_2b_2+2a_3b_3=2\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\beta}=1\Rightarrow\lambda_3=\operatorname{tr}\boldsymbol{A}-\lambda_1-\lambda_2=0$$

于是 $\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的标准形为 $\frac{3}{2}y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2$.

例 14.3.4. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{AP}$ 成为对角矩阵.

特征多项式 $f(\lambda)$ 为:

$$\begin{aligned}f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1&1\\-1&\lambda&1&-1\\-1&1&\lambda&-1\\1&-1&-1&\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+r_4]{\substack{r_1-r_4\\r_2+r_4}}\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0&1-\lambda\\0&\lambda-1&0&\lambda-1\\0&0&\lambda-1&\lambda-1\\1&-1&-1&\lambda\end{vmatrix}\\&=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant 4}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_1&i_2&i_3\\1&2&3\end{pmatrix}\left[(-1)^{i_1+i_2+i_3+1+2+3}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_4\\4\end{pmatrix}\right]\\&=\lambda\begin{vmatrix}\lambda-1&&\\&\lambda-1&\\&&\lambda-1\end{vmatrix}-(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda-1&0\\1&-1&1\end{vmatrix}+(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&0&\lambda-1\\1&-1&-1\end{vmatrix}\\&=(\lambda-1)^3(\lambda+3)=0\end{aligned}$$

解得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$ (三重), $\lambda_2=-3$, 对于 $\lambda_1=1$, 可求得 $\boldsymbol{A}$ 的相应的 3 个线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0)^\top,\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,0)^\top,\ \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,0,1)^\top$$

利用 Schmidt 正交化方法, 得

$$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)^\top,\ \boldsymbol{\xi}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2,0)^\top,\ \boldsymbol{\xi}_3=\frac{1}{\sqrt{12}}(-1,1,1,3)^\top$$

对于 $\lambda_2=-3$, 可求得 $\boldsymbol{A}$ 的相应的一个线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,-1,1)^\top$, 把它单位化得 $\boldsymbol{\xi}_4=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^\top$, 于是有 $\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{AP}=\operatorname{diag}(1,1,1,-3)$, 其中正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{12}}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{12}}&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{3}{\sqrt{12}}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

例 14.3.5 (2010 武汉大学). 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^\top,\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^\top$$

是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{D}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{D}$;

(3) 求行列式 $\left|\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{B}^2\right)^{-1}+\frac{4}{9}\boldsymbol{B}^*+\boldsymbol{B}\right|$, 其中 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}$ 的相似矩阵, $\boldsymbol{B}^*$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵.

(1) 因为 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_2$, 所以 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的两个线性无关的特征向量; 又 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 所以

$$\boldsymbol{A}(1,1,1)^\top=(3,3,3)^\top=3(1,1,1)^\top$$

则 $\lambda_3=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^\top$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 3 的特征向量, 总之, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0,0,3$, 属于特征值 0 的所有特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ (k_1, k_2 不全为零), 属于特征值 3 的所有特征向量为 $k_3\boldsymbol{\alpha}_3$ ($k_3\neq 0$).

(2) 先将 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化

$$\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^\top,\ \boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\xi}_1]}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|^2}\boldsymbol{\xi}_1=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)^\top$$

再将 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化, 得

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)^\top,\ \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^\top,\ \boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^\top$$

那么 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ 于是 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{pmatrix}$.

(3) 因为 $\boldsymbol{B}$ 相似于 $\boldsymbol{A}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}$, 而 $\boldsymbol{A}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}$ 相似于 $\boldsymbol{D}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}$, 于是 $\boldsymbol{B}$ 相似于 $\boldsymbol{D}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}$, 故

$$|\boldsymbol{B}|=\left|\boldsymbol{D}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}\right|=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}\Rightarrow \boldsymbol{B}^*=|\boldsymbol{B}|\cdot\boldsymbol{B}^{-1}$$

$$\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{B}^2\right)^{-1}+\frac{4}{9}\boldsymbol{B}^*+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\left(\frac{3}{2}(\boldsymbol{B}^{-1})^3+\frac{3}{2}(\boldsymbol{B}^{-1})^2+\boldsymbol{E}\right)=\boldsymbol{B}\varphi(\boldsymbol{B}^{-1})$$

其中 $\varphi(x)=\frac{3}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+1$, 因为 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 的特征值为 $-\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$, 所以 $\varphi(\boldsymbol{B}^{-1})$ 特征值为

$$\varphi\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^3+\frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^2+1=\frac{11}{9}\ (\text{二重})\ \varphi\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2+1=\frac{19}{9}$$

故所求的行列式的值为 $|d|=|\boldsymbol{B}||\varphi(\boldsymbol{B}^{-1})|=\frac{27}{8}\times\left(\frac{11}{9}\right)^2\times\frac{19}{9}=\frac{2299}{216}$.

例 14.3.6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{\alpha}=(0,-1,1)^\top$, $\boldsymbol{\beta}=(1,0,-1)^\top$, $\boldsymbol{A\alpha}=3\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{A\beta}=3\boldsymbol{\alpha}$, 且存在 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$, 有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})<\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$,

(1) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$, 化二次型 $\boldsymbol{x}^\top(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{x}$ 为标准形, 并写出该标准形;

(2) 若 $\boldsymbol{\gamma}=(2,0,-1)^\top$, 求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\gamma}$.

(1) 由 $\boldsymbol{A\alpha}=3\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{A\beta}=3\boldsymbol{\alpha}$, 可得 $\begin{cases}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=3(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=-3(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\end{cases}$ 即特征值 $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-3$, 其对应的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(1,-1,0)^\top,\ \boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=(-1,-1,2)^\top$$

因为 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})<\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$, 可知 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 即 $\det\boldsymbol{A}=0$, 又 $\det\boldsymbol{A}=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i$, 故 $\lambda_3=0$, 并且 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 则其特征向量相互正交, 即

$$(1,-1,0)\times(-1,-1,2)=(-2,-2,-2)\Rightarrow(1,1,1)\Rightarrow\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,1)^\top$$

则 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为[3] $\lambda_1^*=\lambda_2\lambda_3=0,\ \lambda_2^*=\lambda_1\lambda_3=0,\ \lambda_3^*=\lambda_1\lambda_2=-9$，由 $\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{O}=\boldsymbol{\Lambda}$ 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Q}&=\boldsymbol{Q}^\top\left(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^\top\right)^*\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^\top\left(\boldsymbol{Q}^\top\right)^*\boldsymbol{\Lambda}^*\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^\top\left|\boldsymbol{Q}^\top\right|\left(\boldsymbol{Q}^\top\right)^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^*|\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E}\\&=\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{\Lambda}^*|\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E}=|\boldsymbol{Q}|^2\boldsymbol{\Lambda}^*\xlongequal{\det\boldsymbol{Q}=\pm1}\boldsymbol{\Lambda}^*\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{Q}^\top(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{Q}=\left[\begin{pmatrix}3&&\\&-3&\\&&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&-9\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}3&&\\&-3&\\&&-9\end{pmatrix}$ 即在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下，二次型的标准形为 $3y_1^2-3y_2^2-9y_3^2$.

(2) γ 可由 $\boldsymbol{\xi}_{1,2,3}$ 线性表示，即 $\exists k_1,k_2,k_3$，使得 $\gamma=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3$，即

$\boldsymbol{A}^n\gamma=\boldsymbol{A}^n(k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3)=k_1\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_3=k_1\lambda_1^n\boldsymbol{\xi}_1+k_2\lambda_2^n\boldsymbol{\xi}_2+k_3\lambda_3^n\boldsymbol{\xi}_3=k_1\lambda_1^n\boldsymbol{\xi}_1+k_2\lambda_2^n\boldsymbol{\xi}_2$

作增广矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\xi}_1\quad\boldsymbol{\xi}_2\quad\boldsymbol{\xi}_3\ \vdots\ \gamma)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&1&2\\-1&-1&1&0\\0&2&1&-1\end{array}\right)$，将其化为行最简形

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&1&2\\-1&-1&1&0\\0&2&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_1+r_2\\r_3-2r_2}]{\substack{r_2+r_1\\r_2\times(-\frac{1}{2})}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&-1&-1\\0&0&3&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2+r_3]{r_3\times\frac{1}{3}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&0&-\dfrac{2}{3}\\0&0&1&\dfrac{1}{3}\end{array}\right)$$

因此 $k_1=1,\ k_2=-\dfrac{2}{3},\ k_3=\dfrac{1}{3}$，故 $\boldsymbol{A}^n\gamma=\lambda_1^n\boldsymbol{\xi}_1-\dfrac{2}{3}\lambda_2^n\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}3^n+\dfrac{2}{3}\cdot(-3)^n\\-3^n+\dfrac{2}{3}\cdot(-3)^n\\-\dfrac{4}{3}\cdot(-3)^n\end{pmatrix}$.

例 14.3.7. 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+2ax_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3\ \ (a\in\mathbb{N})$$

经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为标准形为 $y_1^2+6y_2^2+by_3^2$,

(1) 求 a,b 的值及正交变换;

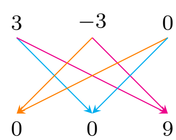
(2) 证明: 二次型 $\boldsymbol{x}^\top(\boldsymbol{A}^*+37\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}$ 正定, 其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

(1) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&a&-2\\a&4&4\\-2&4&-3\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}\sim\operatorname{diag}(1,6,b)$，由矩阵相似可得 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=1+6+b$，$\det\boldsymbol{A}=6b$，解得 $a=2,b=-6$，因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=6,\ \lambda_3=-6$，

法一: $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&2\\-2&\lambda-4&-4\\2&-4&\lambda+3\end{vmatrix}$，当 $\lambda=\lambda_1$ 时，$(1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，解得特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(-2,0,1)^\top$；当 $\lambda=\lambda_2$ 时，$(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，解得特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,5,2)^\top$；当 $\lambda=\lambda_3$ 时，$(-6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，解得特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,-1,2)^\top$，

法二: $\lambda=\lambda_1$ 时，$1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-3&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-3&-4\\0&0&0\end{pmatrix}$，$r_1$ 可由 r_2 与 $(3,1,6)$ 线性表示，则

$$(-2,-3,-4)\times(3,1,6)=(-14,0,7)\Rightarrow(-2,0,1)\Rightarrow\boldsymbol{\xi}_1=(-2,0,1)^\top$$

[3]因为 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $\dfrac{\det\boldsymbol{A}}{\lambda}$，且 $\det\boldsymbol{A}=\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$，或者可理解为 

当 $\lambda=\lambda_2$ 时, $6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6&-2&2\\-2&2&-4\\2&-4&9\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2\times\frac{3}{2}\\ r_1\times\frac{1}{2}}]{\substack{r_2+\frac{1}{3}r_1\\ r_3-\frac{1}{3}r_1\\ \frac{3}{5}r_3+\frac{3}{2}r_2}}\begin{pmatrix}3&-1&1\\0&2&-5\\0&0&0\end{pmatrix}$, r_1 可由 r_2 与 $(3,-3,6)$ 线性表示, 则

$$(0,2,-5)\times(3,-3,6)=(-3,-15,-6)\Rightarrow(1,5,2)\Rightarrow\boldsymbol{\xi}_2=(1,5,2)^\top$$

当 $\lambda=\lambda_3$ 时, $-6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-6&-2&2\\-2&-10&-4\\2&-4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2-r_1-r_3\\ r_2\leftrightarrow r_3}]{\substack{r_1\times\frac{1}{2}\\ r_2\times\frac{1}{2}}}\begin{pmatrix}-3&-1&1\\2&-4&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$, r_1 可由 r_2 与 $(-5,3,4)$ 线性表示, 则

$$(2,-4,-3)\times(-5,3,4)=(-7,7,-14)\Rightarrow(1,-1,2)\Rightarrow\boldsymbol{\xi}_3=(1,-1,2)^\top$$

将特征向量 $\boldsymbol{\xi}_{1,2,3}$ 单位化得

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$, 则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 为所求正交变换, 其中 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{5}{\sqrt{30}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

(2) 因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $1,6,-6$, 因此 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $-36,-6,6$, 那么 $\boldsymbol{A}^*+37\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $1,31,43$, 皆大于 0, 因此二次型 $\boldsymbol{x}^\top(\boldsymbol{A}^*+37\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}$ 正定.

例 14.3.8. 设 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 是三维列向量, 且 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=-1$, 又 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^\top$ 求 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$.

因为 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=-1$ (两个向量的内积), 所以

$$\boldsymbol{A}^2=\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^\top\right)\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^\top\right)=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^\top+\boldsymbol{\alpha}\underbrace{\boldsymbol{\beta}^\top\cdot\boldsymbol{\alpha}}_{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}=-1]}\boldsymbol{\beta}^\top=\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^\top=3\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^\top\right)-2\boldsymbol{E}=3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$$

即 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})+6\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\dfrac{\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}}{-6}=\boldsymbol{E}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=\dfrac{4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}}{6}$.

例 14.3.9. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维非零实列向量, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\dfrac{a}{\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top$ 为正交矩阵, 其中 $a\neq0$, $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵,

(1) 求 a 的值, 并证明: $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关;

(2) 当 $\boldsymbol{\alpha}=(b,b,0)^\top$ $(b\neq0)$ 时, 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为规范形.

(1) 由 $\boldsymbol{A}^\top=\left(\boldsymbol{E}-\dfrac{a}{\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top\right)^\top=\boldsymbol{E}-\dfrac{a}{\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top)^\top=\boldsymbol{E}-\dfrac{a}{\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}^\top)^\top\boldsymbol{\alpha}^\top=\boldsymbol{E}-\dfrac{a}{\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top=\boldsymbol{A}$ 可知, $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 那么

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top=\left(\boldsymbol{E}-\frac{a}{\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top\right)(\boldsymbol{E}-\frac{a}{\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top)=\boldsymbol{E}-\frac{2a}{\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top+\frac{a^2}{(\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha})^2}\boldsymbol{\alpha}\underbrace{\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}^\top=\boldsymbol{E}+\frac{a^2-2a}{\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top$$

又因为 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$, 即 $\dfrac{a^2-2a}{\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top=\boldsymbol{O}$, 而 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维非零实列向量, 即 $\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}\neq0$, $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top\neq\boldsymbol{O}$, 因此 $a^2-2a=0\Rightarrow a=2$ $(a\neq0)$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\left(\boldsymbol{E}-\dfrac{a}{\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top\right)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}-a\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关.

(2) **法一:** 当 $\boldsymbol{\alpha}=(b,b,0)^\top$ $(b\neq0)$ 时,

$$\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}=(b,b,0)\begin{pmatrix}b\\b\\0\end{pmatrix}=2b^2,\ \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top=\begin{pmatrix}b\\b\\0\end{pmatrix}(b,b,0)=\begin{pmatrix}b^2&b^2&0\\b^2&b^2&0\\0&0&0\end{pmatrix}=b^2\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

那么 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 因此特征多项式为 (两种方法)

(i) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{pmatrix}(\lambda^2-1)(\lambda-1)=0$, 得特征值为 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=1$,

(ii) $\lambda^3-\operatorname{tr}\boldsymbol{A}\cdot\lambda^2+\sum\limits_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant 3}\begin{vmatrix}a_{j_1j_1} & a_{j_1j_2}\\ a_{j_2j_1} & a_{j_2j_2}\end{vmatrix}\cdot\lambda-\det\boldsymbol{A}=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1$, 解得 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=1$,

当 $\lambda=\lambda_1$ 时, 解得特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^\top$; 当 $\lambda=\lambda_{2,3}$ 时, 解得对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,1,0)^\top$, $\boldsymbol{\xi}_3=(0,0,1)^\top$, 将 $\boldsymbol{\xi}_{1,2,3}$ 分别单位化, 得

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$, 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下, 标准形为 $-y_1^2+y_2^2+y_2^2$ 也是规范形.

法二: 不妨设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top=b^2\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow b^2\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=1$, 所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为

$$\lambda_{b1}=\lambda_{b2}=0,\ \lambda_{b3}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}=2b^2$$

又因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top=\boldsymbol{E}-\dfrac{1}{b^2}\boldsymbol{B}$, 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_{a1}=\lambda_{a2}=1,\ \lambda_{a3}=-1$, 并且 λ_{b1} 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0)^\top$; λ_{b2} 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=(0,0,1)^\top$;

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\alpha}\Rightarrow\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,0)^\top$$

单位化得 $\boldsymbol{e}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, 令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$, 则在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下, 标准形为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$ 也是规范形.

14.3.1 谱分解

定理 14.3.3 (谱分解定理)**.** 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ_i, 所对应特征向量为 $\boldsymbol{x}_i$, 经过单位化和正交化, 化为两两正交的单位特征向量 $\boldsymbol{e}_i\ (i=1,2,\cdots,n)$, 则有

$$\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^\top.$$

例 14.3.10. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 为实对称矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和均为 0, 设 2, 3 是 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值, 则 a_{11} 对应的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{11}$ 为

A. 1　　B. 2　　C. 5　　D. 6

因为 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和均为 0, 故由定理 13.1.8 知, $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值为 0, 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 0, 2, 3, 又由定理 13.1.6 知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵的特征值为

$$\lambda_1^*=2\times3=6,\ \lambda_2^*=0\times3=0,\ \lambda_3^*=0\times2=0$$

且 λ_1^* 对应的特征向量为 $(1,1,1)^\top$, 又由定理 14.3.3, 知

$$\boldsymbol{A}^*=0+0+6=6\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$$

故 $\boldsymbol{A}_{11}=2$, 选 B.

例 14.3.11. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称不可逆矩阵, 且 $\begin{pmatrix}2&-2&1\\-2&-1&2\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6&-6&3\\-12&-6&12\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}$.

对等式两边同时转置，有 $A^\top\begin{pmatrix}2&-2\\-2&-1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-12\\-6&-6\\3&12\end{pmatrix}$，令 $\xi_1=(2,-2,1)^\top$，$\xi_2=(-2,-1,2)^\top$，则有

$$A^\top\xi_1=3\xi_1,\ A^\top\xi_2=6\xi_2\Rightarrow\lambda_1=3,\ \lambda_2=6$$

又因为 A 不可逆，所以 $\det A=0\Rightarrow\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0\Rightarrow\lambda_3=0$，所以 A 的特征值分别为 $2,6,0$，故

$$A=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i e_i e_i^\top=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\cdot\frac{\xi_i}{\|\xi_i\|}\cdot\left(\frac{\xi_i}{\|\xi_i\|}\right)^\top=3\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}(2,-2,1)+6\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}\cdot(-2,-1,2)=\begin{pmatrix}4&0&-2\\0&2&-2\\-2&-2&3\end{pmatrix}.$$

例 14.3.12. 矩阵 A 为 3 阶实对称矩阵，特征值为 $0,1,1$，且 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$ 是 A 的两个不同的特征向量，若 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_2$，求 A.

若 α_1,α_2 都为 0 的特征向量，则 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\mathbf{0}$，与已知条件矛盾；若 α_1,α_2 都为 1 的特征向量，则 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2$，与已知条件矛盾；若 α_1,α_2 分别为 $1,0$ 的特征向量，则 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1$，与已知条件矛盾；综上，$\alpha_1$ 与 α_2 分别为 $0,1$ 的特征向量，又 A 为实对称矩阵，那么 α_1 与 α_2 相互正交，那么它们的内积为零，解得 $a=0$，故 $\alpha_1=(1,1,0)^\top$，$\alpha_2=(1,-1,1)^\top$，并且 $A-E$ 的特征值为 $-1,0,0$，由定理 *14.3.3* 知

$$A-E=(-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

例 14.3.13. 假设 3 阶实对称矩阵 A 的秩为 2，并且 $AB=C$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$，求 A 的所有特征值及相应的特征向量，并求矩阵 A 及 A^{2023}.

设 $\xi_1=(1,0,-1)^\top$，$\xi_2=(1,0,1)^\top$ 那么 $B=(\xi_1,\xi_2)$，$C=(-\xi_1,\xi_2)$，于是

$$AB=C\Rightarrow A(\xi_1,\xi_2)=(-\xi_1,\xi_2)$$

即 $A\xi_1=-\xi_1$，$A\xi_2=\xi_2$，则 $\lambda_1=-1,\lambda_2=0$ 是 A 的特征值，ξ_1,ξ_2 是 A 的分别属于 λ_1,λ_2 的特征向量，又 $\operatorname{rank}A=2$，则 $\xi_3=0$，于是

$$A=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i e_1 e_1^\top=(-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)+1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)+0=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

那么 $A^{2023}=A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

例 14.3.14. 设 3 阶实对称矩阵 A 的每行元素之和为 3，且 $\operatorname{rank}A=1$，$\beta=(-1,2,2)^\top$，(1) 求 $A^n\beta$；(2) 求 $\left(A-\frac{3}{2}E\right)^{2024}$.

(1) **法一：** 因为 A 的每行元素之和为 *3*，故特征值 $\lambda_1=3$，且对应的特征向量为 $\xi_1=(1,1,1)^\top$，又因为 A 是实对称矩阵，所以 A 一定能相似对角化，并且由 $\operatorname{rank}A=1$，故矩阵 A 的非零特征值个数为 *1*，即 $\lambda_2=\lambda_3=0$，设其对应的特征向量为 ξ_2，ξ_3，则 ξ_1,ξ_2,ξ_3 相互正交，故可令 $\xi_2=(-1,1,0)^\top$，$\xi_3=(-1,0,1)^\top$，因为 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是三维空间中线性无关的三个向量，则其线性组合能表示该空间中的任一向量，即 $\exists k_1,k_2,k_3$，使得 $\beta=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3$，即

$$A^n\beta=A^n(k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3)=k_1A^n\xi_1+k_2A^n\xi_2+k_3A^n\xi_3=k_1\lambda_1^n\xi_1+k_2\lambda_2^n\xi_2+k_3\lambda_3^n\xi_3$$

作增广矩阵 $B=(\xi_1\quad\xi_2\quad\xi_3\ \vdots\ \beta)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&-1\\1&1&0&2\\1&0&1&2\end{array}\right)$，将其化为行最简形

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&-1\\1&1&0&2\\1&0&1&2\end{array}\right)\xrightarrow[r_1+r_3]{r_2-r_1\ r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&2\\0&1&2&3\\0&2&1&3\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_1-r_3\\r_2-2r_3}]{\substack{r_2\leftrightarrow r_3\\r_3-2r_2\\r_3\times(-\frac{1}{3})}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{array}\right)$$

因此 $k_1=2,\ k_2=1,\ k_3=1$，故 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}=2\lambda_1^n\boldsymbol{\xi}_1+\lambda_2^n\boldsymbol{\xi}_2+\lambda_3^n\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}2\cdot 3^n\\2\cdot 3^n\\2\cdot 3^n\end{pmatrix}=3^n\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

法二: 同上，得 $\lambda_1=3,\ \lambda_2=\lambda_3=0,\ \boldsymbol{\xi}_1=(1,1,1)^\top$，将 $\boldsymbol{\xi}_1$ 单位化，得 $\boldsymbol{e}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，因此

$$\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^\top=\lambda_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1^\top=3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

又因为 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=1$，故 $\boldsymbol{A}^n=(\operatorname{tr}\boldsymbol{A})^{n-1}\cdot\boldsymbol{A}$，因此 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}=3^{n-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=3^{n-1}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3^n\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(2) 因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $3,0,0$，则 $\boldsymbol{A}-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{E}$ 的特征值分别为 $\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2}$，又因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，即 $\exists\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\left(\boldsymbol{A}-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&&\\&-\frac{3}{2}&\\&&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$，因此

$$\left(\boldsymbol{A}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}\right)^{2024}=\underbrace{\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}_2\overbrace{\boldsymbol{P}^{-1}\cdot\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{P}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{P}^{-1}}_{2024}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}_2^{2024}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&&\\&-\frac{3}{2}&\\&&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}^{2024}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\boldsymbol{P}\left(\frac{3}{2}\right)^{2024}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}^{-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2024}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2024}\boldsymbol{E}.$$

例 14.3.15 (2024 数一). 已知数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足 $x_0=-1,y_0=0,z_0=2$，且

$$\begin{cases}x_n=-2x_{n-1}+2z_{n-1}\\ y_n=-2y_{n-1}-2z_{n-1}\\ z_n=-6x_{n-1}-3y_{n-1}+3z_{n-1}\end{cases}$$

记 $\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}$，写出满足 $\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$，并求 $\boldsymbol{A}^n$ 及 x_n,y_n,z_n.

