doi:10.3969/j.issn.1008-1399.2021.03.015

二阶变系数线性微分方程的解法探讨

郑华盛
（南昌航空大学 数学与信息科学学院，江西 南昌 330063）

摘　要　给出了变系数满足几种特定条件的二阶变系数齐次线性微分方程的特解形式，得到了一个命题. 之后通过几个典型实例验证了命题在求解几类二阶变系数线性微分方程特解和通解中的有效性.

关键词　变系数；微分方程；特解；通解；常数变易法
中图分类号　O175　　文献标识码　A　　文章编号　1008-1399(2021)03-0050-04

On Particular Solution of Second Order Linear Differential Equation with Variable Coefficients

ZHENG Huasheng
(School of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, PRC)

Abstract　In this paper, the particular solutions of second order homogeneous linear differential equations with variable coefficients satisfying certain conditions are presented. The validity of our result in solving the particular and general solutions of second order linear differential equations with variable coefficients is verified by examples.

Keywords　variable coefficient, differential equation, particular solution, general solution, method of variation of parameters

1　引言

一般的二阶变系数线性微分方程没有解析解，但对于满足一定条件的特殊类型变系数微分方程可以求出解析解[1-4].

现行高等数学教材中，仅在可降阶微分方程、欧拉方程及高阶线性微分方程的通解结构与常数变易法等部分内容少量涉及变系数微分方程的求解问题[5]. 而用通解结构和常数变易法求解的关键是如何求出二阶变系数齐次线性微分方程的特解.

在教学过程中，发现学生对于变系数线性微分方程的求解常常无从下手，特别是如何确定其特解形式？同济大学编《高等数学》教材中有先给出方程特解形式的习题，偶有学生问到那个特解形式是怎样想到的？即出题人是如何知道特解形式的？一般说来，通过观察法，可以确定少量方程的简单特解形式[6]，但是对于稍微复杂一点的变系数微分方程用观察法找特解形式就不易实现了. 能否对一些特定类型的方程给出其特解形式的简单判别方法？

基于此，本文主要探讨二阶变系数齐次线性微分方程的几种常用特解形式的确定方法，进而求解其对应的二阶变系数齐次与非齐次线性微分方程的通解. 希望能对学生求解此类问题有所帮助和启发.

2　引理和命题

引理 1[7]（刘维尔公式，Liouville）　设函数 $y_1(x)$ 为二阶变系数齐次线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的一个非零解，则该方程的与 $y_1(x)$ 线性无关的另一个特解为

收稿日期：2020-07-05　　修改日期：2020-10-18
基金项目：国家自然科学基金(11861039)；高等学校大学数学教学研究与发展中心项目(CMC20160413)；2020 年江西省研究生优质课程数值分析建设项目(2020-36).
作者简介：郑华盛(1966—)，男，江西景德镇人，博士，教授，主要从事数值计算研究. Email: nj_zhs@163.com.

$$y_2(x)=y_1(x)\cdot\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx.$$

下面给出系数满足几种特定条件时，二阶变系数齐次线性微分方程特解形式的相关结论.

命题 1　设有二阶变系数齐次线性微分方程：

$$p_1(x)y''+p_2(x)y'+p_3(x)y=0,$$

则(1)当关于 r 的一元二次方程(简称为类-特征方程) $r^2p_1(x)+rp_2(x)+p_3(x)=0$ 的两个根

$$r_{1,2}=\frac{-p_2(x)\pm\sqrt{p_2^2(x)-4p_1(x)p_3(x)}}{2p_1(x)}$$

中至少有一个 r 是非零常数时，$y^*=e^{rx}$ 是该方程的一个特解；特别地，当

$$p_1(x)\pm p_2(x)+p_3(x)=0$$

时，$y^*=e^{\pm x}$ 是原方程的一个特解.

(2)当 $\dfrac{p_2(x)+xp_3(x)}{p_3(x)}=a$（其中 a 为常数）时，$y^*=x-a$ 是该方程的一个特解；特别地，当

$$p_2(x)+xp_3(x)=0$$

时，$y^*=x$ 是该方程的一个特解.

