第 44 卷第 19 期　　数学的实践与认识　　Vol.44, No.19
2014 年 10 月　　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　　Oct., 2014

一类含中介值定积分等式证明题的构造

郑华盛

(南昌航空大学 数学与信息科学学院, 江西 南昌 330063)

摘 要: 利用多项式插值理论, 结合数值求积公式代数精度的概念, 给出了一种构造和证明一类含中介值定积分等式证明题的新方法, 并给出多个应用实例.

关键词: 数值求积公式; 插值多项式; 代数精度; 定积分; 中介值

1 引言

众所周知, 含中介值定积分等式证明问题是微积分学中的一类重要问题. 现有的文献 (如文 [1-3]) 主要是介绍含中介值定积分等式证明题的一些基本证明方法和技巧, 而很少涉及如何编制和构造含中介值的新的定积分等式证明题.

本文主要讨论含中介值定积分等式证明题的编制和构造方法. 考虑到包含余项的数值求积公式实际上就是一个含中介值的定积分等式, 且目前数值分析及数值逼近文献 (如 [4-6]) 主要是介绍常用的左右矩形、中矩形、梯形及辛普森等牛顿 - 柯特斯公式, 以及几类常用的高斯型数值求积公式, 而对其他形式的数值求积公式探讨较少. 基于此, 本文利用 Lagrange 和 Hermite 多项式插值理论, 结合代数精度的概念, 构造新的数值求积公式, 并确定其余项, 由此编制和构造一类新的含中介值定积分等式证明题. 之后, 通过几个应用实例加以说明.

2 主要结果

定义 1[6] 如果某个数值求积公式对于次数不超过 m 的多项式均能准确地成立, 但对 $m+1$ 次多项式不准确成立, 则称该数值求积公式的代数精度为 m.

引理 1[4-6] 设 $f(x)\in C^{n+1}[a,\ b]$, 节点 $a\le x_0<x_1<\cdots<x_m\le b$, $P_n(x)$ 为满足插值条件: $P_n(x_i)=f(x_i)(i=0,\ 1,\ \cdots,m)$ 及 $P_n'(x_j)=f'(x_j)(j=j_1,\ j_2,\ \cdots,j_p)$ 的 n 次插值多项式, 则 $\forall x\in[a,\ b]$, 有 $f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\cdot W_{n+1}(x)$, 其中 $n=m+p$; 当 $\{j_1,j_2,\cdots,j_p\}=\Phi$(空集) 时, 记 $p=0$, $W_{n+1}(x)=\prod\limits_{i=0}^{m}(x-x_i)$, 而当 $\{j_1,j_2,\cdots,j_p\}\ne\Phi$ 且 $0\le j_1<j_2<\cdots<j_p\le m$ 时, $W_{n+1}(x)=\prod\limits_{j=j_1}^{j_p}(x-x_j)^2\cdot\prod\limits_{\substack{0\le i\le m\\ i\ne j_1,j_2,\cdots,j_p}}(x-x_i)$; $\xi_x\in(a,\ b)$.

注记 1 该引理 1 是将 Lagrange 和 Hermite 插值多项式的余项归并为统一表达形式.

收稿日期: 2013-10-25
资助项目: 江西省学位与研究生教育教学改革项目 (JXYJG-2012-072); 江西省高等学校教学改革研究项目 (JXJG-13-8-18, JY1329); 江西省及南昌航空大学研究生数值分析优质课程建设项目 (YYZ201203); 江西省自然科学基金项目 (20114BAB201001)

定理 1 设 $f(x)\in C^{n+1}[a,b]$, 节点 $a\le x_0<x_1<\cdots<x_m\le b$, $\rho(x)$ 为 $[a,\ b]$ 上的权函数 [4], 数值求积公式 $\int_a^b\rho(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x\approx I_n(f)=\sum\limits_{i=0}^{m}A_i\cdot f(x_i)+\sum\limits_{j=j_1}^{j_p}B_j\cdot f'(x_j)$ 的代数精度至少为 n, 且 $W_{n+1}(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上不变号 (即$\forall x\in[a,\ b]$, $W_{n+1}(x)\ge 0$ 或 $W_{n+1}(x)\le 0$, 且 $W_{n+1}(x)$ 不恒为 0), 则至少存在一点 $\xi\in[a,\ b]$, 使得,

$$\int_a^b\rho(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x=I_n(f)+\frac{K}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

其中 $n=m+p$, $K=\int_a^b\rho(x)\cdot W_{n+1}(x)\mathrm{d}x$, $A_i\ (i=0,1,\cdots,m)$ 、$B_j\ (j=j_1,j_2,\cdots,j_p)$ 为依赖于权函数及对应节点的常数, $W_{n+1}(x)$ 及 p 的含义同引理 1.