由题设知，$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&2\\0&-2&-2\\-6&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\\z_{n-1}\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&2\\0&-2&-2\\-6&-3&3\end{pmatrix}$，由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 得 $\lambda(\lambda-1)(\lambda+2)=0$，解得 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=-2$，那么，当 $\lambda_1=0$ 时，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1,1)^\top$，当 $\lambda_2=1$ 时，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=(2,-2,3)^\top$，当 $\lambda_2=-2$ 时，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,-2,0)^\top$，故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&-2&-2\\1&3&0\end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(0,1,-2)=\boldsymbol{\Lambda}$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$，那么

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-4+(-1)^{n+1}\cdot 2^n&-2+(-1)^{n+1}\cdot 2^n&2\\4+(-1)^n\cdot 2^{n+1}&2+(-1)^n\cdot 2^{n+1}&-2\\-6&-3&3\end{pmatrix}$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$，那么 $\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_0=\begin{pmatrix}-4+(-1)^{n+1}\cdot 2^n&-2+(-1)^{n+1}\cdot 2^n&2\\4+(-1)^n\cdot 2^{n+1}&2+(-1)^n\cdot 2^{n+1}&-2\\-6&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8+(-2)^n\\-8+(-2)^{n+1}\\12\end{pmatrix}$，则 $x_n=8+(-2)^n,y_n=-8+(-2)^{n+1},z_n=12$.

例 14.3.16. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 已知

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0,\ \boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$$

其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$, 求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$, 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形, 并写出矩阵 $\boldsymbol{A}$.

法一: 由 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}-(-1)\boldsymbol{E}|=0$, 知 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 $\lambda_1=-1$, 且记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 由 $\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 知

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{A\beta}_1,\boldsymbol{A\beta}_2,\boldsymbol{A\beta}_3)=(2\boldsymbol{\beta}_1,2\boldsymbol{\beta}_2,2\boldsymbol{\beta}_3)$$

又 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=2$, 所以 2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值, 对应的特征向量分别为[4] $\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\beta}_3$, 且已正交, 又因为 $\boldsymbol{A}$ 是二次型的系数矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵[5], 设 λ_1 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1$, 于是

$$(-1,0,1)\times(-1,2,1)=(-2,-2,-2)\Rightarrow(1,1,1)\Rightarrow\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,1)^\top$$

分别将特征向量 $\boldsymbol{\xi}_{1,2,3}$ 单位化, 有 $\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$, 那么

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$, 因此二次型的标准形为 $f(y_1,y_2,y_3)=-y_1^2+2y_2^2+2y_3^2$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}^\top\\&=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{2}{\sqrt2}&-\frac{2}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{4}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt2}&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}^\top=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

法二: 同上得 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=2$, $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,1)^\top$, $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1)^\top$, $\boldsymbol{\xi}_3=(-1,2,-1)^\top$, 那么 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 的特征值分别为 $-3,0,0$, 则

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=-3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1^\top=-3\cdot\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1)=-\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}.$$

例 14.3.17. 设 3 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 满足 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 且 $\det\boldsymbol{A}=2$,

(1) 证明: $\boldsymbol{A}$ 能相似对角化;

---

[4]这里最好要选择矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中已经正交的向量, 可以由 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$, 且 $(-1,0,1)\cdot(-1,2,-1)=0$ 知选 $\boldsymbol{\beta}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_3$ 最合适.

[5]一般地, 不考虑带有虚数的多项式.

(2) 如果 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 且 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,-1)^\top$ 是齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个解, 求对称矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$.

(1) 因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{E}$, 所以

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}\Rightarrow \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$$

那么

$$3=\operatorname{rank}[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})-(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})]\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\leqslant 3\Rightarrow\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=3$$

又因为属于特征值 -1 的特征向量的个数为 $3-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$, 属于特征值 2 的特征向量的个数为 $3-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$, 相加得 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量, 即 $\boldsymbol{A}$ 能相似对角化.

(2) 由 (1) 可知, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值分别为 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$, 且 $\det\boldsymbol{A}=2=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, 所以 $\lambda_3=-1$, 又因为 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,-1)^\top$ 是齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个解, 所以 λ_2 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,-1)^\top$, 故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的两个特征值分别为 3, 0, 0, 所以存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^\top(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{Q}=\operatorname{diag}(3,0,0)$ 因此

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}(3,0,0)\boldsymbol{Q}^\top=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\pm\sqrt3&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\pm\sqrt3&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^\top\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\pm\sqrt3&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^\top$$

即 $\boldsymbol{B}=\pm\sqrt3\cdot\dfrac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\dfrac{1}{\sqrt3}(1,1,-1)=\pm\dfrac{\sqrt3}{3}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$.

例 14.3.18. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为三阶实对称矩阵, $\det\boldsymbol{A}=-2$, $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=0$, 记

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{vmatrix}x_1^2&x_2&x_3&x_4\\x_2&a_{11}&a_{12}&a_{13}\\x_3&a_{21}&a_{22}&a_{23}\\x_4&a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

已知 $(1,1,1)^\top$ 为线性方程组 $(\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解, 其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 试给出正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, 使得 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 化为标准形, 并求出矩阵 $\boldsymbol{A}$.

记 $\boldsymbol{x}=(x_2,x_3,x_4)^\top$, 由行列式的降阶公式 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{D}|\,|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|$, 得

$$f=\begin{vmatrix}x_1^2&\boldsymbol{x}^\top\\\boldsymbol{x}&\boldsymbol{A}\end{vmatrix}=\det\boldsymbol{A}\cdot\left(x_1^2-\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}\right)=-2x_1^2-\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}$$

问题归结为求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 使得 $g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}$ 化为标准形, 令 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^\top$, 那么

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1\Rightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1\Rightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\det\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}\boldsymbol{\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_1$$

即 $\lambda_1=-2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^\top$, 又因为 $\det\boldsymbol{A}=-2$, $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=0$, 所以 $\begin{cases}\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=-2\\\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$ 解得 $\lambda_2=\lambda_3=1$, 设 λ_2 对应的特征向量为 $(t_1,t_2,t_3)^\top$, 因为 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称矩阵, 所以不同特征值的特征向量是正交的, 所以 $t_1+t_2+t_3=0$, 由此解得 $\boldsymbol{A}$ 的属于 1 的两个相互正交的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0)^\top$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-1,2)^\top$, 取正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|},\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|},\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(-2,1,1)$, 因此 $\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{-1}\operatorname{diag}(1,-2,-2)$, 于是, 可取正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$, 其中 $\boldsymbol{y}=(y_2,y_3,y_4)^\top$, 使得 $g=\boldsymbol{y}^\top(\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P})\boldsymbol{y}=y_2^2-2y_3^2-2y_4^2$, 最后再令 $x_1=y_1$, 以及 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&\\&\boldsymbol{P}\end{pmatrix}$, 则正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\\boldsymbol{x}\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}$ 可使 f 化为标准形 $f=-2y_1^2-y_2^2+2y_3^2+2y_4^2$, 并且由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^\top=-3\cdot\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1)=-\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{e}_i=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_i}{\|\boldsymbol{\alpha}_i\|}$.

14.3.2 正交变换的应用

几何应用

例 14.3.19. 设中心在原点的椭圆方程为 $x^2-4xy+5y^2=1$, 求该椭圆的长半轴与短半轴.

方程系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&5\end{pmatrix}$, 那么 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2\\2&\lambda-5\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=3\pm2\sqrt{2}$, 即

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)z_1^2+\left(3-2\sqrt{2}\right)z_2^2=1\Rightarrow\frac{z_1^2}{\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}}+\frac{z_2^2}{\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}}=1\Rightarrow\frac{z_1^2}{\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1}\right)^2}+\frac{z_2^2}{\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{1}\right)^2}=1$$

因此, 长半轴长度为 $\sqrt{2}+1$, 短半轴长度为 $\sqrt{2}-1$.

例 14.3.20. 求椭圆 $2x^2+4xy+5y^2=1$ 的面积.

由题意 $f=\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^\top\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=1$, 那么 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-6)(\lambda-1)=0\Rightarrow\lambda_1=6,\lambda_2=1$, 因此

$$(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2)^\top,\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,1)^\top\Rightarrow Q=\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{|\boldsymbol{\alpha}_1|},\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{|\boldsymbol{\alpha}_2|}\right)$$

$f=\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 在 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 的作用下, 化为 $f=\boldsymbol{Y}^\top\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}=6y_1^2+y_2^2=1\Rightarrow S=\dfrac{\pi}{\sqrt{6}}$.

二次型与曲面方程

例 14.3.21. 转换一般二次型方程

$$2x^2+5y^2+5z^2+4xy-4xz-8yz=1$$

为标准二次型, 并判定其在直角坐标系 $O-xyz$ 中描述的图形类型.

因为 $\begin{array}{c|ccc} & x & y & z\\ \hline x & 2 & 2 & -2\\ y & 2 & 5 & -4\\ z & -2 & -4 & 5\end{array}$, 所以二次型对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$, 故特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+2r_1]{r_2+r_3}\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\0&\lambda-1&\lambda-1\\2\lambda-2&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_{1,2,3}=1,1,10$, 对 $\lambda=1$, 解齐次方程组

$$\begin{cases}-x-2y+2z=0\\-2x-4y+4z=0\\2x+4y-4z=0\end{cases}$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,0)^\top$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,1)^\top$, 将他们正交化, 得 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|^2}\boldsymbol{\beta}_1$, 即

$$\boldsymbol{\beta}_1=(2,-1,0)^\top,\ \boldsymbol{\beta}_2=(2,0,1)^\top-\frac{4}{5}(2,-1,0)^\top=\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1\right)^\top$$

单位化: $\boldsymbol{e}_1=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},-\dfrac{1}{\sqrt{5}},0\right)^\top$, $\boldsymbol{e}_2=\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{15},\dfrac{4\sqrt{5}}{15},\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^\top$; 对 $\lambda=10$, 解齐次方程组

$$\begin{cases}8x-2y+2z=0\\-2x+5y+4z=0\\2x+4y+5z=0\end{cases}$$

得基础解系 $(1,2,-2)^\top$，单位化得 $\boldsymbol{e}_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)^\top$，令 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3}\\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，则有正交变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$，即

$\begin{cases}x=\frac{2\sqrt{5}}{5}u+\frac{2\sqrt{5}}{15}v+\frac{1}{3}w\\ y=-\frac{\sqrt{5}}{5}u+\frac{4\sqrt{5}}{15}v+\frac{2}{3}w\\ z=\frac{\sqrt{5}}{2}v-\frac{2}{3}w\end{cases}$，将原二次型化为 $u^2+v^2+10w^2=1$，即为椭球面.

例 14.3.22. 用正交变换将二次曲面的方程

$$x^2-2y^2-2z^2-4xy+4xz+8yz-27=0$$

化为标准方程, 并说明该曲面是什么曲面.

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=(x,y,z)^\top$，则曲面方程为 $\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=27$，$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+7)=0$$

对于 $\lambda_{1,2}=2$，解齐次线性方程组 $(\lambda_{1,2}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，求得对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,1,0)^\top$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,1)^\top$，并将其正交化，得

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^\top,\ \boldsymbol{e}_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,5)^\top$$

对于 $\lambda_3=-7$，解齐次线性方程组 $(\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，求得对应的单位化特征向量为 $\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{3}(1,2,-2)^\top$，取正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，令 $\boldsymbol{X}'=(x',y',z')^\top$，则正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}'$ 将曲面的方程 $\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=27$ 可化为如下标准方程

$$2x'^2+2y'^2-7z'^2=27$$

这是单叶双曲面.

最值问题

例 14.3.23. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$,

(1) 写出二次型 f 的矩阵表达式;

(2) 用正交变换把二次型 f 化为标准形, 并写出相应的正交矩阵;

(3) 若 $\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x}=5$, 求 f_{max}.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -3 & 0\\ -2 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$.

(2) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 2\\ -1 & \lambda+3 & 0\\ 2 & 0 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+3)(\lambda+4)$，当 $\lambda=2$ 时，由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$，即

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 5 & 0\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{r_3-\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1 & -5 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

则基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=(5,1,-2)^\top$; 当 $\lambda=-3$ 时, $(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$, 即

$$-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4&-1&2\\-1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2+4r_1\\r_3-2r_1}]{\substack{r_2\times(-1)\\r_1\leftrightarrow r_2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

则基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,1)^\top$; 当 $\lambda=-4$ 时, $(-4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$, 即

$$-4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5&-1&2\\-1&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2+5r_1\\r_3-2r_1}]{\substack{r_2\times(-1)\\r_1\leftrightarrow r_2}}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&4&2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times\frac12]{r_3+\frac12 r_2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&4&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

则基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,-2)$, 因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 对应于不同特征值的特征向量相互正交, 即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 相互正交, 故只需将其单位化, 有

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}\frac{5}{\sqrt{30}}&0&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$ 则经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, 二次型化为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})^\top\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=2y_1^2-3y_2^2-4y_3^2.$$

(3) 因为 $\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})^\top(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{y}=5$, 故求 f 在 $\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{y}=5$ 的最大值, 则由定理 13.1.7 得

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=2y_1^2-3y_2^2-4y_3^2\leqslant 2(y_1^2+y_2^2+y_3^2)=10$$

例 14.3.24. 已知二次型 $f(x,y,z)=3x^2+2y^2+2z^2+2xy+2zx$,

(1) 用正交变换把二次型 f 化为标准形, 并写出相应的正交矩阵;

(2) 求函数 $f(x,y,z)$ 在单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的最大值与最小值.

(1) 二次型对应的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}$, 则特征多项式为

$$f(\lambda)=\lambda^3-7\lambda^2+14\lambda-8=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)\Rightarrow\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=4$$

那么 $\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-1&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 其中 r_1 可由 r_2 与 $(0,1,-1)$ 线性表示, 则

$$(1,0,1)\times(0,1,-1)=(-1,1,1)\Rightarrow\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,1)^\top$$

同理可得 $\boldsymbol{\xi}_2=(0,-1,1)^\top$, $\boldsymbol{\xi}_3=(2,1,1)^\top$, 则令 $\boldsymbol{P}=\left(\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|},\frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|},\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}\right)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$, 于是正交变换 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{X}$, 其中 $\boldsymbol{X}'=(x',y',z')$, $\boldsymbol{X}=(x,y,z)$.

(2) 注意到

$$x^2+y^2+z^2=\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{X}=\left(\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{X}\right)^\top\left(\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{X}\right)=\boldsymbol{X}'^\top\boldsymbol{X}'=x'^2+y'^2+z'^2$$

$$f(x,y,z)=\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{X}=\left(\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{X}\right)\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{X}\right)=(\boldsymbol{X}')^\top\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{X}')=x'^2+2y'^2+4z'^2$$

函数 $f(x,y,z)$ 在单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的最大值与最小值也就是函数 $x'^2+2y'^2+4z'^2$ 在 $x'^2+y'^2+z'^2=1$ 上的最大值与最小值, 因此

$$f_{max}=\max_{x'^2+y'^2+z'^2=1}\{x'^2+2y'^2+4z'^2\}=\max_{x'^2+y'^2+z'^2=1}\{4-3x'^2-2y'^2\}=4-3x'^2-2y'^2\Big|_{(0,0,1)}=4$$

$$f_{min}=\min_{x'^2+y'^2+z'^2=1}\{x'^2+2y'^2+4z'^2\}=\min_{x'^2+y'^2+z'^2=1}\{1+y'^2+3z'^2\}=1+y'^2+3z'^2\Big|_{(1,0,0)}=1.$$

14.3.3 直角坐标变换

设一般二次曲面的方程为

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0$$

写出矩阵形式为

$$\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{x}+c=0 \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ $(a_{ij}=a_{ji})$, $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^\top$, $\boldsymbol{B}=(b_1,b_2,b_3)^\top$, 作正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, 其中 $\lambda_{1,2,3}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 那么化为标准方程可分为两种情况进行.

(1) 若方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ 有解, 则取其任意一个解 $\boldsymbol{\delta}$, 作直角坐标变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{\delta}$$

代入 (1) 式得

$$\boldsymbol{x}'^\top\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}'+2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{B})^\top\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{\delta}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{\delta}+2\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{\delta}+c=0$$

由 $\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$, 可得

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2=d \tag{2}$$

其中 $d=-\left(\boldsymbol{\delta}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{\delta}+2\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{\delta}+c\right)$, (2) 式就是 (1) 式的标准方程.

(2) 若方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}=0$ 无解, 则必有 $\det\boldsymbol{A}=0$, 由于 $\det\boldsymbol{A}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, 则 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 中至少有一个为 0, 不妨设 $\lambda_1\neq0,\lambda_3=0$, 作正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}'$, 代入 (1) 式得

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+2b_1'x'+2b_2'y'+2b_3'z'+c=0 \tag{3}$$

(i) 若 $\lambda_2\neq0$, 将 (3) 配方得

$$\lambda_1(x'+b_1')^2+\lambda_2(y'+b_2')^2=d-2b_3'z' \tag{4}$$

其中 $d=\lambda_1b_1'^2+\lambda_2b_2'^2-c$, 当 $b_3'\neq0$ 时, 作平移

$$\begin{cases}x''=x'+b_1'\\y''=y'+b_2'\\z''=z'-\dfrac{d}{2b_3'}\end{cases}$$

则 (4) 式化为标准方程

$$\lambda_1x''^2+\lambda_2y''^2=-2b_3'z''$$

当 $b_3'=0$ 时, 作平移 $\begin{cases} x''=x'+b_1' \\ y''=y'+b_2' \\ z''=z' \end{cases}$ 则 (4) 式化为标准方程

$$\lambda_1 x''^2+\lambda_2 y''^2=d$$

(ii) 若 $\lambda_2=0$, 将 (3) 配方得

$$\lambda_1(x'+b_1')^2=d-2b_2'y'-2b_3'z' \tag{5}$$

其中 $d=\lambda_1 b_1'^2-c$, 当 b_2',b_3' 不全为 0 时, 作直角坐标变换

$$\begin{cases} x''=x'+b_1' \\ y''=\dfrac{1}{\sqrt{b_2'^2+b_3'^2}}(b_2'y'+b_3'z')-\dfrac{d}{2} \\ z''=\dfrac{1}{\sqrt{b_2'^2+b_3'^2}}(-b_2'y'+b_3'z') \end{cases}$$

(5) 式化为标准方程

$$\lambda_1 x''^2=-2\sqrt{b_2'^2+b_3'^2}\,y''$$

当 b_2',b_3' 全为 0 时, 令 $\begin{cases} x''=x'+b_1' \\ y''=y' \\ z''=z' \end{cases}$ 则 (5) 式化为标准方程

$$\lambda_1 x''^2=d.$$

例 14.3.25. 作直角坐标变换化二次曲面

$$x^2-2y^2+10z^2+28xy+20xz-8yz-26x+32y+28z-38=0$$

为标准方程, 并说明是什么曲面.

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 14 & 10 \\ 14 & -2 & -4 \\ 10 & -4 & 10 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^\top$, $\boldsymbol{B}=(-13,16,14)^\top$, $c=-38$, 曲面方程记为

$$\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{x}+c=0$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=(\lambda-9)(\lambda-18)(\lambda+18)$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=9$, $\lambda_2=18$, $\lambda_3=-18$, 当 $\lambda_1=9$ 时, 由

$$9\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 8 & -14 & -10 \\ -14 & 11 & 4 \\ -10 & 4 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 4 & -7 & -5 \\ 14 & -11 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 4 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 r_1 可由 r_2 与 $(2,-1,0)$ 线性表示, 那么特征向量为 $\vec{r}_2\times(2,-1,0)=(1,2,-2)\Rightarrow\boldsymbol{\xi}_1=(1,2,-2)^\top$; 当 $\lambda_2=18$ 时, 由

$$18\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 17 & -14 & -10 \\ -14 & 20 & 4 \\ -10 & 4 & 8 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -7 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 r_1 可由 r_2 与 $(-1,0,1)$ 线性表示, 那么特征向量为 $\vec{\boldsymbol{r}}_2\times(-1,0,1)=(2,1,2)\Rightarrow\boldsymbol{\xi}_2=(2,1,2)^\top$; 当 $\lambda_3=-18$ 时, 由

$$-18\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-19&-14&-10\\-14&-16&4\\-10&4&-28\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}7&8&-2\\-5&2&-14\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}7&8&-2\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

则 r_1 可由 r_2 与 $(1,1,0)$ 线性表示, 那么特征向量为 $\vec{\boldsymbol{r}}_2\times(1,1,0)=(-2,2,1)\Rightarrow\boldsymbol{\xi}_3=(-2,2,1)^\top$, 将各特征向量单位化, 有

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$$

得正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$, 因为 $\det\boldsymbol{A}\neq 0$, 方程组 $\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ 有唯一解 $\boldsymbol{\delta}=(-1,1,0)^\top$, 作直角坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qx}'+\boldsymbol{\delta}$, 曲面方程化为

$$9x'^2+18y'^2-18z'^2=9$$

得曲面的标准方程为

$$x'^2+2y'^2-2z'^2=1$$

因此曲面为单叶双曲面.

第三部分

概率论与数理统计

第 15 章

概率论的基本概念

“概率论，当局限在适当的范围内，应该同样引起数学家、实验者和政治家的兴趣。”

——德·摩根

概率论是数学的一个分支, 研究随机事件的发生概率和随机现象的规律性. 它是研究不确定性的一种工具和方法.

概率论的基本概念包括随机试验、样本空间、事件、概率等. 随机试验是指具有多种可能结果的试验, 例如掷硬币、抛骰子等. 样本空间是指随机试验的所有可能结果的集合. 事件是样本空间的子集, 表示试验中我们感兴趣的一些结果. 概率是事件发生的可能性的度量, 通常用一个介于 0 和 1 之间的数来表示.

概率论的基本原理包括古典概型、几何概型和统计概型. 古典概型适用于试验结果的数量有限且每个结果发生的可能性相等的情况, 例如抛硬币、掷骰子等. 几何概型适用于试验结果的数量无限且每个结果发生的可能性相等的情况, 例如在一条直线上选择一个点的位置. 统计概型适用于试验结果的数量无限且每个结果发生的可能性不相等的情况, 例如从一副牌中抽取一张牌.

概率论的应用广泛, 包括统计学、金融学、物理学、工程学、生物学等领域. 它可以用于描述随机现象的规律性、进行风险评估和决策分析、进行数据分析和建模等. 概率论提供了一种量化不确定性的方法, 帮助我们理解和解决各种实际问题.

15.1 随机事件及其概率

15.1.1 事件的运算

定理 15.1.1 (交换律)**.** $A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$.

定理 15.1.2 (结合律)**.** $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $ABC = (AB)C = A(BC)$.

特别地 $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ 不一定成立, 比如当 $A \neq \varnothing$, $B = \Omega$, $C = \varnothing$ 时, 该式不成立.

定理 15.1.3 (和与积的分配律). $(\mathsf{A}\cup\mathsf{B})\cap\mathsf{C}=(\mathsf{A}\cap\mathsf{C})\cup(\mathsf{B}\cap\mathsf{C}),\ (\mathsf{A}\cap\mathsf{B})\cup\mathsf{C}=(\mathsf{A}\cup\mathsf{C})\cap(\mathsf{B}\cup\mathsf{C})$.

定理 15.1.4 (差与积的分配律). $(\mathsf{A}-\mathsf{B})\cap\mathsf{C}=(\mathsf{A}\cap\mathsf{C})-(\mathsf{B}\cap\mathsf{C}),\ (\mathsf{A}\cap\mathsf{B})-\mathsf{C}=(\mathsf{A}-\mathsf{C})\cap(\mathsf{B}-\mathsf{C})$.