(3)当 $\alpha(\alpha-1)p_1(x)+\alpha xp_2(x)+x^2p_3(x)=0$（其中 α 为非零常数）时，$y^*=x^\alpha$ 是该方程的一个特解；

(4)当 $\dfrac{p_3(x)-p_1(x)}{p_2(x)}=-\cot x$ 时，$y^*=\sin x$ 是该方程的一个特解；

(5)当 $\dfrac{p_3(x)-p_1(x)}{p_2(x)}=\tan x$ 时，$y^*=\cos x$ 是该方程的一个特解.

证明　(1)当关于 r 的一元二次方程

$$r^2p_1(x)+rp_2(x)+p_3(x)=0$$

的两个根中至少有一个 r 是非零常数时，满足 $\dfrac{y''}{r^2}=\dfrac{y'}{r}=\dfrac{y}{1}$ 的解应为原方程的一个特解. 而由 $\dfrac{y''}{r^2}=\dfrac{y'}{r}$ 可得通解为 $y=\dfrac{c_1}{r}e^{rx}+c_2$，且由 $\dfrac{y'}{r}=\dfrac{y}{1}$ 可得通解为 $y=ce^{rx}$，故 $y^*=e^{rx}$ 是它们的一个公共解，即为原方程的一个特解.

特别地，当 $p_1(x)+p_2(x)+p_3(x)=0$ 时，则 r_1 和 r_2 中至少有一个等于 1，从而 $y^*=e^x$ 是原方程的一个特解；当 $p_1(x)-p_2(x)+p_3(x)=0$ 时，r_1 和 r_2 中至少有一个等于 -1，从而 $y^*=e^{-x}$ 是原方程的一个特解.

(2)当 $\dfrac{p_2(x)+xp_3(x)}{p_3(x)}=a$ 时，有

$$p_2(x)+p_3(x)(x-a)=0.$$

此时满足

$$\frac{y''}{0}=\frac{y'}{1}=\frac{y}{x-a}，即\begin{cases}y''=0,\\ y'=\dfrac{y}{x-a}.\end{cases}$$

的解应为原方程的一个特解. 而由 $y''=0$ 可得通解为 $y=c_1x+c_2$，且由 $y'=\dfrac{y}{x-a}$ 可得通解为 $y=c(x-a)$，故 $y^*=x-a$ 是它们的一个公共解，即为原方程的一个特解.

(3)当 $\alpha(\alpha-1)p_1(x)+\alpha xp_2(x)+x^2p_3(x)=0$ 时，满足 $\dfrac{y''}{\alpha(\alpha-1)}=\dfrac{y'}{\alpha x}=\dfrac{y}{x^2}$ 的解应为原方程的一个特解. 而由求解两个方程 $\dfrac{y''}{\alpha(\alpha-1)}=\dfrac{y'}{\alpha x}$ 和 $\dfrac{y'}{\alpha x}=\dfrac{y}{x^2}$，易知 $y^*=x^\alpha$ 是它们的一个公共解，即为原方程的一个特解.

(4)当 $\dfrac{p_3(x)-p_1(x)}{p_2(x)}=-\cot x$ 时，有

$$p_1(x)-p_2(x)\cot x-p_3(x)=0.$$

因此满足 $\dfrac{y''}{1}=\dfrac{y'}{-\cot x}=\dfrac{y}{-1}$ 的解应为原方程的一个特解. 而由 $\dfrac{y''}{1}=\dfrac{y'}{-\cot x}$ 可得通解为 $y=c_1\sin x+c_2$，且由方程 $\dfrac{y'}{-\cot x}=\dfrac{y}{-1}$ 可得通解为 $y=c\sin x$. 故 $y^*=\sin x$ 是它们的一个公共解，即为原方程的一个特解.

