

方法 | 第一版  
数学 | 技巧  
**考研 典型问题**

黄国铭

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy}{(\tan r - \sin r)^2}$$

$$A = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & & \\ \gamma & \alpha & \beta & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma & \alpha & \beta \\ & & & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$p_k = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, r \\ r = \min\{M, n\}$$



---

## 前言

---

关于本书



致谢

---

## 目录

---

|  |           |
|--|-----------|
| 前言 .....   | i         |
| 第一部分 – 高等数学                                      |           |
| <b>第一章 函数、数列与极限 .....</b>                        | <b>2</b>  |
| 1.1 函数 .....                                     | 2         |
| 1.1.1 函数的性质 (3)   1.1.2 复合函数与反函数 (4)             |           |
| 1.1.3 函数的连续性及间断点的类型 (6)   1.1.4 漐近线方程 (7)        |           |
| 1.2 极限的概念、性质及存在准则 .....                          | 10        |
| 1.2.1 数列、函数极限的定义 (10)   1.2.2 数列与其子列极限之间的关系 (12) |           |
| 1.2.3 数列、函数极限的性质 (12)   1.2.4 数列、函数极限的存在准则 (14)  |           |
| 1.3 计算极限值的若干方法 .....                             | 14        |
| 1.3.1 利用等价代换和初等变形 (14)   1.3.2 利用已知极限 (19)       |           |
| 1.3.3 利用函数与极限的关系 (20)   1.3.4 利用夹逼准则 (22)        |           |
| 1.3.5 求极限其他常用方法 (28)   1.3.6 Stolz 定理及其应用 (53)   |           |
| 1.4 极限典型问题 .....                                 | 60        |
| 1.4.1 极限的存在性问题 (60)   1.4.2 极限的局部逆问题 (60)        |           |
| 1.4.3 无穷小量及其阶的比较 (61)                            |           |
| 1.5 递推形式的极限 .....                                | 62        |
| 1.5.1 利用存在性求极限 (62)   1.5.2 写出通项求极限 (66)         |           |
| 1.5.3 求解线性递推关系 (69)                              |           |
| <b>第二章 一元函数微分学 .....</b>                         | <b>71</b> |
| 2.1 导数与微分 .....                                  | 72        |
| 2.1.1 导数的定义与可微性质 (72)                            |           |
| 2.1.2 反函数、用参数方程确定的函数、隐函数的导数 (76)                 |           |
| 2.1.3 高阶导数与 Leibniz 公式 (79)                      |           |

|  |            |
|--|------------|
| 2.2 函数的可导性 .....   | 84         |
| 2.2.1 含绝对值函数的可导性 (84)   2.2.2 分段函数的可导性 (85)                    |            |
| 2.3 微分中值定理 .....   | 86         |
| 2.3.1 四大基本定理 (86)   2.3.2 单中值问题 (87)   2.3.3 双中值问题 (92)        |            |
| 2.3.4 高阶中值问题 (95)  |            |
| 2.4 Taylor 展开与差商 .....   | 98         |
| 2.4.1 证明中值定理 (98)   2.4.2 中值点的极限 (100)   2.4.3 无穷远处的极限 (101)   |            |
| 2.4.4 关于界的估计 (102)   2.4.5 差商与导数 (104)                         |            |
| 2.5 Lagrange 插值与 Hermite 插值 .....                              | 107        |
| 2.5.1 Lagrange 插值 (107)   2.5.2 Hermite 插值 (108)               |            |
| 2.6 导数的综合应用 .....  | 111        |
| 2.6.1 极值问题 (111)   2.6.2 不等式与函数凹凸性及拐点 (113)                    |            |
| 2.6.3 导数的几何意义与曲线的曲率 (116)   2.6.4 导数不等式证明中的应用 (118)            |            |
| <b>第三章 一元函数积分学 .....</b>                                       | <b>119</b> |
| 3.1 不定积分 .....   | 119        |
| 3.1.1 基础类型 (120)   3.1.2 隐函数类型 (140)   3.1.3 复合类型 (140)        |            |
| 3.2 定积分 .....  | 146        |
| 3.2.1 求出不定积分后计算 (146)   3.2.2 运用定积分性质进行相关计算 (148)              |            |
| 3.2.3 积分作为上下限的函数 (152)   3.2.4 积分中值定理 (153)                    |            |
| 3.2.5 定积分的几何应用 (156)   3.2.6 定积分的物理应用 (161)                    |            |
| 3.2.7 定积分综合性问题 (161)   |            |
| 3.3 反常积分 .....   | 184        |
| 3.3.1 反常积分的计算 (184)   3.3.2 反常积分敛散性 (190)                      |            |
| 3.3.3 反常积分的极限 (192)   3.3.4 反常积分综合性问题 (194)                    |            |
| 3.4 特殊构型积分补充 .....   | 195        |
| 3.4.1 Euler 积分 (195)   3.4.2 Dirichlet 积分 (196)                |            |
| 3.4.3 Lobachevsky 积分法 (197)   3.4.4 Fresnel 积分与 Fejér 积分 (197) |            |
| 3.4.5 Laplace 积分 (198)   |            |
| 3.5 留数定理及其应用 .....   | 198        |
| 3.5.1 留数 (198)   3.5.2 留数定理 (199)   3.5.3 留数计算 (199)           |            |
| 3.5.4 留数定理的应用 (201)  |            |

|  |            |
|--|------------|
| <b>第四章 向量代数与空间解析几何 .....</b>                         | <b>207</b> |
| 4.1 向量代数 .....                                       | 208        |
| 4.1.1 模、方向角、投影 (208)    4.1.2 数量积、向量积、混合积 (208)      |            |
| 4.2 空间解析几何 .....                                     | 210        |
| 4.2.1 空间平面与直线 (210)    4.2.2 空间平面、直线的方程及位置关系 (210)   |            |
| 4.2.3 曲面及其方程 (211)    4.2.4 空间曲线及其方程 (215)           |            |
| <b>第五章 多元函数微分学 .....</b>                             | <b>220</b> |
| 5.1 多元函数的极限与连续 .....                                 | 220        |
| 5.1.1 多元函数的极限 (221)    5.1.2 多元函数的连续性与可微性 (222)      |            |
| 5.1.3 二元函数的 Taylor 展开 (224)                          |            |
| 5.2 多元函数的偏导数 .....                                   | 225        |
| 5.2.1 偏导数与隐函数 (225)    5.2.2 全微分形式不变性 (228)          |            |
| 5.2.3 复合函数微分法 (链式法则) (232)    5.2.4 高阶全微分 (237)      |            |
| 5.2.5 高阶偏导数 (238)    5.2.6 偏微分方程 (240)               |            |
| 5.3 多元函数极值 .....                                     | 241        |
| 5.3.1 二元函数的极值 (241)    5.3.2 条件极值 (245)              |            |
| 5.3.3 多元函数的最值问题 (246)                                |            |
| 5.4 方向导数与梯度 .....                                    | 247        |
| 5.4.1 方向导数的计算 (247)    5.4.2 梯度的计算 (248)             |            |
| <b>第六章 多元函数积分学 .....</b>                             | <b>250</b> |
| 6.1 重积分 .....  | 251        |
| 6.1.1 重积分定义 (251)    6.1.2 重积分的计算及相关方法 (254)         |            |
| 6.1.3 反常二重积分与含参变量积分 (266)    6.1.4 重积分的积分中值定理 (269)  |            |
| 6.1.5 重积分的应用 (272)                                   |            |
| 6.2 曲线积分 .....                                       | 278        |
| 6.2.1 两类曲线积分 (278)    6.2.2 Green 公式 (283)           |            |
| 6.3 曲面积分 .....                                       | 292        |
| 6.3.1 两类曲面积分 (293)    6.3.2 Gauss 公式、Stokes 公式 (301) |            |
| 6.4 多元积分学的应用与场论概述 .....                              | 312        |
| 6.4.1 多元积分学的应用 (312)    6.4.2 梯度、散度和旋度 (314)         |            |
| 6.4.3 梯度、散度、旋度的基本公式及其应用 (315)                        |            |

|   |            |
|---|------------|
| <b>第七章 无穷级数 .....</b>   | <b>318</b> |
| 7.1 常数项级数 .....   | 318        |
| 7.1.1 常数项级数的敛散性及其判别法 (319)   7.1.2 正项级数的审敛法 (320)             |            |
| 7.1.3 交错级数 (325)   7.1.4 一般数项级数的判别法 (326)   7.1.5 其他判别法 (327) |            |
| 7.2 幂级数 .....   | 328        |
| 7.2.1 下降阶乘幂 (328)   7.2.2 幂级数的性质 (330)   7.2.3 函数展开为幂级数 (332) |            |
| 7.2.4 幂级数的收敛域及和函数 (335)   7.2.5 幂级数的应用 (343)                  |            |
| 7.3 Fourier 级数 .....  | 347        |
| 7.3.1 Fourier 系数 (347)   7.3.2 周期为 $2l$ 的 Fourier 展开 (347)    |            |
| 7.3.3 Fourier 级数综合性问题 (350)                                   |            |
| <b>第八章 微分方程 .....</b>   | <b>352</b> |
| 8.1 一阶微分方程 .....  | 352        |
| 8.1.1 变量分离方程 (352)   8.1.2 齐次微分方程 (353)   8.1.3 线性微分方程 (354)  |            |
| 8.1.4 Bernoulli 微分方程 (355)   8.1.5 恰当方程与积分因子 (356)            |            |
| 8.2 高阶微分方程 .....  | 360        |
| 8.2.1 常系数齐次线性微分方程 (360)   8.2.2 常系数非齐次线性微分方程 (362)            |            |
| 8.2.3 可降阶的高阶微分方程 (366)   8.2.4 Euler 微分方程 (367)               |            |
| 8.2.5 二阶变系数线性微分方程 (369)                                       |            |
| 8.3 微分方程综合性问题 .....   | 372        |
| 8.3.1 微分方程与函数性质 (372)   8.3.2 微分方程与积分 (373)                   |            |
| 8.3.3 微分方程与幂级数 (381)  |            |
| <br>第二部分 – 线性代数   |            |
| <b>第九章 行列式 .....</b>  | <b>386</b> |
| 9.1 行列式的定义及其性质 .....  | 386        |
| 9.1.1 逆序数 (387)   9.1.2 行列式的概念 (387)   9.1.3 行列式的基本性质 (388)   |            |
| 9.1.4 几种特殊的行列式 (389)  |            |
| 9.2 行列式按行 (列) 展开定理 .....                                      | 390        |
| 9.2.1 行列式展开定理 (390)   9.2.2 Laplace 展开定理 (392)                |            |
| 9.3 行列式的计算 .....  | 392        |
| 9.3.1 具象行列式的计算 (392)   9.3.2 抽象行列式的计算 (400)                   |            |
| 9.3.3 Vandermonde 行列式计算 (400)                                 |            |

|   |            |
|---|------------|
| <b>第十章 矩阵</b>   | <b>403</b> |
| 10.1 矩阵   | 404        |
| 10.1.1 矩阵的定义 (404)    10.1.2 矩阵的运算 (406)    10.1.3 方阵的幂 (409) |            |
| 10.1.4 分块矩阵 (411)    10.1.5 Carlson 不等式及其应用 (412)             |            |
| 10.2 伴随矩阵、逆矩阵与矩阵方程  | 414        |
| 10.2.1 伴随矩阵 (414)    10.2.2 可逆矩阵 (416)    10.2.3 矩阵方程 (420)   |            |
| 10.3 初等变换与初等矩阵  | 423        |
| 10.3.1 初等变换 (423)    10.3.2 初等矩阵 (425)                        |            |
| 10.4 矩阵的秩   | 427        |
| 10.4.1 秩的相关不等式证明 (427)    10.4.2 秩的相关等式证明 (429)               |            |
| 10.4.3 秩的应用 (430)   |            |
| <b>第十一章 向量</b>  | <b>433</b> |
| 11.1 向量的运算  | 434        |
| 11.1.1 向量的定义 (434)    11.1.2 向量的运算 (434)                      |            |
| 11.2 向量间的线性关系   | 435        |
| 11.2.1 基本概念 (435)    11.2.2 常用结论 (435)                        |            |
| 11.3 向量组的极大线性无关组和秩  | 438        |
| 11.3.1 极大线性无关组 (438)    11.3.2 向量组的秩 (439)                    |            |
| 11.4 向量的内积与向量空间   | 442        |
| 11.4.1 向量的内积 (442)    11.4.2 向量空间 (443)                       |            |
| <b>第十二章 线性方程组</b>   | <b>448</b> |
| 12.1 齐次线性方程组  | 449        |
| 12.1.1 Cramer 法则的应用 (449)    12.1.2 齐次方程组的一般解 (449)           |            |
| 12.1.3 齐次方程组的基础解系 (452)                                       |            |
| 12.2 非齐次线性方程组   | 453        |
| 12.2.1 方程组与行列式 (453)    12.2.2 线性相关与线性无关 (454)                |            |
| 12.2.3 非齐次线性方程组解的讨论 (454)                                     |            |
| 12.3 方程组的同解与公共解   | 456        |
| 12.3.1 方程组的同解 (456)    12.3.2 方程组的公共解 (458)                   |            |
| <b>第十三章 矩阵的特征值与特征向量</b>                                       | <b>460</b> |
| 13.1 矩阵的特征值与特征向量  | 460        |
| 13.1.1 矩阵的特征值 (461)    13.1.2 矩阵的特征向量 (464)                   |            |

|   |            |
|---|------------|
| 13.2 矩阵相似与可对角化 .....  | 466        |
| 13.2.1 矩阵的相似 (466)    13.2.2 可对角化 (468)                       |            |
| <b>第十四章 二次型 .....</b>   | <b>471</b> |
| 14.1 二次型的规范形与标准形 .....  | 471        |
| 14.1.1 二次型的基本概念 (472)    14.1.2 二次型的常用结论 (475)                |            |
| 14.1.3 运用偏导函数求标准形 (477)                                       |            |
| 14.2 正定性与矩阵的合同 .....  | 478        |
| 14.2.1 正定性 (479)    14.2.2 半正定性 (482)    14.2.3 矩阵的合同 (484)   |            |
| 14.3 正交变换与直角坐标变换 .....  | 485        |
| 14.3.1 正交变换 (486)    14.3.2 谱分解 (493)    14.3.3 正交变换的应用 (497) |            |
| 14.3.4 直角坐标变换 (500)   |            |
| <b>第三部分 – 概率论与数理统计</b>  |            |
| <b>第十五章 概率论的基本概念 .....</b>                                    | <b>504</b> |
| 15.1 随机事件及其概率 .....   | 504        |
| 15.1.1 事件的运算 (504)    15.1.2 概率的性质 (505)                      |            |
| 15.1.3 古典概率与几何概率 (506)    15.1.4 概率基本公式及条件概率 (506)            |            |
| 15.1.5 全概率公式和 Bayes 公式 (506)                                  |            |
| 15.2 事件的独立性 .....   | 507        |
| <b>第十六章 随机变量及其分布 .....</b>                                    | <b>508</b> |
| 16.1 离散型随机变量的概率分布 .....                                       | 508        |
| 16.1.1 离散型随机变量的分布函数 (508)    16.1.2 二项分布 (509)                |            |
| 16.2 连续型随机变量的概率分布 .....                                       | 509        |
| 16.2.1 连续型随机变量概率密度 (509)    16.2.2 均匀分布 (510)                 |            |
| 16.2.3 指数分布 (510)    16.2.4 正态分布 (511)                        |            |
| <b>第十七章 多维随机变量及其分布 .....</b>                                  | <b>513</b> |
| 17.1 多维离散型随机变量 .....  | 513        |
| 17.2 多维连续型随机变量 .....  | 513        |
| 17.2.1 边缘概率密度与边缘分布函数 (513)                                    |            |
| 17.2.2 二维连续型随机变量函数的分布 (514)                                   |            |
| 17.2.3 二维随机变量条件概率密度与条件分布函数 (515)                              |            |
| 17.2.4 二维正态分布 (516)    17.2.5 卷积公式 (517)                      |            |

|  |            |
|--|------------|
| 17.3 多维混合型随机变量 .....   | 518        |
| 17.3.1 二维混合型随机变量的分布 (518)    17.3.2 随机变量与函数性质 (520)                    |            |
| <b>第十八章 随机变量的数字特征 .....</b>  | <b>521</b> |
| 18.1 数学期望与方差 .....   | 521        |
| 18.1.1 数学期望 (521)    18.1.2 方差 (523)                                   |            |
| 18.2 协方差与相关系数 .....  | 525        |
| 18.2.1 随机变量的独立性与相关性 (525)    18.2.2 协方差 (526)                          |            |
| 18.2.3 相关系数 (527)  |            |
| <b>第十九章 大数定律与中心极限定理 .....</b>  | <b>530</b> |
| 19.1 Chebyshev 不等式 .....   | 530        |
| 19.2 大数定律 .....  | 531        |
| 19.2.1 Bernoulli 大数定律 (531)    19.2.2 Chebyshev 大数定律 (531)             |            |
| 19.2.3 Khinchin 大数定律 (532)   |            |
| 19.3 中心极限定理 .....  | 532        |
| 19.3.1 Levy Lindeberg 定理 (532)    19.3.2 De Moivre-Laplace 定理 (533)    |            |
| <b>第二十章 数理统计的基本概念 .....</b>  | <b>534</b> |
| 20.1 随机样本 .....  | 534        |
| 20.1.1 常用统计量 (535)    20.1.2 样本数字特征的性质 (536)                           |            |
| 20.2 三大抽样分布 .....  | 536        |
| 20.2.1 $\chi^2$ 分布 (536)    20.2.2 $t$ 分布 (538)    20.2.3 $F$ 分布 (539) |            |
| 20.3 正态总体的抽样分布 .....   | 541        |
| 20.3.1 单正态总体的抽样分布 (542)    20.3.2 双正态总体的抽样分布 (542)                     |            |
| <b>第二十一章 正态总体参数的区间估计与假设检验 .....</b>                                    | <b>543</b> |
| 21.1 区间估计 .....  | 544        |
| 21.1.1 区间估计的定义 (544)    21.1.2 区间估计的一般步骤 (545)                         |            |
| 21.2 正态总体均值和方差的区间估计 .....  | 546        |
| 21.2.1 单个正态总体参数的置信区间 (546)   |            |
| 21.2.2 双正态总体均值差与方差比的置信区间 (547)   |            |
| 21.3 单侧置信区间 .....  | 548        |
| 21.4 假设检验 .....  | 548        |
| 21.4.1 假设检验的基本思想 (550)    21.4.2 假设检验的解题步骤 (551)                       |            |
| 21.4.3 单个正态总体的假设检验 (551)    21.4.4 双正态总体的假设检验 (554)                    |            |

|  |            |
|--|------------|
| <b>第二十二章 参数的点估计及其优良性 .....</b>                           | <b>555</b> |
| 22.1 矩估计法 .....  | 555        |
| 22.2 极大似然估计 .....  | 557        |
| 22.3 估计量优良性的判定标准 .....                                   | 560        |
| 22.3.1 无偏性 (560)    22.3.2 有效性 (560)    22.3.3 一致性 (561) |            |
| <b>附录 A 积分表推导 .....</b>                                  | <b>562</b> |
| A.1 含有 $ax + b$ 的积分 .....                                | 562        |
| A.2 含有 $\sqrt{ax + b}$ 的积分 .....                         | 563        |
| A.3 含有 $x^2 \pm a^2$ 的积分 .....                           | 563        |
| A.4 含有 $ax^2 + b$ ( $a > 0$ ) 的积分 .....                  | 563        |
| A.5 含有 $ax^2 + b + c$ ( $a > 0$ ) 的积分 .....              | 564        |
| <b>索引 .....</b>  | <b>568</b> |
| <b>参考文献 .....</b>  | <b>568</b> |

---

## 表格

---

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| 1.1 常见的等价代换 . . . . .        | 15  |
| 1.2 常见的裂项公式 . . . . .        | 17  |
| 2.1 初等函数的高阶导数 . . . . .      | 79  |
| 2.2 常用的辅助函数构造 . . . . .      | 87  |
| 3.1 常用多项式不定积分公式 . . . . .    | 120 |
| 3.2 常用根式不定积分公式 . . . . .     | 126 |
| 3.3 常用三角函数不定积分公式 . . . . .   | 132 |
| 3.4 常用三角函数转换公式 . . . . .     | 133 |
| 3.5 常用指数函数不定积分公式 . . . . .   | 138 |
| 3.6 常用对数函数不定积分公式 . . . . .   | 139 |
| 3.7 常用用的反常积分敛散性判别 . . . . .  | 190 |
| 4.1 空间曲面及其对应方程 . . . . .     | 214 |
| 6.1 各积分的应用公式及物理意义 . . . . .  | 312 |
| 6.2 梯度、散度、旋度的基本公式 . . . . .  | 316 |
| 7.1 下降阶乘幂的性质 . . . . .       | 329 |
| 7.2 常见函数的幂级数展开式 . . . . .    | 332 |
| 8.1 简单函数的全微分公式 . . . . .     | 357 |
| 8.2 常见的 Laplace 变换 . . . . . | 366 |
| 9.1 常见的行列式展开 . . . . .       | 390 |
| 10.1 矩阵的运算公式 . . . . .       | 407 |

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| 10.2 伴随矩阵性质 . . . . .        | 414 |
| 13.1 矩阵相似的必要条件 . . . . .     | 466 |
| 20.1 常用分布及其数学期望与方差 . . . . . | 539 |
| 21.1 正态总体参数区间估计表 . . . . .   | 549 |
| 21.2 正态总体方差的假设检验 . . . . .   | 554 |





# 高等数学

# 第1章

## 函数、数列与极限

“迟序之数，非出神怪，有形可检，有数可推。”

——祖冲之

函数、数列和极限是数学中重要的概念，它们在分析、微积分、数学分析等领域都有广泛的应用。下面简要介绍这几个概念：

1. 函数：函数是一种映射关系，它将一个集合中的每个元素映射到另一个集合中的唯一元素。在数学中，我们通常用  $f(x)$  或  $y = f(x)$  表示函数，其中  $x$  是自变量， $y$  是因变量。函数可以是线性的、多项式的、三角函数、指数函数、对数函数等各种形式。函数的性质包括定义域、值域、奇偶性、周期性等。

2. 数列：数列是按照一定规律排列的一组数的序列。数列可以是有限的，也可以是无限的。常见的数列有等差数列、等比数列、斐波那契数列等。数列的极限是指当数列的项趋向于某个值时，这个值称为数列的极限。数列的极限可以是有限的，也可以是无穷的。

3. 极限：极限是数学中一个重要的概念，用来描述函数或数列在某个点或无穷远处的“接近程度”。对于函数  $f(x)$ ，当  $x$  趋近于某个值  $a$  时，如果  $f(x)$  的取值趋近于某个确定的值  $L$ ，则称  $L$  是函数  $f(x)$  在  $x$  趋近于  $a$  时的极限，记作  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 。类似地，对于数列  $\{a_n\}$ ，当  $n$  趋向于无穷大时，如果数列的项趋近于某个确定的值  $L$ ，则称  $L$  是数列  $\{a_n\}$  的极限，记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ 。

函数、数列和极限是数学中基础而重要的概念，它们在理论研究和实际问题求解中都有着重要的作用。

### 1.1 函数

函数的基本特征包括：定义域和值域、解析式与图像、奇偶性、单调性、零点以及渐近线等，这些基本特征可以帮助我们更好地理解和分析函数的性质和行为。

### 1.1.1 函数的性质

**定义 1.1.1 (函数的概念).** 设有两个变量  $x$  与  $y$ , 如果变量  $x$  在其变化范围  $D$  内任取一个确定的数值时, 变量  $y$  按照一定的规则  $f$  总有唯一确定的数值和它对应, 则称变量  $y$  是变量  $x$  的函数, 记为  $y = f(x)$ ,  $x$  称为自变量,  $y$  称为因变量,  $D$  称为函数的定义域,  $f$  表示由  $x$  确定  $y$  的对应规则.

**例 1.1.1.** 求函数  $y = \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} + \arctan \frac{x-1}{5}$  的定义域.

要使函数有意义, 变量  $x$  必须同时满足  $\begin{cases} 25-x^2 > 0 \\ \left| \frac{x-1}{5} \right| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow -4 \leq x < 5$ , 因此定义域为  $[-4, 5]$ .

**定义 1.1.2 (有界性).** 设函数  $f(x)$  在集合  $D$  上有定义, 如果存在一个正常数  $M$ , 使得对于  $x$  在  $D$  上的任意取值, 均有  $|f(x)| < M$ , 则称函数  $f(x)$  在  $D$  上有界, 否则称  $f(x)$  在  $D$  上无界.

**定理 1.1.1 (函数的有界性定理).** 若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界; 若函数  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  存在 (见定义 1.1.10), 则函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内有界.

**例 1.1.2 (2004 数三).** 函数  $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$  在下列哪个区间内有界

- A.  $(-1, 0)$       B.  $(0, 1)$       C.  $(1, 2)$       D.  $(2, 3)$

当  $x \neq 0, 1, 2$  时,  $f(x)$  连续, 而

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\frac{\sin 3}{18}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\sin 2}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\sin 2}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$$

所以函数  $f(x)$  在  $(-1, 0)$  上有界.

**定义 1.1.3 (单调性).** 设函数  $f(x)$  在某区间  $D$  上有定义, 如果对于  $D$  上任意两点  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ , 均有  $f(x_1) < f(x_2)$  (或  $f(x_1) > f(x_2)$  ), 则称函数  $f(x)$  在  $D$  上单调递增 (或单调递减). 单调递增与单调递减函数统称为单调函数.

**例 1.1.3.** 由  $f'(x_0) > 0$  能否得到函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某个邻域内单调递增?

不能, 理由如下: 利用一阶导数判断函数的单调性, 需要已知导数在某区间的正负, 而不是某一点导数值的正负

**定理 1.1.2 (函数的单调性判定).** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 如果在区间上有  $f'(x) \geq 0$  (或  $f'(x) \leq 0$ ) (且不在任一子区间取恒等号), 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内严格单调递增 (或严格单调递减).

**定义 1.1.4 (奇偶性).** 设函数  $f(x)$  在关于原点对称的区间  $D$  上有定义, 如果对  $D$  上任意点  $x$ , 均有  $f(-x) = f(x)$  (或  $f(-x) = -f(x)$ ), 则称函数  $f(x)$  为偶函数 (或奇函数). 奇函数的图像关于原点对称, 偶函数的图像关于  $y$  轴对称.

**定义 1.1.5 (周期性).** 设函数  $f(x)$  在集合  $D$  上有定义, 如果存在正常数  $T$ , 使得对于  $D$  上任意  $x$ , 均有  $f(x+T) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  为周期函数, 使上式成立的最小正数为周期函数的最小正周期. 并不是每一个周期函数都有最小正周期.

**定理 1.1.3 (函数的周期性定理).** 若函数  $f(x)$  以  $T$  为周期, 则  $f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = \dots = f(x+nT)$ .

**例 1.1.4 (1987 数二).**  $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x}$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 是

- A. 有界函数      B. 单调函数      C. 周期函数      D. 偶函数

由于  $|x \sin x|$  和  $e^{\cos x}$  都是偶函数, 则其乘积  $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x}$  为偶函数, 选 D.

**例 1.1.5 (2014 数一).** 设  $f(x)$  是周期为 4 的可导奇函数, 且  $f'(x) = 2(x-1)$  ( $0 \leq x \leq 2$ ), 求  $f(7)$ .

$f(x) = \int 2(x-1)dx = x^2 - 2x + C$ , 因为  $f(x)$  是奇函数, 所以  $f(0) = 0$ , 可知  $C = 0$ , 于是  $f(x) = x^2 - 2x$ , 又  $f(x)$  的周期为 4, 于是  $f(7) = f(-1+8) = f(-1) = -f(1) = 1$ .

**定义 1.1.6 (基本初等函数与初等函数).** 常数函数  $y = c$  ( $c$  为常数), 幂函数  $y = x^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ), 指数函数  $y = a^x$  ( $a \neq 1, a > 0$ ), 对数函数  $y = \log_a x$  ( $a \neq 1, a > 0$ ), 三角函数和反三角函数称为基本初等函数. 由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合, 并由一个式子表示的函数称为初等函数.

几个常用的特殊函数:

- (1) 绝对值函数:  $y = |x|$ .  
 (2) 取整函数:  $y = [x]$ , 表示不超过  $x$  的最大整数.

(3) Dirichlet 函数:  $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$

## 1.1.2 复合函数与反函数

**定义 1.1.7 (复合函数).** 如果我们有两个函数  $f$  和  $g$ , 而两者的定义域分别是  $D_f$  和  $D_g$ , 值域分别是  $I_f$  和  $I_g$ . 如果  $I_f \cap D_g \neq \emptyset$ , 那我们定义复合函数 为

$$g \circ f := \{(x, z) \mid (\exists y \in I_f \cap D_g) [y = f(x) \wedge z = g(y)]\}.$$

**例 1.1.6 (2001 数二).** 设  $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ , 则  $f\{f[f(x)]\}$  等于

- A. 0      B. 1      C.  $\begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$       D.  $\begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$

因为  $f \in \{0, 1\}$ , 所以  $f[f(x)] = 1$ , 那么  $f\{1\} = 1$ , 因此选 B.

**例 1.1.7.** 已知  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + (2x)^n + x^{2n}}$  ( $x \geq 0$ ),  $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}$ , 求  $f(g(x))$  的表达式.

由推论 1.3.3 知,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1^n + 1^n + (2x)^n + (x^2)^n} = \max\{1, 2x, x^2\} =$

$$\begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x, & \frac{1}{2} \leq x < 2 \\ x^2, & 2 \leq x \end{cases}$$

因此  $g(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 1 \\ -x, & |x| > 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ , 于是  $g(x)$  的图像如图 1.1.1 所示, 那么

$$I : x = 1 \Rightarrow g(1) = 0 \Rightarrow f(g(0)) = 1$$

$$II : \begin{cases} -2 < x < -1 \\ 1 \leq x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x) = -x \\ g(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x > 2 \\ -x > 1 \\ -1 \leq x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(g(x)) = x^2 \\ f(g(x)) = -2x \\ f(g(x)) = 2 \end{cases}$$

$$III : x \leq -2 \Rightarrow g(x) = -x \Rightarrow f(g(x)) = x^2$$

$$\text{综上, } f(g(x)) = \begin{cases} x^2, & x \leq -2 \\ -2x, & -2 < x < -1 \\ 2, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

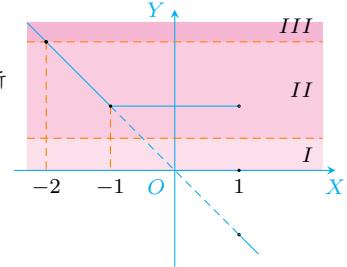


图 1.1.1

**定义 1.1.8 (反函数).** 设  $f$  为一函数, 其定义域为  $D_f$ , 值域为  $I_f$ , 如果存在一函数  $g$ , 其定义域和值域分别为  $I_g$ ,  $D_g$ , 并对每一  $x \in D_f$  有:  $g(f(x)) = x$ , 则称  $g$  为  $f$  的反函数, 记为  $f^{-1}$ .

**例 1.1.8.** 已知  $g$  是  $f$  的反函数, 则  $f(2x)$  的反函数为

$$\text{A. } y = \frac{1}{2}g(x) \quad \text{B. } y = 2g(x) \quad \text{C. } y = \frac{1}{2}g(2x) \quad \text{D. } y = 2g(2x)$$

令  $y = f(2x)$ , 反解出  $x : x = \frac{1}{2}g(y)$ , 交换  $x$  与  $y$  的位置, 于是  $y = \frac{1}{2}g(x)$ , 选 A.

**例 1.1.9.** 求  $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{1 + x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1 + x^2}}$  的反函数表达式.

令  $y_1 = \sqrt[3]{x + \sqrt{1 + x^2}}$ ,  $y_2 = \sqrt[3]{x - \sqrt{1 + x^2}}$ , 那么  $y = y_1 + y_2$ , 又因为

$$y_1^3 + y_2^3 = (y_1 + y_2)(y_1^2 - y_1 y_2 + y_2^2) = (y_1 + y_2)[(y_1 + y_2)^2 - 3y_1 y_2]$$

其中  $y_1^3 + y_2^3 = x + \sqrt{1 + x^2} + x - \sqrt{1 + x^2} = 2x$ ,  $y_1 y_2 = \sqrt[3]{x^2 - 1 - x^2} = -1$ , 因此

$$2x = y(y^2 + 3) \Rightarrow x = \frac{y(y^2 + 3)}{2}.$$

**例 1.1.10.** 设  $f(x) = 2023x^{2023} + x + 1$ ,  $f^{-1}(x)$  是  $f(x)$  的反函数, 计算极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(2023x) - f^{-1}(x)}{\sqrt[2023]{x}}.$$

设  $g(x) = f^{-1}(x)$ , 由定义 1.1.8, 得  $f(g(x)) = x$ , 于是

$$x = 2023g^{2023}(x) + g(x) + 1$$

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{\sqrt[2023]{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{\sqrt[2023]{2023x^{2023} + g(x) + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[2023]{2023 + \frac{1}{g^{2022}(x)} + \frac{1}{g^{2023}(x)}}} = \frac{1}{\sqrt[2023]{2023}}$$

进而有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(2023x)}{\sqrt[2023]{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(2023x)}{\sqrt[2023]{2023x}} \cdot \frac{\sqrt[2023]{2023x}}{\sqrt[2023]{x}} = \frac{\sqrt[2023]{2023}}{\sqrt[2023]{2023}} = 1$$

故原极限为  $1 - \frac{1}{\sqrt[2023]{2023}}$ .

### 1.1.3 函数的连续性及间断点的类型

#### 连续函数

**定义 1.1.9 (函数连续).** 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 则称函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续, 若函数  $f(x)$  在区间  $I$  内每一点都连续, 则称函数  $f(x)$  在区间  $I$  内连续.

**定义 1.1.10 (单侧连续).** 若  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ , 则称函数  $f(x)$  在  $x_0$  处左连续; 若  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ , 则称函数  $f(x)$  在  $x_0$  处右连续.

**定理 1.1.4 (函数连续的充要条件).**  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续等价于  $f(x)$  在点  $x_0$  处既左连续又右连续.

**例 1.1.11.** 设连续函数  $f(x)$  满足方程  $f(x) - \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) = x^2$ , 求  $f(x)$  的表达式.

由已知条件, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) + x^2 \\ f\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2^2}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ &\vdots \\ f\left(\frac{x}{2^n}\right) &= \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + \left(\frac{x}{2^n}\right)^2 \end{aligned}$$

将上面等式从后往前依次代入, 得

$$f(x) = \frac{1}{2^{n+1}}f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^n}\left(\frac{x}{2^n}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2 = \frac{1}{2^{n+1}}f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + x^2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{3k}}$$

取  $n \rightarrow \infty$ , 由  $f$  的连续性及  $f(0) = 0$ , 可得

$$f(x) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3k}} = x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{8^n}}{\frac{7}{8}} = \frac{8}{7}x^2.$$

#### 第一类间断点

**定义 1.1.11 (可去间断点).** 如果不连续点  $x_0$  两侧函数的极限存在且相等, 无论在  $x_0$  处是否定义 (若有定义, 则函数值不是在这一点的左右极限), 这类间断点叫可去间断点 (或可移间断点), 这类函数通过补充定义

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

后可变为连续函数.

**定义 1.1.12 (跳跃间断点).** 如果不连续点  $x_0$  两侧函数的极限存在但不相等, 称函数在这些点是跳跃间断点.

## 第二类间断点

所有不是第一类间断点的类型，都是第二类间断点.

**定义 1.1.13 (无穷间断点).** 函数在某点的左右极限至少有一个是无穷，这样的间断点就是无穷间断点，由此可知函数在这个间断点的某个邻域中无界. 无穷间断点的一个重要特性是它是必不可积的.

**定义 1.1.14 (振荡间断点).** 对于一个函数，当自变量趋于某一点时，函数值在两个常数间变动无限多次，这时函数在这一点处不存在有限极限也不是无穷. 这样的间断点是振荡间断点，由此可知函数在这个间断点的某个邻域中有界. 振荡间断点的一个重要特性是它可能是可积的.

**例 1.1.12.** 设  $f(x) = \frac{(1 - 2^{\frac{1}{x-1}})e^{\frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{2}{x-1}}} \cdot \arctan \frac{x+1}{x-1}$ ，则下列关于  $f(x)$  间断点的描述正确的是

- A.  $f(x)$  有一个可去间断点，一个跳跃间断点，一个第二类间断点
- B.  $f(x)$  有两个可去间断点，一个第二类间断点
- C.  $f(x)$  有两个跳跃间断点，一个第二类间断点
- D.  $f(x)$  有一个跳跃间断点，两个第二类间断点

因为  $x \neq -1, 0, 1$ ，下求各不连续点的左右极限值，

$$f(-1^-) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ \delta > 0}} f(x) = \frac{(1 - 2^{-\frac{1}{2}})e^{-1}}{1 + 2^{-1}} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad f(-1^+) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ \delta > 0}} f(x) = 0$$

则  $x = -1$  为  $f$  的跳跃间断点；

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} f(x) = 0, \quad f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} f(x) = +\infty$$

则  $x = 0$  为  $f$  的第二类间断点；

$$f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ \delta > 0}} f(x) = e \cdot \arctan \frac{1}{2}, \quad f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ \delta > 0}} f(x) = 0$$

则  $x = 1$  为  $f$  的跳跃间断点，故选 C.

## 1.1.4 渐近线方程

**定义 1.1.15 (铅直渐近线).** 若  $\lim_{x \rightarrow \varepsilon^-} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow \varepsilon^+} f(x)$  至少有一个为无穷大，则称  $x = \varepsilon$  为曲线  $y = f(x)$  的铅直渐近线.

**定义 1.1.16 (水平渐近线).** 若  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$  或  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ，其中  $b$  为常数，则称  $y = b$  为曲线  $y = f(x)$  的水平渐近线.

**定义 1.1.17 (斜渐近线).** 若  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k$  存在且不为零，同时  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx] = b$  也存在（或  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$  存在且不为零，同时  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b$  存在），则称  $y = kx + b$  为曲线  $y = f(x)$  斜渐近线.

**例 1.1.13.** 求下列曲线的全部渐近线.

$$\left| \begin{array}{l} (1) y = \sqrt{4x^2 + x} \ln \left( 2 + \frac{1}{x} \right). \\ (2) y = e^{x-2} \arctan \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x+2)}. \\ (3) y = \frac{x^3}{(x-1)^2} \cos(2 \arctan x). \\ (4) y = (2x+1) \arctan x + \frac{\arctan \frac{1}{x^2-1}}{x^2+x-2}. \\ (5) y^3 = x(x^2 - 2y). \\ (6) x^3 - y^3 = 6xy. \end{array} \right.$$

(1) 由  $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} y = -\infty$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = 0$ , 所以曲线存在一条铅直渐近线  $x = -\frac{1}{2}$ , 又

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x}}{x} \ln \left( 2 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{4 + \frac{1}{x}} \ln \left( 2 + \frac{1}{x} \right) = 2 \ln 2 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{4x^2 + x} \ln \left( 2 + \frac{1}{x} \right) - 2 \ln 2 x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{4x^2 + x} \ln 2 - 2 \ln 2 \cdot x + \sqrt{4x^2 + x} \ln \left( 2 + \frac{1}{x} \right) - \sqrt{4x^2 + x} \ln 2 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x}{\sqrt{4x^2 + x} + 2x} \cdot \ln 2 + |x| \sqrt{4 + \frac{1}{x}} \ln \left( 1 + \frac{1}{2x} \right) \right] = \frac{1}{4} \ln 2 + 1 \end{aligned}$$

故存在一条斜渐近线方程  $y = 2 \ln 2 x + \frac{1}{4} \ln 2 + 1$ , 同理当  $x \rightarrow -\infty$  时, 也存在一条斜渐近线方程

$$y = -2 \ln 2 x - \frac{1}{4} \ln 2 - 1.$$

(2) 由  $\lim_{x \rightarrow -2^-} y = \frac{\pi}{2e^4}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\frac{\pi}{2e^4}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\frac{\pi e}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \frac{\pi e}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$ , 故  $y$  的铅直渐近线为  $x = 0$ , 因为

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x-2} \arctan \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{\pi}{4}$$

故  $y$  的水平渐近线为  $y = \frac{\pi}{4}$ , 又因为

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} \arctan \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x+2)} = 0$$

故曲线共存在两条渐近线, 分别为  $x = 0$  与  $y = \frac{\pi}{4}$ .

(3) 显然  $x = 1$  为该曲线的铅直渐近线, 下求斜渐近线,

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} \cos(2 \arctan x) = 1 \cdot -1 = -1 \\ b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 \cos(2 \arctan x) + x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^3 + x^3 - 2x^2 + x}{(x-1)^2} = -2 \end{aligned}$$

所以斜渐近线方程为  $y = -x - 2$ .

(4) 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , 所以曲线  $y = f(x)$  没有水平渐近线; 由  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \infty$ , 得  $x = -2$  为曲线  $y = f(x)$  的铅直渐近线; 由

$$f(-1^-) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0, f(-1^+) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

得  $x = -1$  不是该曲线的铅直渐近线; 又由

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3\pi}{4} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan \frac{1}{x^2-1}}{x^2+x-2} = \infty$$

得  $x = 1$  是该曲线的铅直渐近线; 下求斜渐近线,

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2 + \frac{1}{x} \right) \arctan x + \frac{\arctan \frac{1}{x^2-1}}{x^3+x^2-2x} = -\pi$$

那么

$$\begin{aligned} b_1 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ (2x+1) \arctan x + \frac{\arctan \frac{1}{x^2-1}}{x^2+x-2} + \pi x \right] \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( \arctan x + \frac{\pi}{2} \right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x^2-1}}{x^2+x-2} = -\frac{\pi}{2} - 2 \end{aligned}$$

那么一条斜渐近线为  $y = -\pi x - \frac{\pi}{2} - 2$ , 同理可求解另一条斜渐近线为  $y = \pi x + \frac{\pi}{2} - 2$ .

(5) 令  $k = \frac{y}{x}$ , 有

$$k^3 \cdot x^3 = x(x^2 - 2kx) \Rightarrow k^3 = 1 - \frac{2k}{x}$$

两边取极限有

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} k^3 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 1 - \frac{2k}{x} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} k^3 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 1 - 2k \cdot \frac{1}{x} \right) \Rightarrow k = 1$$

令  $b = y - kx = y - x$ , 那么

$$(x+b)^3 = x(x^2 - 2x + 2b) \Rightarrow \frac{b^3}{x^2} + 3b + \frac{3b^2}{x} = -2\frac{b}{x} - 2$$

两边取极限有

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{b^3}{x^2} + 3b + \frac{3b^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( -2\frac{b}{x} - 2 \right)$$

解得  $b = -\frac{2}{3}$ , 于是斜渐近线方程为  $y = x - \frac{2}{3}$ .

(6) 令  $y = tx$ , 代入原方程得  $\begin{cases} x = \frac{6t}{1-t^3} \\ y = \frac{6t^2}{1-t^3} \end{cases}$  当  $x \rightarrow \infty$  时,  $\frac{6t}{1-t^3} \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow 1$ , 并且此时  $y \rightarrow \infty$ , 因此

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{6t^2}{1-t^3} \cdot \frac{1-t^3}{6t} = \lim_{t \rightarrow 1} t = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{6t^2 - 6t}{1-t^3} = 6 \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = -2$$

因此该曲线的斜渐近线为  $y = x - 2$ .

**定理 1.1.5 (割线定理).** (1) 设  $p > 0$ ,  $y = f(x)$  在  $[p, +\infty)$  上有界, 若有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = k,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+1)f(x) - xf(x+1)] = b$$

则直线  $y = kx + b$  是曲线  $y = f(x)$  的渐近线.

(2) 设  $q < 0$ ,  $y = f(x)$  在  $(-\infty, q]$  上有界, 若有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = k,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+1)f(x) - xf(x+1)] = b,$$

则直线  $y = kx + b$  是曲线  $y = f(x)$  的渐近线.

**例 1.1.14 (2023 数一).** 求曲线  $y = x \ln \left( e + \frac{1}{x-1} \right)$  的斜渐近线方程.

法一：渐近线的斜率为

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( e + \frac{1}{x-1} \right) = 1$$

渐近线的截距为

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x \ln \left( e + \frac{1}{x-1} \right) - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left[ 1 + \frac{1}{e(x-1)} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e(x-1)} = \frac{1}{e}$$

故所求斜渐近线方程为  $y = x + \frac{1}{e}$ .

法二：改写函数表达式为

$$y = x \ln e \left[ 1 + \frac{1}{e(x-1)} \right] = x + x \ln \left[ 1 + \frac{1}{e(x-1)} \right] = x + \frac{x}{e(x-1)} = x + \frac{1}{e} + o(1) \quad (x \rightarrow \infty)$$

所以斜渐近线方程为  $y = x + \frac{1}{e}$ .

法三：利用割线定理，

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+1) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ (x+1) \ln \left( e + \frac{1}{x} \right) - x \ln \left( e + \frac{1}{x-1} \right) \right] = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{e+x^{-1}}{e+(x-1)^{-1}} \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{e} + \frac{1}{x-1}} = 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e(x-1)+1} = 1 \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} [(x+1)f(x) - xf(x+1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ (x+1)x \ln \left( e + \frac{1}{x-1} \right) - x(x+1) \ln \left( e + \frac{1}{x} \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x(x+1) \ln \frac{e + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}}{e + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x(x+1) \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{e} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{ex+1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

因此该曲线的斜渐近线为  $y = x + \frac{1}{e}$ .

## 1.2 极限的概念、性质及存在准则

极限是微积分中非常重要的概念，它描述了函数在某一点或无穷远处的趋势或取值。极限的性质包括唯一性、局部性、保号性、保序性和四则运算法则等。极限的存在准则有夹逼准则、单调有界准则等。

### 1.2.1 数列、函数极限的定义

#### 数列的极限定义

**定义 1.2.1 (数列极限 A).** 设  $\{a_n\}$  是一数列，如果存在常数  $a$ ，当  $n$  无限增大时， $a_n$  无限接近（或趋近）于  $a$ ，则称数列  $\{a_n\}$  收敛， $a$  称为数列  $\{a_n\}$  的极限，或称数列  $\{a_n\}$  收敛于  $a$ ，记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ，或  $a_n \rightarrow a$ ， $n \rightarrow \infty$ 。当  $n \rightarrow \infty$  时，若不存在这样的常数  $a$ ，则称数列  $\{a_n\}$  发散或不收敛，也可以说极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  不存在。

**定义 1.2.2 (数列极限 B).** 设  $\{a_n\}$  为一数列， $a$  为一个常数，若对任意给定的  $\varepsilon > 0$ ，都存在一个正整数  $N$ ，使得当  $n > N$  时，有  $|a_n - a| < \varepsilon$ ，则称  $a$  为数列  $\{a_n\}$  的极限，记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 。

**例 1.2.1 (2003 数一).** 设  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  均为非负整数，且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$ ，则必有

A.  $a_n < b_n$  对任意  $n$  成立B.  $b_n < c_n$  对任意  $n$  成立C. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$  不存在D. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$  不存在

取  $a_n = \frac{2}{n}$ ,  $b_n = 1$ ,  $c_n = \frac{n}{2}$ , 则可排除选项 A、B、C, 因此选 D.

**例 1.2.2 (2014 数三).** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \neq 0$ , 则当  $n$  充分大时有

A.  $|a_n| > \frac{|a|}{2}$

B.  $|a_n| < \frac{|a|}{2}$

C.  $a_n > a - \frac{1}{n}$

D.  $a_n > a + \frac{1}{n}$

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$ , 所以  $\forall \varepsilon > 0$ , 都存在一个正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < \varepsilon$ , 即  $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ , 则  $|a| - \varepsilon < |a_n| \leq |a| + \varepsilon$ , 取  $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ , 得  $|a_n| > \frac{|a|}{2}$ , 选 A.

### 函数的极限定义

**定义 1.2.3 (函数的极限).** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的邻域内 (点  $x_0$  可除外) 有定义,  $A$  为一个常数, 若对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 都存在一个正数  $\delta$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 则称  $A$  为函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限, 记作  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

**定义 1.2.4 (左右极限).** 若对于满足  $0 < x_0 - x < \delta$  ( $0 < x - x_0 < \delta$ ) 的一切  $x$  所对应的  $f(x)$  都不满足  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 则称  $A$  为函数  $f(x)$  当  $x$  自  $x_0$  左 (右) 侧趋于  $x_0$  时的极限, 即左 (右) 极限, 分别记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) = A \quad (\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0) = A)$$

类似地, 可以给出当  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$  时,  $f(x)$  的极限为  $A$  的定义.

**例 1.2.3.** 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  连续, 则 " $\exists x_n \in [a, +\infty)$  有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$ " 是  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  无界的

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充分必要条件

D. 既非充分也非必要条件

题目中的两个条件分别为

(i)  $\exists x_n \in [a, +\infty)$  有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$ ;

(ii)  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  无界,

讨论充分性, 即 (i)  $\rightarrow$  (ii)

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$  可知对于  $\forall M > 0$ ,  $\exists N \in [a, +\infty)$  使得  $|f(x_N)| > M$ , 故  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  无界;

讨论必要性, 即 (ii)  $\rightarrow$  (i)

因为  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  无界, 则对  $\forall M_1 > 0$ ,  $\exists X_1 \in [a, +\infty)$ , 使得  $|f(X_1)| > M_1$ , 且  $\exists X_2 \in [X_1, +\infty)$ , 使得  $|f(X_2)| > |f(X_1)|$ , 同理可取  $x_1, \exists x_2 \in [x_1, +\infty)$ , 使得  $|f(x_2)| > |f(x_1)|$ ;  $\exists x_3 \in [x_2, +\infty)$ , 使得  $|f(x_3)| > |f(x_2)|$ , 由此递推, 得存在严格  $\nearrow$  的数列  $\{x_n\}$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , 且存在单调的  $|f(x_n)|$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n)| = +\infty$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$ .

## 1.2.2 数列与其子列极限之间的关系

**定理 1.2.1 (子列极限定理).**  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+2} = a.$

**例 1.2.4 (2015 数三).** 设  $\{x_n\}$  是数列, 下列命题中不正确的是

A. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$

B. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

C. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$

D. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

解  $x_{3n} = 1 + \frac{1}{3n}$ ,  $x_{3n+1} = 1 + \frac{1}{3n+1}$ ,  $x_{3n+2} = 2 + \frac{1}{3n+2}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = 1$ , 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+2} = 2$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 1$ , 故选 D.

**例 1.2.5.** 设  $x_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$ , 证明: 数列  $\{x_n\}$  发散.

证 考察子列

$$x_{2n} = \frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty), \quad x_{2n+1} = -\frac{2n+2}{2n+1} = -1 - \frac{1}{2n+1} \rightarrow -1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

由定理 1.2.1 可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  不存在, 即得证数列  $\{x_n\}$  发散.

**例 1.2.6.** 设  $x_n = \frac{1}{n} \cdot |1 - 2 + 3 - \cdots + (-1)^{n+1} n|$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

讨论  $n$  的奇偶性,

$$\begin{aligned} x_{2n} &= \frac{1}{2n} \cdot |1 - 2 + 3 - \cdots + (2n-1) + (2n)| = \frac{1}{2n} \cdot |(1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)) - (2 + 4 + 6 + \cdots + 2n)| \\ &= \frac{1}{2n} \cdot |n^2 - (n^2 + n)| = \frac{1}{2} \\ x_{2n+1} &= \frac{1}{2n+1} \cdot |1 - 2 + 3 - \cdots - 2n + (2n+1)| = \frac{1}{2n+1} \cdot |(1 + 3 + \cdots + (2n+1)) - (2 + 4 + \cdots + 2n)| \\ &= \frac{1}{2n+1} \cdot |(n^2 + 2n + 1) - (n^2 + n)| = \frac{n+1}{2n+1} \end{aligned}$$

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \frac{1}{2}$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$ .

## 1.2.3 数列、函数极限的性质

### 数列极限的性质

**定理 1.2.2 (数列极限的唯一性).** 收敛数列的极限是唯一的, 即若数列  $\{a_n\}$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  和  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ , 则  $a = b$ .

**定理 1.2.3 (数列极限的有界性).** 设数列  $\{a_n\}$  收敛, 则数列  $\{a_n\}$  有界, 即存在常数  $M > 0$ , 使得  $|a_n| < M$  ( $\forall n \in N$ ).

**定理 1.2.4 (数列极限的保号性).** 设数列  $\{a_n\}$  收敛, 其极限为  $a$

- (1) 若有正整数  $N$ , 使得当  $n > N$ , 有  $a_n > 0$  (或  $< 0$ ), 则  $a \geq 0$  (或  $\leq 0$ ).
- (2) 若  $a > 0$  (或  $< 0$ ), 则有正整数  $N$ , 使得当  $n > N$ , 时, 有  $a_n > 0$  (或  $< 0$ ).

**例 1.2.7 (2017 数二).** 设数列  $\{x_n\}$  收敛, 则

- |   |  |
|---|--|
| A. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$      | B. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sqrt{ x_n }) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ |
| C. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + x_n^2) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ | D. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sin x_n) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$     |

因为数列  $\{x_n\}$  收敛, 故令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则有 A 知  $\sin a = 0 \not\Rightarrow a = 0$ , 同理 B、C 不正确, 而由 D 可知  $\sin a = -a \Rightarrow a = 0$ , 故选 D.

### 函数极限的性质

**定理 1.2.5 (函数极限的唯一性).** 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $A$  必唯一.

**定理 1.2.6 (函数极限的有界性).** 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $f(x)$  在点  $x_0$  的某一去心邻域内有界.

**定理 1.2.7 (函数极限的保号性).** 设  $f(x)$  在  $x_0$  的某去心邻域内均有  $f(x) \geq 0$  (或  $f(x) \leq 0$ ), 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $a \geq 0$  (或  $A \leq 0$ ).

**定理 1.2.8 (函数极限的充要条件).** (1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ .  
(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ .

### 证明函数 $f(x)$ 的极限不存在的方法

- (1) 若  $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0}$  不存在. 当  $x \rightarrow \infty$  时, 对含有  $a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 或  $\arctan x$  或  $\operatorname{arccot} x$  的函数极限, 一定要对  $x \rightarrow +\infty$  与  $x \rightarrow -\infty$  分别求极限, 若两者的极限值相等, 则  $x \rightarrow \infty$  时极限存在, 否则不存在.
- (2) 若存在数列  $\{x_n\} : x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  不存在; 或有两个数列  $\{x_n\}$  与  $\{y_n\}$ , 满足  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \neq x_0$ ),  $y_n \rightarrow y_0$  ( $y_n \neq y_0$ ) 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在.
- (3) 利用结论: 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  不存在, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$  不存在; 若又有  $A \neq 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$  不存在.

## 1.2.4 数列、函数极限的存在准则

### 数列极限的存在准则

**定理 1.2.9 (数列的夹逼准则).** 若  $\exists N$ , 使得当  $n > N$  时有  $y_n \leq x_n \leq z_n$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

**定理 1.2.10 (数列的单调有界准则).** 若数列  $\{x_n\}$  单调上升有上界 (或单调下降有下界), 即  $x_{n+1} \leq x_n$  (或  $x_{n+1} \geq x_n$ ) ( $n = 1, 2, \dots$ ), 并存在一个数  $M$  ( $m$ ) 使得对一切  $n$  有  $x_n \leq M$  (或  $x_n \geq m$ ), 则  $\{x_n\}$  收敛, 即存在一个数  $a$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 且有  $x_n \leq a$  (或  $x_n \geq a$ ) ( $n = 1, 2, \dots$ ).

**例 1.2.8 (2008 数一).** 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内单调有界,  $\{x_n\}$  为数列, 下列命题正确的是

- |                                      |                                      |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| A. 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛 | B. 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛 |
| C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛 | D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛 |

若  $\{x_n\}$  单调,  $f(x)$  单调有界, 则数列  $\{f(x_n)\}$  单调有界, 因此数列  $\{f(x_n)\}$  收敛, 故选 B.

### 函数极限的存在准则

**定理 1.2.11 (函数的夹逼准则).** 若  $\exists \delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时有  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

**例 1.2.9 (2000 数三).** 设对任意  $x$ , 总有  $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

- |           |             |          |          |
|-----------|-------------|----------|----------|
| A. 存在且等于零 | B. 存在但不一定为零 | C. 一定不存在 | D. 不一定存在 |
|-----------|-------------|----------|----------|

本题中所给条件比夹逼准则的条件弱, 事实上, 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = A$  (有限), 则必有  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ , 反之则不然, 因为当  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$  时, 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$  可以都不存在, 如  $g(x) = \varphi(x) = x$ .

- (1) 若取  $\varphi(x) = x - \frac{1}{x^2}$ ,  $f(x) = x$ ,  $g(x) = x + \frac{1}{x^2}$ , 显然有  $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ , 但  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  不存在, 则排除选项 A、B.
- (2) 若取  $\varphi(x) = f(x) = g(x) = 1$ , 满足题设条件, 但  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$  存在, 则排除选项 C, 故选 D.

## 1.3 计算极限值的若干方法

计算极限值的方法有很多种, 常用的方法包括: 利用等价代换和初等变形、利用夹逼准则、利用 L'Hospital 法则以及利用 Taylor 展开等.

### 1.3.1 利用等价代换和初等变形

#### 等价代换

当  $x \rightarrow 0$  时, 下表是常见的等价代换.

表 1.1: 常见的等价代换

|    |  |  |  |
|----|--|--|--|
|    | (1) $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1 + x)$ |  |  |
| 一阶 | (2) $\log_a(1 + x) \sim \frac{x}{\ln a}$   | (3) $a^x - 1 \sim x \ln a$               | (4) $(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$     |
|    | (5) $\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \sim x$   |  |  |
| 二阶 | (6) $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$   | (7) $x - \ln(1 + x) \sim \frac{1}{2}x^2$ | (8) $(1 + x)^x - 1 \sim x^2$               |
| 三阶 | (9) $x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3$  | (10) $\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3$    | (11) $\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$ |
|    | (12) $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$  | (13) $\arcsin x - x \sim \frac{1}{6}x^3$ |  |

**定理 1.3.1 (减法无穷小代换).** 若  $f \sim g$ , 则  $f - g \sim f(\ln f - \ln g)$ .

**例 1.3.1 (第一届数学竞赛初赛).** 设函数  $f(x), g(x)$  在  $x = 0$  的某一邻域  $U$  内有定义, 对  $\forall x \in U, f(x) \neq g(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = a > 0$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^g - g^f}{f - g}$ .

由定理 1.3.1 可易求得该极限值为  $a^a$ .

**例 1.3.2.** 求下列极限值.

|  |  |  |
|--|--|--|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$<br>(4) $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\tan^3 x - 3 \tan x}{\cos(x + \frac{\pi}{6})}.$<br>(7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[n]{\cos 2n\pi x}}{(x-1)(x^n-1)}.$<br>(10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\prod_{k=2}^n (1 - \sqrt[k]{\cos x})}{(1 - \cos x)^{n-1}}.$ | (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$<br>(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - \cos \frac{x}{2}}{\left( \sin x - \sin \frac{x}{2} \right) \ln(1+x)}.$<br>(8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt[n]{2} \left( 1 - \cos \frac{1}{n^2} \right)}{\sqrt[n^2+1]{n} - n}.$<br>(11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \prod_{k=1}^{n-1} \sqrt[k]{\cos kx}}{x^2}.$ | (3) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$ ( $m, n \in \mathbb{N}$ ).<br>(6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln \sin x - \sin x \ln x}{x^3 \ln x}.$<br>(9) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 - 9) \ln(4+x)}{\arctan_n^2(x+3)}.$<br>(12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{n!x^n - \prod_{k=1}^n \sin kx}{x^{n+2}}.$ |
|--|--|--|

$$(1) \text{ 原式} = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos x} \ln \frac{\sin x}{x} = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos x} \cdot \frac{\sin x - x}{x} = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{\frac{1}{2}x^3} = e^{-\frac{1}{3}}.$$

$$(2) \text{ 原式} = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\arcsin x}{x} = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\arcsin x - x}{x} = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} = e^{\frac{1}{6}}.$$

$$(3) \text{ 原式} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \lim \frac{\sin m(t+\pi)}{\sin n(t+\pi)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(-1)^n \sin mt}{(-1)^n \sin nt} = (-1)^{m-n} \frac{m}{n}.$$

$$(4) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\tan x \cdot \frac{\sin^2 x - 3 \cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\tan x (\sin x + \sqrt{3} \cos x)}{-\frac{1}{2} \cos x^2} = -24.$$

$$(5) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1 + \left( 1 - \cos \frac{x}{2} \right)}{x \cdot \sin \frac{x}{2} \left( 2 \cos \frac{x}{2} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{\frac{x^2}{2}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

$$(6) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x - \sin x \ln x}{x^3 \ln x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln \sin x - x \ln x}{x^3 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2 \ln x} = \frac{1}{6}.$$

$$(7) \text{ 原式} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{n} \ln \cos 2n\pi x}{(x-1) \ln x} \xrightarrow[t=x-1]{t \rightarrow 0} -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n} (\cos(2n\pi t) - 1)}{t \ln(t+1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} (2n\pi t)^2}{t^2} = 2n\pi^2.$$

$$(8) \text{ 原式} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\sqrt[2]{2}=1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^4} \right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{2n^2}} = 1.$$

$$(9) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-3)(x+3)}{(x+3)^2} = -6.$$

$$(10) \text{ 由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[k]{\cos x}} = 1, \text{ 即 } 1 - \sqrt[k]{\cos x} \sim -\ln \sqrt[k]{\cos x} = -\frac{1}{k} \ln \cos x \sim \frac{1}{k} (1 - \cos x) (x \rightarrow 0), \text{ 故}$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\prod_{k=2}^n \left[ \frac{1}{k} (1 - \cos x) \right]}{(1 - \cos x)^{n-1}} = \frac{1}{n!}.$$

$$(11) \text{ 由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\prod_{k=1}^n \sqrt[k]{\cos kx}} = 1, \text{ 故 } 1 - \prod_{k=1}^n \sqrt[k]{\cos kx} \sim -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \ln \cos kx \sim \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \ln (1 - \cos kx) (x \rightarrow 0),$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (1 - \cos kx)}{x^2} = \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2} (kx)^2}{x^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{4}.$$

$$(12) \text{ 法一: 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n!x^n}{\prod_{k=1}^n \sin kx} = 1, \text{ 所以 } n!x^n \sim \prod_{k=1}^n \sin kx (x \rightarrow 0).$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n!x^n \left[ \ln(n!x^n) - \ln \prod_{k=1}^n \sin kx \right]}{x^{n+2}} = n! \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^n (\ln kx - \ln \sin kx)}{x^2} = n! \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{kx}{\sin kx}}{x^2}$$

$$= n! \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{kx}{\sin kx} - 1}{x^2} = n! \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx - \sin kx}{kx^3} = \frac{n!}{6} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(2n+1)}{36} (n+1)!.$$

$$\text{法二: 原式} = n! \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\prod_{k=1}^n \sin kx}{x^2} = n! \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \prod_{k=1}^n \frac{\sin kx}{kx}}{x^2}, \text{ 记 } f_n(x) = \frac{1 - \prod_{k=1}^n \frac{\sin kx}{kx}}{x^2}, \text{ 则有}$$

$$f_n(x) = f_1(x) + \sum_{k=2}^n (f_k(x) - f_{k-1}(x))$$

两边取极限有,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=2}^n (f_k(x) - f_{k-1}(x)) = \frac{1}{6} + \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=2}^n \frac{\left( \prod_{i=1}^{k-1} - \prod_{i=1}^k \right) \frac{\sin ix}{ix}}{x^2} \\ &= \frac{1}{6} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\prod_{i=1}^{k-1} \frac{\sin ix}{ix} \left( 1 - \frac{\sin kx}{kx} \right)}{x^2} = \frac{1}{6} + \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=2}^n \frac{kx - \sin kx}{kx^3} = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \Rightarrow \text{原式} &= \frac{n(2n+1)}{36} (n+1)! \end{aligned}$$

## 初等变形

常见的裂项公式:

表 1.2: 常见的裂项公式

|   |   |
|---|---|
| (1) $\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right)$ | (2) $\frac{1}{(n-k)n(n+k)} = \frac{1}{2k^2} \left[ \left( \frac{1}{n-k} - \frac{1}{n} \right) - \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right) \right]$ |
| (3) $\frac{1}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}} = \frac{1}{k} (\sqrt{n+k} - \sqrt{n})$     | (4) $\frac{2^n}{(2^n+k)(2^{n+1}+k)} = \frac{1}{2^n+k} - \frac{1}{2^{n+1}+k}$  |

**定理 1.3.2.** 若  $B \sim \tilde{B}$ , 且  $\exists a, b$  使得  $\lim A - \tilde{B} = a$ ,  $\lim \tilde{B} - B = b$ , 则  $\lim A - B = a + b$ .

**例 1.3.3.** 求下列极限值.

|   |   |   |
|---|---|---|
| (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$ | (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{\tan x - \sin x}}{\sqrt[3]{1+x^3} - \sqrt[3]{1-x^3}}.$ | (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}.$                          |
| (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2+n}\right).$         | (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \pi \sqrt{1+4n^2}\right)^n.$                            | (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-n}}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n C_n^k \cdot k^2.$ |

(1)  $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$  进行变形. 原式  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$ .

(2) 由  $\sqrt{\tan x - \sin x} = \sqrt{\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}} \sim \sqrt{\frac{x^3}{2}}$ , 知  $1 - \cos \sqrt{\tan x - \sin x} \sim \frac{x^3}{4}$ ,  
 $\sqrt[3]{1+x^3} - \sqrt[3]{1-x^3} = \frac{2x^3}{\left(\sqrt[3]{1+x^3}\right)^2 + \sqrt[3]{1+x^3} \cdot \sqrt[3]{1-x^3} + \left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2} \sim \frac{2x^3}{3}$ , 故原式  $= \frac{3}{8}$ .

(3) 原式  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{n}{2}} = e^{n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n}{2}\right) \ln \left(1 + \tan^2 \frac{x}{\sqrt{n}}\right)} = e^{n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n}{2}\right) \cdot \tan^2 \frac{x}{\sqrt{n}}} = e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

(4)  $\sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2+n}\right) = \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2+n} - n\pi\right) = \sin^2 \frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n} = \sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$ .

由于初等函数在有定义的地方皆连续, 故

$$\text{原极限} = \sin^2 \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \right) = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1.$$

(5) 由  $\sin \pi \sqrt{1+4n^2} = \sin \pi \left(\sqrt{1+4n^2} - 2n\right) = \sin \frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}$ .

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)^n = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \sin \frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right) \\ &= \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n} = e^{\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

(6) 因为  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot x^k$ , 两边关于  $x$  求导, 得  $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n C_n^k \cdot kx^{k-1}$ , 两边再同时乘以  $x$ , 并再关于  $x$  求导, 得  $n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^n C_n^k \cdot k^2 x^{k-1}$ , 令  $x=1$ , 得

$$n \cdot 2^{n-1} + n(n+1) \cdot 2^{n-2} = n(n+1) \cdot 2^{n-2} = \sum_{k=1}^n C_n^k k^2$$

于是有原式  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-n}}{n(n+1)} \cdot n(n+1) \cdot 2^{n-2} = \frac{1}{4}$ .

**例 1.3.4.** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , 设

$$\left| \begin{array}{l} (1) x_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n}. \\ (2) x_n = \frac{3}{2} \frac{5}{4} \frac{17}{16} \cdots \frac{2^{2^n} + 1}{2^{2^n}}. \\ (3) x_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1^3 + 2^3 + \cdots + i^3}}. \\ (4) x_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(i+2)}. \\ (5) x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^3 + 6k^2 + 11k + 5}{(k+3)!}. \end{array} \right.$$

$$(1) \text{ 乘 } \frac{2^n \sin \frac{x}{2^n}}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}, x_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2^3} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{2^n \sin \frac{x}{2^n}}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \cdot \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}.$$

(2) 乘  $\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}$ , 再对分子反复应用公式  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ .

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2^{2^0}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{2^1}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{2^2}}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^{2^k}}\right) \rightarrow 2 (n \rightarrow \infty)$$

(3) 因为  $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2$ ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt[3]{\sum_{j=1}^i j^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\sum_{j=1}^i j\right)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\frac{1}{2}i(i+1)} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 2. \end{aligned}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{i(i+1)} - \frac{1}{(i+1)(i+2)} \right] = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \frac{1}{4}.$$

(5) 由于  $k^3 + 6k^2 + 11k + 5 = (k+1)(k+2)(k+3) - 1$ , 所以

$$x_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+3)!} \right) = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+3)!} \rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3} (n \rightarrow \infty)$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{5}{3}$ .

**例 1.3.5.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n \frac{k+1 - \sqrt{k^2+k}}{\sqrt{k}(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1})}$ .

$$\text{由 } \prod_{k=1}^n \frac{k+1 - \sqrt{k^2+k}}{\sqrt{k}(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1})} = \prod_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{\sqrt{k}(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1})} = \prod_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}}, \text{ 因此}$$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdots \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{4} - \sqrt{3}} \cdots \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} = (\sqrt{2} - 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{n} = 2\sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$

**例 1.3.6.** 设  $(1 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \cdot \sqrt{3}$  (其中  $a_n, b_n$  均为正整数), 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ .

由二项式定理,

$$(1 + \sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (\sqrt{3})^k = \sum_{\substack{2k \leq n \\ k \in \mathbb{N}}} C_n^k (\sqrt{3})^k + \sum_{\substack{2k+1 \leq n \\ k \in \mathbb{N}}} C_n^k (\sqrt{3})^k = a_n + b_n \cdot \sqrt{3}$$

则  $(1 - \sqrt{3})^n = a_n - b_n \cdot \sqrt{3}$ , 联立两式解得

$$\begin{cases} a_n = \frac{(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n}{2} \\ b_n = \frac{(1 + \sqrt{3})^n - (1 - \sqrt{3})^n}{2} \end{cases}$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n}{(1 + \sqrt{3})^n - (1 - \sqrt{3})^n} = \sqrt{3}.$$

### 1.3.2 利用已知极限

**例 1.3.7 (西安电子科技大学).** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$  ( $a, b \geq 0$ ).

法一:  $n \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{a^{\frac{1}{n}-1}}{\frac{1}{n}} + \frac{b^{\frac{1}{n}-1}}{\frac{1}{n}} \right) \rightarrow \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 故

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1}} \right\}^{n \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1 \right)} \\ &= e^{\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)} = e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

法二: 原式  $\xrightarrow{x=\frac{1}{n}} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{a^x + b^x}{2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x}} = e^{\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)} = \sqrt{ab}$ .

**推论 1.3.1.**  $a_i, p_i > 0, i = 1, 2, \dots, m, p = \sum_{i=1}^m p_i$ , 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sqrt[n]{a_i} \right)^n = \sqrt[m]{\prod_{i=1}^m a_i}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{p} \sum_{i=1}^m p_i \cdot \sqrt[n]{a_i} \right)^n = \sqrt[p]{\prod_{i=1}^m a_i^{p_i}}.$$

**例 1.3.8.** 求下列极限值.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}}{3} \right)^n. \quad | \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2 + \sqrt[3]{64}}{3} \right)^{2n-1}. \quad | \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a+b+c} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

(1) 原式  $= \sqrt[3]{2 \times 3 \times 5} = \sqrt[3]{30}$ .

(2) 法一: 原式  $\xrightarrow{2n-1=t} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1+1+\sqrt[3]{64}}{3} \right)^{\frac{t}{2}} = (\sqrt[3]{64})^2 = 16$ .

法二: 原式  $= \exp \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{x} - 1 \right) \ln \left( \frac{2+64^x}{3} \right) = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-x)(64^x-1)}{3} \xrightarrow{L'} e^{\frac{2}{3} \ln 64} = 16$ .

<sup>1</sup>该标记表示经 L'Hospital 法则得到的计算结果, 关于 L'Hospital 法则可见定理 1.3.6.

$$(3) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a \cdot a^x + b \cdot b^x + c \cdot c^x}{a + b + c} \right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[a+b+c]{a^a b^b c^c}.$$

**例 1.3.9.** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$ .

为解决该问题, 先介绍并证明一个重要的等式,

**引理 1.3.1.**  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = \gamma + o(1)$ , 其中  $\gamma = 0.577215 \dots$  (称为 Euler 常数).

$$|x_n - x_{n-1}| = \left| \frac{1}{n} - [\ln n - \ln(n-1)] \right|, n \geq 2 \text{ 由 Lagrange 中值定理}$$

$$\ln n - \ln(n-1) = \frac{1}{\xi_n} (n-1 < \xi_n < n)$$

$$|x_n - x_{n-1}| = \frac{n - \xi_n}{n \cdot \xi_n} < \frac{1}{(n-1)^2}, \text{ 而 } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} \text{ 收敛, 故 } \sum_{n=2}^{\infty} |x_n - x_{n-1}| \text{ 收敛, } x_n \text{ 也收敛.}$$

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} [(\ln 2n + \gamma + \alpha_{2n}) - (\ln n + \gamma + \alpha_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln 2 + \alpha_{2n} - \alpha_n) = \ln 2$$

其中  $\gamma$  为 Euler 常数.

**推论 1.3.2.** 已知  $m$  为正整数, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{mn+1} + \frac{1}{mn+2} + \cdots + \frac{1}{(m+1)n} \right] = \ln \frac{m+1}{m}.$$

$$\text{证 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{mn+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{m + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{m+x} = \ln \frac{m+1}{m}.$$

**例 1.3.10.** 试借助 Stirling 公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n + \frac{\theta_n}{12n}}, 0 \leq \theta_n \leq 1$$

$$\text{求极限 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \prod_{i=1}^n \frac{e^{1-\frac{1}{i}}}{\left(1 + \frac{1}{i}\right)^i}.$$

由引理 1.3.1, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \frac{e^{n - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}}{\prod_{i=1}^n \left( \frac{i+1}{i} \right)^i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cdot n! e^{n - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}}{(n+1)^n e^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi n} e^{\frac{\theta_n}{12n}}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n e^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}} = \sqrt{2\pi} \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \ln n + \frac{\theta_n}{12n} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) = \sqrt{2\pi} e^{-(1+\gamma)} \end{aligned}$$

其中  $\gamma$  为 Euler 常数.

### 1.3.3 利用函数与极限的关系

**定理 1.3.3 (极限值与函数式的转换).**  $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \alpha(x) \rightarrow 0$ .

**定理 1.3.4 (分式极限的关系).** 设  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A, A$  为有限常数, 则

(1) 当  $g(x) \rightarrow 0$  时, 必有  $f(x) \rightarrow 0$ ;

(2) 当  $f(x) \rightarrow 0$ , 且  $A \neq 0$  时, 必有  $g(x) \rightarrow 0$ .

**例 1.3.11.** 设函数  $f(x)$  在  $x = 0$  的某个邻域内有连续导数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x^2} + \frac{f(x)}{x} \right) = 2$ , 求  $f(0)'$ .

由已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x^2} + \frac{f(x)}{x} \right) = 2$ , 得  $f(x) = 2x - \frac{\sin x}{x} + x \cdot \alpha(x)$ ,  $\alpha(x) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow 0$ ), 则有

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2x - \frac{\sin x}{x} + x \cdot \alpha(x) \right) = -1$$

$$f(0)' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2 + \frac{x - \sin x}{x^2} + \alpha(x) \right) = 2.$$

**例 1.3.12.** (运用两种方法) 根据假设求极限.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}. \\ (3) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( 1 + \frac{f(x)}{\sin 2x} \right)}{3^x - 1} = 5, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}. \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x) + xf(x)}{\sin x^2} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + f(x)}{x}. \\ (4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( 1 + \frac{3f(x)}{1 - \cos x} \right)}{e^x - 1} = 9, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\tan x - \sin x}. \end{array} \right.$$

(1) 法一: 由已知得  $f(x) = \frac{-\sin 6x + x^3 \cdot \alpha(x)}{x}$ ,  $\alpha(x) \rightarrow 0$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x + x^3 \cdot \alpha(x)}{x^3} = \frac{\frac{1}{6}(6x)^3}{x^3} = 36.$$

$$\text{法二: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} + \frac{6x - \sin 6x}{x^3} \right) = 36.$$

(2) 法一: 由已知得  $f(x) = \frac{2 \sin x^2 + \alpha(x) \cdot \sin x^2 - \ln(1 + 2x)}{x}$ ,  $\alpha(x) \rightarrow 0$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 2 \sin x^2 + \alpha(x) \sin x^2 - \ln(1 + 2x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{2 \sin x^2}{x^2} + \frac{2x - \ln(1 + 2x)}{x^2} \right] = 4.$$

$$\text{法二: 因为 } x \sim \sin x (x \rightarrow 0), \text{ 所以 } \frac{2 + f(x)}{x} = \frac{2x + xf(x)}{x^2} \sim \frac{2x + f(x)}{\sin x^2}, \text{ 故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(1 + 2x) + xf(x)}{\sin x^2} + \frac{2x - \ln(1 + 2x)}{x^2} \right] = 2 + 2 = 4.$$

(3) 法一: 由已知得  $f(x) = \sin 2x \cdot [e^{(5+\alpha(x)) \cdot (3^x-1)} - 1]$ ,  $\alpha(x) \rightarrow 0$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot (5 + \alpha(x)) \cdot (3^x - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot (5 + \alpha(x)) \cdot x \ln 3}{x^2} = 10 \ln 3.$$

$$\text{法二: 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} (3^x - 1) = 0, \text{ 所以有 } \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left( 1 + \frac{f(x)}{\sin 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( 1 + \frac{f(x)}{\sin 2x} \right)}{3^x - 1} \cdot (3^x - 1) = 0.$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin 2x} = 0, \text{ 从而当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \ln \left( 1 + \frac{f(x)}{\sin 2x} \right) \sim \frac{f(x)}{\sin 2x}. \text{ 又 } 3^x - 1 \sim x \ln 3, x \rightarrow 0, \text{ 再由已知}$$

$$5 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( 1 + \frac{f(x)}{\sin 2x} \right)}{3^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{\sin 2x}}{x \cdot \ln 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2 \ln 3 \cdot x^2}$$

$$\text{故得 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 10 \ln 3.$$

(4) 法一: 由已知得  $f(x) = [e^{(9+\alpha(x))(e^x-1)} - 1] \cdot \frac{1 - \cos x}{3} \sim (9 + \alpha(x)) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^3$ ,  $\alpha(x) \rightarrow 0$ ,

$$\text{且 } \tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3, x \rightarrow 0, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x - \sin x} = 3.$$

法二: 同上例解法 2.

### 1.3.4 利用夹逼准则

当极限不易直接求出时, 可考虑将求极限的变量, 作适当的放大和缩小, 使放大、缩小所得的新变量易于求极限, 且二者的极限值相同, 则原极限存在, 且等于公共值.

**例 1.3.13.** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ . (该结论可作为重要极限使用).

证法一 因为  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ , 所以当  $n \leq 2$  时, 由

$$n = 1 + (n-1) = 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{2}{n} = 1 + C_n^2 \left( \sqrt{\frac{2}{n}} \right)^2 < \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} \right)^n$$

得  $1 < \sqrt[n]{n} < \sqrt{\frac{2}{n}}$ , 于是由夹逼准则得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

证法二 由定理 2.6.2 知算术-几何-调和平均值不等式: 设  $a_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 则有

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

因为  $n$  可看作两个  $\sqrt{n}$  与  $n-2$  个 1 的乘积, 所以由上述不等式有

$$\frac{2}{\frac{2}{\sqrt{n}} + n - 2} \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}_{n-2}} \leq \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{2}{\sqrt{n}} + n - 2} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \right) = 1$ , 故由夹逼准则得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

**例 1.3.14.** (要求用夹逼准则求解) 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , 设

|   |   |
|---|---|
| (1) (东北师范大学) $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$ .                  | (2) $x_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$ . |
| (3) $x_n = \sum_{k=1}^n \left[ (n^k + 1)^{-\frac{1}{k}} + (n^k - 1)^{-\frac{1}{k}} \right]$ . | (4) (北京大学) $x_n = (n!)^{\frac{1}{n^2}}$ .               |
| (5) $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$ .                          | (6) (中国地质大学) $x_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ .           |
| (7) (2003 浙江省数学竞赛) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k}$ .                                   | (8) $x_n = \sqrt[n]{\sum_{k=1}^m a_k^n}$ , $a_k > 0$ .  |

(1) 因为几何平均小于算术平均, 故分母中的因子

$$2n = \frac{(2n-1) + (2n+1)}{2} > \sqrt{(2n-1)(2n+1)}$$

由此可知

$$0 < x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow 0$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

(2)  $\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$  共有  $2n+2$  项, 最小项为  $\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1}$ , 最大项为  $\frac{1}{n}$ , 因此

$$\frac{2n+2}{n+1} \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{2n+2}{n}$$

左右两端极限均为 2, 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2$ .

(3) 因为  $n^k < n^k + 1 < (n+1)^k$ , 所以

$$n^{-1}(n^k + 1)^{-\frac{1}{k}} > (n+1)^{-1} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

相加得  $\frac{n}{n} > \sum_{k=1}^n (n^k + 1)^{-\frac{1}{k}} > \frac{n}{n+1}$ . 令  $n \rightarrow \infty$ , 取极限得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (n^k + 1)^{-\frac{1}{k}} = 1$ .

同理可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (n^k - 1)^{-\frac{1}{k}} = 1$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ .

(4)  $1 \leq (n!)^{\frac{1}{n^2}} \leq (n^n)^{\frac{1}{n^2}} = n^{\frac{1}{n}}$ , 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$  (见例 1.3.13), 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1$ .

(5) 由对数不等式

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n+n}\right) \leq x_n \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n+n-1}\right)$$

$$\text{左端} = \ln\left(\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdots \frac{n+n}{n+n-1} \cdot \frac{n+n+1}{n+n}\right) = \ln \frac{2n+1}{n+1} \rightarrow \ln 2 \quad (n \rightarrow \infty).$$

$$\text{同理, 右端} = \ln \frac{2n}{n} \rightarrow \ln 2 \quad (n \rightarrow \infty), \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ln 2.$$

(6) 利用不等式:  $\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$ , 知

$$\frac{1}{e} \cdot \frac{n+1}{n} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \sqrt[n]{e} \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \sqrt[n]{\frac{n+1}{e}}$$

$$\text{故有夹逼准则, 得 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

(7) 因为  $\frac{n+k}{n^2+n} \leq \frac{n+k}{n^2+k} < \frac{n+k}{n^2}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , 所以

$$\sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k} < \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+n} \sum_{k=1}^n (n+k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+n}{2n^2+2n} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (n+k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+n}{2n^2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{故由夹逼准则, 得 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k} = \frac{3}{2}.$$

(8) 记  $a_{i0} = \max_{1 \leq j \leq m} \{a_j\}$ , 则  $a_{i0} < \sum_{k=1}^m a_k^n < ma_{i0}^n$ , 于是  $a_{i0} < \sqrt[m]{\sum_{k=1}^m a_k^n} < \sqrt[m]{ma_{i0}^n}$ , 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m} = 1$  及夹逼准则得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\sum_{k=1}^m a_k^n} = a_{i0} = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}.$$

**推论 1.3.3.** 设  $a_i, p_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $p = \sum_{i=1}^m p_i$ , 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_i^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{1}{p} \sum_{i=1}^m p_i a_i^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\sum_{i=1}^m p_i a_i^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{\sum_{i=1}^m p_i a_i^x} = \max_{1 \leq i \leq m} \{a_i\}.$$

**例 1.3.15.** 求下列极限值.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n \cdot \sin^n x}. \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin^2 n + 2 \cos^2 n}. \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + a^{2n}}, a \text{ 为常数.}$$

$$(1) \text{ 原式} = \max\{1, 2 \sin x\} = \begin{cases} 2 \sin x & , |\sin x| > \frac{1}{2} \\ 1 & , -\frac{1}{2} < \sin x \leq \frac{1}{2} \\ \text{不存在} & , \sin x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$(2) \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + (\cos^{\frac{2}{n}} n)^n} = \max \left\{ 1, \cos^{\frac{2}{n}} n \right\} = 1, \text{ 其中易求得 } \cos^{\frac{2}{n}} n \text{ 的最大值为 } 1.$$

$$(3) \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + \underbrace{a^n + a^n + \cdots + a^n}_{a_n}} = \max\{2, a\}.$$

**例 1.3.16.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{3} - \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2 + k} \right).$

因为  $\frac{n}{3} - \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2 + k} = \frac{n}{3} - \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} + \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^2(n^2 + k)}$ , 那么

$$I_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{3} - \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n}{3} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n-1}{6n} = -\frac{1}{2}$$

并且  $\sum_{k=1}^n k^3 = \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ , 于是有

$$\frac{1}{4} \leftarrow \frac{n+1}{4n} = \frac{1}{n^2(n^2+n)} \sum_{k=1}^n k^3 < \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^2(n^2+k)} < \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{(n+1)^2}{4n^2} \rightarrow \frac{1}{4} (n \rightarrow \infty)$$

故由夹逼准则得原极限  $I = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ .

**例 1.3.17 (第十一届数学竞赛决赛).**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{i}} \right).$

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n + \sqrt{i}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{i}}{n(n + \sqrt{i})} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-3/2} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{i}}{1 + \frac{\sqrt{i}}{n}} := \lim_{n \rightarrow \infty} f$$

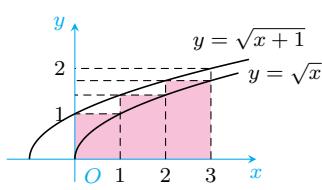
$$n^{-3/2} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{i}}{1 + \frac{\sqrt{i}}{n}} \leq f \leq n^{-3/2} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{i}}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$\text{其中 } \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-3/2} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{i}}{1 + \frac{\sqrt{i}}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-3/2}}{1 + n^{-1/2}} \sum_{i=1}^n \sqrt{i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-3/2}}{1 + n^{-1/2}} \frac{n^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-3/2} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{i}}{1 + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-3/2}}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{n^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}$$

由夹逼准则, 得原式  $= \frac{2}{3}$ , 下证  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{i} \sim \frac{2}{3} n^{3/2} (n \rightarrow \infty)$ .

由图 1.3.1 得: 一方面



另一方面

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{i} < \int_0^n \sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3} [(n+1)^{3/2} - 1]$$

由夹逼准则

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{i} > \int_0^n \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} n^{3/2}$$

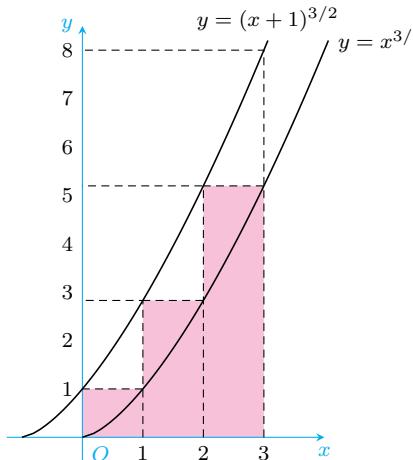
图 1.3.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{i} \sim \frac{2}{3} n^{3/2} (n \rightarrow \infty).$$

**例 1.3.18.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{n+1}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{i}{n+\sqrt{i}} \right)$ .

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{in}{n+\sqrt{i}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-3/2} \sum_{i=1}^n \frac{i^{3/2}}{n+\sqrt{i}} := \lim_{n \rightarrow +\infty} f$$

$$\frac{2}{5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{-3/2}}{n+\sqrt{n}} \cdot \frac{2}{5} n^{5/2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{-3/2}}{n+\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n i^{3/2} \leqslant \lim_{n \rightarrow +\infty} f \leqslant \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{-3/2}}{n+1} \sum_{i=1}^n i^{3/2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{-3/2}}{n+1} \cdot \frac{2}{5} n^{5/2} = \frac{2}{5}$$



故, 原式 =  $\frac{2}{5}$ , 下证  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n i^{3/2} \sim \frac{2}{5} n^{5/2} (n \rightarrow \infty)$ , 由图 1.3.2 得: 一  
方面

$$\sum_{i=1}^n i^{3/2} < \int_0^n (x+1)^{3/2} dx = \frac{2}{5} [(n+1)^{5/2} - 1]$$

另一方面

$$\sum_{i=1}^n i^{3/2} > \int_0^n x^{3/2} dx = \frac{2}{5} n^{5/2}$$

由夹逼准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n i^{3/2} \sim \frac{2}{5} n^{5/2} (n \rightarrow \infty).$$

图 1.3.2

**例 1.3.19 (第四届数学竞赛).** 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}} dt$ .

当  $x > 1$  时, 因为

$$0 \leqslant \left| \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}} dt \right| \leqslant \int_x^{x+1} \frac{dt}{\sqrt{t-1}} = 2(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) = \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$$

所以

$$0 \leqslant \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}} dt \right| \leqslant \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = 0$$

故由夹逼准则得原极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}} dt = 0$ .

**例 1.3.20 (2013 浙江省数学竞赛).** 设  $f_n(x) = x^n \ln x$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} f_n^{(n-1)}\left(\frac{1}{n}\right)$ .

因为  $f'_n(x) = nx^{n-1} \ln x + x^{n-1} = nf_{n-1}(x) + x^{n-1}$ , 所以

$$f_n^{(n-1)}(x) = [f'_n(x)]^{(n-2)} = [nf_{n-1}(x) + x^{n-1}]^{(n-2)} = nf_{n-1}^{(n-2)}(x) + (n-1)!x$$

经过递推可得

$$\frac{1}{n!} f_n^{(n-1)}(x) = \frac{f_{n-1}^{(n-2)}(x)}{(n-1)!} + \frac{x}{n} = \frac{f_{n-2}^{(n-3)}(x)}{(n-2)!} + \frac{x}{n-1} + \frac{x}{n} = \cdots = \frac{f_2'(x)}{2!} + x \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} = x \left( \ln x + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right)$$

于是, 有  $\frac{1}{n!} f_n^{(n-1)}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$ , 并且

$$\ln(n+1) - \ln 2 = \int_1^n \frac{dx}{x+1} < \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$$

所以

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{n+1}{2n} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} f_n^{(n-1)}\left(\frac{1}{n}\right) < 0$$

由夹逼准则得原极限为 0.

### 夹逼准则的推广形式

当使用夹逼准则时, 若放大与缩小所得之量的极限值不相等, 但两者只相差一个任意小量, 则夹逼准则仍然有效.

**例 1.3.21.** (推论 1.3.3 的连续形式) 设  $f(x) > 0$ , 在区间  $[0, 1]$  上连续, 试证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^n \left[ f\left(\frac{i}{n}\right) \right]^n} \frac{1}{n} = \max_{0 \leq x \leq 1} f(x).$$

记  $M = \max_{0 \leq x \leq 1} f(x)$ , 则

$$x_n := \sqrt[n]{\sum_{i=1}^n \left[ f\left(\frac{i}{n}\right) \right]^n} \frac{1}{n} \leq M$$

因为  $f(x)$  连续, 根据闭区间连续函数的性质,  $\exists x_0 \in [0, 1]$ , s.t.  $f(x_0) = M$ . 于是  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$ ,  $x \in [0, 1]$  时, 有

$$M - \varepsilon < f(x) < M + \varepsilon$$

当  $n$  充分大时有  $\frac{1}{n} < \delta$ ,  $\exists i_0$ , s.t.  $\left| \frac{i_0}{n} - x_0 \right| < \delta$ ,  $f\left(\frac{i_0}{n}\right) > M - \varepsilon$ . 故

$$x_n := \sqrt[n]{\sum_{i=1}^n \left[ f\left(\frac{i}{n}\right) \right]^n} \frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{\left( f\left(\frac{i_0}{n}\right) \right)^n} \frac{1}{n} > (M - \varepsilon) \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow M - \varepsilon$$

由  $\varepsilon > 0$  的任意性, 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M$ .