定理 15.1.5 (和与差的分配律). $(\mathsf{A}\cup\mathsf{B})-\mathsf{C}=(\mathsf{A}-\mathsf{C})\cup(\mathsf{B}-\mathsf{C})$
特别地 $(\mathsf{A}-\mathsf{B})\cup\mathsf{C}=(\mathsf{A}\cup\mathsf{C})-(\mathsf{B}\cup\mathsf{C})$ 不一定成立, 比如当 $\mathsf{A}=\mathsf{B},\ \mathsf{C}\neq\varnothing$ 时, 该式不成立.

定理 15.1.6 (对偶律). $\overline{\mathsf{A}\cup\mathsf{B}}=\bar{\mathsf{A}}\bar{\mathsf{B}},\ \overline{\mathsf{AB}}=\bar{\mathsf{A}}\cup\bar{\mathsf{B}},\ \overline{\mathsf{A}\cup\mathsf{B}\cup\mathsf{C}}=\bar{\mathsf{A}}\bar{\mathsf{B}}\bar{\mathsf{C}},\ \overline{\mathsf{ABC}}=\bar{\mathsf{A}}\cup\bar{\mathsf{B}}\cup\bar{\mathsf{C}}$.

定理 15.1.7 (和差转换). (1) 差: $\mathsf{A}-\mathsf{B}=\begin{cases}\mathsf{A}-\mathsf{AB}=\mathsf{A}\bar{\mathsf{B}}\\ \mathsf{A}-\mathsf{BA}=\bar{\mathsf{B}}\mathsf{A}.\end{cases}$

(2) 和: $\mathsf{A}\cup\mathsf{B}=\begin{cases}(\mathsf{A}-\mathsf{B})\cup\mathsf{B}=\mathsf{A}\bar{\mathsf{B}}\cup\mathsf{B}=\bar{\mathsf{B}}\mathsf{A}\cup\mathsf{B}\\ \mathsf{A}\cup(\mathsf{B}-\mathsf{A})=\mathsf{A}\cup\bar{\mathsf{A}}\mathsf{B}=\mathsf{A}\cup\mathsf{B}\bar{\mathsf{A}}.\end{cases}$

15.1.2　概率的性质

定理 15.1.8. $P(\varnothing)=0,\ P(\Omega)=1$.

定理 15.1.9 (有限可加性). 设 $\mathsf{A}_1,\ \mathsf{A}_2,\ \cdots,\ \mathsf{A}_n$ 是两两互不相容的事件, 则有

$$P\left(\mathsf{A}_1\cup\mathsf{A}_2\cup\cdots\cup\mathsf{A}_n\right)=P\left(\mathsf{A}_1\right)+P\left(\mathsf{A}_2\right)+\cdots+P\left(\mathsf{A}_n\right)$$

(1) 事件 S 被分成两个不相容的事件 $\mathsf{S}_1,\ \mathsf{S}_2\ (\mathsf{S}_1\mathsf{S}_2=\varnothing,\ \mathsf{S}_1\cup\mathsf{S}_2=\mathsf{S})$, 则 $P(\mathsf{S})=P\left(\mathsf{S}_1\right)+P\left(\mathsf{S}_2\right)$;

(2) 若 $\mathsf{S}_1\subset\mathsf{S}$, 则 $P\left(\mathsf{S}-\mathsf{S}_1\right)=P(\mathsf{S})-P\left(\mathsf{S}_1\right)$.

定理 15.1.10 (求逆公式). $P\big(\bar{\mathsf{A}}\big)=1-P(\mathsf{A})$.

例 15.1.1. 设 A,B 为两个随机事件, 若 $P(\mathsf{AB})=0.25,\ P(\mathsf{B})=0.3,\ P(\mathsf{A}\cup\mathsf{B})=0.6$, 求 $P\big(\mathsf{A}\mid\bar{\mathsf{B}}\big)$.

如图 15.1.1 所示, 则 $P\big(\mathsf{A}\mid\bar{\mathsf{B}}\big)=\dfrac{P\big(\mathsf{A}\bar{\mathsf{B}}\big)}{P\big(\bar{\mathsf{B}}\big)}=\dfrac{0.3}{1-P(\mathsf{B})}=\dfrac{3}{7}$.

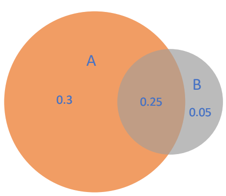


图 15.1.1

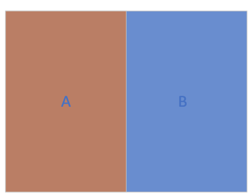


图 15.1.2

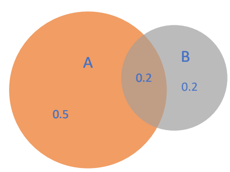


图 15.1.3

例 15.1.2. 设 A,B 为随机事件, $\mathsf{AB}=\overline{\mathsf{A}}\,\overline{\mathsf{B}},\ 0<P(\mathsf{B})<1$, 求 $P\big(\mathsf{A}\mid\overline{\mathsf{B}}\big)+P\big(\overline{\mathsf{A}}\mid\mathsf{B}\big)$.

因为 $\mathsf{AB}=\overline{\mathsf{A}}\,\overline{\mathsf{B}}$, *所以事件* $\mathsf{A}+\mathsf{B}=\Omega$, *如图 15.1.2 所示, 则* $P\big(\mathsf{A}\mid\overline{\mathsf{B}}\big)+P\big(\overline{\mathsf{A}}\mid\mathsf{B}\big)=P(\mathsf{A}\mid\mathsf{A})+P(\mathsf{B}\mid\mathsf{B})=1+1=2$.

例 15.1.3. 已知 $P(\overline{\mathsf{A}})=0.3$, $P(\mathsf{B})=0.4$, $P(\mathsf{A}-\mathsf{B})=0.5$, 求 $P\{\mathsf{B}\mid(\mathsf{A}\cup\overline{\mathsf{B}})\}$.

由题意可作出如图 15.1.3 所示的 ven 图, 则 $P\left\{\mathsf{B}\mid\left(\mathsf{A}\cup\overline{\mathsf{B}}\right)\right\}=\dfrac{P\left(\mathsf{B}\cap\left(\mathsf{A}\cup\overline{\mathsf{B}}\right)\right)}{P\left(\mathsf{A}\cup\overline{\mathsf{B}}\right)}=\dfrac{P(\mathsf{AB})}{1-P(\mathsf{AB})}=0.25.$

15.1.3 古典概率与几何概率

古典概率

例 15.1.4. 求 10 个不同规格的零件中混入 3 个次品, 现进行逐个检查, 则查完 5 个零件时正好查出 3 个次品的概率.

法一: 记 $\mathsf{A}=$ 查完 5 个零件正好查出 3 个次品, 那么事件 A 由两个事件构造:

$$\mathsf{B}=\text{前 4 次检查, 查出 2 个次品}, \mathsf{C}=\text{第 5 次检查, 查出的是次品}$$

即 $\mathsf{A}=\mathsf{BC}$, 由乘法公式 $P(\mathsf{A})=P(\mathsf{BC})=P(\mathsf{B})P(\mathsf{C}|\mathsf{B})$, 前 4 次检查中有 2 个正品和 2 个次品的组合为

$$P(\mathsf{B})=\frac{\mathrm{C}_3^2\cdot\mathrm{C}_7^2}{\mathrm{C}_{10}^4}=\frac{3}{10}$$

已知 B 发生的条件下, 剩下 6 个零件中查出 1 个次品的概率为 $\frac{1}{6}$, 即 $P(\mathsf{C}|\mathsf{B})=\frac{1}{6}$, 于是 $P(\mathsf{A})=\frac{3}{10}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{20}$.

法二: 事件 A 等价于在 3 个次品中选一个放在第 5 个位置上, 然后在 7 个正品中选 2 个与余下的 2 个次品排在前 4 个位置上, 最后将其余 5 个正品随意排在后面 5 个位置上, 所以

$$P(\mathsf{A})=\frac{\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_2^2\cdot 4!\cdot 5!}{10!}=\frac{1}{20}.$$

法三: 考虑 3 只次品在 10 次检查中的位置, 问题转化为前 4 个位置中选 2 个放次品, 第 5 个位置必须放次品, 于是

$$P(\mathsf{A})=\frac{\mathrm{C}_4^2\cdot 1}{\mathrm{C}_{10}^3}=\frac{1}{20}.$$

法四: 只考虑放正品的位置, 则前 4 个位置需要放 2 个正品, 后 5 个位置全为正品, 则 $P(\mathsf{A})=\dfrac{\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_5^5}{\mathrm{C}_{10}^3}=\dfrac{1}{20}$

几何概率

15.1.4 概率基本公式及条件概率

定理 15.1.11 (与独立有关的条件概率). 设 $P(\mathsf{B})\in(0,1)$, 则 A 与 B 相互独立的充要条件为:

(1) $P(\mathsf{A}\mid\mathsf{B})=P\left(\mathsf{A}\mid\bar{\mathsf{B}}\right)$;

(2) $P(\mathsf{A}\mid\mathsf{B})+P\left(\bar{\mathsf{A}}\mid\bar{\mathsf{B}}\right)=1$;

(3) $P\left(\bar{\mathsf{A}}\mid\mathsf{B}\right)+P\left(\mathsf{A}\mid\bar{\mathsf{B}}\right)=1$.

15.1.5 全概率公式和 Bayes 公式

定义 15.1.1 (完备事件组). 设 $\mathsf{B}_1,\mathsf{B}_2,\cdots,\mathsf{B}_n$ 为试验 E 的一组事件, Ω 为样本空间, 若满足以下两个条件:

(1) $\mathsf{B}_i\mathsf{B}_j=\emptyset, i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n$;

(2) $\mathsf{B}_1 \cup \mathsf{B}_2 \cup \cdots \cup \mathsf{B}_n = \Omega$.

则称 $\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2 \cdots, \mathsf{B}_n$ 是一个完备事件组, 也称 $\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2, \cdots, \mathsf{B}_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分.

定理 15.1.12 (全概率公式与 Bayes 公式)**.** 设 Ω 为试验 E 的样本空间, $\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2, \cdots, \mathsf{B}_n$ 为 Ω 的一个划分, 且 $P(\mathsf{B}_i) > 0\ \ (i = 1, 2, \cdots, n)$, 则

$$P(\mathsf{A}) = \sum_{i=1}^{n} P(\mathsf{B}_i) P(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}_i) = P(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}_1) P(\mathsf{B}_1) + P(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}_2) P(\mathsf{B}_2) + \cdots + P(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}_n) P(\mathsf{B}_n)$$

称为全概率公式. 而

$$P(\mathsf{B}_i \mid \mathsf{A}) = \frac{P(\mathsf{B}_i \mathsf{A})}{P(\mathsf{A})} = \frac{P(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}_i) P(\mathsf{B}_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}_j) P(\mathsf{B}_j)} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

称为 Bayes 公式.

例 15.1.5. 一条生产线生产 n 件产品不出故障的概率为 $\dfrac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}\ \ (n = 0, 1, \cdots)$ 若每件产品合格的概率为 $p\ \ (0 < p < 1)$, 且各产品是否合格相互独立, 求该生产线在两次故障之间共生产 $k\ \ (k = 0, 1, \cdots)$ 件合格品的概率.

设事件 $\mathsf{A}_i =$ “两次故障之间生产的产品总个数为 $i\ \ (i = 0, 1, \cdots)$”, 事件 $\mathsf{B}_k =$ “两次故障之间生产的合格品个数为” $k\ \ (k = 0, 1, \cdots, i)$, 那么事件 B_k 的概率为

$$\begin{aligned}
P\{\mathsf{B}_k\} &= \sum_{i=0}^{\infty} P\{\mathsf{A}_i\} \cdot P\{\mathsf{B}_k \mid \mathsf{A}_i\} = \sum_{i=k}^{\infty} P\{\mathsf{A}_i\} \cdot P\{\mathsf{B}_k \mid \mathsf{A}_i\} = \sum_{i=k}^{\infty} \left(\frac{\lambda^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right) \cdot \left[\mathrm{C}_i^k p^k (1-p)^{i-k}\right] \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} p^k \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \mathrm{C}_i^k (1-p)^{i-k} = \mathrm{e}^{-\lambda} p^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i+k}}{(i+k)!} \mathrm{C}_{i+k}^k (1-p)^i = \mathrm{e}^{-\lambda} p^k \lambda^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i+k)!} \frac{(i+k)!}{k! i!} (1-p)^i \\
&= \frac{1}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} p^k \lambda^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^i}{i!} = \frac{1}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} p^k \lambda^k \cdot \mathrm{e}^x \Big|_{x=\lambda(1-p)} = \mathrm{e}^{-\lambda p} \frac{(p\lambda)^k}{k!}
\end{aligned}$$

15.2 事件的独立性

第 16 章

随机变量及其分布

"我创建了形貌随机征象的一种概率散布。"

——泊松

随机变量是一个可以随机取不同值的变量, 其取值是由随机事件的结果决定的. 随机变量可以是离散的, 也可以是连续的.

随机变量的分布描述了其取不同值的概率分布情况. 常见的随机变量分布包括:

1. 离散型随机变量的分布:
   (a) 二项分布: 描述了在一次伯努利试验中成功的次数的分布.
   (b) 泊松分布: 描述了在一段时间内某事件发生次数的分布.
   (c) 几何分布: 描述了在一系列独立伯努利试验中首次成功所需的次数的分布.
2. 连续型随机变量的分布:
   (a) 正态分布: 也称为高斯分布, 是最常见的连续型随机变量分布, 具有钟形曲线.
   (b) 均匀分布: 描述了在一个区间内各个数值出现的概率相同的分布.
   (c) 指数分布: 描述了连续时间内某事件发生的间隔时间的分布.

除了以上列举的分布外, 还有众多其他类型的随机变量分布, 每种分布都有其特定的数学形式和特征. 在统计学和概率论中, 随机变量及其分布是研究的重要对象, 用来描述和分析随机现象的规律.

16.1 离散型随机变量的概率分布

16.1.1 离散型随机变量的分布函数

定义 16.1.1 (分布函数). 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k$, $k = 1, 2, \cdots$, 则 X 的分

布函数为

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = \sum_{x_k \leqslant x} p_k$$

或者 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p_1, & x_1 \leqslant x < x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 \leqslant x < x_3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$

定理 16.1.1 (分布函数的性质). 以下三条是判定一个函数是否为分布函数的充要条件.

(1) 单调性: $F(x)$ 是 x 的单调不减函数, 即对于任意实数 $x_1 < x_2$, 有 $F(x_1) \leqslant F(x_2)$;

(2) 有界性: $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$, $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

(3) 右连续: $F(x)$ 是 x 的右连续函数, 即对任意实数 x, 有 $F(x^+) = F(x)$.

16.1.2 二项分布

定义 16.1.2 (二项分布). 在 n 重伯努利试验中, 若用随机变量 X 表示所关心事件 A 发生的次数, $P(\mathsf{A}) = p\ (0 < p < 1)$, 则 X 的分布律为

$$P\{X = k\} = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \cdots, n$$

则称 X 服从参数为 n, p 的二项分布, 记作 $X \sim B(n, p)$.

(1) 0-1 分布可以视为 $n = 1$ 时的二项分布;

(2) 若 $X \sim B(n, p)$, 令 $Y = n - X$, 则 $Y \sim B(n, 1-p)$.

16.2 连续型随机变量的概率分布

16.2.1 连续型随机变量概率密度

定义 16.2.1 (连续型随机变量概率密度). 设随机变量 X 的分布函数是 $F(x)$, 若存在一个非负可积函数 $f(x)$, 使对于任意实数 x, 都有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \quad x \in \mathbb{R}$$

则称 X 为连续型随机变量, 称 $f(x)$ 为 X 的概率密度函数, 简称概率密度, 记为 $X \sim f(x)$.

定理 16.2.1 (连续型随机变量概率密度的性质). 概率密度 $f(x)$ 的性质如下:

(1) 非负性: $f(x) \geqslant 0$;

(2) 规范性: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$;

(3) 对任意实数 $a \leqslant b$ 都有 $P\{a < X \leqslant b\} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;

(4) 若 $f(x)$ 在点 x 处连续, 则有 $F'(x) = f(x)$.

16.2.2 均匀分布

定义 16.2.2 (均匀分布). 若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} . \end{cases}$$

则称 X 在区间 (a,b) 上服从均匀分布, 记为 $X \sim U(a,b)$. 其分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x < b \\ 1, & b \leqslant x. \end{cases}$$

16.2.3 指数分布

定义 16.2.3 (指数分布). 若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

则称 X 服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的指数分布, 记为 $X \sim E(\lambda)$, 其分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

(1) 指数分布常用来描述电子元器件的寿命, $P\{X > x\} = \mathrm{e}^{-\lambda x}$;

(2) 指数分布具有无记忆性, 对于任意 $s, t > 0$, 有 $P\{X > s + t \mid X > s\} = P\{X > t\}$.

例 16.2.1. 设 X 是服从参数为 2 的指数分布的随机变量, 求随机变量 $Y = X - \dfrac{1}{2}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

因为 $X \sim E(2)$, 所以其概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$, 现 $Y + x - \dfrac{1}{2}$, 所以

$$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\left\{X - \frac{1}{2} \leqslant y\right\} = P\left\{X \leqslant y + \frac{1}{2}\right\} = \int_{-\infty}^{y+\frac{1}{2}} f_X(x)\mathrm{d}x = F_X\left(y + \frac{1}{2}\right)$$

那么

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=F_X'(x)\left(y+\frac{1}{2}\right)=f_X(y+\frac{1}{2})=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2y-1}, & y>-\dfrac{1}{2}\\ 0, & y\leqslant-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

例 16.2.2. 设随机变量 $X\sim E(2)$, a 为大于 2 的常数, 已知 $P\{X\leqslant a\mid X>2\}=1-\mathrm{e}^{-2}$, 求 a.

法一: 因为 $P\{X\leqslant a\mid X>2\}=1-P\{X>a\mid X>2\}$, 于是

$$\begin{aligned}P\{X\leqslant a\mid X>2\}&=1-\frac{P\{X>a,X>2\}}{P\{X>2\}}=1-\frac{P\{X>a\}}{P\{X>2\}}=1-\frac{\displaystyle\int_a^{+\infty}2\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_2^{+\infty}2\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t}\\&=1-\frac{\mathrm{e}^{-2a}}{\mathrm{e}^{-4}}=1-\mathrm{e}^{-2(a-2)}=1-\mathrm{e}^{-2}.\end{aligned}$$

解得 $a=3$.

法二: $P\{X\leqslant a\mid X>2\}=1-P\{X>a\mid X>2\}=1-P\{X>a-2\}=1-\mathrm{e}^{-2(a-2)}=1-\mathrm{e}^{-2}\Rightarrow a=3$.

例 16.2.3. 已知随机变量 $X\sim E(\lambda)$ $(\lambda>0)$, 且随机变量 $Y=\begin{cases}X, & |X|\leqslant1\\ -X, & |X|>1\end{cases}$, 求 $P\left\{Y\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$.

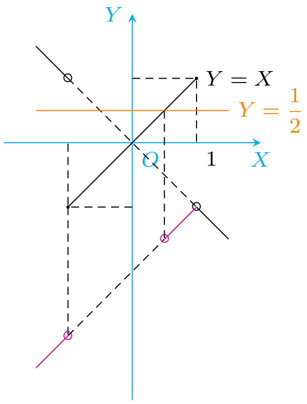


图 16.2.1

由图 16.2.1 可知,

$$\begin{aligned}P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}&=P\left\{-1\leqslant X\leqslant\frac{1}{2}\right\}+P\{X>1\}\\&=P\left\{-1\leqslant X\leqslant\frac{1}{2}\right\}+1-P\{X\leqslant1\}\\&=1-P\{X<-1\}+P\left\{\frac{1}{2}<X\leqslant1\right\}\end{aligned}$$

而 $P\{X<-1\}=0$, 因此

$$P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}=1-P\left\{\frac{1}{2}<X\leqslant1\right\}=1-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=1+\mathrm{e}^{-\lambda}-\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}.$$

16.2.4 正态分布

定义 16.2.4 (正态分布及其分布函数). 若随机变量 X 的密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, 则称 X 服从参数为 μ, σ 的正态分布, 简记为 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$, X 的分布函数为 $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$.

定理 16.2.2 (对称性). 一般正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2\mu-x)$.

定理 16.2.3 (和一性). 一般正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的分布函数 $F(x)$ 满足 $F(x)+F(2\mu-x)=1$.

定义 16.2.5 (标准正态分布). 当定义 16.2.4 中 $\mu=0$, $\sigma=1$ 时, 称 X 服从标准正态分布, 简记为 $X\sim N(0,1)$, 并且分别用 $\varphi(x)$ 与 $\Phi(x)$ 表示其概率密度函数和分布函数.

例 16.2.4. 设 X,Y 相互独立, 且 $X\sim N(1,2),Y\sim N(0,1)$, 求 $Z=2X-Y+3$ 的密度函数.

因为 $X\sim N(1,2),Y\sim N(0,1)$, 所以

$$E(X)=1,\ D(X)=2,\ E(Y)=0,\ D(Y)=1$$

因此

$$\begin{aligned}E(Z)&=E(2X-Y+3)=2E(X)-E(Y)+3=2-0+3=5\\D(Z)&=D(2Z-Y+3)=4D(X)+D(Y)=8+1=9\end{aligned}$$

故 $Z\sim N(5,9)$, 于是 $f_Z(z)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-5)^2}{18}}$.

例 16.2.5. 若随机变量 X 服从正态分布 $N\left(2,\sigma^2\right)$, 且 $P\{2<X<4\}=0.3$, 则 $P\{X<0\}$ 等于

A. 0.2　　B. 0.3　　C. 0.5　　D. 0.7

法一: 由 $X\sim N\left(2,\sigma^2\right)$ 知 $\dfrac{X-2}{\sigma}\sim N(0,1)$ 从而 $P\{2<X<4\}=P\left\{\dfrac{2-2}{\sigma}<\dfrac{X-2}{\sigma}<\dfrac{4-2}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\dfrac{2}{\sigma}\right)-\Phi(0)=0.3$, 又 $\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$, 得 $\Phi\left(\dfrac{2}{\sigma}\right)=0.8$ 于是得 $P\{X<0\}=P\left\{\dfrac{X-2}{\sigma}<\dfrac{0-2}{\sigma}\right\}=1-\Phi\left(\dfrac{2}{\sigma}\right)=0.2$ 故选 A.

法二: 由 $X\sim N\left(2,\sigma^2\right)$ 得到分布函数关于 $x=2$ 对称, 根据对称性, 并由 $P\{2<X<4\}=0.3$ 得到 $P\{0<X<2\}=0.3$, 那么 $P\{0<X<4\}=0.6$, 那么 $P\{X<0\}=\dfrac{1}{2}(1-0.6)=0.2$, 故选 A.

例 16.2.6. 设 $b>0$ 为常数, 且 $\varphi(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi b}}\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{b}}\mathrm{d}t$, 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-\varphi(x))\mathrm{d}x$.

因为 $1=\dfrac{2}{\sqrt{\pi b}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{b}}\mathrm{d}t$, 于是 $1-\varphi(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi b}}\displaystyle\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{b}}\mathrm{d}t$, 那么

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}(1-\varphi(x))\mathrm{d}x&=\frac{2}{\sqrt{\pi b}}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{b}}\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\pi b}}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_0^t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{b}}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi b}}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{b}}\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\pi b}}\frac{b}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{b}}\mathrm{d}\frac{t^2}{b}=\sqrt{\frac{b}{\pi}}.\end{aligned}$$

第 17 章

多维随机变量及其分布

17.1 多维离散型随机变量

17.2 多维连续型随机变量

17.2.1 边缘概率密度与边缘分布函数

定义 17.2.1 (边缘分布函数). 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$, 随机变量 X 和 Y 的分布函数 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$ 分别称为关于 X 和 Y 的边缘分布函数

$$F_X(x) = P\{X \leqslant x\} = P\{X \leqslant x, Y < +\infty\} = F(x, +\infty) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y)$$

同理 $F_Y(y) = F(+\infty, y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y)$.