证明 由已知 $W_{n+1}(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上不变号, 不妨设 $\forall x\in[a,\ b]$, $W_{n+1}(x)\ge 0$ 且不恒为 0, 则由 $\forall x\in[a,\ b]$, $\rho(x)\ge 0$, 得 $\rho(x)\cdot W_{n+1}(x)\ge 0$ 且不恒为 0, 于是有 $K\triangleq\int_a^b\rho(x)\cdot W_{n+1}(x)\mathrm{d}x>0$. 因为 $f(x)\in C^{n+1}[a,b]$, 即 $f^{(n+1)}(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续, 所以 $f^{(n+1)}(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上有最大值 M 与最小值 m, 即 $\forall x\in[a,\ b]$, 有 $m\le f^{(n+1)}(x)\le M$. 故对连续函数 $f^{(n+1)}(x)$ 用介值定理知, 至少存在一点 $\xi\in[a,\ b]$, 使得

$$\int_a^b\rho(x)\cdot f^{(n+1)}(\xi_x)\cdot W_{n+1}(x)\mathrm{d}x=f^{(n+1)}(\xi)\cdot\int_a^b\rho(x)\cdot W_{n+1}(x)\mathrm{d}x=K\cdot f^{(n+1)}(\xi)$$

而由引理 1 知, $\forall x\in[a,\ b]$, 有 $f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\cdot W_{n+1}(x)$, 其中 $\xi_x\in(a,b)$.

又因为求积公式的代数精度至少为 n, 所以有

$$\begin{aligned}\int_a^b\rho(x)\cdot P_n(x)\mathrm{d}x&=I_n(P_n)=\sum_{i=0}^{m}A_i\cdot P_n(x_i)+\sum_{j=j_1}^{j_p}B_j\cdot P_n'(x_j)\\&=\sum_{i=0}^{m}A_i\cdot f(x_i)+\sum_{j=j_1}^{j_p}B_j\cdot f'(x_j)=I_n(f)\end{aligned}$$

从而得 $\int_a^b\rho(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x-I_n(f)=\int_a^b\rho(x)[f(x)-P_n(x)]\mathrm{d}x=\frac{K}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$.

注记 2 若定理 1 中 $W_{n+1}(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上恒为 0, 而其它条件不变, 则定理 1 的结论仍然成立. 此时为特例: $f(x)=P_n(x)(\forall x\in[a,\ b])$, 且 $K=0$.

类似地, 可证明得到:

定理 2 设 $f(x)\in C^{n_1+1}[a,b]$, 节点 $a\le x_0<x_1<\cdots<x_m\le b$, $\rho(x)$ 为 $[a,\ b]$ 上的权函数, 数值求积公式 $\int_a^b\rho(x)f(x)\mathrm{d}x\approx I_{n_1}(f)=\sum\limits_{i=0}^{m}A_if(x_i)+\sum\limits_{j=j_1}^{j_p}B_jf'(x_j)+\sum\limits_{j=j_1}^{j_p}C_{2j}f''(x_j)+\cdots+\sum\limits_{j=j_1}^{j_p}C_{kj}f^{(k)}(x_j)$ 的代数精度至少为 n_1, 且 $W_{n_1+1}(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上不变号, 则至少存在一点 $\xi\in[a,\ b]$, 使得

$$\int_a^b\rho(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x=I_{n_1}(f)+\frac{K_1}{(n_1+1)!}f^{(n_1+1)}(\xi)$$

其中$n_1=m+kp$, $K_1=\int_a^b\rho(x)\cdot W_{n_1+1}(x)\mathrm{d}x$, $W_{n_1+1}(x)=\prod\limits_{j=j_1}^{j_p}(x-x_j)^{k+1}\cdot\prod\limits_{\substack{0\le i\le m\\ i\ne j_1,j_2,\cdots,j_p}}(x-x_i)$.