**例 1.3.22.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ .

法一:  $\forall 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ , 有

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \leq \frac{\pi}{2} \cdot \sin^n x \left( \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \sin^n \left( \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) + \varepsilon$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 得

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \cdot \sin^n x \left( \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) + \varepsilon = \varepsilon$$

再由  $\varepsilon$  的任意性及夹逼准则, 得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$ .

法二: 记  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ , 则由

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为大于 1 的奇数} \end{cases}$$

其中  $n!!$  表示不大于  $n$  且与  $n$  有相同奇偶性的数的连乘积. 得

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

于是有

$$I_{2k}^2 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)(2k-3)(2k-1)(2k-1) \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k-4)(2k-2)(2k-2)(2k) \cdot 2k} \cdot \frac{\pi}{4}$$

从而得  $\frac{1}{4k} \cdot \frac{\pi^2}{4} < I_{2k}^2 < \frac{2k-1}{4k^2} \cdot \frac{\pi^2}{4}$ , 故  $\lim_{k \rightarrow 0} I_{2k} = 0$ . 又因为  $0 \leq I_{2k+1} \leq I_{2k}$ , 所以  $\lim_{k \rightarrow \infty} I_{2k+1} = 0$ , 从而得  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$ .

### Wallis 公式

**推论 1.3.4.**  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为大于 1 的奇数.} \end{cases}$

一般形式:

$$I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & m, n \text{ 为正偶数} \\ \frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}, & m, n \text{ 为大于 1 的奇数} \end{cases}.$$

证 利用分部积分公式  $\int f dg = fg - \int g df$ ,

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{n-1} x d(\sin x) = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x d(\sin^m x \cos^{n-1} x) \\ &= -m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x dx = -m I_{m,n} + (n-1) I_{m+2,n-2} \end{aligned}$$

(1) 当  $n$  为正偶数  $n = 2k$  时,

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \frac{n-1}{m+1} I_{m+2,n-2} = \frac{n-1}{m+1} \cdot \frac{n-3}{m+3} I_{m+4,n-4} = \cdots = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-1)} I_{m+n,0} \\ &= \begin{cases} \frac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-1)} \frac{(m+n-1)!!}{(m+n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{当 } m \text{ 也为正偶数时} \\ \frac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-1)} \frac{(m+n-1)!!}{(m+n)!!}, & \text{否则} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{当 } m \text{ 也为正偶数时} \\ \frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}, & \text{否则} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{因为 } \frac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-1)} = \frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n-1)!!}.$$

(2) 当  $n$  为大于 1 的奇数  $n = 2k+1$  时 (不论  $m$  是偶数还是奇数) 时,

$$I_{m,n} = \frac{n-1}{m+1} I_{m+2,n-2} = \frac{n-1}{m+1} \cdot \frac{n-3}{m+3} I_{m+4,n-4} = \cdots = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-2)} I_{m+n-1,1}$$

$$\text{其中 } I_{m+n-1,1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+n-1} x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+n-1} x d(\sin x) = \int_0^1 t^{m+n-1} dt = \frac{1}{m+n}, \text{ 代入上式, 得}$$

$$I_{m,n} = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-2)} \cdot \frac{1}{m+n} = \frac{(n-1)!!(m-1)!!}{(m+n)!!}.$$

综上即得欲证等式.

**定理 1.3.5 (双阶乘与阶乘的转化).**  $(2n)!! = 2^n \cdot n!$ ,  $(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$ .

**例 1.3.23.** 设  $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$ ,  $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^n x dx$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$ .

由推论 1.3.4 知,  $b_n = \begin{cases} \frac{[(n-1)!!]^2}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数} \\ \frac{[(n-1)!!]^2}{(2n)!!}, & n \text{ 大于 1 的奇数} \end{cases}$ , 并且

$$a_n \xrightarrow{x=\cos t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \cdot \sin^2 t dt = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{(n+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数} \\ \frac{(n-1)!!}{(n+2)!!}, & n \text{ 大于 1 的奇数} \end{cases}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \begin{cases} \frac{[(n-1)!!]^2}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(n+2)!!}{(n-1)!!} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{(n-1)!! \cdot (n+2)!!}{(2n)!!} = \frac{n!(n+2)}{2^n \cdot n!} = \frac{n+2}{2^n} \rightarrow 0, & n \text{ 为正偶数} \\ \frac{[(n-1)!!]^2}{(2n)!!} \cdot \frac{(n+2)!!}{(n-1)!!} = \frac{(n-1)!! \cdot (n+2)!!}{(2n)!!} = \frac{n!(n+2)}{2^n \cdot n!} = \frac{n+2}{2^n} \rightarrow 0, & n \text{ 大于 1 的奇数} \end{cases}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0.$$

### 1.3.5 求极限其他常用方法

下述的各种方法涉及到之后的知识点, 若对知识点掌握不扎实, 可暂缓阅读.

#### L'Hospital 法则

**定理 1.3.6 ( $\frac{0}{0}$  型 L'Hospital 法则).** 如果函数  $f(x)$  和  $g(x)$  满足以下条件:

- (1) 当  $x \rightarrow a$  时,  $f(x)$  和  $g(x)$  都是无穷小 (或无穷大);
- (2) 在点  $a$  的某个去心邻域内,  $f(x)$  和  $g(x)$  都是可导的, 且  $g'(x) \neq 0$ ;
- (3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在 (或为无穷大),

那么  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

**定理 1.3.7 ( $\frac{*}{\infty}$  型 L'Hospital 法则).** 对于  $\frac{\infty}{\infty}$  型的不定式, 一般情形 (即  $\frac{*}{\infty}$  型的不定式) 为: 如果函数  $f(x)$  和  $g(x)$  满足

- (1) 在点  $a$  的某个去心邻域内,  $f(x)$  和  $g(x)$  都是可导的, 且  $g'(x) \neq 0$ ;
- (2)  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ ;
- (3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在 (或为无穷大),

那么  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

每次使用 L'Hospital 法则之前, 务必考察它是否属于七种不定型, 否则不能用, 七种不定型如下.

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$$

一旦用 L'Hospital 法则算不出结果, 不等于极限不存在. 例如  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = 1$ , 就是如此. 这是因为 L'Hospital 法则只是充分条件, 不是必要条件.

使用  $\frac{\infty}{\infty}$  型的 L'Hospital 法则时, 只需要检验分母趋向无穷大即可, 分子不趋向  $\infty$  没有关系.

在多数需要使用 L'Hospital 法则的情境下, 式子含有变限积分, 变限积分的求导公式如下:

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x).$$

**定理 1.3.8 (Heine 定理).** 若  $x_n \neq x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$ , 恒有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

**例 1.3.24.** 求下列极限值.

$$\begin{aligned} & (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt. & (2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( n^3 - n^2 + \frac{n}{2} \right) e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{1 + n^6} \right]. \\ & (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx. & (4) (\text{中国科学院}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^{t^2} dt}{x^2 \sin 2x}. \\ & (5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x. & (6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n} \cdot \int_n^{n^2} \left( 1 + \frac{1}{2t} \right)^t \sin \frac{1}{\sqrt{t}} dt. \end{aligned}$$

(1) 将  $\frac{1}{n}$  替换为  $x$ , 利用 Heine 定理把数列极限转化为函数极限,

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_x^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt}{t^{-1}} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{\cos 2x}{4x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos 2x = \frac{1}{4}.$$

(2) 由 Heine 定理, 将数列极限转为函数极限, 并且令  $t = \frac{1}{x}$ , 那么  $t \rightarrow 0^+$ ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \left( \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2t} \right) e^t - \sqrt{1 + \frac{1}{t^6}} \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\left( 1 - t + \frac{t^2}{2} \right) e^t - \sqrt{1 + t^6}}{t^3} \\ &\stackrel{L'}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(-1 + t)e^t + \left( 1 - t + \frac{t^2}{2} \right) e^t - \frac{6t^5}{2\sqrt{1+t^6}}}{3t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}e^t - \frac{3t^3}{\sqrt{1+t^6}}}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(3) 为  $\frac{*}{\infty}$  型, 原式  $\stackrel{L'}{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2\sqrt{n}}{1} = 2$ .

(4) 为  $\frac{0}{0}$  型, 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^{t^2} dt}{2x^3} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{x^2}}{6x^2} = -\frac{1}{6}$ .

(5) 为  $1^\infty$  型,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( \frac{2}{\pi} \arctan x \right) = \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left( \frac{2}{\pi} \arctan x - 1 \right) \\ &\stackrel{\frac{1}{x}=t}{=} \exp \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{t} - 1}{t} \stackrel{L'}{=} \exp \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{1 + \frac{1}{t^2}} \cdot \left( -\frac{1}{t^2} \right) \right] = e^{-\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$

$$(6) \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_n^{n^2} \left(1 + \frac{1}{2t}\right)^t \sin \frac{1}{\sqrt{t}} dt}{n} \stackrel{L'}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 2n \left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)^{n^2} \sin \frac{1}{n} - \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right],$$

其中

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n^2} \sin \frac{1}{n} = 2 \exp \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{2n^2}\right) = 2\sqrt{e}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n}{\sqrt{n}} = 0.$$

故, 原式  $= 2\sqrt{e}$ .

**例 1.3.25 (中南大学).** 设  $f(x)$  有二阶导数, 在原点附近不为零, 但  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, f''(0) = 4$ , 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right) \stackrel{L'}{=} \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2}}{1 + \frac{f(x)}{x}}, \text{ 下求分子分母的极限.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot x = 0$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \stackrel{f(0)=0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{1}{2} f''(0) = 2$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{4-2}{1}} = e^2.$$

**例 1.3.26 (2005 数学 (二)).** 设函数  $f(x)$  在  $x = 0$  的某邻域内连续, 且  $f(0) \neq 0$ , 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt}.$$

$$\int_0^x f(x-t)dt \stackrel{x-t=u}{=} - \int_x^0 f(u)du = \int_0^x f(u)du = \int_0^x f(t)dt, \text{ 于是}$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt}{x \int_0^x f(t)dt} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt + xf(x)}$$

因为  $f(x)$  在  $x = 0$  的某邻域内未必可导, 不满足 L'Hospital 法则条件, 不能继续用 L'Hospital 法则. 以下给出两种解法:

法一: 用积分中值定理  $\int_0^x f(x)dx = f(\xi) \cdot x$ , 其中  $\xi$  介于 0 与  $x$  之间.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(\xi)}{xf(\xi) + xf(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\xi)}{f(\xi) + f(x)} = \frac{1}{2}.$$

法二: 令  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , 则  $F'(x) = f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = f(0)$ .

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{F(x) + xF'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{F(x) - F(0)}{x}}{\frac{F(x) - F(0)}{x} + F'(x)} = \frac{f(0)}{f(0) + f(0)} = \frac{1}{2}.$$

注意连续不一定可导, 可导必连续, 即当不满足 L'Hospital 法则条件时, 可参考例题 1.3.26 中给出的两种方法.

$$\text{例 1.3.27. 设 } f'(x) \text{ 连续, } f(0) = 0, f'(0) \neq 0, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} f(x^2 - t) dt}{x^3 \int_0^1 f(xt) dt}.$$

分子有

$$\int_0^{x^2} f(x^2 - t) dt \stackrel{x^2-t=u}{=} - \int_{x^2}^0 f(u) du = \int_0^{x^2} f(u) du = \int_0^{x^2} f(t) dt$$

分母有

$$\int_0^1 f(xt) dt \stackrel{xt=v}{=} \frac{1}{x} \int_0^x f(v) dv = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

于是

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} f(t) dt}{x^2 \int_0^x f(t) dt} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x^2)}{2 \int_0^x f(t) dt + xf(x)} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4xf'(x^2)}{3f(x) + xf'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f'(x^2)}{3 \frac{f(x)}{x} + f'(x)} = \frac{4f'(0)}{4f'(0)} = 1.$$

$$\text{例 1.3.28. 设 } f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 的某邻域内连续, 且 } f(0)=0, f'(0)=1, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x tf(x^2 - t^2) dt}{x^3 \sin x}.$$

$$\text{因为 } \int_0^x tf(x^2 - t^2) dt \stackrel{x^2-t^2=u}{=} -\frac{1}{2} \int_{x^2}^0 f(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(t) dt, \text{ 于是}$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(t) dt}{x^4} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{4x^2} \stackrel{L'}{=} \frac{1}{4} f'(x^2) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{例 1.3.29. 设 } f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 的某邻域内二阶可导, } f'(0) \neq 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^\alpha - \sin x} = \beta \neq 0, \text{ 求 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 的值.}$$

$$\text{由定理 1.3.4 知, } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^\alpha - \sin x) = 0, \text{ 即 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{\sin x} = 1 \Rightarrow \alpha = 1, \text{ 所以}$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) dt}{\frac{1}{6}x^3} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2f(x)}{x^2} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{x}$$

$$\text{由 } f'(0) \neq 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0, \text{ 可设 } f(x) = x^2, \text{ 故 } \alpha = 1, \beta = 2.$$

### Taylor 展开

**无穷小的相关概念** 在正式介绍如何用 Taylor 展开计算极限前, 需要对无穷小性质做相关介绍.

**定义 1.3.1 (无穷小的相关定义).** (1) 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 那么称  $\beta$  与  $\alpha$  是等价无穷小, 记作  $\alpha \sim \beta$ ;

(2) 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  同阶的无穷小, 记作  $\beta \sim c\alpha$ ;

(3) 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$ , 那么称  $\beta$  是关于  $\alpha$  的  $k$  阶无穷小, 记作  $\beta \sim c\alpha^k$ ;

(4) 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  高阶的无穷小, 记作  $\beta = o(\alpha)$ ;

(5) 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ , 那么称  $\beta$  是比  $\alpha$  低阶的无穷小.

**定理 1.3.9 (等价无穷小的充要条件).**  $\beta$  与  $\alpha$  是等价无穷小的充分必要条件为  $\beta = \alpha + o(\alpha)$ .

**定理 1.3.10 (无穷小量的传递性).** 设  $\alpha \sim \alpha'$ ,  $\beta \sim \beta'$ , 且  $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$  存在, 则  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ .

**定理 1.3.11 (无穷小量的加法).** 设  $m > n > 0$  且  $\lim \alpha = 0$ , 则有  $o(\alpha^m) \pm o(\alpha^n) = o(\alpha^k)$  ( $0 < k \leq n$ ).

证  $\lim \frac{o(\alpha^m) \pm o(\alpha^n)}{\alpha^k} = \lim \frac{o(\alpha^m)}{\alpha^m} \cdot \alpha^{m-k} \pm \lim \frac{o(\alpha^n)}{\alpha^n} \cdot \alpha^{n-k} = 0$ .

**定理 1.3.12 (无穷小量的乘法).**  $m, n > 0$  且  $\lim \alpha = 0$ , 则有  $o(\alpha^m)(\text{或 } \alpha^m) \cdot o(\alpha^n) = o(\alpha^k)$  ( $0 < k \leq m+n$ ).

证  $\lim \frac{o(\alpha^m) \cdot o(\alpha^n)}{\alpha^k} = \lim \frac{o(\alpha^m)}{\alpha^m} \cdot \lim \frac{o(\alpha^n)}{\alpha^n} \cdot \lim \alpha^{m+n-k} = 0 \times 0 \times 0 = 0$ . ( $\alpha^m$  同理).

**例 1.3.30.** 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$  是

- A. 无穷大      B. 无穷小      C. 有界但非无穷小      D. 无界但非无穷大

当  $x \rightarrow 0$  时,  $\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$ ,  $\sin \frac{1}{x}$  在  $-1$  和  $1$  之间振荡, 且重复函数值为零, 故可排除 A、B, 取  $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),

则当  $x_n \rightarrow 0$  时,  $f(x_n) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \pi^2 \rightarrow \infty$ , 故  $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$  ( $x \rightarrow 0$ ) 不是无穷小, 也不是有界量.

**例 1.3.31.** 设  $\cos x - 1 = x \sin \alpha(x)$ , 其中  $|\alpha(x)| < \frac{\pi}{2}$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $\alpha(x)$  是

- A. 比  $x$  高阶的无穷小量      B. 比  $x$  低阶的无穷小量  
C. 与  $x$  同阶但不等价的无穷小量      D. 与  $x$  等价的无穷小量

由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \alpha(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} \neq 1$ , 于是当  $x \rightarrow 0$  时,  $\alpha(x)$  与  $x$  同阶但不等价的无穷小量, 选 C.

**例 1.3.32.** 设  $g(x)$  可导, 且当  $x \rightarrow 0$  时,  $g(x)$  是  $x$  的高阶无穷小, 则当  $x \rightarrow 0$  时, 必有

- A.  $g'(x)$  是无穷小量      B.  $\frac{x}{g(x)}$  是无穷大量  
C. 若  $G'(x) = g(x)$ , 则  $G(x)$  是  $x$  的高阶无穷小      D.  $\int_0^x g(t)dt$  是  $x^2$  的高阶无穷小

由于  $g(x)$  是  $x$  的高阶无穷小, 故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 0$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x g(t)dt}{x^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{2x} = 0$$

因此  $\int_0^x g(t)dt$  是  $x^2$  的高阶无穷小, 故选 D.

反例: 对于 A 选项  $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  此时  $g(x)$  是  $x$  的高阶无穷小, 但此时

$$g'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

它在  $x = 0$  附件是振荡的, 极限不存在, 无法使用 L'Hospital 法则; 对于 B 选项,  $g(x) = 0$ , 在  $g(x) \neq 0$  的情况下是对的; 对于 C 选项  $G(x) = x^3 + 1$ ,  $g(x) = 3x^2$ ,  $g(x)$  的原函数有无数个, 它们相差一个常数, 而只有一个能保证  $G(x)$  是无穷小.

**例 1.3.33.** 若  $x \rightarrow 0$  时, 函数  $\cos x - \frac{c+9x^2}{c+4x^2}$  是  $x^2$  的高阶无穷小, 求  $c$ .

因为  $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ , 且  $\frac{c+9x^2}{c+4x^2} = \frac{9}{4} - \frac{5}{4\left(1+\frac{4}{c}x^2\right)} = \frac{9}{4} - \frac{5}{4}\left[1 - \frac{4}{c}x^2 + o(x^2)\right] = 1 + \frac{5}{c}x^2 + o(x^2)$ , 于是

$$\cos x - \frac{c+9x^2}{c+4x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \left[1 + \frac{5}{c}x^2\right] + o(x^2) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{c}\right)x^2 + o(x^2)$$

故  $-\frac{1}{2} - \frac{5}{c} = 0$ , 解得  $c = -10$ .

**符号  $O$  与  $o$  的含义** 符号 “ $f(x) = O(1)$ ” 表示在所讨论过程中, “ $f(x)$  是有界量”, 即  $\exists M > 0$ , 使得  $|f(x)| \leq M$  (在此过程中保持成立); 符号 “ $o(1)$ ” 代表在所讨论过程里, 它是“无穷小量”. 例如:  $\alpha = o(1)$ , 意指: (在所讨论过程里)  $\alpha$  是无穷小量.

$$f(x) = O(g(x)) \text{ 代表 } \frac{f(x)}{g(x)} = O(1), f(x) = o(g(x)) \text{ 代表 } \frac{f(x)}{g(x)} = o(1).$$

**推论 1.3.5 (Laurent 级数).** 作为例题 1.3.13 的推广表达式:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e - \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} - \frac{7e}{16n^3} + \frac{2447e}{5760n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1 + x \ln x + \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x + \frac{1}{6}x^3 \ln^3 x + \frac{1}{24}x^4 \ln^4 x + \frac{1}{120}x^5 \ln^5 x + O(x^6);$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^x = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + \frac{1}{3}(x-1)^4 + \frac{1}{12}(x-1)^5 + O((x-1)^6).$$

**例 1.3.34.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e + \frac{e}{2n} \right]$ .

由推论 1.3.5 知, 极限可化为  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \left[ \frac{11e}{24n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] = \frac{11e}{24}$ .

**例 1.3.35.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(2 \cdot n^{\frac{1}{n}} - 1\right)^n}{n^2}$ .

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 + \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , 于是原式化为

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[1 + \frac{2 \ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1 + \frac{2 \ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n^{\frac{2}{n}}} \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n + 2 \ln n + O\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{\frac{2}{n}} + 1} \right]^n$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $n^{\frac{2}{n}} + 1 \rightarrow n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ , 故上式极限为 1.

**例 1.3.36.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{\frac{1}{x}} + e^2(x - \sqrt{1-2x})}{x^2}$ .

因为  $(1+2x)^{\frac{1}{x}} = (1+2x)^{\frac{1}{2x} \cdot 2} = \left(e - \frac{e}{2} \cdot 2x + \frac{11e}{24} \cdot (2x)^2 + o(x^2)\right)^2 = e^2 \left(1 - 2x + \frac{14}{3}x^2\right) + o(x^2)$ , 且  $x - \sqrt{1-2x} = -1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ , 于是

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^2 \left(1 - 2x + \frac{14}{3}x^2 - 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)}{x^2} = \frac{31}{6}e^2.$$

**Taylor 公式** 若  $f^{(n)}(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f^{(n+1)}(x)$  在  $(a, b)$  内可导, 则  $\forall x, x_0 \in [a, b], \exists \xi$  位于  $x$  与  $x_0$  之间, 使得下式成立:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中,  $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$  为 Lagrange 余项.

若  $f(x)$  在  $x_0$  处有  $n$  阶导数  $f^{(n)}(x_0)$ , 则在  $x_0$  邻域内上式成立, 其中  $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$  ( $x \rightarrow x_0$ ), 称为 Peano 余项. 常用函数的展开式可见 7.2.3 节.

**例 1.3.37.** 求  $f(x) = \frac{\tan x}{1+x^2}$  在  $x=0$  处的 3 次 Taylor 展开多项式.

因为  $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ ,  $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(x^2)} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$  所以

$$f(x) = \frac{\tan x}{1+x^2} = \left( x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right) (1 - x^2 + x^4 + o(x^4)) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

故  $\frac{\tan x}{1+x^2}$  在  $x=0$  处的 3 次 Taylor 多项式为  $x - \frac{2}{3}x^3$ .

**例 1.3.38.** 若要使  $x \rightarrow 0$  时,  $e^x - \frac{1+ax}{1+bx}$  为尽可能高阶的无穷小量, 问数  $a, b$  应取何值? 用  $x$  的幂级数写出此时的等价无穷小.

用 Taylor 公式展开到  $x^3$  此项, 有  $e^x = \sum_{k=0}^3 \frac{x^k}{k!} + o(x^3)$ ,

$$\frac{1+ax}{1+bx} = \frac{1+bx+(a-b)x}{1+bx} = 1 + (a-b)x \left[ \sum_{k=0}^2 (-bx)^k + o(x^2) \right] = 1 + (a-b) \sum_{k=0}^2 (-1)^k b^k x^{k+1} + o(x^3)$$

于是

$$e^x - \frac{1+ax}{1+bx} = [1 - (a-b)]x + \left[ \frac{1}{2} + (a-b)b \right] x^2 + \left( \frac{1}{3!} - ab^2 + b^3 \right) x^3 + o(x^3)$$

令  $x$  的一、二次项系数为零, 解得  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = -\frac{1}{2}$ , 此时

$$e^x - \frac{1+ax}{1+bx} = -\frac{1}{12}x^3 + o(x^3) \sim -\frac{1}{12}x^3 (x \rightarrow 0).$$

**例 1.3.39.** 用 Taylor 展开求下列极限值.

|  |   |  |
|--|---|--|
| $(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3-e^x}{2+x} \right)^{\csc x}.$              | $(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}}.$                   | $(3) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}.$                      |
| $(4) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cdot \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2}.$ | $(5) \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x^2}}.$          | $(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^{\frac{1}{x}} - 1 \right)^{\frac{1}{\ln x}}.$ |
| $(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} + 2^{\frac{1}{x}} \right)^x.$    | $(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + 1 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin(x^2)}.$ | $(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}} - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^2}.$  |

$$(1) \text{ 原式} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{3-e^x}{2+x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x-x}{(2+x)x}} = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x - \left( 1+x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \right)}{x(2+x)} = \frac{1}{e}.$$

(2) 本题也可以用等价无穷小来写.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left( 2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right) = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \left( 1 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right) \\ &= \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left( x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)}{x^2} = \sqrt{e}. \end{aligned}$$

(3) 要将  $\sin x$  与  $\cos x$  展开到四阶, 与分母等价.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \ln(\cos 2x + 2x \sin x) = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + 2x \sin x - 1}{x^4} \\ &= \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4) + 2x \left( x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right) - 1}{x^4} = e^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

(4) 注意本题要将  $\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$  展开到二阶.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \exp \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left[ e^{-1} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \right] = \exp \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[ x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - 1 \right] \\ &= \exp \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[ x \cdot \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) - 1 \right] = e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

$$(5) \text{ 原式} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1]} = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x^2} \left( x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - \frac{1}{x} \right] = e^{-\frac{1}{2}}.$$

(6) 本题也可以用等价无穷小来写.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} \ln \left( x^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln x - \ln x + \frac{\ln x}{2x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \ln \ln x + (1-2x) \ln x + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{2x \ln x + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{2 \ln \ln x}{\ln x} + \frac{1}{x} - 2 \right) = e^{-1}. \end{aligned}$$

(7) 本题也可以用等价无穷小来写.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \exp \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( \frac{1}{x} + 2^{\frac{1}{x}} \right) = \exp \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \frac{1}{x} + 2^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \stackrel{\frac{1}{x}=t}{=} \exp \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t + 2^t - 1}{t} \\ &= \exp \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t + e^{t \ln 2} - 1}{t} = \exp \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t + t \ln 2 + o(t)}{t} = e^{1+\ln 2} = 2e. \end{aligned}$$

$$(8) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + 1 - \left( 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) \right)}{(\cos x - 1 + 1 - e^{x^2}) \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{8} + o(x^4)}{\left( -\frac{x^2}{2} - x^2 + o(x^2) \right) x^2} = -\frac{1}{12}$$

(9) 因为  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ , 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(1+x)^{1/x}} \left[ (1+x)^{\frac{1}{x}} - \frac{e}{x} \ln(1+x) \right]}{x^2} = e^{e+1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp \left[ \frac{1}{x} \ln(1+x) - 1 \right] - \frac{1}{x} \ln(1+x)}{x^2} \\ &= e^{e+1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp \left( -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right) - 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)}{x^2} = e^{e+1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \left( -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right)^2}{x^2} = \frac{e^{e+1}}{8}. \end{aligned}$$

**例 1.3.40.** 用 Taylor 展开求下列极限值.

$$\left| \begin{array}{ll} (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt[4]{x^4 - 2x^3} \right). & (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - xe^{\frac{1}{x}} \right). \\ (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{2}{x^2} + \cos \frac{1}{x} \right)^{\sin^{-2}(\frac{1}{x})}. & (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( e^{x^2} - 1 \right) \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2)}{[\ln(1-x) + \ln(1+x)] \cdot \sin \frac{x^2}{1+x}}. \\ (5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2 (e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}. & (6) \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - x^{\frac{2}{3}} + \int_0^{\sqrt[5]{x^2}} e^{\frac{1}{2}t^2} dt \right)^{x^{-2}}. \end{array} \right.$$

$$(1) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} - \sqrt[4]{1 - \frac{2}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{x} - 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \frac{3}{2}.$$

$$(2) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}} - e^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 + \frac{2}{3x} + \frac{1}{3x^3} - 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = -\frac{1}{3}.$$

(3) 等价无穷小与 Taylor 展开配合使用.

$$\text{原式} \stackrel{\frac{1}{x}=t}{=} \exp \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 t} \ln (\sin 2t^2 + \cos t) = \exp \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t^2 + \cos t - 1}{t^2} = \exp \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^2 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t^2} = e^{\frac{3}{2}}.$$

$$(4) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left( \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \right)}{-\left( x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \cdot \frac{1+x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{4}}{-x^2} = \frac{1}{4}.$$

(5) 等价无穷小与 L'Hospital 法则和 Taylor 展开配合使用, 要注意展开的阶数.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2 (e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[ \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x^2 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) - x \right] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(6) 被积函数的 Taylor 展开 若  $F(x) = f(x) + o(x^n)$ , 则有  $\int_0^x F(t) dt = \int_0^x f(t) dt + o(x^{n+1})$ ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &\stackrel{\frac{2}{3}=y}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \left( 1 - y + \int_0^y e^{\frac{1}{2}t^2} dt \right)^{y-3} = \exp \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^3} \ln \left( 1 - y + \int_0^y e^{\frac{1}{2}t^2} dt \right) \\ &= \exp \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y + \int_0^y \left( 1 + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \right) dt}{y^3} = \exp \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y + y + \frac{1}{6}y^3 + o(y^3)}{y^3} = e^{\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

**例 1.3.41.** 设  $f(x)$  在  $x = 0$  的某领域内可导, 且  $f(0) = 1, f'(0) = 2$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot \sin \frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{1-f(\frac{1}{n})}}$ .

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 - f\left(\frac{1}{n}\right)} \ln \left( n \sin \frac{1}{n} \right) = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 - f\left(\frac{1}{n}\right)} \left( n \sin \frac{1}{n} - 1 \right) \\ &= \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 - f\left(\frac{1}{n}\right)} \left[ n \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) - 1 \right] = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{6n}}{1 - f\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n}}{f\left(0 + \frac{1}{n}\right) - f(0)} = e^{\frac{1}{6f'(0)}} = e^{\frac{1}{12}} \end{aligned}$$

**例 1.3.42 (2020 北京化工大学).** 计算极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{e}{2}x + x^2 \left[ \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right] \right\}.$

令  $\frac{1}{x} = t$ , ( $t \rightarrow 0^+$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ), 于是

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{e}{2t} + \frac{1}{t^2} \left[ (1+t)^{\frac{1}{t}} - e \right] \right\} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{et + 2 \left[ (1+t)^{\frac{1}{t}} - e \right]}{2t^2}$$

其中  $(1+t)^{\frac{1}{t}} = e^{\frac{1}{t} \ln(1+t)}$ , 并且需要将  $\ln(1+t)$  展开到三阶, 即  $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ , 那么

$$\frac{\ln(1+t)}{t} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + o(t^2)$$

于是  $e^{\frac{1}{t} \ln(1+t)} = e \cdot e^{-\frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + o(t^2)}$ , 并且需要将  $e^x$  展开到二阶, 这是因为对  $-\frac{t}{2} + \frac{t^2}{3}$  平方后依旧存在  $t$  的二阶项, 但无需展开到三阶, 故

$$\begin{aligned} e^{-\frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + o(t^2)} &= 1 + \left( -\frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + o(t^2) \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + o(t^2) \right)^2 \\ &= 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + o(t^2) + \frac{t^2}{8} + o(t^2) = 1 - \frac{t}{2} + \frac{11t^2}{24} + o(t^2) \end{aligned}$$

因此

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{et + 2 \left[ e \left( 1 - \frac{t}{2} + \frac{11t^2}{24} + o(t^2) \right) - e \right]}{2t^2} = \frac{11}{24}e.$$

**例 1.3.43.** 设  $p$  是某正整数,  $I_n = \frac{1}{n^p} \sum_{k=1}^n k^p - \frac{n}{p+1}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

由带 Peano 余项的 Taylor 展开式  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$  记  $h = x - x_0$  可得

$$f(x) - f(x-h) = f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + o\left(\frac{1}{h^2}\right)$$

那么令  $f(x) = \frac{x^{1+p}}{1+p}$ , 则  $f'(x) = x^p$ ,  $f''(x) = px^{p-1}$ , 于是当  $n \rightarrow \infty$  时

$$f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) = \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p + \frac{1}{2n^2} p \left(\frac{k}{n}\right)^{p-1} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

即

$$\left(\frac{k}{n}\right)^p = n \left[ f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right] - \frac{1}{2n} p \left(\frac{k}{n}\right)^{p-1} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

累加得

$$\frac{1}{n^p} \sum_{k=1}^n k^p = n(f(1) - f(0)) + \frac{p}{2n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{p-1} + o(1)$$

又因为  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{p-1} = p$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{2}$ .

**例 1.3.44.** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi n!e)$ .

用 Taylor 公式,  $\exists \theta_n \in (0, 1)$ , 使得

$$e = e^x|_{x=1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{e^{\theta_n}}{(n+2)!}$$

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \left\{ 2\pi n! \left[ \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{e^{\theta_n}}{(n+2)!} \right] \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \left[ \frac{2\pi}{n+1} + \frac{2\pi e^{\theta_n}}{(n+1)(n+2)} \right]$$

其中  $\alpha_n = \frac{2\pi}{n+1} + \frac{2\pi e^{\theta_n}}{(n+1)(n+2)} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 于是

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot \frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n} \cdot \alpha_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{2\pi n}{n+1} + \frac{n}{(n+1)(n+2)} \cdot 2\pi e^{\theta_n} \right] = 2\pi.$$

两个函数乘积的 Taylor 展开 若  $f, g$  展开第一个不为 0 的项次数分别为  $m, n$ , 欲使  $f \cdot g$  展开到  $p$  阶, 则  $f, g$  分别需要展开到  $p - n, p - m$  阶.

**例 1.3.45.** 将下列函数展开到指定的阶数.

$$(1) \ln(1+x) \sin x, \text{ 展开到 4 阶.} \quad (2) e^x \sin x, \text{ 展开到 3 阶.} \quad (3) \frac{\ln(1+x)}{1-x}, \text{ 展开到 3 阶.}$$

$$\begin{array}{c} \ln(1+x) : x^1 \quad x^3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \sin x : x^1 \quad x^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} e^x : 1 \quad x^2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \sin x : x^1 \quad x^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \ln(1+x) : x^1 \quad x^3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1/(1-x) : 1 \quad x^2 \end{array}$$

$$(1) \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} \ln(1+x) \sin x &= \left( x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_1(x^3) \right) \left( x - \frac{1}{6}x^3 + o_2(x^3) \right) \\ &= x^2 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 + o(x^4) \end{aligned}$$

$$(2) e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= \left( 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right) \left( x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right) \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + o(x^3) \end{aligned}$$

$$(3) \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2), \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x)}{1-x} &= \left( x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right) (1 + x + x^2 + o(x^2)) \\ &= x + x^2 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + o(x^3). \end{aligned}$$

**推论 1.3.6.**  $f_1, f_2, \dots, f_k$  展开第一个不为 0 的项次数分别为  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , 欲使  $f_1 f_2 \cdots f_k$  展开到  $p$  阶, 则  $f_1, f_2, \dots, f_k$  分别需要展开到  $p - (m_2 + m_3 + \dots + m_k), p - (m_1 + m_3 + \dots + m_k), \dots, p - (m_2 + m_3 + \dots + m_{k-1})$  阶.

**例 1.3.46.** 试用推论 1.3.6, 计算例 1.3.2(12).

需要将  $\sin kx$  展开到三阶, 故  $\sin kx = kx - \frac{1}{6}(kx)^3 + o(x^3)$ , 那么

$$\prod_{k=1}^n \sin kx = \prod_{k=1}^n \left[ kx - \frac{1}{6}(kx)^3 + o(x^3) \right] (x \rightarrow 0)$$

在上式中排列组合出  $x$  的阶数小于等于  $n+2$  的项, 有

$$\prod_{k=1}^n \sin kx = n!x^n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{6}n!k^2x^{n+2} + o(x^{n+2}) = n!x^n - \frac{n!x^{n+2}}{6} \sum_{k=1}^n k^2 + o(x^{n+2}) (x \rightarrow 0)$$

$$n!x^n - n!x^n + \frac{n!x^{n+2}}{6} \sum_{k=1}^n k^2 + o(x^{n+2})$$

$$\text{故原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n!x^n - n!x^n + \frac{n!x^{n+2}}{6} \sum_{k=1}^n k^2 + o(x^{n+2})}{x^{n+2}} = \frac{n!}{6} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(2n+1)}{36}(n+1)!.$$

复合函数的 Taylor 展开 先确定外函数的展开阶数, 再由各项阶数确定内函数的展开阶数.

**例 1.3.47.** 将下列函数展开到指定的阶数.

$$(1) \sin(\sin x), \text{ 展开到 3 阶.} \quad (2) e^{\tan x} - e^{\sin x}, \text{ 展开到 3 阶.} \\ (3) \ln \cos x, \text{ 展开到 6 阶.} \quad (4) \frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}, \text{ 展开到 3 阶.}$$

(1) 先将外层函数展开到 3 阶,

$$\begin{aligned}\sin(\sin x) &= \sin x - \frac{1}{6} \sin^3 x + o(\sin^3 x) = x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3) - \frac{1}{6}(x + o(x))^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3) = x - \frac{1}{3} x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

(2)  $e^{\tan x} - e^{\sin x} = e^{\tan x} - 1 - (e^{\sin x} - 1)$ , 先将外层函数展开到 3 阶,

$$\begin{aligned}e^{\tan x} - 1 &= \tan x + \frac{1}{2} \tan^2 x + \frac{1}{6} \tan^3 x + o(\tan^3 x) \\ &= \left( x + \frac{1}{3} x^3 + o(x^3) \right) + \frac{1}{2} (x + o(x))^2 + \frac{1}{6} (x + o(x))^3 + o(x^3) \\ &= \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x + o(x^3) \\ e^{\sin x} - 1 &= \sin x + \frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1}{6} \sin^3 x + o(\sin^3 x) \\ &= \left( x^3 - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3) \right) + \frac{1}{2} (x + o(x))^2 + \frac{1}{6} (x + o(x))^3 + o(x^3) \\ &= \frac{1}{2} x^2 + x + o(x^3)\end{aligned}$$

$$\text{故 } e^{\tan x} - e^{\sin x} = \frac{1}{2} x^3 + o(x^3).$$

(3) 先将外层函数展开到 6 阶,

$$\begin{aligned}\ln \cos x &= \frac{1}{2} \ln(1 - \sin^2 x) = -\frac{1}{2} \left( \sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{2} + \frac{\sin^6 x}{3} + o(\sin^3 x) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right)^2 + \frac{1}{2} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right)^4 + \frac{1}{3} (x + o(x))^6 \right] + o(x^6) \\ &= -\frac{1}{45} x^6 - \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^6).\end{aligned}$$

(4) 原式  $= e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)-1}$ , 注意到  $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ , 于是

$$\begin{aligned}\text{原式} &= e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)} = 1 + \left( -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3) \right)^2 + \frac{1}{6} \left( -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3) \right)^3 \\ &= 1 - \frac{1}{2} x + \frac{11}{24} x^2 - \frac{7}{16} x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

**例 1.3.48.** 计算下列极限值.

$$\left| \begin{array}{ll} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(e^x - 1) - e^{\tan x} + 1}{x^4}. & (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - e^{\cos x - 1}}{\tan^2 x - \sin^2 x}. \\ (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2 x) - 6(\sqrt[3]{2 - \cos x} - 1)}{x^4}. & (4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 - x^4 \ln^2 \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right]. \end{array} \right.$$

(1) 注意到

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4), \tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + o(x^4)$$

于是

$$\begin{aligned}\tan(e^x - 1) &= e^x - 1 + \frac{1}{3} (e^x - 1)^3 + o(x^4) \\ &= x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + \frac{1}{3} \left( x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4) \right)^3 + o(x^4) \\ &= x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + \frac{1}{3} x^3 \left( 1 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{24} x^3 + o(x^3) \right)^3 + o(x^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \\
&= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{13}{24}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\tan x} - 1 &= \tan x + \frac{1}{2}\tan^2 x + \frac{1}{6}\tan^3 x + \frac{1}{24}\tan^4 x + o(x^4) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^3 + \frac{1}{24}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4) \\
&= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right) + \frac{1}{6}(x^3 + o(x^4)) + \frac{1}{24}(x^4 + o(x^4)) + o(x^4) \\
&= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{24}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

$$\text{因此原式} = \frac{\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{6}.$$

(2) 与上题同理, 注意到

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), \quad \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \\
\tan x &= x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4), \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\cos(\sin x) &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{24}\sin^4 x + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^4 + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\right) + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\cos x - 1} &= e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)} \\
&= 1 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) + \frac{1}{2}x^4\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{24}x^2 + o(x^2)\right)^2 + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan^2 x - \sin^2 x &= \left(x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right)^2 - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^2 \\
&= x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) - \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\right) = x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

$$\text{于是原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)\right)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{24}.$$

(3)  $\ln(1 + \sin^2 x) = \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin^4 x + o(x^4)$ , 且  $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$ , 于是

$$\begin{aligned}
\ln(1 + \sin^2 x) &= \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^2 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^4 + o(x^4) \\
&= x^2\left(1 - \frac{1}{6}x^2\right)^2 - \frac{1}{2}x^4\left(1 - \frac{1}{6}x^2\right)^4 + o(x^4) = x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

另一方面,

$$\sqrt[3]{2 - \cos x} - 1 = \sqrt[3]{1 + (1 - \cos x)} - 1 = \frac{1}{3}(1 - \cos x) + \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}(1 - \cos x)^2$$

$$= \frac{1}{3} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) - \frac{1}{9} \left( \frac{x^2}{2} + o(x^4) \right)^2 + o(x^4) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

于是原式 =  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{7}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{7}{12}$ .

(4) 法一：利用 L'Hospital 法则计算极限

$$I = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left[ 1 - \frac{1}{2x} + \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right] \left[ 1 - \frac{1}{2x} - \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right] \stackrel{\frac{1}{x}=t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \left[ 1 - \frac{t}{2} + \frac{\ln(1+t)}{t} \right] \cdot \frac{t - \frac{t^2}{2} - \ln(1+t)}{t^3}$$

$$\stackrel{L'}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 - 2t + \frac{2}{1+t}}{2} \cdot \frac{1-t - \frac{1}{1+t}}{3t^2} = 2 \times \left( -\frac{1}{3} \right) = -\frac{2}{3}.$$

法二：对  $\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$ ,  $x \rightarrow \infty$  进行 Taylor 展开，有

$$I = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 - x^4 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o(x^{-4}) \right)^2 \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 - x^2 \left( 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o(x^{-3}) \right)^2 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 - \left( x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} \right)^2 \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x - \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} \right) \left( x - \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^2 + 3x - 1}{9x^2} = -\frac{2}{3}.$$

**例 1.3.49.** 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x \ln(1+x)} - \frac{2+x}{2x^2} \right]$ .

对  $\ln(1+x)$  进行 Taylor 展开，有  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ ，于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right)} - \frac{2+x}{2x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{12}{2x^2(6-3x+2x^2)} - \frac{2+x}{2x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12 - (2+x)(6-3x+2x^2)}{2x^2(6-3x+2x^2)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{2(6-3x+2x^2)} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

**例 1.3.50.** 设函数  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上三阶可导，满足

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2} = a \neq 1 \quad f^{(k)}(x) > 0, \quad k = 0, 1, 2$$

求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$ .

注意到

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[f''(x)]^2 - [f''(x)]^2 + f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2} \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[f''(x)]^2 - f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{f'(x)}{f''(x)} \right) \end{aligned}$$

于是  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{f'(x)}{f''(x)} \right) = 1 - a$ , 并且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{1}{\frac{f'(x)}{xf''(x)} \cdot \frac{xf''(x)}{f(x)}}$$

利用 L'Hospital 法则，得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{xf''(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{f'(x)}{f''(x)}}{\frac{x}{f'(x)}} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{f'(x)}{f''(x)} \right) = 1 - a$$

注意到  $\frac{f'(x)}{xf''(x)} > 0$  ( $0 < x < +\infty$ ), 故由极限的保号性知,  $1 - a \geqslant 0$ , 但  $a \neq 1$ , 所以  $a < 1$ ; 另一方面, 对  $\forall x \in (0, +\infty)$  及  $\forall h > 0$ , 由 Taylor 公式, 得

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(\xi)h^2 > f(x) + f'(x)h \quad \xi \in (x, x+h)$$

所以  $\lim_{h \rightarrow \infty} f(x+h) = +\infty$ , 即  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ , 于是利用 L'Hospital 法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x) + xf''(x)}{f'(x)} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf''(x)}{f'(x)} = 1 + \frac{1}{1-a} = \frac{2-a}{1-a}$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{xf''(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)}} = \frac{1}{2-a}.$$

### Lagrange 中值定理

**定理 1.3.13 (Lagrange 中值定理).** 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 则  $\forall x_1, x_2 \in [a, b], \exists \xi \in (x_1, x_2)$ , 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1).$$

**例 1.3.51.** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos[2 \ln(1+x)]}{x^2}$ .

错解. 由 Lagrange 中值定理,  $\cos x - \cos[2 \ln(1+x)] = [2 \ln(1+x) - x] \sin \xi$ , 其中  $\xi$  介于  $x$  与  $2 \ln(1+x)$  之间, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos[2 \ln(1+x)]}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[2 \ln(1+x) - x] \sin \xi}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[2x + o(x) - x]}{x} = 1$$

错因: 当  $x \rightarrow 0^+$ ,  $x < \xi < 2 \ln(1+x) \Rightarrow 1 \leftarrow \frac{x}{x} < \frac{\xi}{x} < \frac{2 \ln(1+x)}{x} \rightarrow 2$ , 左右极限值不相等, 故不能由夹逼准则得  $\sin \xi \sim \xi$ , 同理可得  $x \rightarrow 0^-$  情况相同.

当  $x \rightarrow 0$  时,  $\cos[2 \ln(1+x)] \rightarrow 1$ , 于是原式可改写为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos(2 \ln(1+x))}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2 \ln(1+x))}{x^2} = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}.$$

**例 1.3.52.** 已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta - (n-1)^\beta} = 2023$ , 求  $\alpha, \beta$  的值.

A.  $\alpha = -\frac{2022}{2023}, \beta = \frac{1}{2023}$ .

B.  $\alpha = -\frac{2023}{2022}, \beta = \frac{1}{2022}$ .

C.  $\alpha = -\frac{2022}{2023}, \beta = \frac{1}{2022}$ .

D.  $\alpha = -\frac{2023}{2022}, \beta = \frac{1}{2023}$ .

设  $f(x) = x^\beta$ , 那么由 Lagrange 中值定理, 有

$$f(n) - f(n-1) = \beta \xi_n^{\beta-1}$$

那么极限式改写为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{\beta \xi_n^{\beta-1}} = 2023$ , 且  $\frac{n}{\xi_n} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ , 于是  $\begin{cases} \frac{1}{\beta} = 2023 \\ \alpha = \beta - 1 \end{cases}$  解得选 A.

**例 1.3.53.** 用 Lagrange 中值定理求下列极限值.

|  |   |  |
|--|---|--|
| $(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right).$ | $(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{\theta}{n} \right)^n.$ | $(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right).$ |
| $(4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right).$                        | $(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-4x^2}}{x^2}.$    | $(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2 \cos x}}{x^4}.$                   |

$$(1) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} \xi^{-\frac{5}{6}} \cdot (2x^5) = \frac{1}{3}, \xi \rightarrow x^6.$$

$$(2) \text{ 原式} = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \cos \frac{\theta}{n} = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \cos \frac{\theta}{n} - 1 \right) = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\theta}{n} \cdot (-\sin \xi) = e^0 = 1, \xi \rightarrow 0.$$

$$(3) \text{ 原式} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right)} = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) - 1 \right] = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \sec^2 \xi = e^2, \xi \rightarrow \frac{\pi}{4}.$$

(4) 先用 Lagrange 中值定理, 再用 Taylor 展开.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln \sin x - 2 \ln(x \cos x)}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \cdot \xi} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - x \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3)}{x^2 \cdot \xi} = \frac{2}{3}, \xi \rightarrow x. \end{aligned}$$

$$(5) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \frac{1}{2\sqrt{\xi}}}{x^2} = \frac{3}{2}, \xi \rightarrow 1.$$

$$(6) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\xi} (x^2 - 2 + 2 \cos x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)}{x^4} = \frac{1}{12}, \xi \rightarrow 0.$$

**例 1.3.54.** 设  $f(x)$  在  $x = 0$  二阶可微且  $f'(0) = 0, f''(0) = 1$ , 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3}$ .

显然  $f$  在  $x = 0$  邻域内一阶可微, 因此由 Lagrange 中值定理,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - \ln(1+x)]f'(\xi_x)}{x^3} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi_x)}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi_x) - f'(0)}{\xi_x} \cdot \frac{\xi_x}{x} = \frac{1}{2} f''(0) = \frac{1}{2}$$

其中

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\xi_x}{x} \leqslant \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ 1 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} \leqslant \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\xi_x}{x} \leqslant \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \end{aligned}$$

**例 1.3.55 (2011 数一).** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{e^{x-1}}}$ .

令  $y = \left[ \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{e^{x-1}}}$ , 则  $\ln y = \frac{\ln(\ln(x+1)) - \ln x}{e^x - 1}$ , 而

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\ln(x+1)) - \ln x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\ln(x+1)) - \ln x}{x}$$

由 Lagrange 中值定理, 令  $f(x) = \ln x$  那么  $f(1+\ln x) - f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{\xi_x}$ , 其中  $\xi_x$  介于  $x$  与  $\ln(1+x)$  之间, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x \cdot \xi_x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

当  $x < 0$  时,  $\ln y = \frac{\ln[-\ln(1+x)] - \ln(-x)}{e^x - 1}$  同样可得  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln y = -\frac{1}{2}$ , 于是原极限为  $e^{-\frac{1}{2}}$ .

**例 1.3.56 (第三届数学竞赛决赛).** 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n}{n^2 x^2 + 1} e^{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ .

对函数  $f(x) = e^{x^2}$  在区间  $[0, x]$  ( $0 \leqslant x \leqslant 1$ ) 上应用拉格朗日中值定理,  $\exists \xi \in (0, x)$ , 使得  $f(x) - f(0) = f'(\xi)x$ , 即

$$e^{x^2} - 1 = 2\xi e^{\xi^2} x \Rightarrow 1 \leqslant e^{x^2} = 1 + 2\xi e^{\xi^2} x \leqslant 1 + 2ex$$

于是

$$\frac{n}{n^2 x^2 + 1} \leqslant \frac{n}{n^2 x^2 + 1} e^{x^2} \leqslant \frac{n}{n^2 x^2 + 1} + \frac{2ex}{n^2 x^2 + 1}$$

应用定积分的保号性，有

$$\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1} e^{x^2} dx \geq \int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1} dx = \arctan nx \Big|_0^1 = \arctan n$$

$$\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1} e^{x^2} dx \leq \int_0^1 \left( \frac{n}{n^2x^2+1} + \frac{2enx}{n^2x^2+1} \right) dx = \arctan nx \Big|_0^1 + \frac{e}{n} \ln(1+n^2) \Big|_0^1 = \arctan n + \frac{e}{n} \ln(1+n^2)$$

又因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\arctan n + \frac{e}{n} \ln(1+n^2)] = \frac{\pi}{2}$ , 故由夹逼准则，等式成立。

**例 1.3.57.** 计算极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)[\ln(x^2+x) - 2\ln(1+x)]$ .

法一：利用重要极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ , 改写极限式，有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \ln \frac{x^2+x}{(1+x)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \ln \frac{x^2+x}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \ln \left(1 + \frac{-x-1}{x^2+2x+1}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \cdot \frac{-x-1}{x^2+2x+1} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+2x+1} = -1. \end{aligned}$$

法二：利用 Lagrange 中值定理：设  $f(x) = \ln x$ , 则  $\exists \xi$  介于  $x^2+x$  与  $x^2+2x+1$ , 使得

$$\frac{f(x^2+x) - f(x^2+2x+1)}{(x^2+x) - (x^2+2x+1)} = f'(\xi) = \frac{1}{\xi}, \xi \rightarrow \infty$$

即  $\ln(x^2+x) - \ln(x^2+2x+1) = -\frac{1}{\xi}(x+1)$ , 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)[\ln(x^2+x) - 2\ln(1+x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)[\ln(x^2+x) - \ln(x^2+2x+1)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)\left[-\frac{1}{\xi}(x+1)\right] = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2}{\xi} \end{aligned}$$

因为  $\xi$  介于  $x^2+x$  与  $x^2+2x+1$ , 由夹逼准则可知：

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)[\ln(x^2+x) - 2\ln(1+x)] = -1$$

法三：由 L'Hospital 法则可知：注意到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^2+x) - 2\ln(1+x)] = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

记  $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)[\ln(x^2+x) - 2\ln(1+x)]$ , 则

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+x) - 2\ln(1+x)}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x+1}{x^2+x} - \frac{2}{1+x}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} \\ &= -\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2x+1}{x^2+x} - \frac{2x}{(1+x)x} \right] (x+1)^2 = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+x} = -1 \end{aligned}$$

所以  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)[\ln(x^2+x) - 2\ln(1+x)] = -1$ .

法四： $\ln(x^2+x)$  和  $\ln(1+x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  的渐近展开式。注意到：

$$\ln(x^2+x) = 2\ln x + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \ln(1+x) = \ln x + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)[\ln(x^2+x) - 2\ln(1+x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[ 2\ln x + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 2 \left( \ln x + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[ -\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = -1. \end{aligned}$$

**例 1.3.58.** 求极限  $I = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left[ e^{(1+\frac{1}{x})^x} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ex} \right]$ .

作变量代换:  $t = \frac{1}{x}$ , 则有

$$I = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{(1+t)^{t^{-1}}} - (1+t)^{\frac{e}{t}}}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{(1+t)^{t^{-1}}} - e^{\frac{e \ln(1+t)}{t}}}{t^2}$$

令  $f(t) = (1+t)^{t^{-1}}$ ,  $g(t) = \frac{e \ln(1+t)}{t}$ , 则  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0$ , 由 Lagrange 中值定理, 得

$$e^{f(t)} - e^{g(t)} = e^\xi (f(t) - g(t))$$

其中  $\xi$  介于  $f(t)$  与  $g(t)$  之间, 当  $t \rightarrow 0$  时,  $\xi \rightarrow e$ , 所以  $e^{f(t)} - e^{g(t)} \sim e^e [f(t) - g(t)]$ , 故

$$I = e^e \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - g(t)}{t^2} = e^{e+1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{\frac{\ln(1+t)}{t}-1} - \frac{\ln(1+t)}{t}}{t}}{t^2}$$

记  $\alpha(t) = \frac{\ln(1+t)}{t} - 1$  ( $t \rightarrow 0, \alpha(t) \rightarrow 0$ ), 由  $e^{\alpha(t)}$  的 Taylor 展开, 得

$$e^{\alpha(t)} = 1 + \alpha(t) + \frac{1}{2!} \alpha^2(t) + o(\alpha^2(t)) = \frac{\ln(1+t)}{t} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\ln(1+t) - t}{t} \right]^2 + o(\alpha^2(t))$$

因此

$$I = e^{e+1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{[\ln(1+t) - t]^2}{t^4} = \frac{1}{2} e^{e+1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left[ -\frac{t^2}{2} + o(t^2) \right]^2}{t^4} = \frac{1}{8} e^{e+1}.$$

**例 1.3.59.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + e^{\tan x})^{\frac{1}{x}} - (\tan x + e^{\sin x})^{\frac{1}{x}}}{x^3}$

改写极限式, 有

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + e^{\tan x})^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} [\ln(\sin x + e^{\tan x}) - \ln(\tan x + e^{\sin x})]}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + e^{\tan x})^{\frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - \tan x - (e^{\sin x} - \sin x)}{x^4} \\ &= \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(\sin x + e^{\tan x}) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x - \sin x) f'(\xi_x)}{x^4} \end{aligned}$$

其中

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(\sin x + e^{\tan x}) = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\sin x + e^{\tan x} - 1) = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \tan x}{x} = e^2$$

$\xi_x$  介于  $\sin x$  与  $\tan x$  之间, 并且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x - \sin x) f'(\xi_x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^3 f'(\xi_x)}{x^4} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi_x)}{x} = \frac{1}{2}$$

这是因为  $f'(x) = e^x - 1 \rightarrow x$  ( $x \rightarrow 0$ ), 以及当  $x \rightarrow 0^+$  时,

$$0 \leftarrow \sin x < \xi_x < \tan x \rightarrow 0$$

当  $x \rightarrow 0^-$  时,

$$0 \leftarrow \tan x < \xi_x < \sin x \rightarrow 0$$

于是  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi_x)}{x} = 1$ , 综上原式  $= \frac{e^2}{2}$ .

**例 1.3.60.** 设  $f(x)$  在  $x = a$  的某邻域内有三阶连续导数, 且  $f'(a) \neq 0$ , 令

$$\varphi(x) = \left[ \frac{f'(x) + f'(a)}{2f(x) - 2f(a)} \right]^2 - \left( \frac{1}{x-a} \right)^2$$

计算极限  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ .

考虑  $f(x)$  在  $x = a$  处的 Taylor 展开,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x - a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(\xi)(x - a)^3$$

于是

$$2f(x) - 2f(a) = 2f'(a)(x - a) + f''(a)(x - a)^2 + \frac{1}{3}f'''(\xi)(x - a)^3$$

其中  $\xi$  介于  $x$  与  $a$  之间, 同理, 考虑  $f'(x)$  在  $x = a$  处的 Taylor 展开,

$$f'(x) = f'(a) + f''(a)(x - a) + \frac{1}{2!}f'''(\eta)(x - a)^2$$

于是

$$f'(x) + f'(a) = 2f'(a) + f''(a)(x - a) + \frac{1}{2}f'''(\eta)(x - a)^2$$

其中  $\eta$  介于  $x$  与  $a$  之间, 将两式代入极限式, 并通分, 于是分子为

$$\begin{aligned} & (x - a)^2 \left[ 2f'(a) + f''(a)(x - a) + \frac{f'''(\eta)}{2}(x - a)^2 \right]^2 - \left[ 2f'(a)(x - a) + f''(a)(x - a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3}(x - a)^3 \right]^2 \\ &= f'(a) \left[ 2f'''(\eta) - \frac{4}{3}f'''(\xi) \right] (x - a)^4 + o((x - a)^4) \end{aligned}$$

分母为

$$\left[ 2f'(a) + f''(a)(x - a) + \frac{f'''(\xi)}{3}(x - a)^2 \right]^2 (x - a)^4 = 4[f'(a)]^2(x - a)^4 + o((x - a)^4)$$

分式求  $x \rightarrow a$  的极限, 都只考虑分子、分母中的最低次幂, 并且都为  $(x - a)^4$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2f'''(\eta) - \frac{4}{3}f'''(\xi)}{4f'(a)}$$

由于  $f(x)$  在  $x = a$  的某个邻域内有三阶连续导数, 故  $f'''(\eta) = f'''(\xi) = f'''(a)$ , 于是原极限为  $\frac{f'''(a)}{6f'(a)}$ .

### 利用积分等价求极限

**定理 1.3.14 (等价积分).** 设  $f$  与  $g$  连续, 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\alpha(x), \beta(x)$  均为无穷小,  $\alpha(x) \sim \beta(x)$  且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f}{g} = 1$ , 则

$$\int_0^{\alpha(x)} f dt \sim \int_0^{\beta(x)} g dt.$$

**例 1.3.61.** 把  $x \rightarrow 0^+$  时的无穷小量

$$\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt, \beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt, \gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$$

排列起来, 使排列在后的是前一项的高阶无穷小量, 则正确的排列次序为

- A.  $\alpha, \beta, \gamma$       B.  $\alpha, \gamma, \beta$       C.  $\beta, \alpha, \gamma$       D.  $\beta, \gamma, \alpha$

由定理 1.3.14 可知, 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 有

$$\alpha \sim \int_0^x dt = x, \beta \sim \int_0^{x^2} \sqrt{t} dt = \frac{2}{3}x^3, \gamma \sim \int_0^{\sqrt{x}} t^3 dt = \frac{1}{4}x^2$$

因此  $\gamma$  是  $\alpha$  的高阶无穷小量,  $\beta$  是  $\gamma, \alpha$  的高阶无穷小量, 所以有排列  $\alpha, \gamma, \beta$ , 选 B.

**例 1.3.62.** 求下列极限值.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{[x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})] \int_0^{\ln(1+x)} \cos t^2 dt}. \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2(\sec x - 1)} - \sqrt[3]{6(x - \sin x)}}{\int_0^{x^2} \arctan(e^{\sqrt{t}} - 1) dt}.$$

(1) 分子:  $\cos(\sin x) - \cos x = (x - \sin x) \sin \xi$ , 其中  $\xi$  介于  $\sin x$  与  $x$  之间, 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 有  $\sin x < \xi < x$ , 那么

$$1 \leftarrow \frac{\sin x}{x} < \frac{\xi}{x} < \frac{x}{x} \rightarrow 1 (x \rightarrow 0)$$

即  $\xi \sim x$ ; 当  $x \rightarrow 0^-$ , 同理可得  $\xi \sim x$ , 于是  $\xi \sim x (x \rightarrow 0)$ , 则

$$(x - \sin x) \sin \xi \sim (x - \sin x)x \sim \frac{1}{6}x^4$$

分母:  $\int_0^{\ln(1+x)} \cos t^2 dt \sim \int_0^x dt = x (x \rightarrow 0)$ , 并且

$$x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \sim e^x [\ln e^x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})] \sim e^x - x - \sqrt{1+x^2}$$

又

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4), (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

那么  $e^x - x - \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$ , 因此原式 =  $\frac{\frac{1}{6}x^4}{\frac{1}{6}x^3 \cdot x} = 1$ .

(2) 分母:  $\int_0^{x^2} \arctan(e^{\sqrt{t}} - 1) dt \sim \int_0^{x^2} (e^{\sqrt{t}} - 1) dt \sim \int_0^{x^2} \sqrt{t} dt \rightarrow \frac{2}{3}x^3 (x \rightarrow 0^+)$ , 则考虑将分子展开到  $x^3$  阶, 故

$$\begin{aligned} \sqrt{2(\sec x - 1)} - \sqrt[3]{6(x - \sin x)} &\sim \sqrt{2(\sec x - 1)} \left[ \frac{1}{2} \ln 2(\sec x - 1) - \frac{1}{3} \ln 6(x - \sin x) \right] \\ &\sim x \left[ \frac{1}{2} \ln 2(\sec x - 1) - \frac{1}{3} \ln 6(x - \sin x) \right] (x \rightarrow 0^+) \end{aligned}$$

那么中括号中须展开到  $x^2$  阶, 不妨先减去  $\frac{1}{2} \ln x^2$ , 再加  $\frac{1}{2} \ln x^2$  即  $\left(\frac{1}{6} \ln x^6\right)$ , 则前项

$$\frac{1}{2} \ln 2(\sec x - 1) - \frac{1}{2} \ln x^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{2(\sec x - 1)}{x^2} \sim \frac{1}{2} \left[ \frac{2(\sec x - 1)}{x^2} - 1 \right]$$

又因为

$$\sec x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{5}{4!}x^4 + o(x^5)$$

则上式化为  $\frac{5}{4!}x^2 (x \rightarrow 0^+)$ , 后项有

$$\frac{1}{6} \ln x^6 - \frac{1}{3} \ln 6(x - \sin x) = \frac{1}{6} \ln x^6 - \frac{1}{6} \ln 36(x - \sin x)^2 = -\frac{1}{6} \ln \frac{36(x - \sin x)^2}{x^6}$$

其中

$$\ln \frac{36(x - \sin x)^2}{x^6} \sim \frac{36(x - \sin x)^2 - x^6}{x^6} = \frac{[6(x - \sin x) + x^3][6(x - \sin x) - x^3]}{x^6} (x \rightarrow 0^+)$$

那么上式分子则要展开到  $x^8$  阶, 于是

$$\begin{aligned} 6(x - \sin x) + x^3 &= 6 \left( \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4) + x^3 \right) = 2x^3 \\ 6(x - \sin x) - x^3 &= 6 \left( \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6) \right) - x^3 = -\frac{6}{5!}x^5 (x \rightarrow 0^+) \end{aligned}$$

故  $-\frac{1}{6} \ln \frac{36(x - \sin x)^2}{x^6} \sim -\frac{1}{6} \cdot \frac{2x^3 \cdot \left(-\frac{6}{5!}x^5\right)}{x^6} \sim \frac{2}{5!}x^2 (x \rightarrow 0^+)$ , 综上原极限

$$I = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \left( \frac{5}{4!}x^2 + \frac{2}{5!}x^2 \right)}{\frac{2}{3}x^3} = \left( \frac{5}{4!} + \frac{2}{5!} \right) \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{80}.$$

## 利用积分定义求极限

**定理 1.3.15 (定积分与极限式).** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) \cdot \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx.$$

**引理 1.3.2.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ .

证 原式  $= \exp \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln \sqrt[n]{n!} - \ln n) = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n} = e^{\int_0^1 \ln x dx} = e^{-1}$ .

**例 1.3.63.** 求下列极限值.

$$\begin{array}{l} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left( \sqrt[3]{1 + \frac{i}{n^2}} - 1 \right). \quad | \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \cos \frac{i\pi}{2n}}. \quad | \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i \cos \frac{i}{n}}{n^2 + i}. \\ (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}. \quad | \quad (5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \right]. \quad | \quad (6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n + \frac{1}{k}}. \end{array}$$

$$(1) \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} \frac{i}{n^2} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} = \frac{1}{3} \int_0^1 x dx = \frac{1}{6}.$$

$$(2) \text{ 原式} = \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{2} \cdot \frac{i}{n}} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \cos \frac{\pi}{2} x} \stackrel{\frac{\pi}{2}x=t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \cos t} = \frac{1}{2}.$$

$$(3) \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{i}{n} \cos \frac{i}{n}}{1 + \frac{i}{n^2}} := \lim_{n \rightarrow \infty} f$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{i}{n} \cos \frac{i}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \cos \frac{i}{n} = \int_0^1 x \cos x dx = \sin 1 + \cos 1 - 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{i}{n} \cos \frac{i}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \cos \frac{i}{n} = \sin 1 + \cos 1 - 1$$

由夹逼准则得, 原式  $= \sin 1 + \cos 1 - 1$ .

$$(4) \text{ 原式} = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \text{ 其中}$$

$$\ln \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \ln(2n)! - 2 \ln(n!) = \sum_{i=1}^{2n} \ln i - 2 \sum_{i=1}^n \ln i = \sum_{i=1}^n \ln \frac{n+i}{i} = \sum_{i=1}^n \ln \frac{1 + \frac{i}{n}}{\frac{i}{n}}$$

$$\text{故, 原式化为 } \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{1 + \frac{i}{n}}{\frac{i}{n}} = \exp \int_0^1 \ln \frac{1+x}{x} dx = 4, \text{ 其中}$$

$$\int_0^1 \ln \frac{1+x}{x} dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 2 \ln 2.$$

(5) 注意到  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ , 则有

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+\sqrt[n]{(n+1)!}}{n+1} \left[ \frac{\ln(n+1)!}{n+1} - \frac{\ln n!}{n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+\sqrt[n]{(n+1)!}}{n+1} \left( \sum_{k=1}^{n+1} \ln k - \frac{n+1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+\sqrt[n]{(n+1)!}}{n+1} \left[ \ln(n+1) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+\sqrt[n]{(n+1)!}}{n+1} \left( -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n+1} \right) \end{aligned}$$

其中,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+\sqrt[n]{(n+1)!}}{n+1} = \frac{1}{e}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n+1} = -\int_0^1 \ln x dx = 1$ , 综上, 原式  $= \frac{1}{e}$ .

(6) 注意到有  $\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+1} < \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} < \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n}$ , 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}$$

由夹逼准则得原极限为  $\frac{1}{\ln 2}$ .

**例 1.3.64.** 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \ln(n+k) - \frac{n+1}{2n} \ln n \right]$ .

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln(n+k) - \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln n \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right) = \int_0^1 x \ln(1+x) dx, \text{ 其中}$$

$$\int_0^1 x \ln(1+x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+x) dx^2 = \frac{1}{2} \left[ x^2 \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \right] = \frac{1}{4}.$$

**例 1.3.65.** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \prod_{i=1}^{2n} (n^2 + i^2)^{\frac{1}{n}}$ .

令  $I_n = \frac{1}{n^4} \prod_{i=1}^{2n} (n^2 + i^2)^{\frac{1}{n}}$ , 则

$$\ln I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} \ln(n^2 + i^2) - \ln n^4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} \left[ \ln \left( 1 + \left( \frac{i}{n} \right)^2 \right) + 2 \ln n \right] - 4 \ln n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} \ln \left( 1 + \left( \frac{i}{n} \right)^2 \right)$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \exp \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} \ln \left( 1 + \left( \frac{i}{n} \right)^2 \right) = \exp \int_0^2 \ln(1+x^2) dx \\ &= \exp [x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x]_0^2 = 25 \exp(2 \arctan 2 - 4). \end{aligned}$$

**例 1.3.66.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n \frac{\left( \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \right)^2}{\left( \sum_{k=1}^n \sqrt[3]{k} \right)^3} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{n+k} \right) \sin \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right) \right] \right\}$ .

将待求极限分为两部分,

$$I_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\left( \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \right)^2}{\left( \sum_{k=1}^n \sqrt[3]{k} \right)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\left( \frac{1}{n \cdot \sqrt[3]{n}} \right)^3 \left( \frac{1}{n \sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \right)^2}{\left( \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}} \right)^2 \left( \frac{1}{n \sqrt[3]{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt[3]{k} \right)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\frac{1}{n^3 n} \cdot \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \right)^2}{\frac{1}{n^2 n} \cdot \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt[3]{\frac{k}{n}} \right)^3}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt[k]{\frac{k}{n}} \right)^2}{\left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt[3]{\frac{k}{n}} \right)^3} = \frac{\left( \int_0^1 \sqrt{x} dx \right)^2}{\left( \int_0^1 \sqrt[3]{x} dx \right)^3} = \frac{\left( \frac{2}{3} \right)^2}{\left( \frac{3}{4} \right)^3} = \frac{256}{243} \\
I_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{n+k} \right) \sin \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \sin \ln 2 \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \cdot \sin \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \ln 2}{2n} = \int_0^1 \frac{\sin \ln(1+x)}{1+x} dx \\
&= - \int_0^1 d(\cos \ln(1+x)) = 1 - \cos \ln 2
\end{aligned}$$

故原极限为  $\frac{499}{243} - \cos \ln 2$ .

$$\text{推论 1.3.7. } \lim_{n \rightarrow \infty} n^{j-i} \frac{\left( \sum_{k=1}^n \sqrt[i]{k} \right)^i}{\left( \sum_{k=1}^n \sqrt[j]{k} \right)^j} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{j-i} \frac{\left( \sum_{k=1}^n \sqrt[i]{\frac{k}{n}} \cdot \sqrt[i]{n} \right)^i}{\left( \sum_{k=1}^n \sqrt[j]{\frac{k}{n}} \cdot \sqrt[j]{n} \right)^j} = \frac{\left( \frac{i}{i+1} \right)^i}{\left( \frac{j}{j+1} \right)^j}.$$

**例 1.3.67.** 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt[n]{2n+1}} \left( \int_1^{\frac{1}{2^n}} e^{-y^2} dy + \int_1^{\frac{3}{2^n}} e^{-y^2} dy + \cdots + \int_1^{\frac{2n-1}{2^n}} e^{-y^2} dy \right)$ .

$$\sqrt[n]{2} - 1 = 2^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n} \ln 2} - 1 \sim \frac{1}{n} \ln 2 \quad (n \rightarrow \infty), \text{ 且 } \sqrt[n]{2n+1} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \ln 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_1^{\frac{2k-1}{2^n}} e^{-y^2} dy = \ln 2 \int_0^1 dx \int_0^x e^{-y^2} dy \\
&= -\ln 2 \int_0^1 dy \int_0^y e^{-y^2} dx = \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 e^{-y^2} d(-y^2) = \frac{\ln 2}{2} (e^{-1} - 1).
\end{aligned}$$

**定理 1.3.16 (不等分积分与极限式).** 对于  $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ , 当  $i = 1$  时,  $x_{i-1}$  值为区间左端点; 当  $i = n$  时,  $x_i$  值为区间右端点.

**例 1.3.68.** 计算极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \sum_{i=0}^{n-1} 2^{\frac{i}{n}} \sin 2^{\frac{2i+1}{2n}}$ .

原式等于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left( 2^{\frac{i+1}{n}} - 2^{\frac{i}{n}} \right) \sin 2^{\frac{2i+1}{2n}}$ , 可以看出函数  $\sin x$  在  $[1, 2]$  上按照下列方式划分

$$1 = 2^{\frac{0}{n}} < 2^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{2}{n}} < \cdots < 2^{\frac{n}{n}} = 2$$

其中  $\Delta x_i = 2^{\frac{i+1}{n}} - 2^{\frac{i}{n}}$ ,  $\xi_i = 2^{\frac{2i+1}{2n}} \in \left[ 2^{\frac{i}{n}}, 2^{\frac{i+1}{n}} \right]$ , 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \sum_{i=0}^{n-1} 2^{\frac{i}{n}} \sin 2^{\frac{2i+1}{2n}} = \int_1^2 \sin x dx = \cos 2 - \cos 1.$$

## 利用收敛级数通项趋向零求极限

利用级数收敛的必要条件是求极限为 0 的数列极限的方法之一.

**例 1.3.69.** 求下列极限值

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \cdot n!}{(2n)^n}. \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdots (3n)}. \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11 \cdot 12 \cdots (n+10)}{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}.$$

$$(1) x_n = \frac{5^n \cdot n!}{(2n)^n}, \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{5^{n+1}(n+1)!}{(2n+2)^{n+1}} \cdot \frac{(2n)^n}{5^n n!} = \frac{5}{2} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{5}{2} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n} \rightarrow \frac{5}{2e} < 1, n \rightarrow \infty, \text{ 故正项级数}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{(2n)^n}$  收敛, 从而通项  $x_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ .

$$(2) x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdots (3n)}, \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2n+1}{3n+3} \rightarrow \frac{2}{3} < 1 (n \rightarrow \infty), \text{ 故正项级数 } \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdots (3n)} \text{ 收敛, 从而通项 } x_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

$$(3) x_n = \frac{11 \cdot 12 \cdots (n+10)}{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}, \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+11}{3n+2} \rightarrow \frac{1}{3} < 1 (n \rightarrow \infty), \text{ 故正项级数 } \frac{11 \cdot 12 \cdots (n+10)}{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)} \text{ 收敛, 从而通项 } x_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

## 利用导数的定义

如果所求极限可凑成某个可导函数的增量, 那么可利用导数的定义来求得该极限, 这种方法多用于求抽象函数的不定式极限.

**例 1.3.70.** 若  $f(1) = 0, f'(1)$  存在, 求极限  $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) \cdot \tan 3x}{(e^{x^2} - 1) \cdot \sin x}$ .

考虑导数的定义, 有

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3f(\sin^2 x + \cos x)}{x^2} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) - f(1)}{\sin^2 x + \cos x - 1} \cdot \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2} \\ &= 3f'(1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} \right) = \frac{3}{2}f'(1). \end{aligned}$$

**例 1.3.71.** 求极限  $I = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^3 + 9} \cdot \sqrt[3]{2x^2 - 17} - 16}{4 - \sqrt{x^3 - 23} \cdot \sqrt[3]{3x^2 - 19}}$ .

记  $f(x) = \sqrt{x^3 + 9} \cdot \sqrt[3]{2x^2 - 17}, g(x) = \sqrt{x^3 - 23} \cdot \sqrt[3]{3x^2 - 19}$ , 则  $f(3) = 6, g(3) = 4$ , 于是

$$I = - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{f(x) - f(3)}{x - 3}}{\frac{g(x) - g(3)}{x - 3}} = - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

对  $f(x)$  取对数并求导, 有

$$\frac{d}{dx} (\ln f(x)) = \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2} \ln(x^3 + 9) + \frac{1}{3} \ln(2x^2 - 17) \right] = \frac{1}{2} \frac{3x^2}{x^3 + 9} + \frac{1}{3} \frac{4x}{2x^2 - 17}$$

所以  $f'(3) = \frac{105}{4}$ , 同理可得  $g'(3) = \frac{33}{2}$ , 于是  $I = - \frac{35}{22}$ .

$$\prod_{k=1}^n \left( \frac{1+kx}{1-kx} \right)^{\frac{1}{2k}} - 1$$

**例 1.3.72.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3\pi \arcsin x - (x^2 - 1) \arctan^3 x}$ , 其中  $n$  为正整数.

记  $f(x) = \prod_{k=1}^n \left( \frac{1+kx}{1-kx} \right)^{\frac{1}{2k}}$ , 那么  $f(0) = 1$ , 且  $\ln f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \ln \left( \frac{1+kx}{1-kx} \right)$ , 那么

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \frac{2k}{(1+kx)(1-kx)} \Rightarrow f'(0) = n$$

因此, 原式化为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3\pi \arcsin x - (x^2 - 1) \arctan^3 x} \cdot \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f'(0)}{3\pi} = \frac{n}{3\pi}$ .

### 利用高等变形求极限

**例 1.3.73.** 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt[n]{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2) + \cdots + (x+\alpha_n)} - x \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i$ .

**证** 先证:  $A^n - B^n = (A - B) \sum_{i=1}^n A^{i-1} B^{n-i}$ , 过程如下:

**引理 1.3.3.**  $A^n - 1 = (A - 1) \sum_{i=1}^n A^{i-1}$ . (证明略)

$$\begin{aligned} A^n - B^n &= B^n \left[ \left( \frac{A}{B} \right)^n - 1 \right] = B^n \left( \frac{A}{B} - 1 \right) \sum_{i=1}^n \left( \frac{A}{B} \right)^{i-1} \\ &= (A - B) B^{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{A}{B} \right)^{i-1} = (A - B) \sum_{i=1}^n A^{i-1} B^{n-i} \end{aligned}$$

则有  $\prod_{i=1}^n (x + \alpha_i) - x^n = \left[ \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (x + \alpha_i)} - x \right] \sum_{j=1}^n \left[ \prod_{i=1}^n (x + \alpha_i)^{\frac{n-j}{n}} \right] x^{j-1}$ , 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\prod_{i=1}^n (x + \alpha_i) - x}{\sum_{j=1}^n \left[ \prod_{i=1}^n (x + \alpha_i)^{\frac{n-j}{n}} \right] x^{j-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{n-1} \sum_{i=1}^n \alpha_i + \dots + \prod_{i=1}^n \alpha_i}{\sum_{j=1}^n \left[ \prod_{i=1}^n (x + \alpha_i)^{\frac{n-j}{n}} \right] \cdot x^{j-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i + o\left(\frac{1}{x}\right)}{\sum_{j=1}^n \left[ \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\alpha_i}{x}\right)^{\frac{n-j}{n}} \right]} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i. \end{aligned}$$

**例 1.3.74.** 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \prod_{m=1}^n \left(1 - \frac{1}{m} + \frac{5}{4m^2}\right)$ .

由 Euler 乘积公式:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}$$

将  $z$  替换为  $iz$ , 并且有  $\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$ , 得

$$\frac{\sin i\pi z}{i\pi z} = \frac{e^{\pi z} - e^{-\pi z}}{2\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C} \quad (1)$$

取  $z = 1, 2$ , 代入式 (1) 中, 得

$$\frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right), \quad \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{4\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4}{n^2}\right) \quad (2)$$

记  $x_n = \prod_{m=1}^n \left(1 - \frac{1}{m} + \frac{5}{4m^2}\right) = \prod_{m=1}^n \frac{(2m-1)^2 + 4}{4m^2}$ , 式 (2) 取极限得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{2n} \left(1 + \frac{4}{k^2}\right) = \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{4\pi}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} \quad (3)$$

并且

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{2n} \left(1 + \frac{4}{k^2}\right) &= \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{4}{4m^2}\right) \cdot \prod_{m=1}^n \left[1 + \frac{4}{(2m-1)^2}\right] \\ &= \prod_{m=1}^n \frac{4m^2 + 4}{4m^2} \cdot \prod_{m=1}^n \frac{(2m-1)^2 + 4}{(2m-1)^2} = \prod_{m=1}^n \frac{4(m^2+1)}{(2m-1)^2} \cdot \prod_{m=1}^n \frac{(2m-1)^2 + 4}{4m^2} \\ &= 4^n \prod_{m=1}^n \frac{m^2+1}{m^2} \cdot \prod_{m=1}^n \frac{m^2}{(2m-1)^2} \cdot x_n = \left( \prod_{m=1}^n \frac{m^2+1}{m^2} \right) \cdot \frac{4^{2n} (n!)^4}{((2n)!)^2} \cdot x_n \end{aligned}$$

由 Stirling 公式  $n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ , 得

$$\frac{4^{2n} (n!)^4}{((2n)!)^2} = \pi n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

因此

$$\prod_{k=1}^{2n} \left(1 + \frac{4}{k^2}\right) = \left(\prod_{m=1}^n \frac{m^2 + 1}{m^2}\right) \cdot \pi (nx_n) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 由式 (3) 得

$$\frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{4\pi} = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} \cdot \pi \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2\pi}.$$

### 1.3.6 Stolz 定理及其应用

Stolz 定理是求解和证明数列极限的一种重要方法, 它有  $\frac{0}{0}$  型和  $\frac{*}{\infty}$  型两种形式.

#### 数列的情况

**定理 1.3.17 (\*/ $\infty$  型).** 设数列  $\{a_n\}$  是严格递增的无穷大量, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = l$ , ( $l$  为有限或  $\pm\infty$ ), 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = l.$$

**定理 1.3.18 (0/0 型).** 设数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  都是无穷小量, 且  $\{a_n\}$  严格单调递减, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = l$  ( $l$  为有限或  $\pm\infty$ ), 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = l.$$

定理 1.3.17 其实只要求分母  $x_n$  严格单调递增趋向无穷大, 至于分子  $y_n$  是否趋向无穷大, 无关紧要; 定理 1.3.18 则是名副其实的  $\frac{0}{0}$  型.

**例 1.3.75.** 计算极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt[3]{k^3 + k^2}$ .

$$\text{原式 } \xrightarrow{\text{Stolz}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n+1} - \sum_{k=1}^n\right) \sqrt[3]{k^3 + k^2}}{n + 1 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{(n+1)^3 + (n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

**例 1.3.76.** 设  $\alpha > 1$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + k^\alpha}$ .

当  $\alpha > 1$  时, 由基本不等式  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ , 得

$$n + k^\alpha \geq 2\sqrt{nk^\alpha}$$

所以有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + k^\alpha} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\sqrt{nk^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^\alpha}} \\ &\xrightarrow{\text{Stolz}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^n - \sum_{k=1}^{n-1}\right) \frac{1}{\sqrt{k^\alpha}}}{2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n^\alpha}} = 0 \end{aligned}$$

故由夹逼准则得原极限等于 0.

**推论 1.3.8.** 当  $\alpha$  为正数时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k^\alpha} = \begin{cases} 1, & 0 < \alpha < 1 \\ \ln 2, & \alpha = 1 \\ 0, & \alpha > 1 \end{cases}$ .

证 当  $\alpha = 1$  时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$$

当  $\alpha \in (0, 1)$  时, 注意到不等式  $1 \leq k \leq n$  时,

$$\frac{1}{n+n^\alpha} < \frac{1}{n+k^\alpha} < \frac{1}{n+1}$$

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+n^\alpha} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k^\alpha} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n^{\alpha-1}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n^{-1}} = 1$$

由夹逼准则可知,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k^\alpha} = 1$ , 又知当  $\alpha > 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k^\alpha} = 0$ , 故综上所述, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k^\alpha} = \begin{cases} 1, & 0 < \alpha < 1 \\ \ln 2, & \alpha = 1 \\ 0, & \alpha > 1 \end{cases}.$$

**例 1.3.77.** 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$  ( $p$  为自然数).

$$\text{证法一} \quad \text{原式} \xrightarrow{\text{Stolz}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)^p}{(p+1)n^p + \frac{(p+1)p}{2}n^{p-1} + \cdots + 1} = \frac{1}{p+1}.$$

$$\text{证法二} \quad \text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

**例 1.3.78.** 已知数列  $\{x_n\}$  满足条件  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$ .

证 令  $|x_n - x_{n-1}| := y_n = \left| \sum_{k=3}^n (y_k - y_{k-1}) + y_1 \right| \leq \sum_{k=3}^n |y_k - y_{k-1}| + y_2 \leq \sum_{k=3}^n |x_k - x_{k-2}| + |x_2 - x_1|$ , 于是

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_n - x_{n-1}|}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=3}^n |x_k - x_{k-2}| + |x_2 - x_1|}{n} \xrightarrow{\text{Stolz}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_n - x_{n-2}|}{n - (n-1)} = 0$$

由夹逼准则,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$ .

**例 1.3.79.** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$ .

$$\sum_{k=1}^n \ln k$$

**法一:** (积分放缩 + 夹逼准则) 原式  $= \lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n \ln n}} = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n \ln n}$ , 又因为

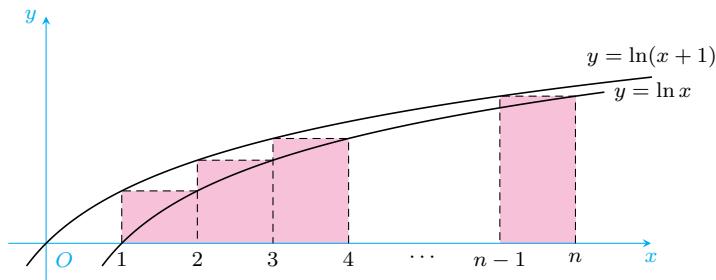


图 1.3.3

由图可知:  $\int_1^n \ln x dx \leq \sum_{k=1}^n \ln k \leq \int_1^n \ln(1+x) dx$  则有

$$\frac{n \ln n - n + 1}{n \ln n} \leq \frac{1}{n \ln n} \sum_{k=1}^n \ln k \leq \frac{(n+1) \ln(n+1) - n}{n \ln n}$$

又因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n - n + 1}{n \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \ln(n+1) - n}{n \ln n} = 1$ , 因此有夹逼准则, 原式=e.

**法二:** (*Stolz 定理 + L'Hospital 法则*) 同上得到和式:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n \ln n} \xrightarrow{\text{Stolz}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n \ln n - (n-1) \ln(n-1)}$  下面考虑该极限  
值  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n - (n-1) \ln(n-1)}{\ln n}$ , 由 *Heine 定理* 将其连续化为函数极限:

$$I' = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x - (x-1) \ln(x-1)}{x \ln x}$$

$$I' \xrightarrow{L'} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 1 - \ln(x-1) - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{x}{x-1} - 1 \right) = 1 \Rightarrow \text{原式}=e.$$

**例 1.3.80.** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{n-1} \left( \frac{2^k}{2^{k+1}-1} \right)^{\frac{1}{2^{n-k}}}.$

取对数降低运算等级, 故

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{n-1} \left( \frac{2^k}{2^{k+1}-1} \right)^{\frac{1}{2^{n-k}}} = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{n-k}} \ln \frac{2^k}{2^{k+1}-1} \\ &= \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \ln \frac{2^k}{2^{k+1}-1} \xrightarrow{\text{Stolz}} \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \sum_{k=1}^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-2} \right) 2^{k-1} \ln \frac{2^k}{2^{k+1}-1} - 1}{2^{n-1} - 2^{n-2}} \\ &= \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-2} \ln \frac{2^{n-1}}{2^n-1}}{2^{n-1} - 2^{n-2}} = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{2 - \frac{1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**例 1.3.81.** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \ln C_n^k$ .

*Stolz* 公式可重复使用,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \xrightarrow{\text{Stolz}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n+1} \ln C_{n+1}^k - \sum_{k=0}^n \ln C_n^k}{(n+1)^2 - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n \frac{C_{n+1}^k}{C_n^k} + \ln C_{n+1}^{n+1}}{2n+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n \ln \frac{n+1}{n-k+1}}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n+1} \ln k}{2n+1} \\
&\stackrel{\text{Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \ln(n+1) - n \ln n - \ln(n+1)}{(2n+1) - (2n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \frac{n+1}{n} \right)^n}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

**例 1.3.82.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \prod_{k=0}^n C_n^k \right)^{\frac{2}{n(n+1)}}$ .

取对数, 降低运算等级, 有

$$\begin{aligned}
I &= \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n(n+1)} \ln \prod_{k=0}^{\infty} C_n^k = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sum_{k=0}^n \ln C_n^k}{n(n+1)} \stackrel{\text{Stolz}}{=} \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sum_{k=0}^{n+1} \ln C_{n+1}^k - 2 \sum_{k=0}^n \ln C_n^k}{(n+1)(n+2) - n(n+1)} \\
&= \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n \ln \frac{n+1}{n-k+1}}{n+1} = \cdots = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{n+1}{n} \right)^n = e.
\end{aligned}$$

**例 1.3.83.** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{\frac{n! (n-1)! \cdots 2!}{n^n (n-1)^{n-1} \cdots 2^2}}$ .

由例题 1.3.10 可知,  $n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n + \frac{\theta_n}{12n}}$ ,  $0 < \theta_n < 1$ , 那么

$$\text{原式} = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=2}^n \ln k! - \sum_{k=2}^n \ln k^k}{n^2} \stackrel{\text{Stolz}}{=} \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n! - \ln n^n}{2n-1} \stackrel{\text{Stirling}}{=} \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \sqrt{2\pi n} e^{-n} + \frac{\theta_n}{12n} \right)}{2n-1} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

**例 1.3.84.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n} \right)$ .

$$\text{记 } m = \frac{\pi^2}{6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2},$$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \stackrel{\text{Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n} - \left( m - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n-1} \right)}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n-1)^2}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n-1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-(n-1)^2 + n^2(n-1) - n(n-1)^2}{(n-1)^2 - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{1-2n} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

**例 1.3.85.**  $\{C_n^k\}_{k=0}^n$  为二项式系数,  $A_n, G_n$  分别表示它们的算术平均值和几何平均值, 试证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n} = 2, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{G_n} = \sqrt{e}.$$

**证** 因为  $A_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n C_n^k = \frac{2^n}{n+1}$ ,  $G_n = \left( \prod_{k=0}^n C_n^k \right)^{\frac{1}{n+1}} = e^{\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \ln C_n^k}$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n+1}} = 2$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{G_n} &= \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n \ln C_n^k}{n(n+1)} \stackrel{\text{Stolz}}{=} \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n \ln C_n^k - \sum_{k=0}^{n-1} \ln C_{n-1}^k}{2n} \\
&= \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \ln C_n^k - \sum_{k=1}^{n-2} \ln C_{n-1}^k}{2n} = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-2} \frac{C_n^k}{C_{n-1}^k} + \ln C_n^{n-1}}{2n} \\
&= \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-2} \ln \frac{n}{n-k} + \ln n}{2n} = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{n-k}{n} \right) \\
&= \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1-x) dx \right] = \sqrt{e}.
\end{aligned}$$

### 函数极限的情况

Stolz 定理可推广到函数极限的情况.

**定理 1.3.19 ( $\infty/\infty$  型).** 若  $T > 0$  为常数, 且满足

$$(1) \ g(x+T) > g(x), \forall x \geq a;$$

$$(2) \ g(x) \rightarrow +\infty (x \rightarrow +\infty), \text{ 且 } f, g \text{ 在 } [a, +\infty) \text{ 内闭有界};$$

$$(3) \ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = l.$$

则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ , (其中  $l$  为有限数,  $+\infty$  或  $-\infty$ ).