(5)当 $\dfrac{p_3(x)-p_1(x)}{p_2(x)}=\tan x$ 时，有

$$p_1(x)+p_2(x)\tan x-p_3(x)=0.$$

因而满足 $\dfrac{y''}{1}=\dfrac{y'}{\tan x}=\dfrac{y}{-1}$ 的解应为原方程的一个特解. 而由解方程 $\dfrac{y''}{1}=\dfrac{y'}{\tan x}$ 可得通解为 $y=-c_1\cos x+c_2$，又由 $\dfrac{y'}{\tan x}=\dfrac{y}{-1}$ 可得通解为 $y=c\cos x$. 故 $y^*=\cos x$ 是它们的一个公共解，即为原方程的一个特解.

注记 1　①命题 1 中仅列出了指数函数、幂函数及三角函数等几种常见特解形式的判别条件，其形式简单、实用、易于记忆；②可类似地考虑其它特解形式的判别条件，但因其判别形式较为复杂、不易记忆，因而较少应用，此处不予讨论；③具体解题时，若观察法不易看出特解形式，则可优先考虑命题 1 中的几类特解形式，再考虑其它方法.

3　应用实例

下面给出几个例题，以说明求解二阶变系数齐次和非齐次线性微分方程时命题 1 的有效性.

例1 求微分方程$(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$满足初值条件$y(0)=0,y'(0)=1$的特解.

解 记$p_1(x)=2x-1,p_2(x)=-(2x+1)$,$p_3(x)=2$,则$p_1(x)+p_2(x)+p_3(x)=0$,且$\dfrac{p_2(x)+xp_3(x)}{p_3(x)}=-\dfrac{1}{2}$,于是由命题1(1)(2)知$y_1(x)=e^x,y_2(x)=x+\dfrac{1}{2}$为原方程的两个特解,且它们线性无关,从而由通解结构知原方程通解为

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=c_1e^x+c_2(x+\frac{1}{2}).$$

又由初值条件$y(0)=0,y'(0)=1$代入上式,得

$$\begin{cases}c_1+\dfrac{1}{2}c_2=0,\\ c_1+c_2=1.\end{cases}$$解得$c_1=-1,c_2=2$.

故所求特解为$y=2x+1-e^x$.

注记2 该题也有其它解法:①由命题1(1)或观察法知$y_1(x)=e^x$为原方程的一个非零特解,然后由引理1求得与$y_1(x)$线性无关的另一个解$y_2(x)$,再由通解结构得原方程的通解,代入初值条件即得所求特解. ②如上知原方程有一个非零特解$y_1(x)=e^x$,再由常数变易法,令$y(x)=e^xu(x)$为原方程的解,代入原方程解得$u(x)$,从而得通解,再代入初值条件得所求特解. ③利用幂级数解法.

类似地,可求微分方程$(x-1)y''-xy'+y=0$满足初值条件$y(0)=1,y'(0)=2$的特解.

例2 求微分方程$xy''+(x-2)y'-(2x+4)y=0$的通解.

解 记

$p_1(x)=x$, $p_2(x)=x-2$, $p_3(x)=-(2x+4)$,

则由$r^2p_1(x)+rp_2(x)+p_3(x)=0$解得

$$\begin{aligned}r_{1,2}&=\frac{-p_2(x)\pm\sqrt{p_2^2(x)-4p_1(x)p_3(x)}}{2p_1(x)}\\&=\frac{-(x-2)\pm\sqrt{(x-2)^2+4x(2x+4)}}{2x}\\&=\frac{-(x-2)\pm|3x+2|}{2x}=1+\frac{2}{x},\text{或}-2.\end{aligned}$$

于是由命题1(1)知$y_1(x)=e^{-2x}$是原方程的一个非零特解. 再由引理1得与$y_1(x)$线性无关的另一特解为

$$\begin{aligned}y_2(x)&=y_1(x)\int\frac{e^{-\int\frac{p_2(x)}{p_1(x)}dx}}{y_1^2(x)}dx=e^{-2x}\int\frac{e^{-\int\frac{x-2}{x}dx}}{e^{-4x}}dx\\&=e^{-2x}\int x^2e^{3x}dx=e^x(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}).\end{aligned}$$

故由通解的结构知原方程的通解为

$$y=c_1e^{-2x}+c_2e^x(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27})$$

(其中c_1,c_2为任意常数).