3 应用实例

下面, 将本文方法用于编制和构造新的含中介值的定积分等式证明题, 并给予证明.

例 1 设 $f(x) \in C^3[a, b]$, 则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{4} \cdot [f(a) + 3f(\frac{a+2b}{3})] + \frac{f'''(\xi)}{216}(b-a)^4$$

证明 取 $\rho(x) \equiv 1$, 首先构造数值求积公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 \cdot f(a) + A_1 \cdot f(\frac{a+2b}{3})$, 使其具有尽可能高的代数精度. 为此, 分别取 $f(x) = 1$, x 使求积公式精确成立, 联立求解得 $A_0 = \frac{b-a}{4}$, $A_1 = \frac{3(b-a)}{4}$. 把 A_0, A_1 代入求积公式, 取 $f(x) = x^2$, 代入验算知求积公式精确成立; 再取 $f(x) = x^3$, 求积公式不精确成立, 故求积公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{4} \cdot [f(a) + 3f(\frac{a+2b}{3})]$ 的代数精度为 2 .

其次, 构作二次插值多项式 $P_2(x)$, 使满足 $P_2(a) = f(a)$, $P_2(\frac{a+2b}{3}) = f(\frac{a+2b}{3})$, $P_2'(\frac{a+2b}{3}) = f'(\frac{a+2b}{3})$, 则由引理 1 知, $W_3(x) = (x-a)(x-\frac{a+2b}{3})^2 \geq 0(x \in [a, b])$ 且不恒为 0. 又 $K = \int_a^b W_3(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{36}(b-a)^4$, 故由定理 1 得至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{4} \cdot [f(a) + 3f(\frac{a+2b}{3})] = \frac{K}{3!}f'''(\xi) = \frac{f'''(\xi)}{216}(b-a)^4$.

注记 2 证明过程也是编制和构造含中介值定积分等式证明题的过程.

类似地, 可编制和构造得到: 设 $f(x) \in C^3[a, b]$, 则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{4} \cdot [3f(\frac{2a+b}{3}) + f(b)] - \frac{f'''(\xi)}{216}(b-a)^4$$

例 2 设 $f(x) \in C^3[a, b]$, 则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3} \cdot (2f(a) + f(b)) + \frac{(b-a)^2}{6}f'(a) - \frac{f'''(\xi)}{72}(b-a)^4$$

证明 取 $\rho(x) \equiv 1$, 构造如下形式的数值求积公式, 使其具有尽可能高的代数精度. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 \cdot f(a) + A_1 \cdot f(b) + B_0 \cdot f'(a)$. 为此, 分别取 $f(x) = 1$, x, x^2 使求积公式精确成立, 联立求解得 $A_0 = \frac{2(b-a)}{3}$, $A_1 = \frac{b-a}{3}$, $B_0 = \frac{(b-a)^2}{6}$. 故得求积公式: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{3} \cdot (2f(a) + f(b)) + \frac{(b-a)^2}{6}f'(a)$, 易于验证其代数精度为 2.

其次, 构作二次插值多项式 $P_2(x)$, 使满足 $P_2(a) = f(a)$, $P_2'(a) = f'(a)$, $P_2(b) = f(b)$, 则由引理 1 知, $W_3(x) = (x-a)^2(x-b) \leq 0(x \in [a, b])$ 且不恒为 0. 又 $K = \int_a^b W_3(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{12}(b-a)^4$, 故由定理 1 得至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - [\frac{b-a}{3} \cdot (2f(a) + f(b)) + \frac{(b-a)^2}{6}f'(a)] = \frac{K}{3!}f'''(\xi) = -\frac{f'''(\xi)}{72}(b-a)^4$$

类似地, 可编制和构造得到: 设 $f(x) \in C^3[a, b]$, 则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{3} \cdot (f(a) + 2f(b)) - \frac{(b-a)^2}{6}f'(b) + \frac{f'''(\xi)}{72}(b-a)^4.$$