**定理 1.3.20 (0/0 型).** 若  $T > 0$  为常数, 且

$$(1) \ 0 < g(x+T) < g(x), \forall x \geq a;$$

$$(2) \ \lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} g = 0;$$

$$(3) \ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = l.$$

则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ , (其中  $l$  为有限数,  $+\infty$  或  $-\infty$ ).

**例 1.3.86.** 设  $f$  在  $[a, +\infty)$  上有定义, 且内闭有界 (即  $\forall [\alpha, \beta] \subset (a, +\infty), f$  在  $[\alpha, \beta]$  上有界),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} = l$$

其中  $l$  为有限数,  $+\infty$  或  $-\infty$ , 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{l}{n+1}$ .

运用函数的 Stolz 定理, 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1)^{n+1} - x^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{(n+1)x^n + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}x^{n-1} + \dots + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x+1) - f(x)}{x^n}}{(n+1) + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x^n}} = \frac{l}{n+1} \quad (l \text{ 为 } +\infty, -\infty \text{ 也成立}). \end{aligned}$$

### Stolz 的应用

**例 1.3.87.** 对于数列  $x_0 = a, 0 < a < \frac{\pi}{2}, x_n = \sin x_{n-1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n = 1.$$

证

(1) 因为  $0 < a < \frac{\pi}{2}, x_0 = a$ , 递推可知

$$0 < x_n = \sin x_{n-1} < x_{n-1} < \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$\{x_n\}$  单调递减且有下界 0,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在. 记  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 知  $A = \sin A \Rightarrow A = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

(2) 要证  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n = 1$ , 即证  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = 3$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} &\stackrel{\text{Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - (n-1)}{\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_{n-1}^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x_{n-1}} - \frac{1}{x_{n-1}^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n-1}^2 \sin^2 x_n - 1}{x_{n-1}^2 - \sin^2 x_{n-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{(x + \sin x)(x - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{(2x + o(x)) \left( \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(2 + o(1)) \left( \frac{1}{6} + o(1) \right)} = 3. \end{aligned}$$

得证  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n = 1$ .

**例 1.3.88.** 设  $0 < a_1 < 1, a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ), 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 1$ .

证 由  $0 < x_1 < 1$  及  $x_2 = x_1(1 - x_1)$  知,  $0 < x_2 < 1$ , 用数学归纳法可证:  $\forall n \in \mathbb{N}^*: 0 < x_n < 1$ , 于是  $0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - x_n < 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 从而  $\{x_n\} \searrow 0$ , 不妨设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 递推关系式两边取极限, 得  $A = A(1 - A)$ , 解得  $A = 0$ . 令  $b_n = \frac{1}{x_n}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ , 且数列  $\{b_n\}$  是严格单调递增, 故由 Stolz 定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x_n) = 1.$$

**例 1.3.89.** 设  $x_1 > 0, x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n$ .

$x_2 = \ln(1 + x_1) > 0$ , 用数学归纳法可证  $\forall n \in \mathbb{N}^*: x_n > 0$ , 又  $x_1 > 0, x_{n+1} = \ln(1 + x_n) < x_n$ , 故数列  $\{x_n\} \searrow 0$ , 那么

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} \stackrel{\text{Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{\ln(1 + x_{n-1})} - \frac{1}{x_{n-1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n-1} \ln(1 + x_{n-1})}{x_{n-1} - \ln(1 + x_{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x_{n-1}^2}{2}}{\frac{1}{2} x_{n-1}^2} = 2. \end{aligned}$$

**例 1.3.90.** 设数列  $\{x_n\}$  满足  $x_n = \sin(x_{n-1})$ , 其中  $n = 1, 2, 3, \dots$ , 且满足  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 求极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot x_n^2.$$

因为  $x_n = \sin(x_{n-1}), n = 1, 2, \dots$ , 且  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 由数学归纳法可知:  $x_n > 0$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ), 且  $x_n = \sin(x_{n-1}) < x_{n-1}$ , 所以, 数列  $\{x_n\}$  单调递减且有下界, 故数列  $\{x_n\}$  收敛, 设  $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ , 在等式两边  $x_n = \sin(x_{n-1})$  两边取极限可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(x_{n-1}) = \sin\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n-1}\right) \Rightarrow A = 0$$

因此  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n^2} = +\infty$ , 由 Stolz 定理可知,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot x_n^2 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - (n-1)}{\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_{n-1}^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n^2 x_{n-1}^2}{(x_{n-1} + x_n)(x_{n-1} - x_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n-1}^4}{(x_{n-1} + \sin(x_{n-1}))(x_{n-1} - \sin(x_{n-1}))} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n-1}^4}{2x_{n-1} \cdot \frac{1}{6} x_{n-1}^3} = 3. \end{aligned}$$

**例 1.3.91.** 序列  $a_{ij} = \frac{i+j}{i^2 + j^2}$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$ .

由 Stolz ( $*/\infty$  型) 得<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i+j}{i^2 + j^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \right) \frac{i+j}{i^2 + j^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 2 \left( \sum_{k=1}^n \frac{(n+1)+k}{(n+1)^2 + k^2} \right) + \frac{1}{n+1} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{2}{n+1} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1 + \frac{k}{n+1}}{1 + \left( \frac{k}{n+1} \right)^2} \right) + \frac{1}{n+1} \right] = 2 \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} + \ln 2. \end{aligned}$$

**例 1.3.92.** 序列  $a_{ij} = \frac{ij}{\sqrt{i^2 + j^2 + ai + bj + c}}$ ,  $a, b, c$  为非负实数, 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$ .

令  $y_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{ij}{\sqrt{i^2 + j^2}}$ , 那么

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &\stackrel{\text{Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \right) \frac{ij}{\sqrt{i^2 + j^2}}}{3n^2 + 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[ 2 \left( \sum_{k=1}^n \frac{k(n+1)}{\sqrt{k^2 + (n+1)^2}} \right) + \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right]}{3n^2 + 3n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^2}{3n^2 + 3n + 1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k/(n+1)}{\sqrt{1 + (k/(n+1))^2}} = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{2}{3} (\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

考虑  $\delta > 0$  的情况, 令  $z_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{ij}{\sqrt{(i+\delta)^2 + (j+\delta)^2}}$ , 下证  $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - y_n) = 0$ ,

$$d_n = z_n - y_n = \frac{-1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{(2\delta^2 + 2\delta i + 2\delta j) ij}{\sqrt{(i+\delta)^2 + (j+\delta)^2} \sqrt{i^2 + j^2} \left( \sqrt{(i+\delta)^2 + (j+\delta)^2} + \sqrt{i^2 + j^2} \right)}$$

由  $\sqrt{i^2 + j^2} \geq \sqrt{2ij}$ , 因此

$$\begin{aligned} |d_n| &\leq \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{(2\delta^2 + 2\delta i + 2\delta j) ij}{(i^2 + j^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\delta^2 + \delta i + \delta j}{\sqrt{i}\sqrt{j}} \\ &= \frac{\delta^2}{\sqrt{2}n^3} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} \right) \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{j}} \right) + \frac{\delta}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{j}} \right) \left( \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sqrt{i} \right) + \frac{\delta}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} \right) \left( \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sqrt{j} \right) \end{aligned}$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{j}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sqrt{j} = 0$$

于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ , 令  $x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$ , 且  $\xi = \max \left\{ \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \sqrt{\frac{c}{2}} \right\}$ , 得

$$i^2 + j^2 \leq i^2 + j^2 + ai + bj + c \leq (i + \xi)^2 + (j + \xi)^2$$

因此  $z_n \leq x_n \leq y_n$ , 两边取极限, 由夹逼准则得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = \frac{2}{3} (\sqrt{2} - 1)$ .

<sup>2</sup>以下的括号不为矩阵符号,

$$\begin{aligned} &\left( \begin{array}{ccccc} \frac{1+1}{1^2+1^2} & + & \frac{1+2}{1^2+2^2} & + & \cdots & + & \frac{1+n}{1^2+n^2} & + & \frac{1+n+1}{1^2+(n+1)^2} \\ + & \frac{2+1}{2^2+1^2} & + & \frac{2+2}{2^2+2^2} & + & \cdots & + & \frac{2+n}{2^2+n^2} & + & \frac{2+n+1}{2^2+(n+1)^2} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ + & \frac{n+1}{n^2+1^2} & + & \frac{n+2}{n^2+2^2} & + & \cdots & + & \frac{n+n}{n^2+n^2} & + & \frac{n+n+1}{n^2+(n+1)^2} \\ + & \frac{n+1+n}{(n+1)^2+1^2} & + & \frac{n+1+n+2}{(n+1)^2+2^2} & + & \cdots & + & \frac{n+1+n+n}{(n+1)^2+n^2} & + & \frac{n+1+n+n+1}{(n+1)^2+(n+1)^2} \end{array} \right) \\ &- \left( \begin{array}{ccccc} \frac{1+1}{1^2+1^2} & + & \frac{1+2}{1^2+2^2} & + & \cdots & + & \frac{1+n}{1^2+n^2} \\ + & \frac{2+1}{2^2+1^2} & + & \frac{2+2}{2^2+2^2} & + & \cdots & + & \frac{2+n}{2^2+n^2} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\ + & \frac{n+1}{n^2+1^2} & + & \frac{n+2}{n^2+2^2} & + & \cdots & + & \frac{n+n}{n^2+n^2} \end{array} \right) = 2 \left[ \sum_{k=1}^n \frac{(n+1)+k}{(n+1)^2+k^2} \right] + \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

## 1.4 极限典型问题

这一节讨论与极限相关联的三类典型问题, 即极限的存在性问题、极限的局部逆问题和无穷小量及其阶的比较.

### 1.4.1 极限的存在性问题

讨论极限的存在性, 是高等数学中既十分典型又经常遇到的问题, 在研究非初等函数的连续性与可导性, 往往归结为这类问题.

**例 1.4.1.** 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^{x^2} \sqrt{1 + \tan^2 t} dt}{2x^2}, & x < 0 \\ \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\ln(1 + x^2)}, & x > 0 \end{cases}$$

求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

利用 L'Hospital 法则易求得在  $x = 0$  处的左右极限值,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\int_0^{x^2} \sqrt{1 + \tan^2 t} dt}{2x^2} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x \cdot \sqrt{1 + \tan^2 x^2}}{4x} = \frac{1}{2}$$

并且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\ln(1 + x^2)} = \frac{1}{2}$$

由  $f(0^-) = f(0^+) = \frac{1}{2}$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$ .

### 1.4.2 极限的局部逆问题

如果已知函数的极限存在, 但是在函数的表达式中含有一个 (或多个) 待定的参数, 要求确定待定参数的值, 这就是所谓的函数极限的局部逆问题.

**例 1.4.2 (2018 数二).** 若  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + ax^2 + bx)^{x^{-2}} = 1$ , 则

- A.  $a = \frac{1}{2}, b = -1$       B.  $a = -\frac{1}{2}, b = -1$       C.  $a = \frac{1}{2}, b = 1$       D.  $a = -\frac{1}{2}, b = 1$

由题设条件  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + ax^2 + bx)^{x^{-2}} = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln(e^x + ax^2 + bx) = 1$ , 于是有  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + ax^2 + bx)}{x^2} = 0$ , 即

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + ax^2 + bx)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + ax^2 + bx + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + ax^2 + bx + 1 + o(x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{1}{2} + a \right) + \frac{b+1}{x} + \frac{2}{x^2} \right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} + a = 0 \\ 1 + b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

故解得选 B.

**例 1.4.3 (2018 数一).** 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right)^{\frac{1}{\sin kx}} = e$ , 求  $k$ .

$$\exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin kx} \ln \left( \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right) = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \tan x) - \ln(1 + \tan x)}{\sin kx} = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \tan x}{\xi_x \cdot \sin kx} = e, \text{ 于是}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \tan x}{\xi_x \cdot \sin kx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{\xi_x k} = 1 \Rightarrow k = -2$$

其中  $\xi_x \rightarrow 1 (x \rightarrow 0)$ .

**例 1.4.4.** 试确定常数  $A, B, C$ , 使下式当  $x \rightarrow 0$  时成立:

$$\frac{e^{\sin x}}{\sin x} = \frac{1 + Bx + Cx^2}{x + Ax^2} + o(x^2).$$

将所给等式两边同时乘以  $(1 + Ax) \sin x$ , 并注意到  $x \rightarrow 0$  时,  $(1 + Ax) \sin x \cdot o(x^2) = o(x^3)$ , 得

$$(1 + Ax)e^{\sin x} = \frac{\sin x}{x}(1 + Bx + Cx^2) + o(x^3)$$

将  $e^{\sin x}, \frac{\sin x}{x}$  分别展开到  $x$  的三阶, 于是有

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$$

代入上式, 得

$$\begin{aligned} \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)(1 + Ax) &= \left(1 - \frac{1}{6}x^2\right)(1 + Bx + Cx^2) + o(x^3) \\ (A + 1 - B)x + \left(A - C + \frac{2}{3}\right)x^2 + \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{6}\right)x^3 &= o(x^3) \end{aligned}$$

欲使上式成立, 必须有  $\begin{cases} A + 1 - B = 0 \\ A - C + \frac{1}{3} = 0 \\ \frac{A}{2} + \frac{B}{6} = 0 \end{cases}$ , 联立解得  $A = -\frac{1}{4}$ ,  $B = \frac{3}{4}$ ,  $C = \frac{5}{12}$ .

### 1.4.3 无穷小量及其阶的比较

有关无穷小量的概念可参考定义 1.3.1.

**例 1.4.5 (1999 数二).** 设  $\alpha(x) = \int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt$ ,  $\beta(x) = \int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $\alpha(x)$  是  $\beta(x)$  的

- |               |          |
|---------------|----------|
| A. 高阶无穷小      | B. 低阶无穷小 |
| C. 同阶但不等价的无穷小 | D. 等价无穷小 |

因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt}{\int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5}{(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \frac{5}{e}$$

所以  $\alpha(x)$  是  $\beta(x)$  同阶但不等价的无穷小.

**例 1.4.6 (2019 数一).** 当  $x \rightarrow 0$  时, 若  $x - \tan x$  与  $x^k$  是同阶无穷小, 则  $k$  等于

- |      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| A. 1 | B. 2 | C. 3 | D. 4 |
|------|------|------|------|

由于当  $x \rightarrow 0$  时,  $x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = -\frac{1}{3}$ , 所以  $k = 3$ , 选 C.

**例 1.4.7.** 设  $x \rightarrow 0$  时,  $e^{x \cos x^2} - e^x$  与  $x^n$  是同阶无穷小, 则  $n$  为

- A. 5      B. 4      C. 3      D. 2

因为  $e^{x \cos x^2} - e^x = e^x [e^{x(\cos x^2 - 1)} - 1] \sim x(\cos x^2 - 1) \sim -\frac{1}{2}x^5$ , 所以  $n = 5$ , 故选 A

**例 1.4.8 (2001 数二).** 设当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$  是比  $x \sin x^n$  高阶的无穷小, 而  $x \sin x^n$  是比  $e^{x^2} - 1$  高阶的无穷小, 则正整数  $n$

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

因为  $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2) \sim \frac{1}{2}x^4$ ,  $x \sin x^n \sim x^{n+1}$ ,  $e^{x^2} - 1 \sim x^2$ , 由题意知  $4 > n + 1 > 2$ , 解得  $n = 2$ , 故选 B.

## 1.5 递推形式的极限

有些数列, 常常是利用递推的形式给出的, 如何计算这类数列的极限, 是本节的重点. 此类问题在各类考试中比较常见, 需多加注意.

### 1.5.1 利用存在性求极限

假若用某种方法证明了递推数列的极限存在, 则在递推公式里取极限, 便可得到极限值  $A$  应满足的方程, 解此方程, 可求得极限值  $A$ .

**定理 1.5.1 (单调有界准则).** 若  $x_n \nearrow$  有上界, 或  $x_n \searrow$  有下界, 则  $\{x_n\}$  收敛.

判断单调性的通常方法有:

$$(1) \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} - x_n \begin{cases} \geq 0, & x_n \nearrow, \\ \leq 0, & x_n \searrow. \end{cases}$$

$$(2) \forall n \in \mathbb{N} : \frac{x_{n+1}}{x_n} \begin{cases} \geq 1, & x_n \nearrow, \\ \leq 1, & x_n \searrow. \end{cases}$$

$$(3) \text{若 } x_{n+1} = f(x_n), f'(x) \geq 0, \text{ 则 } \begin{cases} x_1 \leq x_2, & x_n \nearrow, \\ x_1 \geq x_2, & x_n \searrow. \end{cases}$$

**定理 1.5.2 (压缩映射).** 对于任一数列  $\{x_n\}$  而言, 若存在常数  $r$ , 使得  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 恒有

$$|x_{n+1} - x_n| \leq r|x_n - x_{n-1}|, 0 < r < 1$$

则数列  $\{x_n\}$  收敛；特别地，若数列  $\{x_n\}$  利用递推公式给出： $x_{n+1} = f(x_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ )，其中  $f$  为某一可微函数，且  $\exists r \in \mathbb{R}$ ，使得

$$|f'(x)| \leq r < 1$$

则数列  $\{x_n\}$  收敛。若上式只在某区间  $D$  上成立，则必须验证数列  $\{x_n\}$  是否保持在区间  $D$  内。

**定理 1.5.3 (不动点迭代).** 求解非线性方程(组)的一类常见的数值解法。例如，单个方程的求根问题  $f(x) = 0$  总可以等价地写成  $x = \phi(x)$ ，其中  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是一个辅助函数，满足该式的点  $x$  称为不动点。如果给定初始点  $x(0)$ ，就可以考虑如下的不动点迭代法：

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

函数  $\phi$  亦称为迭代函数。

如果迭代函数  $\phi$  是一个闭区间上的压缩映射(或者迭代函数连续可微，且导数的绝对值在该闭区间上严格小于 1)，则不动点迭代法产生的序列  $\{x^{(k)}\}$  收敛到  $\phi$  在区间上的不动点。

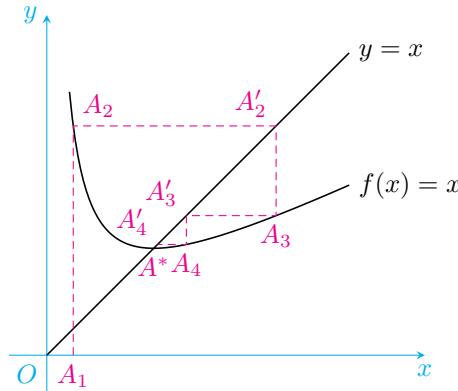


图 1.5.1

**例 1.5.1.** 设数列  $\{x_n\}$  满足： $x_0 = 1, x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )，证明  $\{x_n\}$  收敛，并求极限值。

证法一  $x_n = \sqrt{2x_{n-1}} = \sqrt{2\sqrt{2x_{n-2}}} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\dots\sqrt{2}}}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}} = 2^{1 - \frac{1}{2^n}} \rightarrow 2$  ( $n \rightarrow \infty$ )。

证法二 显然  $1 \leq x_0 < 2$ ，假设  $1 \leq x_k < 2$ ，则  $1 \leq x_{k+1} = \sqrt{2x_k} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$ ，故由数学归纳法知， $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq x_n < 2$ ，又由  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{2x_n}}{x_n} = \sqrt{\frac{2}{x_n}} > 1$ ，知  $\{x_n\} \nearrow$ ，所以由单调有界原理得  $\{x_n\}$  收敛，不妨记  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ ，则在递推公式里取极限，有  $A = \sqrt{2A} \Rightarrow A = 0, 2$ ，而由  $x_n \geq 1$ ，知  $A \geq 1$ ，故取  $A = 2$ ，即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 。

证法三 令  $f(x) = \sqrt{2x}$  ( $x > 0$ )，则  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} > 0$  ( $x > 0$ )，于是当  $x > 0$  时， $f(x) \nearrow$ ，从而有  $x_n > x_{n-1}$ ，可得  $x_{n+1} = f(x_n) > f(x_{n-1}) = x_n$ ，而  $x_1 = \sqrt{2} > x_0 = 1$ ，故有  $x_1 < x_2 < \dots$ ，即  $\{x_n\} \nearrow$ ，其余证法同证法 2。

证法四 如证法 2，已有  $1 \leq x_n < 2$ ，对  $f(x) = \sqrt{2x}$ ，有

$$|f'(x)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2x}} \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} < 1$$

满足压缩映射条件，其余证法同证法 2。

证法五 由递推关系式两边取对数, 得  $\ln x_{n+1} = \frac{1}{2} \ln x_n + \frac{1}{2} \ln 2$ , 令  $b_n = \ln x_n$ , 则

$$b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} \ln 2, b_0 = 0$$

记  $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \ln 2$ , 则  $b_{n+1} = f(b_n)$ , 又由特征方程  $x = f(x)$ , 解得特征根  $x = \ln 2$ , 所以

$$b_n - \ln 2 = \left( \frac{1}{2}b_{n-1} + \frac{1}{2} \ln 2 \right) - \left( \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \frac{1}{2}(b_{n-1} - \ln 2) = \left( \frac{1}{2} \right)^n \cdot (b_0 - \ln 2) = -\ln 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^n$$

于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - \ln 2) = 0$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ .

**推论 1.5.1.** 一般地, 设  $a, x_0 > 0, x_{n+1} = \sqrt{ax}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), 则数列  $\{x_n\}$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

**例 1.5.2.** 已知  $x_1 = \sqrt{6}$ ,  $x_n = \sqrt{6+x_{n-1}}$  ( $n = 2, 3, \dots$ ), 证明数列  $\{x_n\}$  有极限, 并求其值.

证法一 用数学归纳法可证:  $0 < x_n < 3$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),

因为  $x_{n+1} - n = \sqrt{6+x_n} - \sqrt{6+x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{6+x_n} + \sqrt{6+x_{n-1}}}$ , 所以  $x_{n+1} - x_n$  与  $x_n - x_{n-1}$  同号, 又  $x_2 = \sqrt{6+\sqrt{6}} > \sqrt{6} = x_1$ , 所以  $x_{n+1} > x_n$ , 即  $\{x_n\} \nearrow 3$ , 由单调有界准则知,  $\{x_n\}$  收敛.

证法二 先假设数列  $\{x_n\}$  收敛, 不妨设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 则由递推关系式两边取极限, 得  $A = \sqrt{6+A}$ , 解得  $A = 3, -2$ , 因为  $x_n > 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 所以  $A = 3$ , 下证数列  $\{x_n\}$  收敛于 3.

记  $q = \frac{1}{\sqrt{6}+3}$ , 则有

$$|x_n - 3| = \left| \sqrt{6+x_{n-1}} - 3 \right| = \frac{|x_{n-1} - 3|}{\sqrt{6+x_{n-1}} + 3} < q \cdot |x_{n-1} - 3| < \dots < q^{n-1} \cdot |x_1 - 3|$$

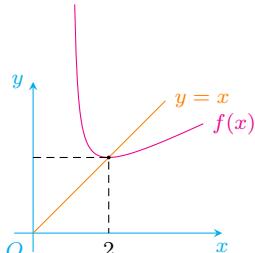
而由  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ , 故由极限的定义或者夹逼准则, 可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ .

**例 1.5.3.** 已知数列  $\{x_n\}$  满足  $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2(x_n - 1)}$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), 且  $x_0 > 1$ , 证明: 数列  $\{x_n\}$  收敛, 并求其极限.

因为  $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2(x_n - 1)} = \frac{x_n^2 - 1 + 1}{2(x_n - 1)} = \frac{(x_n - 1)(x_n + 1) + 1}{2(x_n - 1)} = 1 + \frac{x_n - 1}{2} + \frac{1}{2(x_n - 1)} \geq 2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),

法一: 令  $f(x) = \frac{x^2}{2(x-1)}$ , 则

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{2(x-1)^2} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{(x-1)^2} \right]$$



所以  $|f'(x)| = \left| \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{(x-1)^2} \right] \right| < \frac{1}{2} < 1$ , 表明  $x_{n+1} = f(x_n)$  是一压缩映像, 所

以  $\{x_n\}$  收敛, 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 不妨记为  $A$ , 对  $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2(x_n - 1)}$  两边取极限, 有

$$A = \frac{A^2}{2(A-1)} \Rightarrow A = 2, \text{ 由极限的保序性可得 } A = 2, \text{ 即原数列极限为 } 2.$$

法二:  $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2}{2(x_n - 1)} - x_n = -\frac{x_n(x_n - 2)}{2(x_n - 1)} < 0$ , 则  $\{x_n\} \searrow$ , 同法一可得数列极限为 2.

法三: 取<sup>3</sup>  $A = 2$ , 则  $A = \frac{A^2}{2(A-1)}$ , 作

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - A| &= \left| \frac{x_n^2}{2(x_n - 1)} - \frac{A^2}{2(A-1)} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{x_n^2 - 1 + 1}{x_n - 1} - \frac{A^2 - 1 + 1}{A-1} \right| = \frac{1}{2} \left| x_n + 1 + \frac{1}{x_n - 1} - (A+1) - \frac{1}{A-1} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| x_n - A + \frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{A-1} \right| < |x_n - A| \end{aligned}$$

因此

$$|x_{n+1} - A| < \frac{1}{2} |x_n - A| < \dots < \frac{1}{2^{n+1}} |x_0 - A| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

故由夹逼准则 (或数列极限的定义) 可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ .

<sup>3</sup>由图 1.5.2 可知在  $x > 1$  处有一个不动点  $x = 2$ .

**例 1.5.4.** (试用三种方法求) 设  $x_1 > 0$ ,  $x_{n+1} = \frac{c(1+x_n)}{c+x_n}$  ( $c$  为常数), 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**法一:** (用单调有界准则) 若  $x_1 = \sqrt{c}$ , 则  $x_n = \sqrt{c}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ),  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{c}$ , 若  $x_1 > \sqrt{c}$ , 因  $f(x) := \frac{c(1+x)}{c+x} = c - \frac{c(c-1)}{c+x}$  严格  $\nearrow$ , 故  $\forall n \in \mathbb{N}: x_n > \sqrt{c} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{c(1+x_n)}{c+x_n} = f(x_n) > f(\sqrt{c}) = \sqrt{c}$ , 由  $x_1 > \sqrt{c}$  可递推出  $x_n > \sqrt{c}$ , 又因为  $x_{n+1} - x_n = \frac{c-x_n^2}{c+x_n} < 0$ , 知  $x_n$  严格  $\nearrow$ , 故  $\{x_n\}$  收敛, 同理可证, 当  $0 < x_1 < \sqrt{c}$  时,  $x_n \nearrow \sqrt{c}$ , 综上,  $\{x_n\}$  单调有界, 极限存在, 令递推式  $\frac{c(1+x_n)}{c+x_n}$  两边取极限, 得极限为  $\sqrt{c}$ .

**法二:** (用压缩映射) 因为  $x_n > 0$ , 且  $x > 0$  时,  $f'(x) = \left[ \frac{c(1+x)}{c+x} \right]' = \frac{c(c-1)}{(c+x)^2} > 0$ , 又  $c > 1$  知  $0 < f'(x) = \frac{c(c-1)}{(c+x)^2} \leq \frac{c(c-1)}{c^2} = 1 - \frac{1}{c} < 1 (\forall x > 0)$

故  $x_{n+1} = f(x_n)$  为压缩映射,  $\{x_n\}$  收敛, 同上由  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{c}$ .

**法三:** 显然对一切  $x_n > 0$ , 令  $f(x) = \frac{c(1+x)}{c+x} = x$ , 知不动点  $x^* = \sqrt{c}$ , 而  $f \nearrow$  保证了  $x_n$  位于不动点  $x^*$  的同一侧, 且  $\left[ x - \frac{c(1+x)}{c+x} \right] (x - \sqrt{c}) = \frac{cx + x^2 - c - cx}{c+x} (x - \sqrt{c}) = \frac{x + \sqrt{c}}{c+x} (x + \sqrt{c})^2 > 0$

意味着  $x_n$  向  $x^*$  步步靠近, 根据不动点迭代法知,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{c}$ .

**例 1.5.5.** 设  $a, x_0 > 0$ ,  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), 证明数列  $\{x_n\}$  收敛, 并求其值.

**证法一** 由算术平均数大于几何平均数得  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \geq \sqrt{a}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), 于是  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{a}{x_n^2} \right) \leq 1$ , 即  $x_{n+1} \leq x_n$ , 从而数列  $\{x_n\} \searrow \sqrt{a}$ , 故数列收敛, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 则由递推关系式两边取极限解得  $A = \pm \sqrt{a}$ , 因为  $x_n \geq \sqrt{a}$ , 所以极限为  $\sqrt{a}$ .

**证法二** 由已知  $x_n > 0$ , 且

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) - x_n = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{x_n} - x_n \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{\frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right)} - \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{-(x_{n-1}^2 - a)^a}{x_{n-1} \cdot (x_{n-1}^2 + a)} < 0 (n \geq 2) \end{aligned}$$

所以  $\{x_n\} \searrow 0$ , 同解法 1, 可求得极限值为  $\sqrt{a}$ .

**证法三** 由  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \geq \sqrt{a}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), 所以  $x_{n+1} - \sqrt{a} = (x_n - \sqrt{a}) \cdot \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{a}}{x_n} \right)$ , 反复利用该递推公式, 得

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = (x_1 - \sqrt{a}) \cdot \frac{1}{2^n} \left( 1 - \frac{\sqrt{a}}{x_1} \right) \left( 1 - \frac{\sqrt{a}}{x_2} \right) \cdots \left( 1 - \frac{\sqrt{a}}{x_n} \right)$$

于是  $|x_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2^n} \cdot |x_1 - \sqrt{a}|$ , 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ , 由夹逼准则得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} - \sqrt{a} = 0$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$ .

**推论 1.5.2.** 一般地, 设  $a, x_1 > 0, m \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_{n+1} = \frac{1}{m} \left[ (m-1)x_n + \frac{a}{x_n^{m-1}} \right]$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt[m]{a}$ .

**例 1.5.6.** 设  $a, x_0 > 0$ ,  $x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), 证明数列  $\{x_n\}$  收敛, 并求极限值.

令  $f(x) = \frac{x(x^2 + 3a)}{3x^2 + a}$ , 则  $f'(x) = \frac{3(x^2 - a^2)^2}{(3x^2 + a)^2} \geq 0$ ,  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,

若  $x_0 \geq \sqrt{a}$ , 则  $x_1 = f(x_0) \geq f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ , 由  $x_n \geq \sqrt{a}$  可得  $x_{n+1} = f(x_n) \geq f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ , 于是由数学归纳法得  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq \sqrt{a}$ , 又  $x_1 = \frac{x_0(x_0^2 + 3a)}{3x_0^2 + a} \leq x_0$ , 由  $f'(x) \geq 0$  得  $x_2 = f(x_1) \leq f(x_0) = x_1$ , 反复利用此关系, 即得  $x_{n+1} \leq x_n$ , 于是数列  $\{x_n\} \searrow \sqrt{a}$ , 故数列  $\{x_n\}$  收敛,

若  $0 < x_0 < \sqrt{a}$ , 则类似上面可证得  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < x_n < \sqrt{a}$  且  $x_{n+1} \geq x_n$ , 于是数列  $\{x_n\} \nearrow \sqrt{a}$ , 故数列  $\{x_n\}$  收敛, 不妨设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 易得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$ .

$$x_n^k + \sum_{i=1}^{[k/2]} C_k^{2i} \cdot x_n^{k-2i} \cdot a^i$$

**推论 1.5.3.** 一般地, 设  $k \geq 2, k \in \mathbb{N}^*, x_0 > 0$ , 令  $x_{n+1} = \frac{x_n^k + \sum_{i=0}^{[(k-1)/2]} C_k^{2i+1} \cdot x_n^{k-2i-1} \cdot a^i}{\sum_{i=0}^{[(k-1)/2]} C_k^{2i+1} \cdot x_n^{k-2i-1} \cdot a^i}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), 则

数列  $\{x_n\}$   $k$  阶收敛于  $\sqrt{a}$ .

事实上, 因为  $\frac{x_{n+1} - \sqrt{a}}{x_{n+1} + \sqrt{a}} = \left( \frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}} \right)^k = \dots = \left( \frac{x_1 - \sqrt{a}}{x_1 + \sqrt{a}} \right)^{k^n}$ , 所以有

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = 2\sqrt{a} \frac{\gamma^{k^n}}{1 - \gamma^{k^n}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - \sqrt{a}}{(x_n - \sqrt{a})^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} + \sqrt{a}}{(x_n + \sqrt{a})^k} = \frac{1}{(2\sqrt{a})^{k-1}}.$$

## 1.5.2 写出通项求极限

### 利用不动点求通项

在前小节介绍了不动点迭代法, 下文将介绍如何运用不动点解决两种类型的数列通项问题.

**例 1.5.7.** 已知  $a_{n+1} = \frac{a \cdot a_n + b}{c \cdot a_n + d}$  ( $c \neq 0$ ), 且  $ad - bc \neq 0$ ,  $a, b, c, d$  都是常数, 求通项  $a_n$ .

设  $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$  ( $c, ad - bc \neq 0$ ),  $\{a_n\}$  满足递归关系  $a_{n+1} = f(a_n)$ , 且初始值  $a_1 \neq f(a_1)$ .

(1) 若  $f$  有两相异的不动点  $p, q$ , 则  $\frac{a_{n+1} - p}{a_{n+1} - q} = k \cdot \frac{a_n - p}{a_n - q}$ , 其中  $k = \frac{a - pc}{b - qc}$ , 即  $\left\{ \frac{a_n - p}{a_n - q} \right\}$  是以  $k$  为公比的等比数列, 由此解得

$$a_n = \frac{(a_1 q - pq) k^{n-1} - (a_1 p - pq)}{(a_1 - p) k^{n-1} - (a_1 - q)}.$$

(2) 若  $f$  只有一个不动点  $p$ , 则  $\frac{1}{a_{n+1} - p} = \frac{1}{a_n - p} + k$ , 其中  $k = \frac{2c}{a + d}$ , 即  $\left\{ \frac{1}{a_n - p} \right\}$  是以  $k$  为公差的等差数列, 由此解得

$$a_n = \frac{a_1 - p}{(ka_1 - pk)n + 1 - ka_1 + pk} + k.$$

**例 1.5.8.** 已知  $a_{n+1} = \frac{a \cdot a_n^2 + b}{2a \cdot a_n + c}$  ( $a \neq 0$ ),  $a, b, c$  都是常数, 求通项  $a_n$ .

设递归函数为  $f(x) = \frac{ax^2 + b}{2ax + c}$ , 那么

1. 若  $f$  有两相异的不动点  $p, q$ , 即  $p = \frac{ap^2 + b}{2ap + c}, q = \frac{aq^2 + b}{2aq + c}$ , 则

$$a_{n+1} - p = \frac{a \cdot a_n^2 + b}{2a \cdot a_n + c} - p = \frac{a \cdot a_n^2 + b - 2apa_n - pc}{2a \cdot a_n + c} = \frac{a \cdot a_n^2 - 2apa_n + ap^2}{2a \cdot a_n + c} = \frac{a(a-p)^2}{2a \cdot a_n + c}$$

同理  $a_{n+1} - q = \frac{a(a_n - q)^2}{2a \cdot a_n + c}$ , 两式相除, 得

$$\frac{a_{n+1} - p}{a_{n+1} - q} = \left( \frac{a_n - p}{a_n - q} \right)^2 = \left( \frac{a_{n-1} - p}{a_{n-1} - q} \right)^2 = \dots = \left( \frac{a_1 - p}{a_1 - q} \right)^{2^{n-1}}$$

由此解得,  $a_n = \frac{q(a_1 - p)^{2^{n-1}} - p(a_1 - q)^{2^{n-1}}}{(a_1 - p)^{2^{n-1}} - (a_1 - q)^{2^{n-1}}}$ .

2. 若  $f$  有两相同的不动点  $p$ , 易得  $p = -\frac{c}{2a}$ , 由  $a_{n+1} - p = a_{n+1} + \frac{c}{2a} = \frac{a \cdot a_n^2 + b}{2a \cdot a_n + c} + \frac{c}{2a}$ , 令  $b_n = a_n + \frac{c}{2a_n}$ , 化简可得  $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$ , 即  $b_n = \left(a_1 + \frac{c}{2a}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ , 由此解得

$$a_n = \left(a_1 + \frac{c}{2a}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{c}{2a}.$$

**例 1.5.9.** 设数列  $\{x_n\}$  满足  $x_1 = 2, x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 证明数列  $\{x_n\}$  收敛, 并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

证法一 记  $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ , 则  $x_{n+1} = f(x_n)$ , 由  $f(x) = x$  解得不动点为  $p = 1 + \sqrt{2}, q = 1 - \sqrt{2}$ , 于是

$$\frac{x_n - p}{x_n - q} = \frac{q}{p} \cdot \frac{x_{n-1} - p}{x_{n-1} - q} = \dots = \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} \cdot \frac{x_1 - p}{x_2 - q}$$

而  $\left|\frac{q}{p}\right| = \left|\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}\right| < 1$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - p}{x_n - q} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 + \sqrt{2}$ .

证法二 假设数列  $\{x_n\}$  的极限存在, 不妨设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则由递推关系式两边取极限解得  $a = 1 \pm \sqrt{2}$ , 又因为

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + 2 > 2$$

所以  $a \geq 2$ , 故取  $a = 1 + \sqrt{2}$ , 下证数列  $\{x_n\}$  的极限存在,

$$\begin{aligned} |x_n - a| &= \left| \left(2 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) - \left(2 + \frac{1}{a}\right) \right| = \left| \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|x_{n-1} - a|}{ax_{n-1}} < \frac{|x_{n-1} - a|}{4} \\ &< \frac{1}{4^2} |x_{n-2} - a| < \dots < \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot |x_1 - a| = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot |1 - \sqrt{2}| = \frac{\sqrt{2} - 1}{4^{n-1}} \end{aligned}$$

所以由夹逼准则或极限的定义得  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 + \sqrt{2}$ .

**推论 1.5.4.** 一般地, 设  $a, b, x_1 > 0, x_n = a + \frac{b}{x_{n-1}}$  ( $n = 2, 3, \dots$ ), 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{a + \sqrt{4b + a^2}}{2}$ .

**例 1.5.10.** 设数列  $\{x_n\}$  满足  $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{C(1+x_n)}{C+x_n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $C > 1$  为常数, 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

法一: 由递推关系式  $x_n = \frac{C(1+x_{n-1})}{C+x_{n-1}}$  得

$$\begin{aligned} x_n + \sqrt{C} &= \sqrt{C} \cdot (1 + \sqrt{C}) \cdot \frac{x_{n-1} + \sqrt{C}}{x_{n-1} + C}, \\ \frac{1}{x_n + \sqrt{C}} &= \frac{1}{C + \sqrt{C}} \cdot \frac{x_{n-1} + C}{x_{n-1} + \sqrt{C}} = \frac{1}{C + \sqrt{C}} + \frac{C - \sqrt{C}}{C + \sqrt{C}} \cdot \frac{1}{x_{n-1} + \sqrt{C}} \end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{x_n + \sqrt{C}} - \frac{1}{2\sqrt{C}} = \frac{C - \sqrt{C}}{C + \sqrt{C}} \cdot \left( \frac{1}{x_{n-1} + \sqrt{C}} - \frac{1}{2\sqrt{C}} \right) = \dots = \left( \frac{C - \sqrt{C}}{C + \sqrt{C}} \right)^{n-1} \cdot \left( \frac{1}{x_1 + \sqrt{C}} - \frac{1}{2\sqrt{C}} \right)$$

因为  $\left| \frac{C - \sqrt{C}}{C + \sqrt{C}} \right| < 1$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{C - \sqrt{C}}{C + \sqrt{C}} \right)^{n-1} = 0$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n + \sqrt{C}} = \frac{1}{2\sqrt{C}}$ ,

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sqrt{C}) = 2\sqrt{C}$ , 即得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{C}$ .

法二: 因为  $x_n > 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $C > 1$ , 且

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{C(1+x_{n+1})}{C+x_{n+1}} - x_{n+1} = \frac{C - x_{n+1}^2}{C+x_{n+1}} = \frac{C - \left(\frac{C(1+x_n)}{C+x_n}\right)^2}{C + \frac{C(1+x_n)}{C+x_n}} = \frac{(C-1)(C-x_n^2)}{(C+2x_n+1)(C+x_n)}$$

所以  $\frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} = \frac{\frac{(C-1)(C-x_n^2)}{(C+2x_n+1)(C+x_n)}}{\frac{C-x_n^2}{C+x_n}} = \frac{C-1}{C+2x_n+1} > 0$ , 于是  $x_{n+2} - x_{n+1}$  与  $x_{n+1} - x_n$  同号, 从而知  $\{x_n\}$  为单调递增数列, 又由  $0 < x_{n+1} = \frac{C(1+x_n)}{C+x_n} < \frac{C(1+x_n)}{1+x_n} = C$ , 可知数列  $\{x_n\}$  有界, 从而由单调有界原理知数列  $\{x_n\}$  收敛, 不妨记  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , 则由递推关系式两边取极限得  $l = \frac{C(1+l)}{C+l}$ , 解得  $l = \pm\sqrt{C}$ , 而由  $x_n > 0$ , 知  $l \geq 0$ , 故取  $l = \sqrt{C}$ , 即得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{C}$ .

**法三:** 假设数列  $\{x_n\}$  收敛, 不妨设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 则由递推关系式两边取极限, 得  $A = \frac{C(1+A)}{C+A}$ , 解得  $A = \pm\sqrt{C}$ , 又因为  $x_n > 0$ , 所以  $A \geq 0$ , 故  $A = \sqrt{C}$ , 以下证明数列  $\{x_n\}$  收敛且以  $\sqrt{C}$  为极限, 因为

$$\begin{aligned} |x_n - \sqrt{C}| &= \left| \frac{C(1+x_{n-1})}{C+x_{n-1}} - \sqrt{C} \right| = \left| \frac{(C-\sqrt{C}) \cdot (x_{n-1} - \sqrt{C})}{C+x_{n-1}} \right| < \frac{C-\sqrt{C}}{C} \cdot |x_{n-1} - \sqrt{C}| \\ &< \left( \frac{C-\sqrt{C}}{C} \right)^{n-1} \cdot |x_1 - \sqrt{C}| \end{aligned}$$

且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{C-\sqrt{C}}{C} \right)^{n-1} = 0$ , 所以由夹逼准则得  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \sqrt{C}| = 0$ , 即得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{C}$ .

**法四:** 令  $f(x) = \frac{C(1+x)}{C+x}$ , 则由  $f(x) = x$  求得  $f(x)$  的不动点  $x_1 = \sqrt{C}, x_2 = -\sqrt{C}$ , 于是

$$x_n - \sqrt{C} = \frac{(C-\sqrt{C}) \cdot (x_{n-1} - \sqrt{C})}{C+x_{n-1}}, \quad x_n + \sqrt{C} = \frac{(C+\sqrt{C}) \cdot (x_{n-1} + \sqrt{C})}{C+x_{n-1}}$$

从而

$$\frac{x_n - \sqrt{C}}{x_n + \sqrt{C}} = \frac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}} \cdot \frac{x_{n-1} - \sqrt{C}}{x_{n-1} + \sqrt{C}} = \cdots = \left( \frac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}} \right)^{n-1} \cdot \frac{x_1 - \sqrt{C}}{x_1 + \sqrt{C}}$$

故由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}} \right)^{n-1} = 0$  得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - \sqrt{C}}{x_n + \sqrt{C}} = 0$ , 即得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{C}$ .

## 利用生成函数求通项

生成函数又称为“母函数”, 当想要了解某数列  $\{a_n\}_0^\infty$  时, 通常设为  $f(t) = \sum_{n=0}^\infty a_n t^n$ , 即只通过一个参数  $t$  表示整个数列。

**定理 1.5.4 (加法性质).** 若  $f(t)$  是  $\{a_n\}_0^\infty$  的生成函数,  $g(t)$  是  $\{b_n\}_0^\infty$  的生成函数, 则  $\alpha f(t) + \beta g(t)$  是  $\{\alpha a_n + \beta b_n\}_0^\infty$  的生成函数.

$$\alpha \sum_{n=0}^\infty a_n t^n + \beta \sum_{n=0}^\infty b_n t^n = \sum_{n=0}^\infty (\alpha a_n + \beta b_n) t^n.$$

**定理 1.5.5 (移位性质).** 若  $f(t)$  是  $\{a_n\}_0^\infty$  的生成函数, 则  $t^m f(t)$  是  $\{a_{n-m}\}_m^\infty$  的生成函数.

$$t^m \sum_{n=0}^\infty a_n t^n = \sum_{n=m}^\infty a_{n-m} t^n.$$

**定理 1.5.6 (变换性质).** 显然  $f(ct)$  是序列  $a_0, ca_1, c^2 a_2, \dots$  的生成函数, 特别地  $1, c, c^2, c^3, \dots$  的生成函数是  $\frac{1}{1-ct}$ , 在数列里每隔一项取项时, 有以下常用的技巧:

$$\begin{aligned} \frac{f(t) + f(-t)}{2} &= a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + \dots \\ \frac{f(t) - f(-t)}{2} &= a_1 t + a_3 t^3 + a_5 t^5 + \dots \end{aligned}$$

利用单位复根, 可以推广到每隔  $m - 1$  取第  $m$  项: 令  $\omega = e^{2\pi i/m} = \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)$ , 有

$$\sum_{n \leq 0, n \bmod m = r} a_n t^n = \frac{1}{m} \sum_{0 \leq k \leq m} \omega^{-kr} f(\omega^k t) \quad (0 \leq r < m).$$

**例 1.5.11.** 设数列  $\{x_n\}$  满足:  $x_0 = a, x_1 = b, x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}, n = 1, 2, 3, \dots$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

令  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n$ , 则

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n = a + bt + \sum_{n=2}^{\infty} x_n t^n = a + bt + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} t^n \\ &= a + bt + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \sum_{n=2}^{\infty} x_{n-1} t^{n-1} + \frac{1}{2}t^2 \sum_{n=2}^{\infty} x_{n-2} t^{n-2} = a + bt + \frac{1}{2}t \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} t^{n+1} + \frac{1}{2}t^2 \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n \\ &= a + bt + \frac{1}{2}t(f(t) - a) + \frac{1}{2}t^2 f(t) \end{aligned}$$

$$\text{即 } f(t) = \frac{a + bt - \frac{1}{2}at}{1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t} = \frac{2a + 2bt - at}{2 - t - t^2} = \frac{2a + 2bt - at}{(2+t)(1-t)} = \frac{A}{2+t} + \frac{B}{1-t}, \text{ 比较系数,}$$

$$\text{解得 } A = \frac{4a - 3b}{3}, B = \frac{2b + a}{3}, \text{ 那么}$$

$$f(t) = \frac{4a - 3b}{3} \cdot \frac{1}{2+t} + \frac{2b + a}{3} \cdot \frac{1}{1-t} = \frac{4a - 3b}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n t^n + \frac{2b + a}{3} \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

$$\text{从而 } x_n = \frac{4a - 3b}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2b + a}{3} \rightarrow \frac{2b + a}{3} \quad (n \rightarrow \infty).$$

**推论 1.5.5.** 一般地, 设  $x_0, x_1 > 0, x_{n+1} = kx_n + lx_{n-1} (n = 1, 2, \dots)$ , 其中  $k, l > 0$  且  $k + l = 1$ , 则数列  $\{x_n\}$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{x_1 + lx_0}{1+l}$ .

### 1.5.3 求解线性递推关系

**定义 1.5.1.** 一个常系数的  $k$  阶线性齐次递推关系是形如

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

的递推关系, 其中  $c_1, c_2, \dots, c_k$  是实数,  $c_k \neq 0$ .

这个定义中的递推关系是线性的, 因为它的右边是数列前项的倍数之和; 这个递推关系是齐次的, 因为所出现的各项都是  $a_j$  的倍数.

#### 求解常系数线性齐次递推关系

求解常系数线性齐次递推关系的基本方法是寻找形如  $a_n = r^n$  的解, 其中  $r$  是常数, 注意  $a_n = r^n$  是递推关系  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$  的解, 当且仅当

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \dots + c_k r^{n-k}$$

当等式的两边除以  $r^{n-k}$  并且从左边减去右边时, 可得到等价的方程

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0.$$

因此, 数列  $\{x_n\}$  以  $a_n = r^n$  作为解, 当且仅当  $r$  是这后一个方程的解. 这个方程叫做该递推关系的特征方程, 方程的解叫做这个递推关系的特征根.

**定理 1.5.7 (常系数线性齐次递推定理).** 设  $c_1$  和  $c_2$  是实数, 假设  $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$  有两个不相等的根  $r_1$  和  $r_2$ , 那么数列  $\{x_n\}$  是递推关系  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$  的解, 当且仅当  $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), 其中  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  是常数.

**例 1.5.12.** 设  $a_0 = 2, a_1 = 7$ , 且数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ , 求数列  $\{a_n\}$  的通项.

由递推关系得特征方程为  $r^2 - r - 2 = 0$ , 解得根为  $r_1 = 2, r_2 = -1$ , 因此数列  $\{a_n\}$  是递推关系解当且仅当

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2 \cdot (-1)^n \\ \alpha_{1,2} \text{ 均是常数, 由初始条件得 } \begin{cases} a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ a_1 = 7 = \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot (-1) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases}, \text{ 所以} \\ a_n &= 3 \cdot 2^n - (-1)^n. \end{aligned}$$

**定理 1.5.8.** 设  $c_1$  和  $c_2$  是实数,  $c_2 \neq 0$ , 假设  $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$  只有一个根  $r_0$ , 数列  $\{a_n\}$  是递推关系  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$  的解, 当且仅当  $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), 其中  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  是常数.

**例 1.5.13.** 求具有初始条件  $a_0 = 1$  和  $a_1 = 6$  的递推关系  $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$  的解.

$r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow r = 3$ , 因此递推关系的解为  $a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$ , 又由初始条件可解得  $\alpha_1 = 1 = \alpha_2$ , 因此解为  $a_n = 3^n + n \cdot 3^n$ .

**定理 1.5.9.** 设  $c_1, c_2, \dots, c_k$  是实数, 假设特征方程

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$$

有  $k$  个不相等的根  $r_1, r_2, \dots, r_k$ , 那么数列  $\{a_n\}$  是递推关系

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

的解, 当且仅当

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n$$

$n = 0, 1, 2, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  是常数.

某些具有非线性递推关系的数列可化为线性形式处理.

**例 1.5.14.** 设  $x_0 = 1, x_1 = e, x_{n+1} = \sqrt{x_n x_{n-1}}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

由已知可得出  $x_n > 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 且  $\ln x_{n+1} = \frac{1}{2}(\ln x_n - \ln x_{n-1})$ , 令  $a_n = \ln x_n$ , 则

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

即化为例 1.5.11, 最后解得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e^{2/3}$ .

## 第 2 章

### 一元函数微分学

“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，  
生物之谜，日用之繁，无处不用数学。”

——华罗庚

一元函数微分学是微积分的一个重要分支，主要研究一元函数的导数和微分。下面简要介绍一元函数微分学的几个重要概念：

1. 导数：函数在某一点处的导数描述了函数在该点处的变化率。对于一元函数  $y = f(x)$ ，其导数  $f'(x)$  表示函数  $f(x)$  在点  $x$  处的导数，即函数在  $x$  处的切线斜率。导数的几何意义是函数图像在该点处的切线斜率，也可以理解为函数的局部线性近似。
2. 微分：微分是导数的积分形式，用微分形式  $dy = f'(x)dx$  表示。微分可以理解为函数在某一点处的微小增量，即函数值的微小变化。微分在近似计算中有重要作用，例如在求函数的局部线性近似、计算微分方程等方面。
3. 微分中值定理：微分中值定理是微分学中的一个重要定理，主要有 Lagrange 中值定理和 Cauchy 中值定理两种形式。这些定理描述了函数在一定条件下的变化规律，为函数的性质和变化提供了重要的理论基础。
4. Taylor 展开：Taylor 展开是一种将函数在某点附近用多项式逼近的方法。Taylor 展开可以将函数表示为无穷级数的形式，通过截断级数可以得到函数在该点附近的近似值，有助于研究函数的性质和计算函数值。

一元函数微分学是微积分的基础，它不仅在数学理论研究中有着重要作用，也在物理、工程、经济等应用领域有广泛的应用。通过学习一元函数微分学，可以更深入地理解函数的性质和变化规律，为进一步学习微积分和应用数学打下坚实的基础。

## 2.1 导数与微分

导数和微分都是描述函数变化率的概念, 但是它们有一些不同之处.

导数是函数在某一点的变化率, 表示函数在该点的斜率. 导数可以用极限的概念来定义, 即函数在某一点的导数等于该点的函数值的极限与该点的自变量取值的极限的比值. 导数可以用符号表示为  $f'(x)$ , 表示函数  $f$  在点  $x$  处的导数.

微分是函数在某一点的线性近似, 表示函数在该点的局部变化率. 微分可以用导数来计算, 即函数在某一点的微分等于函数在该点的导数与自变量的微小增量的乘积. 微分可以用符号表示为  $df(x)$ , 表示函数  $f$  在点  $x$  处的微分.

### 2.1.1 导数的定义与可微性质

#### 导数定义的运用

**定义 2.1.1 (导数).** 设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域内有定义, 当自变量  $x$  在点  $x_0$  处取得增量  $\Delta x (\Delta x \neq 0)$  时, 相应地, 函数  $y$  取得增量  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ , 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 并称整个极限值为函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处的导数, 记作  $f'(x_0)$ ,  $y'(x_0)$ ,  $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ , 如果记  $x = x_0 + \Delta x$ , 则导数又可表示为  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .

**定理 2.1.1 (导数与极限式).** 若  $f(x)$  在  $x = x_0$  处连续, 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} = a$ , 则  $f(x_0) = 0$ , 且  $f'(x_0) = a$ .

**例 2.1.1.** 设  $f(x)$  为连续可导函数, 且  $f(x) = x + x \int_0^1 f(t)dt + x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ , 求  $f(x)$ .

易知  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ , 设  $\int_0^1 f(t)dt = A$ , 那么

$$f(x) = x + Ax + f'(0)x^2 \quad (*)$$

对 (\*) 式两边积分, 得

$$A = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x + Ax + f'(0)x^2)dx \Rightarrow 3 + 2f'(0) = 3A$$

对 (\*) 式两边求导, 并令  $x = 0$ , 得

$$f'(0) = 1 + A$$

于是解得  $f'(0) = 6$ ,  $\int_0^1 f(x)dx = 5$ , 故  $f(x) = 6x + 6x^2$ .

**例 2.1.2 (2004 数一).** 设函数  $f(x)$  连续, 且  $f'(0) > 0$ , 则存在  $\delta > 0$ , 使得

- |  |   |
|--|---|
| A. $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调递增            | B. $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调递增            |
| C. 对任意 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$ | D. 对任意 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$ |

由于  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} > 0$ , 所以由函数极限的局部保号性知, 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x| < \delta$  时,  $\frac{f(x) - f(0)}{x} > 0$ ,

则当  $x \in (-\delta, 0)$  时,  $f(x) - f(0) < 0$ , 即有  $f(x) < f(0)$ ; 当  $x \in (0, \delta)$  时,  $f(x) - f(0) > 0$ , 即有  $f(x) > f(0)$ , 因此选 C.

**推论 2.1.1.** 若  $f'(x_0) > 0$ , 则存在  $\delta > 0$ , 当  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f(x) < f(x_0)$ ; 当  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f(x) > f(x_0)$ , 同理  $f'(x_0) < 0$  也有类似结论.

**例 2.1.3.** 下列  $f$  在  $x_0$  的某个邻域内均有定义, 哪项极限式能作为  $f$  在  $x_0$  处的导数定义?

- |  |  |
|--|--|
| A. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$ | B. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0) \right]$ |
| C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x^2) - f(x_0)}{x^2}$                              | D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - x)}{x}$                                  |

按照定义 2.1.1, 不但要求  $f$  在  $x_0$  的某个邻域有定义, 而且  $f$  在  $x_0$  处的导数  $f'(x_0)$  是否存在以及  $f'(x_0)$  的值的大小都与  $f$  在  $x_0$  处的值  $f(x_0)$  有关, 由此可知 A 不能作为  $f$  在  $x_0$  处导数的定义, 实际上, 从 A 的分子结构易见, 该极限存在与否同  $f$  在  $x_0$  处的值无关, 即使  $f$  在点  $x_0$  处没有定义, 或者有定义但不连续, A 极限也可能存在, 例如,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在点  $x = 0$  处不连续 ( $x = 0$  为第二类间断点), 因而在  $x = 0$  处必不可导, 但极限却存在

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0 - \Delta x)}{2\Delta x} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = 0$$

因此, 用 A 极限来定义函数  $f$  在点  $x_0$  处的导数是不恰当的, 实际上, 对于任何偶函数  $f$ , 在点  $x_0 = 0$  处 A 极限总存在, 且

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0 - \Delta x)}{2\Delta x} = 0$$

但根据定义 2.1.1 却不一定存在, 也就是说, 函数  $f$  在点  $x_0 = 0$  处不一定可导;  
B 极限也不能作为  $f$  在点  $x_0$  处的导数定义, 因为

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0) \right] \not\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow h} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

例如, 函数  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为无理数} \\ 0, & x \text{ 为有理数} \end{cases}$  处处有定义, 处处不连续, 从而处处不可导, 但是,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{\frac{1}{n}} = 0$$

C 极限也不能作为  $f$  在  $x_0$  处导数的定义, 实际上, 极限

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x^2) - f(x_0)}{x^2} \Leftrightarrow \exists f'_+(x_0)$$

由此不能推出定义 2.1.1 存在, 例如函数  $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$  虽然极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0 + x^2) - f(0)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0}{x^2} = 1$$

但是由于  $f(x)$  在  $x = 0$  处不连续, 所以它在点  $x = 0$  处不可导;

D 极限与导数定义等价, 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - x) - f(x_0)}{-x} \xrightarrow{h=-x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

综上所述, 选 D.

**例 2.1.4 (2011 数二).** 已知  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导, 且  $f(0) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3}$  等于

- |              |             |            |      |
|--------------|-------------|------------|------|
| A. $-2f'(0)$ | B. $-f'(0)$ | C. $f'(0)$ | D. 0 |
|--------------|-------------|------------|------|

法一：凑导数定义，

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - x^2 f(0) + 2f(0) - 2f(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x) - f(0)}{x} - 2 \frac{f(x^3) - f(0)}{x^3} \right) = f'(0) - 2f'(0) = -f'(0)$$

法二：由于  $f(x)$  在  $x=0$  处可导，则

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) = f'(0)x + o(x), \quad f(x^3) = f'(0)x^3 + o(x^3)$$

于是

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(f'(0)x + o(x)) - 2(f'(0)x^3 + o(x))}{x^3} = f'(0) - 2f'(0) = -f'(0).$$

**例 2.1.5.** 证明:  $\left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)' = \frac{1}{(cx+d)^2} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ .

$$\text{证 } \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)' = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2} = \frac{1}{(cx+d)^2} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} (cx+d \neq 0).$$

**例 2.1.6.** 求下列一阶导数

$$(1) F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}. \quad (2) F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}.$$

(1) 利用例 9.1.3 的结论，有

$$\begin{aligned} F'(x) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (x^2 + x + 9) + (x^2 - 1 + 4) + (x^2 - x + 3) = 3(x^2 + 5). \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 同上, 有 } F'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 0 & 2 & 6x \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 6(2x^2 - x^2) = 6x^2.$$

**例 2.1.7.** 设  $f(x)$  在  $x=0$  处可导,  $f(0) \neq 0$ ,  $f'(0) \neq 0$ , 且

$$af(h) + bf(2h) - f(0) = o(h) \quad h \rightarrow 0$$

求  $a, b$ .

两边同时除以  $h$ , 有

$$o(1) = \frac{af(h) + bf(2h) - f(0)}{h} = a \cdot \frac{f(h) - f(0)}{h} + 2b \cdot \frac{f(2h) - f(0)}{2h} + \frac{(a+b-1)f(0)}{h}$$

$$\text{令 } h \rightarrow 0 \text{ 得方程组 } \begin{cases} a+2b=0 \\ a+b-1=0 \end{cases} \Rightarrow a=2, b=-1.$$

**例 2.1.8.** 设  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = A$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) \right| = 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) = o(1) \Rightarrow f(x) = x \cdot o(1) + xf'(0) + f(0), \text{ 故}$$

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{k}{n^2} \cdot o(1) + \frac{k}{n^2} f'(0) + f(0) = \frac{k}{n^2} (A + o(1)) \quad (n \rightarrow \infty)$$

因此

$$\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} (A + o(1)) = \frac{n+1}{2n} (A + o(1)) \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\text{取极限有 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{A}{2}.$$

**例 2.1.9.** 设  $f(x)$  在  $x = x_0$  处可微,  $\alpha_n < x_0 < \beta_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = x_0$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x_0).$$

**证** 首先, 容易得到

$$\begin{aligned} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} &= \frac{f(\beta_n) - f(x_0) + f(x_0) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \\ &= \frac{\beta_n - x_0}{\beta_n - \alpha_n} \frac{f(\beta_n) - f(x_0)}{\beta_n - x_0} - \frac{\alpha_n - x_0}{\beta_n - \alpha_n} \frac{f(\alpha_n) - f(x_0)}{\alpha_n - x_0} \end{aligned}$$

若记  $\lambda_n = \frac{\beta_n - x_0}{\beta_n - \alpha_n}$ , 那么  $\frac{x_0 - \alpha_n}{\beta_n - \alpha_n} = 1 - \lambda_n$ , 且  $0 < \lambda_n < 1$ ,  $0 < 1 - \lambda_n < 1$ , 故上式可改写为

$$\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = \lambda_n \frac{f(\beta_n) - f(x_0)}{\beta_n - x_0} + (1 - \lambda_n) \frac{f(\alpha_n) - f(x_0)}{\alpha_n - x_0}$$

即  $f'(x_0) = \lambda_n f'(x_0) + (1 - \lambda_n) f'(x_0)$ , 故有  $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ , 当  $n > N$  时,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} - f'(x_0) \right| &\leq \lambda_n \left| \frac{f(\beta_n) - f(x_0)}{\beta_n - x_0} - f'(x_0) \right| + (1 - \lambda_n) \left| \frac{f(\alpha_n) - f(x_0)}{\alpha_n - x_0} - f'(x_0) \right| \\ &< \lambda_n \varepsilon + (1 - \lambda_n) \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

原极限获证.

**例 2.1.10.** 设  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = A$ , 求证:  $f'(0)$  存在, 并且  $f'(0) = A$ .

**证** 因已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = A$ , 即  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $|x| < \delta$  时, 有

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(2x) - f(x)}{x} < A + \frac{\varepsilon}{2}$$

特别地, 取  $x_n = \frac{x}{2^k}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), 上式亦成立, 则有

$$\frac{1}{2^k} \left( A - \frac{\varepsilon}{2} \right) < \frac{f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right)}{x} < \frac{1}{2^k} \left( A + \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

将此  $n$  式相加, 得

$$\sum_{k=1}^n \left[ f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right) \right] = f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x) - f(x_n)$$

因为  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$ , 于是

$$\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{f(x) - f(x_n)}{x} < \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

再令  $n \rightarrow \infty$ , 取极限, 有  $x_n = \frac{x}{2^n} \rightarrow 0$ , 而  $f$  在  $x = 0$  处连续,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(0)$ , 故

$$A - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq A + \frac{\varepsilon}{2}$$

即  $\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - A \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ ,  $f'(0)$  存在且  $f'(0) = A$ .

## 两种符号的区别

**定义 2.1.2 (左右导数).** 若极限  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  存在, 则该极限值称为  $f(x)$  在点  $x_0$  处的左导数, 记作  $f'_-(x_0)$ . 同理可得右导数的定义.

$f'_-(x_0)$  ( $f'_+(x_0)$ ) 表示函数在点  $x_0$  处的左 (右) 导数, 而  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} (\lim_{x \rightarrow x_0^+})$  表示导函数在  $x_0$  处的左 (右) 极限, 一般情况下  $f'_\pm(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f'(x)$ .

**定理 2.1.2 (函数的可导性与连续性).** 若函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  可导, 则  $y = f(x)$  在点  $x_0$  必连续, 但连续不一定可导.

函数在某一点可导不能保证它在该点的某一邻域内可导, 例如:  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ 为无理数} \\ 0, & x \text{ 为有理数} \end{cases}$

函数在某一点可导不能保证其导函数在该点连续, 例如:  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

两个函数至少有一个不可导, 那么复合后不一定不可导.

**例 2.1.11.** 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{2x}{1 + e^x}, & x > 0 \end{cases}$  求函数在点  $x = 0$  处的导数.

$f(x)$  是分段函数, 按定义分别求  $f(x)$  在  $x = 0$  处的左、右导数,

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 1, f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2x}{1 + e^x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{1 + e^x} = 1$$

因为左右导数相等, 所以  $f'(0) = 1$ .

**例 2.1.12 (2018 数一).** 下列函数中, 在  $x = 0$  处不可导的是

- A.  $f(x) = |x| \sin |x|$       B.  $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$       C.  $f(x) = \cos |x|$       D.  $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$

对选项 D, 有导数定义知

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos \sqrt{|x|} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{1}{2}|x|}{x} = \frac{1}{2}, f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{|x|} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2}|x|}{x} = -\frac{1}{2}$$

则  $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$  在  $x = 0$  处不可导, 故选 D.

## 2.1.2 反函数、用参数方程确定的函数、隐函数的导数

**定理 2.1.3 (反函数的导数).** 导数  $f'(x) \neq 0$  的可微函数  $y = f(x)$  ( $a < x < b$ ) 具有单值连续的反函数  $x = f^{-1}(y)$ , 此反函数可微, 那么

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

反函数的导数等于原函数的导数的倒数.

**例 2.1.13.** 设  $f(x)$  为单调可微函数,  $g(x)$  与  $f(x)$  互为反函数, 且  $f(2) = 4, f'(2) = \sqrt{5}, f'(4) = 6$ , 则  $g'(4)$  等于

- A.  $\frac{1}{4}$       B.  $\frac{1}{\sqrt{5}}$       C.  $\frac{1}{6}$       D. 4

$$f(2) = 4 \Leftrightarrow g(4) = 2, \text{ 故 } g'(4) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ 选 B.}$$

**定理 2.1.4 (用参数方程确定的函数的导数).** 若方程组  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$  ( $\alpha < t < \beta$ ), 其中  $\varphi(t)$  和  $\psi(t)$  为可微函数, 且  $\varphi'(t) \neq 0$ , 在某区域内确定  $y$  为  $x$  的单值连续函数:  $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ , 则此函数的导数为

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

**例 2.1.14 (2017 数二).** 设函数  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = \sin t \end{cases}$  确定, 求  $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \left( \frac{dx}{dt} \right)^{-1} = \frac{\cos t}{1 + e^t}, \text{ 那么}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) \cdot \left( \frac{dx}{dt} \right)^{-1} = \frac{-\sin t(1 + e^t) - e^t \cos t}{(1 + e^t)^3}$$

$$\text{因此 } \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0} = -\frac{1}{8}.$$

**定理 2.1.5 (隐函数的导数).** 若可微函数  $y = y(x)$  满足方程  $F(x, y) = 0$ , 则此隐函数的导数为

$$\frac{dy}{dx}[F(x, y)] = 0.$$

**例 2.1.15.** 设  $u = xy + y^2$ , 其中  $y = y(x)$  是由  $x^2 + y^2 = 5$  确定的函数, 求  $\frac{du}{dx}\Big|_{\substack{x=2 \\ y=-1}}$ .

$$\text{等式两边同时对 } x \text{ 求导, } \begin{cases} \frac{du}{dx} = y + \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} \\ 2x + 2y \frac{dx}{dy} = 0 \end{cases}, \text{ 并将 } x = 2, y = -1 \text{ 代入, 得 } \frac{du}{dx}\Big|_{\substack{x=2 \\ y=-1}} = -1.$$

**例 2.1.16.** 设  $y = y(x)$  由方程  $x^3 + y^3 + xy = 1$  确定, 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3y + x - 3}{x^2}$ .

当  $x = 0$  时,  $y(0) = 1$ , 方程  $x^3 + y^3 + xy = 1$  两边同时对  $x$  求导, 得

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' + y + xy' = 0 \Rightarrow y'(0) = -\frac{1}{3}$$

继续对  $x$  求导, 得

$$6x + 6y \cdot (y')^2 + 3y^2 \cdot y'' + 2y' + xy'' = 0 \Rightarrow y''(0) = 0$$

将  $y(x)$  在  $x = 0$  处 Taylor 展开, 得

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2}y''(0)x^2 + o(x^2)$$

于是待求极限式等于  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - x + o(x^2) + x - 3}{x^2} = 0$ .

**例 2.1.17 (2007 数二).** 已知函数  $f(u)$  具有二阶导数, 且  $f'(0) = 1$ , 函数  $y = y(x)$  由方程  $y - xe^{y-1} = 1$  所确定, 设  $z = f(\ln y - \sin x)$ , 求  $\frac{dz}{dx}\Big|_{x=0}$ ,  $\frac{d^2z}{dx^2}\Big|_{x=0}$ .

当  $x = 0$  时, 由  $y - xe^{y-1} = 1$  知  $y = 1$ , 并且对方程  $y - xe^{y-1} = 1$  两端的  $x$  求导, 得  $y' - (e^{y-1} + xe^{y-1} \cdot y') = 0$ , 将  $x = 0, y = 1$ , 代入该式求得  $y'(0) = 1$ , 那么  $\frac{dz}{dx}\Big|_{x=0} = f'(\ln y - \sin x) \left( \frac{y'}{y} - \cos x \right)\Big|_{x=0} = 0$ , 且

$$y'' - [2e^{y-1} \cdot y' + x(e^{y-1} \cdot y'^2 + e^{y-1} \cdot y'')] = 0$$

解得  $y''(0) = 0$ , 那么

$$\frac{d^2z}{dx^2}\Big|_{x=0} = f''(\ln y - \sin x) \left( \frac{y'}{y} - \cos x \right)^2 + f'(\ln y - \sin x) \left( \frac{y'' \cdot y - y'^2}{y^2} + \sin x \right)\Big|_{x=0} = f'(0)(2 - 1) = f'(0) = 1.$$

**例 2.1.18.** 设函数  $y = y(x)$  由方程组  $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$  所确定, 试求  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0}$ .

对方程组每个方程两边分别取微分, 得  $\begin{cases} dx = 6tdt + 2dt \\ e^y \sin t dy + e^y \cos t dt - dy = 0 \end{cases}$  则  $\frac{dx}{dt} = 6t + 2$ ,  $\frac{dy}{dt} = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t}$ , 那么

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \left( \frac{dx}{dt} \right)^{-1} = \frac{e^y \cos t}{(1 - e^y \sin t)(6t + 2)} = \frac{e^y \cos t}{(2 - y)(6t + 2)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{e^y \cos t}{(2 - y)(6t + 2)} \right] \left( \frac{dt}{dx} \right) = \frac{(e^y y'_t \cos t - e^y \sin t)(2 - y)(6t + 2) - [(-y'_t)(6t + 2) + 6(2 - y)]e^y \cos t}{(2 - y)^2(6t + 2)^3}$$

由  $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0}, \left. y \right|_{t=0} = 1$ , 代入上式, 得  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = \frac{e(2e - 3)}{4}$ .

**例 2.1.19.** 求下列  $y'_x$  (参数均为正实数, 且  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ ).

$$\begin{array}{lll} (1) x = \sin^2 t & (2) x = a \cos t & (3) x = a \cos^3 t \\ y = \cos^2 t. & y = b \sin t. & y = a \sin^3 t. \\ (4) \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}. & (5) x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}. & (6) \arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}. \\ (7) r = a\varphi. & (8) r = a(1 + \cos \varphi). & (9) r = ae^{m\varphi}. \end{array}$$

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2 \cos t \sin t}{2 \sin t \cos t} = -1 \quad (0 < x < 1).$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\cot x \quad (0 < |t| < \pi)$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\tan t \quad (t \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k \text{ 为正整数}).$$

$$(4) \text{两边对 } x \text{ 求导, 得 } \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y'_x = 0 \Rightarrow y'_x = -\sqrt{\frac{y}{x}} \quad (x, y > 0).$$

$$(5) \text{两边对 } x \text{ 求导, 得 } \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'_x = 0 \Rightarrow y'_x = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \quad (x \neq 0).$$

$$(6) \text{两边对 } x \text{ 求导, 得 } \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{xy'_x - y}{x^2} = \frac{x + yy'_x}{x^2 + y^2} \Rightarrow y'_x = \frac{x + y}{x - y} \quad (x \neq y, 0).$$

(7)  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, r = r(\varphi)$ , 所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{\frac{dr}{d\varphi} \sin \varphi + r \cos \varphi}{\frac{dr}{d\varphi} \cos \varphi - r \sin \varphi} \quad (*)$$

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = \frac{\arcsin \varphi + a\varphi \cos \varphi}{\arccos \varphi - a\varphi \sin \varphi} = \tan(\varphi + \arctan \varphi).$$

$$(8) \frac{dr}{d\varphi} = -a \sin \varphi, \text{ 代入 (*) 式, 且 } (\varphi \neq 0, \pm \frac{2\pi}{3}),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a \sin^2 \varphi + a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi}{-a \sin \varphi \cos \varphi - a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi} = -\frac{\cos 2\varphi + \cos \varphi}{\sin 2\varphi + \sin \varphi} = -\frac{\cos \frac{3\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{3\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} = -\cot \frac{3\varphi}{2}.$$

$$(9) \frac{dr}{d\varphi} = mae^{m\varphi}, \text{ 代入 (*) 式得}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mae^{m\varphi} \sin \varphi + ae^{m\varphi} \cos \varphi}{mae^{m\varphi} \cos \varphi - ae^{m\varphi} \sin \varphi} = \frac{m \sin \varphi + \cos \varphi}{m \cos \varphi - \sin \varphi} = \tan \left( \varphi + \arctan \frac{1}{m} \right).$$

### 2.1.3 高阶导数与 Leibniz 公式

先拆项再求导

基本形式主要有:

表 2.1: 初等函数的高阶导数

|   |   |
|---|---|
| (1) $(x^k)^{(n)} = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n}$ ( $n \leq k$ ).        | (2) $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$ |
| (3) $(e^x)^{(n)} = e^x$ .   | (4) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$ .   |
| (5) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$ .                        | (6) $(\log_a x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n \ln a}$                |
| (7) $[\sin(kx+b)]^{(n)} = k^n \sin\left(kx+b+\frac{n\pi}{2}\right)$ . | (8) $[\cos(kx+b)]^{(n)} = k^n \cos\left(kx+b+\frac{n\pi}{2}\right)$ .       |

并特别注意  $[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$ , 因子  $a^n$  不要漏掉.

例 2.1.20. 求下列  $y^{(n)}$ ,  $n$  足够的大.

|                                   |                                     |                                      |                                      |
|-----------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| (1) $y = \frac{1}{x(1-x)}$ .      | (2) $y = \frac{x^4}{x-1}$ .         | (3) $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-5x+6}$ . | (4) $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$         |
| (5) $y = \sin^2 x$ .              | (6) $y = \cos^3 x$ .                | (7) $y = \cos ax \cos bx$ .          | (8) $y = \sin ax \cos bx$ .          |
| (9) $y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$ . | (10) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{3x+2}}$ | (11) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ .    | (12) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$ . |

(1) 因为  $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ , 所以  $y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} + \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ ,  $x \neq 0, 1$ .

(2) 因为  $y = (x^2+1)(x+1) + \frac{1}{x-1}$ , 所以  $y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$ ,  $n \geq 4$ .

(3) 因为  $y = 1 - \frac{7}{x-2} + \frac{13}{x-3}$ , 所以  $y^{(n)} = 7 \cdot \frac{n!}{(2-x)^{n+1}} + (-1)^n \cdot 13 \cdot \frac{n!}{(x-3)^{n+1}}$ ,  $x \neq 2, 3$ .

(4) 因为  $y = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$ , 所以  $y^{(n)} = (-1)^n n! \left[ \frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]$ ,  $x \neq 1, 2$ .

(5) 因为  $y = \frac{1-\cos 2x}{2}$ , 所以  $y^{(n)} = -2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$ .

(6) 由三倍角公式  $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$ , 所以  $y^{(n)} = \frac{3^n}{4} \cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{3}{4} \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ .

(7) 因为  $y = \frac{1}{2} \cos(a-b)x + \frac{1}{2} \cos(a+b)x$ , 所以

$$y^{(n)} = \frac{(a-b)^n}{2} \cos\left[(a-b)x + \frac{n\pi}{2}\right] + \frac{1}{2} (a-b)^n \cos\left[(a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right].$$

(8) 由积化和差公式得  $y = \frac{1}{2} \sin(a+b)x + \frac{1}{2} \sin(a-b)x$ , 所以

$$y^{(n)} = \frac{(a+b)^n}{2} \sin\left[(a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right] + \frac{(a-b)^n}{2} \sin\left[(a-b)x + \frac{n\pi}{2}\right].$$

(9)  $y^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-1}{2}\right) \cdot (-2)^n \cdot (1-2x)^{-\frac{2n+1}{2}} = \frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^{\frac{n+1}{2}}}$ .

(10)  $y^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-1}{2}\right) \cdot 3^n \cdot (3x+2)^{-\frac{2n+1}{2}} = \left(-\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(3x+2)^{\frac{n+1}{2}}}$ .

$$(11) \text{ 因为 } y = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \sqrt{1-x}, \text{ 所以 } y^{(n)} = \frac{(2n-1)!!}{2^n} (1-x)^{-\frac{2n+1}{2}} + \frac{(2n-3)!!}{2^n} (1-x)^{-\frac{2n-1}{2}}.$$

$$(12) \text{ 因为 } y = \frac{(x+1)-1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{\frac{2}{3}} - (1+x)^{-\frac{1}{3}}, \text{ 所以当 } n \geq 2, x \neq -1 \text{ 时,}$$

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{4}{3}\right) \cdots \left(-\frac{3n-5}{3}\right) (1+x)^{-\frac{3n-2}{3}} + \frac{1}{3} \left(-\frac{4}{3}\right) \cdots \left(-\frac{3n-2}{3}\right) (1+x)^{-\frac{3n+1}{3}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 4 \cdots (3n-5)}{3^n (1+x)^{n+\frac{1}{3}}} [2(1+x) + (3n-2)] = \frac{(-1)^{n+1} 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-5)(3n+2x)}{3^n (1+x)^{n+\frac{1}{3}}}. \end{aligned}$$

### Leibniz 公式

把要求导的函数写成两项相乘, 然后直接应用 Leibniz 公式:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

**例 2.1.21.** 求下列  $y^{(n)}$ .

|                                 |                          |                              |                                    |
|---------------------------------|--------------------------|------------------------------|------------------------------------|
| $(1) y = x \cos ax.$            | $(2) y = x^2 \sin ax.$   | $(3) y = \sin^2 ax \cos bx.$ | $(4) y = \frac{\sin(2x+1)}{4x-3}.$ |
| $(5) y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}.$ | $(6) y = \frac{e^x}{x}.$ | $(7) y = x^2 e^{ax}.$        | $(8) y = x \ln x.$                 |

$$(1) y^{(n)} = x(\cos ax)^{(n)} + n(\cos ax)^{(n-1)} = a^n x \cos \left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) + na^{n-1} \sin \left(ax + \frac{n\pi}{2}\right).$$

$$(2) y^{(n)} = a^n x^2 \sin \left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) + 2na^{n-1} x \sin \left(ax + \frac{n-1}{2}\pi\right) + n(n-1)a^{n-1} \sin \left(ax + \frac{n-2}{2}\pi\right).$$

$$(3) \text{ 将 } \sin^2 ax \text{ 降幂, 再用积化和差公式, 得 } y = \frac{1}{2} \cos bx - \frac{1}{4} \cos(2a+b)x - \frac{1}{4} \cos(2a-b)x, \text{ 于是}$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} b^2 \cos \left(bx + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{4} (2a+b)^n \cos \left[(2a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right] - \frac{1}{4} (2a-b)^n \cos \left[(2a-b)x + \frac{n\pi}{2}\right].$$

$$(4) y^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} \frac{(n-k)! \cdot 2^{3n-2k}}{(4x-3)^{n-k+1}} \sin \left(2x + 1 + \frac{n\pi}{2}\right).$$

$$(5) y^{(n)} = (-1)^n e^{-x} [x^2 - 2(n-1)x + (n-1)(n-2)].$$

$$(6) y^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k e^x \left(\frac{1}{x}\right)^{(k)} = e^x \left[ \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{x^{k+1}} \right].$$

$$(7) y^{(n)} = a^n x^2 e^{ax} + 2na^{n-1} x e^{ax} + n(n-1) a^{n-2} e^{ax}.$$

$$(8) y^{(n)} = \begin{cases} (-1)^{n-2}(n-2)! x^{1-n}, & n \geq 2 \\ \ln x + 1, & n = 1. \end{cases}$$

**例 2.1.22.** 设函数  $y = (x^2 - 11x + 30)^{2022} \cdot \cos \frac{\pi x}{18}$ , 求  $y^{(2022)}(6)$ .

$y = (x^2 - 11x + 30)^{2022} \cdot \cos \frac{\pi x}{18} = (x-6)^{2022} (x-5)^{2022} \cos \frac{\pi x}{18}$ , 由 Leibniz 计算公式, 可知对  $x=6$  处, 仅仅有一项不为 0, 即

$$y^{(2022)}(6) = C_{2022}^{2022} \cdot 2022! \left[ (x-5)^{2022} \cos \frac{\pi x}{18} \right]_{x=6} = \frac{2022!}{2}.$$

## 用数学归纳法求高阶导数

当高阶导数不能一次求出时, 可先求出前几阶导数, 归纳总结, 找出规律, 然后用数学归纳法加以证明.

**例 2.1.23.** 证明:  $\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$ .

证 当  $n=1$  时, 由于  $\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ , 故等式成立,

设当  $n=k$  时等式成立, 即有  $\left(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}$ , 要证等式对  $n=k+1$  时也成立,

$$\begin{aligned}\left(x^k e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k+1)} &= \left[\left(x \cdot x^{k-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)}\right]' = \left[x \left(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)} + k \left(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k-1)}\right]' \\ &= x \left(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k+1)} + \left(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)} + k \left(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)} \\ &= x \left[\frac{(-1)^k}{x^{k+1}} e^{\frac{1}{x}}\right]' + (k+1) \frac{(-1)^k}{x^{k+1}} e^{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{x^{k+1}} e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}} e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^k(k+1)}{x^{k+1}} e^{\frac{1}{x}} = \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}} e^{\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

于是, 由数学归纳法得知,  $\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$  对于一切正整数  $n$  均成立.

## 用递推公式求导

**例 2.1.24.** 设  $f(x) = x^n \cdot \ln x$ , 求  $f^{(n)}(x)$ .

令  $f_n(x) = x^n \cdot \ln x$ , 则

$$f'_n(x) = nx^{n-1} \cdot \ln x + x^{n-1} = n \cdot f_{n-1}(x) + x^{n-1}$$

对上式两边同时除以  $n!$ , 则有  $\frac{f'_n(x)}{n!} = \frac{f_{n-1}(x)}{(n-1)!} + \frac{x^{n-1}}{n!}$ , 再同时求  $(n-1)$  阶导, 即

$$\frac{f_n^{(n)}(x)}{n!} = \frac{f_{n-1}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \frac{1}{n} := u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n}$$

于是  $u_n = \ln x + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , 所以  $f_n^{(n)}(x) = n! \left( \ln x + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right)$ .

$$\begin{array}{rcl} u_1 - u_0 & = & \frac{1}{1} \\ u_2 - u_1 & = & \frac{1}{2} \\ u_3 - u_2 & = & \frac{1}{3} \\ u_4 - u_3 & = & \frac{1}{4} \\ & \vdots & \\ u_n - u_{n-1} & = & \frac{1}{n} \\ \hline u_n - u_0 & = & \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{array}$$

**例 2.1.25 (2023 四川大学).** 设  $y = \arcsin x$ , 求  $\frac{y^{(7)}(0)}{7!}$ .

直接求导, 有

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y'' = \frac{x}{1-x^2} y'$$

则  $(1-x^2)y'' = xy'$ , 对其两边求  $n$  阶导数, 利用 Leibniz 公式得

$$(1-x^2)y^{(n+2)} + n(-2x)y^{(n+1)} + \frac{n(n-1)}{2}(-2)y^{(n)} = xy^{(n+1)} + ny^{(n)}$$

整理得

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0$$

令  $x=0$ , 可得递推公式可知:  $y^{(n+2)}(0) = n^2y^{(n)}(0)$ , 又因为  $y'(0) = y''(0) = 0$ , 则

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & x=2k \\ [(2k-1)!!]^2, & n=2k+1 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}_+$$

所以  $\frac{y^{(7)}(0)}{7!} = \frac{(5!)^2}{7!} = \frac{5}{112}$ .

**例 2.1.26.** 设  $f(x) = (\arcsin x)^2$ , 求  $f^{(n)}(0)$ .

由  $f'(x) = 2 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ , 得

$$(1-x^2)[f'(x)]^2 = 4f(x)$$

再次求导, 整理得

$$-xf'(x) + (1-x^2)f''(x) = 2$$

由 Leibniz 公式得

$$-xf^{(n+1)}(x) - nf^{(n)}(x) + (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - 2nx f^{(n+1)}(x) - n(n-1)f^{(n)}(x) = 0$$

令  $x=0$ , 得

$$f'(0) = 0, f''(0) = 2, f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0)$$

从而

$$\begin{aligned} f^{(2k+1)}(0) &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, \\ f^{(2k)}(0) &= (2k-2)^2 (2k-4)^2 \cdots 2^2 \cdot 2 = 2 \prod_{i=1}^{k-1} (2k-2i)^2 \\ &= 2^{2(k-1)} \cdot 2 \prod_{i=1}^{k-1} (k-i)^2 = 2^{2k-1} \left[ \prod_{i=1}^{k-1} (k-i) \right]^2 \\ &= 2^{2k-1} [(k-1)!]^2, \quad k = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

用 Taylor 展开式求导

**定理 2.1.6 (Taylor 展开式).**  $f(x)$  按  $(x-a)$  的幂展开的幂级数必是  $f(x)$  的 Taylor 展开式:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

因此, 若一旦得到展开式  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ , 则  $f^{(n)}(a) = a_n n!$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

**例 2.1.27.** 设  $f(x) = (x-1)^n \cdot x^{2n} \cdot \sin \frac{\pi x}{2}$ , 求  $f^{(n)}(1)$ .

当  $x \rightarrow 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^n} = \lim_{x \rightarrow 1} \left( x^{2n} \cdot \sin \frac{\pi x}{2} \right) = 1$ , 将  $f(x)$  在  $x=1$  处 Taylor 展开, 有

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1) + f'(1)(x-1) + \cdots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + o((x-1)^n)}{(x-1)^n} = 1$$

即

$$f(1) = f'(1) = \cdots = f^{(n-1)}(1) = 0, \quad \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = 1$$

故  $f^{(n)}(1) = n!$ .

**例 2.1.28.** 设  $y = \arctan x$ , 求  $y^{(n)}(0)$ .

法一: 因为

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x [1-t^2+t^4-\cdots+(-1)^n t^{2n}] dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

所以由幂级数展开式的唯一性, 得

$$y^{(2n)}(0) = 0, \quad y^{(2n+1)}(0) = (2n+1)! \frac{(-1)^n}{2n+1} = (-1)^n (2n)!$$

**法二：**由  $y = \arctan x$ , 则  $y' = \frac{1}{1+x^2}$ , 即  $y'(1+x^2) = 1$ , 等式两端对  $x$  求  $n+1$  阶导数, 由 Leibniz 公式得

$$(1+x^2)y^{(n+2)} + (n+1)y^{(n+1)}(1+x^2)' + \frac{n(n+1)}{2!}y^{(n)}(1+x^2)'' = 0$$

于是得  $(1+x^2)y^{(n+2)} + 2(n+1)xy^{(n+1)} + n(n+1)y^{(n)} = 0$ , 令  $x=0$ , 得

$$y^{(n+2)}(0) = -n(n+1)y^{(n)}(0)$$

又  $y'(0) = 1, y''(0) = 0$ , 故  $y^{(2m)}(0) = 0, y^{(2m+1)}(0) = (-1)^m(2m)$ .

**法三：**转化为  $x = \tan y$ , 于是

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \cos^2 y = \cos y \cdot \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$$

两边关于  $x$  求导, 得

$$\begin{aligned} y'' &= -\sin y \cdot y' \cdot \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \cos y \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot y' = y' \cdot \left[-\sin y \cdot \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \cos y \cdot \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= y' \cos\left(2y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 y \cdot \sin\left(2y + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 y \cdot \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

由数学归纳法可证得

$$y^{(n)} = (n-1)! \cdot \cos^n y \cdot \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$$

当  $x=0$  时  $y=0$ , 于是

$$y^{(n)}(0) = (n-1)! \cdot \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2m \\ (-1)^m (2m)!, & n = 2m+1 \end{cases} \text{ 其中 } m = 0, 1, \dots.$$

**法四：**由  $y' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right)$ ,  $x \pm i = re^{\pm i\theta}$ , 其中  $r = \sqrt{1+x^2}, \theta = \operatorname{arccot} x$ , 所以

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= \left( \frac{1}{1+x^2} \right)^{(n)} = \frac{1}{2i} \left[ \left( \frac{1}{x-i} \right)^{(n)} - \left( \frac{1}{x+i} \right)^{(n)} \right] = \frac{1}{2i} \left[ \frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}} \right] \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2i(1+x^2)^{n+1}} \cdot [(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}] = \frac{(-1)^n n!}{2i(1+x^2)^{n+1}} \cdot [r^{n+1} e^{i(n+1)\theta} - r^{n+1} e^{-i(n+1)\theta}] \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{n+1}} r^{n+1} \sin(n+1)\theta = \frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1) \cdot \operatorname{arccot} x] \end{aligned}$$

于是  $y'(0) = 1, y(n+1)(0) = (-1)^n n! \sin \frac{(n+1)}{2}\pi, n=1, 2, \dots$ , 故当  $n=2m$  时,

$$y^{(2m+1)}(0) = (-1)^{2m} (2m)! \sin \frac{2m+1}{2}\pi = (-1)^m (2m)!$$

当  $n=2m-1$  时,  $y^{(2m)}(0) = 0$ .

**例 2.1.29.** 设  $f(x) = x^{2021} e^{2020x} \sin x$ , 求  $f^{(2023)}(0)$ .

**法一：**令  $h(x) = x^{2021}, g(x) = e^{2020x} \sin x$ , 根据 Leibniz 求导公式,

$$\begin{aligned} f^{(2023)}(x) &= \sum_{k=0}^{2023} C_{2023}^k h^{(2023-k)}(x)g^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{2023} C_{2023}^k (x^{2021})^{(2023-k)} (e^{2020x} \sin x)^{(k)} \\ &= \sum_{k=0}^{2023} C_{2023}^k (x^{2021})^{(2023-k)} \left[ \sum_{m=0}^k C_k^m (e^{2020x})^{(m-k)} \sin^{(m)} x \right] \\ &= \sum_{k=0}^{2023} C_{2023}^k \frac{2021!}{(k-2)!} x^{k-2} \left[ \sum_{m=0}^k C_k^m (2020)^{k-m} e^{2020x} \sin \left( x + \frac{m\pi}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

当  $x=0$  时,

$$f^{(2023)}(0) = C_{2023}^2 \frac{2021!}{(2-2)!} \left[ \sum_{m=0}^2 C_2^m (2020)^{2-m} \sin \left( \frac{m\pi}{2} \right) \right] = \frac{2023!}{2! \cdot 2021!} 2021! \cdot 2! \cdot 2020 = 2020 \cdot 2023!.$$

**法二：**利用 Taylor 公式的唯一性,

$$f(x) = x^{2021} e^{2020x} \sin x = x^{2021} (1 + 2020x + 1010x^2 + o(x^2)) \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) = x^{2022} + 2020x^{2023} + o(x^{2023})$$

故  $f^{(2023)}(0) = 2020 \cdot 2023!$ .

