doi：10.3969/j.issn.1008-1399.2015.06.005

一道定积分不等式证明题的推广

郑华盛，胡结梅
（南昌航空大学 数学与信息科学学院，江西 南昌 330063）

摘　要　对一道有关定积分不等式的普特南数学竞赛题进行了两个方面的推广，得到了几个推广命题.

关键词　定积分；不等式；推广
中图分类号　O178；O13　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008-1399(2015)06-0010-03

Extensions of an Integral Inequality

ZHENG Huasheng, HU Jiemei
(School of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, PRC)

Abstract: This paper generalizes an inequality of definite integral appearing in the Putnam mathematics contest.

Keywords: definite integral; inequality; extension

在理工科院校，高等数学是一门非常重要的必修基础课程. 在高等数学教学过程中，如何引导学生积极进行思考，以培养他们的创新思维和创新意识是数学教师必须重视的.

本文以一道典型定积分不等式问题为例，通过对其进行深入的分析，从两个方面作推广，得到几个相关结论.

下面针对第 34 届美国普特南数学竞赛题中的一道定积分不等式证明题给出证明过程，然后再对其进行推广.

例[1-2]　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$，且当 $x\in[0,1]$ 时，有 $0<f'(x)\leqslant 1$，证明

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \geqslant \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$$

等号仅当 $f(x)\equiv x$ 或 0 时成立.

证明　令 $F(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2-\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$

则
$$F'(x)=f(x)\left[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)\right]$$
且 $F(0)=0$，故只需证 $F'(x)\geqslant 0\ (x\in[0,1])$.
又由题设 $f(0)=0$，且
$$0<f'(x)\leqslant 1\ (x\in[0,1])$$
所以 $f(x)\geqslant f(0)=0\ (x\in[0,1])$.
再令
$$g(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)$$
则 $g'(x)=2f(x)\,(1-f'(x))\geqslant 0\ (x\in[0,1])$
$$g(x)\geqslant g(0)=0\ (x\in[0,1])$$
于是 $F'(x)\geqslant 0\ (x\in[0,1])$，从而
$$F(x)\geqslant F(0)=0\ (x\in[0,1])$$
故 $F(1)\geqslant 0$，证毕.

等号成立当且仅当
$$F'(x)\equiv 0\ (x\in[0,1])$$
即当且仅当
$$f(x)\equiv 0 \text{ 或 } g(x)\equiv 0\ (x\in[0,1])$$
当且仅当 $f(x)\equiv 0$ 或 $f'(x)\equiv 1$，即当且仅当
$$f(x)\equiv 0 \text{ 或 } f(x)\equiv x\ (x\in[0,1])$$
对此题作进一步的分析，可得如下推广命题.

命题 1　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$，且当 $x\in[0,1]$ 时，有 $0<f'(x)\leqslant 1$，则当 $p\geqslant 1$ 时，有
$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^p \geqslant p2^{1-p}\int_0^1 f^{2p-1}(x)\mathrm{d}x$$

收稿日期：2014-05-08
基金项目：江西省教育厅及南昌航空大学教学改革研究项目（JXJG－13－8－18，JY1329）；江西省教育厅学位与研究生教育教学改革项目（JXYJG－2012－072）；江西省及南昌航空大学研究生优质课程建设项目（YYZ201203）
作者简介：郑华盛（1966－），男，江西景德镇人，博士，教授，主要从事数值计算方法研究. Email：nj_zhs@163.com
胡结梅（1963－），女，江西进贤人，硕士，副教授，主要从事大学数学研究. Email：nc_hjm@163.com

当 $0<p<1$ 时,不等号反向成立;等号仅当 $f(x)\equiv x$ 或 0 时成立.

证明　$p=1$ 时等号成立. 当 $p\geqslant 1$ 时,令

$$F(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^p-p2^{1-p}\int_0^x f^{2p-1}(t)\mathrm{d}t$$

则

$$F'(x)=pf(x)\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^{p-1}-p2^{1-p}f^{2p-1}(x)=pf(x)\left[\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^{p-1}-2^{1-p}f^{2p-2}(x)\right]$$

且 $F(0)=0$,故只需证 $F'(x)\geqslant 0\ (x\in[0,1])$. 又由题设 $f(0)=0$,且 $0<f'(x)\leqslant 1\ (x\in[0,1])$,所以 $f(x)\geqslant f(0)=0\ (x\in[0,1])$.