例 3 设 $f(x) \in C^4[a, b]$, 则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b)) - \frac{(b-a)^2}{12}(f'(b) - f'(a)) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{720}(b-a)^5$$

证明 取 $\rho(x) \equiv 1$, 构造如下形式的数值求积公式, 使其具有尽可能高的代数精度.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 \cdot f(a) + A_1 \cdot f(b) + B_0 \cdot f'(a) + B_1 \cdot f'(b)$$

为此, 分别取 $f(x) = 1$, x, x^2, x^3 使求积公式精确成立, 联立求解得 $A_0 = A_1 = \frac{b-a}{2}$, $B_0 = \frac{(b-a)^2}{12}$, $B_1 = -\frac{(b-a)^2}{12}$. 故得到求积公式: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b)) - \frac{(b-a)^2}{12}(f'(b) - f'(a))$, 易于验证其代数精度为 3.

其次, 构作三次插值多项式 $P_3(x)$, 使满足 $P_3^{(l)}(a)=f^{(l)}(a)$, $P_3^{(l)}(b)=f^{(l)}(b)(l=0;1)$, 则由引理 1 知, $W_4(x)=(x-a)^2(x-b)^2\geq 0(x\in[a,\ b])$ 且不恒为 0. 又 $K=\int_a^b W_4(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{30}(b-a)^5$, 故由定理 1 得至少存在一点 $\xi\in[a,\ b]$, 使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-[\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))-\frac{(b-a)^2}{12}(f'(b)-f'(a))]=\frac{K}{4!}f^{(4)}(\xi)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{720}(b-a)^5$.

类似地, 可构造和证明: 设 $f(x)\in C^6[a\ ,b]$, 则至少存在一点 $\xi\in[a,\ b]$, 使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{30}\cdot[7f(a)+16f(\frac{a+b}{2})+7f(b)]+\frac{(b-a)^2}{60}[f'(b)-f'(a)]+\frac{f^{(6)}(\xi)}{604800}(b-a)^7$$

例 4 设 $f(x)\in C^6[a\ ,b]$, 则至少存在一点 $\xi\in[a,\ b]$, 使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))+\frac{(b-a)^2}{10}(f'(a)-f'(b))+\frac{(b-a)^3}{120}(f''(a)+f''(b))+\frac{f^{(6)}(\xi)}{100800}(b-a)^7$$

证明取 $\rho(x)\equiv 1$, 构造如下形式的数值求积公式, 使其具有尽可能高的代数精度.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx A_0\cdot f(a)+A_1\cdot f(b)+B_0\cdot f'(a)+B_1\cdot f'(b)+C_0\cdot f''(a)+C_1\cdot f''(b)$$

为此, 分别取 $f(x)=1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5$ 使求积公式精确成立, 联立求解得 $A_0=A_1=\frac{b-a}{2}$, $B_0=\frac{(b-a)^2}{10}$, $B_1=-\frac{(b-a)^2}{10}$, $C_0=C_1=\frac{(b-a)^3}{120}$. 故得公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))+\frac{(b-a)^2}{10}(f'(a)-f'(b))+\frac{(b-a)^3}{120}(f''(a)+f''(b))$$

易于验证其代数精度为 5 .

其次, 构作五次插值多项式 $P_5(x)$, 使满足 $P_5^{(l)}(a)=f^{(l)}(a)$, $P_5^{(l)}(b)=f^{(l)}(b)(l=0;1;2)$, 则由引理 1 知, $W_6(x)=(x-a)^3(x-b)^3\leq 0(x\in[a,\ b])$ 且不恒为 0. 又 $K_1=\int_a^b W_6(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{140}(b-a)^7$, 故由定理 2 得至少存在一点 $\xi\in[a,\ b]$, 使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-[\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))+\frac{(b-a)^2}{10}(f'(a)-f'(b))+\frac{(b-a)^3}{120}(f''(a)+f''(b))]$$
$$=\frac{K_1}{6!}f^{(6)}(\xi)=\frac{f^{(6)}(\xi)}{100800}(b-a)^7$$