**例 2.1.30** (首届长三角高校高等数学竞赛). 设  $f(x) = \prod_{k=1}^{2022} \tan kx$ , 求  $f^{(2024)}(0)$ .

因为  $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ , 所以

$$f(x) = \prod_{k=1}^{2022} \tan kx = \prod_{k=1}^{2022} \left[ kx + \frac{1}{3}k^3x^3 + o(x^3) \right] = 2022!x^{2022} + \frac{1}{3}2022!x^{2024} \sum_{k=1}^{2022} k^2 + o(x^{2024})$$

$$\text{所以 } f^{(2024)}(0) = \frac{1}{3} \cdot 2022! \cdot 2024! \cdot \frac{2022 \cdot 2023 \cdot 4045}{6}.$$

## 2.2 函数的可导性

函数的可导性是指函数在某一点处存在导数 (或导数存在), 即该点处函数的斜率存在. 可导性是微积分中一个重要的概念, 它在研究函数的变化率、极值、凹凸性等方面起着关键作用.

### 2.2.1 含绝对值函数的可导性

$|f(x)|$  在  $x = x_0$  点的可导性

**定理 2.2.1** (含绝对值函数的可导性).  $|f(x)|$  在  $x = x_0$  点的可导性的四种情况:

- (1) 当  $f(x_0) > 0$ , 时  $y = |f(x)|$  在  $x_0$  处可导, 且  $y'|_{x=x_0} = f'(x_0)$ .
- (2) 当  $f(x_0) < 0$ , 时  $y = |f(x)|$  在  $x_0$  处可导, 且  $y'|_{x=x_0} = -f'(x_0)$ .
- (3) 当  $f(x_0) = 0$  但  $f'(x_0) \neq 0$  时,  $y = |f(x)|$  在  $x_0$  处不可导.
- (4) 当  $f(x_0) = 0$  且  $f'(x_0) = 0$  时,  $y = |f(x)|$  在  $x_0$  处可导, 且  $y'|_{x=x_0} = 0$ .

**证** (1) 与 (2) 只需证明其中一个, (3) 与 (4) 也只需证明其中一个.

(1) 因  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 则  $f(x_0)$  在  $x_0$  处连续, 又  $f(x_0) > 0$ , 由保号性可知, 存在  $x_0$  点的  $\delta$  邻域  $U(x_0, \delta)$ , 当  $x \in U(x_0, \delta)$  时,  $y = |f(x)| = f(x)$ , 故  $y'|_{x=x_0} = f'(x_0)$ , 同理可证 (2).

(3)  $y'_\pm(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{|f(x)| - |f(x_0)|}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = \pm |f'(x_0)|$ , 因  $|f(x_0)| \neq 0$ , 所以  $y'_-(x_0) \neq y'_+(x_0)$ , 故  $y = |f(x)|$  在  $x_0$  处不可导, 同理可证 (4).

**例 2.2.1** (2000 数三). 设函数  $f(x)$  在  $x = a$  处可导, 则函数  $|f(x)|$  在点  $x = a$  处不可导的充分条件是

- |                             |                                |
|-----------------------------|--------------------------------|
| A. $f(a) = 0$ 且 $f'(a) = 0$ | B. $f(a) = 0$ 且 $f'(a) \neq 0$ |
| C. $f(a) > 0$ 且 $f'(a) > 0$ | D. $f(a) < 0$ 且 $f'(a) < 0$    |

由定理 2.2.1 知, 选 B.

**例 2.2.2.** 求  $y = |x^2 - 1|$  的导数.

令  $f(x) = x^2 - 1$ , 当  $|x| > 1$  时,  $y = |f(x)| = f(x) = x^2 - 1$ , 那么  $y' = f'(x) = 2x$ ; 当  $|x| < 1$  时,  $y = |f(x)| = -f(x) = 1 - x^2$ , 那么  $y' = -f'(x) = -2x$ ; 当  $x = \pm 1$  时, 因  $f(\pm 1) = 0$ , 但  $f'(\pm 1) \neq 0$ , 故  $y = |f(x)|$  在  $x = \pm 1$  处不可导, 综上  $y' = \begin{cases} 2x, & |x| > 1 \\ -2x, & |x| < 1 \end{cases}$ .

$f(x)|g(x)|$  在  $x = x_0$  点的可导性

**定理 2.2.2.** 设  $f(x)$  在  $x_0$  处可导,  $|g(x)|$  在  $x_0$  处连续但不可导, 则  $\varphi(x) = f(x)|g(x)|$  在  $x_0$  处可导的充要条件是  $f(x_0) = 0$ , 且当  $\varphi(x)$  在  $x_0$  处可导时, 有  $\varphi'(x_0) = f'(x_0)|g(x_0)|$ , 并且称  $f(x)$  是  $|g(x)|$  在  $x = x_0$  点的磨光函数.

**证 充分性:** 当  $f(x_0) = 0$  时,

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} |g(x_0)| = f'(x_0)|g(x_0)|$$

**必要性:** 用反证法, 反设  $f(x_0) \neq 0$ , 则由  $\varphi(x), f(x)$  在  $x_0$  点皆可导, 可得  $\frac{\varphi(x)}{f(x)} = |g(x)|$  在  $x_0$  可导, 与条件矛盾, 所以当  $\varphi(x)$  在  $x_0$  可导时必有  $f(x_0) = 0$ .

**例 2.2.3 (1995 数一).** 设  $f(x)$  可导,  $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$ , 则  $f(0) = 0$  是  $F(x)$  在  $x = 0$  可导的

- |             |               |
|-------------|---------------|
| A. 充分必要条件   | B. 充分但非必要条件   |
| C. 必要但非充分条件 | D. 即非充分也非必要条件 |

易知,  $1 + |\sin x|$  在  $x = 0$  处连续但不可导, 由定理 2.2.2 知,  $f(0) = 0$  是  $F(x)$  在  $x = 0$  可导的充分必要条件, 选 A.

**例 2.2.4 (1998 数二).** 函数  $F(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x|$  不可导点的个数是

- |      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| A. 3 | B. 2 | C. 1 | D. 0 |
|------|------|------|------|

由  $|x^3 - x|$  知不可导点为  $x = 0, x = \pm 1$ , 但  $f(x) = x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$  处处可导, 且  $f(-1) = 0$ , 则  $F(-1)$  可导, 但  $f(0) \neq 0, f(1) \neq 0$ , 故  $F(x)$  在  $x = 0, 1$  处不可导, 因此不可导点的个数是 2, 选 B.

**定理 2.2.3.** 设  $f(x) = (x - a)^n|x - a|$   $n \in \mathbb{Z}^+$ , 则  $f(x)$  在  $x = a$  点的各阶导数

$$f^{(k)}(a) = \begin{cases} 0, & k \leq n \\ \text{不存在}, & k > n. \end{cases}$$

证 由  $f(x) = \begin{cases} -(x - a)^{n+1}, & x \leq a \\ (x - a)^{n+1}, & x > a \end{cases}$  得  $f^{(n)}(a) = \begin{cases} -(n+1)!(x - a), & x \leq a \\ (n+1)!(x - a), & x > a \end{cases}$ , 但  $f_-^{(n+1)}(a) = -(n+1)! \neq f_+^{(n+1)}(a) = (n+1)!$ , 故  $f^{(n+1)}(a)$  不存在.

**例 2.2.5 (1992 数一).** 设  $f(x) = 3x^3 + x^2|x|$ , 则  $f^{(n)}(0)$  存在的最高阶数为

- |      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| A. 0 | B. 1 | C. 2 | D. 3 |
|------|------|------|------|

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , 其中  $f_1(x) = 3x^3$  在  $x = 0$  任意阶可导, 但  $f_2(x) = x^2|x|$  在  $x = 0$  点之多只有二阶导数, 故选 C.

## 2.2.2 分段函数的可导性

$$\begin{cases} g(x), & x < x_0 \\ A, & x = x_0 \\ h(x), & x > x_0 \end{cases}$$

**定理 2.2.4.** 设分段函数  $f(x) = \begin{cases} g(x), & x < x_0 \\ A, & x = x_0 \\ h(x), & x > x_0 \end{cases}$  如果函数  $f(x)$  满足: (1) 在点  $x_0$  处连续; (2) 在点  $x_0$  的某空心邻域内可导; (3)  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g'(x) = B, \lim_{x \rightarrow x_0^+} h'(x) = C$ . 则  $f'_-(x_0) = B, f'_+(x_0) = C$ .

**例 2.2.6.** 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(e^x - 1), & x \leq 0 \\ x \arctan \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$  讨论函数  $f(x)$  在  $x = 0$  的可导性, 并求导函数  $f'(x)$ .

显然函数  $f(x)$  在分段点  $x = 0$  连续,

$$g'(x) = \left(\frac{\pi}{2}(e^x - 1)\right)' = \frac{\pi}{2}e^x, h'(x) = \left(x \arctan \frac{1}{x}\right)' = \arctan \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

于是有  $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\pi}{2}e^x = \frac{\pi}{2}$ ,  $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\arctan \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{2}$ , 从而函数  $f(x)$  在  $x = 0$  可导且  $f'(0) = \frac{\pi}{2}$ , 所以  $f'(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}e^x, & x \leq 0 \\ \arctan \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}, & x > 0. \end{cases}$

## 2.3 微分中值定理

微分中值定理是微积分中的一个重要定理, 它描述了函数在某一区间内的平均变化率与某一点处的瞬时变化率之间的关系.

### 2.3.1 四大基本定理

**引理 2.3.1 (Fermat 引理).** 函数  $f(x)$  在点  $x = \xi$  的某邻域  $U(\xi)$  内有定义, 并且在  $\xi$  处可导, 如果对于任意的  $x \in U(\xi)$ , 都有  $f(x) \geq f(\xi)$  或  $f(x) \leq f(\xi)$ , 那么  $f'(\xi) = 0$ .

**定理 2.3.1 (Rolle 定理).** 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(b) = f(a)$ , 则  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .

**例 2.3.1.** 设函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内可导, 且  $f(x) > 0$ ,  $0 < a < 1$ , 证明存在  $\xi \in \left(a, \frac{1}{a}\right)$ , 使得

$$\frac{\xi f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{\xi^{-1} f'(\xi^{-1})}{f(\xi^{-1})}.$$

证 将要证的等式化中的  $\xi$  换成  $x$ , 并两边关于  $x$  积分得

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{f'(x^{-1})}{f(x^{-1})} dx^{-1} \Rightarrow f(x)f(x^{-1}) = C$$

为此构造辅助函数

$$F(x) = f(x)f(x^{-1})$$

于是  $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ , 故由 Rolle 定理知,  $\exists \xi \in (0, 1)$ , 使得

$$F'(\xi) = f'(\xi)f(\xi^{-1}) - \xi^{-2}f'(\xi^{-1})f(\xi) = 0$$

又  $\xi, f(\xi), f(\xi^{-1}) \neq 0$ , 故  $\frac{\xi f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{\xi^{-1} f'(\xi^{-1})}{f(\xi^{-1})}$ .

**定理 2.3.2 (Lagrange 定理).** 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 则  $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ ,  $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ , 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

**例 2.3.2.** 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有连续的导数, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[ f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \right] = \frac{1}{2}[f(1) - f(0)].$$

由 Lagrange 中值定理知,  $\exists \xi_k \in \left(\frac{2k-1}{2n}, \frac{k}{n}\right)$ , 使  $f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) = \frac{f'(\xi_k)}{2n}$ , 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[ f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \right] = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f'(\xi_k) = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}[f(1) - f(0)].$$

**定理 2.3.3 (Cauchy 定理).** 若  $F(x), G(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导,  $G'(x) \neq 0$ , 则  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}.$$

**例 2.3.3.** 设  $0 < a < b$ , 证明至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使  $a e^b - b e^a = (1 - \xi) e^\xi (a - b)$ .

证 将要证的等式化为  $\frac{\frac{e^b}{b} - \frac{e^a}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = (1 - \xi) e^\xi$ , 令  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$ , 则  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $\forall x \in (a, b)$ ,  $g'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ , 故由 Cauchy 定理知,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = (1 - \xi) e^\xi$$

化简得  $a e^b - b e^a = (1 - \xi) e^\xi (a - b)$ .

**定理 2.3.4 (Darboux 定理).** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上处处可导 (端点指单侧导数),  $f'(a) < f'(b)$  或  $f'(a) > f'(b)$ , 则  $\forall \mu : f'(a) < \mu < f'(b)$ , 或  $f'(a) > \mu > f'(b)$ ,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = \mu$ .

### 2.3.2 单中值问题

#### 辅助函数的构造

常用的辅助函数构造, 本质为解微分方程.

表 2.2: 常用的辅助函数构造

| 原函数                                 | 辅助函数                               | 原函数                                     | 辅助函数                                     |
|-------------------------------------|------------------------------------|---|--|
| (1) $\xi f'(\xi) + n f(\xi) = 0$    | $F(x) = x^n f(x)$                  | (2) $\xi f'(\xi) - n f(\xi) = 0$        | $F(x) = x^{-n} f(x)$                     |
| (3) $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$  | $F(x) = e^{\lambda x} f(x)$        | (4) $\alpha f'(\xi) + \beta f(\xi) = 0$ | $F(x) = e^{\frac{\beta}{\alpha} x} f(x)$ |
| (5) $f'(\xi) + g'(\xi) f(\xi) = 0$  | $F(x) = e^{g(x)} f(x)$             | (6) $f'(\xi) + g(\xi) f(\xi) = 0$       | $F(x) = e^{\int g(x)} f(x)$              |
| (7) $f'(x) - \lambda(f(x) - x) = 1$ | $F(x) = (f(x) - x) e^{-\lambda x}$ | (8) $f'(x) - \alpha(f(x) - f(a)) = 0$   | $F(x) = (f(x) - f(a)) e^{-\alpha x}$     |
| (9) $f''(x) + f(x) = 0$             | $F(x) = f^2(x) + [f'(x)]^2$        | (10) $f''(x) - f(x) = 0$                | $F(x) = e^x (f'(x) - f(x))$              |

证 关于如何解微分方程可参考阅读第八章.

(1) 将原函数改写为  $x \frac{dy}{dx} + ny = 0$ , 该方程是变量分离方程, 即

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{ny} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{n} \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln x^n + \ln y = C \Rightarrow x^n y = C$$

将  $C$  改写为  $F(x)$ , 即得辅助函数  $F(x) = x^n f(x)$ .

(2) 同 (1) 易得  $\frac{y}{x^n} = C$ , 因此辅助函数为  $F(x) = \frac{f(x)}{x^n}$ .

(3) 将原函数改写为  $y' + \lambda y = 0$ , 有通解  $y = Ce^{-\lambda x}$ , 即  $C = ye^{\lambda x}$ , 将  $C$  改写为  $F(x)$ , 即得辅助函数  $F(x) = e^{\lambda x}f(x)$ .

(4) 同 (2) 得通解  $y = Ce^{-\frac{\beta}{\alpha}x}$ , 即  $C = ye^{\frac{\beta}{\alpha}x}$ , 因此有辅助函数  $F(x) = e^{\frac{\beta}{\alpha}x}f(x)$ .

(5) 将原函数改写为  $y' + g'(x)y = 0$ , 该方程为一阶常系数线性微分方程, 有通解  $y = Ce^{-\int g'(x)dx}$ , 即  $C = ye^{g(x)}$ , 因此有辅助函数  $F(x) = e^{g(x)}f(x)$ .

(6) 同 (5) 易得辅助函数为  $F(x) = e^{\int g(x)dx}f(x)$ .

(7) 将原函数改写为  $y' - \lambda(y - x) = 1 \Rightarrow y' - \lambda y = 1 - \lambda x$ , 该方程为一阶常系数线性微分方程, 有通解为

$$y = e^{\int \lambda dx} \left[ \int (1 - \lambda x)e^{-\int \lambda dx} dx + C \right] = x + Ce^{\lambda x}$$

即  $C = (y - x)e^{-\lambda x}$ , 因此辅助函数为  $F(x) = (f(x) - x)e^{-\lambda x}$ .

(8) 同 (7) 原函数为  $y' - \alpha f(x) = -\alpha f(a)$ , 有通解为

$$y = e^{\alpha \int dx} \left[ -\alpha f(a) \int e^{-\alpha \int dx} dx + C \right] = f(a) + Ce^{\alpha x}$$

即  $C = (y - f(a))e^{-\alpha x}$ , 因此辅助函数为  $F(x) = (f(x) - f(a))e^{-\alpha x}$ .

(9) 将原函数改写为  $y'' + y = 0$ , 等式两边同时乘以  $2y'$ , 有  $2y'y'' + 2yy' = 0 \Rightarrow [(y')^2 + y^2]' = C$ , 因此辅助函数为  $F(x) = f^2(x) + [f'(x)]^2$ .

(10) 将原函数改写为  $y'' - y = 0$  并令  $D = \frac{d}{dx}$ , 于是有  $(D^2 - 1)y = (D + 1)(D - 1)y = 0$ , 令  $(D - 1)y = z$ , 则

$$\frac{dz}{dx} + z = 0 \Rightarrow z = Ce^{-x} \Rightarrow C = (D - 1)ye^x$$

将  $C$  改写为  $F(x)$ , 即得辅助函数  $F(x) = e^x(f'(x) - f(x))$ .

**例 2.3.4.** 设函数  $f(x), g(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$ , 且  $f(a) = f(b) = 0$ , 证明至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0$ .

证 将要证的等式化中的  $\xi$  换成  $x$ , 有  $f'(x) + f(x)g'(x) = 0$ , 化为  $\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x)$ , 然后两边关于  $x$  积分, 得

$$\ln |f(x)| = -g(x) + C \Rightarrow f(x) = Ce^{-g(x)} \Rightarrow f(x)e^{g(x)} = C$$

为此构造辅助函数

$$F(x) = f(x)e^{g(x)}$$

则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 故由 Rolle 定理知,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$F'(\xi) = (f'(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi))e^{g(\xi)} = 0$$

而  $e^{g(x)} > 0$ , 故  $f'(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi) = 0$ .

**例 2.3.5.** 设函数  $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ ,  $f(0) = 0$ , 且  $\forall x \in (0, 1)$ , 都有  $f(x) \neq 0$ , 证明至少存在一点  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $\frac{nf'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$ , 其中  $n$  为自然数.

证 将要证的等式化中的  $\xi$  换成  $x$ , 并两边关于  $x$  积分得

$$n \ln |f(x)| = -\ln |f(1-x)| + C \Rightarrow f^n(x) \cdot f(1-x) = C$$

为此构造辅助函数

$$F(x) = f^n(x) \cdot f(1-x)$$

那么  $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ ,  $F(0) = F(1)$ , 故有 Rolle 定理知,

$$\exists \xi \in (0, 1), \text{ 使得 } F'(\xi) = nf^{n-1}(\xi)f'(\xi)f(1-\xi) - f^n(\xi)f'(1-\xi) = 0$$

又  $f(\xi), f(1-\xi) \neq 0$ , 故有  $nf'(\xi)f(1-\xi) - f(\xi)f'(1-\xi) = 0$ , 即  $\frac{nf'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$ .

**推论 2.3.1.** 设函数  $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ ,  $f(0) = 0$ , 且  $\forall x \in (0, 1)$ , 都有  $f(x) \neq 0$ , 则由至少存在一点  $\xi \in (0, 1)$ , 使得

$$\frac{mf'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{nf'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

其中  $m, n$  为自然数.

**例 2.3.6.** 设  $f(x) \in C\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cap D\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ , 证明:  $\exists \xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 使得

$$f'(\xi) + f(\xi) = \cos \xi.$$

证 构造辅助函数<sup>1</sup>  $F(x) = e^x f(x) - \frac{e^x}{2} \cdot (\sin x + \cos x)$ , 则

$$F(0) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

由 Rolle 定理知,  $\exists \xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 使得

$$F'(\xi) = e^\xi [f'(\xi) + f(\xi) - \cos \xi] = 0$$

又  $e^\xi > 0$ , 因此  $f'(\xi) + f(\xi) = \cos \xi$ .

**例 2.3.7 (第十届“景润杯”).** 设  $f(x), g(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$ , 且满足

$$2b > 3a, a+b > 0, f(a) = 0, f\left(\frac{2a+2b}{5}\right) + f\left(\frac{3a+3b}{5}\right) = 0$$

证明存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0$ .

证 令  $h(x) = f(x)e^{g(x)}$ , 由题意可得  $\frac{2a+3b}{5}, \frac{3a+3b}{5} \in (a, b)$ , 由  $f\left(\frac{2a+2b}{5}\right) + f\left(\frac{3a+3b}{5}\right) = 0$ , 可得

$$f\left(\frac{2a+2b}{5}\right) \cdot f\left(\frac{3a+3b}{5}\right) < 0 \text{ 或 } f\left(\frac{2a+2b}{5}\right) = f\left(\frac{3a+3b}{5}\right) = 0$$

若  $f\left(\frac{2a+2b}{5}\right) \cdot f\left(\frac{3a+3b}{5}\right) < 0$ , 则由零点定理知,  $\exists \eta \in \left(\frac{2a+2b}{5}, \frac{3a+3b}{5}\right)$ , 使得  $f(\eta) = 0$ ; 若  $f\left(\frac{2a+2b}{5}\right) = f\left(\frac{3a+3b}{5}\right) = 0$ , 则取  $\eta = \frac{2a+2b}{5}$ , 那么  $f(\eta) = 0$ , 显然  $[a, \eta] \subset [a, b]$ , 且  $h(x)$  在  $[a, \eta]$  上满足 Rolle 定理的条件, 则  $\exists \xi \in (a, \eta) \subset (a, b)$ , 使得  $h'(\xi) = 0$ , 而  $h'(\xi) = e^{g(\xi)}[f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi)] = 0$ , 因  $e^{g(\xi)} \neq 0$ , 故  $f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0$ .

### 常数 $k$ 值法

一般用于端点函数值不确定的情况下, 即题目中没有说明  $f(a)$  与  $f(b)$  的值, 此时令带有中值的函数  $\varphi(\xi) = k$ , 再将待证式中的一端点  $b$  (或者  $a$ ) 改写为  $x$  即得辅助函数.

**例 2.3.8.** 设  $0 < a < b$ , 函数  $f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$ , 证明至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}.$$

<sup>1</sup>解一阶线性微分方程

$$y = e^{-\int dx} \left[ \int \cos x \cdot e^{\int dx} dx + C \right] = e^{-x} \left[ \int \cos x e^x dx + C \right] = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + C e^{-x}$$

$$\text{其中 } \int \cos x e^x dx = \frac{\begin{vmatrix} (\cos x)' & (\cos x)' \\ e^x & \cos x \end{vmatrix}}{2} + C = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + C.$$

证法一 将要证式化为  $\frac{f(b) - f(a)}{\xi} = f'(\xi) \ln \frac{b}{a}$ , 即需证明  $[(f(b) - f(a)) \ln x]_{x=\xi}' = \left[ f(x) \ln \frac{b}{a} \right]_{x=\xi}'$ , 为此, 作辅助函数

$$F(x) = (f(b) - f(a)) \ln x - f(x) \ln \frac{b}{a}$$

则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $F(b) = F(a)$ , 故由 Rolle 定理知,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$F'(\xi) = (f(b) - f(a)) \frac{1}{\xi} - f'(\xi) \ln \frac{b}{a} = 0$$

即  $f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}$ .

证法二 将要证式化为  $\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \xi f'(\xi)$ , 令  $\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = k$ , 则  $f(b) - k \ln b = f(a) - k \ln a$ , 此时只需证  $k = \xi f'(\xi)$ , 为此, 作辅助函数

$$F(x) = f(x) - k \ln x$$

则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $F(b) = F(a)$ , 故由 Rolle 定理知,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{k}{\xi} = 0$$

即得  $k = \xi f'(\xi)$ , 从而得  $f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}$ .

证法三 要证  $f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}$ , 只需设  $k$  为使等式  $f(b) - f(a) = k \cdot \ln \frac{b}{a}$  成立的待定常数, 再证明  $k = \xi f'(\xi)$  即可, 为此, 将等式中的  $b$  改写为  $x$ , 并移项, 构造辅助函数

$$F(x) = f(x) - f(a) - k \ln \frac{x}{a}$$

则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $F(b) = 0 = F(a)$ , 于是由 Rolle 定理知,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{k}{\xi} = 0$$

即得  $k = \xi f'(\xi)$ , 从而得证.

证法四 将要证的等式化为  $\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$ , 易见, 设  $g(x) = \ln x$ , 则  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且

$\forall x \in (a, b), g'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$ , 故由 Cauchy 中值定理知,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

即  $\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ , 化简得  $f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}$ .

证法二又称为第一类常数  $k$  值法, 主要适用于常数部分可以分离的微积分中值等式证明题; 证法三则称为第二类常数  $k$  值法, 适用面更广.

**推论 2.3.2.** 设函数  $f(x), g(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$ , 且  $g'(x) \neq 0$ , 又  $g(x) > 0, a \leq x \leq b$ , 则存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$g'(\xi) [f(b) - f(a)] = g(\xi) f'(\xi) \ln \frac{g(b)}{g(a)}.$$

证 因为  $f(x), g(x)$  皆在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $g'(x) \neq 0$ , 又  $g(x) > 0, a \leq x \leq b$ , 所以由 Cauchy 定理知  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{\ln g(b) - \ln g(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{g'(\xi)}{g(\xi) f'(\xi)}$$

整理即得待证式.

**例 2.3.9.** 设  $0 < a < b$ , 函数  $f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$ , 证明  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi).$$

证法一 要证  $2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi)$ , 只需证

$$[x^2 \cdot (f(b) - f(a))]'_{x=\xi} = [(b^2 - a^2)f(x)]'_{x=\xi}$$

为此, 构造辅助函数  $F(x) = x^2 \cdot (f(b) - f(a)) - (b^2 - a^2)f(x)$ , 那么  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $F(a) = F(b)$ , 故由 Rolle 定理知,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$F'(\xi) = 2\xi(f(b) - f(a)) - (b^2 - a^2)f'(\xi) = 0$$

即  $2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi)$ .

证法二 将要证的等式化为  $2\xi \frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = f'(\xi)$ , 令  $\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = k$ , 则  $f(b) - kb^2 = f(a) - ka^2$ , 为此, 构造辅助函数

$$F(x) = f(x) - kx^2$$

则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $F(a) = F(b)$ , 故由 Rolle 定理知,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$F'(\xi) = f'(\xi) - 2k\xi = 0$$

即  $f'(\xi) = 2k\xi$ , 因而在  $\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = k$  的两边同时乘以  $2\xi(b^2 - a^2)$ , 即得待证等式.

证法三 将要证的等式化为  $f(b) - f(a) = \frac{f'(\xi)}{2\xi}(b^2 - a^2)$ , 设  $k$  为使  $f(b) - f(a) = k(b^2 - a^2)$  成立的实常数, 则只需证  $k = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$ , 为此构造辅助函数:

$$F(x) = f(x) - f(a) - k(x^2 - a^2)$$

则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $F(a) = F(b)$ , 故由 Rolle 定理知,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$F'(\xi) = f'(\xi) - 2k\xi = 0$$

即得  $f'(\xi) = 2k\xi$ , 又  $0 < a < b$ ,  $\xi \in (a, b)$ , 所以  $\xi > 0$ , 于是  $k = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$ , 从而得证.

证法四 将要证的等式化为  $\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2}$ , 令  $g(x) = x^2$ , 则  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $\forall x \in (a, b)$ ,  $g'(x) = 2x > 0$ , 故由 Cauchy 定理知,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

化简得  $2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi)$ .

**推论 2.3.3.** 一般地, 设函数  $f(x), g(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$ , 则  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

证 由 Cauchy 定理易证.

**例 2.3.10.** 设函数  $f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$ , 证明  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $\frac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi} = f'(\xi)$ .

证法一 将要证的等式化为  $f(\xi) + \xi f'(\xi) - f(a) - bf'(\xi) = 0$ , 即只需证  $[xf(x) - f(a)x - bf(x)]'_{x=\xi}$ , 为此构造辅助函数

$$F(x) = xf(x) - f(a)x - bf(x)$$

则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $F(a) = -bf(a) = F(b)$ , 故由 Rolle 定理知,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$F'(\xi) = f(\xi) + \xi f'(\xi) - f(a) - bf'(\xi) = 0$$

化简即得  $\frac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi} = f'(\xi)$ .

证法二 将要证的等式化中的  $\xi$  化为  $x$ , 有  $\frac{f(x) - f(a)}{b - x} = f'(x) \Rightarrow \frac{1}{b - x} = \frac{[f(x) - f(a)]'}{f(x) - f(a)}$ , 两边关于  $x$  积分得

$$-\ln(b - x) = \ln|f(x) - f(a)| + \ln C$$

即  $(b - x)(f(x) - f(a)) \equiv C$ , 为此构造辅助函数

$$F(x) = (b - x)(f(x) - f(a))$$

则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $F(a) = 0 = F(b)$ , 故由 Rolle 定理知,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$F'(\xi) = bf'(\xi) - f(\xi) - \xi f'(\xi) + f(a) = 0$$

化简即得  $\frac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi} = f'(\xi)$ .

**证法三** 将要证的等式化为  $(b - \xi)f'(\xi) - f(\xi) = -f(a) = -\frac{(b - a)f(a)}{b - a}$ , 为此构造辅助函数

$$F(x) = (b - x)f(x)$$

则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 故由 Lagrange 中值定理知,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\xi) = -f(\xi) + (b - \xi)f'(\xi)$$

即得  $f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi}$ .

**证法四** 将要证的等式化为  $f(\xi) - f(a) + \xi f'(\xi) = bf'(\xi)$ , 即只需证

$$\frac{1}{b} = \frac{f'(\xi)}{f(\xi) - f(a) + \xi f'(\xi)}$$

而  $f(\xi) - f(a) + x\xi f'(\xi) = [xf(x) - f(a)x]_{x=\xi}'$ , 为此构造辅助函数

$$F(x) = x(f(x) - f(a))$$

则  $f(x), F(x)$  在  $[a, b]$  满足 Cauchy 中值定理的条件, 于是  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

化简即得  $\frac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi} = f'(\xi)$ .

**推论 2.3.4.** 设函数  $f(x), g(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ , 且对任意的  $x \in (a, b)$ , 有  $g'(x) \neq 0$ , 则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

**证** 要证  $\frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ , 只需证  $(g(\xi) - g(b))f'(\xi) + (f(\xi) - f(a))g'(\xi) = 0$ , 即证

$$(g(x)f(x) - g(b)f(x) - f(a)g(x))'_{x=\xi} = 0$$

为此构造辅助函数  $F(x) = (f(x) - f(a))(g(x) - g(b))$  则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导,  $F(a) = F(b)$  故由 Rolle 定理知,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$F'(\xi) = f'(\xi)(g(\xi) - g(b))g'(\xi)(f(\xi) - f(a)) = 0$$

即得  $\frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ .

### 2.3.3 双中值问题

证明含有两个中值(可相等)微分等式的常见方法有:

- (1) 使用两次 Lagrange 中值定理;
- (2) 使用两次 Cauchy 中值定理;
- (3) 使用两次 Taylor 中值定理;
- (4) 使用 Rolle 定理、Lagrange 中值定理及 Cauchy 中值定理中的任两个定理各一次.

对于含有三个中值微分等式的证明题, 其证明方法可以类似地推广得到. 如果两个中值不相等, 那么可对区间进行划分, 在各自的子区间运用中值定理.

## 区间无需划分

**例 2.3.11.** 设函数  $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ , 且  $f(a) = f(b) = 1$ , 证明存在  $\xi, \eta \in (a, b)$ , 使得

$$e^{\eta-\xi}[f(\eta) - f'(\eta)] = 1.$$

证法一 将要证明的等式中含  $\xi$  和  $\eta$  的项分别放到等式的两侧, 化为

$$e^\eta [f(\eta) + f'(\eta)] = e^\xi$$

即只需证  $[ef(x)]'_{x=\eta} = (e^x)'_{x=\xi}$ , 而由 Lagrange 中值定理知,

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} = (e^x)'_{x=\xi}, \quad \frac{e^b f(b) - e^a f(a)}{b - a} = [ef(x)]'_{x=\eta}$$

且  $f(a) = f(b) = 1$  知  $\frac{e^b - e^a}{b - a} = \frac{e^b f(b) - e^a f(a)}{b - a}$ , 故可令

$$F(x) = e^x f(x), \quad G(x) = e^x$$

则  $F(x), G(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 于是分别对  $F(x)$  和  $G(x)$  用 Lagrange 中值定理知  $\exists \xi, \eta \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} = (e^x)'_{x=\xi} = e^\xi, \quad \frac{e^b f(b) - e^a f(a)}{b - a} = [ef(x)]'_{x=\eta} = e^\eta [f(\eta) + f'(\eta)]$$

又  $f(a) = f(b) = 1$ , 从而得  $e^\eta [f(\eta) + f'(\eta)] = e^\xi$ , 即  $e^{\eta-\xi}[f(\eta) - f'(\eta)] = 1$ .

证法二 要证  $e^{\eta-\xi}[f(\eta) - f'(\eta)] = 1$ , 即要证  $e^{\eta-\xi}[f(\eta) - f'(\eta)] - 1 = 0$ , 将  $\eta$  改写为  $x$  后, 只需证  $[e^{x-\xi} \cdot f(x) - x]'_{x=\eta} = 0$ , 为此构造辅助函数

$$F(x) = e^{x-\xi} \cdot f(x) - x$$

即证  $F(x)$  满足 Rolle 定理, 而这需要证明  $F(b) = F(a)$ , 即  $e^{b-\xi} - e^{a-\xi} = b - a$ , 再令  $G(x) = e^x$ , 则  $G(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 由 Lagrange 中值定理知,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$G(b) - G(a) = G'(\xi)(b - a)$$

从而得  $F(a) = F(b)$ , 故由 Rolle 定理知,  $\exists \eta \in (a, b)$ , 使得  $F'(\eta) = 0$ , 即  $e^{\eta-\xi}[f(\eta) - f'(\eta)] = 1$ .

**例 2.3.12.** 设  $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ , 证明:  $\exists \xi, \eta \in (0, 1)$ , 使得

$$e^{\eta-1}[f(\xi) + \xi f'(\xi)] = \eta f'(\eta) + f(\eta) - \eta f(\eta).$$

证 对  $xf(x)$  在  $[0, 1]$  上使用 Lagrange 中值定理, 有

$$\frac{1 \cdot f(1) - 0}{1 - 0} = f(\xi) + \xi f'(\xi) = 1, \quad \xi \in (0, 1)$$

对  $xe^{-x}f(x)$  在  $[0, 1]$  上使用 Lagrange 中值定理, 有

$$\frac{e^{-1}f(1) - 0}{1 - 0} = e^{-\eta}[\eta f'(\eta) + f(\eta) - \eta f(\eta)] = e^{-1}f(\eta), \quad \eta \in (0, 1)$$

两式联立即得证.

**例 2.3.13.** 设  $0 < a < b$ ,  $f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$ ,  $f'(x) \neq 0$ , 证明  $\exists \xi, \eta \in (a, b)$ , 使得

$$ab\xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a} = (b - a)\eta^2 f'(\eta).$$

证 令  $g(x) = -\frac{1}{x}$ ,  $h(x) = \ln x$ , 那么  $f, g, h$  均在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且满足 Cauchy 中值定理的条件, 于是  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{h(b) - h(a)} = \frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}} \Rightarrow f(b) - f(a) = \ln \frac{b}{a} \xi f'(\xi)$$

同理  $\exists \eta \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\eta)}{\frac{1}{\eta^2}} \Rightarrow f(b) - f(a) = (b - a) \frac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}$$

故  $\ln \frac{b}{a} \xi f'(\xi) = (b - a) \frac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}$ , 整理得  $ab\xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a} = (b - a)\eta^2 f'(\eta)$ .

**例 2.3.14.** 设  $a > 0$ , 函数  $f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$ , 且  $f(a) \neq f(b)$ , 证明:  $\exists \xi, \eta \in (a, b)$ , 使得

$$ab(a+b)f'(\xi) = 2\xi\eta^2f'(\eta).$$

证 令  $g(x) = x^2$ ,  $h(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f, g, h$  均在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 由 Cauchy 中值定理知,

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} &= \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow f(b) - f(a) = (b^2 - a^2) \frac{f'(\xi)}{2\xi} \\ \frac{f(b) - f(a)}{h(b) - h(a)} &= \frac{f'(\eta)}{h'(\eta)} \Rightarrow f(b) - f(a) = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) f'(\eta)\eta^2 \end{aligned}$$

故  $(b^2 - a^2) \frac{f'(\xi)}{2\xi} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) f'(\eta)\eta^2$ , 整理即得  $ab(a+b)f'(\xi) = 2\xi\eta^2f'(\eta)$ .

### 区间需要划分

**例 2.3.15.** 已知函数  $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ , 且  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = \frac{1}{2}$ , 证明存在  $\xi, \eta \in (0, 1)$ ,  $\xi \neq \eta$ , 使得  $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi + \eta$ .

证 要证  $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi + \eta$ , 即证  $f'(\xi) - \xi = \eta - f'(\eta)$ , 为此构造辅助函数

$$F(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$$

那么  $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ , 那么由 Lagrange 中值定理  $\exists \xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  使得

$$F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = \frac{1}{2}F'(\xi) = \frac{f'(\xi) - \xi}{2}, \quad F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}F'(\eta) = \frac{f'(\eta) - \eta}{2}$$

因为  $F(0) = F(1) = 0$ , 于是  $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f'(\xi) - \xi}{2} = -\frac{f'(\eta) - \eta}{2} \Rightarrow f'(\xi) + f'(\eta) = \xi + \eta$ .

**例 2.3.16.** 设函数  $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ , 且  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ , 证明:  $\exists \lambda, \mu \in (0, 1)$ , 且  $\lambda \neq \mu$ , 使得

$$f'(\lambda)(f'(\mu) + 1) = 2.$$

证 令  $F(x) = f(x) - 2(1-x)$ , 则  $F(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $F(0) < 0$ ,  $F(1) > 0$ , 由介值定理知,  $\exists x_0 \in (0, 1)$ , 使  $F(x_0) = 0$ , 即

$$f(x_0) = 2(1 - x_0)$$

对区间  $[0, x_0]$  和  $[x_0, 1]$ , 使用 Lagrange 中值定理, 有

$$\frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = f'(\lambda), \quad \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} = f'(\mu)$$

于是  $f'(\lambda)(f'(\mu) + 1) = \frac{f(x_0)}{x_0} \left( \frac{1 - f(x_0)}{1 - x_0} + 1 \right) = 2$ .

**例 2.3.17.** 设  $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ , 且  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ , 证明:

(1) 若  $0 < a < 1$ , 则在  $(0, 1)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = a$ ;

(2) 在  $(0, 1)$  内存在两个不同点  $\xi_1, \xi_2$ , 使得

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{2022}{f'(\xi_2)} = 2023.$$

### 证

(1) 令  $F(x) = f(x) - a$ , 那么  $F(0) = -a < 0$ ,  $F(1) = 1 - a > 0$ , 故由零点定理知,  $\exists \xi \in (0, 1)$ , 使得  $F(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) = a$ ;

- (2) 因为  $0 < \frac{1}{2023} < 1$ , 那么由 (1) 可知,  $\exists \xi_0 \in (0, 1)$ , 使得  $f(\xi_0) = \frac{1}{2023}$ , 于是在区间  $(0, \xi_0)$  和  $(\xi_0, 1)$  上分别使用 Lagrange 中值定理, 有

$$f(\xi_0) - f(0) = \frac{1}{2023} = f'(\xi_1)\xi_0, \quad f(1) - f(\xi_0) = 1 - \frac{1}{2023} = f'(\xi_2)(1 - \xi_0)$$

两式消去  $\xi_0$ , 得  $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{2022}{f'(\xi_2)} = 2023$ ,  $0 < \xi_1 < \xi_0 < \xi_2 < 1$ .

**推论 2.3.5.** 一般地, 设  $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ , 且  $f(0) = 0, f(1) = 1$ , 那么

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b.$$

**例 2.3.18.** 设函数  $f(x) \in C[0, 1] \cap D^2(0, 1)$ ,  $f(0) = f(1) = 0, f(x) > 0$ , 证明:

- (1) 在  $(0, 1)$  内存在两个不同的  $\xi_1, \xi_2$ , 使得  $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \min_{0 < x < 1} \frac{1}{f(x)}$ ;

$$(2) \int_0^1 \frac{|f''(x)|}{f(x)} dx \geq 4.$$

证

- (1) 由题设可知函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 由最值定理知,  $\exists \xi_0 \in (0, 1)$ , 使得  $f(\xi_0) = \max_{0 < x < 1} f(x)$ , 于是在区间  $(0, \xi_0)$  和  $(\xi_0, 1)$  上分别使用 Lagrange 中值定理, 有

$$f(\xi_0) - f(0) = \max_{0 < x < 1} f(x) = f'(\xi_1)\xi_0, \quad f(1) - f(\xi_0) = -\max_{0 < x < 1} f(x) = f'(\xi_2)(1 - \xi_0)$$

即

$$\frac{\xi_0}{f(\xi_0)} = \frac{1}{f'(\xi_1)}, \quad \frac{1 - \xi_0}{f(\xi_0)} = -\frac{1}{f'(\xi_2)}, \quad 0 < \xi_1 < \xi_0 < \xi_2 < 1$$

两式相加, 即得证  $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \min_{0 < x < 1} \frac{1}{f(x)}$ ;

- (2) 由 (1) 可知,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{|f''(x)|}{f(x)} dx &\geq \frac{1}{f(\xi_0)} \int_0^1 |f''(x)| dx \geq \frac{1}{f(\xi_0)} \int_{\xi_1}^{\xi_2} |f''(x)| dx \geq \frac{1}{f(\xi_0)} \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f''(x) dx \right| \\ &= \frac{1}{f(\xi_0)} |f'(\xi_1) - f'(\xi_2)| = \frac{1}{f(\xi_0)} \left| -\frac{f(\xi_0)}{1 - \xi_0} - \frac{f(\xi_0)}{\xi_0} \right| = \frac{1}{\xi_0(1 - \xi_0)} \geq 4 \end{aligned}$$

即所证不等式成立.

## 2.3.4 高阶中值问题

### 层次分析法

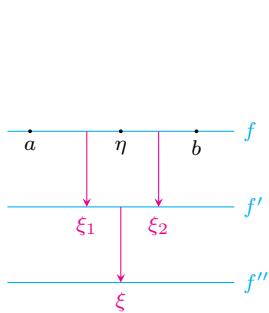


图 2.3.1

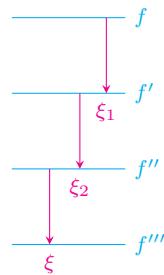


图 2.3.2

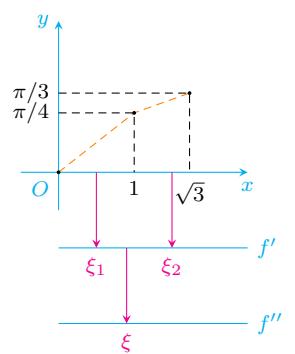


图 2.3.3

**例 2.3.19.** 设  $f(x) \in C[a, b] \cap D^2(a, b)$ ,  $f(a) = f(b) = 0$ ,  $f'_+(a) > 0$ , 证明:  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $f''(\xi) < 0$ .

如图 2.3.1 所示, 因为  $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ , 且  $f(a) = 0$ , 因此  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x - a} > 0$ , 所以  $\exists \eta \in (a, b)$ , 使得  $f(\eta) > 0$ , 在  $[a, \eta]$  和  $[\eta, b]$  上分别使用 Lagrange 中值定理, 有

$$\frac{f(\eta) - f(a)}{\eta - a} = f'(\xi_1) > 0, \quad \frac{f(b) - f(\eta)}{b - \eta} = f'(\xi_2) < 0, \quad \xi_1 \in (a, \eta), \xi_2 \in (\eta, b)$$

在  $[\xi_1, \xi_2]$  满足 Lagrange 中值定理条件, 故  $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$ , 使得

$$\frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = f''(\xi) < 0.$$

**例 2.3.20.** 设函数  $f(x) \in C[0, 1] \cap D^3(0, 1)$ , 且  $f(0) = f(1) = 0$ , 又  $F(x) = x^3 f(x)$ , 证明存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $F'''(\xi) = 0$ .

证法一 如图 2.3.2 所示, 欲使在  $f'''$  层次有一中值, 则需要在  $f''$  层次中寻找一个左右端点皆为 0 值的区间, 同理  $f'$  层次中也需要寻找两个零点, 由已知  $F(0) = F(1) = 0$  且  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上可导, 故由 Rolle 定理知,  $\exists \xi_1 \in (0, 1)$ , 使得  $F'(\xi_1) = 0$ , 又  $F'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x)$ ,  $F''(x) = 6xf(x) + 6x^2 f'(x) + x^3 f''(x)$

所以  $F'(0) = 0$ ,  $F''(0) = 0$ , 于是由 Rolle 定理知,  $\exists \xi_2 \in (0, \xi_1)$ , 使得  $F''(\xi_2) = 0$ , 再由  $F''(x)$  在  $[0, \xi_2]$  上用 Rolle 定理知,  $\exists \xi \in (0, \xi_2) \subset (0, \xi_1) \subset (0, 1)$ , 使得  $F'''(\xi) = 0$ .

证法二  $F(x) = x^3 f(x)$  在  $[0, 1]$  上三阶可导, 且  $F(0) = F(1) = 0$ ,  $F'(0) = F''(0) = 0$ , 令  $g(x) = x^3$ , 则  $g'(x) = 3x^2 > 0$ ,  $g''(x) = 6x > 0$ ,  $\forall x \in (0, 1)$ , 由 Cauchy 中值定理知,

$$\frac{F(1) - F(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{F'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}$$

然后分别对  $F'(x)$  与  $g'(x)$  在  $[0, \xi_1]$  和  $F''(x)$  与  $g''(x)$  在  $[0, \xi_2]$  上用 Cauchy 中值定理知,

$$0 = \frac{F'(\xi_1) - F'(\xi_1)}{g'(\xi_1) - g'(0)} = \frac{F''(\xi_2)}{g''(\xi_2)} = \frac{F''(\xi_2) - F''(0)}{g''(\xi_2) - g''(0)} = \frac{F'''(\xi)}{g'''(\xi)} = \frac{F'''(\xi)}{6}$$

其中  $\xi_2 \in (0, \xi_1)$ ,  $\xi \in (0, \xi_2) \subset (0, 1)$ , 故得  $F'''(\xi) = 0$ .

**例 2.3.21.** 设函数  $f(x) \in C[a, b] \cap D^5(a, b)$ , 证明:  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{6}(b-a) \left[ f'(a) + f'(b) + 4f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(5)}(\xi).$$

证 令  $h = \frac{b-a}{2}$ ,  $c = \frac{a+b}{2}$ , 则待证式等价为

$$f(c+h) = f(c-h) + \frac{h}{3} [f'(c-h) + f'(c+h) + 4f'(c)] - \frac{h^5}{90} f^{(5)}(\xi)$$

令  $h = x$ , 构造辅助函数

$$\varphi(x) = f(c+x) - f(c-x) - \frac{x}{3} [f'(c-x) + f'(c+x) + 4f'(c)] + \frac{x^5}{90} k$$

即证  $k = f^{(5)}(\xi)$ , 因为  $f \in C[a, b] \cap D^5(a, b)$ , 所以  $\varphi(x) \in C[a, b] \cap D^4(a, b)$ , 因此

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{2}{3} [f'(c+x) + f'(c-x)] - \frac{4}{3} f'(c) + \frac{x}{3} [f''(c-x) - f''(c+x)] + \frac{x^4}{18} k \\ \varphi''(x) &= \frac{1}{3} [f''(c+x) - f''(c-x)] - \frac{x}{3} [f'''(c-x) + f'''(c+x)] + \frac{2x^3}{9} k \\ \varphi'''(x) &= \frac{x}{3} [f^{(4)}(c-x) - f^{(4)}(c+x)] + \frac{2x^2}{3} k \end{aligned}$$

因为  $\varphi(0) = \varphi(h) = 0$ , 由 Rolle 定理知,  $\exists \xi_1 \in (0, h)$ , 使得  $\varphi'(\xi_1) = 0$ , 而  $\varphi'(0) = 0$ , 所以, 又由 Rolle 定理知,  $\exists \xi_2 \in (0, \xi_1)$ , 使得  $\varphi''(\xi_2) = 0$ , 最后又因为  $\varphi''(0) = 0$ , 所以  $\exists \xi_3$ , 使得

$$\varphi'''(\xi_3) = \frac{\xi_3}{3} [f^{(4)}(c-\xi_3) - f^{(4)}(c+\xi_3)] + \frac{2\xi_3^2}{3} k$$

又根据 Lagrange 中值定理,  $\exists \xi(c-\xi_3, c+\xi_3) \subset (a, b)$ , 使得

$$f^{(4)}(c-\xi_3) - f^{(4)}(c+\xi_3) = f^{(5)}(\xi)(-2\xi_3)$$

$$\text{即 } 0 = \frac{-2\xi_3^2}{3} f^{(5)}(\xi) + \frac{2\xi_3^2}{3} k \Rightarrow f^{(5)}(\xi) = k.$$

### 特殊函数作差法

**例 2.3.22.** 设  $f(x) \in C[0, \sqrt{3}] \cap D^2(0, \sqrt{3})$ , 且  $f(0) = 0, f(1) = \frac{\pi}{4}, f(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ , 证明:  $\exists \xi \in (0, \sqrt{3})$ , 使得  $f''(\xi) = -\frac{2\xi}{1+\xi^2}f'(\xi)$ .

证: 如图 2.3.3 所示, 欲证在  $f''$  层次有一中值, 则需寻找在  $f'$  层次的两个过渡中值, 那么就需要在  $f$  层次, 即通过作差的方法将第一象限的两个坐标点, 向下移动到  $x$  轴, 使得在  $x$  轴上存在 3 个零点, 满足这一性质的可以思考到将  $f(x)$  与  $\arctan x$  作差得到, 即令  $g(x) = f(x) - \arctan x$ , 则  $g(0) = g(1) = g(\sqrt{3}) = 0$ , 由 Rolle 中值定理知  $\exists \xi_1 \in (0, 1), \exists \xi_2 \in (1, \sqrt{3})$ , 使  $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$ , 即

$$(1 + \xi_1^2)f'(\xi_1) = (1 + \xi_2^2)f'(\xi_2) = 1$$

再令  $h(x) = (1 + x^2)f'(x)$ , 那么  $h(\xi_1) = h(\xi_2)$ , 又由 Rolle 中值定理知  $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, \sqrt{3})$ , 使  $h'(\xi) = 0$ , 整理即得待证式.

### 合理分配法

**例 2.3.23.** 设  $f(x) \in C\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cap D\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $f(0) = 0$ , 证明:  $\exists \xi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , 使得

$$f''(\xi) = 3f'(\xi) \tan \xi + 2f(\xi).$$

证 构造辅助函数<sup>2</sup>  $F(x) = f(x) \cdot \cos^2 x$ , 那么有  $F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = F(0) = 0$ , 则由 Rolle 定理知,  $\exists \xi_1, \xi_2$  分别属于  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  与  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 使得  $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$ , 又

$$F'(x) = f'(x) \cos^2 x - 2 \sin x \cos x f(x) = \cos x [f'(x) \cos x - 2 \sin x f(x)]$$

令  $g(x) = f'(x) \cos x - 2 \sin x f(x)$ , 则有  $g(\xi_1) = g(\xi_2) = 0$ , 再由 Rolle 定理知,  $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , 使得

$$g'(\xi) = 0 = f''(\xi) \cos \xi - 3f(\xi) \sin \xi - 2f(\xi) \cos \xi$$

由于  $\cos \xi \neq 0$ , 所以两边同时除以  $\cos \xi$ , 即得证.

### 补充导函数法

一般待证式中, 出现的导函数阶数是连续的, 即 0 与 1 或 1 与 2, 亦或常数与导函数直接相等的类型, 当缺失一阶导函数的时候, 需要人为补充一阶导, 之后再构造辅助函数.

**例 2.3.24.** 设函数  $f(x) \in C[a, b] \cap D^2(a, b)$ , 且  $f(a) = f'(a) = f''(a) = f(b) = 0$ , 证明:  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $(\xi - a)^2 f''(\xi) - 2f(\xi) = 0$ .

证 先令<sup>3</sup>  $F(x) = (x - a)^2 f'(x) - 2f(x)(x - a)$ , 则  $F(a) = 0$ , 欲再寻找一点  $\eta$ , 使得  $F(\eta) = 0$ , 为此构造辅助函数

$$G(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{(x-a)^2}, & x \in (a, b] \\ 0, & x = a \end{cases}$$

<sup>2</sup>首先观察待证式的各项系数, 发现存在  $1 + 2 = 3$  的情况, 于是利用“合理分配达到平均”思想, 组成

$$f''(\xi) - f'(\xi) \tan \xi = 2[f'(\xi) \tan \xi + f(\xi)]$$

又  $\cos \xi \neq 0$ , 于是两边同时乘以  $\cos \xi$ , 得  $[f''(\xi) \cos \xi - f'(\xi) \sin \xi] - 2[f'(\xi) \sin \xi + f(\xi) \cos \xi] = 0$ ; 发现 [] 内是“前导后不导”形式, 则可化为  $g'(\xi) = (f'(\xi) \cos \xi)' - 2(f(\xi) \sin \xi)' = 0$ ,  $g(x) = f'(x) \cos x - 2f(x) \sin x$ ; 此为“经典构造模型”之一 (参考表 2.2), 则构造辅助函数

$$F(x) = f(x) e^{\int -2 \tan x dx} = f(x) \cdot \cos^2 x.$$

<sup>3</sup>因为缺少一阶导项, 故考虑人为补充, 又由待证式的结构不难想到  $(gf' - fg')'$  其中  $g = (x - a)^2$ .

则有  $\lim_{x \rightarrow a^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{(x-a)^2} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + o((x-a)^2)}{(x-a)^2} = 0 = G(0)$ , 因此  $G(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $G(a) = G(b)$  则由 Rolle 定理知  $\exists \eta \in (a, b)$ , 使得

$$G'(\eta) = \frac{f'(\eta)(\eta-a)^2 - 2(\eta-a)f(\eta)}{(\eta-a)^4} = 0 \Rightarrow f'(\eta)(\eta-a)^2 - 2(\eta-a)f(\eta) = 0 \Rightarrow F(\eta) = 0$$

又因为  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $(a, b)$  内可导, 故由 Rolle 定理知  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$F'(\xi) = 2(\xi-a)f'(\xi) + (\xi-a)^2f''(\xi) - 2f'(\xi)(\xi-a) - 2f(\xi) = 0$$

整理即得证  $(\xi-a)^2f''(\xi) - 2f(\xi) = 0$ .

## 2.4 Taylor 展开与差商

**定理 2.4.1 (带 Lagrange 余项的 Taylor 展开).** 利用 Taylor 公式可得:

$$f(x+j) = f(x) + \frac{f(x)}{1!}j + \frac{f''(x)}{2!}j^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}j^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}j^n$$

其中  $j = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $x < \xi_j < x+j$ .

### 2.4.1 证明中值定理

**例 2.4.1.** 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上具有连续的二阶导数, 证明:  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{4}{(b-a)^2} \left[ f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] = f''(\xi).$$

证法一 函数  $f(x)$  在  $x = \frac{a+b}{2}$  处的一阶带 Lagrange 余项的 Taylor 公式为

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi_1)}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

其中  $\xi_1$  位于  $x, \frac{a+b}{2}$  之间, 令  $x = a, b$  代入上式, 得

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(x_1)}{2}\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 \\ f(b) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(x_2)}{2}\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

其中  $a < x_1 < \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} < x_2 < b, x_1 < x_2$ , 两式相加, 得

$$f(a) + f(b) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(x_1) + f''(x_2)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

改写得

$$\frac{4}{(b-a)^2} \left[ f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] = \frac{f''(x_1) + f''(x_2)}{2}$$

由于函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上具有连续的二阶导数, 所以由最值定理, 可知

$$\min_{x \in [x_1, x_2]} f''(x) \leq \frac{f''(x_1) + f''(x_2)}{2} \leq \max_{x \in [x_1, x_2]} f''(x)$$

于是由介值定理可知存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $\frac{f''(x_1) + f''(x_2)}{2} = f''(\xi)$ , 代入即得

$$\frac{4}{(b-a)^2} \left[ f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] = f''(\xi).$$

证法二 设  $f(x) - 2f\left(\frac{x+a}{2}\right) + f(a) = \frac{1}{4}K(x-a)^2$ , 其中  $K$  为待定实常数, 记

$$F(x) = f(x) - 2f\left(\frac{x+a}{2}\right) + f(a) - \frac{1}{4}K(x-a)^2$$

则  $F(a) = F(b) = 0$ , 由 Rolle 中值定理,  $\exists c \in (a, b)$ , 使得  $F'(c) = 0$ , 即

$$f'(c) - f'\left(\frac{c+a}{2}\right) - \frac{1}{2}K(c-a) = 0$$

再由 Lagrange 中值定理,  $\exists \xi \in \left(\frac{a+c}{2}, c\right)$ , 使得

$$f'(c) - f'\left(\frac{c+a}{2}\right) = f''(\xi)\left(c - \frac{c+a}{2}\right)$$

比较得  $f''(c)\left(c - \frac{c+a}{2}\right) - \frac{1}{2}K(c-a) = 0$ , 由此得  $f''(\xi) = K$ .

**例 2.4.2.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内二阶可导, 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

证法一 注意到

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \left[f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \left[f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) - f(a)\right]$$

令  $F(x) = f\left(x + \frac{b-a}{2}\right) - f(x)$ ,  $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ , 则  $F(x)$  在  $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$  上连续, 在  $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$  内二阶可导, 故由 Lagrange 中值定理,

$$\exists \xi_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right), \text{ 使 } F\left(\frac{a+b}{2}\right) - F(a) = F'(\xi_1) \cdot \frac{b-a}{2}$$

又由  $f'(x)$  在  $\left[\xi_1, \xi_1 + \frac{b-a}{2}\right]$  上用 Lagrange 中值定理,

$$\exists \xi \in \left(\xi_1, \xi_1 + \frac{b-a}{2}\right) \subset (a, b), \text{ 使 } f'\left(\xi_1 + \frac{b-a}{2}\right) - f'(\xi_1) = f''(\xi) \cdot \frac{b-a}{2}$$

代入上式, 即得  $f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$ .

证法二 将  $f(a), f(b)$  分别在  $x = \frac{a+b}{2}$  处进行 Taylor 展开, 得

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{a-b}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \frac{f''(\xi_1)}{2!} \\ f(b) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \frac{f''(\xi_2)}{2!} \end{aligned}$$

其中  $a < \xi_1 < \frac{a+b}{2} < \xi_2 < b$ , 两式相加, 得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} \cdot \left[ \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2} \right]$$

而  $\min(f''(\xi_1), f''(\xi_2)) \leq \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2} \leq \max(f''(\xi_1), f''(\xi_2))$ , 由 Darboux 定理知, 存在  $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$ , 使得  $f''(\xi) = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2}$ , 从而得  $f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$ .

证法三 要证  $f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$ , 即证

$$\frac{f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a)}{(b-a)^2} = \frac{1}{4}f''(\xi)$$

为此, 构造辅助函数  $F(x) = f(x) - 2f\left(\frac{a+x}{2}\right) + f(a)$ ,  $G(x) = (x-a)^2$ , 则  $F(x), G(x)$  满足 *Cauchy* 中值定理的条件, 故由 *Cauchy* 中值定理得

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{f'(\xi_1) - f'\left(\frac{a+\xi_1}{2}\right)}{2(\xi_1 - a)} = \frac{f''(\xi) \cdot \frac{\xi_1 - a}{2}}{2(\xi_1 - a)} = \frac{1}{4}f''(\xi)$$

其中  $\xi_1 \in (a, b)$ ,  $\xi \in \left(\frac{a+\xi_1}{2}, \xi_1\right) \subset (a, b)$ .

**证法四** 设  $k$  为使  $f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4}k$  成立的实常数, 构造辅助函数

$$g(x) = f(x) - 2f\left(\frac{a+x}{2}\right) + f(a) - \frac{(x-a)^2}{4}k$$

则  $g(a) = g(b) = 0$ , 于是由 *Rolle* 定理得, 存在  $\xi_1 \in (a, b)$ , 使  $g'(\xi_1) = 0$ , 即

$$f'(\xi_1) - f'\left(\frac{a+\xi_1}{2}\right) - \frac{k}{2}(\xi_1 - a) = 0$$

又  $f'\left(\frac{a+\xi_1}{2}\right) = f'(\xi_1) + f''(\xi) \cdot \frac{a-\xi_1}{2}$ , 其中  $\xi \in \left(\frac{a+\xi_1}{2}, \xi_1\right) \subset (a, b)$ , 代入前一式, 即得  $k = f''(\xi)$ .

## 2.4.2 中值点的极限

**例 2.4.3.** 设  $f''(x)$  在某区间  $I$  上连续, 且  $f''(x_0) \neq 0$  ( $x_0 \in I$ ), 对于  $x_0 + h \in I$ , 由微分中值定理

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h) \quad (0 < \theta < 1)$$

证明:  $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$ .

证 对  $f'(x)$  应用 *Lagrange* 中值定理, 有

$$f'(x_0 + \theta h) - f'(x_0) = \theta h f''(x_0 + \xi \theta) \quad (0 < \xi < 1)$$

于是

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h) = f(x_0) + h[f'(x_0) + \theta h f''(x_0 + \xi \theta)] \quad (1)$$

再根据 *Taylor* 公式有

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_0 + \eta h) \quad (0 < \eta < 1) \quad (2)$$

比较式 (1)、(2) 得

$$\theta f''(x_0 + \xi \theta) = \frac{1}{2}f''(x_0 + \eta h)$$

因  $f''(x)$  在  $x_0$  点连续, 所以

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta f''(x_0 + \xi \theta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2}f''(x_0 + \eta h)$$

因此有  $f''(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}f''(x_0)$ , 又因为  $f''(x_0) \neq 0$ , 所以  $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$ .

**例 2.4.4.** 设  $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)$  ( $0 < \theta < 1$ ), 且  $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ , 证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}.$$

证 由题设知  $f(x)$  在  $x=a$  处具有  $n+1$  阶导数, 故  $f(x)$  在  $a$  点处的  $n$  阶 *Taylor* 展开为

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta_1 h) \quad (0 < \theta_1 < 1)$$

与  $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)$  相比较, 得

$$\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h) = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta_1 h)$$

于是

$$f^{(n)}(a + \theta h) - f^{(n)}(a) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta_1 h)}{n+1} h$$

由 Lagrange 中值定理知,

$$f^{(n+1)}(a + \theta_2(\theta h)) \cdot \theta h = f^{(n+1)}(a + \theta_1 h) \cdot \frac{h}{n+1} \quad (0 < \theta_2 < 1)$$

令  $h \rightarrow 0$ , 则  $\theta h, \theta_1 h, \theta_2(\theta h) \rightarrow 0$ , 并注意到  $f^{(n+1)}(x)$  连续及  $f^{(n+1)}(a) \neq 0$ , 即得  $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}$ .

**例 2.4.5.** 设函数  $f(x)$  在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  内有  $n$  阶连续导数, 且

$$f^{(k)}(x_0) = 0, k = 2, 3, \dots, n-1, \text{ 且 } f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

当  $0 < |h| < \delta$  时,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h f'(x_0 + \theta h) \quad (0 < \theta < 1)$$

证明:  $\lim_{n \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$ .

证 由 Taylor 公式可得

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n, \quad \xi \in (x_0, x_0 + h)$$

由题设的条件, 可得

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)h^n \quad (1)$$

又有

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h f'(x_0 + \theta h), \quad 0 < \theta < 1 \quad (2)$$

由 (1)、(2) 式可得

$$h f'(x_0 + \theta h) = h f'(x_0) + \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)h^n \quad (3)$$

仿式 (1) 可得

$$f'(x_0 + \theta h) = f'(x_0) + f^1(x_0)(\theta h) + \dots + \frac{f^{(n)}(\eta)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1}, \quad \eta \in (x_0, x_0 + \theta h) \quad (4)$$

将式 (4) 代入式 (3), 注意到  $f^{(k)}(x_0) = 0$ , 可得

$$\frac{1}{n}f^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\eta)\theta^{n-1} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{n}f^{(n)}(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} f^{(n)}(\eta)\theta^{n-1}$$

可得

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n} = f^{(n)}(x_0) \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \theta \right]^{n-1} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}.$$

### 2.4.3 无穷远处的极限

**例 2.4.6.** 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内具有  $n$  阶导数且满足  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$  ( $c$  为常数),  $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = 0$ ,

证明:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ).

证 由 Taylor 公式可得:

$$f(x+j) = f(x) + \frac{f(x)}{1!}j + \frac{f''(x)}{2!}j^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}j^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi_j)}{n!}j^n$$

其中  $j = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $x < \xi_j < x+j$ . 从而有

$$f(x+j) - f(x) = f'(x)j + \frac{f''(x)}{2!}j^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}j^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi_j)}{n!}j^n \quad (*)$$

由于  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c, \lim_{x \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = 0, x < \xi_j < x + j$ , 可知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x + j) = c, \lim_{x \rightarrow \infty} f^{(n)}(\xi_j) = 0$$

由式 (\*) 可得

$$0 = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x + j) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ f'(x)j + \frac{1}{2!} f''(x)j^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} j^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi_i)}{n!} j^n \right]$$

令  $j = 1$  得

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ f'(x) + \frac{1}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) + \frac{1}{2!} \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \lim_{x \rightarrow \infty} f^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

相仿可得

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) + \frac{2^2}{2!} \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \lim_{x \rightarrow \infty} f^{(n-1)}(x) \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) + \frac{3^2}{2!} \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) + \cdots + \frac{3^{n-1}}{(n-1)!} \lim_{x \rightarrow \infty} f^{(n-1)}(x) \\ &\quad \dots \\ &= (n-1) \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) + \frac{(n-1)^2}{2!} \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) + \cdots + \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!} \lim_{x \rightarrow \infty} f^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

不妨记  $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) = a_k$  为待定数值, 可得含有  $n-1$  个未知量,  $n-1$  个方程构成的方程组,

$$\begin{cases} a_1 + \frac{1}{2!} a_2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} a_{n-1} = 0 \\ 2a_1 + \frac{2^2}{2!} a_2 + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} a_{n-1} = 0 \\ \dots \\ (n-1)a_1 + \frac{(n-1)^2}{2!} a_2 + \cdots + \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!} a_{n-1} = 0 \end{cases}$$

系数行列式  $D$  为, 并将第  $i$  行提出公因子  $i!$ , 第  $j$  列提出公因子  $j!$ , 转化为 Vandermonde 行列式,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 2 & \frac{2^2}{2!} & \cdots & \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & \frac{(n-1)^2}{2!} & \cdots & \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!} \end{vmatrix} = \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{1 \cdot 2! \cdots (n-1)!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 1 & 3 & \cdots & 3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n-1 & \cdots & (n-1)^{n-2} \end{vmatrix} \neq 0$$

可知上述齐次线性方程组仅有零解, 即  $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) = a_k = 0 (k = 1, 2, \dots, n-1)$ .

## 2.4.4 关于界的估计

**例 2.4.7.** 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内具有三阶导数, 且  $f(x), f'''(x)$  有界, 证明:  $f'(x)$  和  $f''(x)$  有界.

证 由 Taylor 公式可知

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2} f''(x) + \frac{1}{6} f'''(\xi_1) \tag{1}$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2} f''(x) - \frac{1}{6} f'''(\xi_2) \tag{2}$$

其中  $x < \xi_1 < x+1, x-1 < \xi_2 < x$ , 式 (1) + 式 (2) 得

$$f(x+1) + f(x-1) = 2f(x) + f''(x) + \frac{1}{6} [f'''(\xi_1) - f'''(\xi_2)]$$

由  $f(x)$  与  $f'''(x)$  有界, 可知  $f''(x)$  有界, 式 (1) – 式 (2) 得

$$f(x+1) - f(x-1) = 2f'(x) + \frac{1}{6} [f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)]$$

同理可知  $f'(x)$  有界.

**例 2.4.8.** 已知  $f(x) \in C[0, 2] \cap D^2(0, 2)$ ,  $\max_{0 \leq x \leq 2} \{|f(x)|, |f''(x)|\} \leq 1$  证明:  $\forall x \in [0, 2]$ , 有  $|f'(x)| \leq 2$ .

证 由  $\max_{0 \leq x \leq 2} \{|f(x)|, |f''(x)|\} \leq 1$  知,  $|f(x)| \leq 1$ ,  $|f''(x)| \leq 1$ , 对  $f(0)$  和  $f(2)$  Taylor 展开, 有

$$\begin{cases} f(0) = f(x) + f'(x)(-x) + \frac{1}{2!} f''(\xi_1)x^2 \\ f(2) = f(x) + f'(x)(2-x) + \frac{1}{2!} f''(\xi_2)(2-x)^2 \end{cases}$$

作差得  $f(0) - f(2) = -2f'(x) + \frac{1}{2} f''(\xi_1)x^2 - \frac{1}{2} f''(\xi_2)(x-2)^2$ , 即

$$|2f'(x)| = \left| f(2) - f(0) + \frac{1}{2} f''(\xi_1)x^2 - \frac{1}{2} f''(\xi_2)(x-2)^2 \right| \leq |f(2)| + |f(0)| + \left| \frac{1}{2} f''(\xi_1)x^2 \right| + \left| \frac{1}{2} f''(\xi_2)(x-2)^2 \right|$$

因为  $|f(x)| \leq 1$ ,  $|f''(x)| \leq 1$ , 所以

$$|f(2)| + |f(0)| \leq 2, \quad \left| \frac{1}{2} f''(\xi_1)x^2 \right| + \left| \frac{1}{2} f''(\xi_2)(x-2)^2 \right| \leq \frac{x^2}{2} + \frac{(x-2)^2}{2}$$

因此  $2|f'(x)| \leq 2 + \frac{x^2}{2} + \frac{(x-2)^2}{2} \leq 4 \Rightarrow |f'(x)| \leq 2$ .

**例 2.4.9.** 设函数  $f(x)$  在  $(a, +\infty)$  内具有二阶导数, 且  $|f(x)| \leq M_0$ ,  $|f'(x)| \leq M_1$ ,  $|f''(x)| \leq M_2$ , 证明:  $M_1^2 < 4M_0M_2$ .

$\forall x \in (a, +\infty)$  和  $\forall h > 0$ , 由在  $x$  处有一阶 Taylor 公式

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \frac{f''(\xi)}{2} \cdot h^2, \quad x < \xi < x+h$$

于是  $f'(x) = \frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] - \frac{f''(\xi)}{2}h$ , 从而有

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{h}|f(x+h) - f(x)| + \frac{|f''(\xi)|}{2}h = \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2h}{2}$$

取  $h = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ , 则  $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0M_2} \Rightarrow |f'(x)|^2 \leq 4M_0M_2$ , 有  $x$  的任意性, 得  $M_1^2 \leq 4M_0M_2$ .

**例 2.4.10.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导,  $f'(a) = f'(b) = 0$ , 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

证法一 将  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  分别在  $x=a$  和  $x=b$  处进行 Taylor 展开

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(a) + f'(a)\frac{b-a}{2} + \frac{f''(\xi_1)}{2!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(b) + f'(b)\frac{a-b}{2} + \frac{f''(\xi_2)}{2!} \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

其中  $a < \xi_1 < \frac{a+b}{2} < \xi_2 < b$ , 由已知  $f'(a) = f'(b) = 0$  代入上式, 得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) = \frac{f''(\xi_1)}{2} \left(\frac{b-a}{2}\right)^2, \quad f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = -\frac{f''(\xi_2)}{2} \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

记  $\xi = \begin{cases} \xi_1, |f''(\xi_2)| \leq |f''(\xi_1)| \\ \xi_2, |f''(\xi_2)| > |f''(\xi_1)| \end{cases}$ , 则  $\xi \in (a, b)$ ,  $|f''(\xi)| = \max(|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|)$ , 故

$$|f(b) - f(a)| \leq \left| f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) \right| \leq \frac{|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|}{2} \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4} |f''(\xi)|$$

$$\text{即 } |f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

**证法二** 由连续函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上用介值定理知, 存在  $x_0 \in [a, b]$ , 使  $f(x_0) = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)]$ , 不妨设  $a \leq x_0 \leq \frac{a+b}{2}$ , 则将  $f(x_0)$  在点  $x = a$  处进行 Taylor 展开, 得存在  $\xi \in (a, x_0) \subset (a, b)$ , 使

$$f(x_0) = f(a) + f'(a)(x_0 - a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_0 - a)^2 = f(a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x_0 - a)^2$$

$$\text{于是 } |f''(\xi)| = \frac{2|f(x_0) - f(a)|}{(x_0 - a)^2} \geq \frac{|f(b) - f(a)|}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

**证法三** 令  $g_1(x) = (x-a)^2$ ,  $g_2(x) = (x-b)^2$ , 则将  $f(x)$  与  $g_1(x)$  和  $f(x)$  与  $g_2(x)$  分别在  $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$  和  $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$  上用两次 Cauchy 中值定理, 知  $\exists \eta_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ ,  $\xi_1 \in (a, \eta_1)$ , 使

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)}{g_1\left(\frac{a+b}{2}\right) - g_1(a)} = \frac{f'(\eta_1)}{g'_1(\eta_1)} = \frac{f'(\eta_1) - f'(a)}{g'_1(\eta_1) - g'_1(a)} = \frac{f''(\xi_1)}{g'_1(\xi_1)} = \frac{1}{2} f''(\xi_1)$$

$$\exists \eta_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right), \xi_2 \in (\eta_2, b), \text{ 使}$$

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(b)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(b)}{g_2\left(\frac{a+b}{2}\right) - g_2(b)} = \frac{f'(\eta_2)}{g'_2(\eta_2)} = \frac{f'(\eta_2) - f'(b)}{g'_2(\eta_2) - g'_2(b)} = \frac{f''(\xi_2)}{g'_2(\xi_2)} = \frac{1}{2} f''(\xi_2)$$

取  $\xi = \begin{cases} \xi_1, & |f''(\xi_1)| \geq |f''(\xi_2)|, \\ \xi_2, & |f''(\xi_1)| < |f''(\xi_2)|, \end{cases}$ , 则

$$\begin{aligned} |f''(\xi)| &= \max(|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|) \geq \frac{1}{2} (|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|) \geq \frac{1}{2} |f''(\xi_1) - f''(\xi_2)| \\ &= \left| \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} - \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(b)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} \right| = \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|. \end{aligned}$$

**推论 2.4.1.** 一般地, 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上具有直至  $n$  阶的导数 ( $n \geq 2$ ), 且  $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ), 则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使

$$|f^{(n)}(\xi)| \geq \frac{2^{n-1} \cdot n!}{(b-a)^n} |f(b) - f(a)|.$$

## 2.4.5 差商与导数

**定义 2.4.1 (一阶差商).** 设  $x_0, x_1, \dots, x_n$  为  $[a, b]$  上的节点, 若  $x_i \neq x_j$ , 则函数  $f(x)$  关于节点  $x_i, x_j$  的一阶差商定义为

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

**定义 2.4.2 (重节点差商).** 若  $x_i = x_j$ , 则定义重节点差商

$$f[x_i, x] = \lim_{x \rightarrow x_i} f[x_i, x] = \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i} = f'(x_i).$$

**定义 2.4.3 (二阶差商).** 若  $x_i, x_j, x_k$  互异, 则定义二阶差商

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}.$$

若  $x_i = x_j \neq x_k$  或  $x_i = x_j = x_k$ , 则分别定义

$$f[x_i, x_i, x_k] = \frac{f[x_i, x_k] - f[x_i, x_i]}{x_k - x_i}, \quad f[x_i, x_i, x_i] = \lim_{\substack{x_j \rightarrow x_i \\ x_k \rightarrow x_i}} f[x_i, x_j, x_k] = \frac{1}{2} f''(x_i).$$

**定义 2.4.4 ( $n$  阶差商).** 一般地, 定义  $n$  阶差商及  $n$  阶重节点差商分别为

$$\begin{aligned} f[x_{i0}, x_{i1}, \dots, x_{in}] &= \frac{f[x_{i1}, \dots, x_{in}] - f[x_{i0}, x_{i1}, \dots, x_{i(n-1)}]}{x_{in} - x_{i0}} \\ f[x_{i0}, x_{i0}, \dots, x_{i0}] &= \lim_{x_{ij} \rightarrow x_{i0}} f[x_{i0}, x_{i1}, \dots, x_{in}] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_{i0}). \end{aligned}$$

**定理 2.4.2 (差商与导数的关系).** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上存在  $n$  阶导数, 且节点  $x_{i0}, x_{i1}, \dots, x_{in} \in [a, b]$  (其中可有重节点), 则有

$$f[x_{i0}, x_{i1}, \dots, x_{in}] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

其中  $\xi \in \left( \min_{0 \leq k \leq n} \{x_{ik}\}, \max_{0 \leq k \leq n} \{x_{ik}\} \right)$ .

**例 2.4.11.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上三阶可导, 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(b) = f(a) + f' \left( \frac{a+b}{2} \right) (b-a) + \frac{1}{24} f'''(\xi)(b-a)^3.$$

证法一 将  $f(a), f(b)$  在  $x = \frac{a+b}{2}$  处进行 Taylor 展开, 得

$$\begin{aligned} f(a) &= f \left( \frac{a+b}{2} \right) + f' \left( \frac{a+b}{2} \right) \cdot \frac{a-b}{2} + \frac{1}{2} f'' \left( \frac{a+b}{2} \right) \cdot \frac{(a-b)^2}{4} + \frac{1}{6} f'''(\xi_1) \frac{(a-b)^3}{8} \\ f(b) &= f \left( \frac{a+b}{2} \right) + f' \left( \frac{a+b}{2} \right) \cdot \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2} f'' \left( \frac{a+b}{2} \right) \cdot \frac{(b-a)^2}{4} + \frac{1}{6} f'''(\xi_2) \frac{(b-a)^3}{8} \end{aligned}$$

其中  $a < \xi_1 < \frac{a+b}{2} < \xi_2 < b$ , 两式相减得

$$f(b) - f(a) - f' \left( \frac{a+b}{2} \right) (b-a) = \frac{1}{24} \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} (b-a)^3$$

而由

$$\min(f'''(\xi_1), f'''(\xi_2)) \leq \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} \leq \max(f'''(\xi_1), f'''(\xi_2))$$

及 Darboux 定理知

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b), \text{ 使得 } f'''(\xi) = \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2}$$

故得证.

证法二 设  $k$  为使  $f(b) = f(a) + f' \left( \frac{a+b}{2} \right) (b-a) + \frac{1}{24} k(b-a)^3$  成立的实常数, 为此只需证  $k = f''(\xi)$  即可, 令  $g(x) = f(x) - f(a) - f' \left( \frac{a+x}{2} \right) (x-a) - \frac{k}{24}(x-a)^3$  则  $g(a) = g(b) = 0$ , 于是由 Rolle 定理知,  $\exists \eta \in (a, b)$ , 使  $g'(\eta) = 0$  即

$$f'(\eta) - \frac{1}{2} f'' \left( \frac{a+\eta}{2} \right) (\eta-a) - f' \left( \frac{a+\eta}{2} \right) - \frac{k}{8} (\eta-a)^2 = 0$$

又将  $f'(\eta)$  在  $x = \frac{a+\eta}{2}$  处进行 Taylor 展开, 得

$$f'(\eta) = f' \left( \frac{a+\eta}{2} \right) + f'' \left( \frac{a+\eta}{2} \right) \cdot \frac{\eta-a}{2} + \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot \left( \frac{\eta-a}{2} \right)^2$$

代入上式, 得  $\frac{f'''(\xi)}{2!} \cdot \left(\frac{\eta-a}{2}\right)^2 - \frac{k}{8}(\eta-a)^2 = 0$ , 从而得  $k = f'''(\xi)$ , 其中  $\xi \in \left(\frac{a+\eta}{2}, \eta\right) \subset (a, b)$ , 故得证.

证法三 由于要证等式中含有  $f' \left(\frac{a+b}{2}\right)$ , 因而选取重节点:  $x_0 = a, x_1 = c = \frac{a+b}{2}, x_2 = c, x_3 = b$ , 列差商表如下:

| $x_k$     | $f(x_k)$ | 一阶差商      | 二阶差商         | 三阶差商            |
|-----------|----------|-----------|--------------|-----------------|
| $x_0 = a$ | $f(a)$   |           |              |                 |
| $x_1 = c$ | $f(c)$   | $f[a, c]$ |              |                 |
| $x_2 = c$ | $f(c)$   | $f'(c)$   | $f[a, c, c]$ |                 |
| $x_3 = b$ | $f(b)$   | $f[c, b]$ | $f[c, c, b]$ | $f[a, c, c, b]$ |

而由差商与导数的关系, 得  $f[a, c, c, b] = \frac{f''(\xi)}{3!}$ , 其中  $\xi \in (a, b)$ , 由重节点差商定义, 有

$$f[a, c, c, b] = \frac{f[c, c, b] - f[a, c, c]}{b - a}, \quad f[c, c, b] = \frac{f[c, b] - f'(c)}{b - c}$$

$$f[a, c, c] = \frac{f'(c) - f[a, c]}{c - a}, \quad f[c, b] = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}, \quad f[a, c] = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

代入整理, 即得  $f(b) = f(a) + f' \left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{1}{24}f''(\xi)(b-a)^3$ .

**例 2.4.12.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上三阶可导, 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(f'(a) + f'(b))(b-a) - \frac{1}{12}f'''(\xi)(b-a)^3.$$

证法一 将要证的等式化为  $\frac{f(b) - f(a) - \frac{1}{2}(f'(a) + f'(b))(b-a)}{-\frac{1}{12}(b-a)^3} = f'''(\xi)$  为此, 令

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{1}{2}(f'(a) + f'(x))(x-a), \quad G(x) = -\frac{1}{12}(x-a)^3$$

则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导,  $G(x)$  在  $[a, b]$  上任意阶可导, 于是两次用 Cauchy 中值定理, 得

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = f'''(\xi)$$

其中  $F(a) = 0 = F'(a)$ ,  $G(a) = 0 = G'(a)$ ,  $\xi_1 \in (a, b) \subset (a, b)$ ,  $\xi \in (a, \xi_1) \subset (a, b)$ , 整理即得  $f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(f'(a) + f'(b))(b-a) - \frac{1}{12}f'''(\xi)(b-a)^3$ .

证法二 设  $k$  为使  $f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}(f'(a) + f'(b)) - \frac{1}{12}k(b-a)^3$  成立的实常数, 为此证明  $k = f'''(\xi)$  即可, 令

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}(f'(a) + f'(x)) + \frac{1}{12}k(x-a)^3$$

则  $g(a) = g(b) = 0$ , 于是由 Rolle 定理知, 存在  $\eta \in (a, b)$ , 使得  $g'(\eta) = 0$ , 即

$$\frac{1}{2}f'(\eta) - \frac{1}{2}f'(a) - \frac{\eta-a}{2}f'(\eta) + \frac{k}{4}(\eta-a)^2 = 0$$

又将  $f'(a)$  在  $x = \eta$  处进行 Taylor 展开, 得

$$f'(a) = f'(\eta) + f'(\eta)(a-\eta) + \frac{1}{2}f'''(\xi)(a-\eta)^2$$

代入上式, 即得  $k = f'''(\xi)$ , 其中  $\xi \in (a, \eta) \subset (a, b)$ , 故得证.

证法三 由于要证明的等式中含有  $f'(a)$  及  $f'(b)$ , 因而考虑选取重节点:  $x_0 = a, x_1 = a, x_2 = b, x_3 = b$ , 列差商表如下

| $x_k$     | $f(x_k)$ | 一阶差商      | 二阶差商         | 三阶差商            |
|-----------|----------|-----------|--------------|-----------------|
| $x_0 = a$ | $f(a)$   |           |              |                 |
| $x_1 = a$ | $f(a)$   | $f'(a)$   |              |                 |
| $x_2 = b$ | $f(b)$   | $f[a, b]$ | $f[a, a, b]$ |                 |
| $x_3 = b$ | $f(b)$   | $f'(b)$   | $f[a, b, b]$ | $f[a, a, b, b]$ |

而由差商与导数的关系, 得  $f[a, a, b, b] = \frac{f'''(\xi)}{3!}$ , 其中  $\xi \in (a, b)$ , 又由重节点差商定义, 有

$$f[a, a, b, b] = \frac{f[a, b, b] - f[a, a, b]}{b - a}, \quad f[a, a, b] = \frac{f[a, b] - f'(a)}{b - a}$$

$$f[a, b, b] = \frac{f'(b) - f[a, b]}{b - a}, \quad f[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

代入整理, 即得  $f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(f'(a) + f'(b)(b - a) - \frac{1}{12}f'''(\xi))(b - a)^3$ .

## 2.5 Lagrange 插值与 Hermite 插值

Lagrange 插值和 Hermite 插值是多项式插值中的两种重要方法, 它们在数学分析、数值分析和工程应用中有着广泛的应用. Lagrange 插值通过线性组合已知点的函数值来构造插值多项式, 而 Hermite 插值则是在 Lagrange 插值的基础上, 进一步要求插值多项式及其导数在某些节点处为零.

### 2.5.1 Lagrange 插值

**定义 2.5.1 (Lagrange 插值多项式).** 经过数据点  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  而次数不高于  $n$  的 Lagrange 插值多项式为

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \left( \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) y_k.$$

**定理 2.5.1.** 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导, 且  $f(a) = f(b) = c$ , 则  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$\begin{cases} f''(\xi) \geq \frac{8(c-d)}{(a-b)^2}, & \min_{a \leq x \leq b} \{f(x)\} = d \\ f''(\xi) \leq \frac{8(c-d)}{(a-b)^2}, & \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\} = d. \end{cases}$$

证 由于函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导, 且  $\min_{a \leq x \leq b} \{f(x)\} = d$  (对于  $\max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\} = d$  类似可证), 所以  $\exists x_0 \in (a, b)$ , 使得  $f(x_0) = d$ , 作 Lagrange 插值多项式:

$$p_2(x) = \frac{c(x-x_0)(x-b)}{(a-x_0)(a-b)} + \frac{d(x-a)(x-b)}{(x_0-a)(x_0-b)} + \frac{c(x-a)(x-x_0)}{(b-a)(b-x_0)}$$

则  $p(x)$  与  $f(x)$  在  $a, x_0, b$  三点有相同的函数值, 设  $F(x) = f(x) - p(x)$ , 那么  $F(a) = F(x_0) = F(b) = 0$ , 由 Rolle 定理,  $\exists \xi_1 \in (a, x_0), \xi_2 \in (x_0, b)$ , 使得

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$$

在  $[\xi_1, \xi_2]$  上应用 Rolle 定理,  $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$ , 使得  $F''(\xi) = 0$ , 即

$$f''(\xi) = F''(\xi) + p''(\xi) = p''(\xi) = \frac{2(c-d)}{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - \left(x_0 - \frac{a+b}{2}\right)^2}$$

即得证

$$\begin{cases} f''(\xi) \geq \frac{8(c-d)}{(a-b)^2}, & \min_{a \leq x \leq b} \{f(x)\} = d \\ f''(\xi) \leq \frac{8(c-d)}{(a-b)^2}, & \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\} = d. \end{cases}$$

**推论 2.5.1.** 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导, 且  $f(a) = f(b) = 0$ , 则  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$\begin{cases} f''(\xi) \geq -\frac{8d}{(a-b)^2}, & \min_{a \leq x \leq b} \{f(x)\} = d \\ f''(\xi) \leq -\frac{8d}{(a-b)^2}, & \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\} = d. \end{cases}$$

证 在定理 2.5.1 中令  $c = 0$ , 即得证.

## 2.5.2 Hermite 插值

插值多项式要求在插值节点上函数值相等, 有的实际问题还要求在节点上导数值相等, 甚至高阶导数值也相等, 满足这种要求的插值多项式称为 *Hermite 插值多项式*.

**例 2.5.1.** 给定  $f(x) = x^{3/2}$ ,  $x_0 = \frac{1}{4}$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{9}{4}$ , 试求  $f(x)$  在  $\left[\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right]$  上的三次 Hermite 插值多项式  $p(x)$ , 使之满足  $p(x_i) = f(x_i)$ ,  $p'(x_1) = f'(x_1)$  ( $i = 0, 1, 2$ ), 并写出余项表达式.

由所给节点可求出

$$f_0 = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}, f_1 = f(1) = 1, f_2 = f\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{27}{8}, f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}, f'(1) = \frac{3}{2}$$

那么差商表为

| $x_k$               | $f(x_k)$             | 一阶差商  | 二阶差商   |
|---------------------|----------------------|---|--|
| $x_0 = \frac{1}{4}$ | $f_0 = \frac{1}{8}$  |   |  |
| $x_1 = 1$           | $f_1 = 1$            | $f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{7}{6}$   |  |
| $x_2 = \frac{9}{4}$ | $f_2 = \frac{27}{8}$ | $f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{19}{10}$ | $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{11}{30}$ |

故可令

$$H_3(x) = \frac{1}{8} + \frac{7}{6}\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{11}{30}\left(x - \frac{1}{4}\right)(x - 1) + A\left(x - \frac{1}{4}\right)(x - 1)\left(x - \frac{9}{4}\right)$$

再由  $p'(1) = f'(1) = \frac{3}{2}$ , 解得  $A = -\frac{14}{225}$ , 于是所求的三次 Hermite 插值多项式为

$$H_3(x) = -\frac{14}{225}x^3 + \frac{263}{450}x^2 + \frac{233}{450}x - \frac{1}{25}$$

余项为

$$\begin{aligned} R(x) &= f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(x - \frac{1}{4}\right)(x - 1)^2\left(x - \frac{9}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4!} \frac{9}{16} \xi^{-5/2} \left(x - \frac{1}{4}\right)(x - 1)^2 \left(x - \frac{9}{4}\right) \end{aligned}$$

其中  $\xi \in \left(\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$ .

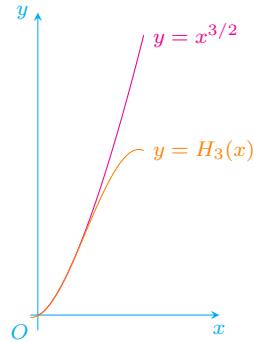


图 2.5.1

**例 2.5.2.** 设  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  三阶导数连续,  $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$ , 证明:  $\exists \xi \in (-1, 1)$ , 使得  $f'''(\xi) = 3$ .