再令

$$g(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^{p-1}-2^{1-p}f^{2p-2}(x)$$

则只需证 $g(x)\geqslant 0$,且当 $p>1$ 时,只需证

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{2}f^2(x)$$

再令

$$h(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}f^2(x)$$

则 $h'(x)=f(x)(1-f'(x))\geqslant 0\ (x\in[0,1])$,于是 $h(x)\geqslant h(0)=0\ (x\in[0,1])$,从而 $g(x)\geqslant 0$, $F'(x)\geqslant 0$,故

$$F(x)\geqslant F(0)=0\ (x\in[0,1])$$

即得 $F(1)\geqslant 0$,证毕.

类似地可证当 $0<p<1$ 时,不等号反向成立. 等号成立当且仅当 $F'(x)\equiv 0\ (x\in[0,1])$,当且仅当 $f(x)\equiv 0$ 或 $f(x)\equiv x\ (x\in[0,1])$.

注 1　由例及命题 1 的证明过程可知:

(1) 若条件"当 $x\in[0,1]$ 时,有 $0<f'(x)\leqslant 1$"改为"当 $x\in[0,1]$ 时,有 $f'(x)\geqslant 1$",而其它条件不变,则例与命题 1 结论中不等号反向成立.

(2) 若命题 1 中区间 $[0,1]$ 改为无穷区间 $[0,+\infty)$,结论仍然成立.

将例和命题 1 分别推广到一般有限区间 $[a,b]$ 和无穷区间 $[a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,+\infty)$,有如下命题.

命题 2　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $f(a)=0$,则:

(1) 当 $x\in[a,b]$,满足 $0<f'(x)\leqslant 1$ 时,有

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\geqslant\int_a^b f^3(x)\mathrm{d}x$$

(2) 当 $x\in[a,b]$,满足 $f'(x)\geqslant 1$ 时,不等号反向成立,且等号仅当 $f(x)\equiv x$ 或 0 时成立.

类似的证明,此处略.

命题 3　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $f(a)=0$,且当 $x\in[a,b]$ 时,有 $0<f'(x)\leqslant 1$,则当 $p\geqslant 1$ 时,有

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^p\geqslant p\,2^{1-p}\int_a^b f^{2p-1}(x)\mathrm{d}x$$

当 $0<p<1$ 时,不等号反向成立,且等号仅当 $f(x)\equiv x$ 或 0 时成立.

证明　类似于命题 1 的证明.

注 2　(1) 若条件"当 $x\in[a,b]$ 时,有 $0<f'(x)\leqslant 1$"改为"当 $x\in[a,b]$ 时,有 $f'(x)\geqslant 1$",而其它条件不变,命题 3 结论中不等号反向成立.

(2) 若命题 3 中的区间 $[a,b]$ 改为无穷区间 $[a,+\infty)$,结论仍然成立.

更一般地,有如下命题.

命题 4　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $f(a)=0$,且当 $x\in[a,b]$ 时,有 $0<f'(x)\leqslant g(x)$,则当 $p\geqslant 1$ 时,有

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^p\geqslant p\,2^{1-p}\int_a^b f^{2p-1}(x)g(x)\mathrm{d}x$$

当 $0<p<1$ 时,不等号反向成立,且等号仅当 $f(x)\equiv 0$ 或 $f(x)\equiv\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ 时成立.

证明　$p=1$ 时等号成立. 当 $p\geqslant 1$ 时,令

$$F(x)=\left(\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^p-p2^{1-p}\int_a^x f^{2p-1}(t)g(t)\mathrm{d}t$$

则 $F(0)=0$,且

$$F'(x)=pf(x)g(x)\times\left[\left(\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^{p-1}-2^{1-p}f^{2p-2}(x)\right]$$

故只需证 $F'(x)\geqslant 0\ (x\in[a,b])$. 又由题设 $f(a)=0$,且 $0<f'(x)\leqslant g(x)\ (x\in[a,b])$,所以 $f(x)\geqslant f(a)=0\ (x\in[a,b])$. 再令

$$G(x)=\left(\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^{p-1}-2^{1-p}f^{2p-2}(x)$$

则只需证 $G(x)\geqslant 0$,且当 $p>1$ 时,只需证

$$\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{2}f^2(x)$$

再令 $h(x)=\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}f^2(x)$,则 $h'(x)=f(x)\,(g(x)-f'(x))\geqslant 0\ (x\in[a,b])$,于是

$$h(x)\geqslant h(a)=0,\ G(x)\geqslant 0\ (x\in[a,b])$$

从而 $F'(x)\geqslant 0$,故

(下转第 15 页)

是否线性相关问题,而由

$$3(1,2,1)+2(4,-1,5)=(11,4,13)$$

知,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$线性相关,因此4点O,A,B,C在同一个平面上.