例 5 设 $f(x)\in C^4[a\ ,b]$, 则至少存在一点 $\xi\in[a,\ b]$, 使:

$$\int_a^b(x-a)f(x)\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{20}(3f(a)+7f(b))+\frac{(b-a)^3}{60}(2f'(a)-3f'(b))+\frac{f^{(4)}(\xi)}{1440}(b-a)^6$$

证明 取 $\rho(x)=x-a$, 首先构造数值求积公式 $\int_a^b(x-a)f(x)\mathrm{d}x\approx A_0\cdot f(a)+A_1\cdot f(b)+B_0\cdot f'(a)+B_1\cdot f'(b)$, 使其具有尽可能高的代数精度. 为此, 分别取 $f(x)=1,\ x-a,\ (x-a)^2,\ (x-a)^3$ 使公式精确成立, 联立求解得 $A_0=\frac{3}{20}(b-a)^2, A_1=\frac{7}{20}(b-a)^2, B_0=\frac{(b-a)^3}{30}, B_1=-\frac{(b-a)^3}{20}$. 把 A_0,A_1,B_0,B_1 代入求积公式, 再取 $f(x)=(x-a)^4$, 代入验算知公式不精确成立, 故求积公式 $\int_a^b(x-a)f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{(b-a)^2}{20}(3f(a)+7f(b))+\frac{(b-a)^3}{60}(2f'(a)-3f'(b))$ 的代数精度为 3.

其次, 构作三次插值多项式 $P_3(x)$, 使满足 $P_3^{(l)}(a)=f^{(l)}(a)$, $P_3^{(l)}(b)=f^{(l)}(b)(l=0;1)$, 则由引理 1 知, $W_4(x)=(x-a)^2(x-b)^2\geq 0(x\in[a,\ b])$ 且不恒为 0.

又 $K=\int_a^b(x-a)\cdot W_4(x)dx=\frac{1}{60}(b-a)^6$, 故由定理 1 得至少存在一点 $\xi\in[a,\ b]$, 使

$$\int_a^b(x-a)f(x)\mathrm{d}x-[\frac{(b-a)^2}{20}(3f(a)+7f(b))+\frac{(b-a)^3}{60}(2f'(a)-3f'(b))]$$

$$=\frac{K}{4!}\cdot f^{(4)}(\xi)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{1440}(b-a)^6$$

类似地, 可构造和证明: 设 $f(x)\in C^3[a,b]$, 则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使

$$\int_a^b\sqrt{\frac{b-a}{x-a}}\cdot f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{3}(b-a)\cdot f(\frac{b+4a}{5})+\frac{1}{3}(b-a)f(b)-\frac{16}{1575}f'''(\xi)(b-a)^4$$

4 结束语

本文利用 Lagrange 及 Hermite 多项式插值理论及代数精度的概念, 给出了编制和构造一类含中介值定积分等式新题的方法, 构造过程即为其证明过程. 证明过程中插值多项式不必具体求出来. 本文方法思路清晰且简洁, 是一种实用的方法, 也可用于构造更多类新题.

参考文献

[1] 同济大学应用数学系主编. 高等数学 (上册)[M].5 版. 北京: 高等教育出版社, 2002, 232-239.
[2] 邓乐斌. 数学分析的理论、方法与技巧 [M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2005, 225-236, 252-256.
[3] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法 [M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2006, 240-243.
[4] 李岳生, 黄友谦. 数值逼近 [M]. 北京: 人民教育出版社, 1978, 36-38, 69-74, 142-189, 207.
[5] 张平文, 李铁军. 数值分析 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2007, 24-27,38-42, 82-102.
[6] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析 [M]. 5 版. 北京: 清华大学出版社, 2008, 25-27, 35-38, 97-127.

A Construction of Proof Problems for Definite Integral Equality with Intermediate Value

ZHENG Hua-sheng

(School of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China)

Abstract: In this paper, a new method of constructing and proving definite integral proof problems with mean-value is presented by applying polynomial interpolation and concept of algebraic accuracy of numerical quadrature formula. And then, several application examples are given.

Keywords: numerical quadrature formula; polynomial interpolation; algebraic accuracy; definite integral; intermediate value