证法一: 令<sup>4</sup>

$$H_3(x) = f(0)(x+1) + \frac{1-2f(0)}{2}(x+1)x + \frac{1}{2}(x+1)x(x-1)$$

构造  $F(x) = f(x) - H_3(x)$ , 那么有  $F(-1) = F(0) = F(1) = 0$ , 由 Rolle 定理  $\exists \xi_1 \in (-1, 0), \xi_2 \in (0, 1)$ , 使得

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$$

而  $F'(0) = f'(0) - H'_3(0) = 0$ , 则有  $F'(\xi_1) = F'(0) = F'(\xi_2) = 0$  故又由 Rolle 定理  $\exists \xi_3 \in (\xi_1, 0), \xi_4 \in (0, \xi_2)$ , 使得

$$F''(\xi_3) = F''(\xi_4) = 0$$

<sup>4</sup>由  $f_0 = f(-1) = 0, f_1 = f(0), f_2 = f(1) = 1$  作差商, 下同例题 2.5.1

最后由 Rolle 定理知  $\exists \xi \in (\xi_3, \xi_4) \subset (-1, 1)$ , 使得  $F'''(\xi) = 0$  而

$$F'''(\xi) = f'''(\xi) - H_3'''(\xi) = f'''(\xi) - 3 = 0$$

即得证.

证法二 将  $f(1)$  和  $f(-1)$  在  $x = 0$  处 Taylor 展开, 并作差, 下略.

**定理 2.5.2.** 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上三阶可导, 且  $ab < 0, a \neq b, f(a) = c, f(0) = d, f(b) = e, f'(0) = f$ , 则  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$f'''(\xi) = \frac{6}{ab} \left[ f + \frac{d-c}{a} + \frac{a(e-d)+b(d-c)}{b(b-a)} \right].$$

证 由所给节点可求出

$$f_0 = f(a) = c, f_1 = f(0) = d, f_2 = f(b) = e$$

那么差商表为

| $x_k$ | $f(x_k)$ | 一阶差商             | 二阶差商                            |
|-------|----------|------------------|---------------------------------|
| $a$   | $c$      |                  |                                 |
| $0$   | $d$      | $-\frac{d-c}{a}$ |                                 |
| $b$   | $e$      | $\frac{e-d}{b}$  | $\frac{a(e-d)+b(d-c)}{ab(b-a)}$ |

故可令

$$H_3(x) = c - \frac{d-c}{a}(x-a) + \frac{a(e-d)+b(d-c)}{ab(b-a)}(x-a)x(x-b)$$

$$f + \frac{d-c}{a} + \frac{a(e-d)+b(d-c)}{b(b-a)}$$

由  $p'_3(0) = f'(0) = f$ , 解得  $A = \frac{f + \frac{d-c}{a} + \frac{a(e-d)+b(d-c)}{b(b-a)}}{ab}$  于是

$$H_3(x) = c - \frac{d-c}{a}(x-a) + \frac{a(e-d)+b(d-c)}{ab(b-a)}(x-a)x + \frac{f + \frac{d-c}{a} + \frac{a(e-d)+b(d-c)}{b(b-a)}}{ab}(x-a)x(x-b)$$

则  $H_3(x)$  与  $f(x)$  在  $a, 0, b$  三点有相同的函数值, 在 0 点有相同的导数值, 设  $F(x) = f(x) - H_3(x)$ , 则  $F(a) = F(0) = F(b) = 0$ , 由 Rolle 定理知,  $\exists \xi_1 \in (a, 0), \xi_2 \in (0, b)$ , 使得

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$$

由于  $F'(x) = f'(x) - p'_3(x)$ , 所以  $F'(0) = f'(0) - p'(0) = 0$ , 在  $[\xi_1, 0]$  和  $[0, \xi_2]$  上应用 Rolle 定理, 则  $\exists \xi_3 \in (\xi_1, 0), \xi_4 \in (0, \xi_2)$ , 使得

$$F''(\xi_3) = F''(\xi_4) = 0$$

最后在  $[\xi_3, \xi_4]$  上应用 Rolle 定理,  $\exists \xi \in (\xi_3, \xi_4)$ , 使得  $F'''(\xi) = 0$ , 而  $F'''(x) = f'''(x) - p'''_3(x)$ , 则  $f'''(\xi) = p'''(\xi)$ , 即

$$f'''(\xi) = \frac{6}{ab} \left[ f + \frac{d-c}{a} + \frac{a(e-d)+b(d-c)}{b(b-a)} \right].$$

与例题 2.5.1 不同但同样典型的例子是“两点三次 Hermite 插值”, 插值节点取  $x_k$  及  $x_{k+1}$ , 插值多项式为  $H_3(x)$ , 满足条件

$$\begin{cases} H_3(x_k) = y_k, & H_3(x_{k+1}) = y_{k+1} \\ H'_3(x_k) = m_k, & H'_3(x_{k+1}) = m_{k+1} \end{cases}$$

**定理 2.5.3 (两点三次 Hermite 插值).** 采用基函数方法, 令

$$H_3(x) = \alpha_k(x)y_k + \alpha_{k+1}(x)y_{k+1} + \beta_k(x)m_k + \beta_{k+1}(x)m_{k+1}$$

其中  $\alpha_k(x), \alpha_{k+1}(x), \beta_k(x), \beta_{k+1}(x)$  是关于节点  $x_k$  及  $x_{k+1}$  的三次 Hermite 插值基函数, 它们应分别满足以下条件:

$$\begin{array}{lll} \alpha_k(x_k) = 1 & \alpha_k(x_{k+1}) = 0 & \alpha'_k(x_k) = \alpha'_k(x_{k+1}) = 0 \\ \alpha_{k+1}(x_k) = 0 & \alpha_{k+1}(x_{k+1}) = 1 & \alpha'_{k+1}(x_k) = \alpha'_{k+1}(x_{k+1}) = 0 \\ \beta_k(x_k) = \beta_k(x_{k+1}) = 0 & \beta'_k(x_k) = 1 & \beta'_k(x_{k+1}) = 0 \\ \beta_{k+1}(x_k) = \beta_{k+1}(x_{k+1}) = 0 & \beta'_{k+1}(x_k) = 0 & \beta'_{k+1}(x_{k+1}) = 1 \end{array}$$

解得基函数, 那么有

$$\begin{aligned} H_3(x) = & \left(1 + 2\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right) \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 y_k + \left(1 + 2\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right) \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 y_{k+1} \\ & + (x - x_k) \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 m_k + (x - x_{k+1}) \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 m_{k+1}. \end{aligned}$$

**定理 2.5.4.** 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上三阶可导, 且  $f(a) = c, f(b) = d, f'(a) = e, f'(b) = f$ , 则  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$f'''(\xi) = 6 \frac{f(b-a) - 2(d-c) + e(b-a)}{(b-a)^3}.$$

证 作三次 Hermite 插值多项式:

$$H_3(x) = c + e(x-a) + \frac{(d-c) - e(b-a)}{(b-a)^2} (x-a)^2 + \frac{f(b-a) - 2(d-c) + e(b-a)}{(b-a)^3} (x-a)^2(x-b)$$

则  $H_3(x)$  与  $f(x)$  在  $a, b$  两点有相同的函数值与导数值, 设  $F(x) = f(x) - H_3(x)$ , 则  $F(a) = F(b) = 0$ , 由 Rolle 定理,  $\exists \xi_1 \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi_1) = 0$ , 由于

$$F'(x) = f'(x) - H'_3(x) = f'(x) + e + 2 \frac{(d-c) - e(b-a)}{(b-a)^2} (x-a) + \frac{f(b-a) - 2(d-c) + e(b-a)}{(b-a)^3} [2(x-a)(x-b) + (x-a)^2]$$

则  $F'(a) = F'(b) = 0$ , 在  $[a, \xi_1]$  和  $[\xi_1, b]$  上应用 Rolle 定理, 则  $\exists \xi_2 \in (a, \xi_1), \xi_3 \in (\xi_1, b)$ , 使得

$$F''(\xi_2) = F''(\xi_3) = 0$$

最后在  $[\xi_2, \xi_3]$  上应用 Rolle 定理, 即  $\exists \xi \in (\xi_2, \xi_3)$ , 使得  $F'''(\xi) = 0$ , 即得证.

**推论 2.5.2.** 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上三阶可导, 且  $f(a) = a, f(b) = b, f'(a) = f'(b) = 0$ , 则  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$f'''(\xi) = -\frac{12}{(a-b)^2}.$$

证 令  $c = a, d = b, e = f = 0$ , 即得证.

**例 2.5.3.** 设函数  $f \in C[0, 1] \cap D^3(0, 1)$ ,  $f(0) = 2, f(1) = 1, f'(0) = 0, f'(1) = 4$  证明: 存在一点  $\xi \in (0, 1)$  使得  $f'''(\xi) = 24 + 24\xi$ .

令  $g(x) = f(x) - x^4$ , 则  $g \in C[0, 1] \cap D^3(0, 1)$  那么  $\begin{cases} x_k = 0, & x_{k+1} = 1 \\ y_k = 2, & y_{k+1} = 0 \\ m_k = 0, & m_{k+1} = 0 \end{cases}$ , 因此

$$H_3(x) = 2(1+x)(x-1)^2 = 4x^3 - 6x^2 + 2$$

构造  $F(x) = g(x) - H_3(x)$  有  $F(0) = F(1) = 0$ , 由 Rolle 定理  $\exists \xi_1 \in (0, 1)$  使得  $F'(\xi_1) = 0$ , 又  $F'(0) = F'(\xi_1) = F'(1) = 0$ , 由 Rolle 定理得  $\exists \xi_2 \in (0, \xi_1), \xi_3 \in (\xi_1, 1)$  使得  $F''(\xi_i) = 0, i = 2, 3$ , 再根据 Rolle 定理得  $\exists \xi \in (\xi_2, \xi_3) \subset (0, 1)$  使得  $F'''(\xi) = 0$  即

$$f'''(\xi) - 4! \xi - 24 = 0 \Rightarrow f'''(\xi) = 24\xi + 24.$$

## 2.6 导数的综合应用

### 2.6.1 极值问题

#### 极值、最值

求极值的方法步骤一般如下:

(1) 求可疑点, 可疑点包括:

- (i) 稳定点 (亦称驻点或逗留点, 皆值一阶导数等于零的点);
- (ii) 导数不存在的点;
- (iii) 区间端点.

(2) 对可疑点进行判断, 基本方法是:

(i) 直接利用定义判断;

(ii) 利用实际背景来判断;

(iii) 查看一阶导数的符号, 当  $x$  从左向右穿越可疑点  $x_0$  时,  
 若  $f'(x)$  由“正”变“负”, 则  $f(x_0)$  为严格极大值点;  
 若  $f'(x)$  由“负”变“正”, 则  $f(x_0)$  为严格极小值点;  
 若  $f'(x)$  不变号, 则  $f(x_0)$  不是极值.

(iv) 若  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \begin{cases} > 0, & \text{则 } f(x_0) \text{ 为严格极小值,} \\ < 0, & \text{则 } f(x_0) \text{ 为严格极大值;} \end{cases}$

(v)  $f^{(k)}(x_0) = 0 (k = 1, 2, \dots, n - 1), f^{(n)}(x_0) \neq 0,$

若  $n$  为偶数, 则  $f(x_0)$  为极值:  $\begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0, & \text{严格极小值,} \\ f^{(n)}(x_0) < 0, & \text{严格极大值;} \end{cases}$

若  $n$  为奇数, 则  $f(x_0)$  不是极值.

**例 2.6.1.** 求函数  $f(x) = |x(x^2 - 1)|$  的极值以及在  $[-2, 2]$  上的最值.

$f(x) = \operatorname{sgn}(x(x^2 - 1)) \cdot x(x^2 - 1)$ , 那么  $f'(x) = \operatorname{sgn}(x(x^2 - 1)) \cdot (3x^2 - 1) (x \neq 0, \pm 1)$ , 令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$f''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \operatorname{sgn}(x(x^2 - 1)) \Big|_{x=\frac{\sqrt{3}}{3}} \cdot 6x \Big|_{x=\frac{\sqrt{3}}{3}} = -2\sqrt{3} < 0$$

故  $f(x)$  在  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$  处取极大值, 又  $f(x)$  是偶函数, 所以在  $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  处亦取极大值, 当  $x = 0, \pm 1$  时,  $f(0) = f(1) = f(-1) = 0 \leq f(x) (\forall x)$ , 故为最小值, 也是极小值;  $f(2) = f(-2) = 6 \geq f(x) (\forall x \in [-2, 2])$ , 故  $f(x)$  在  $[-2, 2]$  上最大值为 6, 最小值为 0.

**例 2.6.2.** 设  $f(x)$  在  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  可导,  $f(0) = 1$ ,  $f(x) > 0$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x + h \cdot \cos^2 x)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{h}} = e^{x \cos^2 x + \tan x}$$

求  $f(x)$  的表达式及极值.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x + h \cdot \cos^2 x)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \frac{f(x + h \cdot \cos^2 x)}{f(x)} = x \cos^2 x + \tan x, \text{ 等式左边化为}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{f(x + h \cdot \cos^2 x) - f(x)}{f(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{f(x)} \frac{f(x + h \cdot \cos^2 x) - f(x)}{h \cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

即

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = x + \tan x \cdot \sec^2 x \Rightarrow [\ln f(x)]' = x + \tan x \cdot \sec 2x \Rightarrow \ln f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\tan^2 x + C$$

又  $f(0) = 1$ , 解得  $C = 0$ , 于是  $f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\tan^2 x}$ , 则

$$f'(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\tan^2 x} \cdot (x + \tan x \cdot \sec^2 x)$$

因为  $e^x$  恒大于 0, 因此只需讨论  $x + \tan x \cdot \sec^2 x$  的符号即可, 令  $g(x) = x + \tan x \cdot \sec^2 x$ , 对  $g(x)$  求导得

$$g'(x) = 1 + \sec^4 x + 4\tan^2 x \sec^2 x > 1$$

所以  $g(x) \nearrow$ , 而  $g(0) = 0$ , 故当  $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$  时,  $g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \searrow$ ; 当  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  时,  $f(x) \nearrow$ , 所以当  $x = 0$  时,  $f(x)$  取得极小值, 无极大值, 且  $f(0) = 1$ .

**例 2.6.3 (2014 数一).** 设函数  $y = f(x)$  由方程  $y^3 + xy^2 + x^2y = 0$  确定, 求  $f(x)$  的极值.

方程  $y^3 + xy^2 + x^2y = 0$  两端对  $x$  求导, 得

$$3y^2y' + y^2 + 2xyy' + 2xy + x^2y' = 0 \quad (*)$$

并令  $y' = 0$ , 得  $y^2 + 2xy = 0$ , 解得  $y = 0$  或  $y = -2x$ , 显然  $y = 0$  不满足原方程, 将  $y = -2x$  代入原方程得  $-6x^3 + 6 = 0 \Rightarrow x_0 = 1$ , 那么  $f(1) = -2$ ,  $f'(1) = 0$ ,  $(*)$  式两端对  $x$  再次求导, 得

$$6y'^2 + 3y^2y'' + 4yy' + 2xy'^2 + 2xyy'' + 2y + 4xy' + x^2y'' = 0$$

将  $x = 1$ ,  $f(1) = -2$ ,  $f'(1) = 0$  代入上式得  $f''(1) = \frac{4}{9} > 0$ , 则函数  $y = f(x)$  在  $x = 1$  处取极小值, 极小值为  $f(1) = -2$ .

### 极值点偏移

**例 2.6.4.** 已知函数  $f(x) = xe^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , 如果有  $f(x_1) = f(x_2)$  且  $x_1 \neq x_2$ , 求证  $x_1 + x_2 > 2$ .

证法一 由  $f(x_1) = f(x_2)$  得  $\frac{x_2}{x_1} = \frac{e^{x_2}}{e^{x_1}} \Rightarrow \ln \frac{x_2}{x_1} = x_2 - x_1$ , 不妨设  $0 < x_1 < 1 < x_2$ , 作换元  $t = \frac{x_2}{x_1}$ , 那么  $t > 1$ , 且

$$x_1 = \frac{\ln t}{t-1}, x_2 = \frac{t \ln t}{t-1}$$

于是要证  $\forall t > 1$ ,  $\frac{t \ln t + \ln t}{t-1} > 2$ , 构造函数  $F(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}$ , 那么  $F'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$ , 所以  $F(t)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 所以  $F(t) > F(1) = 0$ , 即得待证式成立.

证法二 由题可得  $\ln x_2 - \ln x_1 = x_2 - x_1$ , 即  $\frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = 1$ , 要证  $x_1 + x_2 > 2$ , 即证  $x_1 + x_2 > 2 \frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1}$ , 不妨设  $0 < x_1 < 1 < x_2$ , 作换元  $t = \frac{x_2}{x_1}$ , 那么原不等式可化为  $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$ , 由证法一可得该不等式成立, 所以原命题成立.

**定理 2.6.1 (对数平均不等式 (ALG)).** 对任意  $0 < a < b$ , 满足  $\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}$ .

## 2.6.2 不等式与函数凹凸性及拐点

不等式与凸函数之间有着密切的关系, 凸函数在不等式中起着重要的作用.

### 不等式

**定理 2.6.2 (均值不等式).** 对任意  $n$  个实数  $x_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 有 调和平均数  $\leq$  几何平均数  $\leq$  算术平均数  $\leq$  平方平均数, 即

$$\begin{array}{cccccc} H_n & \leq & G_n & \leq & A_n & \leq Q_n \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & \parallel \\ \sqrt[n]{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} & & \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} & & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i & \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} \end{array}$$

其中等号当且仅当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  时成立.

**例 2.6.5.** 试比较  $\pi^e$  和  $e^\pi$  的大小, 并说明理由.

法一: 只需比较  $\frac{\ln e}{e}$  与  $\frac{\ln \pi}{\pi}$  的大小, 令  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  ( $x \geq e$ )  $\Rightarrow f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$  ( $x > e$ ), 于是  $f(x)$  在  $[e, +\infty)$  上单调递减, 又  $e < \pi$ , 从而  $f(\pi) < f(e)$ , 即  $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}$ , 故  $e^\pi > \pi^e$ .

法二: 记  $\pi = e + \lambda$ , 则  $\lambda > 0$ , 于是

$$\frac{\pi^e}{e^\pi} = \frac{(e + \lambda)^e}{e^{e+\lambda}} = \frac{1}{e^\lambda} \left( \frac{e + \lambda}{e} \right)^e = \frac{1}{e^x} \left[ \left( 1 + \frac{\lambda}{e} \right)^{\frac{e}{\lambda}} \right]^\lambda < \frac{1}{e^\lambda} e^\lambda = 1 \Rightarrow e^\pi > \pi^e.$$

**例 2.6.6 (1995 数学 (二)).** 设  $f(x)$  二阶可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ ,  $f''(x) > 0$ , 证明  $f(x) \geq x$ .

证法一 要证  $f(x) \geq x$ , 只需证  $f(x) - x \geq 0$ , 为此, 令  $g(x) = f(x) - x$ , 则由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ , 得  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ,  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$ , 所以  $g'(x) = f'(x) - 1 = f'(x) - f'(0)$ , 又由  $f''(x) = (f'(x))' > 0$  知,  $f'(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增, 于是当  $x < 0$  时,  $g'(x) < 0$ ; 当  $x > 0$  时,  $g'(x) > 0$ , 从而知  $x = 0$  为  $g(x)$  的极小值点也是最小值点, 故  $g(x) \geq g(0) = 0$ , 即  $f(x) \geq x$ .

证法二 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$  可知,  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ,  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ , 由题设  $f(x)$  二阶可导, 将  $f(x)$  在  $x = 0$  点进行 Taylor 展开, 得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!} x^2$$

其中  $\xi$  介于 0 与  $x$  之间, 故由  $f''(x) > 0$  得  $f(x) \geq f(0) + f'(0)x = x$  (等号仅当  $x = 0$  时成立).

证法三 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$  及  $f(x)$  连续可知,  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ,  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$ , 又由  $f''(x) = (f'(x))' > 0$  知  $f'(x)$  严格单调递增, 于是由 Lagrange 中值定理得

当  $x > 0$  时,  $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(\xi_1) > f'(0) = 1$ , 其中  $\xi_1 \in (0, x)$ , 故  $f(x) > x$ ;

当  $x < 0$  时,  $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(\xi_2) < f'(0) = 1$ , 其中  $\xi_2 \in (x, 0)$ , 故  $f(x) > x$ ;

当  $x = 0$  时,  $f(0) = 0$ ,  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ , 都有  $f(x) \geq x$ .

**推论 2.6.1.** 一般地, 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ , 且  $f''(x) > 0$ , 则  $f(x) \geq Ax$ .

**例 2.6.7.** 证明:  $\left| \frac{\sin x - \sin y}{x - y} - \cos y \right| \leq \frac{1}{2} \cdot |x - y|$ ,  $x \neq y$ .

证 将  $\sin x$  在  $x = y$  处 Taylor 展开, 得

$$\sin x = \sin y + \cos y(x - y) - \frac{1}{2} \sin \xi (x - y)^2$$

其中  $\xi$  介于  $x$  与  $y$  之间, 那么待证等式化简为

$$\left| \frac{\sin x - \sin y}{x - y} - \cos y \right| = \left| \frac{|\sin \xi|}{2} \right| |x - y|$$

又  $|\sin \xi| \leq 1$ , 即得待证式成立.

**定理 2.6.3 (Cauchy 不等式).** 设  $a_k, b_k$  为任意实数 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 则

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$

其中等号当且仅当  $a_k$  与  $b_k$  成比例时成立.

### 凸函数的多种定义

**定义 2.6.1 (凸函数 A).** 设  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义,  $f(x)$  在  $I$  上称为凸函数, 当且仅当  $\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in (0, 1)$ , 有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

式中的  $\leq$  改为  $<$  便是严格凸的定义.

**定义 2.6.2 (凸函数 B).** 设  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义,  $f(x)$  称为  $I$  上的凸函数, 当且仅当  $\forall x_1, x_2 \in I$ , 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

式中的  $\leq$  改为  $<$  便是严格凸的定义.

**定义 2.6.3 (凸函数 C).** 设  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义,  $f(x)$  称为凸函数, 当且仅当  $\forall x_1, \dots, x_n \in I$ , 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

式中的  $\leq$  改为  $<$  便是严格凸的定义.

**定义 2.6.4 (凸函数 D).** 设  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义, 当且仅当曲线  $y = f(x)$  的切线恒保持在曲线以下, 称  $f(x)$  为凸函数. 若除切点之外, 切线严格保持在曲线的下方, 则称  $f(x)$  为严格凸的.

**例 2.6.8.** 已知  $f(x)$  为二阶导的正值函数, 且  $f(0) = f'(0) = 1$ , , 则

$$A. f(2) \leq e^2 \leq \sqrt{f(1)f(3)} \quad B. e^2 \leq f(2) \leq \sqrt{f(1)f(3)}$$

$$C. \sqrt{f(1)f(3)} \leq e^2 \leq f(2) \quad D. \sqrt{f(1)f(3)} \leq f(2) \leq e^2$$

因为  $f(x)$  为一正值函数, 且  $f(x)f''(x) \geq [f'(x)]^2$ , 于是有

$$\frac{f(x)f''(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)} \geq 0 \Rightarrow \left( \frac{f'(x)}{f(x)} \right)' \geq 0 \Rightarrow (\ln f(x))'' \geq 0$$

那么  $g(x) = \ln f(x)$  为一下凸函数, 那么  $\frac{g(1) + g(3)}{2} = \frac{1}{2}(\ln f(1) + \ln f(3)) = \ln \sqrt{f(1)f(3)}$ , 并且根据凸函数的性质, 有  

$$\frac{g(1) + g(3)}{2} \geq g\left(\frac{1+3}{2}\right) = \ln f(2) \Rightarrow \ln \sqrt{f(1)f(3)} \geq \ln f(2) \Rightarrow f(2) \leq \sqrt{f(1)f(3)}$$

将  $g(x)$  在  $x=0$  处 Taylor 展开, 得

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(\theta)x^2 \geq g(0) + g'(0)x = x$$

于是得  $f(x) \geq e^x$ , 因此  $f(2) \geq e^2$ , 综上所述, 选 B.

**定理 2.6.4.** 设函数  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义, 则  $f(x)$  为凸函数的充要条件是:  $\forall x_0 \in I$ , 存在  $\alpha$ , 使得  $\forall x \in I$  有  $f(x) \geq \alpha(x - x_0) + f(x_0)$ .

**推论 2.6.2.** 设  $f(x)$  在区间  $I$  内部可导, 则  $f(x)$  在  $I$  上为凸的充要条件是:  $\forall x_0 \in I^\circ$ , 有

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) (\forall x \in I).$$

**推论 2.6.3.** 若  $f(x)$  在区间  $I$  上为凸的, 则  $\forall x_0 \in I^\circ$ , 在曲线  $y = f(x)$  上一点  $(x_0, f(x_0))$  可作一条直线

$$L: y = \alpha(x - x_0) + f(x_0)$$

使曲线  $y = f(x)$  位于直线  $L$  上方.

**定理 2.6.5 (分离性定理).** 若  $f$  为严格凸函数, 则除点  $(x_0, f(x_0))$  之外曲线严格地在直线  $L$  的上方, 直线  $L$  称为  $y = f(x)$  的支撑.

**定理 2.6.6.** 设  $f(x)$  在区间  $I$  上有导数, 则  $f(x)$  在  $I$  上为凸函数的充要条件是  $f'(x) \nearrow (x \in I)$ .

**定理 2.6.7 (Jensen 不等式).** 若  $f(x)$  在  $I$  上有定义, 则  $\forall q_i \geq 0: q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1, \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ , 有

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_nx_n) \leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2) + \dots + q_nf(x_n);$$

$\forall p_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$  不全为零,  $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ , 有

$$f\left(\frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}\right) \leq \frac{p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \dots + p_nf(x_n)}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}.$$

**例 2.6.9.** 证明当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ .

证法一 设  $f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$ , 则  $f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}, f''(x) = -\sin x < 0 (0 < x < \frac{\pi}{2})$ , 于是  $f(x)$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上为凸函数, 又  $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , 故当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $f(x) > 0$ , 即  $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ .

证法二 设  $f(x) = \sin x$ , 则  $f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x < 0 (0 < x < \frac{\pi}{2})$ , 于是  $f(x)$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上是凸函数, 从而由凸函数的定义, 有

$$f(x) = f\left[\frac{2x}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) \cdot 0\right] > \frac{2x}{\pi} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) \cdot f(0) = \frac{2x}{\pi}$$

即得  $\sin x > \frac{2}{\pi}x (0 < x < \frac{\pi}{2})$ .

证法三 设  $f(x) = \sin x$ , 对于  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 将  $f(t)$  分别在  $[0, x]$  和  $[x, \frac{\pi}{2}]$  上应用 Lagrange 中值定理,

$$\exists \xi \in (0, x), \text{ 使得 } \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos \xi$$

即  $\frac{\sin x}{x} = \cos \xi$ , 又  $\exists \eta \in (x, \frac{\pi}{2})$ , 使得  $\frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin x}{\frac{\pi}{2} - x} = \cos \eta$ , 即  $\frac{1 - \sin x}{\frac{\pi}{2} - x} = \cos \eta$ , 又因为  $\cos x$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内严格单调递

减,  $\xi < \eta$ , 所以  $\cos \xi > \cos \eta$ , 从而  $\frac{\sin x}{x} > \frac{1 - \sin x}{\frac{\pi}{2} - x}$ , 即得  $\sin x > \frac{2}{\pi}x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ .

## 拐点

**定义 2.6.5 (拐点).** 连续曲线凹与凸部分的分界点称为曲线的拐点.

**定理 2.6.8 (拐点存在的必要条件).** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  具有二阶导数, 则点  $(x_0, f(x_0))$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点的必要条件是  $f''(x_0) = 0$ .

**例 2.6.10 (2008 数二).** 求曲线  $y = (x - 5)x^{\frac{2}{3}}$  的拐点坐标.

因为  $y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ ,  $y'' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{10(x+1)}{9\sqrt[3]{x^4}}$ , 显然  $y''(-1) = 0$ ,  $y''(0)$  不存在, 由  $y''$  的表达式可知在  $x = -1$  两侧  $y'$  异号, 而  $x = 0$  两侧  $y'$  不变号, 因此拐点坐标为  $(-1, -6)$ .

**例 2.6.11 (2018 数二).** 求曲线  $y = x^2 + 2 \ln x$  在其拐点处的切线方程.

$y' = 2x + \frac{2}{x}$ ,  $y'' = 2 - \frac{2}{x^2}$ , 令  $y'' = 0 \Rightarrow x = 1$  (舍负), 拐点为  $(1, 1)$ , 切线的斜率为  $y'(1) = 4$ , 因此拐点处的切线方程为  $y = 4x - 3$ .

**例 2.6.12 (2011 数二).** 设函数  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t + \frac{1}{3} \end{cases}$  确定, 求函数  $y = y(x)$  的极值和曲线  $y = y(x)$  的凹凸区间及拐点.

由题意  $x'(t) = t^2 + 1$ ,  $x''(t) = 2t$ ,  $y'(t) = t^2 - 1$ ,  $y''(t) = 2t$ , 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{x'^3(t)} = \frac{4t}{(t^2 + 1)^3}$$

令  $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow t = \pm 1$ , 当  $t = 1$  时,  $x = \frac{5}{3}$ ,  $y = -\frac{1}{3}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ , 所以  $y = -\frac{1}{3}$  为极小值, 当  $t = -1$  时,  $x = -1$ ,  $y = 1$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ , 所以  $y = 1$  为极大值.

令  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow x = y = \frac{1}{3}$ , 当  $t < 0$  时,  $x < \frac{1}{3}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ , 则曲线  $y = y(x)$  在  $(-\infty, \frac{1}{3})$  上是凸的, 当  $t > 0$  时,  $x > \frac{1}{3}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ , 则曲线  $y = y(x)$  在  $(\frac{1}{3}, \infty)$  上是凹的, 点  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  是曲线的拐点.

## 2.6.3 导数的几何意义与曲线的曲率

### 导数的几何意义

导数  $f'(x_0)$  在几何上表示曲线  $y = f(x)$  在点  $M(x_0, f(x_0))$  处的切线斜率, 曲线  $y = f(x)$  在点  $M$  的切线方程为  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ , 法线方程  $y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$  ( $f'(x_0) \neq 0$ ).

**例 2.6.13 (2008 数一).** 求曲线  $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$  在点  $(0, 1)$  处的切线方程.

等式  $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$  两端对  $x$  求导, 得  $\cos(xy)(y+xy') + \frac{y'-1}{y-x} = 1$ , 并令  $x=0, y=1$ , 解得  $y'(0)=1$ , 于是该曲线在点  $(0, 1)$  处的切线方程为  $y=x+1$ .

**例 2.6.14 (2010 数二).** 曲线  $y=x^2$  与曲线  $y=a \ln x (a \neq 0)$  相切, 则  $a$  等于

A.  $4e$

B.  $3e$

C.  $2e$

D.  $e$

设曲线  $y=x^2$  与曲线  $y=a \ln x (a \neq 0)$  的公切点为  $(x_0, y_0)$ , 则  $\begin{cases} x_0^2 = a \ln x_0 \\ 2x_0 = \frac{a}{x_0} \end{cases}$ , 解得  $x_0=\sqrt{e}$ , 那么  $a=2e$ , 故选 C.

**例 2.6.15.** 求对数螺线  $r=e^\theta$  在  $(r, \theta)=(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$  处的切线的直角坐标方程.

由图 4.2.4 知对数螺线的参数方程为  $\begin{cases} x=e^\theta \cos \theta \\ y=e^\theta \sin \theta \end{cases}$  那么

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left. \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left. \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1$$

因此在  $(r, \theta)=(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow (x, y)=(0, e^{\frac{\pi}{2}})$  处的切线的直角坐标方程为  $x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$ .

**例 2.6.16.** 已知  $f(x)$  是周期为 5 的连续函数, 它在  $x=0$  的某邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + \alpha(x)$$

其中  $\alpha(x)$  是当  $x \rightarrow 0$  时比  $x$  的高阶无穷小, 且  $f(x)$  在  $x=1$  处可导, 求曲线  $y=f(x)$  在点  $(6, f(6))$  处的切线方程.

由题意得  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x)] = \lim_{x \rightarrow 0} (8x + \alpha(x)) \Rightarrow f(1)=0$ , 由导数定义得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x)}{\sin x} \stackrel{t=\sin x}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{f(1+t) - f(1)}{t} + 3 \frac{f(1) - f(1-t)}{t} \right] = 4f'(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x + \alpha(x)}{\sin x} = 8$$

因此  $f'(1)=2$ , 又  $T=5$ , 所以  $f'(6)=f'(1)=2, f(6)=f(1)=0$ , 故在点  $(6, f(6))$  处的切线方程为  $y=2x-12$ .

## 曲线的曲率

**定义 2.6.6 (曲率).** 在曲线  $L$  上, 点  $N$  沿曲线  $L$  趋于点  $M$  时, 如果极限  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \bar{K} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|$  存在, 则称此极限值为曲线  $L$  在点  $M$  处的曲率, 记作  $K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|$ . 在  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$  存在的条件下,  $K$  也可以表示为  $K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|$ . ( $\Delta \alpha$  为动点  $N$  移动到  $M$  时切线转过的角度,  $\Delta s$  为弧段  $\widehat{NM}$  的长度).

**定理 2.6.9 (曲率的计算公式).** 设曲线的直角坐标方程是  $y=f(x)$ , 且  $f(x)$  具有二阶导数, 则曲率公式为

$$K = \frac{|y''|}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}$$

若曲线方程由参数方程  $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$  给出, 则可利用参数方程确定的函数的求导法, 求出  $y'_x$  及  $y''_x$  代入曲率公式即可.

**例 2.6.17 (2012 数二).** 求曲线  $y = x^2 + x$  ( $x < 0$ ) 上曲率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  的点的坐标.

$$y' = 2x + 1, y'' = 2, \text{ 那么 } K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (2x+1)^2 = 1 \Rightarrow x = 0, -1, \text{ 又 } x < 0, \text{ 故坐标为 } (-1, 0).$$

**例 2.6.18 (2018 数二).** 求曲线  $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$  在  $t = \frac{\pi}{4}$  对应点处的曲率.

$$\text{法一: 求出各分量代入曲率公式 } K = \frac{|y''x' - x''y'|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}},$$

$$\begin{aligned} x'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -3\cos^2 t \sin t \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}, \quad x''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6\cos t \sin^2 t - 3\cos^3 t \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 3\sin^2 \cos t \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}, \quad y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6\sin t \cos^2 t - 3\sin^3 t \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\text{于是 } K = \frac{2}{3}.$$

$$\text{法二: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right)^{-1} = -\tan t, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3\cos^4 t \sin t}, \quad \text{于是 } K = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}} = \frac{2}{3}.$$

## 2.6.4 导数不等式证明中的应用

**例 2.6.19.** 设  $\{a_n\}$  为常数列, 且  $\left| \sum_{k=1}^n a_k \sin(kx) \right| \leq |\sin x|, \left| \sum_{k=1}^n a_{n-k+1} \sin(kx) \right| \leq |\sin x|$ , 证明:

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \frac{2}{n+1}.$$

证 分别令  $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sin(kx), g(x) = \sum_{k=1}^n a_{n-k+1} \sin(kx)$ , 则  $f, g$  在定义域内连续, 且  $f(0) = g(0) = 0$ , 于是

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k \cos kx, \quad g'(x) = \sum_{k=1}^n k a_{n-k+1} \cos kx$$

由 Lagrange 中值定理知,  $\exists \xi_1, \xi_2 \in (0, x)$ , 使得

$$f(x) - f(0) = f'(\xi_1)x \Rightarrow f(x) = f'(\xi_1)x, \quad g(x) - g(0) = g'(\xi_2)x \Rightarrow g(x) = g'(\xi_2)x$$

因此  $f'(\xi_1) + g'(\xi_2) = \frac{f(x)}{x} + \frac{g(x)}{x}$ , 一方面

$$|f'(\xi_1) + g'(\xi_2)| = \left| \frac{f(x)}{x} + \frac{g(x)}{x} \right| \leq \left| \frac{f(x)}{x} \right| + \left| \frac{g(x)}{x} \right| \leq 2 \left| \frac{\sin x}{x} \right| \rightarrow 2 \quad (x \rightarrow 0)$$

另一方面当  $x \rightarrow 0$  时,  $\xi_1, \xi_2 \rightarrow 0$ , 则

$$|f'(0) + g'(0)| \rightarrow \left| \sum_{k=1}^n k a_k + \sum_{k=1}^n k a_{n-k+1} \right| = \left| \sum_{k=1}^n k a_k + \sum_{k=1}^n (n-k+1) a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n [k + (n-k+1)] a_k \right| = (n+1) \left| \sum_{k=1}^n a_k \right|$$

所以, 当  $x \rightarrow 0$  时, 有  $(n+1) \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq 2 \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \frac{2}{n+1}$ .

## 第3章

### 一元函数积分学

“埋头苦干是第一，发白才知智叟。呆勤能补拙是良训，一分辛苦一分才。”

——华罗庚

一元函数积分学是微积分的另一个重要分支，主要研究一元函数的不定积分、定积分和积分应用。下面简要介绍一元函数积分学的几个重要概念：

1. 不定积分：不定积分是积分学中的一种基本概念，也称为原函数。对于一元函数  $f(x)$ ，其不定积分记为  $\int f(x)dx$ ，表示求函数  $f(x)$  的反导函数。不定积分的结果是一个函数，其导数为原函数  $f(x)$ 。
2. 定积分：定积分是积分学中的另一个重要概念，表示函数在一个区间上的积分值。对于一元函数  $f(x)$ ，其在区间  $[a, b]$  上的定积分表示为  $\int_a^b f(x)dx$ ，表示函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的面积或有符号的累积量。定积分可以理解为曲线下的面积，也可以用来计算函数在给定区间上的平均值等。
3. 积分法：积分法是求解不定积分和定积分的方法。常见的积分法包括换元法、分部积分法、三角代换法等。通过运用这些积分法，可以求解各种类型的积分，包括有理函数、三角函数、指数函数等的积分。
4. 积分应用：积分在物理学、工程学、经济学等领域有着广泛的应用。例如，积分可以用来计算曲线下的面积、求解物体的质心、计算定积分表示的总量等。积分应用也包括微积分基本定理、积分中值定理等。

一元函数积分学是微积分的重要组成部分，它与微分学相辅相成，共同构成了微积分学的理论体系。通过学习一元函数积分学，可以更深入地理解函数的面积、累积量和平均值等概念，为解决实际问题提供了有力的数学工具。

#### 3.1 不定积分

不定积分的计算方法包括直接积分、换元积分法、分部积分法、凑微分法、拆微分法、有理函数积分等。这些方法各有其适用的场景和特定的问题类型。

在解决不定积分问题时, 选择合适的方法至关重要. 例如, 对于简单函数、有理函数、无理函数、三角函数以及超越函数的不定积分, 应采用不同的策略.

### 3.1.1 基础类型

#### 多项式型

常用多项式不定积分公式.

表 3.1: 常用多项式不定积分公式

$ax + b$

$$(1) \int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \quad (2) \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C$$

$$(3) \int \frac{1}{x(ax+b)} dx = -\frac{1}{b} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| + C \quad (4) \int \frac{1}{x^2(ax+b)} dx = \frac{a}{b^2} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| - \frac{1}{bx} + C$$

$$(5) \int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{1}{a^2} (ax+b - b \ln |ax+b|) + C$$

$$(6) \int \frac{x^2}{ax+b} dx = \frac{1}{2a^3} [(ax+b)^2 - 4b(ax+b) + 2b^2 \ln |ax+b|] + C$$

$x^2 \pm \alpha^2$

$$(7) \int \frac{1}{x^2 + \alpha^2} dx = \frac{1}{\alpha} \arctan \frac{x}{\alpha} + C \quad (8) \int \frac{1}{\pm x^2 \mp \alpha^2} dx = \frac{1}{2\alpha} \ln \left( \frac{x \mp \alpha}{\pm x + \alpha} \right) + C$$

$ax^2 + b$

$$(9) \int \frac{1}{ax^2 + b} dx = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan \frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{b}} + C$$

例 3.1.1. 求下列不定积分.

|                                     |                                     |                                     |                                      |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| $(1) \int \frac{dx}{x^8(1+x^2)}$    | $(2) \int \frac{dx}{x(1+x^{10})}$   | $(3) \int \frac{x^{11}}{(1+x^8)^2}$ | $(4) \int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}$ |
| $(5) \int \frac{x^3 dx}{(1+x^8)^2}$ | $(6) \int \frac{x^{14}}{(x^5+1)^4}$ | $(7) \int \frac{x^5 dx}{x^6-x^3-2}$ | $(8) \int \frac{xdx}{x^4-2x^2-1}$    |
| $(9) \int \frac{x^3 dx}{x^4-x^2+2}$ | $(10) \int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}$ | $(11) \int \frac{dx}{x^4+1}$        | $(12) \int \frac{dx}{x^6+1}$         |

(1) 运用倒代换

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\frac{1}{x}=t}{=} - \int \frac{t^8 dt}{t^2+1} = - \int (t^6 - t^4 + t^2 - 1) dt - \int \frac{dt}{t^2+1} \\ &= -\frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + t - \arctan t + C = -\frac{1}{7x^7} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} - \arctan \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

$$(2) \text{原式} \stackrel{\frac{1}{x}=t}{=} - \int \frac{t^9 dt}{1+t^{10}} = -\frac{1}{10} \int \frac{d(t^{10}+1)}{t^{10}+1} = -\frac{1}{10} \ln(t^{10}+1) + C = -\frac{1}{10} \ln(x^{-10}+1) + C.$$

$$(3) \text{原式} \stackrel{\frac{x^4}{x^8+1}=t}{=} \frac{1}{4} \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} - \frac{t}{2(t^2+1)} \right] = \frac{1}{8} \left( \arctan x^4 - \frac{x^4}{x^8+1} \right) + C.$$

(4) 与上题类似,

$$\begin{aligned} I &\stackrel{x^4=t}{=} \frac{1}{4} \int \frac{t^2 dt}{t^2 + 3t + 2} = \frac{1}{4} \int dt - \frac{1}{4} \int \frac{3t + 2}{t^2 + 3t + 2} dt = \frac{t}{4} - \frac{1}{4} \left[ \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 3t + 2} - \frac{5}{2} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}} \right] \\ &= \frac{t}{4} - \frac{3}{8} \ln(t^2 + 3t + 2) + \frac{\sqrt{5}}{8} \ln \left( \frac{t - \frac{\sqrt{5}}{2}}{t + \frac{\sqrt{5}}{2}} \right) + C = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{8} \ln(x^8 + 3x^4 + 2) + \frac{\sqrt{5}}{8} \ln \left( \frac{2x^4 - \sqrt{5}}{2x^4 + \sqrt{5}} \right) + C. \end{aligned}$$

(5) 与上题类似, 并注意  $(\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2}$ ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &\stackrel{x^4=t}{=} \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} \stackrel{u=\arctan t}{=} \frac{1}{4} \int \cos^2 u du = \frac{1}{8} \int (\cos 2u + 1) du = \frac{\sin 2u}{16} + \frac{u}{8} + C \\ &= \frac{x^4}{8(1+x^8)} + \frac{\arctan x^4}{8} + C. \end{aligned}$$

(6) 因为  $\frac{x^{14} dx}{(x^5+1)^4} = \frac{x^{14} dx}{x^{20}(1+x^{-5})^4} = -\frac{1}{5}(1+x^{-5})^{-4} d(1+x^5)$ , 所以

$$\text{原式} = -\frac{1}{5} \int (1+x^{-5})^{-4} d(1+x^{-5}) = \frac{1}{15} (1+x^{-5})^{-3} + C = -\frac{3x^{10}+3x^5+1}{15(x^5+1)^3} + C.$$

(7) 原式  $= \frac{1}{3} \int \frac{x^3 dx^3}{(x^3-2)(x^3+1)} = \frac{1}{9} \int \left( \frac{2}{x^3-2} + \frac{1}{x^3+1} \right) dx^3 = \frac{1}{9} \ln \left[ (x^3-2)^2 |x^3+1| \right] + C.$

(8) 原式  $= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2-1) dx}{(x^2-1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}} \right| + C.$

(9) 用“凑微分”的方法,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx^2}{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \frac{1}{2} \int \frac{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} d\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{d\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} + \frac{1}{4} \int \frac{d\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)}{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{4} \ln(x^4 - x^2 + 2) + \frac{1}{2\sqrt{7}} \arctan \left( \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{7}} \right) + C. \end{aligned}$$

(10) 注意到  $x^2 = [(x-1)+1]^2$ , 所以

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx &= \int \frac{[(x-1)+1]^2}{(1-x)^{100}} dx = \int \left[ (1-x)^{-98} - 2(1-x)^{-99} + (1-x)^{-100} \right] dx \\ &= \frac{1}{97(1-x)^{97}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{99(1-x)^{99}} + C. \end{aligned}$$

(11) 注意到  $1 = \frac{x^2+1}{2} - \frac{x^2-1}{2}$ .

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2} dx \stackrel{u=x-\frac{1}{x}}{\stackrel{v=x+\frac{1}{x}}{=}} \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2+2} - \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v^2-2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{v-\sqrt{2}}{v+\sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

(12) 对分母进行因式分解.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} = \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)} \\ &= \int \left( \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \frac{Fx+G}{x^2+\sqrt{3}x+1} \right) dx \\ &\stackrel{(A,B,D,E,F,G)}{=} \frac{1}{\left(0,\frac{1}{3},-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{3},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{3}\right)} \int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{6\sqrt{3}} \int \frac{3x+2\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1} dx - \frac{1}{6\sqrt{3}} \int \frac{3x-2\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1} dx \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{3} \arctan x + C,$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+2\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{2x+\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1} dx + \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{dx}{x^2+\sqrt{3}x+1} \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+\sqrt{3}x+1)}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2+\sqrt{3}x+1) + \sqrt{3} \arctan\left(2x+\sqrt{3}\right) + C, \end{aligned}$$

同理

$$\int \frac{3x-2\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2-\sqrt{3}x+1) - \sqrt{3} \arctan(2x-\sqrt{3}) + C,$$

$$\text{综上原式} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \frac{\arctan(2x+\sqrt{3})}{6} + \frac{\arctan(2x-\sqrt{3})}{6} + \frac{\arctan x}{3} + C.$$

**例 3.1.2.** 求下列不定积分.

$$(1) \int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1} dx. \quad (2) \int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2} dx. \quad (3) \int \frac{x^n}{\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}} dx. \quad (4) \int \frac{dx}{1+x^{2n}}.$$

(1) 当  $n \neq 0$  时,

$$\text{原式} = \int \frac{x^n \cdot x^{n-1}}{x^n+1} dx = \frac{1}{n} \int \frac{x^n dx^n}{x^n+1} = \frac{1}{n} \int dx^n - \frac{1}{n} \int \frac{dx^n}{x^n+1} = \frac{x^n}{n} - \frac{\ln|x^n+1|}{n} + C,$$

$$\text{当 } n=0 \text{ 时, 原式} = \int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2} \ln|x| + C.$$

(2) 当  $n \neq 0$  时,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{x^{2n} x^{n-1}}{(x^{2n}+1)^2} dx = \frac{1}{n} \int \frac{x^{2n} dx^n}{(x^{2n}+1)^2} = \frac{1}{n} \int \frac{(x^{2n}+1)-1}{(x^{2n}+1)^2} dx^n = \frac{1}{n} \int \frac{dx^n}{x^{2n}+1} - \frac{1}{n} \int \frac{dx^n}{(x^{2n}+1)^2} \\ &= \frac{1}{n} \arctan x^n - \frac{1}{n} \left[ \frac{x^n}{2(x^{2n}+1)} + \frac{1}{2} \arctan x^n \right] + C = \frac{1}{2n} \left( \arctan x^n - \frac{x^n}{x^{2n}+1} \right) + C, \end{aligned}$$

$$\text{当 } n=0 \text{ 时, 原式} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} \ln|x| + C.$$

(3) 令  $P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ , 于是

$$P'(x) = 1 + x + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$$

于是  $x^n = n!(P(x) - P'(x))$ , 故

$$\text{原式} = n! \int \left( 1 - \frac{P'(x)}{P(x)} \right) dx = n!(x - \ln P(x)) + C = n! \left( x - \ln \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) + C.$$

(4) 先将被积函数分解成部分分式之和, 可以证明:

$$\frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1-x \cos \frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n}\pi + 1}$$

记多项式  $x^{2n} + 1$  的  $2n$  个根为  $a_k (k = 1, 2, \dots, 2n)$ , 显然  $a_k = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi + i \sin \frac{2k-1}{2n}\pi$ , 其中  $i^2 = -1$ , 于是

$$|a_k| = 1, a_k^{2n} = -1, \bar{a}_k = a_{2n-k+1}, a_k \bar{a}_k = 1, a_k + \bar{a}_k = 2 \cos \frac{2k-1}{2n}\pi$$

设  $\frac{1}{1+x^{2n}} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{A_k}{x-a_k} \Rightarrow 1 = \sum_{k=1}^{2n} \frac{A_k(1+x^{2n})}{x-a_k}$ , 令  $x \rightarrow a_i$ , 由 L'Hospital 法则, 得

$$1 = \lim_{x \rightarrow a_i} \sum_{k=1}^{2n} \frac{A_k(1+x^{2n})}{x-a_k} = \lim_{x \rightarrow a_i} \frac{A_i(1+x^{2n})}{x-a_i} = \lim_{x \rightarrow a_i} (2n A_i x^{2n-1}) = 2n A_i \frac{a_i^{2n}}{a_i} = -\frac{2n A_i}{a_i}$$

即  $A_k = -\frac{a_k}{2n} (k = 1, 2, \dots, 2n)$ , 于是,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^{2n}} &= -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{a_k}{x-a_k} = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{a_k}{x-a_k} + \frac{\bar{a}_k}{x-\bar{a}_k} \right) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{(a_k + \bar{a}_k)x - 2a_k \bar{a}_k}{x^2 - (a_k + \bar{a}_k)x + a_k \bar{a}_k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1-x \cos \frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n}\pi + 1} \end{aligned}$$

最后得到

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+x^{2n}} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int \frac{1-x \cos \frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n}\pi + 1} dx = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left( \cos \frac{2k-1}{2n}\pi \int \frac{2x - 2 \cos \frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n}\pi + 1} dx \right) \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[ \sin^2 \frac{2k-1}{2n}\pi \int \frac{dx}{\left( x - \cos \frac{2k-1}{2n}\pi \right)^2 + \sin^2 \frac{2k-1}{2n}\pi} \right] \\ &= \frac{-1}{2n} \sum_{k=1}^n \left[ \cos \frac{2k-1}{2n}\pi \ln \left( x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n}\pi + 1 \right) \right] + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \sin \frac{2k-1}{2n}\pi \arctan \frac{x - \cos \frac{2k-1}{2n}\pi}{\sin \frac{2k-1}{2n}\pi} \right) + C. \end{aligned}$$

### 有理分式快速分解

**例 3.1.3.** 分解  $F(x) = \frac{x+1}{(x+2)(x+3)}$ .

设  $F(x) = \frac{x+1}{(x+2)(x+3)} = \frac{k_1}{x+2} + \frac{k_2}{x+3}$ , 欲求  $k_1$ , 只需等式两边乘分母  $x+2$ , 并令  $x=-2$  为分母的零点, 即

$$k_1 = (x+1)F(x) \Big|_{x=-2} = \frac{x+1}{x+3} \Big|_{x=-2} = -1$$

同理  $k_2 = (x+2)F(x) \Big|_{x=-3} = \frac{x+1}{x+2} \Big|_{x=-3} = 2$ , 则  $F(x) = \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+2}$ .

**例 3.1.4.** 分解  $F(x) = \frac{x+3}{(x+1)^2(x+2)}$ .

设  $F(x) = \frac{x+3}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{k_{11}}{(x+1)^2} + \frac{k_{12}}{x+1} + \frac{k_2}{x+2}$ , 与上题类似,

$$k_{11} = (x+1)^2 F(x) \Big|_{x=-1} = \frac{x+3}{x+2} \Big|_{x=-1} = 2$$

$$k_{12} = \frac{d(x+1)^2 F(x)}{dx} \Big|_{x=-1} = \frac{x+3}{x+2} \Big|_{x=-1} = -1$$

$$k_2 = (x+2)F(x) \Big|_{x=-2} = \frac{x+3}{(x+1)^2} \Big|_{x=-2} = 1$$

于是  $F(x) = \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$ .

**例 3.1.5.** (2019 数二) 求不定积分  $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx$ .

设  $F(x) = \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{k_{11}}{(x-1)^2} + \frac{k_{12}}{x-1} + \frac{k_{21}x+k_{22}}{x^2+x+1}$ , 则有

$$\begin{aligned} k_{11} &= (x-1)^2 F(x) \Big|_{x=1} = \frac{3x+6}{x^2+x+1} \Big|_{x=1} = 3 \\ k_{12} &= \frac{d(x-1)^2 F(x)}{dx} \Big|_{x=1} = \frac{-3x^2-12x-3}{(x^2+x+1)^2} \Big|_{x=1} = -2 \end{aligned}$$

并分别令  $x=0, 2$ , 得方程组

$$\begin{cases} k_{11} - k_{12} + k_{22} = 6 \\ k_{11} + k_{12} + \frac{2k_{21} + k_{22}}{7} = \frac{12}{7} \end{cases}$$

因为  $k_{11} = 3, k_{12} = -2$ , 故解得  $k_{21} = 1, k_{22} = 2$ , 于是

$$F(x) = \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{-2}{x-1} + \frac{x+2}{x^2+x+1}$$

那么不定积分有

$$I = \int F(x) dx = 3 \int \frac{dx}{(x-1)^2} - 2 \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = -\frac{3}{x-1} - 2 \ln|x-1| + \ln(x^2+x+1) + C.$$

**Ostrogradsky 法** 所谓 Ostrogradsky 法, 是指关于有理真分式  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  的积分, 可以借助代数方法来分离成一个真分式与另外一个真分式积分的和, 使得在新的被积真分式函数中其分母次数达到最低状态, 也即在公式

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$$

中, 如果  $P(x), Q(x)$  已知, 且设分母  $Q(x)$  可以分解成一次与二次类型的实因式:

$$Q(x) = (x-a)^k \cdots (x^2+px+q)^m \cdots$$

其中  $k, \dots, m, \dots$  是正整数.

**例 3.1.6.** 试用 Ostrogradsky 法求解例题 3.1.5.

原不定积分可化为

$$\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx = \frac{a}{x-1} + \int \left( \frac{b}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+x+1} \right) dx$$

对等式两边求导, 并对比等式两边分子的系数, 有

$$\begin{cases} -a & -b & +d & = & 6 \\ -a & +c & -2d & = & 3 \\ -a & -2c & +d & = & 0 \\ b & +c & & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \\ c = 2 \\ d = 1 \end{cases}$$

于是

$$\text{原式} = -\frac{3}{x-1} + \int \frac{-2}{x-1} dx + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = -\frac{3}{x-1} - 2 \ln|x-1| + \ln(x^2+x+1) + C.$$

**例 3.1.7.** 求  $\int \frac{x^3}{(x^2-2x+2)^2} dx$ .

$$\text{设 } \int \frac{x^3}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx = \frac{Ax + B}{x^2 - 2x + 2} + \int \frac{Dx + E}{x^2 - 2x + 2} dx,$$

$$\left( \frac{Ax + B}{x^2 - 2x + 2} + \int \frac{Dx + E}{x^2 - 2x + 2} dx \right)' = \frac{A(x^2 - 2x + 2) - (2x - 2)(Ax + B)}{(x^2 - 2x + 2)^2} + \frac{(Dx + E)(x^2 - 2x + 2)}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$

$$\text{解得 } (A, B, D, E) = (-1, 0, 1, 1), \int \frac{x^3}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx = -\frac{x}{x^2 - 2x + 2} + \int \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 2} dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - 2x + 2)}{x^2 - 2x + 2} + 2 \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 2) + 2 \int \frac{dx}{(x - 1)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 2) + 2 \arctan(x - 1) + C \end{aligned}$$

$$\text{综上, 原式} = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 2) + 2 \arctan(x - 1) - \frac{x}{x^2 - 2x + 2} + C.$$

**例 3.1.8.** 求  $\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}$ .

**法一:** 设  $\frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \left( \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} \right)' + \frac{Dx + E}{x^2 + 2x + 2}$ , 从而

$$x^2 \equiv A(x^2 + 2x + 2) - 2(x + 1)(Ax + B) + (Dx + E)(x^2 + 2x + 2)$$

解得  $A = 0, B = 1, D = 0, E = 1$ , 于是,

$$\text{原式} = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \int \frac{d(x + 1)}{(x + 1)^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \arctan(x + 1) + C.$$

**法二:**

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{(x^2 + 2x + 2) - (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} - \int \frac{(2x + 2)}{x^2 + 2x + 2} dx \\ &= \int \frac{d(x + 1)}{(x + 1)^2 + 1} - \int \frac{d(x^2 + 2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \arctan(x + 1) + \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + C. \end{aligned}$$

## 根式型

常用根式不定积分公式.

表 3.2: 常用根式不定积分公式

|   |
|---|
| $\sqrt{a^2 + x^2} \ (a > 0)$  |
| (1) $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{2}a^2 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C.$       |
| (2) $\int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 + x^2} - a \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x}\right) + C.$ |
| (3) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C.$   |
| (4) $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{x}{a + \sqrt{a^2 + x^2}}\right) + C.$         |
| $\sqrt{x^2 - a^2} \ (x^2 > a^2)$  |
| (5) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C.$   |
| $\sqrt{a^2 - x^2} \ (a^2 > x^2)$  |
| (6) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{x}{a} + C.$               |
| (7) $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) + C.$ |
| (8) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C.$                        |
| (9) $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) + C.$        |

例 3.1.9. 求下列不定积分

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}. \quad (2) \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}. \quad (3) \int \frac{\arccot \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx. \quad (4) \int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx.$$

(1) 法一：倒代换

$$\text{原式} \xrightarrow{x=\frac{1}{t}} \int \frac{t}{\sqrt{t-1}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int \frac{dt}{t\sqrt{t-1}} = -2 \int \frac{d\sqrt{t-1}}{1+(\sqrt{t-1})^2} = -2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{x}} + C.$$

$$\text{法二：原式} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = 2 \int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = 2 \arcsin \sqrt{x} + C.$$

$$\text{法三：原式} = \int \frac{d(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \arcsin(2x-1) + C.$$

$$(2) \text{法一：原式} \xrightarrow{\sqrt{x}=t} 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = 2 \arctan t + C = 2 \arctan \sqrt{x} + C.$$

$$\text{法二：原式} \xrightarrow[0 < t < \frac{\pi}{2}]{\sqrt{x}=\tan t} 2 \int dt = 2t + C = 2 \arctan \sqrt{x} + C.$$

$$\text{法三：原式} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int \frac{dx}{1+x} = 2\sqrt{x} + \ln|1+x| + C.$$

$$(3) \text{原式} \xrightarrow{\arccot \sqrt{x}=t} -2 \int t dt = -t^2 + C = -\arccot^2 \sqrt{x} + C.$$

$$(4) \text{原式} \xrightarrow{\sqrt{x}=t} \int \frac{2t^2}{\sqrt{1-t^3}} dt = -\frac{4}{3} \int d\sqrt{1-t^3} = -\frac{4}{3} \sqrt{1-t^3} + C = -\frac{4}{3} \sqrt{1-x^{\frac{3}{2}}} + C.$$

常见的处理手法 利用公式  $\int \frac{P_n(x)}{R} dx = Q_{n-1}(x)R + \lambda \int \frac{dx}{R}$ , 其中  $R = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ ,  $P_n(x)$  为  $n$  次多项式,  $Q_{n-1}(x)$  为  $n-1$  次多项式,  $\lambda$  为常数.

**Euler 代换** 对于含有二次无理式的一般积分  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ , 其中  $R(u, v)$  是二元有理函数, 则可作 Euler 代换, 它有三种形式:

- (1) 若  $a > 0$ , 则可令  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{ax} + t$ ;
- (2) 若  $c > 0$ , 则可令  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$ ;
- (3) 对于根号内为可约的二次三项式, 则可令  $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$ .

**根式代换**  $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$  型不定积分, 其中  $R(u, v)$  为二元有理函数. 令  $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ .

**例 3.1.10.** 求下列不定积分

|  |   |  |
|--|---|--|
| $(1) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$ $(4) \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$ $(7) \int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}.$ $(10) \int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}} dx.$ | $(2) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}.$ $(5) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$ $(8) \int x^3\sqrt{4-x^2} dx.$ $(11) \int \frac{2x^3+x^2-1}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}} dx.$ | $(3) \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}.$ $(6) \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$ $(9) \int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x} dx.$ $(12) \int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}} dx.$ |
|--|---|--|

(1) 法一: 原式  $\underset{\sqrt{x^2-1}=x+t}{\stackrel{\text{第一 Euler 代换}}{=}} 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2 \arctan t + C = 2 \arctan(\sqrt{x^2-1}-x) + C.$

法二: 原式  $\underset{\sqrt{x^2-1}=t(x-1)}{\stackrel{\text{第三 Euler 代换}}{=}} 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2 \arctan t + C = -2 \arctan \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} + C.$

法三: 原式  $= \int \frac{x dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{d\sqrt{x^2-1}}{(\sqrt{x^2-1})^2+1} = \arctan \sqrt{x^2-1} + C.$

(2) 原式  $\underset{x=\frac{1}{t}}{\stackrel{x=\frac{1}{t}}{=}} - \int \frac{tdt}{\sqrt{1-4t^2}} = \frac{1}{4} \int d\sqrt{1-4t^2} = \frac{\sqrt{1-4t^2}}{4} + C = \frac{1}{4} \sqrt{1-\frac{4}{x^2}} + C.$

(3) 法一: 三角代换.

原式  $\underset{x=\sin t}{\stackrel{x=\sin t}{=}} \int \frac{\cos t dt}{1+\cos t} = \int \left(1 - \frac{1}{1+\cos t}\right) dt = t - \tan \frac{t}{2} + C$   
 $= \arcsin x - \tan \frac{\arcsin x}{2} + C = \arcsin x - \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$

法二: 原式  $= \int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \arcsin x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{1}{x} + C.$

其中

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \int \sqrt{1-x^2} d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C.$$

(4) 原式  $\underset{x=\tan t}{\stackrel{x=\tan t}{=}} \int \cos t dt = \sin t + C = \sin \arctan x + C = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$

(5) 三角代换.

原式  $= \int \frac{dt}{\sqrt{(x+1)^2+1}} \underset{x+1=\tan t}{\stackrel{x+1=\tan t}{=}} \int \frac{\tan t - 1}{\cos t} dt = - \int \frac{d\cos t}{\cos^2 t} - \int \sec t dt$   
 $= \sec t - \ln |\sec t + \tan t| + C = \sqrt{(x+1)^2+1} - \ln \left| \sqrt{(x+1)^2+1} + x+1 \right| + C.$

(6) Euler 代换转化为多项式函数.

$$\begin{aligned} \text{原式} & \xrightarrow{\frac{\text{第一 Euler 代换}}{\sqrt{x^2+x+1}=t-x}} \int \frac{2(t^2+t+1)}{t(2t+1)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{t^2+2+1}{t(t+\frac{1}{2})^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \left[ -\frac{3}{t+\frac{1}{2}} - \frac{3}{t(t+\frac{1}{2})^2} + \frac{4}{t} \right] dt = 2 \ln|t| - \frac{3}{2} \ln|2t+1| + \frac{3}{2(2t+1)} + C \\ &= 2 \ln \left| \sqrt{x^2+x+1} + x \right| - \frac{3}{2} \ln \left| 2\sqrt{x^2+x+1} + 2x + 1 \right| + \frac{3}{2(2\sqrt{x^2+x+1} + 2x + 1)} + C. \end{aligned}$$

(7) 法一:  $\sqrt{4-x^2} = t \Rightarrow x = \pm\sqrt{4-t^2}$ ,  $dx = \mp \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$ , 所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{1}{\pm t\sqrt{4-t^2}} \cdot \frac{\mp t}{\sqrt{4-t^2}} dt = - \int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{2+\sqrt{4-x^2}} \right| + C. \end{aligned}$$

法二: 利用第二种 Euler 代换,

$$\sqrt{4-x^2} = xt - 2 \Rightarrow x = \frac{4t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{4(1-t^2)}{(1+t^2)^2} dt, \quad \sqrt{4-x^2} = \frac{2(-1+t^2)}{1+t^2}$$

$$\text{原式} = -\frac{1}{2} \int dt = -\frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{2+\sqrt{4-x^2}} \right| + C.$$

(8) 变量代换,

$$\begin{aligned} \text{原式} &\xrightarrow{\frac{4-x^2=t}{2}} \frac{1}{2} \int (t-4)\sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \int t^{\frac{3}{2}} dt - 2 \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{5} t^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} t^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{x^4\sqrt{4-x^2}}{5} - \frac{4x^2\sqrt{4-x^2}}{15} - \frac{32\sqrt{4-x^2}}{15} + C. \end{aligned}$$

(9) 法一:  $\sqrt{16-x^2} = t \Rightarrow x = \pm\sqrt{16-t^2}$ ,  $dx = \mp \frac{tdt}{\sqrt{16-t^2}}$ , 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{-t^2}{16-t^2} dt = \int \frac{16-t^2-16}{16-t^2} dt = \int dt - 16 \int \frac{dt}{4^2-t^2} \\ &= t - 2 \ln \left| \frac{t+4}{-t+4} \right| + C = \sqrt{16-x^2} - 2 \ln \left| \frac{-x^2+8\sqrt{16-x^2}+32}{x^2} \right| + C. \end{aligned}$$

法二:  $x = 4 \sin t, 0 < |t| < \frac{\pi}{2}$ ,  $dx = 4 \cos t dt$ , 所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 4 \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = 4 \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t} dt = 4 \int \csc t dt - 4 \int \sin t dt \\ &= 4 \cos t - 4 \ln|\csc t + \cot t| + C = \sqrt{16-x^2} - 4 \ln \left| \frac{4+\sqrt{16-x^2}}{x} \right| + C. \end{aligned}$$

(10) 原式  $= \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}} + \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$ , 则

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}} \xrightarrow{\frac{\text{第二 Euler 换元}}{\sqrt{1+x-x^2}=tx-1}} \int \frac{-2dt}{1+2t} = -\ln|1+2t| + C = -\ln \left| \frac{2\sqrt{1+x-x^2}+2+x}{x} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = \int \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} d\left(x-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C$$

$$\text{故, 原式} = -\ln \left| \frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x} \right| + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1-2x}{\sqrt{5}}\right) - \sqrt{1+x-x^2} + C.$$

$$(11) \text{ 注意到 } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \text{ 那么}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{2x^3}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}} d(x^2-1) + \arcsin x \\ &= \int \frac{d(x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{d(x^2-1)}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x = \frac{2x^2-4}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x + C. \end{aligned}$$

$$(12) \text{ 注意到 } \int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}} dx = \frac{\operatorname{sgn} x \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} dx = \frac{\operatorname{sgn} x d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}}, \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{\operatorname{sgn} x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} dx = \int \frac{\operatorname{sgn} x d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}} = \operatorname{sgn} x \ln \left( x - \frac{1}{x} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} \right) + C \\ &= \ln \left| \frac{x^2 - 1 + \sqrt{x^4 + 1}}{x} \right| + C. \end{aligned}$$

**例 3.1.11.** 求下列不定积分

|   |   |  |
|---|---|--|
| $(1) \int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx.$ | $(2) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$       | $(3) \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx.$ |
| $(4) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+x+1}} dx.$           | $(5) \int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}.$            | $(6) \int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} dx.$                           |
| $(7) \int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^3}} dx.$          | $(8) \int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}} dx.$ | $(9) \int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}.$                      |

(1) 令  $\sqrt[6]{x+1} = t$ , 那么  $x+1 = t^6$ ,  $dx = 6t^5 dt$ , 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 6 \int \frac{t^5(1-t^3)}{1+t^2} dt = 6 \int \left( -t^6 + t^4 + t^3 - t^2 - t + 1 + \frac{t-1}{t^2+1} \right) dt \\ &= -\frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 6t + 3 \ln(t^2+1) - 6 \arctan t + C \end{aligned}$$

其中  $t = \sqrt[6]{x+1}$ .

(2) 令  $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = t$ , 那么  $x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$ ,  $dx = -\frac{6t^2 dt}{(t^3-1)^2}$ , 于是

$$\text{原式} = \int \frac{-6t^2 dt}{\left(\frac{2t^3}{t^2-1}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{t^3-1}\right)^{\frac{4}{3}}} = -\frac{3}{2} \int dt = -\frac{3}{2}t + C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

(3) 法一: 设  $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = t$ , 那么  $x = \frac{t^2+1}{t^2-1}$ ,  $dx = -\frac{4t dt}{(t^2-1)^2}$ , 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= -4 \int \frac{t}{(t-1)(t+1)^3} dt = \int \left[ -\frac{2}{(t+1)^3} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{2(t-1)} \right] dt \\ &= \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + C = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + C. \end{aligned}$$

法二: 原式 =  $\int (x - \sqrt{x^2-1}) dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + C$ .

(4) 因为原式 =  $\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ , 所以

$$\text{原式} = \int \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} d\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{2x-3}{4} \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{8} \ln \left( x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right) + C.$$

(5) 令  $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t$ , 则  $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $dx = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} dt$ ,  $1-x = \frac{2t^2}{1+t^2}$ ,  $\sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{1+t^2}$ , 则

$$\text{原式} = -\frac{1}{2} \int \frac{1+t^2}{t^4} dt = \frac{1}{6t^3} + \frac{1}{2t} + C = \frac{2-x}{3(1-x)^2} \sqrt{1-x^2} + C.$$

(6) 令  $\sqrt{x^2+2x+2} = t-x$ ,  $x = \frac{t^2-2}{2(t+1)}$ ,  $dx = \frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2} dt$ ,  $\sqrt{x^2+2x+2} = \frac{t^2+2t+2}{2(t+1)}$ , 则

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+2t+2)^2}{(t^2-2)(t+1)^2} dt = \frac{1}{2} \int \left[ 1 + \frac{2}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{2\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}} \right] dt$$

$$= \frac{t}{2} + \ln|t+1| + \frac{1}{2(t+1)} - \sqrt{2} \ln \left| \frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}} \right| + C$$

$$= \sqrt{x^2+2x+2} + \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) - \sqrt{2} \ln \left| \frac{x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{x} \right| + C$$

(7) 设  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = (ax^2+bx+c)\sqrt{1+2x-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$ , 两边对  $x$  求导, 得

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} = (2ax+b)\sqrt{1+2x-x^2} + \frac{(ax^2+bx+c)(1-x)}{\sqrt{1+2x-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

从而有

$$x^3 \equiv (2ax+b)(1+2x-x^2) + (ax^2+bx+c)(1-x) + \lambda$$

$$\begin{cases} -3a & = 1 \\ 5a & = 0 \\ 2a & = 0 \\ b & = 0 \\ +3b & = 0 \\ +c & = 0 \\ b & = 0 \\ +c & = 0 \\ +\lambda & = 0 \end{cases}, \text{解得 } a = -\frac{1}{5}, b = -\frac{5}{6}, c = -\frac{19}{6}, \lambda = 4$$

$$\text{原式} = -\frac{19+5x+2x^2}{6} \sqrt{1+2x-x^2} + 4 \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$= -\frac{19+5x+2x^2}{6} \sqrt{1+2x-x^2} + 4 \arcsin \left( \frac{x-1}{\sqrt{2}} \right) + C.$$

(8) 设  $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}} dx = (ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+4x+3} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$ , 从而有

$$x^3-6x^2+11x-6 \equiv (2ax+b)(x^2+4x+3) + (x+2)(ax^2+bx+c) + \lambda$$

$$\begin{cases} 3a & = 1 \\ 10a & = -6 \\ 6a & = 11 \\ b & = -14 \\ +2b & = 37 \\ +6b & = -66 \\ +c & = -66 \\ +c & = -6 \\ +2c & = -6 \\ +\lambda & = -6 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{14}{3}, c = 37, \lambda = -66,$$

$$\text{原式} = \left( \frac{1}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + 37 \right) \sqrt{x^2+4x+3} - 66 \ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}| + C.$$

(9) 设  $x-1 = \frac{1}{t}$ , 则  $dx = -\frac{1}{t^2} dt$ , 不妨设  $t>0$ , 则有  $\sqrt{x^2+3x+1} = \frac{\sqrt{5t^2+5t+1}}{t}$ , 故

$$\text{原式} = - \int \frac{t^2}{\sqrt{5t^2+5t+1}} dt = (at+b)\sqrt{5t^2+5t+1} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}$$

从而有

$$-t^2 \equiv a(1+5t+5t^2) + \left( 55 + \frac{5}{2} \right) (at+b) + \lambda$$

比较等式两端  $t$  的同次幂系数, 求得  $a = -\frac{1}{10}, b = \frac{3}{20}, \lambda = -\frac{11}{40}$ , 于是

$$\text{原式} = \left( -\frac{t}{10} + \frac{3}{20} \right) \sqrt{5t^2+5t+1} - \frac{11}{40} \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}$$

$$= \frac{3-2t}{20} \sqrt{5t^2+5t+1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}} \right| + C$$

$$= \frac{3x-5}{20(x-1)^2} \sqrt{x^2+3x+1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}(x+1)+2\sqrt{x^3+3x+1}}{x-1} \right| + C.$$

二项微分式的积分  $\int x^m (ax^n + b)^p dx$ , 式中  $m, n$  和  $p$  为有理数, 仅在下列三种情形可化为有理函数的积分:

(1)  $p$  为整数, 此时令  $x = z^N$ , 其中  $N$  为分数  $m$  和  $n$  的公分母;

(2)  $\frac{m+1}{n}$  为整数, 此时令  $ax^n + b = z^N$ , 其中  $N$  为分数  $p$  的分母;

(3)  $\frac{m+1}{n} + p$  为整数, 此时利用代换:  $a + bx^{-n} = z^N$ , 其中  $N$  为分数  $p$  的分母.

若  $n = 1$ , 则这些情形等价于: (1)  $p$  为整数. (2)  $m$  为整数. (3)  $m + p$  为整数.

**例 3.1.12.** 求下列不定积分

$$(1) \int \sqrt{x^3 + x^4} dx. \quad (2) \int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx. \quad (3) \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}. \quad (4) \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(1)  $\sqrt{x^3 + x^4} = x^{\frac{3}{2}}(1 + x)^{\frac{1}{2}}$ , 则  $m = \frac{3}{2}$ ,  $n = 1$ ,  $p = \frac{1}{2}$ , 那么  $\frac{m+1}{n} + p = 3$ , 故令  $x^{-1} + 1 = z^2$ , 于是

$$x = \frac{1}{z^2 - 1}, \quad dx = -\frac{2z}{(z^2 - 1)^2} dz, \quad \sqrt{x^3 + x^4} = \frac{z}{(z^2 - 1)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= -2 \int \frac{z^2}{(z^2 - 1)^4} dz = -2 \int \frac{dz}{(z^2 - 1)^4} - 2 \int \frac{dz}{(z^2 - 1)^3} \\ &= \frac{z}{3(z^2 - 1)^3} + \frac{z}{12(z^2 - 1)^2} - \frac{z}{8(z^2 - 1)} + \frac{1}{16} \ln \frac{z+1}{z-1} + C \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(x+x^2)^3} - \frac{1+2x}{8} \sqrt{x+x^2} + \frac{1}{8} \ln (\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) + C \quad (x > 0). \end{aligned}$$

(2)  $\frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} = x^{\frac{1}{2}}(1 + x^{\frac{1}{3}})^{-2}$ , 则  $m = \frac{1}{2}$ ,  $n = \frac{1}{3}$ ,  $p = -2$ , 由于  $p$  为整数, 故令  $x = z^6$ ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 6 \int \frac{z^8}{(z^2 + 1)^2} dz = 6 \int \left[ z^4 - 2z^2 + 3 - \frac{4}{z^2 + 1} + \frac{1}{(z^2 + 1)^2} \right] dz \\ &= \frac{6}{5} z^5 - 4z^3 + 18z - 24 \arctan z + 6 \left[ \frac{z}{2(z^2 + 1)} + \frac{1}{2} \arctan z \right] + C \\ &= \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 18x^{\frac{1}{6}} + \frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1 + x^{\frac{1}{3}}} - 21 \arctan x^{\frac{1}{6}} + C. \end{aligned}$$

(3)  $\frac{x}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}} = x(1 + x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}$ , 则  $m = 1$ ,  $n = \frac{2}{3}$ ,  $p = -\frac{1}{2}$ , 那么  $\frac{m+1}{n} = 3$ , 故令  $1 + x^{\frac{2}{3}} = z^2$ ,

$$\text{原式} = 3 \int (z^2 - 1)^2 dz = \frac{3}{5} z^5 - 2z^3 + 3z + C$$

其中  $z = \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}$ .

(4)  $\frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}} = x^5(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ , 则  $m = 5$ ,  $n = 2$ ,  $p = -\frac{1}{2}$ , 那么  $\frac{m+1}{n} = 3$ , 故令  $1 - x^2 = z^2$ ,

$$\text{原式} = - \int (1 - z^2)^2 dz = -z + \frac{2}{3} z^3 - \frac{1}{5} z^5 + C$$

其中  $z = \sqrt{1 - x^2}$ .

## 三角函数型

常用三角函数不定积分公式.

表 3.3: 常用三角函数不定积分公式

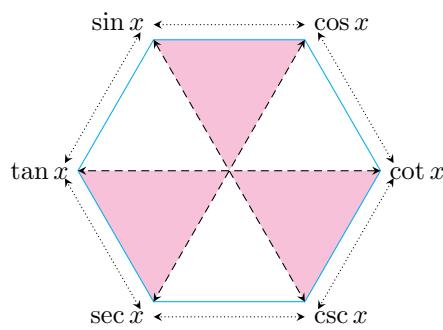
## 三角函数

|   |  |
|---|--|
| (1) $\int \sin x dx = -\cos x + C$  | (2) $\int \cos x dx = \sin x + C$  |
| (3) $\int \tan x dx = -\ln  \cos x  + C$  | (4) $\int \cot x dx = \ln  \sin x  + C$  |
| (5) $\int \sec x dx = \ln  \sec x + \tan x  + C$                                    | (6) $\int \csc x dx = -\ln  \csc x + \cot x  + C$                                    |
| (7) $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$                        | (8) $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$                         |
| (9) $\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C$   | (10) $\int \cot^2 x dx = -\cot x - x + C$  |
| (11) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$  | (12) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$  |
| (13) $\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$    | (14) $\int \cos^n x dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$      |
| (15) $\int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$                        | (16) $\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$                        |
| (17) $\int \sec^n x dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$ | (18) $\int \csc^n x dx = -\frac{\csc^{n-2} x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$ |
| (19) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$   | (20) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$   |

## 反三角函数

|   |   |
|---|---|
| (21) $\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$   | (22) $\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$                                 |
| (23) $\int \arctan x dx = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} + C$   | (24) $\int \operatorname{arccot} x dx = x \operatorname{arccot} x + \ln \sqrt{1+x^2} + C$ |
| (25) $\int \operatorname{arcsec} x dx = x \operatorname{arcsec} x - \operatorname{sgn}(x) \ln  x + \sqrt{x^2 - 1}  + C$ |   |
| (26) $\int \operatorname{arccsc} x dx = x \operatorname{arccsc} x + \operatorname{sgn}(x) \ln  x + \sqrt{x^2 - 1}  + C$ |   |

$$\begin{aligned}\arcsin x + \arccos x &= \frac{\pi}{2} \\ \arctan x + \operatorname{arccot} x &= \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccsc} x &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$



- 邻:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$
- $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$
- 间:  $\cos x = \sin \cdot \cot x$
- $\cot x = \cos \cdot \csc x$
- 其他情况类似
- 对:  $\cos x \cdot \sec x = 1$
- $\cot x \cdot \tan x = 1$
- $\csc x \cdot \sin x = 1$

图 3.1.1

表 3.4: 常用三角函数转换公式

和差化积

|  |   |
|--|---|
| (1) $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ | (2) $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$  |
| (3) $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ | (4) $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ |
| (5) $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$           | (6) $\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$            |
| (7) $\cot \alpha + \cot \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$           | (8) $\cot \alpha - \cot \beta = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$           |
| (9) $\tan \alpha + \cot \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}$           | (10) $\tan \alpha - \cot \beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}$          |

---

平方形式的和差化积公式

$$(11) \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) \quad (12) \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = -\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$$

$$(13) \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) \quad (14) \sin^2 \alpha - \cos^2 \beta = -\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$$

**定理 3.1.1.**  $\int \sin^p x \cos^q x dx = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\frac{q-1}{2}} (-1)^k C_n^k \frac{\sin^{p+2k+1} x}{p+2k+1} + C, & p, q \text{ 为正奇数} \\ \sum_{k=0}^{-\frac{p+q}{2}-1} C_n^k \frac{\tan^{p+2k+1} x}{p+2k+1} + C, & p+q \text{ 为负偶数.} \end{cases}$

**定理 3.1.2.**  $\frac{\sin 2nx}{\sin x} = 2 \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x, \quad \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = 1 + \sum_{k=1}^n \cos 2kx.$

**定理 3.1.3 (高阶幂展开式).** 正弦函数与余项函数的高阶幂展开式如下:

$$\cos^n x = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^k \sin((n-2k)x), & n \text{ 是奇数} \\ \frac{1}{2^{n-1}} \left[ \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^k \sin((n-2k)x) + \frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}} \right], & n \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

$$\sin^n x = \begin{cases} \frac{1}{(2i)^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k C_n^k \cos((n-2k)x), & n \text{ 是奇数} \\ \frac{2}{(2i)^n} \left[ \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k C_n^k \cos((n-2k)x) + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2} C_n^{\frac{n}{2}} \right], & n \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

**定理 3.1.4 (三角函数换元及万能公式).** 形如  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  ( $R$  为有理函数) 的积分在一般情形下可利用代换  $\tan \frac{x}{2} = t$  化为有理函数的积分, 即

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

(1) 若等式

$$R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x) \text{ 或 } R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$$

成立, 则最好利用相应的代换  $\cos x = t$  或  $\sin x = t$ .

(2) 若等式

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$$

成立, 则最好利用代换  $\tan x = t$ .

**例 3.1.13.** 求下列不定积分

|  |   |  |
|--|---|--|
| (1) $\int \cos^5 x dx$ .                                 | (2) $\int \sin^6 x dx$ .  | (3) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ .                                 |
| (4) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$ .                         | (5) $\int \tan^5 x dx$ .  | (6) $\int \cot^6 x dx$ .   |
| (7) $\int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x}$ .              | (8) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx$ . | (9) $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$ .                    |
| (10) $\int \frac{\cos x dx}{\sin x (\sin x + \cos x)}$ . | (11) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$ .            | (12) $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2 \cos x} dx$ .              |
| (13) $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ .             | (14) $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx$ .               | (15) $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ . |
| (16) $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$ .      | (17) $\int \frac{\tan^{\frac{1}{3}} x dx}{(\sin x + \cos x)^2}$ . | (18) $\int \frac{\cos^2 x dx}{\csc^2 x + \cot^4 x}$ .            |

(1) 法一: 因为  $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx + C$  ( $\forall n \geq 2$ ), 所以

$$\text{原式} = \frac{1}{5} \cos^4 x \sin x + \frac{4}{5} \int \cos^3 x dx = \frac{1}{5} \cos^4 x \sin x + \frac{4}{15} \cos^2 x \sin x + \frac{8}{15} \sin x + C.$$

法二: 原式  $= \int (1 - \sin^2 x)^2 d \sin x = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C$ .

(2) 法一: 因为  $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx + C$  ( $\forall n \geq 2$ ), 所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= -\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x + \frac{5}{6} \int \sin^4 x dx = -\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x + \frac{5}{6} \left( -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} \int \sin^2 x dx \right) \\ &= -\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x - \frac{5}{24} \sin^3 x \cos x - \frac{15}{48} \sin x \cos x + \frac{15}{48} x + C. \end{aligned}$$

法二: 用降幂公式再展开, 逐项积分,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^3 dx = \frac{1}{8} \int (1 - 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x - \cos^3 2x) dx \\ &= \frac{x}{8} - \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{8} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx - \frac{1}{8} \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x dx \\ &= \frac{x}{8} - \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3x}{16} + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{16} \int (1 - \sin^2 2x) d(\sin 2x) \\ &= \frac{5x}{16} - \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{16} \sin 2x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C \\ &= \frac{5x}{16} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \end{aligned}$$

(3) 原式  $= \int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\int \frac{1}{\sin x} d(\cot x) = -\frac{\cot x}{\sin x} - \int \cot x \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^3 x} dx$   
 $= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\sin^3 x} + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$ , 于是  $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$ .

(4) 原式  $= \int \frac{d \left( x + \frac{\pi}{2} \right)}{\sin^3 \left( x + \frac{\pi}{2} \right)} = -\frac{\cos \left( x + \frac{\pi}{2} \right)}{2 \sin^2 \left( x + \frac{\pi}{2} \right)} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} \right| + C = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$ .

(5) 法一: 因为  $\int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx + C (\forall n \geq 2)$ , 所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{4} \tan^4 x - \int \tan^3 x dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \left( \frac{1}{2} \tan^2 x - \int \tan x dx \right) \\ &= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

法二: 注意到  $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ , 所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \tan x (\sec^2 x - 1)^2 dx = (\sec^4 x \tan x dx - 2) \sec^2 x \tan x dx + \int \tan x dx \\ &= \int \sec^3 x d(\sec x) - 2 \int \sec x d(\sec x) - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \frac{1}{4} \sec^4 x - \sec^2 x - \ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

(6) 法一: 因为  $\int \cot^n x dx = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x dx + C (\forall n \geq 2)$ , 所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= -\frac{1}{5} \cot^5 x - \int \cot^4 x dx = -\frac{1}{5} \cot^5 x - \left( -\frac{1}{3} \cot^3 x - \int \cot^2 x dx \right) \\ &= -\frac{1}{5} \cot^5 x + \frac{1}{3} \cot^3 x - \cot x - x + C. \end{aligned}$$

法二: 注意到  $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$ , 所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \cot^2 x (\csc^2 x - 1)^2 dx = \int \cot^2 x \csc^4 x dx - 2 \int \cot^2 x \csc^2 x dx + \int \cot^2 x dx \\ &= - \int \cot^2 x (1 + \cot^2 x) d(\cot x) + 2 \int \cot^2 x d(\cot x) + \int (\csc^2 x - 1) dx \\ &= -\frac{1}{3} \cot^3 x - \frac{1}{5} \cot^5 x + \frac{2}{3} \cot^3 x - \cot x - x + C = -\frac{1}{5} \cot^5 x + \frac{1}{3} \cot^3 x - \cot x - x + C. \end{aligned}$$

(7) 运用万能代换公式转为多项式函数.

$$\begin{aligned} I &\stackrel{t=\tan \frac{x}{2}}{=} \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{6t}{1+t^2} - \frac{4(1-t^2)}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{2t^2+3t-2} = \int \frac{dt}{(t+2)(2t-1)} \\ &= -\frac{1}{5} \int \frac{dt}{t+2} + \frac{2}{5} \int \frac{dt}{2t-1} = -\frac{1}{5} \ln |t+2| + \frac{1}{5} \ln |2t-1| + C = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{2 \tan x/2 - 1}{\tan x/2 + 2} \right| + C. \end{aligned}$$

(8)  $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx = \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} = \frac{3}{2} (\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + C$ .