定义 17.2.2 (二维连续型随机变量的边缘概率密度). 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 则称

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^{y} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y$$

分别为 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布函数. 而称

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}y$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}x$$

分别为 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度.

例 17.2.1. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{k}{2}x\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 求常数 k;

(2) 求 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度函数;

(3) 判断随机变量 X 和 Y 是否相互独立.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1\Rightarrow 1=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\frac{k}{2}x\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x=\frac{k}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\Rightarrow k=2.$

(2) $f_X(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y=x\mathrm{e}^{-x}\ (x>0)\Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 同理 $f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(3) 因为 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$, 所以 X,Y 相互独立.

17.2.2 二维连续型随机变量函数的分布

定理 17.2.1 (常见的二维连续型随机变量函数的分布). 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$, X 和 Y 概率密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 连续型随机变量 $Z=g(X,Y)$ 是 X 和 Y 的函数, 则当

(1) $Z=X+Y$ 的概率密度

$$\begin{matrix}f_Z(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x\\ f_Z(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y\end{matrix}\xrightarrow{\text{当 }X\text{ 和 }Y\text{ 相互独立时}}\begin{matrix}f_Z(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x\\ f_Z(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y\end{matrix}$$

(2) $Z=\pm X\mp Y$ 的概率密度

$$\begin{matrix}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x\mp z)\mathrm{d}x\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(y\pm z,y)\mathrm{d}y\end{matrix}\xrightarrow{\text{当 }X\text{ 和 }Y\text{ 相互独立时}}\begin{matrix}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(x\mp z)\mathrm{d}x\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_Y(y)f_X(y\pm z)\mathrm{d}y\end{matrix}$$

(3) $Z=\dfrac{Y}{X}$ 的概率密度

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,xz)\mathrm{d}x\xrightarrow{\text{当 }X\text{ 和 }Y\text{ 相互独立时}}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f_X(x)f_Y(xz)\mathrm{d}x$$

(4) $Z=XY$ 的概率密度

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x\xrightarrow{\text{当 }X\text{ 和 }Y\text{ 相互独立时}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x$$

(5) $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布

$$F_Z(z)=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}=F(z,z)\xrightarrow{\text{当 } X \text{ 和 } Y \text{ 相互独立时}}F_X(z)F_Y(y)\xrightarrow{\text{当 } X \text{ 和 } Y \text{ 独立同分布时}}F_X^2(x)$$

当 X 和 Y 独立同分布时, Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=2F_X(z)f_X(z)$$

(6) $Z=\min\{X,Y\}$ 的分布

$$\begin{aligned}F_Z(z)=1-P\{X>z,Y>z\}&\xrightarrow{\text{当 } X \text{ 和 } Y \text{ 相互独立时}}1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]\\&\xrightarrow{\text{当 } X \text{ 和 } Y \text{ 独立同分布时}}1-[1-F_X(z)]^2\end{aligned}$$

当 X 和 Y 独立同分布时, Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=2[1-F_X(z)]f_X(z).$$

17.2.3 二维随机变量条件概率密度与条件分布函数

定义 17.2.3 (二维随机变量条件概率密度). 设 (X,Y) 为连续型随机变量, 其概率密度为 $f(x,y)$, 边缘密度函数分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 若 $f_Y(y)>0$, 则称

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

为在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件概率密度. 同样, 若 $f_X(x)>0$, 则称

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

为在 $X=x$ 条件下 Y 的条件概率密度.

例 17.2.2. 设二维正态随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$, 已知条件概率密度

$$f_{X|Y}(x\mid y)=A\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\left(x-\frac{y}{2}\right)^2},\ f_{Y|X}(y\mid x)=B\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\left(y-\frac{x}{2}\right)^2}$$

试求: (1) 常数 A, B; (2) $f_X(x)$, $f_Y(y)$; (3) $f(x,y)$.

(1) 令 $A\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\left(x-\frac{y}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\\ \dfrac{2}{3}\left(x-\dfrac{y}{3}\right)^2=\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{2}{\sqrt{6\pi}}\\ \mu=\dfrac{y}{3}\end{cases}$ 由对称性知 $B=A=\dfrac{2}{\sqrt{6\pi}}$.

(2) 易得 $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}=\dfrac{f_{X|Y}(x\mid y)}{f_{Y|X}(y\mid x)}=\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\left[\left(x-\frac{y}{2}\right)^2-\left(y-\frac{x}{2}\right)^2\right]}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}}$, 故

$$f_X(x)=C\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\ f_Y(y)=C\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$$

由于标准差为 1, 则根据正态分布的概率密度知 $C=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, 因此 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, $f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$.

(3) $f(x,y)=f_{X|Y}(x\mid y)f_Y(y)=\dfrac{2}{\sqrt{6\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\left(x-\frac{y}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\left(x^2-xy+y^2\right)}$.

定义 17.2.4 (二维随机变量条件分布函数 A). 如果任给 $\varepsilon>0, P\{y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}>0$,

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}P\{X\leqslant x\mid y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{P\{X\leqslant x,y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}}{P\{y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}}$$

存在, 则称此极限为在条件 $Y=y$ 下随机变量 X 的条件分布函数, 记为 $P\{X\leqslant x\mid Y=y\}$ 或 $F_{X|Y}(x\mid y)$.

$$F_{X|Y}(x\mid y)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y-\varepsilon)}{F_Y(y+\varepsilon)-F_Y(y-\varepsilon)}=\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\displaystyle\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}f_Y(y)\mathrm{d}x}$$

定义 17.2.5 (二维随机变量条件分布函数 B). 设 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续, $f_Y(y)$ 连续且 $f_Y(y)>0$, 则称

$$F_{X|Y}(x\mid y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}x$$

为在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件分布函数. 若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续, $f_X(x)$ 连续且 $f_X(x)>0$, 则称

$$F_{Y|X}(y\mid x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\mathrm{d}y$$

为在 $X=x$ 的条件下 Y 的条件分布函数.

17.2.4 二维正态分布

定义 17.2.6 (二维正态分布). 若二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

则称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$ 的二维正态分布, 记

$$(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho\right)$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$ 均为常数, 且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1$.

定理 17.2.2 (二维正态分布推出一维正态分布). 若 $(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$, 则

$$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$$

反之不对, 即 X 与 Y 均服从一维正态, 不能保证 (X,Y) 一定服从二维正态分布.

定理 17.2.3 (独立一维正态分布推出二维正态分布). 若 $X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$, 且相互独立, 则 (X,Y) 一定服从二维正态分布

$$(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho\right).$$

定理 17.2.4. 若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, 则 $(aX+bY, cX+dY)$ 服从二维正态分布, 明显 $aX+bY$ 服从一维正态分布

$$aX+bY \sim N\left(a\mu_1+b\mu_2, a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2+2ab\rho\sigma_1\sigma_2\right).$$

定理 17.2.5. X 和 Y 相互独立的充要条件是 $\rho=0$.

定理 17.2.6 (二维正态分布的条件分布). 设二维随机变量 (X,Y) 服从 $N\big(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho\big)$, 则 X 在 $Y=y$ 条件下的条件分布为正态分布, 即

$$X \sim N\left(\mu_1+\frac{\rho\sigma_1(y-\mu_2)}{\sigma_2}, \sigma_1^2\big(1-\rho^2\big)\right)$$

同理, Y 在 $X=x$ 条件下的条件分布为正态分布, 即

$$Y \sim N\left(\mu_2+\frac{\rho\sigma_2(x-\mu_2)}{\sigma_1}, \sigma_2^2\big(1-\rho^2\big)\right).$$

例 17.2.3. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2-y^2}$, $-\infty<x,y<+\infty$,

(1) 求常数 A;

(2) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y \mid x)$.

*(1) **法一:** 因为二维正态分布的概率密度为*

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

对比本题所给密度得 $(X,Y)\sim N\left(0,0;\frac{1}{4},\frac{1}{2};0\right)$, *因此* $A=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\dfrac{1}{2\pi\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}$.

法二: *因为* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}$, *所以*

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x^2}\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{t=\sqrt{2}x}A\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=A\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\pi}\Rightarrow A=\frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$

(2) 因为 $\rho=0$, *所以* X *与* Y *相互独立, 所以* $X\sim N\left(0,\frac{1}{4}\right)$, $Y\sim N\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, *并且*

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-2x^2},\ f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-y^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-y^2}$$

所以 $f_{Y|X}(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-y^2}$, $-\infty<y<+\infty$.

17.2.5 卷积公式

当 $Z=h(X,Y)$, 其中一个随机变量服从均匀分布时, 使用卷积公式将大大简化计算过程.

例 17.2.4. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, $X\sim N(0,1), Y\sim U[0,1], Z=X+Y$, 求 Z 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

法一: 由 $X\sim N(0,1)$ 知, $f_X(x)=\varphi(x)$, 由 $Y\sim U[0,1]$ 知, $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 又因为 X 与 Y 相互独立, 则

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\varphi(x), & -\infty<x<+\infty, 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

下求 $f_Z(z)$,

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+y\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{z-1}\varphi(x)\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y+\int_{z-1}^{z}\varphi(x)\mathrm{d}x\int_0^{z-x}\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{z-1}\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_{z-1}^{z}(z-x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\Phi(z-1)+\int_{z-1}^{z}(z-x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

则 $f_Z(z)=\dfrac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}=\varphi(z-1)+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z\displaystyle\int_{z-1}^{z}\varphi(x)\mathrm{d}x-\int_{z-1}^{z}x\varphi(x)\mathrm{d}x\right]=\int_{z-1}^{z}\varphi(z)\mathrm{d}z=\Phi(z)-\Phi(z-1).$

法二: 由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_{z-1}^{z}\varphi(x)\mathrm{d}x=\Phi(z)-\Phi(z-1).$$

例 17.2.5. 设随机变量 $X\sim N\big(\mu,\sigma^2\big)$, $Y\sim U[-\pi,\pi]$, X,Y 相互独立, 令 $Z=X+Y$, 求 $f_Z(z)$.

法一: 因为 $X\sim N\big(\mu,\sigma^2\big)$, $Y\sim U[-\pi,\pi]$, 所以

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & -\pi\leqslant y\leqslant y\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

并且 X,Y 相互独立, 那么

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & -\infty<x<+\infty, -\pi\leqslant y\leqslant\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

而 $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}=\displaystyle\iint\limits_{x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 因此

$$F_Z(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z-y}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z-y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\xlongequal{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\frac{z-y-\mu}{\sigma}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{d}y=-\frac{\sigma}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{d}\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\xlongequal{u=\frac{z-y-\mu}{\sigma}}\frac{\sigma}{2\pi}\int_{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}}\Phi(u)\mathrm{d}u$$

因此 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\dfrac{\sigma}{2\pi}\displaystyle\int_{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}}\Phi(u)\mathrm{d}u\right]=\dfrac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\dfrac{z+\pi-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right)\right].$

法二: $f_Z(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_{z-\pi}^{z+\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right)\right].$

17.3 多维混合型随机变量

17.3.1 二维混合型随机变量的分布

定理 17.3.1 (二维混合型随机变量函数的分布). 设二维随机变量 (X,Y), 其中离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x_i\}=p_i(i=1,2,\cdots)$, Y 为连续型随机变量, 则 (X,Y) 的函数 $Z=g(X,Y)$ 分布函数

为

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{g(X,Y)\leqslant z\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i\}P\{g(X,Y)\leqslant z\mid X=x_i\}$$

例 17.3.1. 设随机变量 X,Y 相互独立, 且

$$P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2},\ P\{Y\leqslant x\}=x,\ 0<x\leqslant 1$$

求 $Z=XY$ 的分布函数.

由题意可知 $Y\in(0,1]$, 故 $Z=XY=[0,1]$, 当 $z<0$ 时, $F_Z(z)=0$; 当 $z\geqslant 1$ 时, $F_Z(z)=1$; 当 $0\leqslant z<1$ 时,

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{X=0\}P\{Z\leqslant z\mid X=0\}+P\{X=1\}P\{Z\leqslant z\mid X=1\}\\&=\frac{1}{2}P\{XY\leqslant z\mid X=0\}+\frac{1}{2}P\{XY\leqslant z\mid X=1\}=\frac{1}{2}P\{0\leqslant z\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant z\}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z=\frac{1}{2}(1+z)\end{aligned}$$

因此 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{1}{2}(1+z), & 0\leqslant z<1\\ 1, & z\geqslant 1.\end{cases}$

例 17.3.2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 的分布为 $\begin{array}{c|cc}X & -1 & 1\\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}$, Y 服从 $N(0,1)$ 分布, 记 $Z=XY$, 求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$.

根据全概率公式,

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{XY\leqslant z\}=P\{X=-1\}P\{XY\leqslant z\mid X=-1\}+P\{X=1\}P\{XY\leqslant z\mid X=1\}\\&=\frac{1}{2}P\{-Y\leqslant z\mid X=-1\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant z\mid X=1\}=\frac{1}{2}P\{Y\geqslant -z\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant z\}\\&=\frac{1}{2}[1-P\{Y<-z\}]+\frac{1}{2}\Phi(z)=\frac{1}{2}[1-\Phi(-z)]+\frac{1}{2}\Phi(z)\\&=\frac{1}{2}[1-1+\Phi(z)]+\frac{1}{2}\Phi(z)=\Phi(z)\end{aligned}$$

例 17.3.3 (2008 数一)**.** 设随机变量 X 和 Y 相互独立, X 概率分布为 $P\{X=i\}=\dfrac{1}{3}$ $(i=-1,0,1)$, Y 的概率密度为 $f_Z(z)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & 其他\end{cases}$, 记 $Z=X+Y$.

(1) 求 $P\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\middle|X=0\right\}$;

(2) 求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

(1) $P\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\middle|X=0\right\}=P\left\{X+Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|X=0\right\}=P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|X=0\right\}=P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}f_Y(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$

(2) 记 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$ 则

$$\begin{aligned}F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}&=\sum_{i=-1}^{1}P\{X=i,X+Y\leqslant z\}\\&=\sum_{i=-1}^{1}P\{X=i,Y\leqslant z-i\}=\sum_{i=-1}^{1}P\{X=i\}P\{Y\leqslant z-i\}\\&=\frac{1}{3}P\{Y\leqslant z+1\}+\frac{1}{3}P\{Y\leqslant z\}+\frac{1}{3}P\{Y\leqslant z-1\}\end{aligned}$$

(i) 当 $z<-1$ 时, $F_Z(z)=0$;

(ii) 当 $-1\leqslant z<0$ 时, $F_Z(z)=\dfrac{1}{3}P\{Y\leqslant z+1\}=\dfrac{z+1}{3}$;

(iii) 当 $0\leqslant z<1$ 时, $F_Z(z)=\dfrac{1}{3}P\{Y\leqslant z+1\}+\dfrac{1}{3}P\{Y\leqslant z\}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}z=\dfrac{z+1}{3}$;

(iv) 当 $1\leqslant z<2$ 时, $F_Z(z)=\dfrac{1}{3}P\{Y\leqslant z+1\}+\dfrac{1}{3}P\{Y\leqslant z\}+\dfrac{1}{3}P\{Y\leqslant z+1\}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{z-1}{3}=\dfrac{z+1}{3}$;

(v) 当 $z\geqslant 2$ 时, $F_Z(z)=1$.

于是 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<-1\\ \dfrac{z+1}{3}, & -1\leqslant z<2\\ 1, & z\geqslant 2\end{cases}$, 那么 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & -1\leqslant z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

17.3.2 随机变量与函数性质

例 17.3.4 (2009 数一)**.** 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\dfrac{1}{2}$, 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

由于 x, y 相互独立, 因此

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{xy\leqslant z\}=P\{xy\leqslant z\mid y=0\}P\{y=0\}+P\{xy\leqslant z\mid y=1\}P\{y=1\}\\&=\frac{1}{2}[P\{xy\leqslant z\mid y=0\}+P\{xy\leqslant z\mid y=1\}]=\frac{1}{2}[P\{x\cdot 0\leqslant z\}+P\{x\leqslant z\}]\end{aligned}$$

若 $z<0$, 则 $F_Z(z)=\dfrac{1}{2}\Phi(z)$; 若 $z\geqslant 0$, 则 $F_Z(z)=\dfrac{1}{2}[1+\Phi(z)]$, 所以 $z=0$ 为间断点, 故有一个间断点, 因此选 B.

第 18 章

随机变量的数字特征

18.1 数学期望与方差

18.1.1 数学期望

定义 18.1.1 (离散型随机变量的数学期望). 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k(k=1,2,\cdots)$$

若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kp_k$ 绝对收敛, 则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kp_k$ 的和为随机变量 X 的数学期望, 记为 $E(X)$, 即

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k.$$

不是所有的随机变量都有数学期望, 数学期望是反映随机变量 X 取可能值的平均值.

定义 18.1.2 (连续型随机变量的数学期望). 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$$

绝对收敛, 则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 的值为随机变量 X 的数学期望, 记为 $E(X)$, 即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x.$$

例 18.1.1. 设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}x, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $(a>0)$, 其中 a,b 为待定常数, 且 $E\left(X^2\right)=2$, 求 $P\{|X|<\sqrt{2}\}$.

因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$, 得 $\int_a^b x\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow b^2 - a^2 = 2$, 又因为 $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b x^3\mathrm{d}x \Rightarrow b^4 - a^4 = 8$, 又因为 $0 < a < b$ 解得 $a = 1, b = \sqrt{3}$, 则

$$P\left\{|X| < \sqrt{2}\right\} = P\left\{-\sqrt{2} < X < \sqrt{2}\right\} = F\left(\sqrt{2}\right) - F\left(-\sqrt{2}\right) = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

定理 18.1.1 (常数的数学期望)**.** 设 C 是常数, 则有 $E(C) = C$.

定理 18.1.2. 设 X 是一个随机变量, C 是常数, 则有 $E(CX) = CE(X)$.

定理 18.1.3. 设 X, Y 是两个随机变量, 则有 $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

定理 18.1.4. 设 X, Y 是相互独立的随机变量, 则有 $E(XY) = E(X)E(Y)$.

定义 18.1.3 (一维随机变量函数的数学期望)**.** (1) 离散型随机变量

设 Y 是随机变量 X 的函数: $Y = g(X)$ (g 连续), 若 X 是离散型随机变量, 其分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \cdots$$

且级数 $\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k$ 绝对收敛, 则

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k.$$

(2) 连续型随机变量

设 Y 是随机变量 X 的函数: $Y = g(X)$ (g 连续), 若 X 是连续型随机变量, 其概率密度为 $f(x)$, 且反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

例 18.1.2. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, 求 $E(X)$.

对 $F(x)$ 求导, 得 $f(x) = 0.3\varphi(x) + 0.35\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 因此

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left[0.3\varphi(x) + 0.35\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]\mathrm{d}x = 0.3\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\mathrm{d}x + 0.35\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= 0.3\cdot 0 + 0.7\int_{-\infty}^{+\infty}(2t+1)\varphi(t)\mathrm{d}t = 1.4\int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)\mathrm{d}t + 0.7\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t = 0.7 \end{aligned}$$

例 18.1.3 (2019 数一)**.** 在区间 $(0, 2)$ 上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短一段的长度为 X, 较长一段的长度为 Y, 令 $Z = \frac{Y}{X}$

(1) 求 X 的概率密度;

(2) 求 Z 的概率密度;

(3) 求 $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.

(1) 因为 $F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x, & 0<x<1\\ 0, & x\geqslant 1\end{cases}$ 故 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2) $Z=\dfrac{Y}{X}=\dfrac{2-X}{X}=\dfrac{2}{X}-1$, 则 $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\left\{\dfrac{2}{X}-1\leqslant z\right\}$, 当 $z<1$ 时 $F_Z(z)=0$; 当 $Z\geqslant 1$ 时,

$$F_Z(z)=P\left\{\frac{2}{X}-1\leqslant z\right\}\Rightarrow P\left\{X\geqslant\frac{2}{z+1}\right\}=\int_{\frac{2}{z+1}}^{1}1\mathrm{d}x=\frac{z-1}{z+1}$$

于是 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<1\\ \dfrac{z-1}{z+1}, & z\geqslant 1\end{cases}\Rightarrow f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 1\\ \dfrac{2}{(z+1)^2}, & z>1.\end{cases}$

(3) $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)=E\left(\dfrac{X}{2-X}\right)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x}{2-x}\cdot 1\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{x}{2-x}\mathrm{d}x=-\int_0^1\left(1+\dfrac{2}{x-2}\right)\mathrm{d}x=2\ln 2-1.$

定理 18.1.5 (最值表达式). $\max\{a,b\}=\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$, $\min\{a,b\}=\dfrac{a+b-|a-b|}{2}$.

例 18.1.4. 设 X 与 Y 独立, 且 $E(X)$ 和 $E(Y)$ 存在, 记 $U=\max\{X,Y\}$, $V=\min\{X,Y\}$, 则 $E(UV)$

A. $E(U)\cdot E(V)$　　B. $E(X)\cdot E(Y)$　　C. $E(U)\cdot E(Y)$　　D. $E(X)\cdot E(V)$

当 $X\geqslant Y$ 时, $U=X$, $V=Y$, $E(UV)=E(X)\cdot E(Y)$; 当 $X<Y$ 时, $U=Y$, $V=X$, $E(UV)=E(X)\cdot E(Y)$, 因此无论何种情况, 恒有 $E(UV)=E(X)\cdot E(Y)$, 故选 *B*.

例 18.1.5. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布, 已知 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 求 $Z=\min\{X,Y\}$ 的数学期望.

因为 $\min\{X,Y\}=\dfrac{X+Y-|X-Y|}{2}$, 所以 $E(Z)=E\left(\dfrac{X+Y-|X-Y|}{2}\right)$, $E(X)=E(Y)=\mu$,

$$E(|X-Y|)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|t|}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}}\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}\frac{t}{2\sigma\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}}\mathrm{d}t=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}}\mathrm{d}\left(\frac{t^2}{4\sigma^2}\right)=-\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u}\Big|_0^{+\infty}=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

因此 $E(Z)=\mu-\dfrac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

18.1.2　方差

定义 18.1.4 (方差). 设 X 是一个随机变量, 若 $E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$ 存在, 则称其为随机变量 X 的方差, 记为 $D(X)$, 即

$$D(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为 X 的均方差或标准差, 记为 $\sigma(X)$, 即 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

(1) 离散型随机变量

设离散型随机变量 X , 其分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$, 则方差计算公式为

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[x_k-E(X)\right]^2 p_k.$$

(2) 连续型随机变量

设连续型随机变量 X, 其概率密度为 $f(x)$, 则方差计算公式为

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 18.1.6 (方差与期望的联系). $D(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2$.

定理 18.1.7 (二维均匀分布的随机变量的概率密度). 若 (X,Y) 在平面有界区域 D 上服从均匀分布, 则 (X,Y) 的概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}S_D^{-1}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 18.1.6. 设 (X,Y) 在区域 $D:0<x<1,|y|\leqslant x$ 内服从均匀分布,

(1) 求随机变量 X 的边缘密度函数;

(2) 设 $Z=2X+1$, 求 $D(Z)$.

(1) 区域 D 的面积为 $S_D=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$, 则 $f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $\Rightarrow f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2) 由方程与期望的关系,

$$\begin{aligned}D(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f_X(x)\mathrm{d}x-\left(\int_{-\infty}^{+\infty}x f_X(x)\mathrm{d}x\right)^2\\&=\int_0^1 2x^3\mathrm{d}x-\left(\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}\end{aligned}$$

所以 $D(Z)=D(2X+1)=4D(X)=\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$.

定理 18.1.8. 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 互相独立, 且 $X_i\sim N\left(\mu_i,\sigma_i^2\right)$, 则

$$\sum_{i=1}^n a_iX_i\sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i\mu_i,\sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2\right).$$

例 18.1.7 (1998 数一). 设两个随机变量相互独立, 且都服从均值为 0, 方差为 $\frac{1}{2}$ 的正态分布, 求随机变量 $|X-Y|$ 的方差.