推论　对于三维几何空间中任何4个或4个以上的向量一定共面(可由性质4得知).

5　利用向量组的线性相关性解决生产安排问题

例 4　一家服装厂共有3个加工车间. 第一车间用1匹布能生产4件衬衣、15条长裤和3件外衣;第二车间用1匹布能生产4件衬衣、5条长裤和9件外衣;第三车间用1匹布能生产8件衬衣、10条长裤和3件外衣. 现该厂接到一张订单,要求供应2000件衬衣、3500条长裤和2400件外衣. 问该厂应如何向3个车间安排加工任务,以完成该订单?[8]

解　将3个加工车间生产的衬衣、长裤、外衣以及总加工量分别用向量表示为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}4\\15\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}4\\5\\9\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}8\\10\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2400\\3500\\2000\end{pmatrix}$$

显然$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,由性质5可知$\boldsymbol{\beta}$可以由$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,且

$$\boldsymbol{\beta}=100\boldsymbol{\alpha}_1+200\boldsymbol{\alpha}_2+100\boldsymbol{\alpha}_3$$

故分别分配给3个车间100,200,100匹布,可圆满完成生产任务.

向量组的线性相关性在其它领域也有较广泛的应用,文献[9]就电压增量的线性相关性在电路测试中的应用作了深入研究,此外向量的线性相关性也广泛应用在化学、医学等学科中.

参考文献

[1] 罗秀芹,董福安,郑铁军. 关于向量组线性相关性的学习探讨[J]. 高等数学研究,2005,8(5):18-20.

[2] 刘桂珍. 判定向量组线性相关的常用方法[J]. 凯里学院学报,2007,25(3):3-5.

[3] 朱春钢. 向量组线性相关性的教学方法与技巧[J]. 高等数学研究,2010,4(13):119-121 .

[4] 艾秦瑞,李娟. 线性相关性在线性代数中的应用[J]. 牡丹江师范学院,2011(2):11-12.

[5] 张禾瑞. 高等代数[M]. 4 版. 北京:高等教育出版社,1999:217-219.

[6] 李尚志. 从问题出发引入线性代数概念[J]. 高等数学研究,2006,9(5):6-9.

[7] 同济大学数学系. 线性代数及其应用[M]. 北京:高等教育出版社,2008:117-118.

[8] 阎慧臻. 线性代数及其应用[M]. 北京:科学出版社,2012:20.

[9] 汪鹏,杨士元. 电压增量的线性相关性在电路测试中的应用[J]. 清华大学学报,2007,47(2):1245-1248.

(上接第 11 页)

$$F(x)\geqslant F(a)=0\ (x\in[a,b])$$

即得$F(b)\geqslant 0$,证毕.

类似地可证当$0<p<1$时,不等号反向成立. 等号成立当且仅当$F'(x)\equiv 0\ (x\in[a,b])$,当且仅当$f(x)\equiv 0$或$G(x)\equiv 0\ (x\in[a,b])$,即当且仅当$f(x)\equiv 0$或$f(x)\equiv\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\ (x\in[a,b])$.

注 3　(1) 若条件"当$x\in[a,b]$时,有$0<f'(x)\leqslant g(x)$"改为"当$x\in[a,b]$时,有$f'(x)\geqslant g(x)$",而其它条件不变,结论中对应不等号反向成立.

(2) 若命题4中的区间$[a,b]$改为无穷区间$[a,+\infty)$,结论仍然成立.

(3) 若命题4中的区间$[a,b]$改为无穷区间$(-\infty,+\infty)$或$(-\infty,b)$,且$f(a)=f(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,结论仍然成立.

本文通过对一个定积分不等式问题进行推广,得到了几个推广命题,这是引导学生积极思考,培养学生学习兴趣和创新思维的一种途径和方法. 教学过程中,如能结合一些有代表性的典型问题引导学生积极进行思考和推广,将对培养和提高学生的创新思维具有很好的促进作用.

参考文献

[1] 冯贝叶,许康,候晋川编译. 历届 PTN 美国大学生数学竞赛试题集(1938－2007)[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009:334-335.

[2] 匡继昌. 常用不等式[M]. 4 版. 山东:山东科学技术出版社,2010:708.