(9) 运用万能代换公式转为多项式函数.

$$\begin{aligned} I &\stackrel{t=\tan \frac{x}{2}}{=} \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \int \frac{dt}{3t^2+2t+2} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3 \tan x/2 + 1}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

(10) 运用万能代换公式转为多项式函数.

$$\begin{aligned} I &\stackrel{t=\tan \frac{x}{2}}{=} \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left( \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} = \int \frac{t^2-1}{t^3-2t^2-t} dt = \int \frac{t^2-1}{t(t+\sqrt{2}-1)(t-\sqrt{2}-1)} dt \\ &= \int \left( \frac{-\sqrt{2}/2}{t+\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{2}/2}{t-\sqrt{2}-1} + \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{2}-1}{t+\sqrt{2}-1} \right| + \ln |t| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\tan x/2 - \sqrt{2}-1}{\tan x/2 + \sqrt{2}-1} \right| + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

(11) 法一: 运用万能代换公式转为多项式函数, 再用奥斯特罗格拉德斯基法将其分解.

$$I \stackrel{t=\tan \frac{x}{2}}{=} \int \frac{4(t^3-t)}{(1+t^2)^2(t^2-2t-1)} dt \stackrel{Ost'}{=} \frac{At+B}{1+t^2} + \int \left( \frac{Dt+E}{t^2-2t-1} + \frac{Ft+G}{1+t^2} \right) dt$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{At+B}{1+t^2} + \int \left( \frac{Dt+E}{t^2-2t-1} + \frac{Ft+G}{1+t^2} \right) dt \right]' = \frac{-At^2-2Bt+A}{(t^2+1)^2} + \frac{Dt+E}{t^2-2t-1} + \frac{Ft+G}{t^2+1} \\ & = \frac{4(t^3-1)}{(1+t^2)^2(t^2-2t-1)} \Rightarrow (A, B, D, E, F, G) = (1, -1, 0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \frac{t-1}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2-2t-1} = \frac{t-1}{t^2+1} + \int \frac{dt}{(t-1)^2-2} \\ &= \frac{t-1}{t^2+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}} \right| + C = \frac{\tan x/2}{\tan^2 x/2+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\tan x/2-1-\sqrt{2}}{\tan x/2-1+\sqrt{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

法二：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{\sin^2 \left( x + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2}}{\sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right| + C. \end{aligned}$$

(12) 令  $\tan \frac{x}{2} = t$ , 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 4 \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2(1+t-t^2)} = \frac{4}{5} \int \left[ \frac{1}{1+t^2} + \frac{t-2}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{1+t-t^2} \right] dt \\ &= \frac{4}{5} \int \frac{dt}{1+t^2} - \frac{8}{5} \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} + \frac{2}{5} \int \frac{2tdt}{(1+t^1)^2} + \frac{4}{5} \int \frac{d\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{4}{5} \arctan t - \frac{8}{5} \left[ \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2} \arctan t \right] - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1+t^2} + \frac{4}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{5}}{2}-\left(t-\frac{1}{2}\right)} \right| + C \\ &= -\frac{2}{5} \cdot \frac{1+2t}{1+t^2} + \frac{4}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}+t}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}-t} \right| + C = -\frac{1}{5} (\cos x + 2 \sin x) + \frac{4}{5\sqrt{5}} \ln \left| \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\arctan 2}{2} \right) \right| + C. \end{aligned}$$

$$(13) \text{ 原式} = \int \frac{2dx}{2-\sin^2 2x} = \int \frac{d(\tan 2x)}{2\sec^2 2x - \tan^2 2x} = \int \frac{d(\tan 2x)}{2+\tan^2 2x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan 2x}{\sqrt{2}} + C.$$

$$(14) \text{ 原式} = \int \frac{\tan x \sec^2 x}{\sec^4 x + \tan^4 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(\tan^2 x)}{2\tan^4 x + 2\tan^2 x + 1} = \frac{1}{2} \arctan(1+2\tan^2 x) + C.$$

$$(15) \text{ 原式} = \int \frac{-\cos 2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x} dx = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \int \left( \frac{2\cos 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x} + \frac{2\cos 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x} \right) dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{\sqrt{2}-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x} + C.$$

(16) 法一：因为  $\sin x = \tan x \cdot \cos x$ , 所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{\tan x}{\cos^2 x (\tan^3 x + 1)} dx \stackrel{t=\tan x}{=} \int \frac{tdt}{t^3+1} = \int \frac{tdt}{(t+1)(t^2-t+1)} \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{t+1}{t^2-t+1} dt - \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{6} \int \frac{d(t^2-t+1)}{t^2-t+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{3} \int \frac{dt}{1+t} \\ &= \frac{1}{6} \ln(t^2-t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \ln |t+1| + C \\ &= \frac{1}{6} \ln(\tan^2 x - \tan x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\tan x - 1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \ln |\tan x + 1| + C. \end{aligned}$$

法二：因为  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab)$ , 所以

$$\text{原式} = \int \frac{\sin x dx}{(\sin x + \cos x)(1-\sin x \cos x)} = \frac{1}{2} \int \frac{(\sin x - \cos x) dx}{(\sin x + \cos x)(1-\sin x \cos x)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1-\sin x \cos x}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \int \frac{-(\cos x - \sin x) dx}{\sin x + \cos x} + \frac{1}{6} \int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{1 - \sin x \cos x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 - \sin x \cos x} \\
&= -\frac{1}{3} \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} + \frac{1}{6} \int \frac{d(1 - \sin x \cos x)}{1 - \sin x \cos x} - \frac{1}{2} \int \frac{d(\cot x)}{\left(\cot x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
&= -\frac{1}{6} \ln \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 - \sin x \cos x} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left( \frac{2 \cos x - \sin x}{\sqrt{3} \sin x} \right) + C.
\end{aligned}$$

(17) 注意到  $(\tan x)' = \sec^2 x$ , 则有

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\tan^{\frac{1}{3}} x \cdot \sec^2 x}{(\tan x + 1)^2} dx \xrightarrow{\tan x = t} \int \frac{t^{\frac{1}{3}}}{(t+1)^2} dt \xrightarrow{t=z^3} 3 \int \frac{z^3}{(z^3+1)^2} dz \\
&= \frac{1}{3} \int \frac{3-z}{z^2-z+1} dz + \int \frac{z-1}{(z^2-z+1)^2} dz + \frac{1}{3} \int \frac{dz}{z+1} - \frac{1}{3} \int \frac{dz}{(z+1)^2}
\end{aligned}$$

其中

$$\int \frac{dz}{z+1} = \ln |z+1| + C, \quad \int \frac{dz}{(z+1)^2} = -\frac{1}{z+1} + C$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{3-z}{z^2-z+1} dz &= -\frac{1}{2} \int \frac{d(z^2-z+1)}{z^2-z+1} + \frac{5}{2} \int \frac{d\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\
&= -\frac{1}{2} \ln(z^2-z+1) + \frac{5}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2z-1}{\sqrt{3}} + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{z-1}{(z^2-z+1)^2} dz &= \int \frac{z-1}{\left[\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]} dz \xrightarrow{z-\frac{1}{2}=u} \int \frac{u-\frac{1}{2}}{\left(u^2+\frac{3}{4}\right)^2} du = \underbrace{\frac{1}{2} \int \frac{2u}{\left(u^2+\frac{3}{4}\right)} du}_{u^2+\frac{3}{4}=v} - \underbrace{\frac{1}{2} \int \frac{du}{\left(u^2+\frac{3}{4}\right)}}_{u=\frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{9} \int \cos^2 \theta d\theta = -\frac{z+1}{3(z^2-z+1)} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2z-1}{\sqrt{3}} + C
\end{aligned}$$

综上,

$$\text{原式} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left( \frac{2 \tan^{\frac{1}{3}} x - 1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{6} \ln \left( \tan^{\frac{2}{3}} x - \tan^{\frac{1}{3}} x + 1 \right) + \frac{1}{3} \ln \left( \tan^{\frac{1}{3}} x + 1 \right) - \frac{\cos x \tan^{\frac{1}{3}} x}{\sin x + \cos x} + C.$$

(18) 分子分母同时乘以  $\sec^4 x \tan^4 x$ , 有

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\sec^2 x \tan^4 x dx}{\sec^6 x \tan^2 x + \sec^4 x} = \int \frac{\sec^2 x \tan^4 x dx}{(1 + \tan^2 x)^2 (1 + \tan^2 x + \tan^4 x)} \\
&\xrightarrow{\tan x = t} \int \frac{t^4 dt}{(1+t^2)^2 (t^2+t+1)(t^2-t+1)} \xrightarrow{ost'} \frac{at+b}{1+t^2} + \int \left( \frac{ct+d}{1+t^2} + \frac{et+f}{t^2+t+1} + \frac{gt+h}{t^2-t+1} \right) dt
\end{aligned}$$

则

$$\left[ \int \frac{t^4 dt}{(1+t^2)^2 (t^2-t+1)(t^2+t+1)} \right]' = \left[ \frac{at+b}{1+t^2} + \int \left( \frac{ct+d}{1+t^2} + \frac{et+f}{t^2+t+1} + \frac{gt+h}{t^2-t+1} \right) dt \right]'$$

通分, 并对比等式两边分子的系数, 有

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} & c & +e & +g & = & 0 \\ -a & -2b & +2c & +d & +e & +f & -g & +h & = 0 \\ & -2b & +2c & 2d & +2e & +3f & -2g & +3h & = 0 \\ & -2b & +2c & 2d & +3e & +2f & +3g & -2h & = 1 \\ & -2b & +c & a & +e & +3f & -g & +3h & = 0 \\ & & & & +d & +f & +h & & = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = -\frac{1}{2} \\ e = \frac{1}{2} \\ f = 0 \\ g = -\frac{1}{2} \\ h = 0 \end{array} \right.$$

因此,

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \frac{t}{2(t^2 + 1)} + \frac{1}{2} \int \frac{tdt}{t^2 - t + 1} - \frac{1}{2} \int \frac{tdt}{t^2 + t + 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{t}{t^2 + 1} + \frac{1}{4} \ln \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[ \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right] - \frac{1}{2} \arctan t + C \\
 &= \frac{\tan x}{2 \sec^2 x} + \frac{1}{4} \ln \frac{\tan^2 x - \tan x + 1}{\tan^2 x + \tan x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[ \arctan \frac{2 \tan x + 1}{\sqrt{3}} + \arctan \frac{2 \tan x - 1}{\sqrt{3}} \right] - \frac{x}{2} + C.
 \end{aligned}$$

### 指类型

常用指数函数不定积分公式.

表 3.5: 常用指数函数不定积分公式

|  |   |
|--|---|
| (1) $\int e^x dx = e^x + C.$   | (2) $\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + C.$ |
| (3) $\int xe^{ax} dx = \frac{1}{a^2}(ax - 1)e^{ax} + C.$ (4) $\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx.$ |   |

**例 3.1.14.** 求下列不定积分

|                                      |  |  |   |
|--------------------------------------|--|--|---|
| (1) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$  | (2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$ | (3) $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx.$                     | (4) $\int \frac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx.$ |
| (5) $\int \frac{1+x}{x(1+xe^x)} dx.$ |  | (6) $\int \frac{\ln(e^x+1)}{e^x} dx.$                          |   |
|                                      |  | (7) $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}.$                               |   |
|                                      |  | (8) $\int \frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{(1+e^{\frac{x}{4}})^2} dx.$ |   |

(1) 法一: 令  $e^x = t$ , 那么原式  $= \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan e^x + C.$

法二: 原式  $= \int \frac{de^x}{1+e^{2x}} = \arctan e^x + C.$

(2) 法一: 令  $e^x = \tan t$ , 那么原式  $= \int \frac{\sec t}{\tan t} dt = \int \frac{dt}{\sin t} = \int \csc t dt = -\ln |\csc x + \cot x| + C.$

法二: 原式  $\stackrel{e^x=t}{=} \int \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}} \stackrel{1+t^2=v^2}{=} \int \frac{dv}{v^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v-1}{v+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{e^{2x}+1}-1}{\sqrt{e^{2x}+1}+1} + C.$

(3) 原式  $\stackrel{e^x=t}{=} \int \frac{\ln t dt}{\sqrt{t-1}} = 2 \int \ln t d\sqrt{t-1} = 2\sqrt{t-1} \ln t - 2 \int \frac{\sqrt{t-1}}{t} dt,$

其中  $\int \frac{\sqrt{t-1}}{t} dt \stackrel{\sqrt{t-1}=u}{=} \int \frac{2u^2}{u^2+1} du = 2u - 2 \arctan u + C = 2\sqrt{t-1} - 2 \arctan \sqrt{t-1} + C$ , 综上, 原式  $= 2x\sqrt{e^x-1} - 4\sqrt{e^x-1} + 4 \arctan \sqrt{e^x-1} + C.$

(4) 法一: 指数代换, 结合三角代换.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &\stackrel{e^x=t}{=} \int \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}} dt \stackrel{\frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}=u}{=} -4 \int \frac{du}{(u^2+1)^2} \stackrel{u=\tan v}{=} -4 \int \cos^2 v dv \\
 &= -2 \int (1+\cos 2v) dv = -2v - \sin 2v + C = -2 \arctan \frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x+1} - \sqrt{1-e^{2x}} + C.
 \end{aligned}$$

法二: 指数代换, 结合 Euler 代换和 Ostrogradsky 法.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &\stackrel{e^x=t}{=} \int \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}} dt \stackrel{\text{第二 Euler 代换}}{\stackrel{\sqrt{1-t^2}=ut+1}{=}} \int \frac{1-\frac{2u}{u^2+1}}{1-\frac{u^2+1}{u^2+1}} \cdot \frac{2u^2-2}{(u^2+1)^2} du = -2 \int \frac{(u-1)^2}{(u^2+1)^2} du \\
 &\stackrel{ost'}{=} -2 \left( \frac{Au+B}{u^2+1} + \int \frac{Du+E}{u^2+1} du \right) \stackrel{(A,B,D,E)=(0,1,0,1)}{-} -2 \left( \frac{1}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1} \right) \\
 &= \frac{-2}{u^2+1} - 2 \arctan u + C = \frac{e^{2x}}{e^x-1} - 2 \arctan \frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{e^x} + C.
 \end{aligned}$$

$$(5) \text{ 原式} \stackrel{x e^x = t}{=} \int \frac{dt}{t(1+t)} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{1+t} = \ln \left| \frac{t}{1+t} \right| + C = \ln \left| \frac{x e^x}{1+x e^x} \right| + C.$$

(6) 指数代换.

$$\begin{aligned} \text{原式} &\stackrel{e^x=t}{=} \int \frac{\ln(t+1)}{t^2} dt = -\int \ln(t+1) dt^{-1} = -\frac{\ln(t+1)}{t} + \int \frac{dt}{t(t+1)} \\ &= \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| - \frac{\ln(t+1)}{t} + C = \ln \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{\ln(e^x+1)}{e^x} + C. \end{aligned}$$

(7) 指数代换, 注意需要整体代换.

$$\begin{aligned} \text{原式} &\stackrel{1+e^x=t}{=} \int \frac{dt}{t^2(t-1)} = -\int \frac{t+1}{t^2} dt + \int \frac{dt}{t-1} = -\int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{t-1} \\ &= \frac{1}{t} + \ln \left( 1 - \frac{1}{t} \right) + C = \frac{1}{1+e^x} + \ln \frac{e^x}{1+e^x} + C. \end{aligned}$$

$$(8) \text{ 原式} \stackrel{e^{\frac{x}{4}}=t}{=} 4 \int \frac{1+t^2}{t(1+t)^2} dt = 4 \int \left[ \frac{1}{t} - \frac{2}{(1+t)^2} \right] dt = 4 \ln t + \frac{8}{1+t} + C = x + \frac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}} + C.$$

## 对数型

常用对数函数不定积分公式.

表 3.6: 常用对数函数不定积分公式

|  |   |
|--|---|
| (1) $\int \ln x dx = x \ln x - x + C.$                                   | (2) $\int \log_{\alpha} x dx = \frac{1}{\ln \alpha} (x \ln x - x) + C.$ |
| (3) $\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln x - 1] + C.$ | (4) $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln x) + C.$                       |

例 3.1.15. 求下列不定积分

$$\begin{array}{l|l|l} (1) \int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx. & (2) \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx. & (3) \int x \ln(4+x^4) dx. \\ (4) \int x^3 \ln^3 x dx. & (5) \int \left( \frac{\ln x}{x} \right)^3 dx. & (6) \int \ln^2 \left( x + \sqrt{1+x^2} \right) dx. \end{array}$$

$$(1) \text{ 原式} = \int \ln x d \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln \left( x + \sqrt{1+x^2} \right) + C.$$

$$(2) \text{ 原式} = \frac{1}{2} \int \ln \frac{1+x}{1-x} dx^2 = \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2 dx}{1-x^2} = \frac{x^2-1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + x + C.$$

(3) 由分部积分法得,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} \int \ln(4+x^4) dx^2 = \frac{x^2}{2} \ln(4+x^4) - 2 \int \frac{x^5 dx}{4+x^4} \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(4+x^4) - 2 \int \left( x - \frac{4x}{4+x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} \ln(4+x^4) + 2 \arctan \left( \frac{x^2}{2} \right) - x^2 + C. \end{aligned}$$

(4) 多次利用分部积分法,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{4} \int \ln^3 x d(x^4) = \frac{1}{4} x^4 \ln^3 x - \frac{3}{4} \int x^3 \ln^2 x dx = \frac{1}{4} x^4 \ln^3 x - \frac{3}{16} \int \ln^2 x d(x^4) \\ &= \frac{1}{4} x^4 \ln^3 x - \frac{3}{16} x^4 \ln^2 x + \frac{3}{8} \int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4} x^4 \ln^3 x - \frac{3}{16} x^4 \ln^2 x + \frac{3}{32} \int \ln x d(x^4) \\ &= \frac{1}{4} x^4 \ln^3 x - \frac{3}{16} x^4 \ln^2 x + \frac{3}{32} x^4 \ln x - \frac{3}{32} \int x^3 dx \\ &= \frac{1}{4} x^4 \left( \ln^3 x - \frac{3}{4} \ln^2 x + \frac{3}{8} \ln x - \frac{3}{32} \right) + C. \end{aligned}$$

(5) 同样的, 多次利用分部积分法,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= -\frac{1}{2} \int \ln^3 x d\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2x^2} \ln^3 x + \frac{3}{2} \int \frac{\ln^2 x}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} \ln^3 x - \frac{3}{4} \int \ln 2x d\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2x^2} \ln^3 x - \frac{3}{4x^2} \ln^2 x + \frac{3}{2} \int \frac{\ln x}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} \ln^3 x - \frac{3}{4x^2} \ln^2 x - \frac{3}{4} \int \ln x d\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2x^2} \ln^3 x - \frac{3}{4x^2} \ln^2 x - \frac{3}{4x^2} \ln x + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} \left( \ln^3 x + \frac{3}{2} \ln^2 x + \frac{3}{2} \ln x + \frac{3}{4} \right) + C. \end{aligned}$$

(6) 利用分部积分法, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= x \ln^2 \left( x + \sqrt{1+x^2} \right) - 2 \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln \left( x + \sqrt{1+x^2} \right) dx \\ &= x \ln^2 \left( x + \sqrt{1+x^2} \right) - 2 \int \ln \left( x + \sqrt{1+x^2} \right) d \left( \sqrt{1+x^2} \right) \\ &= x \ln^2 \left( x + \sqrt{1+x^2} \right) - 2\sqrt{1+x^2} \ln \left( x + \sqrt{1+x^2} \right) + 2x + C. \end{aligned}$$

### 3.1.2 隐函数类型

**例 3.1.16.** 设  $y = y(x)$  是方程  $y^2(x-y) = x^2$  所确定的隐函数, 求  $\int \frac{dx}{y^2}$ .

设齐次变换  $y = tx$  由  $y^2(x-y) = x^2$  可得  $x = \frac{1}{t^2(1-t)}$ ,  $y = \frac{1}{t(1-t)}$ ,  $dx = \frac{3t-2}{t^2(1-t)^2} dt$  于是

$$I = \int \frac{dx}{y^2} = \int t^2(1-t)^2 \cdot \frac{(3t-2)}{t^3(1-t)^2} dt = \int \frac{3t-2}{t} dt = 3t - 2 \ln |t| + C = \frac{3y}{x} - 2 \ln \left| \frac{y}{x} \right| + C.$$

### 3.1.3 复合类型

#### 表格积分法

求解不定积分时, 需要多次使用分部积分时的简化运算方法. 亦可认为是分部积分法的推广公式. 设  $g_{(k+1)}$  表示  $g_{(k)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, g_{(0)} = g$ ) 积分后得到的某一个函数表达式, 则

$$\int f g dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(k)} g_{(k+1)} + (-1)^n \int f^{(n)} g_{(n)} dx$$

表格积分法常用来处理  $\int P(x)g(x)dx$  类型的积分 (其中  $P(x)$  表示多项式函数), 也可以得出递推表达式, 具体求解过程看以下例题.

**例 3.1.17.** 求不定积分  $\int (x^3 + 2x + 3)e^x dx$ .

由表格积分法得以下表格:

|        |                |              |              |              |       |
|--------|----------------|--------------|--------------|--------------|-------|
| $f'$   | $x^3 + 2x + 3$ | $3x^2 + 2$   | $6x$         | $6$          | $0$   |
|        | $+ \searrow$   | $- \searrow$ | $+ \searrow$ | $- \searrow$ |       |
| $\int$ | $e^x$          | $e^x$        | $e^x$        | $e^x$        | $e^x$ |

故原式  $= (x^3 + 2x + 3)e^x - (3x^2 + 2)e^x + 6xe^x - 6e^x + C = (x^3 - 3x^2 + 8x - 5)e^x + C$ .

**例 3.1.18.** 证明: 若  $P(x)$  为  $n$  次多项式, 则  $\int P(x)e^{ax}dx = e^{ax} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{P^{(k)}(x)}{a^{k+1}} + C$ .

证 由表格积分法:

| $f'$   | $P(x)$       | $P'(x)$             | $P''(x)$              | $\dots$ | $P^{(n)}(x)$          | $P^{(n+1)}(x) = 0$        |
|--------|--------------|---------------------|-----------------------|---------|-----------------------|---------------------------|
|        | $+ \searrow$ | $- \searrow$        | $+ \searrow$          | $\dots$ | $(-1)^n \searrow$     |                           |
| $\int$ | $e^{ax}$     | $\frac{1}{a}e^{ax}$ | $\frac{1}{a^2}e^{ax}$ | $\dots$ | $\frac{1}{a^n}e^{ax}$ | $\frac{1}{a^{n+1}}e^{ax}$ |

$$\text{故, 原式} = e^{ax} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{P^{(k)}(x)}{a^{k+1}} + C.$$

**例 3.1.19.** 求不定积分  $\int e^x \sin x dx$ .

由表格积分法:

| $f'$   | $e^x$        | $e^x$        | $e^x$     | 故 $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$ |
|--------|--------------|--------------|-----------|--|
|        | $+ \searrow$ | $- \searrow$ | $ $       | $\Rightarrow \text{原式} = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x).$              |
| $\int$ | $\sin x$     | $-\cos x$    | $-\sin x$ |  |

**推论 3.1.1.** 重要结论:

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \begin{vmatrix} (e^{ax})' & (\sin bx)' \\ e^{ax} & \sin bx \end{vmatrix} + C, \quad \int e^{ax} \cos bx dx = \begin{vmatrix} (e^{ax})' & (\cos bx)' \\ e^{ax} & \cos bx \end{vmatrix} + C.$$

**例 3.1.20.** 求不定积分  $\int \frac{\sin(\ln x)}{x^2} dx$ .

$$\text{令 } \ln x = t, \text{ 则原式化为 } \int e^{-t} \sin t dt = -\frac{1}{2}(e^{-t} \sin t + e^t \cos t) + C = -\frac{\sin \ln x + \cos \ln x}{2x} + C.$$

## 多初等函数复合型

### 组合积分法

**例 3.1.21.** 求不定积分  $I = \int \frac{\cos x}{3 \sin x + 2 \cos x} dx$ .

记  $J = \int \frac{\sin x}{3 \sin x + 2 \cos x} dx$ , 于是

$$\begin{cases} 2I + 3J = \int dx = x + C \\ 3I - 2J = \int \frac{3 \cos x - 2 \sin x}{3 \sin x + 2 \cos x} dx = \ln |3 \sin x + 2 \cos x| + C \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{3 \ln(3 \sin x + 2 \cos x)}{13} + \frac{2x}{13} + C.$$

**例 3.1.22.** 求不定积分  $\int x e^x \sin x dx$ .

法一：由表格积分法：

|        |              |                                  |                         |
|--------|--------------|----------------------------------|-------------------------|
| $f'$   | x            | 1                                | 0                       |
|        | + ↘          | - ↘                              |                         |
| $\int$ | $e^x \sin x$ | $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$ | $-\frac{e^x}{2} \cos x$ |

$$\text{故原式} = \frac{x e^x}{2} (\sin x - \cos x) + \frac{e^x}{2} \cos x + C.$$

法二：由分部积分法得，

$$\begin{aligned} I &= \int x e^x \sin x dx = \int x \sin x d(e^x) = x e^x \sin x - \int e^x d(x \sin x) \\ &= x e^x \sin x - \int (\sin x + x \cos x) d(e^x) = x e^x \sin x - \int x \cos x d(e^x) - \int e^x \sin x dx \\ &= x e^x (\sin x - \cos x) + \int e^x (\cos x - \sin x) dx - I \\ &\Rightarrow \frac{x e^x}{2} (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2} \int e^x (\cos x - \sin x) dx = \frac{x e^x}{2} (\sin x - \cos x) + \frac{e^x}{2} \cos x + C. \end{aligned}$$

法三：由  $\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C$ , 所以

$$\text{原式} = \int x d\left(\frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x)\right) = \frac{x e^x}{2} (\sin x - \cos x) - \int \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) dx = \frac{x e^x}{2} (\sin x - \cos x) + \frac{e^x}{2} \cos x + C.$$

法四：令  $I = \int x e^x \sin x dx$ ,  $J = \int x e^x \cos x dx$ , 则有

$$\begin{aligned} (x e^x \sin x)' &= e^x \sin x + x e^x \sin x + x e^x \cos x \\ (x e^x \cos x)' &= e^x \cos x + x e^x \cos x - x e^x \sin x \end{aligned}$$

两边积分，得

$$\begin{aligned} I + J &= x e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \\ -I + J &= x e^x \cos x - \int e^x \cos x dx \end{aligned}$$

两式相减，得

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} x e^x (\sin x - \cos x) - \frac{1}{2} \int e^x \sin x dx + \frac{1}{2} \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} x e^x (\sin x - \cos x) - \frac{1}{2} \int e^x (\sin x - \cos x) dx \\ &= \frac{x e^x}{2} (\sin x - \cos x) + \frac{e^x}{2} \cos x + C. \end{aligned}$$

法五：由  $e^x \sin x = \operatorname{Im}(e^{(1+i)x})$ ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int x \operatorname{Im}(e^{(1+i)x}) dx = \operatorname{Im}\left(\int x e^{(1+i)x} dx\right) = \operatorname{Im}\left(\int x d\left(\frac{e^{(1+i)x}}{1+i}\right)\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{x e^{(1+i)x}}{1+i} - \int \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} dx\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{x e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{e^{(1+i)x}}{(1+i)^2}\right) + C \\ &= \operatorname{Im}\left(\left(\frac{x}{2} - i\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)\right) e^{(1+i)x}\right) + C \\ &= \frac{x e^x}{2} (\sin x - \cos x) + \frac{e^x}{2} \cos x + C. \end{aligned}$$

例 3.1.23. 计算不定积分  $\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

令  $x = \sin t$ , 则

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} dx = \int \frac{\cos^2 t}{1+\sin^2 t} dt = \int \frac{\sec^2 t}{\sec^4 t + \tan^2 t \sec^2 t} dt \\ &= \int \frac{\sec^2 t}{2\tan^4 t + 3\tan^2 t + 1} dt \stackrel{\tan t = u}{=} \int \frac{du}{2u^4 + 3u^2 + 1} = \int \left(\frac{2}{2u^2 + 1} - \frac{1}{u^2 + 1}\right) du \\ &= \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}u) - \arctan u + C = \sqrt{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \arcsin x + C. \end{aligned}$$

**例 3.1.24 (2023 合肥工业大学).** 计算不定积分  $I = \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2} dx$ .

注意到  $\frac{d}{dx} \frac{1}{1-x^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$ , 所以原积分有

$$I = \frac{1}{2} \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1-x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}(1-x^2)} \right]$$

现计算  $J = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}(1-x^2)}$ , 运用三角代换  $1+\tan^2 x = \sec^2 x$ , 有

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{\sec t dt}{1-\tan^2 t} = \int \frac{\csc t \cot t}{\cot^2 t - 1} dt = \int \frac{\csc t \cot t}{\csc^2 t - 2} dt \stackrel{\csc t=s}{=} \int \frac{ds}{2-s^2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{ds}{1-\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{s}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\csc t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2}x} + C \end{aligned}$$

故原式等于  $\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2}x} + C$ .

**例 3.1.25 (第四届数学竞赛决赛).** 求  $\int x \arctan x \ln(1+x^2) dx$ .

令  $x \ln(1+x^2) dx = dt$ , 则

$$\begin{aligned} t &= \int x \ln(1+x^2) dx = \frac{1}{2} \int \ln(1+x^2) d(1+x^2) = \frac{1}{2} \left[ (1+x^2) \ln(1+x^2) - \int 2x dx \right] \\ &= \frac{1}{2} [(1+x^2) \ln(1+x^2) - x^2] + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} \int \arctan x d[(1+x^2) \ln(1+x^2) - x^2] \\ &= \frac{1}{2} \arctan x [(1+x^2) \ln(1+x^2) - x^2] - \frac{1}{2} [x \ln(1+x^2) - 3x + 3 \arctan x] + C \\ &= \frac{1}{2} [(1+x^2) \ln(1+x^2) - x^2 - 3] \arctan x - \frac{1}{2} [x \ln(1+x^2) - 3x] + C \end{aligned}$$

### 形式待定法

(1) 对于  $\int \frac{f(x)}{g^2(x)} dx$  型, 存在  $h(x)$ , 使得

$$\int \frac{f(x)}{g^2(x)} dx = \frac{h(x)}{g(x)} + C$$

其中  $f(x) = h'(x)g(x) - h(x)g'(x)$ ,  $h(x)$  要通过具体的等式结构另求出.

(2) 对于  $\int f(x)e^{g(x)} dx$  型, 存在  $h(x)$ , 使得

$$\int f(x)e^{g(x)} dx = h(x)e^{g(x)} + C$$

其中  $f(x) = h'(x) + h(x)g'(x)$ , 同样  $h(x)$  要通过具体的等式结构另求出.

**例 3.1.26.** 求下列不定积分.

|   |  |   |
|---|--|---|
| (1) $\int \frac{e^{-\sin x} \cdot \sin 2x}{(1-\sin x)^2} dx$ .  | (2) $\int e^{-\frac{x}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{\sin x}} dx$ . | (3) $\int \frac{x^2 dx}{(x \sin x + \cos x)^2}$ .               |
| (4) $\int e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx$ . | (5) $\int \left(1+x-\frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$ .         | (6) $\int \frac{x + \sin x \cos x}{(\cos x - x \sin x)^2} dx$ . |

(1) 令  $f(x) = e^{-\sin x} \cdot \sin 2x$ ,  $g(x) = 1 - \sin x$ , 由

$$f(x) = h'(x)g(x) - h(x)g'(x) = h'(x) - h'(x)\sin x + h(x)\cos x$$

设  $h(x) = Ae^{-\sin x}$ , 那么  $h'(x) = -A\cos x e^{-\sin x}$ , 所以

$$h'(x) - h'(x)\sin x + h(x)\cos x = A\sin x \cos x e^{-\sin x} = \frac{A}{2}\sin 2x e^{-\sin x} = e^{-\sin x} \sin 2x$$

解得  $A = 2$ , 所以  $h(x) = 2e^{-\sin x}$ .

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{2\sin x \cos x e^{-\sin x}}{(1-\sin x)^2} dx = \int \frac{2e^{-\sin x}(-\cos x)(1-\sin x) + 2\cos x e^{-\sin x}}{(1-\sin x)^2} dx \\ &= \int \frac{h'(x)(1-\sin x) - (1-\sin x)'h(x)}{(1-\sin x)^2} dx = \int d\left(\frac{h(x)}{1-\sin x}\right) = \frac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x} + C. \end{aligned}$$

(2) 令  $f(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{\sin x}}$ ,  $g(x) = -\frac{x}{2}$ , 由

$$f(x) = h'(x) + h(x) \cdot g'(x) = h'(x) - \frac{1}{2}h(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} - \sqrt{\sin x}$$

设  $h(x) = 2\sqrt{\sin x} + A$ , 那么  $h'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ , 所以

$$h'(x) - \frac{1}{2}h(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} - \sqrt{\sin x} - \frac{A}{2} = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} - \sqrt{\sin x}$$

解得  $A = 0$ , 所以  $h(x) = 2\sqrt{\sin x}$ .

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \left( e^{-\frac{x}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} - e^{-\frac{x}{2}} \sqrt{\sin x} \right) dx = \int \left[ e^{-\frac{x}{2}} h'(x) - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} h(x) \right] dx \\ &= \int d\left(h(x)e^{-\frac{x}{2}}\right) = 2\sqrt{\sin x} e^{-\frac{x}{2}} + C. \end{aligned}$$

(3) 法一: 注意到  $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ , 所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{x^2 (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(x \sin x + \cos x)^2} dx = \int \frac{x^2 \cos^2 x - x \sin x \cos x}{(x \sin x + \cos x)^2} dx + \int \frac{x^2 \sin^2 x + x \sin x \cos x}{(x \sin x + \cos x)^2} dx \\ &= \int \frac{x \cos x (x \cos x - \sin x)}{(x \sin x + \cos x)^2} dx + \int \frac{x \sin x dx}{x \sin x + \cos x} \\ &= \int (\sin x - x \cos x) d\left(\frac{1}{x \sin x + \cos x}\right) + \int \frac{x \sin x dx}{x \sin x + \cos x} \\ &= \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x + \cos x} - \int \frac{x \sin x dx}{x \sin x + \cos x} + \int \frac{x \sin x dx}{x \sin x + \cos x} = \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x + \cos x} + C. \end{aligned}$$

法二: 令  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x \sin x + \cos x$ , 由

$$f(x) = h'(x)g(x) - h(x)g'(x) = h'(x)(x \sin x + \cos x) - h(x)x \cos x = x^2 = x^2 (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

设  $h(x) = Ax^a \sin x + Bx^b \cos x$ , 那么  $h'(x) = A_a x^{a-1} \sin x + Ax^a \cos x + Bb x^{b-1} \cos x - Bx^b \sin x$ , 代入上式, 对比系数得  $A = 1, a = 0, B = -1, b = 1$ , 于是  $h(x) = \sin x - x \cos x$ ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{x^2 \sin^2 x + x^2 \cos^2 x}{(x \sin x + \cos x)^2} dx = \int \frac{x \sin x (x \sin x + \cos x) - x \cos x (\sin x - x \cos x)}{(x \sin x + \cos x)^2} dx \\ &= \int \frac{h'(x)(x \sin x + \cos x) - h(x) \cdot (x \sin x + \cos x)'}{(x \sin x + \cos x)^2} dx = \int d\left(\frac{h(x)}{x \sin x + \cos x}\right) = \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x + \cos x} + C. \end{aligned}$$

(4) 令  $f(x) = \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x}$ ,  $g(x) = \sin x$ , 由

$$f(x) = h'(x) + h(x) \cdot g'(x) = h'(x) + h(x) \cdot \cos x = x \cos x - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

设  $h(x) = \frac{A}{\cos x} + P(x)$ , 那么  $h'(x) = \frac{A \sin x}{\cos^2 x} + P'(x)$ , 所以

$$h'(x) + h(x) \cdot \cos x = \frac{A \sin x}{\cos^2 x} + P'(x) + A + P(x) \cos x = x \cos x - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

各项一一对应, 得  $A = -1, P(x) = x$ , 所以  $h(x) = x - \sec x$ .

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int e^{\sin x} \left( 1 - \frac{\sin x}{\cos^2 x} + x \cos x - 1 \right) dx = \int [h'(x)e^{\sin x} + e^{\sin x} \cdot \cos x h(x)] dx \\ &= \int d[h(x)e^{\sin x}] = (x - \sec x)e^{\sin x} + C. \end{aligned}$$

(5) 令  $f(x) = 1 + x - \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$ , 由

$$f(x) = h'(x) + h(x)g'(x) = h'(x) + h(x) \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 + x - \frac{1}{x}$$

$$\text{于是 } h(x) = x, \text{ 故原式} = \int e^{x+\frac{1}{x}} \left[1 + x \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right] dx = \int d\left(h(x)e^{x+\frac{1}{x}}\right) = xe^{x+\frac{1}{x}} + C.$$

(6) 令  $f(x) = x + \sin x \cos x$ ,  $g(x) = \cos x - x \sin x$ , 由

$$f(x) = h'(x)g(x) - h(x)g'(x) = h'(x)(\cos x - x \sin x) + h(x)(2 \sin x + x \cos x) = x + \sin x \cos x$$

$$\text{于是 } h(x) = x \sin x, \text{ 故原式} = \frac{x \sin x}{\cos x - x \sin x} + C.$$

**例 3.1.27.** 求  $\int \frac{x^2 + 6}{(x \cos x - 3 \sin x)^2} dx$ .

法一: 令  $f(x) = x^2 + 6$ ,  $g(x) = x \cos x - 3 \sin x$ , 由

$$\begin{aligned} f(x) &= h'(x)g(x) - h(x)g'(x) = h'(x)(x \cos x - 3 \sin x) + h(x)(x \sin x + 2 \cos x) \\ (x^2 + 6)(\sin^2 x + \cos^2 x) &= h'(x)(x \cos x - 3 \sin x) + h(x)(x \sin x + 2 \cos x) \end{aligned}$$

可知,  $h(x)$  中存在  $x \sin x$  项和  $3 \cos x$ ;  $h'(x)$  中存在  $x \cos x$  项和  $-2 \sin x$ , 于是不妨取  $h(x) = x \sin x + 3 \cos x$ , 故原积分等于  $\frac{x \sin x + 3 \cos x}{x \cos x - 3 \sin x} + C$ , 经检验该函数是原积分的原函数.

法二: 运用  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , 则有

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(x^2 + 6)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(x \cos x - 3 \sin x)^2} dx = \int \begin{vmatrix} x & 3 \\ -2 & x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} \frac{dx}{(x \cos x - 3 \sin x)^2} \\ &= \int \begin{vmatrix} x \cos x - 3 \sin x & x \sin x + 3 \cos x \\ -2 \cos x - x \sin x & -2 \sin x + x \cos x \end{vmatrix} \frac{dx}{(x \cos x - 3 \sin x)^2} \\ &= \int \frac{-2 \sin x + x \cos x}{x \cos x - 3 \sin x} dx + \int \frac{(x \sin x + 3 \cos x)(2 \cos x + \sin x)}{(x \cos x - 3 \sin x)^2} dx \end{aligned}$$

注意到  $\frac{d}{dx}(x \cos x - 3 \sin x) = -(2 \cos x + x \sin x)$ , 故可对上式第二个积分利用分部积分公式, 得

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{(x \sin x + 3 \cos x)(2 \cos x + \sin x)}{(x \cos x - 3 \sin x)^2} dx = \int (x \sin x + 3 \cos x) d\left(\frac{1}{x \cos x - 3 \sin x}\right) \\ &= \frac{x \sin x + 3 \cos x}{x \cos x - 3 \sin x} - \int \frac{d(x \sin x + 3 \cos x)}{x \cos x - 3 \sin x} = \frac{x \sin x + 3 \cos x}{x \cos x - 3 \sin x} - \int \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x \cos x - 3 \sin x} dx \end{aligned}$$

$$\text{所以 } I = \int \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x \cos x - 3 \sin x} + I_1 = \frac{x \sin x + 3 \cos x}{x \cos x - 3 \sin x} + C.$$

利用行列式来表述较为复杂的计算式子, 具有过程简洁, 结构紧凑, 规律性强等明显优点.

## 双变量代换法

**例 3.1.28.** 求下列不定积分.

$$(1) \int \frac{(x^2 + 1) \cos x + \sin^2 x + 1}{(x^2 - 1) \cos^2 x + 4x \sin x} dx. \quad (2) \int \frac{e^{2x} - x^2 + e^x(1 - x) \cos 2x}{(e^x \cos x + x \sin x) \sqrt{(e^{2x} - x^2) \cos 2x}} dx.$$

(1) 令  $p = x + \sin x$ ,  $q = 1 - x \sin x$ , 那么  $p^2 - q^2 = (x + \sin x)^2 - (1 - x \sin x)^2 = (x^2 - 1) \cos^2 x + 4x \sin x$ , 并且

$$d\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{qd p - pd q}{q^2} = \frac{(x^2 + 1) \cos x + \sin^2 x + 1}{q^2} dx \Rightarrow [(x^2 + 1) \cos x + \sin^2 x + 1] dx = q^2 d\left(\frac{p}{q}\right)$$

$$\text{因此 } I = \int \frac{q^2}{p^2 - q^2} d\left(\frac{p}{q}\right) = \int \frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 1} d\left(\frac{p}{q}\right) \stackrel{u=\frac{p}{q}}{\frac{u=2}{2}} \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C, \text{ 即}$$

$$I = \frac{1}{2} [\ln(-x - (x+1) \sin x + 1) - \ln(x - x \sin x + \sin x + 1)] + C.$$

(2) 令  $p = e^x \cos x + x \sin x$ ,  $q = e \sin x + x \cos x$ , 那么

$$p^2 - q^2 = (e^x \cos x + x \sin x)^2 - (e \sin x + x \cos x)^2 = (e^{2x} - x^2) \cos 2x$$

并且

$$d\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{pdq - qdp}{p^2} = \frac{1}{p^2} [e^{2x} - x^2 + e^x(1-x)\cos 2x]dx \Rightarrow [e^{2x} - x^2 + e^x(1-x)\cos 2x]dx = p^2 d\left(\frac{q}{p}\right)$$

$$\text{因此 } I = \int \frac{p}{\sqrt{p^2 - q^2}} d\left(\frac{q}{p}\right) \stackrel{u=\frac{q}{p}}{=} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin u + C, \text{ 即 } I = \arcsin \left( \frac{e^x \sin x + x \cos x}{e^x \cos x + x \sin x} \right) + C.$$

## 3.2 定积分

定积分是微积分中的一个重要概念, 它表示在一个区间上对一个函数进行积分, 得到的结果是一个数值, 表示函数在该区间上的面积或者累积量.

### 3.2.1 求出不定积分后计算

#### 根式积分

**定理 3.2.1.** 若  $a < b$ , 则  $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} dx = \frac{\pi}{8}(b-a)^2$ .

**例 3.2.1.** 计算  $\int_3^5 \sqrt{(x-3)(5-x)} dx$ .

由定理 3.2.1 可知原积分等于  $\frac{\pi}{2}$ .

#### 三角函数积分

**例 3.2.2.** 计算定积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$ .

注意到  $\sin x = \frac{\sin x + \cos x}{2} - \frac{\cos x - \sin x}{2}$ , 于是  $\int \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$ , 其中

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} &= \int \frac{\sec^2 x dx}{\tan^2 x + 2 \tan x + 1} \stackrel{\tan x = t}{=} \int \frac{dt}{(t+1)^2} = -(t+1)^{-1} + C = -(\tan x + 1)^{-1} + C \\ \int \frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx &= \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^3} = -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)^{-2} + C \end{aligned}$$

$$\text{故 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx = -\frac{1}{2}(\tan x + 1)^{-1} + \frac{1}{4}(\sin x + \cos x)^{-2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

**例 3.2.3.** 设  $D = \{(x, y) \mid x^4 + y^4 \leq 1\}$ , 求  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ .

由题意  $D_{\rho\theta} = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq \sqrt[4]{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta} \right\}$ , 则

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt[4]{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}} \rho^3 d\rho = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta} = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta} d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \tan^2 \theta}{1 + \tan^4 \theta} d\tan \theta = \int_0^{+\infty} \frac{1 + t^2}{1 + t^4} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 2} dt \\
&\stackrel{u=t-\frac{1}{t}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

含绝对值类型

**例 3.2.4.** 计算定积分  $\int_{-2}^3 |x^2 + 2|x| - 3| dx$ .

由于  $|x^2 + 2|x| - 3| = \operatorname{sgn}(x^2 + 2\operatorname{sgn}(x) \cdot x - 3) \cdot (x^2 + 2\operatorname{sgn}(x) \cdot x - 3)$ , 于是, 当  $x \in [-2, -1]$  时,

$$\operatorname{sgn}(x) = -1, \operatorname{sgn}(x^2 - 2x - 3) = 1$$

当  $x \in [-1, 0)$  时,

$$\operatorname{sgn}(x) = -1, \operatorname{sgn}(x^2 - 2x - 3) = -1$$

当  $x \in [0, 1)$  时,

$$\operatorname{sgn}(x) = 1, \operatorname{sgn}(x^2 - 2x - 3) = -1$$

当  $x \in [1, 3]$  时,

$$\operatorname{sgn}(x) = 1, \operatorname{sgn}(x^2 - 2x - 3) = 1$$

所以

$$I = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 2x - 3) dx - \int_{-1}^0 (x^2 - 2x - 3) dx - \int_0^1 (x^2 + 2x - 3) dx + \int_1^3 (x^2 + 2x - 3) dx = \frac{49}{3}.$$

复合类型

**例 3.2.5.** 计算  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot \ln \sin x \cdot \ln \cos x dx$ .

令  $t = \sin^2 x$ , 那么  $dt = 2 \sin x \cos x dx = \sin 2x dx$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot \ln \sin x \cdot \ln \cos x dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \ln t \ln(1-t) dt \\
&= \frac{1}{4} t \ln t \ln(1-t) \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 \left[ \ln(1-t) + \frac{t \ln t}{t-1} \right] dt = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{t \ln t}{t-1} dt
\end{aligned}$$

其中  $\int_0^1 \frac{t \ln t}{t-1} dt = \int_0^1 \frac{(t-1+1) \ln t}{t-1} dt = \int_0^1 \ln t dt + \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \frac{\pi^2}{6} - 1$ , 所以原式  $= \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{24}$ . 另解见例题 7.2.33.

**例 3.2.6.** 计算  $\int_0^1 x \arcsin(2\sqrt{x(1-x)}) dx$ .

因为

$$\left[ \arcsin(2\sqrt{x(1-x)}) \right]' = \frac{\frac{1-2x}{\sqrt{x(1-x)}}}{\sqrt{1-4x(1-x)}} = \frac{\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-4x(1-x)}}$$

所以

$$\begin{aligned}
\int x \arcsin(2\sqrt{x(1-x)}) dx &= \int \arcsin(2\sqrt{x(1-x)}) d\frac{x^2}{2} \\
&= \frac{1}{2} x^2 \arcsin(2\sqrt{1-x}\sqrt{x}) - \int \frac{\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\right) x^2}{2\sqrt{1-4x(1-x)}} dx
\end{aligned}$$

其中

$$I = \int \frac{\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\right) x^2}{2\sqrt{1-4x(1-x)}} dx = \int \frac{\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\right) x^2}{2|2x-1|} dx = \int \frac{\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\right) x^2}{2(2x-1)\operatorname{sgn}(2x-1)} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\operatorname{sgn}(2x-1)} \int -\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-x}} dx \stackrel{\sqrt{x}=t}{=} -\frac{1}{\operatorname{sgn}(2x-1)} \int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
&\quad \int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} dt \stackrel{ost'}{=} \sqrt{1-t^2}(At^3+Bt^2+Ct+D) + E \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
&\quad \stackrel{(A,B,C,D,E)}{=} \left( -\frac{1}{4}, 0, -\frac{3}{8}, 0, \frac{3}{8} \right) \sqrt{1-t^2} \left( -\frac{t^3}{4} - \frac{3t}{8} \right) + \frac{3}{8} \arcsin t
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{\operatorname{sgn}(2x-1)} \left[ \sqrt{1-t^2} \left( -\frac{t^3}{4} - \frac{3t}{8} \right) + \frac{3}{8} \arcsin t \right] \\
&= \frac{\sqrt{1-x}\sqrt{x}(4x^2+4x-3)-6\arcsin\sqrt{x}+3\arcsin\sqrt{x}}{8|2x-1|} \\
\text{原式} &= \left[ \frac{1}{2}x^2 \arcsin(2\sqrt{1-x}\sqrt{x}) - I \right] \Big|_0^1 = \frac{3\pi}{16}.
\end{aligned}$$

### 3.2.2 运用定积分性质进行相关计算

#### 定积分的换元变换

**例 3.2.7.** 设  $F(a) = \int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx$ , 求  $F(-a)$ ,  $F(a^2)$ .

作定积分的换元变化, 令  $t = \pi - x$ , 则

$$\begin{aligned}
F(-a) &= \int_0^\pi \ln(1 + 2a \cos x + a^2) dx \stackrel{t=\pi-x}{=} -\int_\pi^0 \ln(1 - 2a \cos t + a^2) dt \\
&= \int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos t + a^2) dt = F(a)
\end{aligned}$$

且  $F(a^2) = \int_0^\pi \ln(1 - 2a^2 \cos x + a^4) dx$ , 注意到

$$\begin{aligned}
2F(a) &= F(a) + F(-a) = \int_0^\pi [\ln(1 - 2a \cos x + a^2) + \ln(1 + 2a \cos x + a^2)] dx \\
&= \int_0^\pi \ln[(1+a^2)^2 - 4a^2 \cos^2 x] dx = \int_0^\pi \ln(1 - 2a^2 \cos 2x + a^4) dx \\
&\stackrel{2x=t}{=} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2a^2 \cos t + a^4) dt \\
&= \frac{1}{2} \left[ \int_0^\pi \ln(1 - 2a^2 \cos t + a^4) dt + \int_\pi^{2\pi} \ln(1 - 2a^2 \cos t + a^4) dt \right] \\
&\stackrel{\substack{u=2\pi-t \\ \text{第二项}}}{=} \frac{1}{2} \left[ \int_0^\pi \ln(1 - 2a^2 \cos t + a^4) dt + \int_0^\pi \ln(1 - 2a^2 \cos u + a^4) du \right] \\
&= \int_0^\pi \ln(1 - 2a^2 \cos x + a^4) dx = F(a^2).
\end{aligned}$$

#### 对称区间上的积分公式

**定理 3.2.2.** 函数  $f(x)$  在区间  $[-a, a]$ ,  $a > 0$  上连续, 则  $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$ .

证 因为  $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$ , 而令  $x = -t$ , 有

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(-x) dx$$

所以  $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$ .

**推论 3.2.1.** 设函数  $f(x), g(x)$  在  $[-a, a], a > 0$  上连续, 且  $g(x)$  为偶函数, 则

$$\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = \int_0^a [f(-x) + f(x)]g(x)dx.$$

**例 3.2.8.** 计算下列定积分,

$$\begin{array}{ll} (1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx. & (2) \int_{-2}^2 x \ln(1+e^x) dx. \\ (3) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \left( \ln \frac{1+x}{1-x} + \sin^2 x \right) dx. & (4) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+2^x} \cdot \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx. \\ (5) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \arctan e^x}{1+\cos^2 x} dx. & (6) \int_{-1}^1 x (1+x^{2023}) (e^x - e^{-x}) dx. \end{array}$$

$$(1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^{-x}} \right) \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x) dx = \frac{\pi}{4}.$$

$$(2) \text{原式} = \frac{1}{2} x^2 \ln(1+e^x) \Big|_{-2}^2 - \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \frac{x^2 e^x}{1+e^x} dx = 2 \ln \frac{1+e^2}{1+e^{-2}} - \frac{1}{2} \int_0^2 \left( \frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^x} \right) x^2 dx = 2 \ln \frac{1+e^2}{1+e^{-2}} - \frac{4}{3}.$$

$$(3) \text{原式} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \ln \frac{1+x}{1-x} + \sin^2 x + \ln \frac{1-x}{1+x} + \sin^2 x \right) d \sin x = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2 x d \sin x = \frac{2}{3} \sin^3 \frac{1}{2}.$$

$$(4) \text{因为 } \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = 1 + \sum_{k=1}^n \cos 2kx, \text{ 所以}$$

$$\text{原式} = \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+2^{-x}} \right) \frac{\sin(2n+1)}{\sin x} dx = \int_0^{\pi} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos 2kx \right) dx = \pi.$$

$$(5) \text{注意到 } \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, x > 0, \text{ 且 } \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx, \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} (\arctan e^x + \arctan e^{-x}) \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = -\frac{\pi^2}{4} \int_0^{\pi} \frac{d \cos x}{1+\cos^2 x} \\ &= -\frac{\pi^2}{4} \cdot \arctan \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{8}. \end{aligned}$$

$$(6) I = \int_0^1 [1+x^{2023} + 1+(-x)^{2023}] x (e^x - e^{-x}) dx = 2 \int_0^1 x (e^x - e^{-x}) dx = \frac{4}{e}.$$

**例 3.2.9.** (2023 合肥工业大学) 计算  $I = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin^5 x \arctan e^x dx$ .

由推论 3.2.1 可知,

$$I = \int_0^{\pi} (\arctan e^x + \arctan e^{-x}) x \sin^5 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} x \sin^5 x dx = \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\pi} \sin^5 x dx = \frac{\pi^2}{4} \cdot 2 \cdot \frac{4!!}{5!!} = \frac{4\pi^2}{15}.$$

**例 3.2.10.** 设  $a > 0$ ,  $f(x)$  是  $[-a, a]$  上的连续偶函数, 证明:  $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_0^a f(x) dx$ .

$$\text{证 左} = \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1+e^x} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1+e^x} dx \stackrel{x=-t}{=} - \int_a^0 \frac{f(-t)}{1+e^{-t}} dt + \int_0^a \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_0^a \left( \frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^{-x}} \right) f(x) dx = \text{右}.$$

**例 3.2.11.** 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且对任何  $x, y$ , 有  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , 计算

$$\int_{-1}^1 (x^2 + 1) f(x) dx.$$

$$\int_{-1}^1 (x^2 + 1) f(x) dx = \int_0^1 (f(x) + f(-x)) (x^2 + 1) dx = f(0) \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \frac{4}{3} f(0).$$

## 周期函数的定积分

**定理 3.2.3 (周期函数的定积分公式).** 设  $f(x)$  是连续的周期函数, 最小正周期为  $T$ , 则有

$$(1) \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx;$$

$$(2) \int_a^{a+nT} f(x)dx = n \int_0^T f(x)dx.$$

**例 3.2.12.** 计算定积分  $\int_0^{n\pi} |x| \sin x dx$ , 其中  $n$  为正整数.

由  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(x) + f(a+b-x)]dx$ , 得

$$\int_0^{nx} x |\sin x| dx = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} [x |\sin x| + (n\pi - x) |\sin(n\pi - x)|] dx = n\pi \int_0^{\frac{n\pi}{2}} |\sin x| dx$$

又因为  $|\sin x| = \sqrt{\sin^2 x} = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$  的周期为  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ , 且  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$ ,  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\sin x| dx = 1$ ,

所以  $\int_0^{\frac{n\pi}{2}} |\sin x| = n$ , 故  $\int_0^{n\pi} x |\sin x| dx = n^2 \pi$ .

**例 3.2.13.** 已知数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  满足

$$a_n = \int_0^{n^2\pi} (|\cos t| + |\sin t|) dt, \quad b_n = \int_0^{\frac{1}{n}} (e^{-t} \sin t) dt$$

求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (a_n b_n - 2)$ .

因为  $|\cos t|, |\sin t|$  都是周期为  $T = \pi$  的周期函数, 那么

$$a_n = \sum_{k=0}^{n^2-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} (|\cos t| + |\sin t|) dt = \sum_{k=0}^{n^2-1} \int_0^\pi (|\cos t| + |\sin t|) dt = 4n^2$$

$$b_n = -\frac{e^{-t}}{2} (\sin t + \cos t) \Big|_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} - \frac{e^{-\frac{1}{n}}}{2} \left( \sin \frac{1}{n} + \cos \frac{1}{n} \right)$$

那么

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (a_n b_n - 2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left[ 2n^2 - 2n^2 e^{-\frac{1}{n}} \left( \sin \frac{1}{n} + \cos \frac{1}{n} \right) - 2 \right] \xrightarrow{\frac{1}{n}=t} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2e^t - 2(\sin t + \cos t) - 2t^2 e^t}{t^3 e^t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2 \left( 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3) \right) - 2 \left( x - \frac{1}{6}x^3 + 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \right) - 2t^2(1 + t + o(t))}{t^3} = -\frac{4}{3}.$$

## 区间再现公式

**定理 3.2.4 (区间再现公式).** 若  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续<sup>1</sup>, 则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x) + f(a+b-x)]dx$$

<sup>1</sup>事实上  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$ , 令  $x = a+b-t$ , 则

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx = \int_{\frac{a+b}{2}}^a f(a+b-t) d(-t) = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(a+b-t)dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(a+b-x)dx$$

所以有  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(x) + f(a+b-x)]dx$ .

$$= \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(a) + f(a+b-x)] dx.$$

特别地, 当  $f(x) = xg(x)$  ( $g(x) = g(a+b-x)$ ) 时,  $\int_a^b xg(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b g(x) dx$ ;

当  $f(x) = \frac{g(x)}{g(x) + g(a+b-x)}$  时,  $\int_a^b \frac{g(x)}{g(x) + g(a+b-x)} dx = \frac{1}{2}(b-a)$ .

**例 3.2.14.** 求  $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx$ .

由定理 3.2.4 得,

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x} + \arcsin \sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = \frac{\pi}{4} \ln 3$$

其中  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = \int_0^1 \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \ln \left[ \left(x - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{x^2 - x + 1} \right]_0^1 = \ln 3$ .

**例 3.2.15.** 计算  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \tan^{\sqrt{2}} x}$ .

法一: 令  $x = \frac{\pi}{2} - t$ , 那么  $dx = -dt$ , 所以

$$\text{原式} = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-dt}{1 + \cot^{\sqrt{2}} t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^{\sqrt{2}} t}{1 + \tan^{\sqrt{2}} t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \tan^{\sqrt{2}} x} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{4}.$$

法二: 原式  $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ \frac{1}{1 + \tan^{\sqrt{2}} x} + \frac{1}{1 + \tan^{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}$ .

**推论 3.2.2.** 一般地, 设  $\alpha$  为任意正整数, 则  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \tan^\alpha x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cot^\alpha x} = \frac{\pi}{4}$ .

**例 3.2.16.** 计算  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) dx$ , 其中  $f(x) = \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{x}} \frac{du}{1 + \tan^{\sqrt{2}} u^2}$ .

$$f(x) \xrightarrow{u^2=t} \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{dt}{2\sqrt{t} \left(1 + \tan^{\sqrt{2}} t\right)},$$

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) d\sqrt{x} = 2\sqrt{x} f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x} df(x) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \tan^{\sqrt{2}} x} = -\frac{\pi}{4}.$$

**例 3.2.17.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \left( \ln \frac{2n+k}{2n-k} + \ln \frac{n+k}{3n-k} \right)$ .

由引理 1.3.2, 可知原式  $= e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \ln \frac{2+\frac{k}{n}}{2-\frac{k}{n}} + \ln \frac{1+\frac{k}{n}}{3-\frac{k}{n}} \right) = e \int_0^1 \ln \frac{(2+x)(1+x)}{(2-x)(3-x)} dx$ , 若用分部积分法求解则显得

复杂, 不妨采用定理 3.2.4, 则

$$\int_0^1 \ln \frac{(2+x)(1+x)}{(2-x)(3-x)} dx \xrightarrow{1+0-x=t} \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \ln \frac{(2+x)(1+x)}{(2-x)(3-x)} + \ln \frac{(3-t)(2-t)}{(1+t)(2+t)} \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln 1 dx = 0$$

故原极限等于 0.

### 3.2.3 积分作为上下限的函数

**定理 3.2.5.** 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  在  $[a, b]$  上连续.

**定理 3.2.6.** 在区间  $I$  上, 若函数  $f$  连续,  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  可导, 则  $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt$  也可导, 且

$$F'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) - f(\psi(x)) \cdot \psi'(x).$$

**例 3.2.18.** 设  $y = y(x)$  由  $x = \int_1^{y-x} \sin^2 \left( \frac{\pi t}{4} \right) dt$  所确定, 求  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$ .

易知  $y(0) = 1$ , 两边对  $x$  求导, 得

$$1 = \sin^2 \left[ \frac{\pi}{4} (y-x) \right] (y' - 1) \Rightarrow y' = \csc^2 \left[ \frac{\pi}{4} (y-x) \right] + 1$$

将  $x = 0$  代入, 得  $y' = 3$ .

**例 3.2.19.** 设  $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t} \ln \frac{t}{2} dt$  ( $x \in (1, +\infty)$ ), 问函数  $f(x)$  在何处取最小值.

$f'(x) = \frac{1}{x^2} \ln \frac{x^2}{2} \cdot 2x - \frac{1}{x} \ln \frac{x}{2} = \frac{\ln x}{x}$ , 令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = 1$ , 并且当从左到右穿过  $x = 1$  时,  $f'(x)$  由负变正, 故  $f(1)$  是  $f$  的最小值  $f_{min} = \int_1^1 \frac{1}{t} \ln \frac{t}{2} dt = 0$ .

**例 3.2.20.** 求积分的极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^m \int_0^{\frac{1}{x}} \sin t^2 dt$  (其中  $m$  为任意整数).

令  $\frac{1}{x} = u$ , 则

$$\text{原式} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^u \sin t^2 dt}{u^m} \stackrel{L'H}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sin u^2}{mu^{m-1}} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u^{3-m}}{m} = \begin{cases} 0, & m = 1, 2 \text{ 或 } m \leq 0, \\ \frac{1}{3}, & m = 3, \\ +\infty, & m > 3. \end{cases}$$

**例 3.2.21.** 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ , 记  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ ,  $0 \leq x \leq 2$ , 求  $F(x)$ .

当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3$ ;

当  $1 < x \leq 2$  时,  $F(x) = \int_0^1 t^2 dt + \int_1^x (2-t)dt = -\frac{7}{6} + 2x - \frac{1}{2}x^2$ ,

所以  $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{7}{6} + 2x - \frac{1}{2}x^2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ .

**例 3.2.22.** 设函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内连续,  $f(1) = \frac{5}{2}$ , 且对所有  $x, t \in (0, +\infty)$ , 满足条件

$$\int_1^{xt} f(u)du = t \int_1^x f(u)du + x \int_1^t f(u)du$$

求  $f(x)$  的表达式.

等式两边同时对  $t$  求导, 得

$$xf(xt) = \int_1^x f(u)du + xf(t)$$

由上式可知  $f$  是  $(0, +\infty)$  内的可导函数, 两边再对  $x$  求导, 得

$$f(xt) + txf'(xt) = f(x) + f(t)$$

令  $t = 1$ , 得  $f(x) + xf'(x) = f(x) + f(1) \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{2x} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{2} \ln x + C$ , 又  $f(1) = \frac{5}{2}$ , 所以

$$f(x) = \frac{5}{2}(\ln x + 1).$$

**例 3.2.23.** 设函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x)$  单调增加,  $0 \leq g(x) \leq 1$ , 证明:

$$(1) \quad 0 \leq \int_a^x g(t)dt \leq x - a, x \in [a, b];$$

$$(2) \quad \int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

证

(1) 由定积分保序性可得:

$$0 \leq \int_a^x g(t)dt \leq \int_a^x dt = x - a (x \in [a, b]).$$

(2) 令  $b = x$ , 构造辅助函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)g(t)dt - \int_a^{a+\int_a^x g(t)dt} f(t)dt$$

则  $F(a) = 0$ ,

$$F'(x) = f(x)g(x) - f\left(a + \int_a^x g(t)dt\right)g(x) = g(x)\left[f(x) - f\left(a + \int_a^x g(t)dt\right)\right]$$

因为  $a + \int_a^x g(t)dt \in [0, x]$ , 且  $f(x) \nearrow$ , 所以  $f(x) - f\left(a + \int_a^x g(t)dt\right) \geq 0$ , 所以  $F'(x) \geq 0$ , 故  $F(x) \nearrow$ , 所以

$$F(x) \geq F(a) = 0 \Rightarrow F(b) \geq 0 \Rightarrow \int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

### 3.2.4 积分中值定理

#### 第一积分中值定理

**定理 3.2.7 (第一积分中值定理).** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $g(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 且不变号, 则  $\exists \xi \in (a, b)$  使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

**例 3.2.24.** 设  $a_n, b_n > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  且  $\int_{\sin a_n}^{a_n} e^{x^2} dx = b_n \ln(1 + b_n)$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^3}{b_n^2}$ .

由题意当  $n \rightarrow \infty$  时  $b_n = 0$ , 故  $\int_{\sin a_n}^{a_n} e^{x^2} dx = b_n \ln(1 + b_n) = b_n^2$ , 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^3}{b_n^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^3}{\int_{\sin t}^t e^{x^2} dx} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{t^2}} \frac{t^3}{t - \sin t} = 6$$

其中  $\sin t < \xi < t$ .

**例 3.2.25.** 设  $f(x) \in D(0, 1)$ ,  $f(0) = f(1) = -2$ ,  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ , 证明:  $\exists \xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) - f(\xi) = \xi$ .

证 令  $F(x) = e^{-x}(f(x) + x + 1)$ , 有  $F(0) = -1$ ,  $F(1) = 0$ , 因为  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ , 由积分中值定理知,  $\exists \eta \in (0, 1)$ , 使得

$$\int_0^1 f(x)dx = f(\eta) \int_0^1 dx = f(\eta) = 0$$

而  $F(\eta) = e^{-\eta}(f(\eta) + \eta + 1) > 0$ , 因此  $\exists \xi \in (0, 1)$ , 使得  $F(x) \leq F(\xi)$ , 即  $F(x)$  的最大值一定在区间  $(0, 1)$  内取到, 由 Fermat 引理知,  $F'(\xi) = 0$ , 即

$$-e^{-x}(f(x) + x + 1) + e^{-x}(f'(x) + 1) \Big|_{x=\xi} = f'(\xi) - f(\xi) = \xi.$$

**例 3.2.26 (2019 数二).** 已知函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有二阶导数, 且  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ ,  $\int_0^1 f(x)dx = 1$ , 证明 (1)  $\exists \xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ ; (2)  $\exists \eta \in (0, 1)$ , 使得  $f''(\eta) < -2$ .

证

(1) 令  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , 则  $F'(x) = f(x)$ , 且

$$1 = \int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = F'(c)(1 - 0) = f'(c)$$

于是  $f(c) = f(1) = 1$ , 故由 Rolle 中值定理知,  $\exists \xi \in (c, 1) \subset (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .

(2) 法一: 反证法令  $g(x) = f(x) + x^2$ , 则  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 2$ , 假设  $\exists \eta \in (0, 1)$ , 使得  $g''(\eta) < 0$ , 即  $\forall x \in (0, 1)$ ,  $g''(x) \geq 0$ , 则  $g(x)$  为下凹函数, 则有

$$\int_0^1 (f(x) + x^2)dx = \int_0^1 g(x)dx \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

但  $\int_0^1 (f(x) + x^2)dx = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ , 而  $\frac{4}{3} \not\leq 1$ , 矛盾, 故假设不成立, 即  $\exists \eta \in (0, 1)$ , 使得  $f''(\eta) < -2$ .

法二: 令  $g(x) = f(x) + ax^2 + bx + c$ , 使得  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 0$ ,  $\int_0^1 g(x)dx = 0$ , 故

$$\begin{cases} c = 0 \\ 1 + a + b + c = 0 \\ 1 + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \\ c = 0 \end{cases}$$

即  $g(x) = f(x) + 3x^2 - 4x$ , 由第一积分中值定理知,  $\exists c \in (0, 1)$  使得  $\int_0^1 g(x)dx = g(c) = 0$ , 又  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 0$ , 故  $\exists \xi_1 \in (0, c)$ , 使得  $g'(\xi_1) = 0$ ,  $\exists \xi_2 \in (c, 1)$ , 使得  $g'(\xi_2) = 0$ , 再由 Rolle 中值定理知  $\exists \eta \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 1)$ , 使得  $g''(\eta) = 0 \Rightarrow f''(\eta) + 6 = 0 \Rightarrow f''(\eta) < -2$ .

**例 3.2.27.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续且单调递增, 证明  $\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$ .

证法一 要证不等式成立, 即要证  $\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x)dx \geq 0$ , 因为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调递增, 所以

$$\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \left(f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geq 0$$

两边积分, 得  $\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \left(f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) dx \geq 0$ , 而

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = 0$$

所以  $\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x)dx \geq 0$ , 故得证.

证法二 由第一积分中值定理,

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( x - \frac{a+b}{2} \right) f(x) dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left( x - \frac{a+b}{2} \right) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left( x - \frac{a+b}{2} \right) f(x) dx \\ &= f(\xi_1) \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left( x - \frac{a+b}{2} \right) dx + f(\xi_2) \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left( x - \frac{a+b}{2} \right) dx \\ &= \frac{(b-a)^2}{8} (f(\xi_2) - f(\xi_1)) \end{aligned}$$

其中  $\xi \in \left( a, \frac{a+b}{2} \right)$ ,  $\xi_2 \in \left( \frac{a+b}{2}, b \right)$ , 而  $f(x)$  单调递增  $\xi_1 < \xi_2$ , 所以  $f(\xi_1) < f(\xi_2)$ , 从而  $\int_a^b \left( x - \frac{a+b}{2} \right) f(x) dx \geq 0$ , 故得证.

## 第二积分中值定理

**定理 3.2.8 (第二积分中值定理 A).** 在  $[a, b]$  上, 若  $f(x)$  非负单调递减,  $g(x)$  可积, 则  $\exists \xi \in [a, b]$  使得

$$I = \int_a^b f(x) g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx.$$

**定理 3.2.9 (第二积分中值定理 B).** 在  $[a, b]$  上, 若  $f(x)$  非负单调递增,  $g(x)$  可积, 则  $\exists \xi \in [a, b]$  使得

$$I = \int_a^b f(x) g(x) dx = f(b) \int_\xi^b g(x) dx.$$

**定理 3.2.10 (第二积分中值定理 C).** 在  $[a, b]$  上, 若  $f(x)$  单调,  $g(x)$  可积, 则  $\exists \xi \in [a, b]$  使得

$$I = \int_a^b f(x) g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx.$$

**例 3.2.28.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{t} \cos t dt}{x}$ .

错解.

- (1) 直接使用 L'Hospital 法则.
- (2) 使用第一积分中值定理.

错因: 使用 L'Hospital 法则后极限振荡不存在, 故 L'Hospital 法则失效; 第一积分中值定理

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

其中  $f$  在  $[a, b]$  上连续,  $g$  在  $[a, b]$  上可导, 并且  $g$  不变号, 因为  $\cos t$  在  $[0, +\infty)$  周期性变号, 故不能使用积分中值定理.

法一: 对分子使用分部积分公式, 有

$$\int_0^x \sqrt{t} \cos t dt = \int_0^x \sqrt{t} d \sin t = \sqrt{t} \sin x \Big|_0^x - \int_0^x \sin t d \sqrt{t} \stackrel{\sqrt{t}=u}{=} \sqrt{x} \sin x - \int_0^{\sqrt{x}} \sin u^2 du$$

于是原极限可化为

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^{\sqrt{x}} \sin u^2 du = 0 - 0 = 0$$

其中  $\frac{1}{\sqrt{x}} \sin x \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow +\infty$ ) (无穷小量乘以有界量),  $\int_0^{+\infty} \sin u^2 du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  (Fresnel 积分).

法二: 运用第二积分中值定理:  $\int_a^b f(x) g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx$ , 其中  $f$  在  $[a, b]$  上单调,  $g$  在  $[a, b]$  上可积,  $\xi \in [a, b]$ , 于是原式可化为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left( 0 + \sqrt{x} \int_\xi^x \cos t dt \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_\xi^x \cos t dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \xi = 0 - 0 = 0$$

其中  $\frac{1}{\sqrt{x}} \sin x \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow +\infty$ ), 同理可得  $\frac{1}{\sqrt{x}} \sin \xi \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow +\infty$ ).

### 例 3.2.29. 试用第二积分中值定理证明例 3.2.27.

证 因为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调递增, 所以由第二积分中值定理知, 存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( x - \frac{a+b}{2} \right) f(x) dx &= f(a) \int_a^\xi \left( x - \frac{a+b}{2} \right) dx + f(b) \int_\xi^b \left( x - \frac{a+b}{2} \right) dx \\ &= f(a) \int_a^b \left( x - \frac{a+b}{2} \right) dx + (f(b) - f(a)) \int_\xi^b \left( x - \frac{a+b}{2} \right) dx \\ &= (f(b) - f(a)) \frac{(b-\xi)(\xi-a)}{2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

故得证.

## 3.2.5 定积分的几何应用

### 平面图形的面积

**定理 3.2.11 (平面图形面积公式).** 平面图形由曲线  $y_1 = f_1(x)$ ,  $y_2 = f_2(x)$  和直线  $x = a$ ,  $x = b$  ( $a < b$ ) 所围成, 那么围成的面积计算公式为:

$$A = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.$$

若由曲线  $r = r(\theta)$  ( $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ ) 围成, 则其面积为:

$$A = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\theta) d\theta.$$

**例 3.2.30.** 设封闭曲线  $L$  的极坐标方程为  $r = \cos 3\theta$  ( $-\frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6}$ ), 求  $L$  所围平面图形的面积.

所求平面图形的面积为

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos 6\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{12}.$$

**例 3.2.31 (2012 数一).** 已知曲线

$$L : \begin{cases} x = f(t) \\ y = \cos t \end{cases} \quad \left( 0 \leqslant t < \frac{\pi}{2} \right)$$

其中函数  $f(t)$  具有连续导数, 且  $f(0) = 0$ ,  $f'(t) > 0$  ( $0 < t < \frac{\pi}{2}$ ), 若曲线  $L$  的切线与  $x$  轴的交点到切点的距离恒为 1, 求函数  $f(t)$  的表达式, 并求以曲线  $L$  及  $x$  轴和  $y$  轴为边界的区域的面积.

### 旋转体的侧面积和体积

**定理 3.2.12 (旋转体的侧面积公式).** 由  $xOy$  平面上的曲线  $y = f(x)$  ( $a \leqslant x \leqslant b$ ) 绕  $x$  轴旋转而成的旋转曲面的面积为:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

**例 3.2.32.** 求抛物线的一段  $y = \sqrt{2x}$  ( $0 \leqslant x \leqslant 1$ ), 绕  $x$  轴旋转一周所得的旋转体体积以及所得旋转面的侧面积.

设旋转体体积为  $V$ , 旋转面的侧面积为  $S$ , 那么

$$V = \int_0^1 \pi y^2 dx = 2\pi \cdot \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = \pi$$

$$S = 2\pi \int_0^1 \sqrt{2x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx = \frac{2\pi}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}(3\sqrt{3}-1).$$

**定理 3.2.13 (旋转体的体积公式).** 由  $xOy$  平面上的曲线  $y = f(x)$  与直线  $x = a$ ,  $x = b$  以及  $x$  轴所围成的曲边梯形绕  $x$  轴旋转而成的旋转体体积为:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

绕  $y$  轴旋转而成的旋转体体积为:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

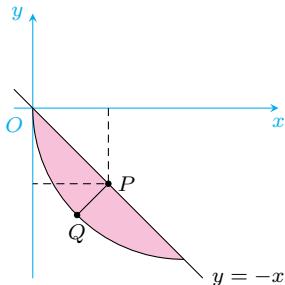
**例 3.2.33.** 设  $D : x^2 + y^2 \leq 4x$ ,  $y \leq -x$ , 在  $D$  的边界  $y = -x$  上任取一点  $P$ , 设  $P$  到原点的距离为  $t$ , 作  $PQ$  垂直  $y = -x$ , 交  $D$  的边界  $x^2 + y^2 = 4x$  于点  $Q$ .

(1) 试将  $P, Q$  的距离  $|PQ|$  表示为  $t$  的函数;

(2) 求  $D$  绕  $y = -x$  旋转一周的旋转体的体积.

(1)  $P$  点的坐标为  $\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{t}{\sqrt{t}}\right)$ , 所以直线  $PQ$  的方程为

$$y = x - \sqrt{2} (0 \leq t \leq 2\sqrt{2})$$



由  $\begin{cases} y = x - \sqrt{2}t \\ x^2 + y^2 = 4x \end{cases}$  解得点  $Q$  的横坐标为

$$x_Q = 1 + \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{4 + 4\sqrt{2}t - 2t^2}$$

$$\text{所以 } |PQ| = \sqrt{2} \left( \frac{t}{\sqrt{2}} - x_Q \right) = \sqrt{2} \left( \frac{1}{2}\sqrt{4 + 4\sqrt{2}t - 2t^2} - 1 \right).$$

(2) 所求旋转体体积为

$$V = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} |PQ|^2 dt = 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2}\sqrt{4 + 4\sqrt{2}t - 2t^2} - 1 \right)^2 dt$$

$$= \frac{20}{3}\sqrt{2}\pi - 2\sqrt{2}\pi^2.$$

**例 3.2.34.** 求曲线  $y = e^{-x}\sqrt{\sin x}$  ( $x \geq 0$ ) 与  $x$  轴围成区域绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体体积.

由曲线可知定义域  $x \in [2n\pi, (2n+1)\pi]$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), 那么体积为

$$V_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \pi y^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \pi e^{-2x} \sin x dx = -\frac{\pi}{5} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2x} (2 \sin x + \cos x) \Big|_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}$$

$$= \frac{\pi}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-(4n+2)\pi} + e^{-4n\pi}) = \frac{\pi}{5} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\pi} = \frac{\pi}{5} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2n\pi}}{1 - e^{-2\pi}} = \frac{\pi}{5(1 - e^{-2\pi})}.$$

### 平面曲线的弧长

**定理 3.2.14 (平面曲线弧长公式).** 若平面曲线的方程为  $y = f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ), 则  $x$  介于  $a$  与  $b$  之间的曲线弧长为:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

若方程由极坐标给出:  $r = r(\theta)$  ( $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ), 则  $\theta$  介于  $\alpha$  与  $\beta$  之间的曲线弧长为:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta.$$

若方程由参数方程给出:  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ), 则  $t$  介于  $\alpha$  与  $\beta$  之间的曲线弧长为:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

**例 3.2.35.** 计算  $\int_L |y| ds$ , 其中  $L$  为双纽线  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  ( $a > 0$ ).

令  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$  代入直角坐标系方程, 得  $r^2 = a^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = a^2 \cos 2\theta$ , 由  $r = 0$  得  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , 从而双纽线在第一象限部分的方程为  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ , 并且

$$ds = \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta = \sqrt{a^2 \cos 2\theta + \frac{a^4 \sin^2 2\theta}{r^2}} d\theta = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta$$

由对称性  $\int_L |y| ds = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \sin \theta \cdot \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta = 4a^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

**例 3.2.36 (2010 数二).** 当  $0 \leq \theta \leq \pi$  时, 求对数螺线  $r = e^\theta$  的弧长.

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta = \sqrt{2} \int_0^{\pi} e^\theta d\theta = \sqrt{2}(e^\pi - 1).$$

**例 3.2.37 (2011 数一).** 求曲面  $y = \int_0^x \tan t dt$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ) 的弧长  $s$ .

因为  $y' = \tan x$ , 所以

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

**例 3.2.38 (2019 数二).** 求曲线  $y = \ln \cos x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ ) 的弧长.

$$\text{与例题 3.2.37 同样地, } s = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \frac{1}{2} \ln 3.$$

**例 3.2.39.** 点  $P$  在曲线  $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}], a > 0$  上两点  $A(a, 0)$  与  $B(0, a)$  之间, 并且曲线  $BP$  的长度是曲线  $AP$  长度的 3 倍, 求  $P$  点坐标.

设  $P$  点坐标为  $(a \cos^3 t_0, a \sin^3 t_0)$ , 并且弧微分

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \sqrt{(-3a \cos^2 t \cdot \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cdot \cos t)^2} dt = \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t} dt = \frac{3a}{2} |\sin 2t| dt$$

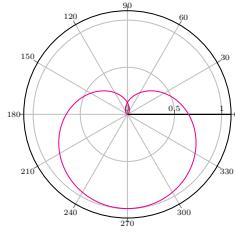
则曲线  $AP$  的长度是曲线  $AB$  长度的  $\frac{1}{4}$ , 因此有

$$\int_0^{t_0} ds = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ds \Rightarrow \int_0^{t_0} \sin 2t dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt \Rightarrow \cos 2t_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{6}$$

于是  $P$  点坐标为  $\left(\frac{3\sqrt{3}a}{8}, \frac{a}{8}\right)$ .

**例 3.2.40.** 求曲线弧  $r = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$  ( $a > 0$ ) 的全长.

**错解.** 弧微分  $ds = \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta = \sqrt{a^2 \sin^6 \frac{\theta}{3} + a^2 \sin^4 \frac{\theta}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3}} d\theta = a \sin^2 \frac{\theta}{3} d\theta$ , 那么弧长为



$$l = \int_0^{2\pi} a \sin^2 \frac{\theta}{3} d\theta = a \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\theta}{3}\right) d\theta = \frac{a}{2} \left(\theta - \frac{3}{2} \sin \frac{2\theta}{3}\right) \Big|_0^{2\pi} = \pi a + \frac{3\sqrt{3}a}{8}.$$

**错因:**  $\theta$  的变化范围并不是  $[0, 2\pi]$ , 事实上, 当  $\theta = 0$  时  $r = 0$ , 当  $\theta$  从 0 开始增大时,  $r$  也从 0 开始增大, 当  $\theta = \frac{3\pi}{2}$  时,  $r = a$  达到最大; 根据对称性, 当  $\theta$  继续增大时,  $\theta$  减少, 当  $\theta$  增大到  $3\pi$  时,  $r$  减少到 0, 此时, 点  $(r, \theta)$  的轨迹已经形成一条封闭曲线, 可见,  $\theta$  的变化范围是  $[0, 3\pi]$ .

图 3.2.1

$$l = \int_0^{3\pi} a \sin^2 \frac{\theta}{3} d\theta = \frac{a}{2} \left(\theta - \frac{3}{2} \sin \frac{2\theta}{3}\right) \Big|_0^{3\pi} = \frac{3a\pi}{2}.$$

**例 3.2.41.** 已知星形线  $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} (a > 0)$  求:

- (1) 它所围的面积;
- (2) 它的弧长;
- (3) 它绕  $x$  轴旋转而成的旋转体的表面积.

$$(1) S = 4 \int_0^a y dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t (-3a \cos^2 t \sin t) dt = 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

$$(2) L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t d\theta = 6a.$$

$$(3) S = 2 \int_0^a 2\pi y \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx = 4\pi a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot 3a \cos t \sin t dt = \frac{12}{5} \pi a^2.$$

**例 3.2.42.** 设心形线为  $r = a(1 + \cos \theta)$  ( $a > 0$ ), 试用定积分计算:

- (1) 它所围成的图形的面积  $A$ ;
- (2) 它的长度  $L$ ;
- (3) 它所围成的图形  $D$  的重心 ( $D$  的密度为 1);
- (4) 它自身的重心  $C$ ;
- (5) 它绕极轴旋转所得闭曲面所围立体的体积  $V$ ;
- (6) 它绕极轴旋转所得闭曲面的面积  $S$ ;
- (7) 它对极轴的转动惯量  $I$  (线密度为 1).

$$(1) A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi a^2 (1 + \cos \theta)^2 d\theta = a^2 \int_0^\pi (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \frac{3\pi}{2} a^2.$$

$$(2) L = 2 \int_0^\pi \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta = 2\sqrt{2}a \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta = 4a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a.$$

(3) 设重心坐标  $C$  为  $(\xi, \eta)$ ,  $D$  在极轴上方的一半区域为  $D_1$ , 由对称性知  $\eta = 0$ , 下求  $\xi$ ,  
法一: 用静力矩微元法, 这里从略.

法二: 利用二重积分求  $\xi$ ,

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{M} \iint_{D_1} \rho x d\sigma = \frac{1}{M} \int_0^\pi d\theta \int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2 \cos \theta dr = \frac{a^3}{3M} \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^3 \cos \theta d\theta \\ &= \frac{a^3}{3M} \int_0^\pi (\cos \theta + 3 \cos^2 \theta + 3 \cos^3 \theta + \cos^4 \theta) d\theta = \frac{5a}{6} \end{aligned}$$

$$\text{其中 } M = \frac{1}{2} A \cdot \rho = \frac{1}{2} A = \frac{3\pi}{4} a^2.$$

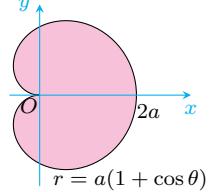


图 3.2.2

(4) 设心形线  $\Gamma$  的上半条为  $\Gamma_1$ , 设  $\Gamma, \Gamma_1$  的重心分别为  $(\xi, \eta)$  和  $(\xi_1, \eta_1)$ , 由对称性知  $\xi = \xi_1, \eta = \eta_1 = 0$ , 因为  $\Gamma_1$  对  $y$  轴的静力矩微元为

$$dM_y = r(\theta) \cos \theta \cdot \rho ds = r(\theta) \cos \theta \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta$$

从而, 有

$$\begin{aligned} M_y &= \int_0^\pi dM_y = \int_0^\pi r(\theta) \cos \theta \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta = \sqrt{2}a^2 \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^{\frac{3}{2}} \cos \theta d\theta \\ &= 4a^2 \int_0^\pi \left( 2 \cos^5 \frac{\theta}{2} - \cos^3 \frac{\theta}{2} \right) d\theta \xrightarrow{\frac{\theta}{2}=t} 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos^5 t - \cos^3 t) dt = \frac{16a^2}{5} \end{aligned}$$

由有 (2) 知,  $\Gamma$  的长度为  $8a$ , 于是  $\Gamma$  的质量为  $M = \frac{L}{2} \cdot \rho = 4a$  所以  $\xi = \frac{M_y}{M_1} = \frac{4a}{5}$ , 从而知  $C\left(\frac{4a}{5}, 0\right)$ .

(5) 由  $r = a(1 + \cos \theta)$  可得

$$x = a(1 + \cos \theta) \cos \theta = a \left[ \left( \cos \theta + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] \geq -\frac{a}{4}, \quad y = a(1 + \cos \theta) \sin \theta$$

体积元  $dV = \pi y^2(\theta) dx(\theta)$ , 于是

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^0 \pi y^2(\theta) dx(\theta) - \int_{\frac{2\pi}{3}}^\pi \pi y^2(\theta) dx(\theta) = \int_\pi^0 y^2(\theta) dx(\theta) \\ &= \int_\pi^0 \pi [a(1 + \cos \theta)]^2 [a(1 + \cos \theta) \cos \theta]' d\theta = \pi a^3 \int_0^\pi \sin^3 \theta (1 + \cos \theta)^2 (1 + 2 \cos \theta) d\theta \\ &\xrightarrow{\cos \theta=t} \pi a^3 \int_1^{-1} (t^2 - 1)(1+t)^2 (1+2t) dt = \pi a^3 \int_{-1}^1 (1+4t^2-5t^4) dt = \frac{8\pi}{3} a^3. \end{aligned}$$

(6) 因为  $dS = 2\pi y(\theta) ds(\theta) = 2\pi r(\theta) \sin \theta \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta$ , 所以, 有

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi 2\pi r(\theta) \sin \theta \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta = 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^\pi \sin \theta (1 + \cos \theta)^{\frac{3}{2}} d\theta \\ &= -2\sqrt{2}\pi a^3 \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^{\frac{3}{2}} d(1 + \cos \theta) = \frac{32\pi}{5} a^2. \end{aligned}$$

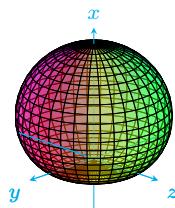


图 3.2.3

(7) 因为  $dI = y^2(\theta) \rho ds(\theta) = r^2(\theta) \sin^2 \theta \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta$ , 所以, 有

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^\pi r^2(\theta) \sin^2 \theta \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta = 2\sqrt{2}a^3 \int_0^\pi \sin^2 \theta (1 + \cos \theta)^{\frac{5}{2}} d\theta \\ &= 64a^3 \int_0^\pi \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^7 \frac{\theta}{2} d\theta \xrightarrow{\frac{\theta}{2}=t} 128a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^7 t - \cos^9 t) dt = \frac{2048}{315} a^3. \end{aligned}$$

### 3.2.6 定积分的物理应用

#### 变力所做的功

**定理 3.2.15 (变力的功).** 若质点沿变力  $F(x)$  方向从  $x = a$  到  $x = b$  做直线运动, 则变力所做的功为:

$$W = \int_a^b F(x)dx.$$

#### 物体的质量与重心

**定理 3.2.16 (质量与重心坐标公式).** 若  $f(x)$  代表细棒的质量密度, 细棒所占区间为  $[a, b]$ , 则细棒的质量为:

$$M = \int_a^b f(x)dx.$$

重心坐标为:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_a^b xf(x)dx.$$

### 3.2.7 定积分综合性问题

#### 积分等式命题的证明

**例 3.2.43.** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有二阶导数, 且  $f''(x)$  在  $[a, b]$  上黎曼可积, 证明:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \int_a^x (x - t)f''(t)dt, \forall x \in [a, b].$$

证法一 由  $N-L$  公式,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)dt = f(a) + \int_a^x f'(a)dt + \int_a^x dt \int_a^t f''(u)du \\ &= f(a) + f'(a)(x - a) + \int_a^x dt \int_t^x f''(u)du = f(a) + f'(a)(x - a) + \int_a^x (x - t). \end{aligned}$$

证法二 即证  $\int_a^x (x - t)f''(t)dt = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ , 由表格积分法:

$$\begin{array}{c|ccc} f' & | & (x-t) & 1 & 0 \\ \hline & | & +\searrow & -\searrow & \\ \int & | & f''(t) & f'(t) & f(t) \end{array}$$

于是  $\int_a^x (x - t)f''(t)dt = [(x - t)f'(t) - f(t)]_a^x = -f(x) - (x - a)f'(a) + f(a)$ , 整理得证.

**例 3.2.44.** 设  $f(x) \in D(0, 1)$ ,  $f(0) = f(1) = -2$ ,  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ , 证明:  $\exists \xi \in (0, 1)$ , 使得

$$f'(\xi) - f(\xi) = \xi.$$

证 令  $F(x) = e^{-x}(f(x) + x + 1)$ , 有  $F(0) = -1$ ,  $F(1) = 0$ , 因为  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ , 由积分中值定理知,  $\exists \eta \in (0, 1)$ , 使得

$$\int_0^1 f(x)dx = f(\eta) \int_0^1 dx = f(\eta) = 0$$

而  $F(\eta) = e^{-\eta}(f(\eta) + \eta + 1) > 0$ , 因此  $\exists \xi \in (0, 1)$ , 使得  $F(x) \leq F(\xi)$ , 即  $F(x)$  的最大值一定在区间  $(0, 1)$  内取到, 由 Fermat 引理知,  $F'(\xi) = 0$ , 即

$$-\frac{d}{dx}(e^{-x}(f(x) + x + 1))|_{x=\xi} = f'(\xi) - f(\xi) = \xi.$$

**例 3.2.45.** 设  $f(x)$  在  $[2, 4]$  上二阶连续可导,  $f(3) = 0$ , 证明:  $\exists \xi \in (2, 4)$ , 使得  $f''(\xi) = 3 \int_2^4 f(x)dx$ .

证 构造  $F(x) = \int_2^x f(t)dt$ , 那么将  $F(2), F(4)$  分别在  $x = 3$  处 Taylor 展开, 有

$$\begin{aligned} F(2) &= F(3) + F'(3)(2-3) + \frac{1}{2!}F''(3)(2-3)^2 + \frac{1}{3!}F'''(\xi_1)(2-3)^3 \\ F(4) &= F(3) + F'(3)(4-3) + \frac{1}{2!}F''(3)(4-3)^2 + \frac{1}{3!}F'''(\xi_2)(4-3)^3 \end{aligned}$$

注意到  $F(2) = F'(3) = 0$ , 那么上式化为  $\begin{cases} 0 = F(3) + \frac{1}{2}F''(3) - \frac{1}{6}F'''(\xi_1) \\ F(4) = F(3) + \frac{1}{2}F''(3) + \frac{1}{6}F'''(\xi_2) \end{cases}$  即

$$F(4) = \frac{1}{6}(F'''(\xi_1) + F'''(\xi_2))$$

因为  $F'''(x) = f''(x)$  在  $[2, 4]$  上连续, 故  $F'''(x)$  在  $[2, 4]$  上有最大值  $M$  和最小值  $m$ , 使得

$$m \leq \frac{1}{2}(F'''(\xi_1) + F'''(\xi_2)) \leq M$$

又由连续函数的介值定理知  $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (2, 4)$ , 使得

$$F'''(\xi) = \frac{1}{2}(F'''(\xi_1) + F'''(\xi_2))$$

故  $F(4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(F'''(\xi_1) + F'''(\xi_2)) = \frac{1}{3}F'''(\xi)$ , 则

$$F'''(\xi) = 3F(4) \Rightarrow f''(\xi) = 3 \int_2^4 f(x)dx.$$

**例 3.2.46.** 设  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  二阶导函数连续, 证明:  $\exists \xi \in [-1, 1]$ , 使得

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx = \frac{1}{3}[2f'(\xi) + \xi f''(\xi)].$$

证 构造  $F(x) = xf(x)$ , 那么  $F(x)$  在  $[-1, 1]$  二阶导函数连续, 并且

$$F'(x) = f(x) + xf'(x), \quad F''(x) = 2f'(x) + xf''(x)$$

又由 Taylor 展开得,

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2!}F''(\theta x)x^2 \quad \theta \in (0, 1)$$

且  $F(0) = 0, F'(0) = f(0)x$ , 于是  $F(x) = f(0)x + \frac{1}{2}F''(\theta x)x^2$ , 两边对  $x$  积分, 则有,

$$\int_{-1}^1 F(x)dx = \int_{-1}^1 f(0)x dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F''(\theta x)x^2 dx = \frac{F''(\theta x)}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx$$

记  $m = \min_{0 \leq x \leq 1} F''(x)$ ,  $M = \max_{0 \leq x \leq 1} F''(x)$ , 于是

$$m \int_{-1}^1 x^2 dx \leq \int_{-1}^1 F''(\theta x)x^2 dx \leq M \int_{-1}^1 x^2 dx$$

即  $\frac{2}{3}m \leq \int_{-1}^1 F''(\theta x)x^2 dx \leq \frac{2}{3}M$ , 因此有  $m \leq \int_{-1}^1 F(x)dx \leq M$ , 对  $F''(x)$  利用连续函数的介值定理, 即  $\exists \xi \in [-1, 1]$ , 使得  $3 \int_{-1}^1 F(x)dx = F''(\xi)$ , 即得证.