令 $Z=X-Y$, 由于 $X\sim N\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $Y\sim N\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 于是 $Z\sim N\left(0,\frac{1}{2}+(-1)^2\frac{1}{2}\right)=N(0,1)$, 于是

$$D(|X-Y|)=D(|Z|)=E\left(Z^2\right)-E^2(|Z|)=1-\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z\right)^2=1-\frac{2}{\pi}$$

其中, 由于 Z 服从标准正态分布则方差为 1, 数学期望为 0, 则 $E\left(Z^2\right)=D(Z)+E^2(Z)=1+0=1$.

例 18.1.8. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$, 在 $X=x$ 条件下, 随机变量 $Y\sim N(x,1)$, 求 Y 的方差 $D(Y)$.

$X\sim N(0,1), f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty<x<+\infty$, 当 $X=x$ 时, $f_{Y|X}(y\mid x)\sim N(x,1)$, 即当 $-\infty<x<+\infty$ 时,

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2}},\ -\infty<y<+\infty$$

那么

$$(X,Y)\sim f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2}}\Rightarrow f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(2x^2-2xy+y^2)},\ -\infty<x,y<+\infty$$

已知二维正态 $(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$ 的密度为

$$f_1(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{\left(x-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho\left(x-\mu_1\right)\left(y-\mu_2\right)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\left(y-\mu_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}-\infty<x,y<+\infty.$$

对比 f 与 f_1 则有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\\ -\dfrac{1}{2}\cdot 2x^2=-\dfrac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\cdot\dfrac{\left(x-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1=\dfrac{1}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\\ 1=\dfrac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\end{cases}$$

解得 $\sigma_2=\sqrt{2},\ D(Y)=\sigma_2^2=2$

利用第二型 Euler 积分

有关第二型 Euler 积分的相关知识可参考 3.4.1 节.

例 18.1.9. 设 X 与 Y 相互独立, 且 $X\sim N\left(0,\sigma^2\right)$, $Y\sim N\left(0,\sigma^2\right)$, 令 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$, 求 $E(Z)$, $D(Z)$.

因为 $X\sim N\left(0,\sigma^2\right)$, $Y\sim N\left(0,\sigma^2\right)$, 且 X 与 Y 相互独立, 所以

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2+y^2\right)}$$

因此

$$\begin{aligned}E(Z)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\frac{1}{\pi}\left(\frac{r}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\mathrm{e}^{-\left(\frac{r}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}\mathrm{d}r\\&=\frac{\sqrt{2}\sigma}{2\pi}\cdot 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\left(\frac{r}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\cdot\mathrm{e}^{-\left(\frac{r}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{r}{\sqrt{2}\sigma}\right)\\&=\frac{\sqrt{2}\sigma}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}\sigma}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{\sqrt{2}\sigma}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\sqrt{\pi}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma\end{aligned}$$

因此 $D(Z)=E\left(Z^2\right)-E^2(Z)=E\left(X^2+Y^2\right)-\dfrac{\pi}{2}\sigma^2=2\sigma^2-\dfrac{\pi}{2}\sigma^2=\left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)\sigma^2.$

18.2 协方差与相关系数

18.2.1 随机变量的独立性与相关性

定义 18.2.1 (随机变量的相关性定义)**.** 若随机变量 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0$ 则称 X 和 Y 不相关, 否则称 X 和 Y 相关.

定理 18.2.1 (独立性与相关性的判定)**.** 随机变量 X 和 Y 不相关, 即 $\rho_{XY}=0\Leftrightarrow\operatorname{cov}(X,Y)=0\Leftrightarrow E(XY)=E(X)E(Y)\Leftrightarrow D(X\pm Y)=D(X)\pm D(Y)\Leftarrow X$ 与 Y 相互独立.

特别地, 当 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 时, X 和 Y 不相关 $\Leftrightarrow$ X 和 Y 相互独立;

当随机变量 X 和 Y 都服从 (0,1) 分布, 则 X 和 Y 不相关 $\Leftrightarrow$ X 和 Y 相互独立.

18.2.2 协方差

定理 18.2.2 (协方差的性质). (1) $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(Y,X)$, $\mathrm{cov}(X,X)=D(X)$;

(2) $\mathrm{cov}(aX,bY)=ab\mathrm{cov}(X,Y)$, a,b 是常数, $\mathrm{cov}(X,a)=0$;

(3) $\mathrm{cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{cov}(X_1,Y)+\mathrm{cov}(X_2,Y)$;

(4) 若 X,Y 相互独立, 则 $\mathrm{cov}(X,Y)=0$, 反之不对.

(5) $\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$.

例 18.2.1 (2002 数三). 设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为表 18.1, 求协方差 $\mathrm{cov}\left(X^2,Y^2\right)$.

表 18.1

$X\backslash Y$	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

X, Y 的分布律分别为 $\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & 0.4 & 0.6 \end{array}$, $\begin{array}{c|ccc} Y & -1 & 0 & 1 \\ \hline P & 0.15 & 0.5 & 0.35 \end{array}$, 那么

$E(X^2)=0.6,\ E(Y^2)=0.5,\ E(X^2Y^2)=\sum\limits_i\sum\limits_j x_i^2y_j^2p_{ij}=0.08+0.20=0.28$

所以 $\mathrm{cov}(X^2,Y^2)=E(X^2Y^2)-E(X^2)E(Y^2)=0.28-0.3=-0.02$.

例 18.2.2. 设随机变量 (X,Y) 的概率分布为表 18.2 求

(1) $P\{X=2Y\}$; (2) $\mathrm{cov}(X-Y,Y)$.

表 18.2

$X\backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(1) $P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=\dfrac{1}{4}$.

(2) X, Y 的分布律分别为 $\begin{array}{c|ccc} X & 0 & 1 & 2 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$, $\begin{array}{c|ccc} Y & 0 & 1 & 2 \\ \hline P & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$, 那么

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X-Y,Y)&=\mathrm{cov}(X,Y)-\mathrm{cov}(Y,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)-D(Y)\\&=E(XY)-E(X)E(Y)-E\left(Y^2\right)+E^2(Y)\end{aligned}$$

其中 $E(XY)=\sum\limits_i\sum\limits_j x_iy_jp_{ij}=1\cdot\dfrac{1}{3}+2\cdot\dfrac{2}{12}=\dfrac{2}{3}$, $E(X)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{6}=\dfrac{2}{3}$, $E(Y)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}=1$, $E(Y^2)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{5}{3}$, 代入算得 $\mathrm{cov}(X-Y,Y)=-\dfrac{2}{3}$.

定理 18.2.3 (协方差与方差). $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm2\mathrm{cov}(X,Y)$.

例 18.2.3 (2011 数一). 设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为 $\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}$, $\begin{array}{c|ccc} Y & -1 & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$, 且 $P\left\{X^2=Y^2\right\}=1$.

(1) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布; (2) $Z=XY$ 的概率分布; (3) X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

$X\backslash Y$	-1	0	1	
0	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\frac{1}{3}$
1	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

$\Downarrow$

$X\backslash Y$	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(1) 因为 $P\{X^2=Y^2\}=1$, 所以 $P\{X^2\neq Y^2\}=1-1=0$, 于是有

$$\begin{cases} a_{11}=P\{X=0,Y=-1\}=0\Rightarrow a_{21}=\dfrac{1}{3} \\ a_{22}=P\{X=1,Y=0\}=0\Rightarrow a_{12}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow a_{13}=0\Rightarrow a_{23}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

(2) $Z=XY$ 的可能取值为 $-1,0,1$, 且 $P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{1}{3}$,

$$P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=*\}+P\{X=*,Y=0\}=\frac{1}{3}$$

同理 $P\{Z=-1\}=\dfrac{1}{3}$, 于是 Z 的概率分布为 $\begin{array}{c|ccc} Z & -1 & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$.

(3) 易求得 $\operatorname{cov}(X,Y)=0$, 于是 $\rho_{XY}=0$. $\begin{array}{c|ccc} Y & -1 & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$

18.2.3 相关系数

定义 18.2.2 (相关系数). 对于随机变量 X,Y, $D(X)>0,D(Y)>0$, 则称 $\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 为随机变量 X 和 Y 的相关系数, 记作 ρ_{XY}.

定理 18.2.4 (相关系数的性质). (1) $|\rho_{XY}|\leqslant 1$;

(2) $|\rho_{XY}|=1\Leftrightarrow$ 存在 a,b 使得 $PY=aX+b=1$, 其中 $a>0$ 时, $\rho_{XY}=1$ (正线性相关); $a<0$ 时, $\rho_{XY}=-1$ (负线性相关).

例 18.2.4. 设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为表 18.3, 求 X 和 Y 的相关系数 ρ.

表 18.3

$X\backslash Y$	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

X, Y 的分布律分别为 $\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & 0.4 & 0.6 \end{array}$, $\begin{array}{c|ccc} Y & -1 & 0 & 1 \\ \hline P & 0.15 & 0.5 & 0.35 \end{array}$, 那么

$$E(X)=0.6,\ E(Y)=0.2,\ E(XY)=\sum_i\sum_j x_iy_jp_{ij}=-0.08+0.20=0.12$$

所以 $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$, 所以 $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$.

例 18.2.5 (1994 数一). 已知随机变量 X 和 Y 分布服从正态分布 $N\left(1,3^2\right)$ 和 $N\left(0,4^2\right)$, 且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$, 设 $Z=\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}$.
(1) 求 Z 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(Z)$; (2) 求 X 和 Z 的相关系数 ρ_{XZ}.

(1) $E(Z)=\dfrac{1}{3}E(X)+\dfrac{1}{2}E(Y)=\dfrac{1}{3}+0=\dfrac{1}{3}$,

$$D(Z)=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(X)+2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(X)+2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=3.$$

(2) 由协方差的性质,

$$\operatorname{cov}(X,Z)=\operatorname{cov}\left(X,\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y\right)=\frac{1}{3}\operatorname{cov}(X,X)+\frac{1}{2}\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\cdot\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=0$$

所以 $\rho_{XZ}=0$.

例 18.2.6 (2000 数一). 设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布, 则随机变量 $\xi=X+Y$ 与 $\eta=X-Y$ 不相关的充分必要条件为

A. $E(X)=E(Y)$

B. $E(X^2)-E^2(X)=E(Y^2)-E^2(Y)$

C. $E(X^2)=E(Y^2)$

D. $E(X^2)+E^2(X)=E(Y^2)+E^2(Y)$

因为不相关，所以 $\rho_{\xi\eta}=0\Rightarrow \operatorname{cov}(\xi,\eta)=0$，于是

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta)=E(X^2-Y^2)-E(X+Y)E(X-Y)=E(X^2-Y^2)-E^2(X)+E^2(Y)=0$$

即 $E(X^2)-E^2(X)=E(Y^2)-E^2(Y)$，故选 B.

定理 18.2.5. 当 $Y=aX+b$ 时，$\rho_{XY}=\operatorname{sgn}(a)$.

例 18.2.7. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则

A. $P\{Y=-2X-1\}=1$

B. $P\{Y=2X-1\}=1$

C. $P\{Y=-2X+1\}=1$

D. $P\{Y=2X+1\}=1$

用排除法，设 $Y=aX+b$，由 $\rho_{XY}=1\Rightarrow a>0$，排除 A、C，由 $E(X)=0$，$E(Y)=1$，且

$$E(Y)=E(aX+b)=aE(X)+b\Rightarrow b=1$$

排除 B，故选 D.

例 18.2.8. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\left(1-x^2-y^2\right), & x^2+y^2\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1) X 与 Y 是否相互独立，说明理由；

(2) 求 ρ_{XY}；

(3) 求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度.

(1) 注意到 X 与 Y 轮换对此，那么

$$\begin{aligned}f_X(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(1-x^2-y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{4}{\pi}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left[\left(1-x^2\right)-y^2\right]\mathrm{d}y\\&=\frac{4}{\pi}\left[\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{8}{3\pi}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}},|x|\leqslant 1\end{aligned}$$

故

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{8}{3\pi}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

同理可求得

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{8}{3\pi}\left(1-y^2\right)^{\frac{3}{2}}, & |y|\leqslant 1\\ 0, & |y|>1\end{cases}$$

由于 $f_X(x)\cdot f_Y(y)\neq f(x,y)$，所以 X 与 Y 不相互独立.

(2) 由 $EX=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{8}{3\pi}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=0$，且被积函数关于 x,y 均为奇函数，

$$E_{XY}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{2}{\pi}xy\left(1-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

所以 $\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EXEY=0$，从而可得 $\rho_{XY}=0$.

(3) 当 $z<0$ 时, $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的分布函数为 $F_Z(z)=0$. 当 $0\leqslant z<1$ 时,

$$F_z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\leqslant z\right\}=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z\frac{2}{\pi}\left(1-r^2\right)r\mathrm{d}r=2z^2-z^4$$

当 $z\geqslant 1$ 时, $F_Z(z)=1$, 故 Z 的概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}4z-4z^3, & 0<z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

第 19 章

大数定律与中心极限定理

”对于任意一个正数, 不论它多大, 总有一个足够大的整数, 使得它的倒数小于这个正数. ”

——切比雪夫

大数定律和中心极限定理是概率论和数理统计中非常重要的两个定理, 它们是统计学中的基础.

1. 大数定律: 大数定律是指在独立同分布的随机变量序列中, 随着样本容量的增大, 样本均值会越来越接近于总体均值. 换句话说, 样本均值的极限等于总体均值. 大数定律是统计学的基础, 它保证了样本的可靠性和稳定性, 使得我们可以通过样本来推断总体的特征.

2. 中心极限定理: 中心极限定理是指在独立同分布的随机变量序列中, 当样本容量趋近于无穷大时, 样本均值的分布趋近于正态分布. 也就是说, 当样本容量足够大时, 样本均值的分布呈现出正态分布的特征. 中心极限定理是统计学中非常重要的定理, 它保证了样本均值的可靠性和稳定性, 使得我们可以通过样本均值来推断总体的特征, 并进行统计推断.

大数定律和中心极限定理是统计学中的基本定理, 它们为我们提供了理论支持和工具, 使得我们可以通过样本来推断总体的特征, 并进行统计推断.

19.1 Chebyshev 不等式

方差可以描述随机变量的离散程度, 方差越大, 说明随机变量取值越分散, 偏离其均值 $E(X)$ 越远. 具体来讲, 设 ε 为任意正数, 事件 $|X-E(X)| \geqslant \varepsilon$ 发生的概率 $P\{|X-E(X)| \geqslant \varepsilon\}$ 应该与方差 $D(X)$ 关系密切, $D(X)$ 越大, $P\{|X-E(X)| \geqslant \varepsilon\}$ 应该越大, 其关系就是下面著名的 Chebyshev 不等式.

定理 19.1.1 (Chebyshev 不等式). 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 均存在, 则对于任意 $\varepsilon>0$, 不等式

$$P\{|X-E(X)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \text{ 或 } P\{|X-\mu|<\varepsilon\} \geqslant 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

例 19.1.1. 设电站供电网有 10000 盏灯, 夜晚每一盏灯开灯的概率都是 0.7, 假定所有电灯开或关是彼此独立的, 试用切比雪夫不等式估计夜晚同时开着的电灯数目在 6800 与 7200 之间的概率.

设 X 表示夜晚同时开着的电灯数目, 它服从参数 $n=10000, p=0.7$ 的二项分布. 于是有

$$E(X)=np=10000\times 0.7=7000, D(X)=npq=10000\times 0.7\times 0.3=2100,$$
$$P\{6800<X<7200\}=P\{|X-7000|<200\}\geqslant 1-\frac{2100}{200^2}\approx 0.95.$$

计算结果表明, 虽然有 10000 盏灯, 但是电站只要有供应 7000 盏灯的电力就能够以相当大的概率保证电量够用.

19.2 大数定律

大数定律是概率论中的一个基本定理, 描述了随机变量序列的均值在样本数量足够大的情况下会收敛于其数学期望的概率性现象. 大数定律是概率论和统计学中的重要定理之一, 对于理解随机现象的规律和稳定性具有重要意义.

19.2.1 Bernoulli 大数定律

定理 19.2.1 (Bernoulli 大数定律)**.** 设 n_A 是 n 重 Bernoulli 试验中事件 A 发生的次数, $p(0<p<1)$ 是事件 A 在一次试验中发生的概率, 则对任意给定的正数 ε, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

19.2.2 Chebyshev 大数定律

定理 19.2.2 (Chebyshev 大数定律)**.** 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是相互独立的随机变量序列, 其数学期望与方差都存在, 且方差一致有界, 即存在正数 M, 对任意 $i(i=1,2,\cdots)$, 有

$$D\left(X_i\right)\leqslant M$$

则对任意给定的正数 ε, 恒有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right)\right|>\varepsilon\right\}=0.$$

这一定理说明, 经过算术平均后得到的随机变量 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 在统计上具有一种稳定性, 它的取值将比较紧密地聚集在其期望附近. 这正是大数定律的含义, 在概率论中, 大数定律是随机现象的统计稳定性的深刻描述, 同时也是数理统计的重要理论基础.

Bernoulli 大数定律是 Chebyshev 大数定律的特殊情况, 即随机变量序列 $X_i\sim b(1,p), \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 是 n 次独立重复试验中 A 发生的次数 n_A, 即 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 为事件 A 发生的频率 $\dfrac{n_A}{n}$, 而 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} E\left(X_i\right)=p$.

19.2.3 Khinchin 大数定律

定理 19.2.3 (Khinchin 大数定律). 设随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立且服从相同的分布, 具有数学期望 $E(X_i)=\mu, i=1,2,\cdots$, 则对任意给定的正数 ε, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

Khinchin 大数定律中对 $D(X_i)$ 不再有要求, 即不用再验证方差 $D(X_i)$ 是否存在. 因此, 它比 Chebyshev 大数定律使用更方便.

19.3 中心极限定理

中心极限定理是概率论和统计学中的一个基本定理, 描述了独立同分布随机变量和其均值之间的关系. 中心极限定理指出, 对于具有有限方差的独立同分布随机变量, 它们的样本均值在样本量足够大的情况下, 以接近正态分布的形式收敛.

19.3.1 Levy Lindeberg 定理

定理 19.3.1 (Levy Lindeberg 中心极限定理). 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立, 服从同一分布, 且具有数学期望和方差:

$$E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2>0(i=1,2,\cdots)$$

则对任意实数 x 都有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leqslant x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\Phi(x)$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.

当 n 充分大时, $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 近似服从正态分布 $N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$, 而 $\dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$.

例 19.3.1 (2022 数一). 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 其中 $P\{X=0\}=P\{X=1\}=\dfrac{1}{2}$, $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 则利用中心极限定理可得 $P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i\leqslant 55\right\}$ 的近似值为

A. $1-\Phi(1)$　　B. $\Phi(1)$　　C. $1-\Phi(0.2)$　　D. $\Phi(0.2)$

由 $\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}$, $E(X)=\dfrac{1}{2}$, $D(X)=\dfrac{1}{4}$, 那么 $E\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right)=100E(X)=50$, $D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right)=100D(X)=25$, 根据中心极限定理得出 $\sum_{i=1}^{100} X_i$ 近似服从正态分布 $N(50,25)$, 将其标准化为 $\dfrac{\sum_{i=1}^{100} X_i-50}{\sqrt{25}}\sim N(0,1)$, 因此

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i-50}{\sqrt{25}}\leqslant\frac{55-50}{\sqrt{25}}\right\}=\Phi\left(\frac{55-50}{\sqrt{25}}\right)=\Phi(1)$$

故选 B.

例 19.3.2. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 为独立同分布的随机变量序列, 且均服从参数为 $\lambda(\lambda > 1)$ 的指数分布, 记 $\varPhi(x)$ 为标准正态分布函数, 则有

A. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\lambda\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \varPhi(x)$ B. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leqslant x\right\} = \varPhi(x)$

C. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\lambda\sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \varPhi(x)$ D. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i - \lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leqslant x\right\} = \varPhi(x)$

因为 $X \sim E(\lambda)$, 所以 $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, $D(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$, 那么 $E\left(\sum\limits_{i=1}^n X_i\right) = nE(X) = \dfrac{n}{\lambda}$, $D\left(\sum\limits_{i=1}^n X_i\right) = nD(X) = \dfrac{n}{\lambda^2}$, 根据中心极限定理得出 $\sum\limits_{i=1}^n X_i$ 近似服从正态分布 $N\left(\dfrac{n}{\lambda}, \dfrac{n}{\lambda^2}\right)$, 将其标准化为 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n X_i - \dfrac{n}{\lambda}}{\sqrt{\dfrac{n}{\lambda^2}}} \sim N(0,1)$, 因此

$$P = \left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^n X_i - \dfrac{n}{\lambda}}{\sqrt{\dfrac{n}{\lambda^2}}} \leqslant x\right\} = P\left\{\frac{\lambda\sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \varPhi(x)$$

故选 C.

19.3.2 De Moivre-Laplace 定理

定理 19.3.2 (De Moivre-Laplace 中心极限定理)**.** 设随机变量 X_n 服从参数为 $n, p\ (0 < p < 1)$ 的二项分布 $X_n \sim B(n,p)\ (n = 1, 2, \cdots)$, 对于任意 x, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \varPhi(x).$$

第 20 章

数理统计的基本概念

“当我们正想专心工作时，我们却太老了。”

——卡尔·皮尔逊

数理统计是统计学的一个重要分支, 主要研究如何利用数学方法对数据进行收集、分析和推断, 从而对随机现象进行量化描述和推断.

20.1 随机样本

在数理统计中, 总体 X 的分布通常是未知的, 或者在形式上是已知的但含有未知参数. 那么为了获得总体的分布信息, 从理论上讲, 需要对总体 X 中的所有个体进行观察测试, 但这往往是做不到的. 例如, 由于测试砖的耐压性的试验具有破坏性, 一旦我们获得每块砖的耐压数据, 这批砖也就全部报废了. 所以, 我们不可能对所有个体逐一观察测试, 而是从总体 X 中随机抽取若干个个体进行观察测试. 从总体中抽取若干个个体的过程叫做抽样, 抽取的若干个个体称为样本, 样本中所含个体的数量称为样本容量.

由上知, 抽取样本是为了研究总体的性质, 为了保证所抽取的样本具有代表性, 抽样方法必须满足以下两个条件:

(1) 随机性. 每次抽取时, 总体中每个个体被抽到的可能性均等, 可以通过编号抽签的方法或利用随机数表的方法产生.

(2) 独立性. 每次抽取必须是相互独立的,即每次抽取的结果既不影响其他各次抽取的结果, 也不受其他各次抽取结果的影响.

这种随机的、独立的抽样方法称为简单随机抽样, 由此得到的样本称为简单随机样本. 今后, 如无特殊说明, 样本专指简单随机样本.

定义 20.1.1 (样本与样本值). 设总体 X 的分布函数为 $F(x)$, 若随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 且都与总体 X 具有相同的分布函数, 则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 简称为样本, n 称为样本容量. 在对总体 X 进行一次具体的抽样并作观测之后, 得到样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的确切数值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 称为样本观测值, 简称为样本值.

根据定义, 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是分布函数为 $F(x)$ 的总体 X 的容量为 n 的简单随机样本, 则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合分布函数为 $F^*(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)$.

若总体 X 是离散型随机变量, 其分布律为 $P\{X = x_i\} = p_i (i = 1, 2, \cdots)$, 则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合分布律为

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\} = \prod_{i=1}^{n} p_i.$$

若总体 X 是连续型随机变量, 其概率密度为 $f(x)$, 则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合概率密度为

$$f^*(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

.

定义 20.1.2 (统计量与其观测值). 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是样本观测值, $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的函数. 如果 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 中不含未知参数, 则称 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为一个统计量, 而 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为统计量的观测值.