注记3 该题也可由命题1(1)知$y_1(x)=e^{-2x}$为原方程的一个非零特解,再由常数变易法,令$y(x)=e^{-2x}u(x)$为原方程的解,代入原方程解得$u(x)$,从而得通解.

类似地,可求微分方程$(3x-1)y''-9xy'+9y=0$的通解.

例3 求微分方程$(x^2\ln x)y''-xy'+y=0$的通解.

解 记$p_1(x)=x^2\ln x,p_2(x)=-x,p_3(x)=1$,则$p_2(x)+xp_3(x)=0$.于是由命题1(2)知$y_1(x)=x$是原方程的一个非零特解. 再由引理1得与$y_1(x)$线性无关的另一特解为

$$\begin{aligned}y_2(x)&=y_1(x)\int\frac{e^{-\int\frac{p_2(x)}{p_1(x)}dx}}{y_1^2(x)}dx=x\int\frac{e^{-\int\frac{-x}{x^2\ln x}dx}}{x^2}dx\\&=x\int\frac{\ln x}{x^2}dx=-x\int\ln x\,d(\frac{1}{x})=-(\ln x+1)\end{aligned}$$

故由通解的结构知原方程的通解为

$y=c_1x+c_2(\ln x+1)$(其中c_1,c_2为任意常数).

注记4 该题也可由命题1(2)知$y_1(x)=x$为原方程的一个非零特解,再由常数变易法,令$y(x)=xu(x)$为原方程的解,代入原方程解得$u(x)$,从而得通解.

类似地,可求微分方程$(1-x^2)y''-xy'+y=0$的通解.

例4 求微分方程$y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=0$的通解.

解 记$p_1(x)=\cos x$, $p_2(x)=-2\sin x$, $p_3(x)=3\cos x$,则$\dfrac{p_3(x)-p_1(x)}{p_2(x)}=-\cot x$.于是由命题1(4)知$y_1(x)=\sin x$是原方程的一个非零特解. 再由引理1得与$y_1(x)$线性无关的另一特解为

$$\begin{aligned}y_2(x)&=y_1(x)\int\frac{e^{-\int\frac{p_2(x)}{p_1(x)}dx}}{y_1^2(x)}dx=\sin x\int\frac{e^{-\int\frac{-2\sin x}{\cos x}dx}}{\sin^2x}dx\\&=\sin x\int\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}dx=\sin x(\tan x-\cot x)\end{aligned}$$

故由通解的结构知原方程的通解为

$$y=c_1\sin x+c_2\sin x(\tan x-\cot x)$$

(其中c_1,c_2为任意常数).

注记5 该题也可如上知$y_1(x)=\sin x$为原方程的一个非零特解. 再由常数变易法,令$y(x)=\sin x\cdot u(x)$为原方程的解,代入原方程解得$u(x)$,从而得通解.

类似地，可求微分方程

$$y'' - (\tan x + \cot x)y' - y\tan^2 x = 0$$

的通解.

例 5　设 $x > 1$，求微分方程

$$(x-1)^2 y'' + 2(x-1)y' - 2y = 9x - 7$$

的通解.

解　记 $p_1(x) = (x-1)^2$，$p_2(x) = 2(x-1)$，$p_3(x) = -2$，则 $\dfrac{p_2(x) + xp_3(x)}{p_3(x)} = 1$，于是由命题 1(2) 知 $y_1(x) = x-1$ 是对应齐次方程的一个非零特解. 下面利用常数变易法求原方程的通解.