**例 3.2.47.** 已知  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导,  $f(a) = f(b) = 0$ , 试证:  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{12}f''(\xi)(a-b)^3.$$

证 令  $F(x) = \int_a^x f(t)dt - \frac{1}{2}(x-a)f(x)$ ,  $G(x) = -\frac{1}{12}(x-a)^3$ , 在  $[a, b]$  上连续两次应用 Cauchy 中值定理,

$$\begin{aligned} \frac{\int_a^b f(x)dx - 0}{-\frac{1}{12}(b-a)^3 - 0} &= \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} \xrightarrow[a \leq \xi_1 \leq b]{Cauchy \text{ 中值定理}} \frac{F''(\xi_1)}{G'(\xi_1)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}f(\xi_1) - \frac{1}{2}(\xi_1 - a)f'(\xi) - 0}{-\frac{1}{4}(\xi_1 - a)^2 - 0} \xrightarrow[a \leq \xi \leq \xi_1]{Cauchy \text{ 中值定理}} \frac{-\frac{1}{2}f''(\xi)(\xi - a)}{-\frac{1}{2}(\xi - a)} = f''(\xi). \end{aligned}$$

此式同乘  $-\frac{1}{12}(b-a)^3 = \frac{1}{12}(b-a)^3$ , 即得所求.

**例 3.2.48.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导, 证明至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(b)(b-a) - f'(b)\frac{(b-a)^2}{2} + \frac{1}{6}(b-a)^3f''(\xi).$$

证 令  $k$  为使  $\int_a^b f(x)dx = f(b)(b-a) - f'(b)\frac{(b-a)^2}{2} + \frac{1}{6}(b-a)^3k$  成立的实常数, 构造辅助函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt - f(x)(x-a) + f'(x)\frac{(x-a)^2}{2} - \frac{1}{6}(x-a)^3k$$

则  $F(a) = F(b) = 0$ , 故由 Rolle 定理知  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使  $F'(\xi) = 0$ , 即

$$F'(\xi) = f''(\xi)\frac{(\xi-a)^2}{2} - \frac{1}{2}(\xi-a)^2k = 0$$

得证  $k = f''(\eta)$ , 故得证.

**例 3.2.49.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上具有二阶连续的导数, 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi).$$

证法一 将  $f(x)$  在  $\frac{a+b}{2}$  处进行 Taylor 展开, 有

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

因为  $f''(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 所以存在最小值  $m$  和最大值  $M$ , 使  $\forall x \in [a, b]$ ,  $m \leq f''(x) \leq M$ , 于是

$$m \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx \leq \int_a^b f''(\xi_1) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx \leq M \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

从而  $m \leq \frac{\int_a^b f''(\xi_1) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx}{\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx} \leq M$ , 故由介值定理知, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f''(\xi) = \frac{\int_a^b f''(\xi_1) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx}{\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx}$$

即得证  $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi)$ .

证法二 令  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , 将  $F(x)$  在  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  处 Taylor 展开得

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{F''(x)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{F'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3$$

其中  $\xi$  介于  $x_0$  与  $x$  之间, 将  $x = a$  和  $x = b$  代入上式, 并相减得

$$F(b) - F(a) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2}$$

其中  $a < \xi_2 < \frac{a+b}{2} < \xi_1 < b$ , 不妨设  $f''(\xi_1) \leq f''(\xi_2)$ , 则  $f''(x_1) \leq \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2} \leq f''(\xi_2)$ , 由导函数  $f''(x)$  的 Darboux 定理或  $f''(x)$  的连续性及介值定理知,  $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2)$  或  $(\xi_2, \xi_1) \subset (a, b)$ , 使  $f''(\xi) = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2}$ , 故  $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi)$ .

证法三 设  $k$  为使  $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 k$  成立的实数, 要证结论成立, 只需证  $k = f''(\xi)$ , 为此构造辅助函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt - (x-a)f\left(\frac{a+x}{2}\right) - \frac{1}{24}(x-a)^3 k$$

则  $F(a) = F(b) = 0$ , 故由 Rolle 定理,  $\exists \eta \in (a, b)$ , 使  $F'(\eta) = 0$ , 即

$$f(\eta) - f\left(\frac{a+\eta}{2}\right) - \frac{\eta-a}{2} f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right) - \frac{k}{8}(\eta-a)^2 = 0$$

又将  $f(\eta)$  在  $x = \frac{a+\eta}{2}$  处进行 Taylor 展开, 有

$$f(\eta) = f\left(\frac{a+\eta}{2}\right) + f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right) \frac{\eta-a}{2} + \frac{f''(\xi)}{2!} \left(\frac{\eta-a}{2}\right)^2$$

其中  $\xi \in \left(\frac{a+\eta}{2}, \eta\right) \subset (a, b)$ , 比较上述两式, 得  $k = f''(\xi)$  故得证.

证法四 取  $\rho \equiv 1$ , 首先构造数值求积公式  $\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ , 使其具有尽可能高的代数精度, 为此, 取  $f(x) = 1$  使求积公式精确成立, 则有

$$A_0 = b - a$$

把  $A_0$  代入求积公式, 取  $f(x) = x$ , 代入验算知求积公式精确成立; 再取  $f(x) = x^2$ , 求积公式不精确成立, 故求积公式  $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  的代数精度为 1; 其次, 构造一次插值多项式

$$P_1\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), P'_1\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

那么  $W_2(x) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$  且不恒为 0, 又

$$K = \int_a^b W_2(x)dx = \frac{1}{12}(b-a)^3$$

那么至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot \frac{1}{12}(b-a)^3$$

即得待证等式.

**例 3.2.50.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上具有二阶连续的导数, 证明存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3.$$

证法一 设  $k$  为使  $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{1}{12}k(b-a)^3$  成立的实常数, 则证  $k = f''(\xi)$ , 为此构造辅助函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt - \frac{x-a}{2}(f(a) + f(x)) + \frac{1}{12}k(x-a)^3$$

那么  $F(a) = F(b) = 0$ , 由 Rolle 定理知,  $\exists \xi_1 \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi_1) = 0$ , 又

$$F'(x) = f(x) - \frac{1}{2}(f(x) + f(a)) - \frac{x-a}{2}f'(x) + \frac{1}{4}k(x-a)^2$$

并且注意到  $F'(a) = F'(\xi_1) = 0$ , 再由 Rolle 定理知,  $\exists \xi \in (a, \xi_1) \subset (a, b)$ , 使得  $F''(\xi) = 0$ , 并且

$$F''(\xi) = -\frac{\xi-a}{2}f''(\xi) + \frac{1}{2}k(\xi-a) = 0$$

即得证  $k = f''(\xi)$ .

证法二 取  $\rho(x) \equiv 1$ , 首先构造数值求积公式  $\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(a) + A_1 f(b)$ , 使其具有尽可能高的代数精度, 为此, 分别取  $f(x) = 1, x$  使求积公式精确成立, 则有

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = \frac{b-a}{2} \\ aA_0 + bA_1 = \frac{b^2-a^2}{2} \end{cases} \Rightarrow A_0 = A_1 = \frac{b-a}{2}$$

把  $A_0, A_1$  代入求积公式, 取  $f(x) = x^2$ , 代入验算知求积公式精确成立; 再取  $f(x) = x^3$ , 求积公式不精确成立, 故求积公式  $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$  的代数精度为 2; 其次, 构造二次插值多项式  $P_1(x)$ , 使满足

$$P_1(a) = f(a), P'_1(b) = f'(b)$$

那么  $W_2(x) = (x-a)(x-b) \geq 0$  且不恒为 0, 又

$$K = \int_a^b W_2(x)dx = -\frac{1}{6}(b-a)^3$$

那么至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot \frac{1}{6}(b-a)^3$$

即得待证等式.

**例 3.2.51.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有三阶连续的导数, 证明至少存在一点  $\eta \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{4} \left[ f(a) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) \right] + \frac{(b-a)^4}{216} f'''(\eta).$$

证 令  $k$  为使  $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{4} \left[ f(a) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) \right] + \frac{(b-a)^4}{216} k$  成立的实常数, 要证结论成立, 只需证  $k = f'''(\eta)$ , 为此, 将上式右端移到左端, 并将  $b$  改写为  $x$ , 构造辅助函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt - \frac{x-a}{4} \left[ f(a) + 3f\left(\frac{a+2x}{3}\right) \right] - \frac{(x-a)^4}{216} k, \quad x \in [a, b]$$

则  $F(a) = F(b) = 0$ ,  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续且可导, 由 Rolle 定理,  $\exists \xi_1 \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi_1) = 0$ , 又

$$F'(x) = f(x) - \frac{1}{4} \left[ f(a) + 3f\left(\frac{a+2x}{3}\right) \right] - \frac{x-a}{2} f'\left(\frac{a+2x}{3}\right) - \frac{(x-a)^3}{54} k$$

得  $F'(a) = F'(\xi_1) = 0$ , 故对  $F'(x)$  在  $[a, \xi_1]$  上用 Rolle 定理, 得  $\exists \xi_2 \in (a, \xi_1) \subset (a, b)$ , 使得  $F''(\xi_2) = 0$ , 即

$$F''(\xi_2) = f'(\xi_2) - f'\left(\frac{a+2\xi_2}{3}\right) - \frac{\xi_2-a}{3} f''\left(\frac{a+2\xi_2}{3}\right) - \frac{(\xi_2-a)^2}{18} k = 0$$

再将  $f'(\xi_2)$  在  $x = \frac{a+2\xi_2}{3}$  处 Taylor 展开, 有

$$f'(\xi_2) = f'\left(\frac{a+2\xi_2}{3}\right) + f''\left(\frac{a+2\xi_2}{3}\right) \left(\xi_2 - \frac{a+2\xi_2}{3}\right) + \frac{1}{2!} f'''(\eta) \left(\xi_2 - \frac{a+2\xi_2}{3}\right)^2$$

其中  $\eta \in \left(\frac{a+2\xi_2}{3}, a\right) \subset (a, b)$ , 比较上述两式, 即得  $k = f'''(\eta)$ , 故得证.

**例 3.2.52.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有三阶连续的导数, 证明至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{4} \left[ 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f(b) \right] - \frac{(b-a)^4}{216} f'''(\xi).$$

证 令  $k$  为使  $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{4} \left[ 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f(b) \right] - \frac{(b-a)^4}{216}k$  成立的实常数, 要证结论成立, 只需证  $k = f'''(\eta)$ , 为此, 构造辅助函数

$$F(x) = \int_x^b f(t)dt - \frac{b-x}{4} \left[ 3f\left(\frac{2x+b}{3}\right) + f(b) \right] + \frac{(b-x)^4}{216}k$$

则  $F(a) = F(b) = 0$ ,  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续且可导, 由 Rolle 定理,  $\exists \xi_1 \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi_1) = 0$ , 又

$$F'(x) = -f(x) + \frac{1}{4} \left[ 3f\left(\frac{2x+b}{3}\right) + f(b) \right] - \frac{b-x}{2} f'\left(\frac{2x+b}{3}\right) - \frac{(b-x)^3}{54}k$$

得  $F'(\xi_1) = F'(b) = 0$ , 故对  $F'(x)$  在  $[\xi_1, b]$  上用 Rolle 定理, 得  $\exists \xi_2 \in (\xi_1, b) \subset (a, b)$ , 使得  $F''(\xi_2) = 0$ , 即

$$F''(\xi_2) = -f'(\xi_2) + f'\left(\frac{2\xi_2+b}{3}\right) - \frac{b-\xi_2}{3} f''\left(\frac{2\xi_2+b}{3}\right) + \frac{(b-\xi_2)^2}{18}k$$

再将  $f'(\xi_2)$  在  $x = \frac{2\xi_2+b}{3}$  处 Taylor 展开, 有

$$f'(\xi_2) = f'\left(\frac{2\xi_2+b}{3}\right) + f''\left(\frac{2\xi_2+b}{3}\right)\left(\xi_2 - \frac{2\xi_2+b}{3}\right) + \frac{1}{2!} f'''(\eta)\left(\xi_2 - \frac{2\xi_2+b}{3}\right)^2$$

其中  $\eta \in \left(\frac{2\xi_2+b}{3}\right) \subset (a, b)$ , 比较上述两式, 即得  $k = f'''(\eta)$ , 故得证.

**例 3.2.53.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上具有四阶连续导数, 证明存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi).$$

证法一 令  $\begin{cases} a = c-h \\ b = c+h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{a+b}{2} \\ h = \frac{b-a}{2} \end{cases}$  那么原式等价于

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x)dx = \frac{h}{3} [f(c-h) + 4f(c) + f(c+h)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

设  $k$  为使上式成立的实常数, 并构造

$$F(x) = \int_{c-x}^{c+x} f(t)dt - \frac{x}{3} [f(c-x) + 4f(c) + f(c+x)] + \frac{x^5}{90} k$$

下证  $k = f^{(4)}(\xi)$ , 因为  $F(0) = F(x) = 0$ , 由 Rolle 定理得,  $\exists \xi_1 \in (0, x)$ , 使得  $F'(\xi_1) = 0$  又

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(c+x) + f(c-x) - \frac{1}{3} [f(c-x) + 4f(c) + f(c+x)] - \frac{x}{3} [-f'(c-x) + f'(c+x)] + \frac{x^4}{18} k \\ &= \frac{2}{3} [f(c+x) + f(c-x)] + \frac{x}{3} [f'(c-x) - f'(c+x)] + \frac{x^4}{18} k - \frac{4}{3} f(c) \end{aligned}$$

因为  $F'(0) = F'(\xi_1)$ , 由 Rolle 定理得,  $\exists \xi_2 \in (0, \xi_1)$ , 使得  $F''(\xi_2) = 0$ , 且

$$\begin{aligned} F''(x) &= \frac{2}{3} [f'(c+x) - f'(c-x)] + \frac{1}{3} [f'(c-x) - f'(c+x)] + \frac{x}{3} [-f''(c-x) - f''(c+x)] + \frac{2x^3}{9} k \\ &= \frac{1}{3} [f'(c+x) - f'(c-x)] - \frac{x}{3} [f''(c-x) + f''(c+x)] + \frac{2x^3}{9} k \end{aligned}$$

又因为  $F''(0) = F''(\xi_2)$ , 由 Rolle 定理得,  $\exists \xi_3 \in (0, \xi_2)$ , 使得  $F'''(\xi_3) = 0$ , 且

$$\begin{aligned} F'''(x) &= \frac{1}{3} [f''(c+x) + f''(c-x)] - \frac{1}{3} [f''(c-x) + f''(c+x)] - \frac{x}{3} [-f'''(c-x) + f'''(c+x)] + \frac{2x^2}{3} k \\ &= \frac{x}{3} [f'''(c-x) - f'''(c+x)] + \frac{2x^2}{3} k \end{aligned}$$

由 Lagrange 中值定理得,  $\exists \xi \in (c-\xi_3, c+\xi_3)$ , 使得  $f'''(c-\xi_3) - f'''(c+\xi_3) = -2\xi_3 f^{(4)}(\xi)$ , 那么

$$-\frac{2}{3} \xi_3^2 f^{(4)}(\xi) + \frac{2}{3} \xi_3^2 k = 0 \Rightarrow k = f^{(4)}(\xi)$$

得证  $k = f^{(4)}(x)$ , 即原命题成立.

**证法二** 取  $\rho(x) \equiv 1$ , 首先构造数值求积公式  $\int_a^b f(x)dx \approx A_0 \cdot f(a) + A_1 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + A_2 \cdot f(b)$ , 使其具有尽可能高的代数精度, 为此, 分别取  $f(x) = 1, x, x^2$  使求积公式精确成立, 则有

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = \frac{b-a}{b^2-a^2} \\ aA_0 + \frac{a+b}{2}A_1 + bA_2 = \frac{2}{b^3-a^3} \\ a^2A_0 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2A_1 + b^2A_2 = \frac{3}{b^3-a^3} \end{cases}$$

那么有增广矩阵

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} : \mathbf{B}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & b-a \\ a & \frac{a+b}{2} & b & : & \frac{b^2-a^2}{2} \\ a^2 & \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 & b^2 & : & \frac{b^3-a^3}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-ar_1]{r_3-a^2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & b-a \\ 0 & \frac{b-a}{2} & b-a & : & \frac{(-b+a)^2}{2} \\ 0 & \frac{(b+a)^2-a^2}{4} & b^2-a^2 & : & \frac{(-b+a)^2(b+2a)}{3} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3-\frac{2[\frac{1}{4}(a+b)^2-a^2]}{b-a}r_2]{r_3 \times \frac{2}{(a-b)^2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & b-a \\ 0 & \frac{b-a}{2} & b-a & : & \frac{(-b+a)^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{b-a}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+(a-b)r_3]{r_1-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & : & \frac{(-5)(-b+a)}{6} \\ 0 & \frac{b-a}{2} & 0 & : & \frac{(-b+a)^2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{b-a}{6} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_2 \times \frac{2}{b-a}]{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & \frac{b-a}{6} \\ 0 & 1 & 0 & : & \frac{(-2)(-b+a)}{3} \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{b-a}{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

取  $f(x) = x^3$ , 代入验算知求积公式精确成立; 再令  $f(x) = x^4$ , 求积公式不精确成立, 于是

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

其次, 构造三次插值多项式  $P_3(x)$ , 使满足

$$P_3(a) = f(a), P_3\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), P_3(b) = f(b), P'_3(b) = f'(b)$$

那么  $W_4(x) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)^2 \geq 0$  且不恒为 0, 又

$$K = \int_a^b W_4(x)dx = -\frac{1}{120}(b-a)^5$$

那么至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot \frac{(b-a)^5}{120}$$

即得待证等式.

**例 3.2.54.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上三阶可导, 证明至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3}(2f(a) + f(b)) + \frac{(b-a)^2}{6}f'(a) - \frac{f'''(\xi)}{72}(b-a)^4.$$

**证** 取  $\rho \equiv 1$ , 首先构造数值求积公式  $\int_a^b f(x)dx \approx A_0 \cdot f(a) + A_1 \cdot f(b) + B_0 \cdot f'(a)$ , 使其具有尽可能高的代数精度, 为此, 分别取  $f(x) = 1, x, x^2$  使求积公式精确成立, 则有

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = b-a \\ aA_0 + bA_1 + B_0 = \frac{b^2-a^2}{2} \\ a^2A_0 + b^2A_1 + 2aB_0 = \frac{b^3-a^3}{3} \end{cases}$$

那么有增广矩阵

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} : \mathbf{B}) &= \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & b-a \\ a & b & 1 & \frac{b^2-a^2}{2} \\ a^2 & b^2 & 2a & \frac{b^3-a^3}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_2-ar_1 \\ r_3-a^2r_1}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & b-a & 1 & \frac{1}{2}(-b+a)^2 \\ 0 & b^2-a^2 & 2a & \frac{1}{3}(-b+a)^2(b+2a) \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{\substack{r_3-\frac{b^2-a^2}{b-a}r_2 \\ r_3 \times \frac{1}{a-b}}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & b-a & 1 & \frac{1}{2}(-b+a)^2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6}(-b+a)^2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_2-r_3 \\ r_2 \times \frac{1}{b-a} \\ r_1-r_2}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3}(-2)(-b+a) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b-a}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6}(-b+a)^2 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

取  $f(x) = x^3$ , 代入验算知求积公式精确成立; 再令  $f(x) = x^4$ , 求积公式不精确成立, 于是

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3}(2f(a)+f(b))+\frac{(b-a)^2}{6}f'(a)$$

其次, 构造二次插值多项式  $P_2(x)$ , 使满足

$$P_2(a) = f(a), P'_2(a) = f'(a), P_2(b) = f(b)$$

那么  $W_3(x) = (x-a)^2(x-b) \leq 0$  且不恒为 0, 又

$$K = \int_a^b W_3(x)dx = -\frac{1}{12}(b-a)^4$$

那么至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3}(2f(a)+f(b))+\frac{(b-a)^2}{6}f'(a)-\frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot \frac{1}{12}(b-a)^4$$

即得待证等式.

**例 3.2.55.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上四阶可导, 证明至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))-\frac{(b-a)^2}{12}(f'(b)-f'(a))+\frac{f^{(4)}(\xi)}{720}(b-a)^5.$$

证法一 由定理 2.5.3, 以及插值定理知,  $f(x) = H_3(x) + R(x)$ , 其中

$$H_3(x) = \left(1+2\frac{x-a}{b-a}\right)\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^2 f(a) + \left(1+2\frac{x-b}{a-b}\right)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 f(b) + (x-a)\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^2 f'(a) + (x-b)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 f'(b)$$

以及

$$R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{720}(b-a)^4 x$$

并且可以证明

$$\int_a^b \left(1+2\frac{x-a}{b-a}\right)\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^2 dx = \int_a^b \left(1+2\frac{x-b}{a-b}\right)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 dx = \frac{b-a}{2}$$

以及

$$\int_a^b (x-a)\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^2 dx = -\int_a^b (x-b)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

于是

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b H_3(x)dx + \int_a^b R(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))-\frac{(b-a)^2}{12}(f'(b)-f'(a))+\frac{f^{(4)}(\xi)}{720}(b-a)^5.$$

证法二 取  $\rho \equiv 1$ , 首先构造数值求积公式  $\int_a^b f(x)dx \approx A_0 \cdot f(a) + A_1 \cdot f(b) + B_0 \cdot f'(a) + B_1 \cdot f'(b)$ , 使其具有尽可能高的代数精度, 为此, 分别取  $f(x) = 1, x, x^2, x^3$  使求积公式精确成立, 则有增广矩阵

$$(\mathbf{A} : \mathbf{B}) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & b-a \\ a & b & 1 & 1 & \frac{b^2-a^2}{2} \\ a^2 & b^2 & 2a & 2b & \frac{b^3-a^3}{3} \\ a^3 & b^3 & 3a^2 & 3b^2 & \frac{b^4-a^4}{4} \end{array} \right) \xrightarrow{i=1,2,3} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & b-a & 1 & 1 & \frac{(b-a)^2}{2} \\ 0 & b^2-a^2 & 2a & 2b & \frac{(b-a)^2(b+2a)}{3} \\ 0 & b^3-a^3 & 3a^2 & 3b^2 & \frac{(b^4-4a^3b+3a^4)}{4} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & b-a \\
0 & b-a & 1 & 1 & \vdots & \frac{(b-a)^2}{2} \\
0 & 0 & -b+a & b-a & \vdots & \frac{(b-a)^3}{6} \\
0 & 0 & -b^2-ab+2a^2 & 2b^2-ab-a^2 & \vdots & \frac{(b-a)^3(b+a)}{4}
\end{array} \\
\stackrel{r_3 - \frac{b^2-a^2}{b-a} r_2}{\rightarrow} \\
\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & b-a \\
0 & b-a & 1 & 1 & \vdots & \frac{(b-a)^2}{2} \\
0 & 0 & a-b & b-a & \vdots & \frac{(b-a)^3}{6} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{(b-a)^2}{12}
\end{array} \\
\stackrel{r_4 - \frac{2a^2-ab-b^2}{a-b} r_3}{\rightarrow} \\
\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & b-a \\
0 & b-a & 1 & 1 & \vdots & \frac{(b-a)^2}{2} \\
0 & 0 & a-b & b-a & \vdots & \frac{(b-a)^3}{6} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{(b-a)^2}{12}
\end{array} \\
\stackrel{r_4 \times \frac{1}{(a-b)^2}}{\rightarrow} \\
\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & b-a \\
0 & b-a & 0 & 0 & \vdots & \frac{(b-a)^2}{2} \\
0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{(b-a)^2}{12} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{(b-a)^2}{12}
\end{array} \\
\stackrel{r_3 \times \frac{1}{a-b}}{\rightarrow} \\
\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & b-a \\
0 & b-a & 0 & 0 & \vdots & \frac{(b-a)^2}{2} \\
0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{(b-a)^2}{12} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{(b-a)^2}{12}
\end{array} \\
\stackrel{r_2-r_3}{\rightarrow} \\
\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & b-a \\
1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{(b-a)^2}{2} \\
1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{(b-a)^2}{12} \\
1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{(b-a)^2}{12}
\end{array} \\
\stackrel{r_2 \times \frac{1}{b-a}}{\rightarrow} \\
\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & b-a \\
1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{(b-a)^2}{2} \\
1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{(b-a)^2}{12} \\
1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{(b-a)^2}{12}
\end{array}
\end{array}$$

取  $f(x) = x^4$ , 代入验算知求积公式精确成立; 再令  $f(x) = x^5$ , 求积公式不精确成立, 于是

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{(b-a)^2}{12}(f'(b) - f'(a))$$

其次, 构造三次插值多项式  $P_3(x)$ , 使满足

$$P_3^{(l)}(a) = f^{(l)}(a), P_3^{(l)}(b) = f^{(l)}(b) (l = 0, 1)$$

那么  $W_4(x) = (x-a)^2(x-b)^2 \geq 0$  且不恒为 0, 又

$$K = \int_a^b W_4(x)dx = \frac{1}{30}(b-a)^5$$

那么至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{(b-a)^2}{12}(f'(b) - f'(a)) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot \frac{1}{30}(b-a)^5$$

即得待证等式.

**例 3.2.56.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上具有连续导数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \right] = -\frac{b-a}{2}[f(b) - f(a)].$$

**证** 将区间  $[a, b]$  等分为  $n$  份, 记  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $x_k = a + kh$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , 则

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k))dx$$

由 Lagrange 中值定理,  $\exists \xi_k(x) \in (x, x_k)$ , 使得  $f(x) - f(x_k) = (x-x_k)f'(\xi_k(x))$ , 于是

$$I = -\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(\xi_k(x))(x_k - x)dx$$

由  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 故由最值定理知,  $\exists m_k, M_k \in [x_{k-1}, x_k]$ , 使得  $m_k \leq f'(\xi_k(x)) \leq M_k$ , 故

$$\frac{1}{2}m_k h^2 = m_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - x)dx \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(\xi_k(x))(x_k - x)dx \leq M_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - x)dx = \frac{1}{2}M_k h^2$$

即  $m_k \leq \frac{2}{h^2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(\xi_k(x))(x_k - x)dx \leq M$ , 又有介值定理  $\exists \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ , 使得

$$f'(\eta_k) = \frac{2}{h^2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(\xi_k(x))(x_k - x)dx \Rightarrow \frac{h^2}{2} f'(\eta_k) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(\xi_k(x))(x_k - x)dx$$

即

$$I = -\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(\xi_k(x))(x_k - x)dx = -\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{h^2}{2} f'(\eta_k) = -\frac{b-a}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f'(\eta_k) h$$

又因为  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 应用定积分的定义, 即得

$$I = -\frac{b-a}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f'(\eta_k) h = -\frac{b-a}{2} \int_a^b f'(x)dx = -\frac{b-a}{2} (f(b) - f(a)).$$

**例 3.2.57 (2012 东南大学).** 已知函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有二阶连续导数, 记

$$B_n = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{2i-1}{2} \cdot \frac{b-a}{n}\right),$$

试证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 B_n = \frac{(b-a)^2}{24} (f'(b) - f'(a)).$$

证 将  $[a, b]$  进行  $n$  等分,  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $x_0 = a, x_1 = a+h, \dots, x_i = a+ih, \dots, x_n = a+nh = b$ , 则

$$B_n = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[ f(x) - f\left(a + \frac{2i-1}{2} h\right) \right] dx$$

在  $[x_{i-1}, x_i]$  上应用  $f(x)$  在  $a + \frac{2i-1}{2} h$  处 Taylor 展开, 则在  $x$  与  $a + \frac{2i-1}{2} h$  之间必存在  $\xi_i$ , 使得

$$f(x) = f\left(a + \frac{2i-1}{2} h\right) + f'\left(a + \frac{2i-1}{2} h\right) \left(x - a - \frac{2i-1}{2} h\right) + \frac{1}{2} f''(\xi_i) \left(x - a - \frac{2i-1}{2} h\right)^2$$

于是有

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[ f'\left(a + \frac{2i-1}{2} h\right) \left(x - a - \frac{2i-1}{2} h\right) + \frac{1}{2} f''(\xi_i) \left(x - a - \frac{2i-1}{2} h\right)^2 \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(\xi_i) \left(x - a - \frac{2i-1}{2} h\right)^2 dx \end{aligned}$$

因为  $f''(x)$  在  $[x_{i-1}, x_i]$  上连续, 应用最值定理,  $f''(x)$  在  $[x_{i-1}, x_i]$  上必存在最大值  $M_i$  和最小值  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 于是

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(\xi_i) \left(x - a - \frac{2i-1}{2} h\right)^2 dx \leq M_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(x - a - \frac{2i-1}{2} h\right)^2 dx = \frac{M_i h^3}{12}$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(\xi_i) \left(x - a - \frac{2i-1}{2} h\right)^2 dx \geq m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(x - a - \frac{2i-1}{2} h\right)^2 dx = \frac{m_i h^3}{12}$$

则

$$m_i \leq \frac{12}{h^3} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(\xi_i) \left(x - a - \frac{2i-1}{2} h\right)^2 dx \leq M_i$$

又有介值定理, 必存在  $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 使得

$$\frac{12}{h^3} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(\xi_i) \left(x - a - \frac{2i-1}{2} h\right)^2 dx = f''(\eta_i)$$

由于  $f''(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 应用定积分的定义, 则有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 B_n &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{12} f''(\eta_i) h^3 = \frac{(b-a)^2}{24} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f''(\eta_i) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{(b-a)^2}{24} \int_a^b f''(x)dx = \frac{(b-a)^2}{24} (f'(b) - f'(a)). \end{aligned}$$

**例 3.2.58.** 设  $f(x) \in C^4[0, 1]$ , 且满足  $\int_0^1 f(x)dx + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)dx$ , 证明:  $\exists c \in (0, 1)$ , 使得  $f^{(4)}(c) = 0$ .

证 因为  $\int_0^1 f(x)dx \xlongequal{x=t+\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(t + \frac{1}{2}\right)dt$ ,  $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)dx \xlongequal{x=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)dt$ , 所以

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(t + \frac{1}{2}\right)dt - 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)dt + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

令  $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(-x + \frac{1}{2}\right)$ ,  $h(x) = g(x) - 4g\left(\frac{x}{2}\right)$ , 那么

$$h(0) = -3g(0) = -6f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}h(0)$$

那么

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(t + \frac{1}{2}\right)dt - 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)dt - \frac{1}{2}h(0) = 0 \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} h(t)dt - \frac{1}{2}h(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} h(t)dt = h(0)$$

因为  $m = \min_{x \in [0, 1]} h(x) \leq h(0) \leq \max_{x \in [0, 1]} h(x) = M$ , 所以  $\exists \xi_1 \in (0, \frac{1}{2})$ , 使得  $h'(\xi_1) = 0$ , 又

$$h'(x) = g'(x) - 2g'\left(\frac{x}{2}\right), g'(x) = f'\left(x + \frac{1}{2}\right) - f\left(-x + \frac{1}{2}\right)$$

所以  $h'(0) = 0 = h'(\xi_1)$ , 由 Rolle 定理知,  $\exists \xi_2 \in (0, \xi_1) \subset \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , 使得  $h''(\xi_2) = 0$ , 又

$$h''(x) = g''(x) - g''\left(\frac{x}{2}\right), g''(x) = f''\left(x + \frac{1}{2}\right) + f''\left(-x + \frac{1}{2}\right)$$

所以  $h''(\xi_2) = g''(\xi_2) = g''\left(\frac{\xi_2}{2}\right)$ , 由 Rolle 定理知,  $\exists \xi_3 \in \left(\frac{\xi_2}{2}, \xi_2\right) \subset \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , 使得  $g'''(\xi_3) = 0$ , 而

$$g'''(x) = f'''\left(x + \frac{1}{2}\right) - f'''\left(-x + \frac{1}{2}\right)$$

所以  $f'''\left(\xi_3 + \frac{1}{2}\right) = f'''\left(-\xi_3 + \frac{1}{2}\right)$ , 再由 Rolle 定理知,  $\exists c \in \left(-\xi_3 + \frac{1}{2}, \xi_3 + \frac{1}{2}\right) \subset (0, 1)$  使得  $f^{(4)}(c) = 0$ .

### 积分不等式命题的证明

**例 3.2.59.** 证明  $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi \leq \int_0^1 \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x - x^2}} dx \leq \pi$ .

证  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $\frac{3}{4} \leq x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leq 1$ , 所以

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} \leq \int_0^1 \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x-x^2}} dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_0^1 \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin(2x-1) \Big|_0^1 = \pi, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\pi \leq \int_0^1 \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x-x^2}} dx \leq \pi.$$

**例 3.2.60.** 证明:  $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2) dx > \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}$ .

证 令  $t = x^2$ , 则  $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ , 于是

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \sin \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int_0^\pi \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt + \underbrace{\int_\pi^{2\pi} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt}_{u=t-\pi} = \int_0^\pi \left( \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} - \frac{\sin t}{2\sqrt{t+\pi}} \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left( \frac{2}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t+\pi}} \right) \sin t dt$$

令  $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t+\pi}}$ ,  $t \in (0, \pi)$ , 那么  $g'(t) = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(t+\pi)^{-\frac{3}{2}} < 0$ , 则  $g(t)$  在  $[0, \pi]$  上单调递减, 所以  $g(t) > g_{min}(t) = g(\pi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , 则

$$f(x) > \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \int_0^\pi \sin t dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}.$$

**例 3.2.61.** 证明:  $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx < \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

证 只需证  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos t) dt < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin t) dt$ , 即证

$$\sin(\cos t) < \cos(\sin t) \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

因为在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内  $\cos x \searrow$ , 所以  $x > \sin x$ , 所以有  $\cos(\sin x) > \cos x > \sin(\cos x)$  得证.

**推论 3.2.3.** 证明:  $\frac{2}{\pi} < \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx < 1 < \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\pi} < \frac{\pi}{2}$ .

证 在  $(0, 1)$  内, 有  $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$ , 所以

$$\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx < \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx < \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

又  $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left(-\sqrt{1-x^2}\right)_0^1 = 1$ , 所以  $\frac{2}{\pi} < \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx < 1$ ; 又因为在  $(0, 1)$  内, 有  $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - 2\left(\frac{x}{\pi}\right)^2$ , 所以

$$1 < \frac{3\pi}{8} = \int_0^1 \frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx < \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\pi} < \frac{\pi}{2}$$

综上:  $\frac{2}{\pi} < \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx < 1 < \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\pi} < \frac{\pi}{2}$ .

**例 3.2.62.** 设  $a, b > 0$ , 函数  $f(x)$  在  $[-a, b]$  上非负可积, 且有  $\int_{-a}^b xf(x) dx = 0$ , 证明

$$\int_{-a}^b x^2 f(x) dx \leq ab \int_{-a}^b f(x) dx.$$

证 因为  $x \in [-a, b]$ , 所以  $(x+a)(x-b) \leq 0 \Rightarrow x^2 - ab \leq (b-a)x$ , 又  $f(x) \geq 0$ , 所以有

$$\int_{-a}^b (x^2 - ab) f(x) dx \leq \int_{-a}^b (b-a)x f(x) dx$$

又  $\int_{-a}^b xf(x) dx = 0$ , 进而得证  $\int_{-a}^b x^2 f(x) dx \leq ab \int_{-a}^b f(x) dx$ .

**例 3.2.63.** 设  $f(x)$  二阶可导, 且  $f''(x) \geq 0$ ,  $g(x)$  为连续函数,  $a \geq 0$ , 证明:

$$\frac{1}{a} \int_0^a f(g(x)) dx \geq f\left(\frac{1}{a} \int_0^a g(x) dx\right).$$

证 由  $f(x)$  在  $x = x_0$  处的 Taylor 展开,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x - x_0)^2$$

因为  $f''(\xi) \geq 0$ , 所以有  $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , 现令

$$x = g(x), x_0 = \frac{1}{a} \int_0^a g(x) dx$$

于是有

$$f(g(x)) \geq f\left(\frac{1}{a} \int_0^a g(x) dx\right) + f'\left(\frac{1}{a} \int_0^a g(x) dx\right)\left(g(x) - \frac{1}{a} \int_0^a g(x) dx\right)$$

对上式两边同时在  $[0, a]$  上积分, 则由积分的保序性, 有

$$\begin{aligned} \int_0^a f(g(x)) dx &\geq \int_0^a f\left(\frac{1}{a} \int_0^a g(x) dx\right) dx + \int_0^a f'\left(\frac{1}{a} \int_0^a g(x) dx\right)\left(g(x) - \frac{1}{a} \int_0^a g(x) dx\right) dx \\ &= af\left(\frac{1}{a} \int_0^a g(x) dx\right) + f'\left(\frac{1}{a} \int_0^a g(x) dx\right) \int_0^a \left(g(x) - \frac{1}{a} \int_0^a g(x) dx\right) dx = af\left(\frac{1}{a} \int_0^a g(x) dx\right) \end{aligned}$$

整理得证.

**例 3.2.64.** 设  $f : [0, 1] \rightarrow [-a, b]$  连续, 且  $\int_0^1 f^2(x) dx = ab$ , 证明  $0 \leq \frac{1}{b-a} \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$ .

证 因为  $-a \leq f(x) \leq b$ , 所以  $-\frac{a+b}{2} \leq f(x) - \frac{b-a}{2} \leq \frac{a+b}{2}$ , 两边积分得

$$0 \leq \int_0^1 \left(f(x) - \frac{b-a}{2}\right)^2 dx \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

即  $0 \leq \int_0^1 f^2(x) dx - (b-a) \int_0^1 f(x) dx + \frac{(b-a)^2}{4} \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ , 将  $\int_0^1 f^2(x) dx = ab$  代入, 并整理得

$$0 \leq (b-a) \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{(b+a)^2}{4} \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{b-a} \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2.$$

**例 3.2.65.** 设函数  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上连续,  $f(x) > 0$ , 证明  $e^{\int_0^1 \ln f(x) dx} \leq \int_0^1 f(x) dx$ .

证法一 将  $[0, 1]$   $n$  等分, 则  $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$ ,

$$\exp \int_0^1 \ln f(x) dx = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln f\left(\frac{i}{n}\right) = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[ \prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}}$$

由几何平均数  $\leq$  算术平均数, 得  $\left[ \prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$ , 故令  $n \rightarrow \infty$ , 由定积分定义得  $e^{\int_0^1 \ln f(x) dx} \leq \int_0^1 f(x) dx$ .

证法二 令  $A = \int_0^1 f(x) dx$ , 则由 Taylor 公式得

$$\ln y = \ln A + \frac{1}{A}(y - A) - \frac{1}{2\xi^2}(y - A)^2 \leq \ln A + \frac{1}{A}(y - A)$$

其中  $\xi$  介于  $y$  与  $A$  之间, 令  $y = f(x)$ , 代入上式, 再积分, 得

$$\int_0^1 \ln f(x) dx \leq \ln A + \frac{1}{A} \int_0^1 (f(x) - A) dx = \ln A = \ln \left( \int_0^1 f(x) dx \right)$$

故得  $e^{\int_0^1 \ln f(x) dx} \leq \int_0^1 f(x) dx$ .

**例 3.2.66.** 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 证明  $e^{\int_0^1 f(x) dx} \leq \int_0^1 e^{f(x)} dx$ .

**证** 要证不等式两边取对数, 并且令  $g(x) = e^{f(x)}$ , 即要证  $\int_0^1 \ln g(x) dx \leq \ln \left( \int_0^1 g(x) dx \right)$ , 记  $s = \int_0^1 g(x) dx$ , 因为  $g(x) > 0$ , 所以  $s > 0$ ,  $\frac{g(x)}{s} > 0$ ,  $\frac{g(x)}{s} - 1 > -1$ , 故由已知不等式: 当  $x > -1$  时,  $\ln(1+x) \leq x$ , 可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\ln g(x) - \ln s) dx &= \int_0^1 \ln \frac{g(x)}{s} dx = \int_0^1 \ln \left[ 1 + \left( \frac{g(x)}{s} - 1 \right) \right] dx \leq \int_0^1 \left( \frac{g(x)}{s} - 1 \right) dx \\ &= \frac{1}{s} \cdot \int_0^1 g(x) dx - 1 = 0 \end{aligned}$$

即得证  $e^{\int_0^1 f(x) dx} \leq \int_0^1 e^{f(x)} dx$ .

**推论 3.2.4.** 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $f(x) > 0$ , 则有

$$e^{\int_0^1 \ln f(x) dx} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \ln \left( \int_0^1 e^{f(x)} dx \right).$$

一般地, 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x) > 0$ , 则

$$\ln \left( (b-a) \left( \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \right)^{-1} \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx \leq \ln \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right).$$

更为一般地, 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $g(x)$  在  $(a, b)$  内二阶可导,  $g''(x) < 0$ , 则

$$g \left( (b-a) \left( \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \right)^{-1} \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g(f(x)) dx \leq g \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right).$$

**例 3.2.67.** 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上可导,  $f(0) = 0$ , 且当  $x \in [0, 1]$  时, 有  $0 < f'(x) \leq 1$ , 证明

$$\left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq \int_0^1 f^3(x) dx.$$

**证法一** 要证结论, 只需证明  $\left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq \int_0^1 f^3(x) dx \geq 0$ , 为此, 令  $F(x) = \left( \int_0^x f(t) dt \right)^2 - \int_0^x f^3(t) dt$ ,  $x \in [0, 1]$ , 则  $f(0) = 0$ , 且

$$F'(x) = f(x) \cdot \left[ 2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x) \right]$$

故只需证当  $x \in [0, 1]$  时,  $F'(x) \geq 0$  即可, 由题设  $f(0) = 0$ , 且  $f'(x) > 0$  ( $x \in [0, 1]$ ), 所以当  $x \in [0, 1]$  时,  $f(x) \geq f(0) = 0$ , 而因为  $F'(x)$  的符号不易确定, 故再令  $g(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x)$ , 则  $g'(x) = 2f(x) \cdot (1-f'(x)) \geq 0$ , 于是  $g(x) \geq g(0) = 0$ ,

从而  $F'(x) \geq 0$ , 故当  $x \in [0, 1]$  时,  $F(x) \geq F(0) = 0$ , 因而  $F(1) \geq 0$ , 即得  $\left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq \int_0^1 f^3(x) dx$ .

**证法二** 同证法一,  $f(x) > 0$ , 于是  $\int_0^1 f^3(x) dx > 0$ , 故要证结论成立, 只需证明  $\frac{\left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2}{\int_0^1 f^3(x) dx} \geq 1$ , 为此, 令  $F(x) =$

$\left( \int_0^x f(t) dt \right)^2$ ,  $G(x) = \int_0^x f^3(t) dt$ , 则两次用 Cauchy 中值定理, 有

$$\frac{\left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2}{\int_0^1 f^3(x) dx} = \frac{F(1) - F(0)}{G(1) - G(0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{2 \int_0^\xi f(t) dt}{f^2(\xi)} = \frac{2 \int_0^\xi f(t) dt - 2 \int_0^0 f(t) dt}{f^2(\xi) - f^2(0)} = \frac{1}{f'(\eta)}$$

其中  $0 < \xi < 1$ ,  $0 < \eta < \xi$ , 而由  $f(\eta) > 0$ ,  $0 < f'(\eta) \leq 1$ , 即得  $\frac{\left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2}{\int_0^1 f^3(x) dx} \geq 1$ , 故得证.

**例 3.2.68.** 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上可导,  $f(0) = 0$ , 且当  $x \in [0, 1]$  时, 有  $f'(x) \geq 1$ , 证明

$$\left( \int_0^1 f(x) dx \right)^3 \leq \frac{3}{4} \int_0^1 f^5(x) dx.$$

证 因为  $f'(x) \geq 1 > 0$ , 且  $f(0) = 0$ , 所以当  $x \in (0, 1)$  时, 有  $f(x) > 0$ , 则  $\frac{3}{4} \int_0^1 f^5(x) dx > 0$ , 故要证结论成立, 即证

$$\frac{\left( \int_0^1 f(x) dx \right)^3}{\frac{3}{4} \int_0^1 f^5(x) dx} \leq 1, \text{ 为此, 令}$$

$$F(x) = \left( \int_0^x f(t) dt \right)^3, G(x) = \frac{3}{4} \int_0^x f^5(t) dt$$

则两次用 Cauchy 中值定理, 得

$$\begin{aligned} \frac{\left( \int_0^1 f(x) dx \right)^3}{\frac{3}{4} \int_0^1 f^5(x) dx} &= \frac{F(1) - F(0)}{G(1) - G(0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{4 \left( \int_0^\xi f(t) dt \right)^2}{f^4(\xi)} = \left( \frac{2 \int_0^\xi f(t) dt}{f^2(\xi)} \right)^2 \\ &= \left( \frac{2 \int_0^\xi f(t) dt - 2 \int_0^0 f(t) dt}{f^2(\xi) - f^2(0)} \right)^2 = \frac{1}{[f'(\eta)]^2} \end{aligned}$$

其中  $0 < \xi < 1$ ,  $0 < \eta < \xi$ , 而  $f'(\eta) \geq 1$ , 即得  $\frac{\left( \int_0^1 f(x) dx \right)^3}{\frac{3}{4} \int_0^1 f^5(x) dx} \leq 1$ , 故得证.

**推论 3.2.5.** 设函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上可导, 且  $f(0) = 0$ ,  $0 < f'(x) \leq \lambda$  ( $\lambda$  为正常数), 则对任意实数  $a > 0$  及  $m > 1$ , 证明

$$\left( \int_0^a f(x) dx \right)^m \geq \frac{m}{(2\lambda)^{m-1}} \int_0^a f^{2m-1}(x) dx.$$

证 因为  $0 < f'(x) \leq \lambda$ , 且  $f(0) = 0$ , 所以当  $x \in [0, +\infty)$  时,  $f(x) > 0$ , 于是

$$\frac{m}{(2\lambda)^{m-1}} \int_0^a f^{2m-1}(x) dx > 0$$

故要证结论成立, 即证  $I = \frac{\left( \int_0^a f(x) dx \right)^m}{\frac{m}{(2\lambda)^{m-1}} \int_0^a f^{2m-1}(x) dx} \geq 1$ , 令

$$F(x) = \left( \int_0^x f(t) dt \right)^m, G(x) = \frac{m}{(2\lambda)^{m-1}} \int_0^x f^{2m-1}(t) dt$$

则两次用 Cauchy 中值定理, 有

$$\begin{aligned} I &= \frac{F(a) - F(0)}{G(a) - G(0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{\left( 2\lambda \int_0^\xi f(t) dt \right)^{m-1}}{f^{2m-2}(\xi)} = \left( \frac{2\lambda \int_0^\xi f(t) dt}{f^2(\xi)} \right)^{m-1} \\ &= \left( \frac{2\lambda \int_0^\xi f(t) dt - 2\lambda \int_0^0 f(t) dt}{f^2(\xi) - f^2(0)} \right)^{m-1} = \frac{\lambda^{m-1}}{[f'(\eta)]^{m-1}} \end{aligned}$$

其中  $0 < \xi < a$ ,  $0 < \eta < \xi$ , 而由  $f(\eta) > 0$ ,  $0 < f'(\eta) \leq \lambda$ , 即  $I \geq 1$ , 故得证.

**例 3.2.69.** 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  连续, 在  $(0, +\infty)$  上恒正, 且当  $x > 0$  时,  $f^3(x) \leq 3 \int_0^x f^2(t) dt$ , 证明: 当  $x \geq 0$  时, 恒有  $f(x) \leq x$ .

法一：令  $F(x) = \int_0^x f^2(t)dt$ , 那么  $F(x) > 0$ ,  $F'(x) = f^2(x)$ , 于是  $x > 0$  时有,

$$[F'(x)]^{\frac{3}{2}} \leq 3F(x) \Rightarrow \frac{[F'(x)]^{\frac{3}{2}}}{F(x)} \leq 3 \Rightarrow \frac{F'(x)}{F^{\frac{2}{3}}(x)} \leq 3^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \int_0^x \frac{F'(t)}{F^{\frac{2}{3}}(t)} dt \leq 3^{\frac{2}{3}}x$$

不等式左边有  $\int_0^x F^{-\frac{2}{3}}xdF(x) = 3F^{\frac{1}{3}}(x)\Big|_0^x = 3F^{\frac{1}{3}}(x)$ , 即  $F^{\frac{2}{3}}(x) \leq 3^{-\frac{2}{3}}x^2$ , 又因为  $\frac{F'(x)}{3^{\frac{2}{3}}} \leq F^{\frac{2}{3}}(x)$ , 因此

$$\frac{F'(x)}{3^{\frac{2}{3}}} \leq F^{\frac{2}{3}}(x) \leq 3^{-\frac{2}{3}}x^2 \Rightarrow f^2(x) \leq x^2 \Rightarrow f(x) \leq x$$

当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $f^3(0^+) \leq 0 \Rightarrow f(0) \leq 0$ , 综上所述, 当  $x \geq 0$  时, 恒有  $f(x) \leq x$ .

法二: 由题意可知,  $f(x) \leq \sqrt[3]{\int_0^x f^2(t)dt}$ , 记  $g(x) = \sqrt[3]{\int_0^x f^2(t)dt}$ , 那么  $g'(x) = \frac{1}{3}\left(\int_0^x f^2(t)dt\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot f^2(x)$ , 在  $[0, x]$  区间由 Lagrange 中值定理知,

$$g(x) - g(0) = g'(\xi) \cdot x \Rightarrow \sqrt[3]{\int_0^x f^2(t)dt} = \frac{1}{3}\left(\int_0^\xi f^2(t)dt\right)^{-\frac{2}{3}} f^2(\xi) \cdot x$$

由  $f^3(x) \leq 3 \int_0^x f^2(t)dt$ , 可得  $\frac{1}{3}f^2(\xi) \leq \int_0^\xi f^2(t)dt$ , 结合  $x^{-\frac{2}{3}}$  关于  $x$  单调递减可得,

$$\left(\int_0^\xi f^2(t)dt\right)^{-\frac{2}{3}} \leq \left(\frac{1}{3}f^3(\xi)\right)^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f(x) \leq \sqrt[3]{3} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}f^3(\xi)\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot f^2(\xi) \cdot x = x$$

当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $f^3(0^+) \leq 0 \Rightarrow f(0) \leq 0$ , 综上所述, 当  $x \geq 0$  时, 恒有  $f(x) \leq x$ .

**定理 3.2.17 (Cauchy-Schwarz 不等式).** 函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则有

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

等号当且仅当  $\alpha f(x) = \beta g(x)$  时成立, 其中  $\alpha, \beta$  是不同时为零的常数.

证法一  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in [a, b]$ , 有  $(tf(x) - g(x))^2 \geq 0$ , 即

$$t^2 f^2(x) - 2tf(x)g(x) + g^2(x) \geq 0$$

于是有  $t^2 \int_a^b f^2(x)dx - 2t \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \geq 0$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  都成立.

(1) 当  $\int_a^b f^2(x)dx = 0$  时, 由  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的连续性知,  $f(x) \equiv 0$ , 此时要证的不等式中成立;

(2) 当  $\int_a^b f^2(x)dx > 0$  时, 由于关于  $t$  的二次三项式恒大于零, 故它的判别式

$$\Delta = \left(2 \int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - 4 \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \leq 0$$

即得  $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$ .

证法二 要证结论, 即证  $\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx - \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} & \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx - \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(y)dy + \frac{1}{2} \int_a^b f^2(y)dy \int_a^b g^2(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx \int_a^b f(y)g(y)dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D [f^2(x)g^2(y) + f^2(y)g^2(x) - 2f(x)g(x)f(y)g(y)] dx dy = \frac{1}{2} \iint_D (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2 dx dy \geq 0 \end{aligned}$$

其中  $D = \{(x, y) | a \leq x, y \leq b\}$ , 故得  $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$ .

**证法三** 因为  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 所以  $f(x), g(x), f(x)g(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 将  $[a, b]$   $n$  等分, 取

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \xi_i = x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$$

则由离散情形的 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$\left(\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n f^2(x_i)\right)\left(\sum_{i=1}^n g^2(x_i)\right)$$

于是得  $\left(\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\right)^2 \leq \left(\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f^2(x_i)\right)\left(\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n g^2(x_i)\right)$ , 故令  $n \rightarrow \infty$  两边取极限, 由定积分定义得  $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$ .

**证法四** 构造辅助积分上限函数, 将要证不等式中的  $b$  改为  $x$ , 并移项, 令

$$F(x) = \left(\int_a^x f(t)g(t)dt\right)^2 - \int_a^x f^2(t)dt \cdot \int_a^x g^2(t)dt$$

则有  $F(a) = 0, \forall x \in [a, b]$ ,

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2 \int_a^x f(t)g(t)dt \cdot f(x)g(x) - f^2(x) \int_a^x g^2(t)dt - g^2(x) \int_a^x f^2(t)dt \\ &= - \int_a^x [f^2(x)g^2(t) - 2f(x)f(t)g(x)g(t) + f^2(t)g^2(x)] dt \\ &= - \int_a^x [f(x)g(t) - f(t)g(x)]^2 dt \leq 0, \end{aligned}$$

于是  $\forall x \in [a, b], F(x) \leq F(a) = 0$ , 从而  $F(b) \leq 0$ , 即得证.

**例 3.2.70.** 已知  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上的连续函数, 且满足  $\int_0^1 f(x)dx = 1$ , 求函数  $f(x)$ , 使得

$$I = \int_0^1 (1+x^2)f^2(x)dx$$

取得最小值.

由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$1^2 = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{1+x^2}f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx\right)^2 \leq \int_0^1 (1+x^2)f^2(x)dx \cdot \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

所以  $I_{min} = \frac{4}{\pi}$ , 为此, 只需要函数  $f(x)$  满足

$$\int_0^1 \frac{4}{\pi} f(x)dx = \int_0^1 (1+x^2)f^2(x)dx = \frac{4}{\pi} \Rightarrow f(x) = \frac{4}{\pi(1+x^2)}.$$

**例 3.2.71.** 设  $a > 0$  为常数, 证明不等式

$$\int_0^\pi x a^{\sin x} dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x} dx \geq \frac{\pi^3}{4}.$$

证 令  $x = \frac{\pi}{2} + t$ , 那么

$$\int_0^\pi x a^{\sin x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} + t\right) a^{\sin(\frac{\pi}{2}+t)} dt = \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos t} dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t a^{\cos t} dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos t} dt$$

于是由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\int_0^\pi x a^{\sin x} dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x} dx = \pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos x} dx\right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x} dx\right) \geq \pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{\cos x}{2}} \cdot a^{\frac{-\cos x}{2}} dx\right)^2 = \frac{\pi^3}{4}$$

故得证.

**例 3.2.72.** 已知  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $1 \leq f(x) \leq 3$ , 证明  $1 \leq \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \leq \frac{4}{3}$ .

证 先证左边不等式, 由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \geq \int_0^1 dx = 1$$

再证右边不等式, 因为  $1 \leq f(x) \leq 3$ , 所以

$$(f(x) - 1)(3 - f(x)) \geq 0 \Rightarrow f(x) + \frac{3}{f(x)} \leq 4$$

再由 A-G 不等式得

$$\sqrt{\int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx} \leq \frac{1}{2} \left( \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \right) \leq 2$$

所以

$$\int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \leq 4 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \leq \frac{4}{3}$$

综上  $1 \leq \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \leq \frac{4}{3}$ .

**推论 3.2.6.** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $0 < m \leq f(x) \leq M$ , 则有

$$(b-a)^2 \leq \int_a^b f^{-1}(x)dx \cdot \int_a^b f(x)dx \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2$$

证 由 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\int_a^b f^{-1}(x)dx \cdot \int_a^b f(x)dx \geq \left( \int_a^b \sqrt{f^{-1}(x)} \cdot \sqrt{f(x)}dx \right)^2 = (b-a)^2$$

$$\frac{(f(x)-m)(f(x)-M)}{f(x)} = f(x) - (M+m) + \frac{mM}{f(x)} \leq 0 \Rightarrow f(x) + \frac{mM}{f(x)} \leq M+m$$

从而  $\int_a^b \left[ f(x) + \frac{mM}{f(x)} \right] dx \leq (M+m)(b-a)$ , 且  $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ ,

$$\text{所以 } \int_a^b \frac{mM}{f(x)}dx \cdot \int_a^b f(x)dx \leq \frac{1}{4} \int_a^b \left[ f(x) + \frac{mM}{f(x)} \right]^2 dx \leq \frac{(m+M)^2(b-a)^2}{4}$$

综上  $(b-a)^2 \leq \int_a^b f^{-1}(x)dx \cdot \int_a^b f(x)dx \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2$ .

**例 3.2.73.** 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上具有一阶连续的导数, 且  $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 0$ , 证明

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq 12 \left( \int_0^1 f(x)dx \right)^2.$$

证法一 由题设  $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 0$  及分部积分公式得

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)dx = xf(x) \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$$

于是

$$\begin{aligned} \left( \int_0^1 f(x)dx \right)^2 &= \left( \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx \right)^2 = \left[ \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 \\ &= \left( \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{\frac{1}{2}}^x f'(t)dt + \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)dx \right)^2 = \left( \int_{\frac{1}{2}}^1 dt \int_t^1 f'(t)dx + \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)dx \right)^2 \end{aligned}$$

$$= \left( \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)f'(t)dt + \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)dx \right)^2$$

由不等式  $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  及 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$\begin{aligned} \text{上式右端} &\leq 2 \left[ \left( \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)f'(t)dt \right)^2 + \left( \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)dx \right)^2 \right] \\ &\leq 2 \left[ \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^2 dt \cdot \int_{\frac{1}{2}}^1 [f'(t)]^2 dt + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} [f'(x)]^2 dx \right] = \frac{1}{12} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \end{aligned}$$

即得  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq 12 \left( \int_0^1 f(x)dx \right)^2$ .

证法二 构造辅助函数, 并利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 令  $g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$ , 则

$$\begin{aligned} \int_0^1 f'(x)g(x)dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)f'(x)dx = xf(x) \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + (1-x)f(x) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx \end{aligned}$$

且  $\int_0^1 g^2(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{12}$ , 于是有 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$\left( \int_0^1 f'(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \cdot \int_0^1 g^2(x)dx = \frac{1}{12} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

从而得  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq 12 \left( \int_0^1 f(x)dx \right)^2$ .

**例 3.2.74.** 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上具有一阶连续的导数, 且  $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)dx = 0$ , 证明

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq 27 \left( \int_0^1 f(x)dx \right)^2.$$

证 构造辅助函数, 并利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 令  $g(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 2x-1, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ -x+1, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$ , 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f'(x)g(x)dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (-x)f'(x)dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (2x-1)f'(x)dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 (-x+1)f'(x)dx \\ &= -xf(x) \Big|_0^{\frac{1}{3}} + \int_0^{\frac{1}{3}} f(x)dx + (2x-1)f(x) \Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} - 2 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)dx + (-x+1)f(x) \Big|_{\frac{2}{3}}^1 + \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} f(x)dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx \end{aligned}$$

且

$$\int_0^1 g^2(x)dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (-x)^2 dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (2x-1)^2 dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 (-x+1)^2 dx = \frac{1}{27}$$

于是由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\left( \int_0^1 f'(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \cdot \int_0^1 g^2(x)dx = \frac{1}{27} [f'(x)]^2 dx$$

从而得  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq 27 \left( \int_0^1 f(x)dx \right)^2$ .

**例 3.2.75.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续可导, 且  $f(a) = f(b) = 0$ , 则有

$$\left( \int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq \frac{(b-a)^3}{3} \int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

证 不妨设  $f(a) = 0$  (对于  $f(b) = 0$ , 类似地可证), 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) d(x-b) = f(x)(x-b) \Big|_a^b - \int_a^b (x-b)f'(x) dx = \int_a^b (b-x)f'(x) dx$$

于是由 Cauchy-Schwarz 不等式得, 有

$$\left( \int_a^b f(x) dx \right)^2 = \left( \int_a^b (b-x)f'(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b (b-x)^2 dx \int_a^b [f'(x)]^2 dx = \frac{(b-a)^3}{3} \int_a^b [f'(x)]^2 dx$$

即得待证等式.

**推论 3.2.7.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续可导, 且  $f(x_0) = 0$ , 则有

$$\left( \int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq M \int_a^b [f'(x)]^2 dx$$

其中  $M = \frac{2}{3} \max_{a \leq x_0 \leq b} \{(x_0-a)^3, (x_0-b)^3\}$ , 特别地, 当  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  时,  $M = \frac{(b-a)^3}{12}$ .

**例 3.2.76.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续可导, 且  $f(a) = f(b) = 0$ , 则有

$$\left( \int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq \frac{(b-a)^3}{12} \int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

证 记  $c = \frac{a+b}{2}$ , 则由例题 3.2.75 可知

$$\begin{aligned} \left( \int_a^c f(x) dx \right)^2 &\leq \frac{(c-a)^3}{3} \int_a^c [f'(x)]^2 dx \\ \left( \int_c^b f(x) dx \right)^2 &\leq \frac{(b-c)^3}{3} \int_c^b [f'(x)]^2 dx \end{aligned}$$

于是由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned} \left( \int_a^b f(x) dx \right)^2 &= \left( \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right)^2 \leq 2 \left[ \left( \int_a^c f(x) dx \right)^2 + \left( \int_c^b f(x) dx \right)^2 \right] \\ &\leq \frac{(b-a)^3}{12} \left[ \int_a^c [f'(x)]^2 dx + \int_c^b [f'(x)]^2 dx \right] = \frac{(b-a)^3}{12} \int_a^b [f'(x)]^2 dx \end{aligned}$$

即得待证等式.

**例 3.2.77.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶连续可导, 且  $f(a) = f(b) = 0$ , 则有

$$\left( \int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq \frac{(b-a)^5}{180} \int_a^b f''^2(x) dx.$$

证 由已知  $f(a) = f(b) = 0$  以及分部积分公式得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b f(x) d(x-a) = - \int_a^b (x-a)f'(x) dx \\ \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b f(x) d(x-b) = - \int_a^b (x-b)f'(x) dx \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= -\int_a^b (x-a)f'(x)dx = \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx + \int_a^b (x-b)f'(x)dx \\ &= \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx\end{aligned}$$

故由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 &\leq \frac{1}{4} \left[\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx\right]^2 \leq \frac{1}{4} \left(\int_a^b f''^2(x)dx\right) \left(\int_a^b [(x-a)(x-b)]^2 dx\right) \\ &= \frac{(b-a)^5}{180} \int_a^b f''^2(x)dx\end{aligned}$$

即得待证等式.

**例 3.2.78.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶连续可导, 且  $f(a) = f'(a) = 0$  或  $f(b) = f'(b) = 0$ , 则

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \leq \frac{(b-a)^5}{20} \int_a^b f''^2(x)dx.$$

**证** 不妨设  $f(a) = f'(a) = 0$  (对于  $f(b) = f'(b) = 0$ , 类似地证明), 则由分部积分公式, 有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)d(x-b) = -\int_a^b (x-b)f'(x)dx = -\int_a^b f'(x)d\left(\frac{(b-x)^2}{2}\right) = \int_a^b \frac{(b-x)^2}{2}f''(x)dx$$

于是由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 = \left(\int_a^b \frac{(b-x)^2}{2}f''(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b \frac{(b-x)^4}{4}dx \int_a^b f''^2(x)dx = \frac{(b-a)^5}{20} \int_a^b f''^2(x)dx$$

即得待证等式.

**推论 3.2.8.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上  $n$  阶连续可导, 且  $f^{(l)}(a) = 0$  或  $f^{(l)}(b) = 0$  ( $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ), 则有

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \leq \frac{(b-a)^{2n+1}}{(n!)^2(2n+1)} \int_a^b [f^{(n)}(x)]^2 dx.$$

**证** 下面以  $f^{(k)}(b) = 0$  ( $k = -1, 1, \dots, n-1$ ) 为例进行证明,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b f(x)d(x-a) = -\int_a^b (x-a)f'(x)dx = -\int_a^b f'(x)d\frac{(x-a)^2}{2} = \int_a^b \frac{(x-a)^2}{2}f''(x)dx \\ &= \frac{(-1)^2}{1 \cdot 2} \int_a^b (x-a)^2 f''(x)dx = \dots = \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^b (x-a)^n f^{(n)}(x)dx\end{aligned}$$

于是由 Cauchy-Schwarz 不等式, 得

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \leq \frac{1}{(n!)^2} \int_a^b (x-a)^{2n} dx \cdot \int_a^b [f^{(n)}(x)]^2 dx = \frac{(b-a)^{2n+1}}{(n!)^2(2n+1)} \int_a^b [f^{(n)}(x)]^2 dx.$$

**例 3.2.79.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶连续可导, 且  $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$ , 则有

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \leq \frac{(b-a)^5}{320} \int_a^b f''^2(x)dx.$$

**证** 记  $c = \frac{a+b}{2}$ , 则有例题 3.2.78, 有

$$\left(\int_a^c f(x)dx\right)^2 \leq \frac{(c-a)^5}{20} \int_a^c f''^2(x)dx = \frac{(b-a)^5}{640} \int_a^c f''^2(x)dx$$

$$\left(\int_c^b f(x)dx\right)^2 \leq \frac{(b-c)^5}{20} \int_c^b f''^2(x)dx = \frac{(b-a)^5}{640} \int_c^b f''^2(x)dx$$

从而

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 = \left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\right)^2 \leq 2 \left[ \left(\int_a^c f(x)dx\right)^2 + \left(\int_c^b f(x)dx\right)^2 \right] \leq \frac{(b-a)^5}{320} \int_a^b f''^2(x)dx$$

即得待证等式.

**推论 3.2.9.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上  $n$  阶连续可导, 且  $f^{(l)}(a) = f^{(l)}(b) = 0$  ( $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ), 则有

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \leq \frac{(b-a)^{2n+1}}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} \int_a^b [f^{(n)}(x)]^2 dx.$$

**证** 记  $c = \frac{a+b}{2}$ , 由推论 3.2.8, 有

$$\begin{aligned} \left(\int_a^c f(x)dx\right)^2 &\leq \frac{(c-a)^{2n+1}}{(n!)^2(2n+1)} \int_a^c [f^{(n)}(x)]^2 dx = \frac{(b-a)^{2n+1}}{2^{2n+1}(n!)^2(2n+1)} \int_a^c [f^{(n)}(x)]^2 dx \\ \left(\int_c^b f(x)dx\right)^2 &\leq \frac{(b-c)^{2n+1}}{(n!)^2(2n+1)} \int_c^b [f^{(n)}(x)]^2 dx = \frac{(b-a)^{2n+1}}{2^{2n+1}(n!)^2(2n+1)} \int_c^b [f^{(n)}(x)]^2 dx \end{aligned}$$

于是由基本不等式,

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \leq 2 \left[ \left(\int_a^c f(x)dx\right)^2 + \left(\int_c^b f(x)dx\right)^2 \right] \leq \frac{(b-a)^{2n+1}}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} \int_a^b [f^{(n)}(x)]^2 dx.$$

**推论 3.2.10.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上  $2n$  阶连续可导, 且  $f^{(l)}(a) = f^{(l)}(b) = 0$  ( $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ), 则有

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \leq \frac{(b-a)^{2n+1}}{(4n+1)!} \int_a^b [f^{(2n)}(x)]^2 dx.$$

**例 3.2.80.** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有连续的导数, 且  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ , 证明:

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|dx \leq \frac{b-a}{4} \int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$

**证** 注意到  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ , 那么

$$f(x) = f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \int_{\frac{a+b}{2}}^x f'(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

并令

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \int_x^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|dt, \quad x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \\ g_2(x) &= \int_{\frac{a+b}{2}}^x |f'(t)|dt, \quad x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \end{aligned}$$

则  $g_1(x), g_2(x)$  分别在  $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$  和  $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$  上有连续的导数, 且

$$g_1\left(\frac{a+b}{2}\right) = g_2\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$$

当  $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$  时,  $|f(x)| \leq g_1(x)$ ,  $|f'(x)| = -g_1'(x)$ ; 当  $x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$  时,  $|f(x)| \leq g_2(x)$ ,  $|f'(x)| = g_2'(x)$ , 因此

$$I = \int_a^b |f(x)f'(x)|dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)f'(x)|dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)f'(x)|dx$$

$$\leq - \int_a^{\frac{a+b}{2}} g_1(x)g'_1(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b g_2(x)g'_2(x)dx = \frac{1}{2}(g_1^2(a) + g_2^2(b))$$

于是, 由 *Cauchy-Schwarz* 不等式得,

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)f'(x)|dx &\leq \frac{1}{2} \left( \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|dt \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(t)|dt \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|^2 dt \cdot \int_a^{\frac{a+b}{2}} dt + \frac{1}{2} \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(t)|^2 dt \cdot \int_{\frac{a+b}{2}}^b dt = \frac{b-a}{4} \int_a^b |f'(t)|^2 dt \end{aligned}$$

故得证.

**例 3.2.81.** 设函数  $f(x)$  在  $[0, a]$  ( $a > 0$ ) 上有连续的一阶导数, 且  $f(0) = 0$ ,  $M = \max_{x \in [0, a]} |f'(x)|$ , 证明

$$\left| \int_0^a f(x)dx \right| \leq \frac{Ma^2}{2}.$$

证法一  $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(x)d(x-a) = (x-a)f(x)\Big|_0^a - \int_0^a (x-a)f'(x)dx = \int_0^a (a-x)f'(x)dx$ , 故

$$\left| \int_0^a f(x)dx \right| = \left| \int_0^a (a-x)f'(x)dx \right| \leq M \left| \int_0^a (a-x)dx \right| = \frac{Ma^2}{2}.$$

证法二 因为  $\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0) = f(x)$ , 所以  $|f(x)| = \left| \int_0^x f'(t)dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)dt| = Mx$ , 于是

$$\int_0^a f(x)dx \leq \int_0^a |f(x)|dx \leq \int_0^a Mxdx = \frac{Ma^2}{2}.$$

证法三 利用 *Cauchy-Schwarz* 不等式, 由题设得

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(t)dt \right| \leq \left( \int_0^x |f'(t)|dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^x dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq M \left( \int_0^x dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^x dt \right)^{\frac{1}{2}} = Mx$$

$$\text{故 } \left| \int_0^a f(x)dx \right| \leq \int_0^a Mxdx = \frac{Ma^2}{2}.$$

**推论 3.2.11.** 一般地, 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有连续的一阶导数, 且  $f(a) = 0$ ,  $M = \max_{x \in [0, a]} |f'(x)|$ , 则

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{M}{2}(b-a)^2.$$

**例 3.2.82.** 设函数  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上有连续的二阶导数, 且  $f(1) = 0$ ,  $M = \max_{x \in [0, 2]} |f''(x)|$ , 证明

$$\left| \int_0^2 f(x)dx \right| \leq \frac{M}{3}.$$

证 由  $f(x)$  在  $x=1$  出的 *Taylor* 展开得,

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2$$

其中  $\xi \in (0, 2)$ , 又  $f(1) = 0$ ,  $M = \max_{x \in [0, 2]} |f''(x)|$  所以有

$$f'(1)(x-1) - \frac{M}{2}(x-1)^2 \leq f(x) \leq f'(1)(x-1) + \frac{M}{2}(x-1)^2$$

两边积分得

$$f'(1) \int_0^2 (x-1)dx - \frac{M}{2} \int_0^2 (x-1)^2 dx \leq \int_0^2 f(x)dx \leq f'(1) \int_0^2 (x-1)dx + \frac{M}{2} \int_0^2 (x-1)^2 dx$$

而  $\int_0^2 (x-1)dx = 0$ ,  $\int_0^2 (x-1)^2 dx = \frac{2}{3}$ , 所以  $\left| \int_0^2 f(x)dx \right| \leq \frac{M}{3}.$

**例 3.2.83.** 设在区间  $[a, b]$  上  $f'(x)$  绝对有界, 且  $|f'(x)| \leq M$ , 试证

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) \right| \leq \frac{(b-a)^2 M}{4} - \frac{(f(a) - f(b))^2}{4M}.$$

证 构造辅助函数

$$g(x) = f(x) - \frac{(f(b) - f(a))(x - a)}{b - a} - f(a)$$

可得

$$\left| \int_a^b g(x) dx \right| = \left| \int_a^b \left[ f(x) - \frac{(f(b) - f(a))(x - a)}{b - a} - f(a) \right] dx \right| = \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) \right|$$

而  $g(a) = g(b) = 0$ , 可令

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot \frac{1}{M}, \quad x_0 = \frac{a + b + k(b - a)}{2}$$

由于

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x) - kM = (1 - k)M$$

根据 Lagrange 中值定理得

$$\begin{cases} g(x) \leq g(a) + g'(x)(x - a), & x \in (a, x_0) \\ g(x) \leq g(b) + g'(x)(b - x), & x \in (x_0, b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x) \leq (1 - k)M(x - a) \\ g(x) \leq (1 - k)M(b - x) \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g(x) dx \right| &= \left| \int_a^{x_0} g(x) dx + \int_{x_0}^b g(x) dx \right| \leq \left| \int_a^{x_0} (1 - k)M(x - a) dx + \int_{x_0}^b (1 - k)M(b - x) dx \right| \\ &= (1 - k^2)M \left( \frac{b-a}{2} \right) = \frac{M(b-a)^2}{2} - \frac{(f(b) - f(a))^2}{4M} \end{aligned}$$

即得待证等式.

### 3.3 反常积分

反常积分是指在积分区间上函数有无穷大或无界的情况下积分, 无法直接通过定积分来计算的积分. 反常积分分为两类: 第一类是无穷积分, 即积分区间为无穷的情况; 第二类是间断积分, 即积分函数在积分区间上有间断点的情况.

#### 3.3.1 反常积分的计算

**定义 3.3.1 (无穷区间上的反常积分).** 设函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上有定义, 在  $[a, b]$  ( $b < +\infty$ ) 上可积, 若极限  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$  存在, 则定义

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

并称  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  为  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上的反常积分, 这时也称反常积分  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  存在或收敛; 若上述极限不存在, 则称反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  不存在或发散. 类似地, 定义

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx.$$

**定义 3.3.2 (无界函数的反常积分 (瑕积分)).** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b)$  上连续, 而且  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$ , 若极限  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$  存在, 则定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

并称  $\int_a^b f(x)dx$  为  $f(x)$  在  $[a, b)$  上的反常积分, 这时也称反常积分  $\int_a^b f(x)dx$  存在或收敛; 若上述极限不存在, 则称反常积分  $\int_a^b f(x)dx$  不存在或发散.

类似地, 若  $f(x)$  在  $(a, b]$  上连续,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ , 则定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$ , 则定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon_1}^c f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_c^{b-\varepsilon_2} f(x)dx.$$

**定理 3.3.1 (反常积分的区间再现公式).** 若  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 则对任意的正整数  $k$ , 都有

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{k}{x^2} f\left(\frac{k}{x}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left[f(x) + \frac{k}{x^2} f\left(\frac{k}{x}\right)\right] dx.$$

**例 3.3.1.** 计算下列反常积分.

|  |   |   |
|--|---|---|
| (1) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ). | (2) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \sqrt[3]{x}}{1+x^2} dx$ .       | (3) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$ .     |
| (4) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx$ ( $a > 0$ ).                       | (5) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} dx$ . | (6) $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$ . |

(1) 法一: 令  $x = \tan t$ , 则  $dx = \sec^2 t dt$ ,

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\tan^\alpha t} \stackrel{t=\frac{\pi}{2}-u}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1+\cot^\alpha u} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^\alpha u}{\tan^\alpha u + 1} du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^\alpha u + 1}{\tan^\alpha u + 1} du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{\pi}{4}.$$

法二: 令  $x = \frac{1}{t}$ , 则  $dx = -\frac{1}{t^2} dt$ ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{+\infty}^0 \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^\alpha}\right)} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha dt}{(1+t^2)(t^\alpha+1)} = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)(x^\alpha+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \right] = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

法三:  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ , 于是

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_1^0 \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^\alpha}\right)} = \int_0^1 \frac{t^\alpha dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$$

$$\text{于是原式} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_0^1 \frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{法四: 原式} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{(1+x^\alpha)^{-1} + \left(1 + \frac{1}{x^\alpha}\right)^{-1}}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$(2) \text{ 原式} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan \sqrt[3]{x} + \arctan \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$(3) \text{ 原式} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

(4) 法一: 令  $x = a \tan t$ , 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(a \tan t)}{a^2 \tan^2 t + a^2} \cdot a \sec^2 t dt = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln a + \ln \tan t) dt = \frac{\pi}{2a} \ln a + \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \tan t dt \\ &\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \tan t dt \stackrel{u=\frac{\pi}{2}-t}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln \tan \left(\frac{\pi}{2} - u\right) (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cot u du \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \tan t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cot u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan x \cot x) dx = 0 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \tan x dx = 0, \text{ 原式} = \frac{\pi}{2a} \ln a.$$

法二:  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx = \int_0^a \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx + \int_a^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx$ , 其中

$$\int_a^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx \stackrel{x=\frac{a^2}{t}}{=} \int_a^0 \frac{\ln \frac{a^2}{t}}{\frac{a^4}{t^2} + a^2} \left(-\frac{a^2}{t^2}\right) dt = \int_0^a \frac{\ln a^2 - \ln t}{t^2 + a^2} dt$$

$$\text{于是, } \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx = \int_0^a \frac{\ln a^2}{x^2 + a^2} dx = 2 \ln a \left(\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}\right)_0^a = \frac{\pi}{2a} \ln a.$$

$$\text{法三: 原式} = \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} dx \stackrel{\frac{x}{a}=t}{=} \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln at}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln at + \ln \frac{a}{t}}{t^2 + 1} dt = \frac{\pi}{2a} \ln a.$$

$$(5) \text{ 令 } x = \tan t, \text{ 则原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{tdt}{\sec^3 t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos^3 t dt, \text{ 由表格积分法:}$$

|        |              |  |  |
|--------|--------------|--|--|
| $f'$   | $t$          | 1  | 0  |
|        | $+ \searrow$ | $- \searrow$                                       |  |
| $\int$ | $\cos^3 t$   | $\frac{1}{3} \cos^2 t \sin t + \frac{2}{3} \sin t$ | $-\frac{1}{9} \cos^3 t - \frac{2}{3} \cos t$ |

$$\text{原式} = \frac{t}{3} \cos^2 t \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3} \cos^3 t + \frac{2}{3} \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{3} - \frac{7}{9}.$$

$$(6) \text{ 原式} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{x \ln x}{1+x^2} + \frac{\frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}}{1+(\frac{1}{x})^2}}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{x \ln x}{1+x^2} + \frac{-x \ln x}{1+x^2}}{1+x^2} dx = 0.$$

例 3.3.2. 计算下列反常积分.

$$(1) \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^4 \sqrt{x^2-2x}}. \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}. \quad (3) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{1+x} + e^{3-x}}.$$

$$(1) \text{ 原式化为 } \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^4 \sqrt{(x-1)^2-1}}, \text{ 令 } x-1 = \sec \theta, \text{ 则}$$

$$\text{原式} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec \theta \tan \theta}{\sec^4 \theta \tan \theta} d\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{1}{3} \cos^2 \theta + \frac{2}{3} \sin \theta \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

(2) 由于  $\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)' = \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}$ , 由分部积分法, 得

$$F(x) = \int \frac{x e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \int x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right) = \frac{x}{1+e^{-x}} - \int \frac{dx}{1+e^{-x}} = \frac{x}{1+e^{-x}} - \ln(e^{-x}+1) + C$$

于是最终的积分为

$$\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = F(+\infty) - F(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x}{1+e^{-x}} - \ln(e^x+1) \right] + \ln 2$$

$$\begin{aligned} F(+\infty) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x}{1+e^{-x}} - \ln(e^x+1) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x - e^x \ln(e^x+1) - \ln(e^x+1)}{e^x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x[x - \ln(e^x+1)]}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln e^x (1+e^{-x})] = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{即 } \int_0^{+\infty} \frac{x e^x}{(1+e^{-x})^2} dx = \ln 2.$$

(3) 由题意可得

$$I = \frac{1}{e} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{2-x}} = \frac{1}{e} \int_1^{+\infty} \frac{de^x}{e^{2x} + e^2} = \frac{1}{e^2} \arctan e^{x-1} \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} e^{-2}.$$

**例 3.3.3.** 已知  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x = \int_a^{+\infty} 4x^2 e^{-2x} dx$ , 求常数  $a$  的值.

等式左边易化简为  $e^{-2a}$ , 等式右边由表格积分法得

$$e^{-2a} = e^{-2x} (-2x^2 - 2x - 1) \Big|_a^{+\infty} = e^{-2a} (2a^2 + 2a + 1)$$

即  $2a^2 + 2a + 1 = 1$ , 解得  $a = 0$  或  $-1$ .

**例 3.3.4.** 试证:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x \sin x}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} dx = \frac{\pi}{4ab^2(a+b)}$  ( $a, b > 0, a \neq b$ ).

证 注意到  $(\tan x)' = \sec^2 x$ , 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x \sin x}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \tan x}{(a^2 + b^2 \tan^2 x)^2} d(\tan x) \stackrel{\tan x=t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{t \arctan t}{(a^2 + b^2 t^2)^2} dt \\ &= \frac{-1}{2b^2} \int_0^{+\infty} \arctan t d\left(\frac{1}{a^2 + b^2 t^2}\right) = \frac{-1}{2b^2} \left[ \frac{\arctan t}{a^2 + b^2 t^2} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a^2 + b^2 t^2)(1+t^2)} \right] \\ &= \frac{1}{2b^2(b^2 - a^2)} \int_0^{+\infty} \left( \frac{b^2}{a^2 + b^2 t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = \frac{1}{2b^2(b^2 - a^2)} \left( \frac{b}{a} \arctan \frac{bt}{a} - \arctan t \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4ab^2(a+b)}. \end{aligned}$$

**例 3.3.5.** 设  $f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$ , 求  $I = \int_{-1}^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx$ .

易得  $x=0, 2$  为  $f(x)$  的无穷间断点, 故积分为反常积分, 且有

$$I = \int_{-1}^0 + \int_0^2 + \int_2^3$$

且  $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \arctan f(x) + C$ , 于是

$$I = \arctan f(x) \Big|_{-1}^{0^-} + \arctan f(x) \Big|_{0^+}^{2^-} + \arctan f(x) \Big|_{2^+}^3 \arctan \frac{32}{27} - 2\pi.$$

**例 3.3.6.** 计算反常积分  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} |t-x|^{\frac{1}{2}} \frac{y}{(t-x)^2 + y^2} dt$ .

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{+\infty} |t-x|^{\frac{1}{2}} \frac{y}{(t-x)^2 + y^2} dt \xrightarrow{u=t-x} \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^{\frac{1}{2}} \frac{y}{u^2 + y^2} du = 2 \int_0^{+\infty} \frac{|u|^{\frac{1}{2}} y du}{u^2 + y^2} \\
&\xrightarrow{v=\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{y}}} 4\sqrt{y} \int_0^{+\infty} \frac{v^2 dv}{v^4 + 1} = 2\sqrt{y} \int_0^{+\infty} \frac{v^2 + 1}{v^4 + 1} dv = 2\sqrt{y} \int_0^{+\infty} \frac{1 + \frac{1}{v^2}}{v^2 + \frac{1}{v^2}} dv \\
&= 2\sqrt{y} \int_0^{+\infty} \frac{d\left(v - \frac{1}{v}\right)}{\left(v - \frac{1}{v}\right)^2 + 2} = 2\sqrt{y} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(v - \frac{1}{v}\right) \Big|_0^{+\infty} = \sqrt{2}\pi\sqrt{y}.
\end{aligned}$$

**定理 3.3.2.** 若  $a, b > 0$ , 则

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2 + 4ab}\right) dt$$

其中函数  $f(x)$  的积分均有意义.

证 令  $ax - \frac{b}{x} = t$ , 那么  $x = \frac{1}{2a} (t + \sqrt{t^2 + 4ab})$ ,  $dx = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{2a\sqrt{t^2 + 4ab}} dt$ .

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{2a} \left( \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) f\left(\sqrt{t^2 + 4ab}\right) \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\
&= \frac{1}{2a} \left[ \int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{u^2 + 4ab}\right) \frac{\sqrt{u^2 + 4ab} - u}{\sqrt{u^2 + 4ab}} du + \int_0^{\infty} f(t^2 + 4ab) \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \right] \\
&= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2 + 4ab}\right) dt.
\end{aligned}$$

**例 3.3.7.** 已知  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , 试证  $\int_0^{+\infty} e^{-a^2 x^2 - \frac{b^2}{x^2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-2ab}$ .

证  $I = \int_0^{+\infty} e^{-(ax + \frac{b}{x})^2 + 2ab} dx = e^{2ab} \int_0^{+\infty} e^{-(ax + \frac{b}{x})^2} dx = \frac{e^{2ab}}{a} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2 + 4ab)} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-2ab}$ .

**例 3.3.8.** 计算积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nx) \ln(\cos x) dx$ .

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nx) \ln(\cos x) dx = \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) d\sin(2nx) = \frac{1}{2n} \ln(\cos x) \sin(2nx) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nx) \cdot (-\sin x)}{\cos x} dx \\
&= \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nx) \sin x}{\cos x} dx = \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nx) dx - \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)}{\cos x} dx \\
&\xrightarrow{x=t-\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt = \frac{(-1)^{n-1}}{2n} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt) \right] dt = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{4n}.
\end{aligned}$$

**例 3.3.9.** 设  $m, n$  为自然数, 求  $\int_0^1 t^n \ln^m t dt$ .

利用分部积分法获得递推公式,

$$\begin{aligned}
I_m &= \int_0^1 t^n \ln^m t dt = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln^m t dt t^{n+1} = \frac{1}{n+1} \ln^m t \cdot t^{n+1} \Big|_0^1 - \frac{m}{n+1} \int_0^1 t^n \ln^{m-1} t dt = -\frac{m}{n+1} I_{m-1} \\
&= \left( -\frac{m}{n+1} \right) \left( -\frac{m-1}{n+1} \right) \cdots \left( -\frac{1}{n+1} \right) I_0 = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^m} \int_0^1 t^n dt = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}.
\end{aligned}$$

**定理 3.3.3 (Euler 积分).**  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ .

**证** 被积函数  $f(x) = \ln \sin x$  在  $x = 0$  点的右邻域内无界, 由 L'Hospital 法则求得  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{x^{-\frac{1}{2}}} = 0$ , 故由广义积分的比较判别法知广义积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$  收敛, 同理可证: 广义积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx$  收敛, 令  $x = \frac{\pi}{2} - t$ , 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln \sin \left( \frac{\pi}{2} - t \right) (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx \stackrel{x=2t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \ln \sin 2t dt = 2 \ln 2 \cdot \frac{\pi}{4} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt \\ &= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t dt + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin u du \quad (\text{这里 } u = \frac{\pi}{2} - t) = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I \end{aligned}$$

解方程得  $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ .

**例 3.3.10.** 计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left( \tan \int_0^\pi \sqrt[n]{\sin x} dx + \sin \int_0^\pi \sqrt[n]{\sin x} dx \right).$$

由  $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$ ,  $\sin(A - B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ,  $\tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}$  ( $x \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left[ \tan \int_0^\pi \left( \sqrt[n]{\sin x} - 1 \right) dx - \sin \int_0^\pi \left( \sqrt[n]{\sin x} - 1 \right) dx \right] = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \int_0^\pi \left( \sqrt[n]{\sin x} - 1 \right) dx \right]^3 \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\int_0^\pi \left( \sqrt[n]{\sin x} - 1 \right) dx}{\frac{1}{n}} \right]^3 \stackrel{\frac{1}{n}=t}{=} \frac{1}{2} \left[ \int_0^\pi \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin^t x - 1}{t} dt \right] \stackrel{L'}{=} \frac{1}{2} \left[ \int_0^\pi \ln(\sin x) dx \right]^3 \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \ln(\sin x) dx \right]^3 = -\frac{(\pi \ln 2)^3}{2}. \end{aligned}$$

**例 3.3.11.** 计算积分  $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$ .

设

$$\frac{1}{\prod_{k=0}^n (x+k)} = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{x+k}$$

其中  $A_k$  为待定系数. 将  $\prod_{k=0}^n (x+k)$  同乘等式两边, 然后令  $x \rightarrow -k$ , 得

$$A_k = \frac{1}{(-k)(-k+1) \cdots (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdots (-k+n)} = (-1)^k \frac{1}{k!(n-k)!} = (-1)^k \frac{C_n^k}{n!}$$

$$I_n = \int_1^{+\infty} \left[ \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{C_n^k}{n!} \frac{1}{x+k} \right] dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{C_n^k}{n!} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \ln(x+k) \Big|_1^{+\infty}$$

注意到

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \ln(x+k) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \ln \left[ x \left( 1 + \frac{k}{x} \right) \right] = \ln x \cdot \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k + \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \ln \left( 1 + \frac{k}{x} \right) \\ &= \ln x \cdot (1-1)^n + \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \ln \left( 1 + \frac{k}{x} \right) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

因此  $I_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \ln(1+k)$ .

### 3.3.2 反常积分敛散性

积分的收敛域

**例 3.3.12.** 求积分的收敛域.

$$(1) \int_a^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx. \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p} dx.$$

(1) 当  $a \geq 0$  时,  $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx \leq \int_a^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_a^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan a$ , 原积分收敛; 当  $a < 0$  时, 原积分显然发散, 于是, 积分  $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx$  的收敛域为  $a \geq 0$  的一切  $a$  值.

(2) 若  $q=0$ , 则由于积分  $\int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  仅当  $p > 1$  时收敛, 而积分  $\int_0^A \frac{dx}{x^p}$  仅当  $p \leq 1$  时收敛, 故积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 1}{x^p} dx$  对于任何的  $p$  值及  $q=0$  发散;  
若  $q \neq 0$ , 则积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p} dx = \int_0^{+\infty} x^{-p} \sin x^q dx$

敛散性的判断

常用用的反常积分敛散性判别.

表 3.7: 常用用的反常积分敛散性判别

|  |  |
|--|--|
| $(1) \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ $\begin{cases} p > 1, & \text{收敛} \\ p \leq 1, & \text{发散} \end{cases}$ $a > 0.$                     | $(2) \int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$ $\begin{cases} p < 1, & \text{收敛} \\ p \geq 1, & \text{发散.} \end{cases}$                   |
| $(3) \int_a^{+\infty} x^k e^{-\lambda x} dx$ $\begin{cases} \lambda > 0, & \text{收敛} \\ \lambda \leq 0, & \text{发散} \end{cases}$ $k \geq 0.$ | $(4) \int_a^{+\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx$ $\begin{cases} p > 1, & \text{收敛} \\ p \leq 1, & \text{发散} \end{cases}$ $a > 1.$ |

**定理 3.3.4 (反常积分标准形敛散性判定).** 将任意反常积分化为标准型  $\int \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} dx$ , 那么

(1) 当  $x \rightarrow 0$  (瑕点), 当且仅当  $\alpha < 1$  或  $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta > 1 \end{cases}$  时收敛, 其余情况均发散;

(2) 当  $x \rightarrow \infty$ , 当且仅当  $\alpha > 1$  或  $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta > 1 \end{cases}$  时收敛, 其余情况均发散.

**例 3.3.13 (2022 数二).** 设  $p$  为常数, 若反常积分  $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p(1+x)^{1-p}} dx$  收敛, 则  $p$  的取值范围是

- A.  $(-1, 1)$       B.  $(-1, 2)$       C.  $(-\infty, 1)$       D.  $(-\infty, 2)$

$x = 0$  为瑕点, 由定理 3.3.4 情况 (1) 知,  $\beta = -1$ , 那么  $p < 1$ ;  $x = 1$  也为瑕点, 由定理 3.3.4 情况 (1) 知, 注意此时化为标准形时,  $x = 1$  对于  $x^p$  非瑕点, 分子  $\ln x$  需等价为  $x - 1$ , 分子  $x - 1$  与分母  $(1-x)^{1-p}$  合并为  $(1-x)^{-p}$ , 故当且仅当  $-p < 1$ , 即  $p > -1$  时, 收敛, 综上所述,  $p$  的取值范围为  $(-1, 1)$ .