20.1.1 常用统计量

定义 20.1.3 (常用统计量). 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 以下为常用统计量:

(1) 样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$;

(2) 样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$;

(3) 样本标准差 $S = \sqrt{S^2}$;

(4) 样本 k 阶原点矩 $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k (k = 1, 2, \cdots)$;

(5) 样本 k 阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^k (k = 2, 3, \cdots)$; 其中 $B_1 = 0, B_2 = \frac{n-1}{n} S^2$;

(6) 最小顺序统计量 $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$

$$F_{(1)}(x) = P\{\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \leqslant x\} = 1 - [1 - F(x)]^n$$

对连续型随机变量, 概率密度函数为 $f_{(1)}(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} f(x)$;

(7) 最大顺序统计量 $X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$

$$F_{(n)}(x)=P\{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\leqslant x\}=[F(x)]^n$$

对连续型随机变量, 概率密度函数为 $f_{(n)}(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x)$.

20.1.2 样本数字特征的性质

定理 20.1.1 (样本数字特征的性质). (1) 若总体 X 的数学期望 $E(X)=\mu$, 则 $E(\bar{X})=E(X)=\mu$;

(2) 若总体 X 的方差为 $D(X)=\sigma^2$, 则 $D(\bar{X})=\dfrac{1}{n}D(X)=\dfrac{\sigma^2}{n}$, $E\left(S^2\right)=D(X)=\sigma^2$.

例 20.1.1. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自指数分布总体 $E(\lambda)$ 的简单随机样本 $\bar{X}$ 和 S^2 分别是样本均值和样本方差, 记统计量 $T=\bar{X}-S^2$, 求 $E(T)$.

$E(T)=E(\bar{X}-S^2)=E(\bar{X})-E(S^2)=E(\bar{X})-D(X)$, 因为 $X\sim E(\lambda)$, 所以 $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$, $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$, 因此 $E(T)=\dfrac{1}{\lambda}-\dfrac{1}{\lambda^2}=\dfrac{\lambda-1}{\lambda^2}$.

例 20.1.2. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 $X\sim P(\lambda)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 和 S^2 分布为样本均值和方差, 求统计量 $T=\bar{X}^2-\dfrac{S^2}{n}$ 的数学期望 $E(T)$.

$E(T)=E\left(\bar{X}^2-\dfrac{S^2}{n}\right)=E(\bar{X}^2)-E\left(\dfrac{S^2}{n}\right)=E(\bar{X}^2)-\dfrac{1}{n}E(S^2)=D(\bar{X})+E^2(\bar{X})-\dfrac{1}{n}D(X)$, 因为 $X\sim P(\lambda)$, 所以 $E(X)=D(X)=\lambda$, 且

$$E(\bar{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\lambda=\lambda$$
$$D(\bar{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\cdot n\lambda=\frac{\lambda}{n}$$

因此 $E(T)=\dfrac{\lambda}{n}+\lambda^2-\dfrac{\lambda}{n}=\lambda^2$.

20.2 三大抽样分布

20.2.1 χ^2 分布

定义 20.2.1 (卡方分布). 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立, 且都服从标准正态分布 $N(0,1)$, 则称统计量

$$\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$$

服从自由度为 n 的 χ^2 分布, 记为 $\chi^2\sim\chi^2(n)$.

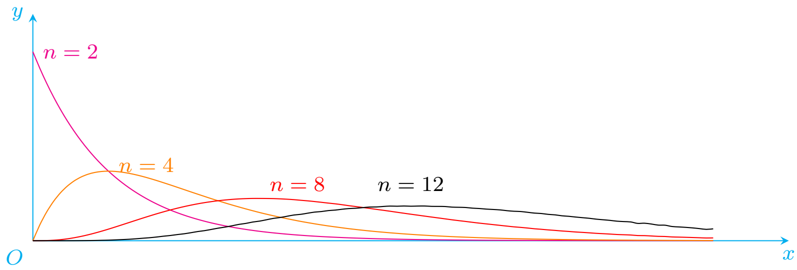


图 20.2.1

定理 20.2.1. 若 $X \sim \chi^2(n)$, 则 $E(X)=n, D(X)=2n$.

例 20.2.1. 设 $X_1, x_2, \cdots, X_n, X_{n+1}$ 为总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 且有

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,\ T=\frac{n}{(n+1)\sigma^2}\left(X_{n+1}-\bar{X}\right)^2$$

求 T 服从的分布, 并计算 $E(T)$ 和 $D(T)$.

错解. 由题意知 $X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2\right)$, 且 X_{n+1} 与 $\bar{X}$ 相互独立, 故 $X_{n+1}-\bar{X} \sim N\left(0, \frac{n-1}{n}\sigma^2\right)$,

错因: 不能简单的加减法, 要从期望和方差的角度进行计算.

由题意知 $X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2\right)$, 且 X_{n+1} 与 $\bar{X}$ 相互独立,

$$E\left(X_{n+1}-\bar{X}\right)=E(X_{n+1})-E(\bar{X})=\mu-\mu=0,\ D\left(X_{n+1}-\bar{X}\right)=D(X_{n+1})+D(\bar{X})=\sigma^2+\frac{\sigma^2}{n}=\frac{n+1}{n}\sigma^2$$

因此 $X_{n+1}-\bar{X} \sim N\left(0, \frac{n+1}{n}\sigma^2\right)$, 则 $\dfrac{X_{n+1}-\bar{X}-0}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma} \sim N(0,1)$, 两边平方有

$$\left(\frac{X_{n+1}-\bar{X}-0}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma}\right)^2=\frac{n}{(n+1)\sigma^2}\left(X_{n+1}-\bar{X}\right)^2=T \sim \chi^2(1)$$

故 $E(T)=1,\ D(T)=2$.

定理 20.2.2 (分布的可加性)**.** 设 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$, 且 X, Y 相互独立, 则

$$X+Y \sim \chi^2(n_1+n_2).$$

定理 20.2.3 (χ^2 分布上 α 分位点)**.** 设 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$, 对于给定的 α $(0<\alpha<1)$, 满足条件

$$P\left\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\right\}=\int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty} f(y)\mathrm{d}y=\alpha$$

的点 $\chi_\alpha^2(n)$ 称为 $\chi^2(n)$ 分布的上 α 分位点.

例 20.2.2. 已知 (X, Y) 的概率密度函数为 $f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2-2y+1\right)}, -\infty<x, y<+\infty$, 求 $\dfrac{X^2}{(Y-1)^2}$ 服从的分布及参数.

已知二维正态分布概率密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(x-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

因此 $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2y+1)}\sim N(0,1;1,1;0)$, 故 $X\sim N(0,1)$, $Y\sim N(1,1)$ 且 X,Y 相互独立, 那么 $\dfrac{X^2}{(Y-1)^2}\sim F(1,1)$.

例 20.2.3. 设 X_1,X_2 是来自总体 X 的简单随机样本, 且 $\bar{X}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{2}X_i, S_2^2=\sum\limits_{i=1}^{2}(X-\bar{X})^2, Y=\sqrt{X_1X_2}$,

(1) 若 X 服从参数为 $\dfrac{1}{2}$ 的指数分布, 求 EY;

(2) 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 求 $E\left[(\bar{X}S_2^2)^2\right]$.

(1) $EY=E(\sqrt{X_1X_2})=\left[E\left(\sqrt{X}\right)\right]^2$, 下求 $E\sqrt{X}$,

$$E\sqrt{X}=\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x}\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\mathrm{d}x\xlongequal{\frac{1}{2}x=t}\sqrt{2}\int_0^{+\infty}\sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

于是 $EY=\left(\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)^2=\dfrac{\pi}{2}$.

(2) 因为 $\bar{X}$ 与 S_2^2 相互独立, 所以

$$\begin{aligned}E\left[(\bar{X}S_2^2)^2\right]&=E(\bar{X}^2)E\left[(S_2^2)^2\right]=\left[D\bar{X}+(E\bar{X})^2\right]\left[D(S_2^2)+E^2(S_2^2)\right]\\&=\left[\frac{1}{n}DX+E^2X\right]\left[(\sigma^2)^2D\left(\frac{S_2^2}{\sigma^2}\right)+\left(\sigma^2E\left(\frac{S_2^2}{\sigma^2}\right)\right)^2\right]\\&=\left(\frac{1}{2}\sigma^2+\mu^2\right)(2\sigma^4+\sigma^4)=3\sigma^4\left(\frac{1}{2}\sigma^2+\mu^2\right).\end{aligned}$$

20.2.2 t 分布

定义 20.2.2 (t 分布). 设随机变量 $X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(n)$, 且 X,Y 相互独立, 则称随机变量

$$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

服从自由度为 n 的 t 分布, 记为 $T\sim t(n)$.

定理 20.2.4. t 分布的概率密度函数 $h(t)$ 为偶函数, 即 $t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$.

定理 20.2.5. 当 n 足够大时, t 分布近似于 $N(0,1)$ 分布.

定理 20.2.6 (t 分布与 F 分布). $t^2\sim F(1,n)$.

定义 20.2.3 (t 分布上 α 分位点). 设 $t\sim t(n)$, 对于给定的 α $(0<\alpha<1)$, 满足条件

$$P\left\{t>t_\alpha(n)\right\}=\int_{t_\alpha(n)}^{+\infty}h(t)\mathrm{d}t=\alpha$$

的点 $t_\alpha(n)$ 称为 $t(n)$ 分布的上 α 分位点.

20.2.3 F 分布

定义 20.2.4 (F 分布). 设随机变量 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$, 且 X, Y 相互独立, 则称随机变量

$$F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$$

服从自由度为 (n_1, n_2) 的 F 分布, 记为 $F \sim F(n_1, n_2)$.

定理 20.2.7. 若 $F \sim F(n_1, n_2)$, 则有 $\dfrac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$, $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \dfrac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$.

定理 20.2.8 (F 分布上 α 分位点). 设 $F \sim F(n_1, n_2)$, 对于给定的 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, 满足条件

$$P\{F > F_\alpha(n_1, n_2)\} = \int_{F_\alpha(n_1, n_2)}^{+\infty} \psi(y)\mathrm{d}y = \alpha$$

的点 $F_\alpha(n_1, n_2)$ 称为 $F(n_1, n_2)$ 分布的上 α 分位点.

常用分布及其数学期望与方差.

分布名称及记号	概率函数或概率密度	数学期望	方差
(1) "0-1" 分布	$p(x) = p^x q^{1-x},\ x = 0, 1,\ 0 < p < 1,\ p + q = 1$	p	pq
(2) 二项分布 $B(n, p)$	$p(x) = \mathrm{C}_n^x p^x q^{n-x},\ x = 0, 1, 2, \cdots, n,\ 0 < p < 1,\ p + q = 1$	np	npq
(3) 超几何分布 $H(n, M, N)$	$p(x) = \dfrac{\mathrm{C}_M^x \mathrm{C}_{N-M}^{n-x}}{\mathrm{C}_N^n},\ x = 0, 1, \cdots, \min\{n, M\},\ 0 \leqslant n, M \leqslant N$	$\dfrac{nM}{N}$	$\dfrac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
(4) 泊松分布 $\pi(\lambda)$	$p(x) = \dfrac{\lambda^x \mathrm{e}^{-\lambda}}{x!},\ x = 0, 1, 2, \cdots,\ \lambda > 0$	λ	λ
(5) 几何分布 $G(p)$	$p(x) = pq^{x-1},\ x = 1, 2, \cdots,\ 0 < p < 1,\ p + q = 1$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$
(6) 均匀分布 $U(a, b)$	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-1}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
(7) 指数分布 $e(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \lambda > 0$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
(8) 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty < x + \infty,\ \sigma > 0$	μ	σ^2
(9) χ^2 分布 $\chi^2(k)$	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{k}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$	k	$2k$
(10) t 分布 $t(k)$	$f(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \dfrac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$	0	$\dfrac{k}{k-2}$
(11) F 分布 $F(k_1, k_2)$	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)} k_1^{\frac{k_1}{2}} k_2^{\frac{k_2}{2}} \dfrac{x^{\frac{k_1}{2}-1}}{(k_1 x + k_2)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$	$\dfrac{k_2}{k_2-2}$	$\dfrac{2k_2^2(k_1+k_2-2)}{k_1(k_2-2)^2(k_2-4)}$

例 20.2.4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n\ (n \geqslant 2)$ 为来自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 及 $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, 则不能得出结论

A. $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布

B. $2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布

C. $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$ 服从 χ^2 分布

D. $n\left(\bar{X}-\mu\right)^2$ 服从 χ^2 分布

$X_i-\mu\sim N(0,1)$, 由卡方分布的定义知 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$, A 正确; $X_n\sim N(\mu,1)$, $X_1\sim N(\mu,1)$, 标准化处理有 $\dfrac{X_n-X_1}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$, 即 $\left(\dfrac{X_n-X_1}{\sqrt{2}}\right)^2\sim\chi^2(1)\Rightarrow\dfrac{(X_n-X_1)^2}{2}\sim\chi^2(1)$, 故选项 B 错误; 由于 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=(n-1)S^2$, 而 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$, 则 $\dfrac{(n-1)S^2}{1}\sim\chi^2(n-1)$, 即 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$, C 正确; 由于 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{1}{n}}}\sim N(0,1)$, 则 $\left(\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{1}{n}}}\right)^2=n\left(\bar{X}-\mu\right)^2\sim\chi^2(1)$, D 正确.

例 20.2.5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本, 则数学期望

$$E\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\left[\sum_{j=1}^{n}\left(nX_j-\sum_{k=1}^{n}X_k\right)^2\right]\right\}$$

等于

A. $n^3(n-1)\mu\cdot\sigma^2$　　B. $n^2(n-1)\mu\cdot\sigma^2$　　C. $n(n-1)\mu\cdot\sigma^2$　　D. $n^3(n-1)\mu\cdot\sigma$

令 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, 那么 $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=n\bar{X}$,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(nX_j-\sum_{k=1}^{n}X_k\right)^2=\sum_{j=1}^{n}\left(nX_j-n\bar{X}\right)^2=n^2\sum_{j=1}^{n}\left(X_j-\bar{X}\right)^2=n^2(n-1)S^2$$

因此

$$E\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\left[\sum_{j=1}^{n}\left(nX_j-\sum_{k=1}^{n}X_k\right)^2\right]\right\}=E\left[n\bar{X}\cdot n^2(n-1)S^2\right]=n^3(n-1)E\left(\bar{X}\cdot S^2\right)\xlongequal{\bar{X},S^2\text{ 相互独立}}n^3(n-1)\mu\sigma^2$$

故选 A.

例 20.2.6. 已知 (X,Y) 的概率密度函数为 $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2-2y+1\right)},-\infty<x,y<+\infty$, 求 $\dfrac{X^2}{(Y-1)^2}$ 服从的分布及参数.

已知二维正态分布概率密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(x-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

因此 $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2-2y+1\right)}\sim N(0,1;1,1;0)$, 故 $X\sim N(0,1)$, $Y\sim N(1,1)$ 且 X,Y 相互独立, 那么 $\dfrac{X^2}{(Y-1)^2}\sim F(1,1)$.

例 20.2.7. 设总体 $X\sim N(0,1)$, $(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$ 为 X 的简单随机样本,

(1) 若 $T=\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{3}X_i\right)^3+\frac{1}{7}\left(\sum_{i=4}^{10}X_i\right)^2$, 求 T 服从的分布;

(2) 若 $T=\dfrac{7\sum_{i=1}^{3}X_i^2}{3\sum_{i=4}^{10}X_i^2}$, 求 T 服从的分布;

(3) 若 $T=\dfrac{3X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{10}X_i^2}}$, 求 T 服从的分布.

(1) 因为 $\sum_{i=1}^{3}X_i=X_1+X_2+X_3\sim N(0+0+0,1+1+1)=N(0,3)$, 所以

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{3}X_i\right)^2=\frac{\left(\sum_{i=1}^{3}X_i\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{3}X_i-0}{\sqrt{3}}\right)^2\sim\chi^2(1)$$

同理 $\frac{1}{7}\left(\sum_{i=4}^{10}X_i\right)^2=\frac{\left(\sum_{i=4}^{10}X_i\right)^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2}=\left(\frac{\sum_{i=4}^{10}X_i-0}{\sqrt{7}}\right)^2\sim\chi^2(1)$, 于是 $T=\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{3}X_i\right)^3+\frac{1}{7}\left(\sum_{i=4}^{10}X_i\right)^2\sim\chi^2(2)$.

(2) $T=\dfrac{7\sum_{i=1}^{3}X_i^2}{3\sum_{i=4}^{10}X_i^2}=\dfrac{\frac{\sum_{i=1}^{3}X_i^2}{3}}{\frac{\sum_{i=4}^{10}X_i^2}{7}}\sim F(3,7)$.

(3) $T=\dfrac{3X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{10}X_i^2}}=\dfrac{X_1}{\frac{\sqrt{\sum_{i=2}^{10}X_i^2}}{3}}=\dfrac{X_1}{\sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{10}X_i^2}{9}}}\sim t(9)$.

20.3 正态总体的抽样分布

设总体 X (不管服从什么分布, 只要均值和方差存在) 的均值为 μ, 方差为 $\sigma^2, X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自 X 的一个样本, 样本均值 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, 样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$, 则有 $E(\bar{X})=\mu, D(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}, E\left(S^2\right)=\sigma^2$.

鉴于正态总体在数理统计中的重要性, 我们将不加证明地给出有关来自于正态总体样本均值及样本方差的统计量分布的结论. 这些结论将在总体参数的区间估计和假设检验问题中用到.

20.3.1 单正态总体的抽样分布

定理 20.3.1 (单正态总体的抽样分布). 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 的简单随机样本, 样本均值为 $\bar{X}$, 样本方差为 S^2, 则

(1) $\bar{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right), \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$;

(2) $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立, 且 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$;

(3) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$;

(4) $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2 \sim \chi^2(n)$.

20.3.2 双正态总体的抽样分布

定理 20.3.2 (双正态总体的抽样分布). 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别为来自于总体 $X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ 和 $Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ 的样本, 且这两个样本相互独立. 设 $\bar{X} = \dfrac{1}{n_1}\sum\limits_{i=1}^{n_1} X_i$, $\bar{Y} = \dfrac{1}{n_2}\sum\limits_{i=1}^{n_2} Y_i$ 分别是两个样本的样本均值,

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_i-\bar{X}\right)^2, S_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2$$

分别是两个样本的样本方差, 则有:

(1) $\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$;

(2) $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F\left(n_1-1, n_2-1\right)$;

(3) $\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\mathrm{w}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t\left(n_1+n_2-2\right)$, 其中 $S_{\mathrm{w}}^2 = \dfrac{\left(n_1-1\right)S_1^2+\left(n_2-1\right)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.

第 21 章

正态总体参数的区间估计与假设检验

"在波兰，没有谁能考我!" 于是，传记作家问他，那谁算你的导师呢？
他丝毫不迟疑的回答："亨利.勒贝格!"
——乔治·内曼

在统计学中, 对于正态总体参数的区间估计和假设检验是非常常见的问题. 正态总体是指总体服从正态分布的情况, 对于正态总体的参数（如均值和方差）的区间估计和假设检验有着特定的方法和步骤.

1. 正态总体参数的区间估计:

均值的区间估计: 对于正态总体均值的区间估计, 常用的方法是利用样本均值和样本标准差构造置信区间. 当总体方差已知时, 可以使用正态分布进行区间估计; 当总体方差未知时, 可以使用 t 分布进行区间估计.

方差的区间估计: 对于正态总体方差的区间估计, 可以使用卡方分布构造置信区间.

2. 正态总体参数的假设检验: 均值的假设检验: 对于正态总体均值的假设检验, 常用的方法包括单样本 t 检验、双样本 t 检验、配对样本 t 检验等. 假设检验的步骤包括设定原假设和备择假设、计算检验统计量、确定显著性水平、做出决策.

方差的假设检验: 对于正态总体方差的假设检验, 可以使用 F 检验.

3. 置信水平和显著性水平: 在区间估计和假设检验中, 置信水平和显著性水平是非常重要的概念. 置信水平表示我们对参数估计的信心程度, 通常取常见的置信水平有 95%、99% 等; 显著性水平表示拒绝原假设的程度, 通常取 0.05、0.01 等.

4. 统计软件的应用: 对于复杂的正态总体参数的区间估计和假设检验问题, 可以使用统计软件(如R、Python、SPSS等) 进行计算和分析, 以提高效率和准确性.

通过对正态总体参数的区间估计和假设检验的研究, 我们可以更好地理解样本数据中的信息, 对总体参数进行推断和判断, 为决策提供统计学依据. 这些方法在实际问题分析和科学研究中有着广泛的应用.

21.1 区间估计

区间估计是统计学中一种常用的方法, 用于估计一个参数的值在一个给定的区间内的范围. 在实际应用中, 我们往往无法得到一个参数的精确值, 而是通过收集样本数据, 利用统计方法来估计这个参数的取值范围.

21.1.1 区间估计的定义

定义 21.1.1 (区间估计). 设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)$, 含有未知参数 $\theta \in \Theta$ (Θ 是 θ 的取值范围), 对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$, $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\bar{\theta}=\bar{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ $(\underline{\theta}<\bar{\theta})$ 是来自 X 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 确定的两个统计量, 若对于任意 $\theta\in\Theta$ 满足

$$P\left\{\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\bar{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\right\}\geqslant 1-\alpha$$

则称随机区间 $(\underline{\theta},\bar{\theta})$ 为参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间, θ 和 $\bar{\theta}$ 分别称为置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的置信下限和置信上限, $1-\alpha$ 称为置信水平.

置信水平 $1-\alpha$ 的含义: 在随机抽样中, 若重复抽样多次 (每次的样本容量相同), 得到样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的多个样本值, 对应每个样本值都确定了一个置信区间 $(\underline{\theta},\bar{\theta})$, 每个这样的置信区间要么包含了 θ 的真值, 要么不包含 θ 的真值.

根据伯努利大数定理, 当抽样次数充分大时, 这些置信区间中包含 θ 的真值的频率接近于置信水平 (即概率) $1-\alpha$, 即在这些置信区间中包含 θ 的真值的置信区间大约有 $(1-\alpha)\times 100\%$ 个, 不包含 θ 的真值的置信区间大约有 $\alpha\times 100\%$ 个. 例如, 给定 $\alpha=0.05$, 则置信水平是 0.95, 若重复抽样 10000 次, 对应每次抽样都确定了一个置信区间 $(\underline{\theta},\bar{\theta})$, 则其中大约有 9500 个置信区间包含 θ 的真值, 大约有 500 个置信区间不包含 θ 的真值. 也就是说, 某一置信区间中包含 θ 的真值的概率是 0.95.

例 21.1.1. 已知某种袋装食盐的质量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 从一批食盐中随机抽取 9 袋, 测得其质量 (单位: g) 分别为

502 503 501 503 498 502 499 500 501

已知 $\sigma=1$, 求总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

由于统计量 $Z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$, 按标准正态分布上 α 分位点的定义 (见图 21.1.1), 有

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

即

$$P\{\bar{X}-z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}<\mu<\bar{X}+z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\}=1-\alpha$$

故此置信区间为

$$(\bar{X}-z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n},\bar{X}+z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}) \tag{1}$$

常缩写为 $(\bar{X}\pm z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n})$.

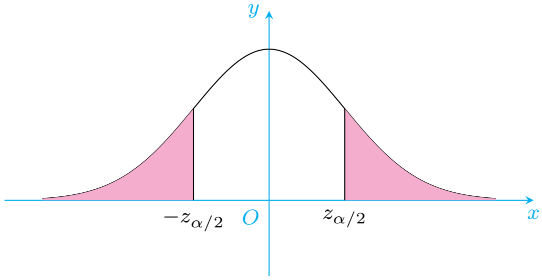


图 21.1.1

由于 $\alpha=0.05$, 查表知 $z_{0.025}=1.96$, 且由于 $\sigma=1, n=9, \bar{x}=501$, 由式 (1), 得到 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为 $\left(501 \pm 1.96 \times 1/\sqrt{9}\right)$, 即 $(500.35, 501.65)$.

这个区间的含义是: 若反复抽样多次, 每次抽样均确定一个置信区间, 在这些置信区间中, 包含 μ 的约占 95%, 或者说某一置信区间是包含 μ 的区间的可信程度为 95%. 置信区间长度的一半是 0.65, 表示用 $\bar{x}=501$ 来估计参数 μ 的误差不大于 0.65, 这个误差估计的可信程度是 95%.