令 $y = y_1(x)u(x) = (x-1)u(x)$ 为原方程的解，代入原方程并整理得

$$(x-1)^3 u''(x) + 4(x-1)^2 u'(x) = 9x - 7.$$

令 $u'(x) = p(x)$，则上式化为

$$p'(x) + \frac{4}{x-1}p(x) = \frac{9x-7}{(x-1)^3} = \frac{9}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}$$

于是

$$p(x) = e^{-\int\frac{4}{x-1}dx}\left[\int\left[\frac{9}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}\right]\cdot e^{\int\frac{4}{x-1}dx}dx + c_1\right]$$
$$= \frac{1}{(x-1)^4}\left[3(x-1)^3 + (x-1)^2 + c_1\right]$$
$$= \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{c_1}{(x-1)^4}$$

两边积分，得

$$u(x) = \int p(x)dx = \int\left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{c_1}{(x-1)^4}\right)dx = 3\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} - \frac{c_1}{3(x-1)^3} + c_2$$

故通解为

$$y = (x-1)u(x) = 3\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} - \frac{c_1}{3(x-1)^3} + c_2$$

其中 c_1，c_2 为任意常数.

注记 6　该题也可令 $u = x-1$ 将原方程化为以 u 为自变量，y 为因变量的欧拉方程，然后用欧拉方程的求解方法求解.

类似地，可求微分方程

$$(1+x)^2 y'' - (1+x)y' + y = \frac{1}{1+x}$$

满足初值条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解.

例 6　求微分方程 $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3$ 的通解.

解　记 $p_1(x) = x^2$，$p_2(x) = -2x$，$p_3(x) = 2$，则 $p_2(x) + xp_3(x) = 0$，且

$$\alpha(\alpha-1)p_1(x) + \alpha xp_2(x) + x^2p_3(x) = (\alpha^2 - 3\alpha + 2)x^2.$$

令 $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$，解得 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 2$. 于是由命题 1(2)(3) 知 $y_1(x) = x$ 和 $y_2(x) = x^2$ 是对应齐次方程 $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ 的两个线性无关的特解. 从而由通解结构知齐次方程的通解为

$$Y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1x + c_2x^2$$

下面利用常数变易法求原方程的通解. 将原方程改写为

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 2x.$$

令 $y = c_1(x)x + c_2(x)x^2$ 为原方程的解，代入原方程，且由 $\begin{cases} c'_1(x)x + c'_2(x)x^2 = 0 \\ c'_1(x) + 2c'_2(x)x = 2x \end{cases}$ 解得

$$c_1(x) = -x^2 + c_1,\quad c_2(x) = 2x + c_2.$$

故所求通解为

$$y = (-x^2 + c_1)x + (2x + c_2)x^2 = x^3 + c_2x^2 + c_1x.$$

注记 7　该题也可有其它解法：①如上知 $y_1(x) = x$ 为原方程的一个非零特解，再由常数变易法，令 $y(x) = xu(x)$ 为原方程的解，代入原方程解得 $u(x)$，从而得通解. ② 该方程是欧拉方程，可作变换 $x = e^t$ 化为以 t 为自变量的常系数线性微分方程求解. ③ 可用幂级数解法求解.

类似地，可求微分方程 $x^2y'' - 3xy' - 5y = x^2\ln x$ 的通解.

4　结束语

本文介绍了特定条件下，二阶变系数线性齐次微分方程的常见的几种特解形式，然后用通解结构或刘维尔公式与通解结构得到一类二阶变系数齐次线性微分方程的通解，或利用常数变易法可以直接求得对应二阶变系数线性非齐次微分方程的通解.

参考文献

[1]　李永利，桑改莲. 一类二阶变系数齐次微分方程通解的求法[J]. 高等数学研究，2006，9(3)：22－24.

[2]　何基好，秦勇飞. 一类二阶线性变系数微分方程通解的解法[J]. 高等数学研究，2010，13(3)：35－36.

[3]　冯伟杰，魏光美. 二阶变系数线性微分方程的通解[J]. 高等数学研究，2012，15(3)：28－30.

[4]　邓治. 二阶变系数线性微分方程求解问题的新探索[J]. 大学数学，2017，33(6)：122－126.

[5]　同济大学数学系编. 高等数学(上册)[M]. 7 版. 北京：高等教育出版社，2014.

[6]　李中平. 用观察法求二阶变系数齐次线性方程的非零特解[J]. 高等数学研究，2010，13(3)：24－25.

[7]　王高雄，周之铭. 常微分方程[M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，2012.