若给定置信水平 0.99 时, 则 $\alpha=0.01$, 查表知 $z_{0.005}=2.58$, 得到置信区间为 $(500.14, 501.86)$. 可以看出, 当给定的置信水平越大时, 即 $1-\alpha$ 越大, 则 α 值越小, $z_{\alpha/2}$ 越大, 从而置信区间长度 $2z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 越大, 参数估计的精确程度越差.

21.1.2　区间估计的一般步骤

求置信区间的基本步骤如下:

(1) 选择一个与样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 及 θ 有关的函数 $W\left(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta\right)$, 使得 W的分布不依赖于 θ 和其他未知参数, 称具有这种性质的函数 W 为枢轴量. 枢轴量选取的标准为:

  (a) 必须含有要估计的参数 θ, 不含有其他未知参数;

  (b) 尽量使用总体的已知信息.

(2) 对于给定的置信水平 $1-\alpha$, 根据 $P\left\{a<W\left(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta\right)<b\right\}=1-\alpha$, 在枢轴量 W 为常用分布的情况下, a 和 b 可由分位数表查得.

选择分位数 a 和 b 的标准是使区间 (a, b) 最小, 实际应用中很难实现这一点, 因此通常选取 a 和 b 使得 $P\left\{W\left(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta\right) \leqslant a\right\}=P\left\{W\left(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta\right) \geqslant b\right\}=\alpha/2$.

(3) 由 $a<W\left(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta\right)<b$, 作恒等变形后解出参数 θ 的取值范围, 即为所求的置信区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$.

(4) 代人已知样本数据进行计算.

21.2 正态总体均值和方差的区间估计

21.2.1 单个正态总体参数的置信区间

正态总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 是最常见的分布, 下面我们讨论它的两个参数 μ 和 σ^2 的置信区间. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本.

定理 21.2.1 (σ^2 已知时 μ 的置信区间). σ^2 已知, 选择枢轴量 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, 得到 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\bar{X}\pm z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\right)$.

定理 21.2.2 (σ^2 未知时 μ 的置信区间). σ^2 未知, 由于枢轴量 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ 中含有未知参数 σ, 故不能采用. 而 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ 含有待估计参数 μ, 且不含有其他未知参数, 则使用 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 作为枢轴量 (见图 21.2.1(a)), 得

$$P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1)<\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

即

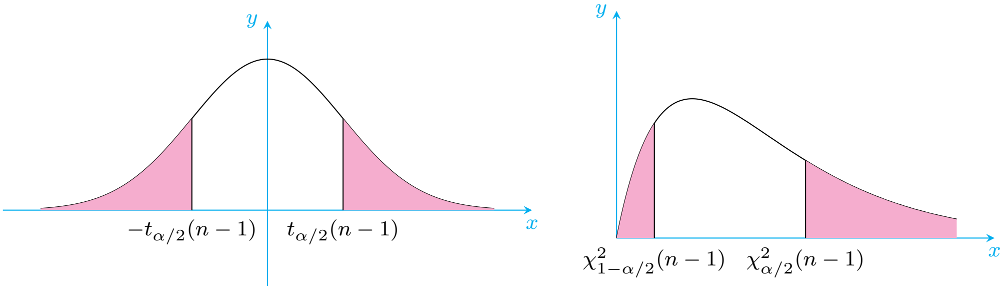
$$P\left\{\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)S/\sqrt{n}<\mu<\bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)S/\sqrt{n}\right\}=1-\alpha$$

因此, μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)S/\sqrt{n},\bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)S/\sqrt{n}\right)$$

常缩写为

$$\left(\bar{X}\pm t_{a/2}(n-1)S/\sqrt{n}\right).$$



(a) (b)

图 21.2.1

在实际中, σ^2 未知且 μ 已知的情形是极为少见的, 因此这里只讨论 μ 未知时 σ^2 的置信区间.

定理 21.2.3 (μ 未知时 σ^2 的置信区间). 由于 μ 未知, 枢轴量 $U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\sim N(0,1)$ 和 $t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ 中都包含 μ, 故此不能采用, 而 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ 不含有其他未知参数, 我们采用统计量

$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 作为枢轴量 (见图 21.2.1(b)), 由

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

即

$$P\left\{(n-1)S^2/\chi^2_{\alpha/2}(n-1) < \sigma^2 < (n-1)S^2/\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

则方差 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left((n-1)S^2/\chi^2_{\alpha/2}(n-1), (n-1)S^2/\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right)$$

且标准差 σ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\sqrt{(n-1)}S/\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \sqrt{(n-1)}S/\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

21.2.2 双正态总体均值差与方差比的置信区间

21.3 单侧置信区间

单侧置信区间是指在统计学中用于估计参数的一种区间估计方法, 只考虑了参数的一个方向. 单侧置信区间通常用于确定参数的下限或上限, 而不是同时确定参数的上限和下限.

定义 21.3.1 (单侧置信下限)**.** 对于给定值 $\alpha(0<\alpha<1), \underline{\theta}=\theta\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$ 是由样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 确定的统计量, 对于任意的 $\theta \in \Theta$ 满足 $P\{\theta>\underline{\theta}\} \geqslant 1-\alpha$, 称随机区间 $(\underline{\theta},+\infty)$ 为参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间, θ 称为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限.

定义 21.3.2 (单侧置信上限)**.** 对于给定值 $\alpha(0<\alpha<1), \bar{\theta}=\bar{\theta}\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$ 是由样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 确定的统计量, 对于任意的 $\theta \in \Theta$ 满足 $P\{\theta<\bar{\theta}\} \geqslant 1-\alpha$, 称随机区间 $(-\infty, \bar{\theta})$ 为参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间, $\bar{\theta}$ 称为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限.

单侧置信上限和单侧置信下限的求法与双侧置信区间的求法类似, 步骤如下:

(1) 选择枢轴量的方法与双侧置信区间枢轴量的确定方法是相同的;

(2) 对于给定的置信水平 $1-\alpha$, 若求单侧置信下限, 根据 $P\{\theta>\underline{\theta}\} \geqslant 1-\alpha$, 若求单侧置信上限, 根据 $P\{\theta<\bar{\theta}\} \geqslant 1-\alpha$, 求出分位数 $\underline{\theta}$ 或者 $\bar{\theta}$;

(3) 由 $\theta>\underline{\theta}$ 或者 $\theta<\bar{\theta}$, 作恒等变形后解出参数 θ 的取值范围, 即所求的单侧置信区间;

(4) 代人已知样本数据进行计算, 求出具体区间.

例 21.3.1. 从一批电视机中随机地抽取 6 台做寿命试验, 测得寿命 (单位: h) 为

$$24000 \quad 25500 \quad 30100 \quad 28530 \quad 30150 \quad 29870$$

设电视机的寿命服从正态分布, 求电视机平均寿命的单侧置信下限 $(\alpha=0.1)$.

设电视机的寿命 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, σ^2 未知, 由于 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 含有待估计参数 μ, 且不含有其他未知参数, 故使用 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 作为枢纽量, 则

$$P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)<t_\alpha(n-1)\right\}=1-\alpha$$

即

$$P\left\{\mu>\bar{X}-t_\alpha(n-1) S / \sqrt{n}\right\}=1-\alpha$$

于是得到 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限为

$$\bar{X}-t_\alpha(n-1) S / \sqrt{n}$$

根据已知数据, 得 $\bar{x}=28025, s=2647.9, n=6$,由 $\alpha=0.1$, 查表知 $t_\alpha(n-1)=t_{0.1}(5)=1.4759$, 于是得到 μ 的置信水平为 0.9 的单侧置信下限为 $28025-1.4759 \times 2647.9 / \sqrt{6}=26430$.

21.4 假设检验

假设检验是一种统计推断方法, 用于判断关于总体参数的某种假设是否成立. 在假设检验中, 我们通常会提出一个关于总体参数的假设, 然后利用样本数据来判断这个假设是否成立.

表 21.1: 正态总体参数区间估计表

总体	参数	统计量	双侧置信区间	单侧置信区间	
$X\sim N(\mu,\sigma_0^2)$ σ^2 已知	μ	$Z=\dfrac{\bar X-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar X\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$	$\left(-\infty,\bar X+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}\right)$	$\left(\bar X-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha},+\infty\right)$
$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ σ^2 未知	μ	$t=\dfrac{\bar X-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\bar X\pm t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$	$\left(-\infty,\bar X+t_{\alpha}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$	$\left(\bar X-t_{\alpha}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}},+\infty\right)$
$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ μ 未知	σ^2	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ $\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$	$\left(0,\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)},+\infty\right)$
$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ σ_1^2,σ_2^2 已知	$\mu_1-\mu_2$	$Z=\dfrac{\bar X-\bar Y-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ $\sim N(0,1)$	$\left(X-Y\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$	$(-\infty,\bar X-\bar Y$ $+z_{\alpha}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\Bigg)$	$(\bar X-\bar Y$ $-z_{\alpha}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}},+\infty\Bigg)$
$X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$ $Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$ σ^2 未知	$\mu_1-\mu_2$	$t=\dfrac{\bar X-\bar Y-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ $\sim t(n_1+n_2-2)$	$(\bar X-\bar Y+\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2$ $-2)\cdot S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\Bigg)$	$(-\infty,\bar X-\bar Y+t_{\alpha}(n_1+n_2$ $-2)\cdot S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\Bigg)$	$(\bar X-\bar Y-t_{\alpha}(n_1+n_2$ $-2)\cdot S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}},+\infty\Bigg)$
$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ μ_1,μ_2 未知	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$F=\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}$ $\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\Bigg(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F^{-1}_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$ $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F^{-1}_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\Bigg)$	$\left(0,\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F^{-1}_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)\right)$	$\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F^{-1}_{\alpha}(n_1-1,n_2-1),+\infty\right)$

21.4.1 假设检验的基本思想

例 21.4.1. 某厂生产一种袋装白糖, 每袋白糖的净重是一个随机变量, 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$, 机器正常工作时, 均值是 0.5 (单位: kg), 标准差是 0.01 kg, 某天随机地抽取 5 袋白糖, 称得净重为

$$0.54 \quad 0.58 \quad 0.47 \quad 0.49 \quad 0.52$$

问当日机器是否正常工作?

由题意知, 方差 σ^2 已知, μ 未知, 要判断机器是否正常工作, 就是要判断该日生产的白糖净重的均值是否为 0.5 kg, 即检验假设 “$\mu = 0.5$” 是否正确. 因此, 提出两个相互对立的假设:
原假设 $H_0 : \mu = \mu_0 = 0.5$, 备择假设 $H_1 : \mu \neq 0.5$.
如果假设 $H_0 : \mu = \mu_0 = 0.5$ 为真, 那么机器正常工作; 如果假设 $H_1 : \mu \neq 0.5$ 为真, 则机器工作不正常.
在假设 $H_0 : \mu = \mu_0 = 0.5$ 条件下, 统计量 $Z = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, 由标准正态分布的分位点的定义 (见图 21.1.1), 知 $P_{\mu_0}\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geqslant z_{\alpha/2}\right\} = \alpha$, 若给定 $\alpha = 0.05$, 查表知 $z_{0.025} = 1.96$, 代入样本数据: $n = 5, \bar{x} = 0.52$, 则

$$z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{0.52-0.5}{0.01/\sqrt{5}} = 4.47 > 1.96.$$

这说明小概率事件发生了, 所以应该拒绝假设 $H_0 : \mu = \mu_0 = 0.5$, 接受备择假设 $H_1 : \mu \neq 0.5$, 即机器工作不正常.

定义 21.4.1 (接收域和拒绝域). 上述例题中, 若 z 取值在区间 $(-1.96, 1.96)$ 范围内, 则接受假设 H_0, 即 $|z| < z_{\alpha/2}$ 称为接受域, 而 $|z| \geqslant z_{\alpha/2}$ 称为拒绝域, $z_{\alpha/2}$ 称为临界值, $Z = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 称为检验统计量.

在根据样本作推断时, 由于样本的随机性, 难免会做出错误的决定.

定义 21.4.2 (第一类错误). 当原假设 H_0 为真时, 而做出拒绝 H_0 的判断, 称为犯第一类错误 (拒真错误)

定义 21.4.3 (第二类错误). 当原假设 H_0 不真时, 而作出接受 H_0 的判断, 称为犯第二类错误 (取伪错误).

定义 21.4.4 (显著性水平). 在实际应用中, 控制犯第一类错误的概率, 使其不大于一个较小的正数 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, 称 α 为检验的显著性水平.

定义 21.4.5 (双边备择假设与双边假设检验). 形如 $H_1 : \mu \neq \mu_0$ 的假设, 表示 μ 可能大于 μ_0, 也可能小于 μ_0, 称为双边备择假设; 形如 $H_0 : \mu = \mu_0$ 的假设, 称为双边假设检验.

在实际中, 有时只关心均值是否减小. 例如某机器的生产效率问题, 此时我们应该关注的是生产时间, 时间越短越好. 对于采用新工艺来提高生产效率, 生产时间是否显著缩短的问题, 需要考虑如下假设检验: 原假设 $H_0 : \mu \geqslant \mu_0$, 备择假设 $H_1 : \mu < \mu_0$.

定义 21.4.6 (单边检验). 形如 $H_0 : \mu \geqslant \mu_0$ 的假设称为*左边检验*, 类似的形如 $H_0 : \mu \leqslant \mu_0$ 的假设称为*右边检验*. 左边检验和右边检验统称为*单边检验*.

21.4.2 假设检验的解题步骤

(1) 确定原假设 H_0 与备择假设 H_1;

(2) 选择合适的检验统计量, 在原假设成立的条件下求其发布;

(3) 根据显著性水平 α, 再原假设成立的条件下确定临界值和拒绝域;

(4) 判断是否落入拒绝域, 落入拒绝域则拒绝 H_0, 否则拒绝 H_1.

21.4.3 单个正态总体的假设检验

σ^2 已知, 关于 μ 的检验 (Z 检验)

设总体 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, 其中 σ^2 已知, 要检验假设:

(1) 双边检验. $H_0: \mu=\mu_0$, 备择假设 $H_1: \mu \neq \mu_0$, 由例题 21.4.1 知, 选取检验统计量为 $Z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$, 拒绝域为 $|z| \geqslant z_{\alpha / 2}$.

(2) 右边检验. $H_0: \mu \leqslant \mu_0, H_1: \mu>\mu_0$, 选择统计量 $Z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$, 根据标准正态分布分位点的定义 (见图 21.4.1(a)) 可知 $P_{\mu_0}\left\{\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geqslant z_\alpha\right\}=\alpha$, 则拒绝域为 $z \geqslant z_\alpha$.

(3) 左边检验. $H_0: \mu \geqslant \mu_0, H_1: \mu<\mu_0$, 选取统计量 $Z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$, 由标准正态分布分位点的定义 (见图 21.4.1(b)) 可知 $P_{\mu_0}\left\{\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leqslant -z_\alpha\right\}=\alpha$, 则拒绝域为 $z \leqslant -z_\alpha$.

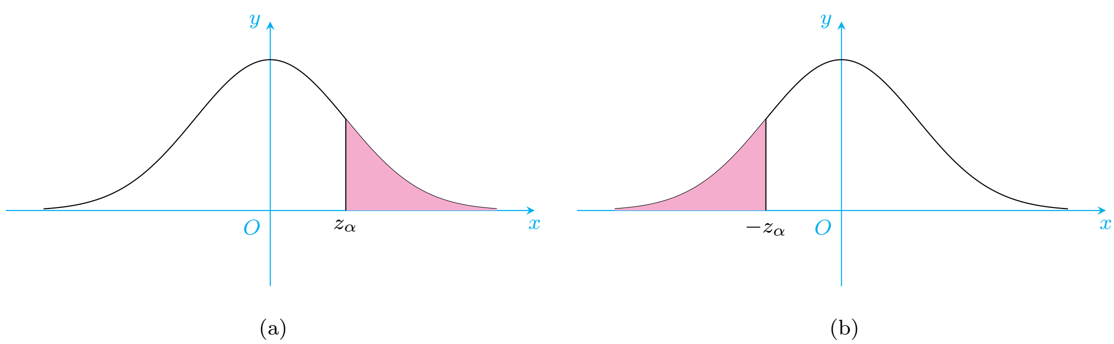


图 21.4.1

例 21.4.2. 设某电子产品平均寿命 5000 h 为达到标准, 现从一大批产品中抽出 5 件, 试验结果 (单位: h) 如下:

$$5325 \quad 4878 \quad 4638 \quad 5652 \quad 4474$$

假设该产品的寿命 $X \sim N(\mu, 1000)$, 试问此批产品是否合格 (取显著性水平 $\alpha=0.05$)?

由题意知，需要检验假设

$$H_0 : \mu \geqslant 5000,\ H_1 : \mu < 5000$$

根据已知样本数据，得 $n = 5, \bar{x} = 4993, \sigma_0 = \sqrt{1000}$，则

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{5}(4993 - 5000)}{\sqrt{1000}} = -0.495$$

查表知 $z_{0.05} = 1.645$，由于拒绝域为 $z \leqslant -z_\alpha$，故可接受 H_0，即认为该批产品合格.

σ^2 未知，关于 μ 的检验 (t 检验)

设总体 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$，其中 μ, σ^2 未知，检验假设:

(1) 双边检验. $H_0 : \mu = \mu_0$，备择假设 $H_1 : \mu \neq \mu_0$;

(2) 右边检验. $H_0 : \mu \leqslant \mu_0, H_1 : \mu > \mu_0$;

(3) 左边检验. $H_0 : \mu \geqslant \mu_0, H_1 : \mu < \mu_0$;

这里以双边检验 $H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu \neq \mu_0$ 为例求拒绝域.

若总体方差 σ^2 未知，Z 检验法不能使用，因为 $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 中含未知参数 σ，不是统计量，所以要选择其他的统计量来进行检验. 选取统计量 $t = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ 作为检验统计量. 由抽样分布定理知，$\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，当原假设 H_0 成立时，有

$$P_{\mu_0}\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| \geqslant t_{a/2}(n-1)\right\} = \alpha$$

即得拒绝域为 $|t| = \left|\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$. 类似地，可得单边检验的拒绝域:

(1) 假设 $H_0 : \mu \leqslant \mu_0, H_1 : \mu > \mu_0$，其检验的拒绝域为 $t \geqslant t_\alpha(n-1)$;

(2) 假设 $H_0 : \mu \geqslant \mu_0, H_1 : \mu < \mu_0$，其检验的拒绝域为 $t \leqslant -t_\alpha(n-1)$.

这种利用 t 统计量得出的检验法称为 t 检验法.

例 21.4.3. 已知钢筋强度服从正态分布，现测得生产出的钢筋强度 (单位: Pa) 分别为

$$55.5 \quad 59.0 \quad 53.5 \quad 51.5 \quad 56.0$$

能否认为其强度的均值为 $52.0(\alpha = 0.05)$?

在 σ^2 未知的条件下，检验假设

$$H_0 : \mu = 52.0, \quad H_1 : \mu \neq 52.0$$

选择统计量 $t = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$，由 $n = 5, \bar{x} = 55.1, s = 2.8151$，得统计量 t 的观测值为

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{5}(55.1 - 52.0)}{2.8151} = 2.4624$$

当 $\alpha = 0.05$，查 t 分布表得临界值 $t_{0.025}(4) = 2.776$，由于 $|t| = 2.4624 < 2.776 = t_{0.025}(4)$，所以接受假设 H_0，即认为钢筋强度的均值为 52.0.

例 21.4.4. 已知某种电器在正常工作条件下平均消耗电流不会超过 0.8 A. 现随机抽取 16 台这种电器进行试验, 求得平均消耗电流为 0.91 A, 消耗电流的标准差为 0.2 A. 假设电器所消耗的电流服从正态分布, 显著性水平为 $\alpha=0.05$, 问能否认为电器在正常工作条件下平均消耗电流不会超过 0.8 A?

根据题意, 检验假设

$$H_0: \mu \leqslant 0.8, \quad H_1: \mu>0.8$$

由于 σ 未知, 故采用 t 检验法, 选择检验统计量 $t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{16}} \sim t(15)$, 查表得 $t_{0.05}(15)=1.753$, 故拒绝域为 $\dfrac{\bar{x}-0.8}{s/\sqrt{n}}>1.753$, 代入样本数据, 得 $t=\dfrac{\bar{x}-0.8}{s/\sqrt{n}}=\dfrac{0.9-0.8}{0.2/\sqrt{16}}=2$, 因此拒绝原假设, 即认为电器在正常工作条件下平均消耗电流会超过 0.8 A .

μ 未知, 关于 σ^2 的检验 (χ^2 检验)

设总体 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), \mu, \sigma^2$ 均未知, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的样本, 要求检验假设 $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2 ; H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2, \sigma_0^2$ 为已知常数 (显著性水平为 α).

选取 $\chi^2=\dfrac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2}$ 作为检验统计量, 原假设 H_0 成立时, $\dfrac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$, 其拒绝域的形式为 $\dfrac{(n-1) s^2}{\sigma_0^2} \leqslant k_1$ 或 $\dfrac{(n-1) s^2}{\sigma_0^2} \geqslant k_2$, 其中 k_1, k_2 由下式确定:

$$\text{由 } P\{\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 为真}\}=P_{\delta_0}\left\{\left(\frac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2} \leqslant k_1\right) \cup\left(\frac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2} \geqslant k_2\right)\right\}=\alpha$$

为计算方便, 习惯上取 $P_{\delta_0}\left\{\dfrac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2} \leqslant k_1\right\}=\dfrac{\alpha}{2}, P_{\delta_0}\left\{\dfrac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2} \geqslant k_2\right\}=\dfrac{\alpha}{2}$, 得

$$k_1=\chi_{1-\alpha / 2}^2(n-1), \ k_2=\chi_{\alpha / 2}^2(n-1)$$

于是拒绝域为

$$\frac{(n-1) s^2}{\sigma_0^2} \leqslant \chi_{1-\alpha / 2}^2(n-1) \quad \text{或} \quad \frac{(n-1) s^2}{\sigma_0^2} \geqslant \chi_{\alpha / 2}^2(n-1).$$

类似地可得关于方差的两个单边检验的拒绝域:

(1) 假设 $H_0: \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2 ; H_1: \sigma^2>\sigma_0^2$, 该检验的拒绝域为 $\dfrac{(n-1) s^2}{\sigma_0^2} \geqslant \chi_\alpha^2(n-1)$;

(2) 假设 $H_0: \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2 ; H_1: \sigma^2<\sigma_0^2$, 该检验的拒绝域为 $\dfrac{(n-1) s^2}{\sigma_0^2} \leqslant \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$.

以上检验法称为 χ^2 检验法.

例 21.4.5. 某厂应用新工艺对加工好的 15 个活塞的直径进行测量, 得样本方差 $s^2=0.0006$. 已知老工艺生产的活塞直径的方差为 0.0004. 问改革后活塞直径的方差是否不大于改革前的方差 (取显著性水平 $\alpha=0.05$)?

对方差进行右边检验, 且正态总体均值未知, 用 χ^2 检验法. 设测量值 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), \sigma^2=0.0004$. 检验假设为

$$H_0: \sigma^2 \leqslant 0.0004, \quad H_1: \sigma^2>0.0004$$

选择统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2}$, 拒绝域为 $\chi^2 \geqslant \chi_\alpha^2(n-1)$. 查表得 $\chi_{0.05}^2(14)=23.685$, 代入样本数据, 得

$$\chi^2=\frac{(15-1) \times 0.0006}{0.0004}=21<23.685$$

故接受 H_0, 即改革后活塞直径的方差不显著大于改革前的方差.

21.4.4 双正态总体的假设检验

双正态总体均值的检验 (t 检验)

双正态总体方差的假设检验

正态总体方差的假设检验各情况表.

条件	原假设	统计量	对应样本函数分布	拒绝域
		单正态总体均值和方差的假		
已知 σ^2	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_0:\mu\leqslant\mu_0$ $H_0:\mu\geqslant\mu_0$	$Z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,1)$	$\lvert z\rvert\geqslant z_{\alpha/2}$ $z\geqslant z_\alpha$ $z\leqslant -z_\alpha$
未知 σ^2	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_0:\mu\leqslant\mu_0$ $H_0:\mu\geqslant\mu_0$	$t=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\lvert t\rvert\geqslant t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$ $t\geqslant t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $t\leqslant -t_\alpha(n_1+n_2-2)$
未知 μ	$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_0:\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$ $H_0:\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\chi^2\geqslant\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ $\chi^2\geqslant\chi^2_\alpha(n-1)$ $\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
		双正态总体均值和方差的假		
已知 σ_1^2,σ_2^2	$H_0:\mu_1-\mu_2=\delta$ $H_0:\mu_1-\mu_2\leqslant\delta$ $H_0:\mu_1-\mu_2\geqslant\delta$	$Z=\dfrac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\sigma}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$N(0,1)$	$\lvert z\rvert\geqslant z_{\alpha/2}$ $z\geqslant z_\alpha$ $z\leqslant -z_\alpha$
未知 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$H_0:\mu_1-\mu_2=\delta$ $H_0:\mu_1-\mu_2\leqslant\delta$ $H_0:\mu_1-\mu_2\geqslant\delta$	$t=\dfrac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$	$t(n_1+n_2-2)$	$\lvert t\rvert\geqslant t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$ $t\geqslant t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $t\leqslant -t_\alpha(n_1+n_2-2)$
未知 μ_1,μ_2	$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $H_0:\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2$ $H_0:\sigma_1^2\geqslant\sigma_2^2$	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$F\geqslant F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$ $F\geqslant F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$ $F\leqslant F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$

第 22 章

参数的点估计及其优良性

“数学家通常是先通过直觉来发现一个定理;
这个结果对于他首先是似然的, 然后他再着手去制造一个证明.”
——哈代

在统计学中, 参数的点估计是指利用样本数据来估计总体参数的值. 点估计是统计推断的基础, 它可以帮助我们对未知参数进行估计, 并提供关于参数的一些信息. 以下是关于参数的点估计及其优良性的一些基本概念:

1. 点估计的定义: 点估计是指用样本数据计算出一个数值作为总体参数的估计值. 常见的点估计方法包括最大似然估计、矩估计等.

2. 最大似然估计: 最大似然估计是一种常用的点估计方法, 它通过最大化似然函数来估计参数的值. 最大似然估计的估计量具有一些优良性质, 例如渐近正态性、一致性等.

3. 矩估计: 矩估计是另一种常见的点估计方法, 它基于样本矩来估计总体参数. 矩估计的优良性质包括无偏性、一致性等.

4. 优良性质: 一个好的点估计应当具有一些优良性质, 例如无偏性、有效性、一致性、渐近正态性等. 无偏性是指估计量的期望值等于真实参数的值, 有效性是指估计量的方差最小, 一致性是指估计量在样本量趋于无穷时收敛于真实参数的值, 渐近正态性是指估计量在样本量趋于无穷时服从正态分布.

通过对参数的点估计及其优良性的研究, 我们可以更好地理解样本数据中的信息, 对总体参数进行估计, 并进行统计推断. 点估计是统计学中重要的概念, 也是实际问题分析和决策制定中不可或缺的工具.

22.1 矩估计法

设总体 X 的分布形式已知, θ 为总体的待估参数, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为从总体 X 中抽取的样本, 如果总体 X 的数学期望 $E(X)$ 存在, 那么 $E(X)$ 是 θ 的函数. 例如, 在泊松分布总体 $\pi(\lambda)$ 中, 样本一阶矩

$E(X)=\lambda$; 在指数分布总体 $X\sim e(\lambda)$ 中, $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$. 由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且与总体 X 同分布, 由大数定理知, 当 n 越来越大时, $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 依概率收敛到 $E(X)=h(\theta)$. 要估计 θ, 令

$$E(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$$

解方程 $h(\theta)=\bar{X}$, 可求出 θ, 此种方法所得的估计 $\hat{\theta}$ 称为未知参数 θ 的矩估计.

例 22.1.1. 设总体 $X\sim U(a,b)$, a,b 未知, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本值, 试求 a,b 的矩估计量和矩估计值.

令 $\begin{cases}E(X)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}\\ E(X^2)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\end{cases}$, 且 $X\sim U(a,b)$, 那么

$$E(X)=\frac{a+b}{2},\ E(X^2)=D(X)+E^2(X)=\frac{(b-a)^2}{12}+\frac{(a+b)^2}{4}$$

即 $\begin{cases}a+b=2\bar{X}\\ b-a=2\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2}\end{cases}$ 并且 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$, 解得矩估计量和矩估计值分别为

$$\begin{cases}\hat{a}=\bar{X}-\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\\ \hat{b}=\bar{X}+\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2},\end{cases}\quad \begin{cases}\hat{a}=\bar{x}-\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\\ \hat{b}=\bar{x}+\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}.\end{cases}$$

例 22.1.2. 设总体 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-(x-\theta)^2}, & x\geqslant\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$ $(\theta>0$ 为未知数$)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, 求 θ 的矩估计量 $\bar{\theta}$.

总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2(x-\theta)\mathrm{e}^{-(x-\theta)^2}, & x\geqslant\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$, 那么

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_0^{+\infty}x\cdot 2(x-\theta)\mathrm{e}^{-(x-\theta)^2}\mathrm{d}x=2\int_\theta^{+\infty}[(x-\theta)+\theta]\cdot(x-\theta)\mathrm{e}^{-(x-\theta)^2}\,\mathrm{d}(x-\theta)\\ &=2\int_0^{+\infty}x(x+\theta)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}\left(x^2\right)\\ &\overset{x^2=t}{=\!=}2\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t+\theta=\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t+\theta=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)+\theta=\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\theta\end{aligned}$$

令 $E(X)=\bar{X}$ 得参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\bar{X}-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

例 22.1.3. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2(x-\theta)\mathrm{e}^{-(x-\theta)^2}, & x>\theta\\ 0, & x\leqslant\theta\end{cases}$ $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求参数 θ 的矩估计量;

(2) 设 $U=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$, 求 $E(U)$.

(1) 与上题类似, 有

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_\theta^{+\infty}x\cdot 2(x-\theta)\mathrm{e}^{-(x-\theta)^2}\mathrm{d}x \xlongequal{x-\theta=t}\int_0^{+\infty}(t+\theta)\cdot 2t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}2t^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+\theta\int_0^{+\infty}2t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}(t^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}\left(t^2\right)+\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}\left(t^2\right)\\&=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)+\theta=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)+\theta=\theta+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

由 $E(X)=\bar{X}$ 得参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\bar{X}-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(2) 总体 X 的分布函数为 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$,
当 $x<\theta$ 时, $F(x)=0$;
当 $x\geqslant\theta$ 时, $F(x)=\displaystyle\int_\theta^x 2(x-\theta)\mathrm{e}^{-(x-\theta)^2}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-(x-\theta)^2}$, 即

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<\theta\\ 1-\mathrm{e}^{-(x-\theta)^2}, & x\geqslant\theta\end{cases}$$

U 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_U(x)&=P\{U\leqslant x\}=1-P\{U>x\}=1-P\left\{X_1>x\right\}P\left\{X_2>x\right\}\cdots P\left\{X_n>x\right\}\\&=1-[P\{X>x\}]^n=1-[1-F(x)]^n=\begin{cases}0, & x<\theta\\ 1-\mathrm{e}^{-n(x-\theta)^2}, & x\geqslant\theta\end{cases}\end{aligned}$$

U 的密度函数为

$$f_U(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant\theta\\ 2n(x-\theta)\mathrm{e}^{-n(x-\theta)^2}, & x>\theta\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}E(U)&=\int_\theta^{+\infty}2nx(x-\theta)\mathrm{e}^{-n(x-\theta)^2}\mathrm{d}x=\int_\theta^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\left[n(x-\theta)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\theta\right]\mathrm{e}^{-n(x-\theta)^2}\mathrm{d}\left[n(x-\theta)^2\right]\\&=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}t^{\frac{1}{2}}+\theta\right)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)+\theta=\frac{\sqrt{\pi n}}{2n}+\theta\end{aligned}$$

22.2 极大似然估计

极大似然估计法是参数估计使用的最广泛的方法, 最早由德国数学家 Gauss 在 1821 年提出, 但是此法一般归功于英国统计学家 Fisher, 因为 Fisher 于 1922 年再次提出了这个思想, 并且证明了这种方法的一些性质, 从而使得极大似然法得到更普遍的应用.

例 22.2.1. 设 X_i, $i=1,2,\cdots,n$ 为来自总体 $X\sim B(N,p)$ $(0<p<1)$ 的简单随机样本, 求 p 的极大似然估计量.

似然函数为 $L(p)=\displaystyle\prod_{i=1}^n\mathrm{C}_N^{x_i}\cdot p^{x_i}\cdot(1-p)^{N-x_i}$, 两边取对数, 得

$$\ln L(p)=\sum_{i=1}^n\ln C_N^{x_i}+\sum_{i=1}^n x_i\ln p+\sum_{i=1}^n\left(N-X_i\right)\ln(1-p)$$

令

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln L(p)=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^n x_i-\frac{1}{1-p}\left(nN-\sum_{i=1}^n x_i\right)=0$$

解得 $p=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{nN}=\dfrac{\bar{X}}{N}$, 故 p 的最大似然估计量为 $\hat{p}=\dfrac{\bar{X}}{N}$, 其中 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$.

例 22.2.2. 设总体概率函数如下, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本, 试求未知参数的极大似然估计:

(1) $p(x;\theta)=\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1},0<x<1,\theta>0$;

(2) $p(x;\theta)=\theta c^{\theta}x^{-(\theta+1)},x>c>0,\theta>1$.

(1) 似然函数 $L(\theta)=\left(\sqrt{\theta}\right)^n\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^{\sqrt{\theta}-1}$, 取对数得

$$\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\theta+\left(\sqrt{\theta}-1\right)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

将 $\ln L(\theta)$ 关于 θ 求导, 并令其值为 0 即得到似然函数

$$\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=\frac{n}{2\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

解得 $\widehat{\theta}=\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^{-2}$, 并且

$$\left.\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\widehat{\theta}}=\left.\left(-\frac{n}{2\theta^2}-\frac{1}{4\theta^{3/2}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)\right|_{\theta=\widehat{\theta}}=-\frac{3}{4n^3}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^4<0$$

所以 $\widehat{\theta}$ 是 θ 的极大似然估计.

(2) 似然函数 $L(\theta)=\theta^n c^{n\theta}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^{-(\theta+1)}$, 取对数得

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+n\theta\ln c-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

将 $\ln L(\theta)$ 关于 θ 求导, 并令其值为 0 即得到似然函数

$$\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=\frac{n}{\theta}+n\ln c-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

解得 $\widehat{\theta}=\left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln x_i-\ln c)\right]^{-1}$, 并且 $\dfrac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta^2}=\dfrac{-n}{\theta^2}<0$, 所以 $\widehat{\theta}$ 是 θ 的极大似然估计.

例 22.2.3 (2020 数一). 设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m} & ,t\geqslant 0\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

其中 m, θ 为参数且大于 0,

(1) 求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>s+t\,|\,T>s\}$, 其中 $s,t>0$;

(2) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得它们的寿命分别为 $t_1,t_2,\cdots,t_n$, 若 m 已知, 求 θ 的极大似然估计值 $\hat{\theta}$.

(1) 由 $P\{T>t\}=1-P\{T\leqslant t\}$, 所以 $P\{T>t\}=1-F(t)=\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$, 并且

$$P\{T>s+t \mid T>s\}=\frac{P\{T>s+t, T>s\}}{P\{T>s\}}=\frac{P\{T>s+t\}}{P\{T>s\}}$$

所以 $P\{T>s+t \mid T>s\}=\mathrm{e}^{-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m+\left(\frac{s}{\theta}\right)^m}$, $s,t>0$;

(2) 由 $f(t)=F'(t)$ 可得概率密度函数

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{mt^{m-1}}{\theta^m}\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m} & ,t\geqslant 0\\ 0 & ,t<0\end{cases}$$

对数似然函数为

$$\begin{aligned}\ln[L(\theta)]&=\ln\left[\prod_{i=1}^n f(t_i;\theta)\right]=\ln\left[\prod_{i=1}^n\frac{mt_i^{m-1}}{\theta^m}\mathrm{e}^{-\left(\frac{t_i}{\theta}\right)^m}\right]=\ln\left[\frac{m^n(t_1t_2\cdots t_n)^{m-1}}{\theta^{mn}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta^m}\sum\limits_{i=1}^n t_i^m}\right]\\&=n\ln m+(m-1)\ln\prod_{i=1}^n t_i-mn\ln\theta-\frac{1}{\theta^m}\sum_{i=1}^n t_i^m\end{aligned}$$

求导得 $\dfrac{\mathrm{d}\ln[L(\theta)]}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{mn}{\theta}+m\dfrac{1}{\theta^{m+1}}\sum\limits_{i=1}^n t_i^m=0$, 解得 $\dfrac{1}{\theta^m}\sum\limits_{i=1}^n t_i^m=n$, 那么 θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta}=\sqrt[m]{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n t_i^m}$.

22.3 估计量优良性的判定标准

虽然总体分布中的参数是确定的, 但是对于同一个参数, 可以有许多不同的点估计. 在这些估计中, 我们自然地希望挑选一个最“优”的点估计, 因此, 有必要建立评价估计量优劣的标准. 下面介绍几个常用的标准：无偏性、有效性和一致性.

22.3.1 无偏性

定义 22.3.1 (无偏性)**.** 若 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是参数 θ 的估计量, 其数学期望 $E\left(\hat{\theta}\right)$ 存在, 且 $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$, 则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

例 22.3.1. 已知 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$ 存在, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本, 试判定:

(1) $\bar{X}$ 是否为 μ 的无偏估计量;

(2) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n\left(X_i-\bar{X}\right)^2$ 是否为 σ^2 的无偏估计量.

由定义可知,

(1) 因为总体 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2, X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本, 则

$$E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2,\quad i=1,2,\cdots,n$$

所以 $E(\bar{X})=E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i\right)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n E(X_i)=\mu$, 所以 $\bar{X}$ 为 μ 的无偏估计量.

(2) 因为 $D(\bar{X})=D\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i\right)=\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^n D(X_i)=\dfrac{\sigma^2}{n}$, 所以

$$E(\bar{X}^2)=D(\bar{X})+E^2(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2,\ E(X_i^2)=D(X_i)+E^2(X_i)=\sigma^2+\mu^2$$

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-E(\bar{X}^2)$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu^2+\sigma^2)-\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

所以 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 不是 σ^2 的无偏估计量.

由例题 22.3.1 可以看出, 如果在 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 前面乘以系数 $\frac{n}{n-1}$, 就修正成为 σ^2 的无偏估计量. 由此也解释了在定义样本方差时, 我们之所以选择 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$, 而不是 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 形式, 是因为 S^2 是 σ^2 的无偏估计量.

22.3.2 有效性

同一个参数可以有多个无偏估计量, 那么选择哪一个为好呢? 设参数 θ 有两个无偏估计量 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$, 在样本容量 n 相同的情况下, 若 $\hat{\theta}_1$ 的观测值都集中在 θ 的真值附近, 而 $\hat{\theta}_2$ 的观测值较远离 θ 的真值, 很显然 $\hat{\theta}_1$ 作为 θ 的估计更合适. 即 $\hat{\theta}_1$ 的方差较 $\hat{\theta}_2$ 的方差小, 我们认为 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 要好, 由此有如下的定义.

定义 22.3.2 (有效性). 设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 都是参数 θ 的无偏估计量, 若 $D\left(\hat{\theta}_1\right)\leqslant D\left(\hat{\theta}_2\right)$, 则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 更有效.

22.3.3 一致性

无偏性和有效性都是在假设样本容量 n 固定的条件下讨论的. 由于估计量是样本的函数,它依赖样本容量 n, 自然地, 我们希望一个好的估计量, 当 n 越来越大时, 它与参数的真值几乎一致, 这就是估计量的一致性或称之为相合性.

定义 22.3.3 (一致性). 设 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为参数 θ 的估计量, 当 $n\to\infty$ 时, $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 概率收敛于 θ, 即对于任意 $\varepsilon>0$, 有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}-\theta\right|<\varepsilon\right\}=1$$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的相合估计量.

第 A 章

积分表推导

A.1 含有 $ax+b$ 的积分

i. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$

ii. $\displaystyle\int (ax+b)^n \mathrm{d}x = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C.$

iii. $\displaystyle\int \frac{x}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{ax+b}{ax+b}\mathrm{d}x - \frac{b}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C.$

iv.
$$\int \frac{x^2}{ax+b}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a^2}\right)\mathrm{d}x + \frac{b^2}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b}$$
$$= \frac{1}{a}\int x\mathrm{d}x - \frac{b}{a^2}\int \mathrm{d}x + \frac{b^2}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{2a}x^2 - \frac{b}{a^2}x + \frac{b^2}{a^3}\ln|ax+b| + C.$$

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{a}x - \frac{b}{a^2} \\ \hline ax+b & x^2 \\ & x^2 + \frac{b}{a}x \\ \hline & -\frac{b}{a}x \\ & -\frac{b}{a}x - \frac{b^2}{a^2} \\ \hline & \frac{b^2}{a^2} \end{array}$$

v. 设 $\displaystyle\frac{1}{x(ax+b)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{ax+b} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{b} \\ B = -\dfrac{a}{b} \end{cases}$，于是 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax+b)} = \frac{1}{b}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{a}{b}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b}$，故

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax+b)} = \frac{1}{b}\ln|x| - \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{a}\ln|ax+b| + C = \frac{1}{b}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right| + C.$$

vi. 设 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(ax+b)} = \frac{A}{x} + \int\left(\frac{B}{x} + \frac{C}{ax+b}\right)\mathrm{d}x$，等式两边同时求导，并对比等式两边分子的系数，得

$$\begin{cases} Ba + C = 0 \\ -Aa + Bb = 0 \\ -Ab = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{b} \\ B = -\dfrac{a}{b^2} \\ C = \dfrac{a^2}{b^2} \end{cases}$$

于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} - \frac{a}{b^2}\ln|x| + \frac{a}{b^2}\ln|ax+b| + C.$$

vii. 设 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax+b)^2} = \frac{A}{ax+b} + \int\left(\frac{B}{ax+b} + \frac{C}{x}\right)\mathrm{d}x$，等式两边同时求导，并对比等式两边分子的系数，得

$$\begin{cases} Ba + Ca^2 = 0 \\ -Aa + Bb + 2Cab = 0 \\ Cb^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{b} \\ B = -\dfrac{a}{b^2} \\ C = \dfrac{1}{b^2} \end{cases}$$

于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax+b)^2} = \frac{1}{b(ax+b)} - \frac{1}{b^2}\ln|ax+b| + \frac{1}{b^2}\ln|x| + C = \frac{1}{b(ax+b)} + \frac{1}{b^2}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right| + C.$$

A.2 含有 $\sqrt{ax+b}$ 的积分

i. $\int \sqrt{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}(ax+b) = \frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{2}{3}} + C.$

ii. $\int x\sqrt{ax+b}\mathrm{d}x \xlongequal{ax+b=z^2} \frac{2}{a^2}\int z^2\left(z^2-b\right)\mathrm{d}z = \frac{2}{a^2}\int \left(z^4-bz^2\right)\mathrm{d}z = \frac{2z^5}{5a^2} - \frac{2b}{3a^2}z^3 + C = \frac{2}{5a^2}(ax+b)^{\frac{5}{2}} - \frac{2b}{3a^2}(ax+b)^{\frac{3}{2}} + C.$

iii. $\int x^2\sqrt{ax+b}\mathrm{d}x \xlongequal{ax+b=z^2} \frac{2}{a^3}\int z^2\left(z^2-b\right)^2\mathrm{d}z = \frac{2}{a^3}\left(\frac{1}{7}z^7 - \frac{2b}{5}z^5 + \frac{b^3}{3}z^3\right) + C = \frac{2}{7a^3}(ax+b)^{\frac{7}{2}} - \frac{2b}{5}(ax+b)^2 + \frac{b^2}{3}(ax+b)^{\frac{3}{2}} + C.$

iv. $\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}\mathrm{d}x \xlongequal{ax+b=z^2} \frac{2}{a^2}\int \left(z^2-b\right)\mathrm{d}z = \frac{2}{3a^2}z^3 - \frac{2b}{a^2}z + C = \frac{2}{3a^2}(ax+b)^{\frac{3}{2}} - \frac{2b}{a^2}(ax+b)^{\frac{3}{2}} + C.$

v. $\int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}}\mathrm{d}x \xlongequal{ax+b=z^2} \frac{2}{a^3}\int \left(z^2-b\right)^2\mathrm{d}z = \frac{2}{5a^3}(ax+b)^{\frac{5}{2}} - \frac{4b}{3a^3}(ax+b)^{\frac{3}{2}} + \frac{2b^2}{a^3}(ax+b)^{\frac{1}{2}} + C.$

vi. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}} \xlongequal{ax+b=z^2} 2\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2-b} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C & ,b>0 \\ \frac{2}{\sqrt{-b}}\arctan\sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C & ,b<0 \end{cases}.$

vii. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{ax+b}} \xlongequal{ax+b=z^2} 2a\int \frac{\mathrm{d}z}{\left(z^2-b\right)^2} = -\frac{a}{b}\left(\frac{z}{z^2-b} + \int \frac{\mathrm{d}z}{z^2-b}\right) = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}.$

viii. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\mathrm{d}x \xlongequal{ax+b=z^2} 2\int \frac{z^2}{z^2-b}\mathrm{d}z = 2\int \mathrm{d}z + 2b\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2-b} = 2\sqrt{ax+b} + b\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}.$

ix. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\mathrm{d}x = \int \sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{ax+b}}{x} - \frac{a}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}.$

A.3 含有 $x^2 \pm a^2$ 的积分

i. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} \xlongequal[-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}]{x=a\tan t} \frac{1}{a}\int \mathrm{d}t = \frac{t}{a} + C = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$

ii. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

A.4 含有 $ax^2+b\ (a>0)$ 的积分

i. $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b} = \begin{cases} \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\sqrt{\frac{a}{b}}x + C\ \ (b>0). \\ \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-\left(\sqrt{\frac{-b}{a}}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{a}x-\sqrt{-b}}{\sqrt{a}x+\sqrt{-b}}\right| + C\ \ (b<0). \end{cases}$

ii. $\int \frac{x}{ax^2+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\int \frac{\mathrm{d}\left(ax^2+b\right)}{ax^2+b} = \frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+b\right| + C.$

iii. $\int \frac{x^2}{ax^2+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{ax^2+b}{ax^2+b}\mathrm{d}x - \frac{b}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b}.$

iv. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax^2+b)} = \frac{1}{b}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{a}{b}\int \frac{x}{ax^2+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\ln|x| - \frac{1}{2b}\ln\left|ax^2+b\right| + C.$

v. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(ax^2+b)} = \frac{1}{b}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} - \frac{a}{b}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b} - \frac{1}{bx} - \frac{a}{b}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b}.$

vi. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3(ax^2+b)}$

vii. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+b)^2}$

A.5　含有 $ax^2+b+c\ \ (a>0)$ 的积分

索引

参考文献

[1] Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解第四版 1

[2] Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解第四版 2

[3] Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解第四版 3

[4] Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解第四版 4

[5] Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解第四版 5

[6] Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解第四版 6

[7] 常微分方程第三版

[8] 常微分方程学习辅导与习题解答

[9] 大学生数学竞赛教程

[10] 高等代数典型问题与方法

[11] 高等数学竞赛题解析教程 (2022)

[12] 高等数学一题多解 300 例

[13] 高等数学证明题 500 例解析

[14] 全国大学生数学竞赛辅导

[15] 数学大辞典

[16] 数学分析中的典型问题与方法（第三版）

[17] 线性代数、概率论与数理统计证明题 500 例解析

[18] 线性代数第二版