**例 3.3.14.** 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e \end{cases}$  若反常积分  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 则

A.  $\alpha < -2$

B.  $\alpha > 2$

C.  $-2 < \alpha < 2$

D.  $0 < \alpha < 2$

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^e \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} dx + \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x} dx, \text{ 当 } \alpha - 1 < 1, \text{ 即 } \alpha < 2 \text{ 时 } \int_1^e \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} dx \text{ 收敛,}$$

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x} dx = \int_e^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^{\alpha+1} x} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{\alpha+1}} du$$

则当  $\alpha > 0$  时,  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x} dx$  收敛, 故  $0 < \alpha < 2$  时原积分收敛, 选 D.

**例 3.3.15.** 判断广义积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)^\alpha}{\ln^\beta \left(1 + \frac{1}{x}\right)} dx$  收敛性.

当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $e^{\frac{1}{x}} - 1 \sim \frac{1}{x}$ ,  $\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ , 所以  $\frac{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)^\alpha}{\ln^\beta \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \sim \frac{1}{x^{\alpha-\beta}}$  ( $x \rightarrow +\infty$ ), 由此可知, 当  $\alpha - \beta > 1$  时, 原积分收敛, 其余情况均发散.

**例 3.3.16.** 判定反常积分  $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1 + x^6 \sin^2 x}$  的敛散性.

原积分的敛散性的判定等价于判定以下级数的连续性

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1 + x^6 \sin^2 x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x dx}{1 + x^6 \sin^2 x} \xrightarrow{x-n\pi=t} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{(t+n\pi) dt}{1 + (t+n\pi)^6 \sin^2 t}$$

记  $a_n = \int_0^\pi \frac{(t+n\pi) dt}{1 + (t+n\pi)^6 \sin^2 t}$  则  $a_n \leq \int_0^\pi \frac{\pi(n+1) dt}{1 + (\pi n)^6 \sin^2 t} = \pi(n+1) \int_0^\pi \frac{dt}{1 + (\pi n)^6 \sin^2 t}$ , 其中

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{dt}{1 + (\pi n)^6 \sin^2 t} &= \int_0^\pi \frac{\csc^2 t dt}{\csc^2 t + (\pi n)^6} = - \int_0^\pi \frac{d \cot t}{1 + (\pi n)^6 + \cot^2 t} \\ &= - \frac{1}{\sqrt{\pi^6 n^6 + 1}} \arctan \left( \frac{\cot t}{\sqrt{\pi^6 n^6 + 1}} \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^6 n^6 + 1}} \end{aligned}$$

即  $a_n \leq \frac{\pi^2(n+1)}{\sqrt{\pi^6 n^6 + 1}}$ , 由比较判别法的极限形式可知, 它与  $\frac{1}{n^2}$  构成的  $p = 2$  的  $p$ -级数具有相同的敛散性, 所以级数收敛, 从而可得积分也收敛.

### 无穷限反常积分的敛散性与无穷远处的极限

**例 3.3.17.** 设有下列命题

(1) 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续是奇函数, 则  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$ ;

(2) 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 又  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)dx$  存在, 则  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  收敛;

- (3)  $\int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_a^{+\infty} g(x)dx$  均发散, 则  $\int_a^{+\infty} [f(x) + g(x)]dx$  可能发散, 也可能收敛;
- (4) 若  $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$  与  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  均发散, 则不能确定  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  是否收敛.

则以上命题中正确的个数是

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

命题 (1) 显然错误, 不妨令  $f(x) = x$ , 则  $\int_{-\infty}^{+\infty} xdx$  发散, 一般地, 若  $f(x)$  在区间  $[-a, a]$  上是奇函数, 且  $\int_{-a}^a f(x)dx$  收敛, 则  $\int_0^a f(x)dx$  收敛; 同样地, 命题 (2) 显然错误, 也令  $f(x) = x$ , 则  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R xdx = 0$ , 但  $\int_{-\infty}^{+\infty} xdx$  发散; 命题 (3) 正确, 对于不同名的函数的线性组合, 其组合后的收敛性与各函数的收敛性无关; 命题 (4) 错误, 对于相同的函数, 若  $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$  与  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  均发散, 则  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  一定发散, 综上, 选 A.

### 3.3.3 反常积分的极限

**例 3.3.18.** 设  $\varphi(x) = \int_0^x \cos \frac{1}{t} dt$ , 求  $\varphi'(0)$ .

因为  $\varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos \frac{1}{t} dt}{x}$ , 但不能用 L'Hospital 法则, 故

$$\int_0^x \cos \frac{1}{t} dt \stackrel{\frac{1}{t}=u}{=} \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2} du = \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{1}{u^2} d\sin u = \frac{\sin u}{u^2} \Big|_{\frac{1}{x}}^{+\infty} + \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{2\sin u}{u^3} du = -x^2 \sin \frac{1}{x} + \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{2\sin u}{u^3} du$$

所以

$$\left| \frac{\int_0^x \cos \frac{1}{t} dt}{x} \right| \leq |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| + \frac{1}{|x|} \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{2}{u^3} du = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| + |x| \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0)$$

所以  $\varphi'(0) = 0$ .

**例 3.3.19.** 设  $0 < a < d$ ,  $A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (a + kd)$ ,  $G_n = \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} (a + kd)}$ , 试证  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n}{A_n} = \frac{2}{e}$ .

$$\text{证 由} \frac{G_n}{A_n} = \frac{\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} (a + kd)}}{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (a + kd)} = \frac{\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} (a + kd)}}{a + \frac{1}{2}(n-1)d} \stackrel{c=\frac{a}{d}}{=} \frac{\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} \frac{c+k}{n}}}{\frac{c}{n} + \frac{n-1}{2n}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \frac{c+k}{n} = \int_0^1 \ln x dx = -1 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{c}{n} + \frac{n-1}{n} \right) = \frac{1}{2}$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n}{A_n} = \frac{2}{e}$ .

**定理 3.3.5 (Frullani 积分定理).** 形如  $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$  ( $a > 0, b > 0$ ), 其中  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内连续, 且  $f(0^+), f(+\infty) \in \mathbb{R}$ , 则有

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(+\infty) - f(0^+)) \ln \frac{a}{b}.$$

若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  不存在, 但积分  $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$  存在, 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = -f(0) \ln \frac{a}{b}.$$

**例 3.3.20.** 求下列积分.

$$\left. \begin{array}{ll} (1) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x} dx. & (2) \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{\ln x} dx. \\ (3) \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos ax}{x} \cos bxdx. & (4) \int_0^{+\infty} \left( \frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right) \frac{dx}{x^2}. \end{array} \right.$$

(1) 取  $f(x) = \arctan x$ , 则  $f(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ ,  $f(0^+) = 0$ , 故原积分  $= \frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}$ .

(2) 令  $\ln x = -t$ , 原式化为  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t} dt = \ln \frac{a}{b}$ .

(3) 当  $a = b$  时, 积分化为

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos^2 ax}{x} dx = \int_0^1 \frac{\cos ax - \cos^2 ax}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos^2 ax}{x} dx$$

由于  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos^2 ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} a \sin ax = 0$ , 故  $\int_0^1 \frac{\cos ax - \cos^2 ax}{x} dx$  为正常积分, 而

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos^2 ax}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos ax}{x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 ax}{x} dx$$

由 Dirichlet 判别法,  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos ax}{x} dx$  收敛, 又

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 ax}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\frac{1 + \cos 2ax}{2}}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x} + \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2ax}{2x} dx$$

由 Dirichlet 判别法知  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2ax}{2x} dx$  收敛, 但  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x}$  发散, 从而当  $a = b$  时, 原积分发散; 当  $a > b$  时,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos ax}{x} \cos bxdx = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2 \frac{a}{2} x}{x} \cos bxdx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{a}{2} x (2 \sin \frac{a}{2} x \cos bx)}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{a}{2} x [\sin (\frac{a}{2} + b)x + \sin (\frac{a}{2} - b)x]}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{2} [\cos(-b)x - \cos(a+b)x] + \frac{1}{2} [\cos bx - \cos(a-b)x]}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos bx - \cos(a+b)x}{x} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos bx - \cos(a-b)x}{x} dx \end{aligned}$$

取  $f(x) = \cos x$ , 则  $f(0^+) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$  不存在, 但  $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$  存在, 于是

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos ax}{x} \cos bxdx = \frac{1}{2} \ln \frac{a+b}{b} + \frac{1}{2} \ln \frac{a-b}{b} = \frac{1}{2} \ln \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \ln \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

若  $a < b$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos ax}{x} \cos bxdx = \ln \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$ , 总之, 当  $a \neq b$  时, 原积分  $= \ln \frac{\sqrt{|a^2 - b^2|}}{b}$ .

(4) 先将  $\frac{1}{x^2} \left( \frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right)$  展开,

$$I = \frac{1}{x^2} \left( \frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{x^2} \left( \frac{x e^x}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{x^2} \left[ \frac{x(e^x + 1)}{e^{2x} - 1} - \frac{x}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{2} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x^2} \left( \frac{x}{e^x - 1} - \frac{x}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2x} \left( \frac{2}{e^x - 1} - \frac{2}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{x} \right) \\
&= \frac{1}{2x} \left( -e^{-x} + e^{-2x} + \frac{2}{e^x - 1} - \frac{2}{x} + e^{-x} - \frac{2}{e^{2x} - 1} + \frac{1}{x} - e^{-2x} \right) \\
&= -\frac{1}{2x} (e^{-x} - e^{-2x}) + \frac{1}{x} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{2} \right) - \frac{1}{x} \left( \frac{1}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{2x} + \frac{e^{-2x}}{2} \right)
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \left( \frac{x}{e^x - 1} - \frac{1}{2} \right) \frac{dx}{x^2} &= \int_0^{+\infty} -\frac{1}{2x} (e^{-x} - e^{-2x}) dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{2} \right) dx \\
&\quad - \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{2x} + \frac{e^{-2x}}{2} \right) dx
\end{aligned}$$

在上式右端第二个积分中令  $x = 2t$ , 于是

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{2} \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \left( \frac{1}{e^{2t} - 1} - \frac{1}{2t} + \frac{e^{-2t}}{2} \right) dt$$

因此

$$\int_0^{+\infty} \left( \frac{x}{e^x - 1} - \frac{1}{2} \right) \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = -\frac{1}{2} \ln 2.$$

### 3.3.4 反常积分综合性问题

**例 3.3.21.** 求曲线  $y = 2e^{-x} \sin x$  ( $x \geq 0$ ) 与  $x$  轴围成的无界图形的面积  $S$ .

由积分的几何意义, 得

$$S = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A |2e^{-x} \sin x| dx = \int_0^{+\infty} |2e^{-x} \sin x| dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx$$

由于  $\int e^{-x} \sin x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) + C$ , 所以

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) \Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi} = -\frac{1}{2} [e^{-(n+1)\pi} (-1)^{n+1} - e^{-n\pi} (-1)^n]$$

代入以上面积计算的积分结果, 得

$$\begin{aligned}
S &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} [e^{-(n+1)\pi} (-1)^{n+1} - e^{-n\pi} (-1)^n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)\pi} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi} = \frac{e^{-\pi} + 1}{1 - e^{-\pi}} = \frac{e^\pi + 1}{e^\pi - 1}.
\end{aligned}$$

**例 3.3.22 (2023 四川大学).** 计算  $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \int_x^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^2} dt$ .

法一: 设  $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^2} dt$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$ , 于是由函数型 Stolz 定理以及第一积分中值定理, 可知

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{Stolz}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x + \pi) - f(x)}{g(x + \pi) - g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x + \pi} - \frac{1}{x}} \left( \int_{x+\pi}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^2} dt - \int_x^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^2} dt \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \pi) x \int_x^{x+\pi} \frac{|\sin t|}{t^2} dt = \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \pi) x \frac{1}{\xi^2} \int_x^{\pi} |\sin t| dt = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x + \pi)}{\xi^2}
\end{aligned}$$

因为  $\xi \in (x, x + \pi)$ , 故  $\frac{x(x + \pi)}{(x + \pi)^2} < \frac{x(x + \pi)}{\xi^2} < \frac{x(x + \pi)}{x^2}$ , 故由夹逼准则得原极限等于  $\frac{2}{\pi}$ .

法二: 由题意可知,

$$\int_x^{x+\pi} \frac{|\sin t|}{t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x+n\pi}^{x+(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^2} dt$$

由第一积分中值定理可知,  $\exists \xi_n \in (x + n\pi, x + (n + 1)\pi)$ , 使得

$$\int_{x+n\pi}^{x+(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^2} dt = \frac{1}{\xi_n^2} \int_{x+n\pi}^{x+(n+1)\pi} |\sin t| dt = \frac{1}{\xi_n^2} \int_0^\pi |\sin t| dt = \frac{2}{\xi_n^2}$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{[x + (n+1)\pi]^2} < \frac{2}{\xi_n^2} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(x + n\pi)^2}$$

一方面,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(x + n\pi)^2} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(x + n\pi)(x + n\pi - \pi)} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{x + n\pi - \pi} - \frac{1}{x + n\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{x - \pi} - \frac{1}{x + n\pi} \right) < \frac{2}{\pi} \frac{1}{x - \pi}$$

另一方面,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{[x + (n+1)\pi]^2} > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{[x + (n+1)\pi][x + (n+2)\pi]} > \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{x + (n+1)\pi} - \frac{1}{x + (n+2)\pi} \right] = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{x + \pi} - \frac{1}{x + (n+2)\pi} \right]$$

最后由夹逼准则易得原极限等于  $\frac{2}{\pi}$ .

## 3.4 特殊构型积分补充

### 3.4.1 Euler 积分

Euler 积分在概率论和统计学中有重要的应用, 特别是在 Gauss 分布的概率密度函数中. 这个积分在实际计算中比较困难, 因为它没有一个基本的初等函数的原函数, 因此无法通过常规的积分技巧来计算.

#### Euler 积分及其基本变形

**定义 3.4.1 (第二型 Euler 积分).**  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx (\alpha > 0)$ .

基本变形:

$$\Gamma(\alpha) = 2 \int_0^{+\infty} t^{2\alpha-1} e^{-t^2} dt (\alpha > 0), \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^1 \ln^{\alpha-1} \frac{1}{t} dt (\alpha > 0).$$

**定理 3.4.1 (第二型递推性质).**  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ , 并且  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(n + 1) = n!$ .

又因为  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ , 由定理 3.4.1 进行递推, 可得

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

$\Gamma$  函数只在  $x$  正半轴有定义, 利用递推性质可定义  $\alpha \leq 0$  时的  $\Gamma(\alpha)$ .

**定理 3.4.2 (第二型余元公式).**  $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} (0 < \alpha < 1)$ .

**定理 3.4.3 (第二型倍元公式).**  $\Gamma(2\alpha) = \frac{2^{2\alpha-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\alpha) \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) (\alpha > 0)$ .

**定义 3.4.2 (第一型 Euler 积分).**  $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx (p, q > 0)$ .

基本变形:

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta, \quad B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} du, \quad B(p, q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}} dx.$$

**定理 3.4.4 (对称性质).**  $B(p, q) = B(q, p)$ .

**定理 3.4.5 (第一型递推性质).**  $B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q)$ . 特别地, 对于正整数  $m, n$ , 有

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

**定理 3.4.6 (第一型余元公式).**  $B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$  ( $0 < p < 1$ ). 特别地,  $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$ .

**定理 3.4.7 (Dirichlet 定理).**  $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ .

利用 Euler 积分表示其他积分

**例 3.4.1.** 求  $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{10} dx$ .

易知  $I = \Gamma(101) = 100!$ .

**例 3.4.2.** 已知  $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t-1}}{t^n} dt$  ( $n \geq 2$ ), 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$ .

$I_n = \int_1^{+\infty} (t-1)^{\frac{1}{2}} t^{-n} dt$  并令  $\frac{1}{t} = x$ , 于是

$$I_n = \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - 1\right)^{\frac{1}{2}} x^{n-2} dx = \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}} x^{n-\frac{5}{2}} dx = B\left(n - \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B\left(n - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)}{B\left(n - \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \frac{3}{2}}{n} \cdot \frac{B\left(n - \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)}{B\left(n - \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)} = 1.$$

### 3.4.2 Dirichlet 积分

**引理 3.4.1 (Dirichlet 核).** 在区间  $(0, \pi)$  上定义  $D_n = \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ , 则有

$$\int_0^\pi D_n(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

证 显然,  $D_n$  在  $x=0$  处无定义, 但是  $\lim_{x \rightarrow 0^+} D_n(x) = \frac{2n+1}{2}$ , 因此  $D_n$  在  $[0, \pi]$  可积, 因为有三角恒等式

$$2 \sin \frac{x}{2} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx dx \right) = \sin \frac{(2n+1)x}{2}$$

于是,  $D_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx$ , 所以, 不难得得到

$$\int_0^\pi D_n(x) dx = \int_0^\pi \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx \right) dx = \frac{\pi}{2}.$$

**定理 3.4.8 (Dirichlet 积分等式).**  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ .

证 易知该反常积分条件收敛, 根据引理 3.4.1 有,  $\int_0^\pi \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ , 考虑将其分母换为  $x$  所产生的影响, 由 L'Hospital 法则, 有

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} = O(x) \quad (x \rightarrow 0)$$

因此  $f$  在  $[0, \pi]$  上常义可积, 由 Riemann-Lebesgue 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(x) \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x dx = 0$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

最后, 作代换  $t = \left( n + \frac{1}{2} \right) x$ , 即得

$$\int_0^\pi \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x}{x} dx = \int_0^{\left( n + \frac{1}{2} \right) \pi} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

### 3.4.3 Lobachevsky 积分法

**定理 3.4.9 (Lobachevsky 积分法).** 若  $f(x)$  在  $x \in [0, +\infty)$  范围内满足  $f(x + \pi) = f(x)$  及  $f(\pi - x) = f(x)$ , 则

$$\int_0^{+\infty} f(x) \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

当  $f(x) = 1$  时, 便是 Dirichlet 积分.

### 3.4.4 Fresnel 积分与 Fejér 积分

**定理 3.4.10 (Fresnel 积分等式).**  $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

**定理 3.4.11 (Fejér 积分).** 假设  $k \in \mathbb{N}^+$ , 则有以下四种形式的 Fejér 积分:

$$(1) \int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} dx = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \pi, & n = 2k - 1; \end{cases}$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x} dx = \begin{cases} 2 \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{k-i}}{2k-1}, & n = 2k \\ \frac{\pi}{2}, & n = 2k - 1; \end{cases}$$

$$(3) \int_0^\pi \left( \frac{\sin nx}{\sin x} \right)^2 dx = n\pi;$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin nx}{\sin x} \right)^2 dx = \frac{n\pi}{2}.$$

### 3.4.5 Laplace 积分

**定理 3.4.12 (Laplace 积分等式).**  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ab}$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin bx}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ab}$  ( $a, b > 0$ ).

**推论 3.4.1.** 当  $4q > p^2$  时, 有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + px + q} dx &= \frac{2\pi}{\sqrt{4q - p^2}} e^{-\frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}} \cos \frac{p}{2} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 + px + q} dx &= -\frac{2\pi}{\sqrt{4q - p^2}} e^{-\frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}} \sin \frac{p}{2}.\end{aligned}$$

## 3.5 留数定理及其应用

留数定理是复变函数论中的一个重要定理, 用于计算复函数在孤立奇点处的积分值. 具体来说, 留数定理指出, 如果一个复函数在某个孤立奇点处解析 (即在该点附近可展开成幂级数), 那么该函数在该孤立奇点处的留数就等于以该孤立奇点为中心的 Laurent 级数展开式中负幂次的系数.

### 3.5.1 留数

若点  $a$  为函数  $f(z)$  的解析点, 存在邻域  $|z - a| < R$ ,  $f(z)$  在领域内解析, 这时若在邻域内作圆  $C : |z - a| = r < R$ , 那么根据 Cauchy 定理

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

若点  $b$  为函数  $f(z)$  的孤立奇点, 则函数在  $0 < |z - b| < R$  内解析, 这是若作圆  $C : |z - a| = r < R$ , 由于围道内有奇点, 所以

$$\oint_C f(z) dz \text{ 不一定为零}$$

在  $0 < |z - b| < R$  的环域内  $f(z)$  有 Laurent 展开:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - b)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-b|=r} \frac{f(z)}{(z - b)^{n+1}} dz$$

令  $n = -1$ , 即得

$$\oint_{|z-b|=r} f(z) dz = 2\pi i a_{-1}.$$

**定义 3.5.1 (留数).** 若  $b$  为  $f(z)$  的孤立奇点, 定义函数  $f(z)$  在孤立奇点  $b$  的留数等于  $f(z)$  在  $b$  的空心邻域内 Laurent 展开式中  $(z - b)^{-1}$  幂的系数  $a_{-1}$ , 并记作  $\text{Res}[f(b)]$ .

### 3.5.2 留数定理

如果我们要计算一闭合围道积分  $\oint_C f(z)dz$ , 假设闭合围道内部, 被积函数除有限几个孤立奇点  $b_k$ , 根据复连通区域 Cauchy 定理, 作小圆  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  将每个奇点包围, 则

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(b_k)].$$

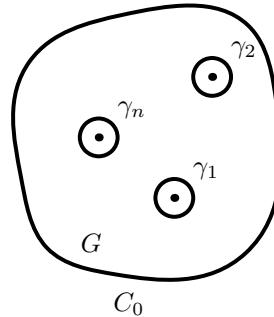


图 3.5.1

**定理 3.5.1 (留数定理).** 设  $C$  为简单闭合围道,  $G$  为  $C$  的内区域, 若除  $G$  内有限个孤立奇点  $b_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  外, 函数在  $\overline{G}$  内解析, 则

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(b_k)].$$

### 3.5.3 留数计算

#### 一阶极点

在  $b$  点的某一空心邻域内

$$f(z) = \frac{1}{z-b} \phi(z)$$

$\phi(z)$  在含中心  $b$  点的邻域内解析,  $\phi(b) \neq 0$ , 作 Taylor 展开

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z-b)^n$$

于是

$$\text{Res}[f(b)] = \alpha_0 = \phi(b)$$

由连续性

$$\text{Res}[f(b)] = \lim_{z \rightarrow b} (z-b)f(z)$$

特别常见的情况, 当  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ ,  $P(z)$  和  $Q(z)$  在  $b$  点及其邻域内解析,  $b$  是  $Q(z)$  的一阶零点,  $P(b) \neq 0$ , 则

$$\text{Res}[f(b)] = \lim_{z \rightarrow b} (z - b) \frac{P(z)}{Q(z)} = P(b) \lim_{z \rightarrow b} \frac{z - b}{Q(z)} \stackrel{L'}{=} \frac{P(b)}{Q'(b)}$$

### 高阶极点

设  $z = b$  是  $f(z)$  的  $m$  阶极点

$$f(z) = (z - b)^{-m} \phi(z)$$

$\phi(z)$  在  $b$  的某个邻域内解析

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z - b)^n$$

$\phi(b) \neq 0$ , 则

$$\text{Res}[f(b)] = \alpha_{m-1} = \frac{1}{(m-1)!} \phi^{(m-1)}(b)$$

将  $b$  换成极限  $z \rightarrow b$ , 有

$$\text{Res}[f(b)] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow b} \frac{d^{m-1}[(z - b)^m f(z)]}{dz^{m-1}}.$$

### 本性奇点或高阶极点

对于本性奇点时只能求 Laurent 展开系数  $a_{-1}$ .

对于高阶极点, 很多情况下求展开系数往往比用高阶极点的留数公式简单, 对于  $m$  阶极点即求  $\phi(z) = (z - b)^m f(z)$  的 Taylor 展开系数  $a_{m-1}$ .

**例 3.5.1.** 函数  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2 + 1)^2}$ , 求  $\text{Res}[f(z)]$ .

函数在  $z = i$  有二阶极点, 这时

$$\phi(z) = (z - i)^2 \frac{e^{iz}}{z(z^2 + 1)^2} = \frac{e^{iz}}{z(z + i)^2}$$

要求  $m - 1 = 1$  次项的系数  $\alpha_1$ , 用待定系数法, 令  $z - i = t$ , 于是

$$(t + i)(t + 2i)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n = e^{i(t+i)} = e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} t^n$$

即

$$(-4i - 8t + \dots) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n = e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} t^n$$

先比较两边 0 次项系数

$$-4i\alpha_0 = e^{-1}$$

得  $\alpha_0 = \frac{i}{4e}$ , 再比较两边 1 次项系数

$$-4i\alpha_1 - 8\alpha_0 = \frac{i}{e}$$

得  $\alpha_1 = -\frac{3}{4e}$ , 所以

$$\text{Res}[f(i)] = -\frac{3}{4e}.$$

### 3.5.4 留数定理的应用

#### 有理三角函数的积分

考虑积分  $I = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ , 其中  $R$  是  $\cos \theta, \sin \theta$  的有理函数, 作变换

$$z = e^{i\theta}, \cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}, \sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}, d\theta = \frac{dz}{iz}$$

积分路径变换为  $z$  平面上的单位圆  $|z| = 1$ , 于是

$$I = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right) \frac{dz}{iz} = 2\pi \sum_{|z|<1} \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z} R\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right)\right].$$

**例 3.5.2.** 计算积分  $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} |\varepsilon| < 1$ .

作变换  $z = e^{i\theta}$ , 那么有

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{1 + \varepsilon \frac{z^2 + 1}{2z}} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{2}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} dz = 2\pi \sum_{|z|<1} \operatorname{Res}\left[\frac{2}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon}\right]$$

解方程  $\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon = 0$ , 可得被积函数两个一阶极点为

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

其中  $|z_1| < 1$ ,  $|z_2| > 1$ , 于是

$$I = 2\pi \operatorname{Res}\left[\frac{2}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon}\right]_{z=z_1} = 2\pi \frac{2}{2\varepsilon z + 2} \Big|_{z=z_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

**例 3.5.3.** 计算积分  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \cos^2 \theta}$ .

由  $\cos \theta = \frac{z^2 + 1}{2z}$ ,  $d\theta = \frac{dz}{iz}$ , 于是原式等价为

$$I = \oint_{\Gamma:|z|=1} \frac{4z dz}{i(z^4 + 6z^2 + 1)} \xrightarrow{z^2=u} \frac{4}{i} \oint_{\Gamma} \frac{du}{u^2 + 6u + 1} = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left[\frac{4}{i} f(-3 + 2\sqrt{2})\right] = \sqrt{2}\pi.$$

将  $z^2 = u$  替换后, 当  $z$  绕  $\Gamma$  一周时,  $u$  亦在其上绕二周.

**例 3.5.4.** 计算  $I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta$ .

由  $\cos 2\theta = \frac{1}{2}(z^2 + z^{-2})$ ,  $\cos \theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ ,  $d\theta = \frac{dz}{iz}$ , 于是

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}(z^2 + z^{-2})}{5 - 2(z + z^{-1})} \frac{dz}{iz} = \frac{i}{4} \oint_{|z|=1} \frac{(z^4 + 1) dz}{z^2 \left(z - \frac{1}{2}\right)(z - 2)} = -\frac{\pi}{2} \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{Res}[f(z)]$$

其中  $f(z) = \frac{(z^4 + 1)}{z^2 \left(z - \frac{1}{2}\right)(z - 2)}$ , 那么有

$$\operatorname{Res}[f(0)] = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[ z^2 \cdot \frac{(z^4 + 1)}{z^2 \left(z - \frac{1}{2}\right)(z - 2)} \right] = \frac{5}{2}, \quad \operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{z^4 + 1}{z^2(z - 2)} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{17}{6}$$

于是  $I = -\frac{\pi}{2} \left(-\frac{17}{6} + \frac{5}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ .

**例 3.5.5.** 计算  $I = \int_0^\pi \frac{\cos m\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta$ ,  $m$  是正整数.

积分号下的函数为  $x$  的偶函数, 故  $I = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos m\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta$ , 令

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos m\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta, I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin m\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta$$

故有

$$I_1 + iI_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{im\theta}}{5 - 4 \cos \theta} d\theta = \frac{i}{2} \oint_{|z|=1} \frac{z^m}{(z - \frac{1}{2})(z - 2)} dz$$

并且在圆周内部仅有一个一阶极点  $z = \frac{1}{2}$ , 于是

$$\text{Res} \left[ \frac{z^m}{z - 2} \right]_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3 \cdot 2^{m-1}}$$

由留数定理,

$$I_1 + iI_2 = 2\pi i \cdot \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{-3 \cdot 2^{m-1}} = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{m-1}}$$

知

$$I_1 = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{m-1}}, I_2 = 0$$

故所求积分  $I = \frac{1}{2} I_1 = \frac{\pi}{3 \cdot 2^m}$ .

## 有理函数无穷积分

考虑积分  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$ , 其中  $R(x)$  为有理函数, 无穷积分定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{R_1 \rightarrow +\infty \\ R_2 \rightarrow +\infty}} \int_{-R_1}^{R_2} f(x) dx$$

对于有理函数  $R(x) = P_n(x)/Q_m(x)$ , 只有当分母多项式  $Q_m(x)$  次数比分子多项式  $P_n(x)$  次数至少大 2 时积分存在

$$m - n \geq 2$$

若积分存在, 则

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R R(x) dx$$

计算  $\int_{-R}^R R(x) dx$ , 从复平面上看, 这是一个沿实轴的复变积分, 为应用留数定理, 必须先构造适当的围道, 我们补上以原点为圆心,  $R$  为半径的上半圆  $C_R$ , 如图 3.5.2 所示.

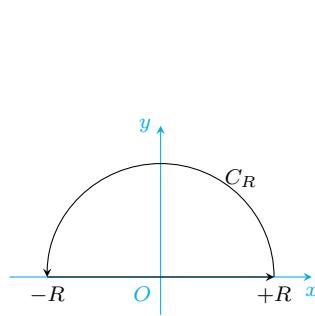


图 3.5.2

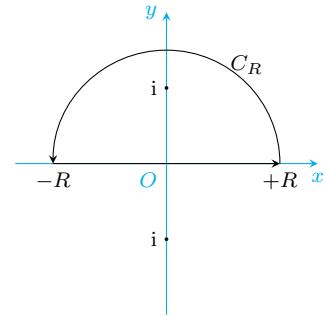


图 3.5.3

于是

$$\oint_C R(z) dz = \int_{-R}^R R(x) dx + \int_{C_R} R(z) dz$$

任何有理函数只有有限个的孤立奇点, 所以  $R(z)$  在上半平面只有有限个孤立奇点,  $R$  足够大时, 则围道包围上半平面所有的奇点, 由留数定理又有

$$\oint_C R(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \text{Res}[R(z)]$$

对于无穷积分存在的有理函数  $R(z)$ , 满足分母多项式次数比分子多项式次数至少大 2, 则

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zR(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{P_n(x)}{Q_m(z)} = 0$$

由大圆弧定理

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} R(z) dz = 0$$

于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \text{Res}[R(z)]$$

**例 3.5.6.** 计算积分  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$ .

令  $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^3}$ ,  $I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$ , 考虑围道如图 3.5.3 所示, 则有

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \text{Res}[f(z)] = 2\pi i \text{Res}[f(i)] \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \left[ \frac{(z-i)^3}{(1+z^2)^3} \right] = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \frac{d^2 (z+i)^{-3}}{dz^2} \Big|_{z=i} = 2\pi i \cdot \left( -\frac{3}{16} i \right) = \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

因为  $\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot \frac{1}{(1+z^2)^3} = 0$ , 由大圆弧定理

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = i\pi \cdot 0 = 0$$

于是原积分等于  $\frac{3\pi}{8}$ .

**例 3.5.7.** 计算反常积分  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}$ .

令  $f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}$ ,  $I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$ , 则有  $z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ , 于是

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{Res}[f(z)] = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z_1)] \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left[ (z - z_1)^2 \frac{1}{(z^2 + z + 1)^2} \right] = 2\pi i \cdot \frac{d}{dz} (z - \bar{z}_1)^{-2} \Big|_{z=z_1} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

因为  $\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot f(z) = 0$ , 由大圆弧定理  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$ , 故原积分等于  $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ .

### 含三角函数的无穷积分

考虑积分  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{ipx} dx$ ,  $p > 0$ , 其中  $R(x)$  为有理函数, 积分的实部和虚部分别为

$$\operatorname{Re} I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos px dx, \quad \operatorname{Im} I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin px dx$$

当且仅当有理函数  $R(x) = P_n(x)/Q_m(x)$  的分母多项式  $Q_m(x)$  次数比分子多项式  $P_n(x)$  的次数大 1 时无穷积分存在.

$$m - n \geq 1$$

对于积分  $I$  同样考虑围道积分

$$\oint_C R(x) e^{ipz} dz = \int_{-R}^R R(x) e^{ipx} dx + \int_{C_R} R(z) e^{ipz} dz = 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{Res}[R(z) e^{ipz}]$$

**引理 3.5.1 (Jordan 引理).** 设在  $0 \leq \arg z \leq \pi$  的范围内, 当  $|z| \rightarrow \infty$  时,  $Q(z)$  一致地趋近于 0, 则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z) e^{ipz} dz = 0$$

其中  $p > 0$ ,  $C_R$  是以原点为圆心,  $R$  为半径的上半圆.

对于  $R(z)$ , 满足分母多项式次数比分子多项式次数至少大 1, 则

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = 0$$

由 Jordan 引理

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} R(z) e^{ipz} dz = 0$$

于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(z) e^{ipx} dx = 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{Res}[R(z) e^{ipz}].$$

**例 3.5.8.** 计算积分  $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx$ ,  $a > 0$ .

令  $f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}$ , 因为被积函数  $f(x) \sin x$  为偶函数

$$\int_0^{+\infty} f(x) \sin x dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin x dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx$$

考虑围道积分

$$\oint_C f(z) e^{iz} dz = \int_{-R}^R f(x) e^{ix} dx + \int_{C_R} f(z) e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{Res}[f(z) e^{iz}]$$

易知,  $z = ai$  为上半平面的唯一奇点, 且为一阶极点

$$\operatorname{Res}\left[\frac{ze^{iz}}{z^2 + a^2}\right] = \frac{ze^{iz}}{2z} \Big|_{z=ia} = \frac{1}{2} e^{-a}$$

所以

$$\int_{-R}^R f(x) e^{ix} dx + \int_{C_R} f(z) e^{iz} dz = \pi e^{-a} i$$

因为  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ , 由 Jordan 引理  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iz} dz = 0$ , 于是  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx = \pi e^{-a} i$ , 于是

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \pi e^{-a} i = \frac{\pi}{2} e^{-a}.$$

**例 3.5.9.** 计算反常积分  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^3} dx$ .

令  $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^3}$ , 那么  $f(x) \cos x$  为偶函数, 于是

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx$$

考虑围道积分

$$\oint_C f(z) e^{iz} dz = \int_{-R}^R f(x) e^{ix} dx + \int_{C_R} f(z) e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{Res}[f(z) e^{iz}]$$

易知,  $z = i$  为上半平面的唯一奇点, 且为三阶极点, 于是

$$\phi(z) = (z - i)^3 \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^3} = \frac{e^{iz}}{(z+i)^3}$$

要求系数  $\alpha_2$ , 用待定系数法, 令  $z - i = t$ , 于是

$$(t+2i)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n = e^{i(t+i)} = e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} t^n$$

即

$$(-8i - 12t + 6it^2 + \dots) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n = e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} t^n$$

先比较两边 0 次项系数

$$-8i\alpha_0 = e^{-1}$$

得  $\alpha_0 = \frac{i}{8e}$ , 再比较两边 1 次项的系数

$$-8i\alpha_1 - 12\alpha_0 = \frac{i}{e}$$

得  $\alpha_1 = -\frac{5}{16e}$ , 再比较两边 2 次项的系数

$$-8i\alpha_2 - 12\alpha_1 + 6i\alpha_0 = -\frac{1}{2e}$$

解得  $\alpha_2 = -\frac{7i}{16e}$ , 即

$$\operatorname{Res}[f(z) e^{iz}] = -\frac{7i}{16e}$$

所以

$$\int_{-R}^R f(x) e^{ix} dx + \int_{C_R} f(z) e^{iz} dz = \frac{7\pi}{8e}$$

$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ , 由 Jordan 引理  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iz} dz = 0$ , 于是  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx = \frac{7\pi}{8e}$ , 于是

$$I = \operatorname{Re} \frac{1}{2} \cdot \frac{7\pi}{8e} = \frac{7\pi}{16e}.$$

### 实轴上有奇点的情形

设被积函数在实轴上有奇点, 则积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  为瑕积分, 假设瑕点为  $c$ , 瑕积分定义为: 存在一点  $c$  及邻域  $(\delta_1, \delta_2)$ , 有

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\delta_1} f(x)dx + \lim_{\delta_2} \int_{c+\delta_2}^b f(x)dx$$

如果这两个极限都不存在, 但是  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \right]$  存在, 定义瑕积分的主值为:

$$\text{v.p. } \int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \right]$$

当然, 如果瑕积分存在, 则主值也存在, 且它们一定相等, 所以, 我们考虑

$$I = \text{v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \left[ \int_{-R}^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^R f(x)dx \right]$$

因为实轴上  $c$  点是被积函数的奇点, 必须绕过奇点来构成闭合的积分围道, 如图 3.5.4 所示.

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{\text{二象限}} \text{Res}[f(z)] = \int_{-R}^{c-\delta} f(x)dx + \int_{C_\delta} f(z)dz + \int_{c+\delta}^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz$$

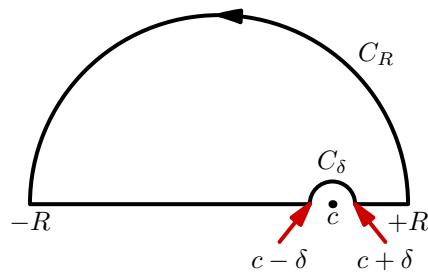


图 3.5.4

对于大圆弧积分, 我们可以用大圆弧定理或 Jordan 引理处理, 对于小圆弧  $C_\delta$  的积分, 则需要用到小圆弧定理.

## 第4章

### 向量代数与空间解析几何

“数缺形时少直观，形少数时难入微；  
数形结合百般好，隔离分家万事休。”

——华罗庚

向量代数与空间解析几何是数学中的一个重要分支，主要研究向量、向量空间和空间中的点、直线、平面等几何对象之间的关系。以下是向量代数与空间解析几何的几个重要概念和内容：

1. 向量：向量是表示大小和方向的量，通常用有序数对或有序数组表示。向量可以进行加法、数乘等运算，具有方向和模长（大小）的性质。在向量代数中，研究向量的性质、运算规则以及向量空间的结构。
2. 向量空间：向量空间是由一组向量构成的集合，满足一定的运算规则和性质，如封闭性、结合律、分配律等。向量空间是线性代数的基础，包括了向量的线性组合、线性相关性、线性无关性等概念。
3. 空间解析几何：空间解析几何是研究空间中点、直线、平面等几何对象的位置关系和性质的数学分支。通过向量代数的工具，可以方便地描述和研究空间中的几何问题，如点的坐标、直线的方程、平面的方程等。
4. 点、直线、平面的位置关系：在空间解析几何中，研究点、直线、平面之间的位置关系是一个重要的问题。通过向量的表示和运算，可以确定点是否在直线上、直线是否平行、平面是否垂直等问题。
5. 空间曲线与曲面：空间解析几何还涉及到空间曲线和曲面的研究，如参数方程、曲线的切线、曲面的法线等。通过向量代数和微积分的方法，可以描述和分析空间中的曲线和曲面的性质。

向量代数与空间解析几何是数学中的重要分支，它不仅在数学理论研究中有着重要作用，也在物理学、工程学、计算机图形学等应用领域有广泛的应用。

## 4.1 向量代数

### 4.1.1 模、方向角、投影

**定义 4.1.1 (投影).**  $\vec{a}$  在  $\vec{b}$  方向上的投影记为  $\text{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}$ , 且  $\text{Prj}_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ .

**例 4.1.1.** 设  $\vec{a} = (2, 1, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, -3, 1)$ , 试在  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  所决定的平面内, 求与  $\vec{a}$  垂直, 且模为  $\sqrt{93}$  的向量.

**法一:** 设所求向量为  $\vec{c} = (x, y, z)$ , 则由题设有  $\vec{c} \perp \vec{a} \times \vec{b}$ ,  $\vec{c} \perp \vec{a}$ ,  $|\vec{c}| = \sqrt{93}$ , 而  $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - 7\vec{k}$ , 于

是有  $\begin{cases} -2x - 3y - 7z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 93 \end{cases}$ , 解得  $x = \pm 5$ ,  $y = \mp 8$ ,  $z = \pm 2$ , 从而  $\vec{c} = \pm(5, -8, 2)$ .

**法二:** 设所求向量为  $\vec{c}$ , 则由题设有  $\vec{c} \perp \vec{a} \times \vec{b}$ ,  $\vec{c} \perp \vec{a}$ ,  $|\vec{c}| = \sqrt{93}$ , 于是  $\vec{c}/(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$ , 从而得

$$\vec{c} = |\vec{c}| \cdot \left( \pm \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}}{|(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}|} \right) = \pm(5, -8, 2).$$

**法三:** 设所求向量为  $\vec{c}$ , 则可设  $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = (2\lambda + \mu, \lambda - 3\mu, -\lambda + \mu)$ , 由已知  $\vec{c} \perp \vec{a}$  得  $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ , 即

$$2(2\lambda + \mu) + \lambda - 3\mu - (-\lambda + \mu) = 0$$

解得  $\mu = 3\lambda$ , 又  $|\vec{c}| = \sqrt{93}$ , 所以  $\sqrt{(2\lambda + \mu)^2 + (\lambda - 3\mu)^2 + (\mu - \lambda)^2} = \sqrt{93}$ , 代入  $\mu = 3\lambda$ , 得  $\lambda^2 = 1$ , 解得  $\lambda = \pm 1$ ,  $\mu = \pm 3$ , 故  $\vec{c} = \pm(5, -8, 2)$ .

**例 4.1.2.** 设向量  $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$  与  $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$  分别垂直于向量  $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$  与  $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ , 试求  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  之间的夹角.

因为  $(\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \perp (7\mathbf{a} - 5\mathbf{b})$ , 所以  $7\mathbf{a}^2 - 15\mathbf{b}^2 = -16\mathbf{a}\mathbf{b}$ , 同理可得  $7\mathbf{a}^2 + 8\mathbf{b}^2 = 30\mathbf{a}\mathbf{b}$ , 联立解得  $\begin{cases} \mathbf{b}^2 = 2\mathbf{a}\mathbf{b} \\ \mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 \end{cases}$ , 于是  $\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a}\mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{1}{2}$ , 因此  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  之间的夹角为  $\frac{\pi}{3}$ .

### 4.1.2 数量积、向量积、混合积

#### 数量积

**定义 4.1.2 (向量的数量积 (点乘积或内积)).** 向量  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$  与  $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$  的数量积是一个数  $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$  (其中  $0 \leq \widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \leq \pi$ ), 记作  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ . 若向量  $\mathbf{a}$  或  $\mathbf{b}$  为零向量时, 则定义  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ , 数量积  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  的坐标表示式为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

**定义 4.1.3 (向量正交).** 两个向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  垂直 (或称正交), 记作  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ , 特别地, 规定零向量与任一向量垂直.

数量积有以下基本性质:

$$(1) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}.$$

$$(2) (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

$$(3) (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}.$$

(4)  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$  的充分必要条件是  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ .

### 向量积

**定义 4.1.4 (向量的向量积 (又乘积或外积)).** 两个向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  的向量积是一个向量  $\mathbf{c}$ , 记为  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , 即  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ;  $\mathbf{c}$  的模等于  $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ ,  $\mathbf{c}$  的方向垂直于  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  所决定的平面, 且  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  顺次构成右手系. 若向量  $\mathbf{a}$  或  $\mathbf{b}$  为零向量时, 则定义  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ , 向量积  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  坐标表示式为

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

向量积有以下的性质:

$$(1) \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

$$(2) (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

$$(3) (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}.$$

(4)  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$  的充分必要条件是  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ .

**定理 4.1.1 (二重外积公式).**  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ .

**例 4.1.3 (2023 四川大学).** 设向量  $\vec{a} = (1, 2, 3)$ ,  $\vec{b} = (4, 5, 6)$ ,  $\vec{c} = (7, 8, 9)$ , 求  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ .

法一: 由向量积的计算公式计算  $\vec{b} \times \vec{c}$ :

$$\vec{b} \times \vec{c} = \left( \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \right) = (-3, 6, -3)$$

进一步计算  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ :

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \left( \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} \right) = (-24, -6, 12).$$

法二: 由二重外积公式:  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ , 其中

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 50, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 32$$

于是得  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (-24, -6, 12)$ .

**定理 4.1.2 (Lagrange 恒等式).** 对于任意两个向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$ , 满足以下恒等关系式:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \end{vmatrix}.$$

## 混合积

**定义 4.1.5 (向量的混合积).** 设  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}, \mathbf{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$ , 则称  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  为向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  的混合积, 记为  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ .

**定理 4.1.3 (共面条件).** 混合积是一数量, 其几何意义为: 混合积的绝对值等于以  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$  为相邻三条棱的平行六面体的体积. 因此, 向量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$  共面的充分必要条件是  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$ .

## 4.2 空间解析几何

### 4.2.1 空间平面与直线

**定理 4.2.1 (线轴夹角余弦平方和公式).** 设一直线与三坐标轴的夹角依次为  $\alpha, \beta, \gamma$ , 则有

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

证 设直线上一点坐标为  $P(x_0, y_0, z_0)$ , 坐标轴的单位向量依次为  $\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)$ , 由夹角余弦公式

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{i}|} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \\ \cos \beta = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{j}}{|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{j}|} = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \\ \cos \gamma = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{k}|} = \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \end{cases}$$

上式平方相加即得证.

**定理 4.2.2 (线面夹角余弦平方和公式).** 设一直线与三坐标平面的夹角依次为  $u, v, w$ , 则有

$$\cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 w = 2.$$

证 设直线与  $x, y, z$  轴的夹角依次为  $\alpha, \beta, \gamma$ , 于是有

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - u \\ \beta = \frac{\pi}{2} - v \\ \gamma = \frac{\pi}{2} - w \end{cases}$$

且  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ , 所以

$$\cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - u \right) + \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - v \right) + \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - w \right) = 1$$

即  $\sin^2 u + \sin^2 v + \sin^2 w = 1$ , 从而有  $\cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 w = 2$ .

### 4.2.2 空间平面、直线的方程及位置关系

#### 平面束方程

**例 4.2.1.** 试用平面束方程方法判断直线

$$L_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}, L_2 : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$$

是否在同一平面上, 若不在同一平面上, 试求两直线的距离.

$L_1$  的一般方程为  $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$ , 则平面束方程为

$$x - y + 1 + \lambda(2y - z + 1) = 0 \Rightarrow x + (2\lambda - 1)y - \lambda z + 1 + \lambda = 0$$

那么平面束的法向量为  $\vec{n} = (1, 2\lambda - 1, -\lambda)$ , 那么  $(1, 2\lambda - 1, -\lambda) \cdot (1, 3, 4) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ , 那么平面方程为  $x + y - z + 2 = 0$ , 但直线  $L_2$  上的一点  $(0, -1, 2)$ , 并不在该平面上, 故两直线不可能同一平面, 两直线的方向向量, 以及线上一点的坐标分别为

$$\vec{s}_1 = (1, 1, 2), P_1 = (-1, 0, 1), \vec{s}_2 = (1, 3, 4), P_2 = (0, -1, 2)$$

$$\text{故距离为 } d = \left| \overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \frac{(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} \right| = \left| (1, -1, 1) \cdot \frac{(-2, -2, 2)}{2\sqrt{3}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

### 4.2.3 曲面及其方程

#### 空间曲线绕直线旋转的曲面方程

**定理 4.2.3 (空间曲线绕直线旋转的曲面方程).** 设空间曲线  $\Gamma : \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ , 直线

$$L : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

记  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $\tau = (l, m, n)$ , 在曲线  $\Gamma$  上任取一点  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , 而过点  $M_1$  的纬圆上任意一点满足  $Q(x, y, z)$  方程

$$\begin{cases} l(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 \end{cases}$$

又因为  $M_1$  在母线  $\Gamma$  上, 满足母线的方程, 有

$$F(x_1, y_1, z_1) = 0, G(x_1, y_1, z_1) = 0$$

联立上述两个方程组消去参数  $x_1, y_1, z_1$ , 最后得到三元方程  $T(x, y, z) = 0$ , 即为以  $\Gamma$  为母线,  $L$  为旋转轴的旋转曲面的方程.

**例 4.2.2.** 已知点  $A(1, 0, 0)$  与点  $B(1, 1, 1)$ , 求由线段  $AB$  绕  $z$  轴旋转一周得到的旋转曲面方程.

由题意得

$$\begin{cases} z - z_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ x_1 = 1 \\ y_1 = z_1 \end{cases}$$

消去  $x_1, y_1, z_1$ , 得  $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

#### 曲面与直线的关系

**例 4.2.3.** 求曲面  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 1$  上的点与直线

$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y + 1}{4} = \frac{z + 1}{12}$$

的距离的最小值.

直线  $\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+1}{12}$  的参数方程为

$$\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 4t - 1 \\ z = 12t - 1 \end{cases}$$

直线上任意一点可表示为  $(3t - 1, 4t - 1, 12t - 1)$ , 球心的坐标为  $(2, 3, -1)$ , 那么有

$$d = \sqrt{(3t - 1 - 2)^2 + (4t - 1 - 3)^2 + (12t - 1 + 1)^2} - 1 = \sqrt{169\left(t - \frac{25}{169}\right)^2 + \frac{3600}{169}} - 1$$

$$\text{故最小值为 } d_{min} = \sqrt{\frac{3600}{169}} - 1 = \frac{47}{13}.$$

**例 4.2.4.** 在直角坐标系中, 球面  $S$  与直线  $L_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{6} = \frac{z-6}{4}$  相切于点  $A(1, -4, 6)$ , 与直线  $L_2 : \frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-6}$  相切于点  $B(4, -3, 2)$ .

- (1) 求球面  $S$  的方程;
- (2) 设点  $P$  为球面  $S$  上的动点, 过点  $P$  任作三条两两垂直的弦, 记它们的长度分别为  $a, b, c$ , 求证:  $a^2 + b^2 + c^2$  为定值.

(1) 设球心坐标为点  $Q(x, y, z)$ , 根据题意可知, 过点  $A$  且垂直于  $L_1$  的平面方程为

$$\Pi_1 : 3(x - 1) + 6(y + 4) + 4(z - 6) = 0 \quad (1)$$

同理, 过点  $B$  且垂直于  $L_2$  的平面方程为

$$\Pi_2 : 2(x - 4) + (y + 3) - 6(z - 2) = 0 \quad (2)$$

并且由  $|QA|^2 = |QB|^2$ , 可得

$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + (z - 6)^2 = (x - 4)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 \quad (3)$$

联立 (1)、(2) 和 (3) 解得球心坐标为  $Q(-5, 3, 0)$ , 易知, 球面半径为  $R = 11$ , 所以球面  $S$  的方程分别为

$$(x + 5)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 121.$$

(2) 通过平移, 可将球心平移至坐标原点, 其他参数保持不变, 再通过旋转, 可将三条两两垂直的弦旋转到与三条两两垂直的坐标轴平行, 设点  $P$  的坐标为  $(x, y, z)$ , 则三条弦与球面  $S$  交于点

$$E(-x, y, z), G(x, -y, z), H(x, y, -z)$$

因此

$$a^2 + b^2 + c^2 = |PE|^2 + |PG|^2 + |PH|^2 = 4(x^2 + y^2 + z^2) = 484.$$

## 切平面与法线

本小节内容需先了解“多元函数微分学”相关知识后阅读.

**定理 4.2.4 (切平面方程).** 曲面  $\Sigma : F(x, y, z) = 0$ , 在点  $P(x_0, y_0, z_0)$  处的切平面的法向量为

$$\mathbf{n} = (F'_x, F'_y, F'_z) \Big|_P$$

那么过点  $P$  的切平面方程方程为

$$F'_x(P)(x - x_0) + F'_y(P)(y - y_0) + F'_z(P)(z - z_0) = 0.$$

**定理 4.2.5 (法线方程).** 由定理 4.2.4 得到切平面的方程后, 其法线方程为

$$\frac{x - x_0}{F'_x(P)} = \frac{y - y_0}{F'_y(P)} = \frac{z - z_0}{F'_z(P)}.$$

**例 4.2.5 (2013 数一).** 曲面  $x^2 + \cos(xy) + yz + x = 0$  在点  $(0, 1, -1)$  处的切平面方程为

- A.  $x - y + z = -2$       B.  $x + y + z = 0$       C.  $x - 2y + z = -3$       D.  $x - y - z = 0$

$F(x, y, z) = x^2 + \cos(xy) + yz + x = 0$ ,  $P = (0, 1, -1)$ , 那么

$$F'_x(P) = 2x - y \sin(xy) + 1 \Big|_P = 1, F'_y(P) = -x \sin(xy) + z \Big|_P = -1, F'_z(P) = y \Big|_P = 1$$

于是法向量  $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$ , 切平面方程为

$$1 \cdot (x - 0) - 1 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z + 1) = 0 \Rightarrow (x - y + z = -2)$$

故选 A.

**例 4.2.6 (2014 数一).** 求曲面  $z = x^2(1 - \sin y) + y^2(1 - \sin x) - z$  在点  $(1, 0, 1)$  处的切平面方程.

$F(x, y, z) = x^2(1 - \sin y) + y^2(1 - \sin x) - z$ ,  $P = (1, 0, 1)$ , 那么

$$F'_x(P) = 2(1 - \sin y)x - y^2 \cos x \Big|_P = 2, F'_y(P) = -x^2 \cos y + 2(1 - \sin x)y \Big|_P = -1, F'_z(P) = -1$$

所以曲面的法向量为  $\mathbf{n} = (2, -1, -1)$ , 则切平面方程为

$$2(x - 1) + (-1)(y - 0) + (-1)(z - 1) = 0 \Rightarrow 2x - y - z = 1.$$

## 平面类型的讨论

**例 4.2.7.** 求直线  $\begin{cases} x = mt + a \\ y = nt + b \\ z = t \end{cases}$   $-\infty < t < +\infty$  绕  $Oz$  旋转一周所成曲面的方程, 并根据参数的不同取值讨论曲面的形状.

曲面的参数方程为  $\begin{cases} x = \sqrt{(mt+a)^2 + (nt+b)^2} \cos \theta \\ y = \sqrt{(mt+a)^2 + (nt+b)^2} \sin \theta \\ z = t, \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$  消去参数得  $x^2 + y^2 = (mz + a)^2 + (nz + b)^2$ , 于是

(1) 母线与  $z$  轴平行时 ( $m = n = 0$ ), 此时  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ , 为圆柱面;

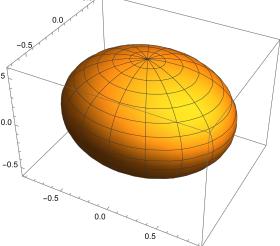
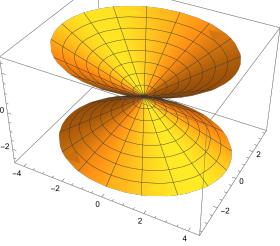
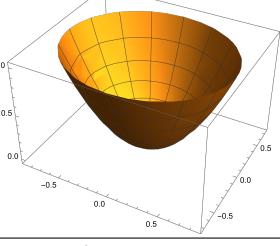
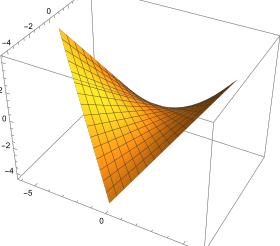
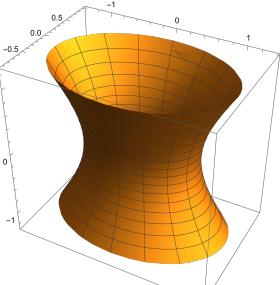
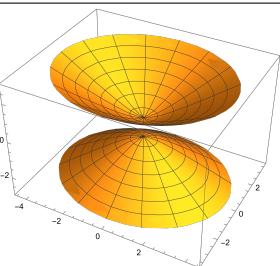
(2) 母线与  $z$  轴异面时 ( $mb - na \neq 0$ ), 此时  $x^2 + y^2 - (m^2 + n^2) \left( z + \frac{ma + nb}{m^2 + n^2} \right)^2 = \frac{(mb - na)^2}{m^2 + n^2}$ , 为旋转单叶双曲面;

(3) 母线与  $z$  轴相交时 ( $mb - na = 0$ ), 此时  $x^2 + y^2 = (m^2 + n^2) \left( z + \frac{ma + nb}{m^2 + n^2} \right)^2$ , 为直圆锥面.

## 常见的空间曲面及其方程

下表是常见的空间曲面及其对应的方程.

表 4.1: 空间曲面及其对应方程

| 曲面名称  | 图例  | 直角坐标系方程  | 参数方程  |
|-------|---|--|---|
| 椭球面   |    | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  | $\begin{cases} x = a \sin u \cos v \\ y = \sin u \sin v \\ z = c \cos u \\ u \in [0, \pi], v \in [0, 2\pi] \end{cases}$                                   |
| 椭圆锥面  |    | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$                  | $\begin{cases} x = av \cos u \\ y = bv \sin u \\ z = cv \\ u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R} \end{cases}$   |
| 椭圆抛物面 |   | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$                    | $\begin{cases} x = av \cos u \\ y = bv \sin u \\ z = u^2 \\ u \in [0, 2\pi], v \in [0, +\infty) \end{cases}$  |
| 双曲抛物面 |  | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$                    | $\begin{cases} x = a(u+v) \\ y = b(u-v) \\ z = 4uv \\ u, v \in \mathbb{R} \end{cases}$  |
| 单叶双曲面 |  | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  | $\begin{cases} x = a \cosh u \cos v \\ y = b \cosh u \sin v \\ z = c \sinh u \\ u \in \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi] \end{cases}$                            |
| 双叶双曲面 |  | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ | $\begin{cases} x = a\sqrt{u^2 - 1} \cos v \\ y = b\sqrt{u^2 - 1} \sin v \\ z = cu \\ u \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty), v \in \mathbb{R} \end{cases}$ |

### 4.2.4 空间曲线及其方程

#### 常见的曲线及其对应方程

**摆线** 摆线是一种具有特定形状的曲线，也被称为牛顿螺线或纽曼线。它是由一个固定点上的一根线不断转动而形成的曲线，其特点是曲线上每个点到固定点的距离与该点在曲线上的位置成正比。

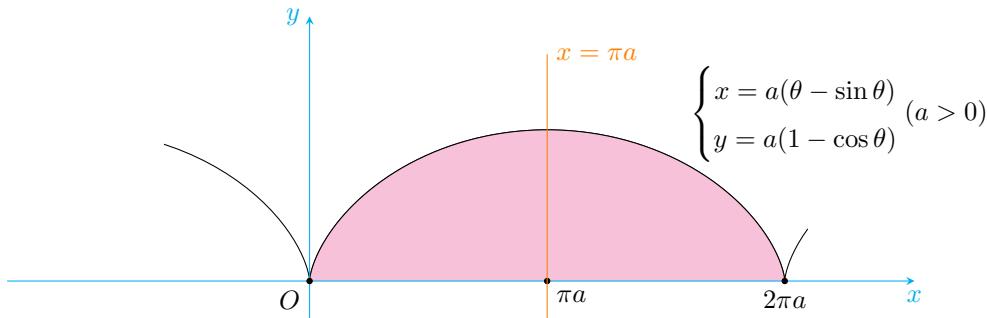


图 4.2.1: 摆线

**箕舌线** 箕舌线在数学中常用于曲线绘制和几何分析，具有一定的研究和应用价值。它的特殊形状和几何性质使其在数学教学和研究中具有一定的重要性。

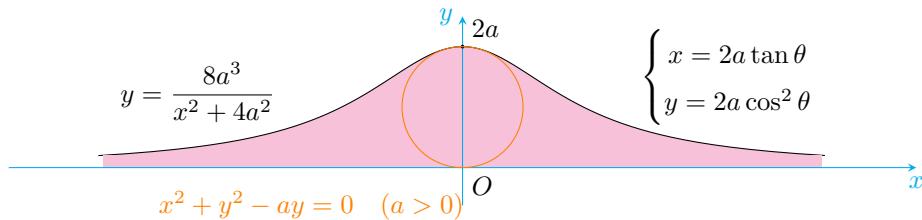


图 4.2.2: 箕舌线

**双纽线** 双纽线是一种特殊的曲线形状，也称为双纽结或双纽环。它是一种具有对称性的闭合曲线，形状类似于一个双环结构。双纽线的数学表达式通常可以用参数方程或极坐标方程表示。

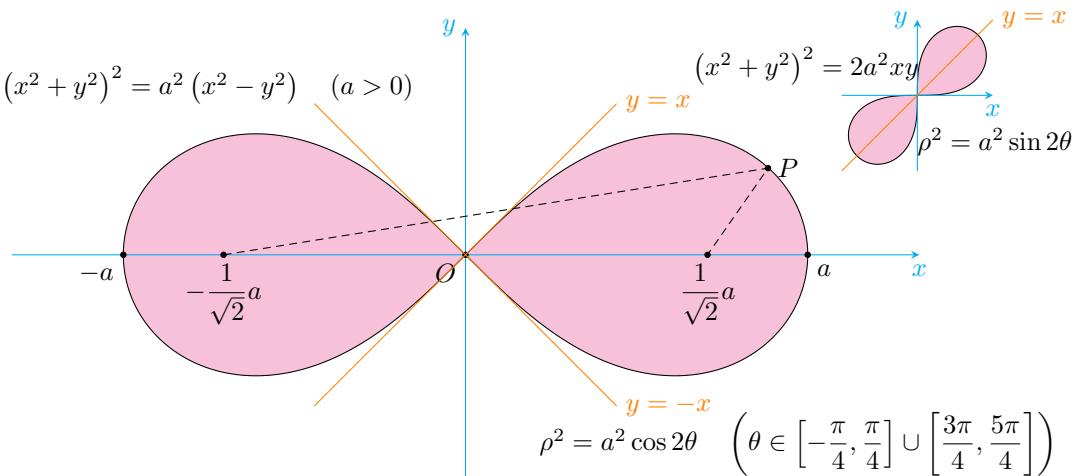


图 4.2.3: 双纽线

**对数螺线** 对数螺线是一种特殊的曲线形状, 也称为对数螺旋线或阿基米德螺线.

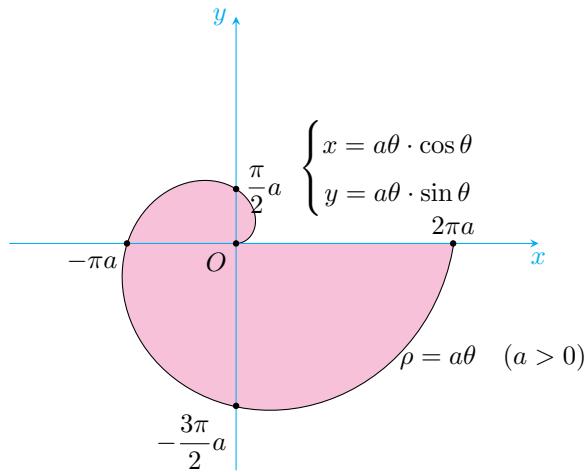


图 4.2.4: 对数螺线

**星形线** 在数学中, 星形线的定义比较宽泛, 可以包括多种形状. 例如, 五角星、六角星、七角星等都可以看作是一种星形线. 星形线的数学表达式可以有多种形式, 常见的包括极坐标方程、参数方程或直角坐标方程, 具体形式取决于所描述的具体星形线的形状和特征.

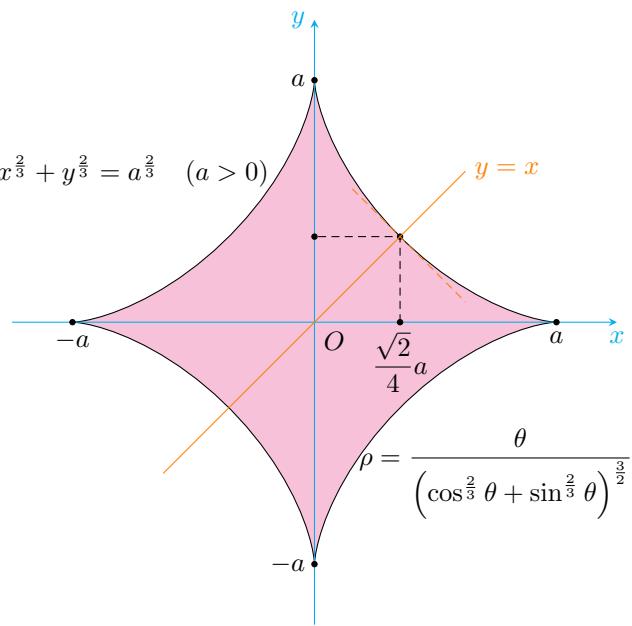


图 4.2.5: 星形线

**心形线** 心形线是一种具有象征意义和浪漫情感的特殊曲线形状，其外形类似于一个心形。在数学上，心形线可以用不同的数学表达式来描述，常见的包括参数方程、极坐标方程或直角坐标方程。

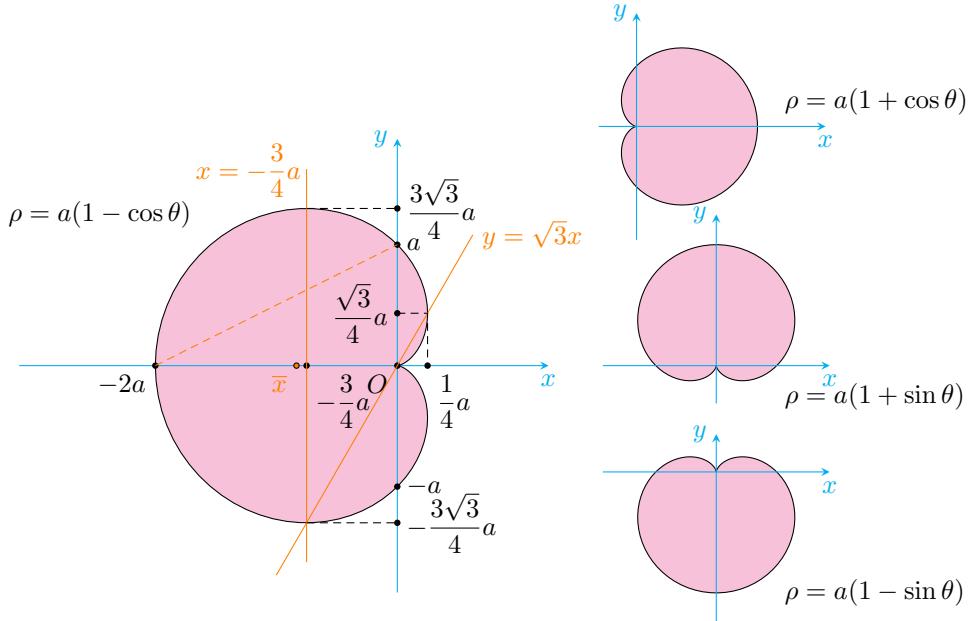


图 4.2.6: 心形线

**叶形线** 叶形线是一种特殊的曲线形状，其轮廓类似于植物叶子的形状，因此得名为叶形线。在数学上，

叶形线可以用不同的数学表达式来描述, 常见的包括参数方程、极坐标方程或直角坐标方程.

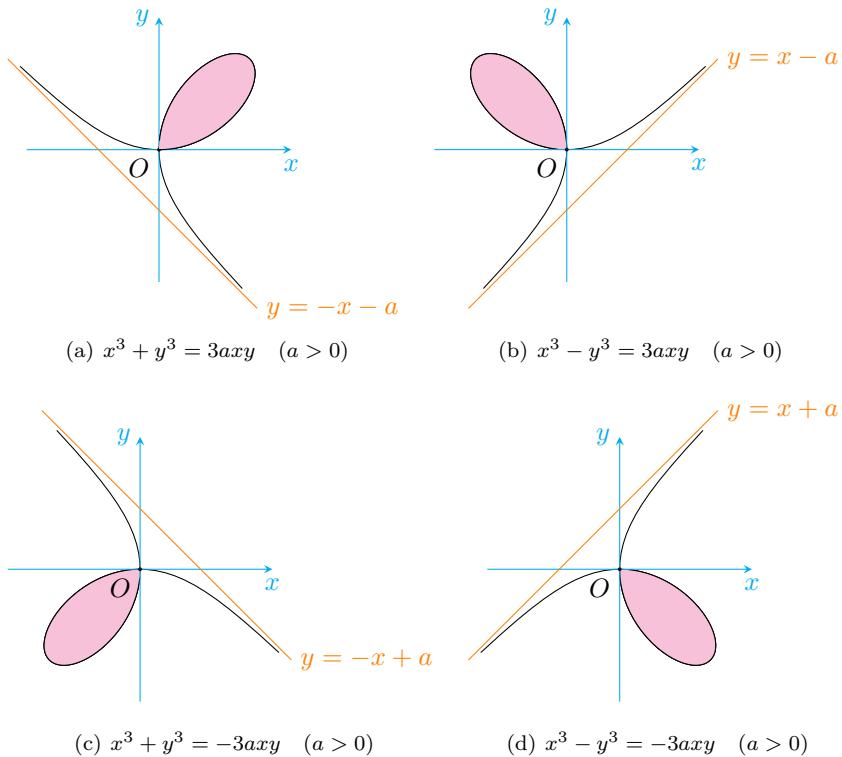


图 4.2.7: 叶形线

**玫瑰线** 玫瑰线是一种经典的数学曲线, 其形状类似于玫瑰花的花瓣. 玫瑰线的美妙之处在于其优美的几何形状和对称性, 不同的  $n$  值可以得到不同朵花瓣的玫瑰线, 每一朵花瓣都充满了艺术感和美感.

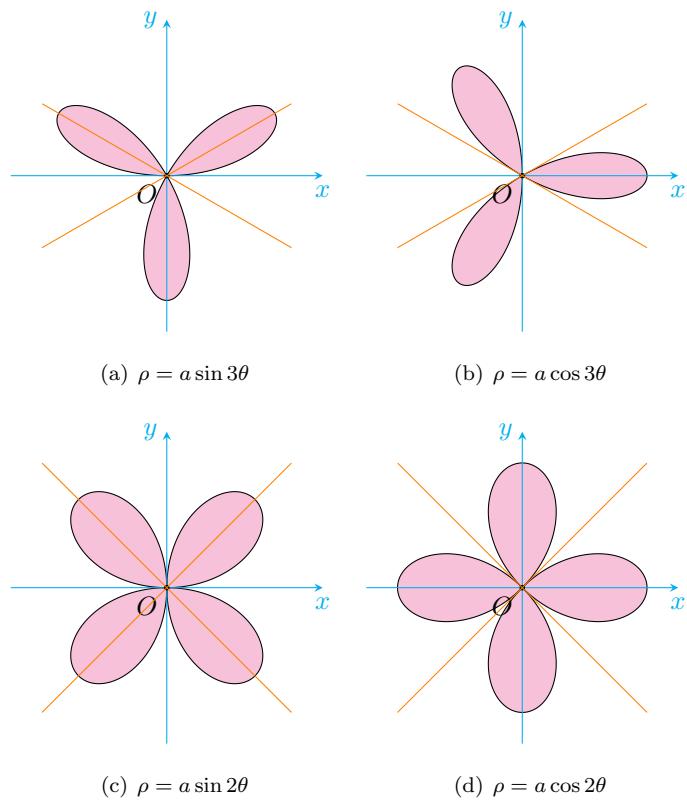


图 4.2.8: 玫瑰线

## 第 5 章

### 多元函数微分学

“立志于物理学的人，不懂下列的事情是不行的：

第一是数学，第二是数学，第三是数学。”

——伦琴

多元函数微分学是微积分的一个重要分支，主要研究多元函数的导数、偏导数、全微分以及相关的梯度、散度、旋度等概念。以下是多元函数微分学的几个重要内容和概念：

1. 多元函数：多元函数是指具有多个自变量的函数，通常表示为  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，其中  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是自变量。多元函数可以是标量值函数（只有一个输出值）或者矢量值函数（输出值是一个向量）。
2. 偏导数：对于多元函数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，它的偏导数表示函数在某一个自变量上的变化率，其他自变量保持不变。偏导数的计算类似于一元函数的导数，可以求得关于每个自变量的偏导数。
3. 全微分：多元函数的全微分是对函数的微小变化进行线性逼近的结果，它包含了所有偏导数的信息。全微分可以用来描述函数在某一点的局部性质，如切线、法线、极值等。
4. 梯度：对于标量值函数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，它的梯度是一个向量，表示函数在每个方向上的变化率。梯度的方向是函数增长最快的方向，梯度的大小表示函数的变化速率。
5. 散度和旋度：对于矢量值函数  $\mathbf{F}(x, y, z)$ ，它的散度和旋度分别描述了矢量场的发散和旋转性质。散度表示场的流入流出情况，旋度表示场的旋转程度。

多元函数微分学在物理学、工程学、经济学等领域有着广泛的应用，例如在物体运动、电磁场分析、优化问题等方面都需要用到多元函数微分学的知识。

## 5.1 多元函数的极限与连续

多元函数极限主要涉及到重极限、方向极限和累次极限等概念。重极限是指当自变量的数量趋于无穷大时，函数值的极限情况。方向极限则是在某一点沿特定方向的极限情况。累次极限涉及到函数值在多个变量上逐一取极限的情况。

多元函数的连续性则涉及到函数在每一点都连续, 即在该点的所有偏导数都存在且连续。连续性的判断不仅依赖于偏导数的存在性, 还涉及到偏导数的连续性。

### 5.1.1 多元函数的极限

**定义 5.1.1 (二元函数的极限).** 设二元函数  $f(x, y)$  在区间  $(a, b)$  的某去心邻域内有定义, 若  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$  时恒有

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

则称

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = A.$$

在二元函数极限的定义中, 动点  $(x, y)$  在  $(a, b)$  的邻近以任意路径趋向于点  $(a, b)$  时, 函数值  $f(x, y)$  与常数  $A$  需任意地接近。这些任意路径是不可能一一取到的。若取两条不同的路径让  $(x, y) \rightarrow (a, b)$ , 而  $f(x, y)$  取不同的极限, 则可推知:  $(x, y) \rightarrow (a, b)$  时  $f(x, y)$  的极限不存在。

通常求二元函数极限的方法如下:

- (1) 利用定义求极限;
- (2) 利用路径法;
- (3) 在  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  时化为极坐标求极限, 即  $(x, y) \rightarrow (0, 0) \Leftrightarrow \rho \rightarrow 0^+$ ;
- (4) 利用无穷小量乘以有界变量仍为无穷小量;
- (5) 利用夹逼准则求极限。

**例 5.1.1.** 用换元法求下列极限

$$(1) \lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{xy^2}{x^2 + y^2 + y^4}. \quad (2) \lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{3y^3 + 2x^2y}{x^2 - xy + y^2}. \quad (3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2) e^{x^2 y^2}}.$$

$$(1) \text{ 原式 } \underset{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{\lim_{\rho \rightarrow 0^+}} \frac{\rho^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{\rho^2 + \rho^4 \sin^4 \theta} = \cos \theta \sin^2 \theta \underset{\rho \rightarrow 0^+}{\lim} \frac{\rho}{1 + \rho^2 \sin^4 \theta} = 0.$$

$$(2) \text{ 原式 } \underset{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{\lim_{\rho \rightarrow 0^+}} (3 \sin^3 \theta + 2 \cos^2 \theta \sin \theta) \frac{\rho}{1 - \cos \theta \sin \theta} = 0.$$

$$(3) \text{ 原式 } \underset{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}}{\lim_{\rho \rightarrow 0^+}} \frac{1 - \cos \rho^2}{\rho^2 e^{\rho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}} = \underset{\rho \rightarrow 0^+}{\lim} \frac{\frac{1}{2} \rho^4}{\rho^2} = \underset{\rho \rightarrow 0^+}{\lim} \frac{\rho^2}{2} = 0.$$

**例 5.1.2.** 利用极坐标方法判断  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  当  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  时二重极限的存在性。

使用极坐标变换, 令  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ , 则  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \cos \theta \sin \theta$ , 因为极限值与  $\theta$  相关, 当  $\theta$  取不同值时, 函数具有不同的极限值, 因此该极限不存在。

**例 5.1.3.** 极限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$

A. 不存在

B. 等于 2

C. 等于  $\frac{1}{2}$

D. 等于 0

法一：令  $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$  于是原极限等于  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{2\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} = 2 \cos^2 \theta \sin \theta \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\rho^3}{\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} = \infty$ , 即不存在, 选 A.

法二：取  $x \rightarrow 0, y = x$ , 则有  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0, y=x} \frac{2x^2 \cdot x}{x^4 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0, y=x} \frac{2x^3}{(1+x^2)x^2} = 0$$

再取  $x \rightarrow 0, y = x^2$ , 同理  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0, y=x^2} \frac{2x^2 \cdot x^2}{x^4 + x^4} = 1$$

发现两条不同的趋向路径, 算出的极限值不同, 又因为极限值具有唯一性, 故原式的极限值不存在.

## 5.1.2 多元函数的连续性与可微性

**定义 5.1.2.** 若  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = f(a, b)$  则称  $f(x, y)$  在  $(a, b)$  内连续.

**定理 5.1.1.** 多元初等函数在其有定义的区域上连续.

**定理 5.1.2.** 若  $f(x, y)$  在有界闭域  $D$  上连续, 则  $f(x, y)$  在  $D$  上为有界函数,  $f(x, y)$  在  $D$  上取到最大值与最小值.

连续、偏导数存在、可微及偏导数连续之间的关系

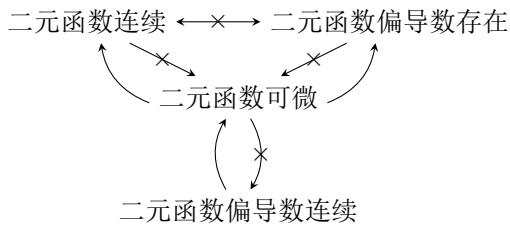


图 5.1.1

判断函数在某点处可微性的一般步骤

- (1) 判断  $f(x, y)$  在  $(a, b)$  处的两个偏导数是否存在, 若不存在, 则  $f(x, y)$  在  $(a, b)$  点不可微; 若存在, 则求出两个偏导数  $f'_x(a, b)$  和  $f'_y(a, b)$ ;
- (2) 求出  $(x, y) \neq (a, b)$  时的两个偏导函数  $f'_x(x, y)$  和  $f'_y(x, y)$ , 若它们在  $(a, b)$  点处连续, 则  $f(x, y)$  在该点处可微, 否则按 (3) 继续判断;

(3) 求二重极限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - f'_x(a,b)x - f'_y(a,b)y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

若极限等于 0, 则  $f(x,y)$  在  $(a,b)$  点可微, 否则 (包括极限不存在的情况) 不可微.

**例 5.1.4.** 设  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ ,  $z(t) = f(e^{2t} - 1, \arctan t)$ , 求  $z'(0)$ .

**错解.**  $z'(t) = f'_x \cdot (2e^{2t}) + f'_y \cdot \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow z'(0) = 2f'_x(0,0) + \frac{1}{2}f'_y(0,0)$ , 下求  $f'_x(0,0)$  和  $f'_y(0,0)$ , 由定义

$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0)}{x} = 0 \\ f'_y(0,0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y)}{y} = 0 \end{aligned}$$

那么  $z'(0) = 0$ .

**错因:** 只有函数  $z = f(u,v)$  在对应点  $(u,v)$  具有连续偏导数, 那么复合函数  $z = f[\varphi(u,v), \psi(u,v)]$  在点  $(x,y)$  的两个偏导数才存在. 对于本题, 即外层函数  $f$  在  $(0,0)$  可微, 才能使用链式求导法则.

先判断  $f$  在  $(0,0)$  处是否可微,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\stackrel{x=\rho \cos \theta, y=\rho \sin \theta}{=} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^3} = \cos^2 \theta \sin \theta \neq 0 \end{aligned}$$

则  $f$  在  $(0,0)$  处不可微, 于是

$$z'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{z(t) - z(0)}{t-0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(e^{2t}-1)^2 \arctan t}{t[(e^{2t}-1)^2 + \arctan^2 t]} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t^2}{4t^2 + t^2 + o(t^2)} = \frac{4}{3}.$$

**例 5.1.5.** 已知函数  $f(x,y) = f(x,y) = \begin{cases} \frac{1 - e^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$  讨论  $f(x,y)$  在点  $(0,0)$  处的连续性与可微性.

**连续性证明**

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - e^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2} = - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

即  $f(x,y)$  在  $(0,0)$  处连续;

**可微性证明**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - e^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{x^3}}{x^3} = -1 = f'_x(0,0) \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} &= 0 = f'_y(0,0) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\frac{1 - e^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2} - 0 - (-1)x - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\frac{1 - e^{x(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \stackrel{x=\rho \cos \theta, y=\rho \sin \theta}{=} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1 - e^{\rho^3 \cos^2 \theta + \rho^3 \cos \theta}}{\rho^3} + \rho^3 \cos \theta}{\rho^3} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{-\rho^3 \cos \theta + \rho^3 \cos \theta + o(\rho^3 \cos \theta)}{\rho^3} = 0 \end{aligned}$$

故  $f(x,y)$  在  $(0,0)$  处可微.

**例 5.1.6.** 设  $f'(0) = k$ , 试证明  $\lim_{\substack{a \rightarrow 0^- \\ b \rightarrow 0^+}} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = k$ .

证 用拟合法,  $k = \frac{b}{b-a} \cdot k - \frac{a}{b-a} \cdot k$ , 那么

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b}{b - a} \cdot \frac{f(b) - f(0)}{b - 0} - \frac{a}{b - a} \cdot \frac{f(a) - f(0)}{a - 0}$$

因为  $a < 0 < b$ , 得  $\left| \frac{a}{b-a} \right| < 1, \left| \frac{b}{b-a} \right| < 1$ .

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - k \right| &\leq \left| \frac{b}{b-a} \right| \cdot \left| \frac{f(b) - f(0)}{b-0} - k \right| + \left| \frac{a}{b-a} \right| \cdot \left| \frac{f(a) - f(0)}{a-0} - k \right| \\ &\leq \left| \frac{f(b) - f(0)}{b-0} - k \right| + \left| \frac{f(a) - f(0)}{a-0} - k \right| \rightarrow 0 \quad (a \rightarrow 0^-, b \rightarrow 0^+). \end{aligned}$$

**例 5.1.7.** 讨论如下向量函数的连续性: 设  $(u, v) = F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ , 其中

$$u = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{(x^2 + y^2)^\alpha} \ln(|x| + |y|), & \text{当 } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x^2 + y^2 = 0 \text{ 时} \end{cases}$$

$$v = g(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{(x^2 + y^2)^\alpha} \ln(|x| + |y|), & \text{当 } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x^2 + y^2 = 0 \text{ 时} \end{cases}.$$

显然  $f(x, y), g(x, y)$  当  $x^2 + y^2 \neq 0$  时连续, 因此  $(x, y) \neq (0, 0)$  时  $F$  连续. 下面只研究  $(0, 0)$  点的情况, 因为

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{2\alpha}} \ln^2(|x| + |y|) = (x^2 + y^2)^{1-2\alpha} \ln^2(|x| + |y|) \\ &\rightarrow \begin{cases} 0, & \text{当 } \alpha < \frac{1}{2} \text{ 时} \\ +\infty, & \text{当 } \alpha \geq \frac{1}{2} \text{ 时} \end{cases} \quad (r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow 0 \text{ 时}). \end{aligned}$$

故当且仅当  $\alpha < \frac{1}{2}$  时  $F$  在点  $(0, 0)$  连续, 下面对上式中的极限进行补充证明. 当  $\alpha \geq \frac{1}{2}$  时, 显然极限为  $+\infty$ . 现设  $\alpha < \frac{1}{2}$ , 记  $\mu = 1 - 2\alpha$ , 则  $\mu > 0$ ,

$$(x^2 + y^2)^{1-2\alpha} \ln^2(|x| + |y|) = \frac{(x^2 + y^2)^\mu}{(|x| + |y|)^{2\mu}} \cdot (|x| + |y|)^{2\mu} \ln^2(|x| + |y|)$$

这时

$$0 \leq \frac{(x^2 + y^2)^\mu}{(|x| + |y|)^{2\mu}} = \frac{(x^2 + y^2)^\mu}{(x^2 + 2|x||y| + y^2)^\mu} \leq \frac{(x^2 + y^2)^\mu}{(x^2 + y^2)^\mu} = 1$$

但  $(|x| + |y|)^{2\mu} \ln^2(|x| + |y|) \rightarrow 0$ , 所以

$$(x^2 + y^2)^{1-2\alpha} \ln^2(|x| + |y|) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0).$$

### 5.1.3 二元函数的 Taylor 展开

**定理 5.1.3 (二元函数的 Taylor 展开唯一性).** 假设  $f(x, y)$  具有  $n+1$  阶连续偏导数, 若用某种方法得到展开式:

$$f(x, y) = \sum_{i+j=0}^n A_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j + o(\rho^n)$$

其中  $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ , 则必有

$$A_{ij} = \left. \frac{C_{i+j}^i}{(i+j)!} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} f(x, y) \right|_{(x_0, y_0)} = \frac{1}{i! j!} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} f(x_0, y_0).$$

**例 5.1.8.** 设  $f(x, y)$  连续,  $f(0, 0) = 0$ ,  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处可微且  $f'_y(0, 0) = 1$ , 求

$$I = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^3} dt \int_{\sqrt[3]{t}}^x f(t, u) du}{1 - \sqrt[3]{1 - x^5}}.$$

当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $1 - \sqrt[3]{1 - x^5} \sim \frac{1}{3}x^5$ , 考虑交换积分次序,

$$\int_0^{x^3} dt \int_{\sqrt[3]{t}}^x f(t, u) du = \iint_{\substack{0 \leq t \leq x^3 \\ 0 \leq u \leq t}} f(t, u) dt du = \int_0^x du \int_0^{u^3} f(t, u) dt$$

于是,

$$I = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x du \int_0^{u^3} f(t, u) dt}{\frac{1}{3}x^5} \stackrel{L'}{=} 3 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^3} f(t, x) dt}{5x^4} \stackrel{L'}{=} 3 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 f(x^3, x)}{20x^3} = \frac{9}{20} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x^3, x)}{x}$$

其中  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x^3, x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(\xi, x)}{x}$ ,  $\xi \in (0, x^3)$ , 由二元函数的 Taylor 公式可得:

$$f(\xi, x) = f(0, 0) + f'_x(0, 0)\xi + f'_y(0, 0)x + o(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(\xi, x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(0, 0) + f'_x(0, 0)\xi + f'_y(0, 0)x + o(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{f'_x(0, 0)\xi}{x} + f'_y(0, 0) + \frac{o(x)}{x} \right] = 1$$

其中  $\left| \frac{f'_x(0, 0)\xi}{x} \right| < \frac{f'_x(0, 0)x^2}{x} \rightarrow 0$ , 于是原式  $= \frac{9}{20}$ .

## 5.2 多元函数的偏导数

在多元函数中, 偏导数是描述函数对于各个自变量的变化率的概念. 对于一个多元函数  $f(\mathbf{x})$ , 其中  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 对于第  $i$  个自变量  $x_i$  的偏导数记作  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ , 表示在其他自变量保持不变的情况下, 函数  $f$  对于  $x_i$  的变化率.

### 5.2.1 偏导数与隐函数

#### 偏导数

**定义 5.2.1 (偏导数).** 函数  $f$  对  $x$  在  $(a, b)$  处的偏导为:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a, b)} = f'_x(a, b) = \lim_{\square \rightarrow 0} \frac{f(a + \square, b) - f(a, b)}{\square} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}.$$

**例 5.2.1.** 设  $z = uv$ ,  $x = e^u \cos v$ ,  $y = e^u \sin v$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ .

$$\begin{cases} x = e^u \cos v \\ y = e^u \sin v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \\ v = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \cdot \arctan \frac{y}{x}, \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{x}{x^2 + y^2} \arctan \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \cdot \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{y}{x^2 + y^2} \arctan \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

**例 5.2.2 (2012 数二).** 设  $z = f\left(\ln x + \frac{1}{y}\right)$ , 其中函数  $f(u)$  可微, 求  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y}$ .

易得  $\frac{\partial z}{\partial x} = f' \cdot \frac{1}{x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -f' \cdot \frac{1}{y^2}$ , 于是  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ .

**例 5.2.3 (2015 数二).** 设函数  $f(u, v)$  满足  $f(x+y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$ , 则  $\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{\substack{u=1 \\ v=1}}$  与  $\frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{\substack{u=1 \\ v=1}}$  依次是

- A.  $\frac{1}{2}, 0$       B.  $0, \frac{1}{2}$       C.  $-\frac{1}{2}, 0$       D.  $0, -\frac{1}{2}$

法一: 令  $u = x+y$ ,  $v = \frac{y}{x}$ , 解得  $\begin{cases} x = \frac{u}{1+v} \\ y = \frac{u}{1+v} \end{cases}$  那么  $f(u, v) = \frac{u^2(1-v^2)}{(1+v)^2} = \frac{u^2(1-v)}{1+v}$ , 于是

$$\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{\substack{u=1 \\ v=1}} = \frac{2u(1-v)}{1+v}\Big|_{\substack{u=1 \\ v=1}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{\substack{u=1 \\ v=1}} = \frac{-2u^2}{(1+v)^2}\Big|_{\substack{u=1 \\ v=1}} = -\frac{1}{2}.$$

法二: 令  $u = x+y$ ,  $v = \frac{y}{x}$ , 当  $u=v=1$  时, 解得  $x=y=\frac{1}{2}$ , 方程  $f(x+y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$  两边分别对  $x$ ,  $y$  求偏导数, 得

$$f'_u + f'_v\left(-\frac{y}{x^2}\right) = 2x, \quad f'_u + f'_v \frac{1}{x} = -2y$$

把  $x=y=\frac{1}{2}$  代入上两式, 最终解得选 D.

**例 5.2.4 (2009 数二).** 设  $z = (x + e^y)^x$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}$ .

由  $z = (x + e^y)^x$ , 得  $z(x, 0) = (x+1)^x$ , 那么

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)} = \frac{d}{dx}(x+1)^x\Big|_{x=1} = \frac{d}{dx}e^{x \ln(x+1)}\Big|_{x=1} = e^{x \ln(x+1)} \left[ \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} \right]\Big|_{x=1} = 2 \ln 2 + 1.$$

**例 5.2.5.** 设  $u = f(x, y, z)$  有连续的一阶偏导数, 又函数  $y = y(x)$  及  $z = z(x)$  分别由下列两式确定:  $e^{xy} - xy = 2$  和  $e^x = \int_0^{x-t} \frac{\sin t}{t} dt$ , 求  $\frac{du}{dx}$ .

$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}$ , 由  $e^{xy} - xy = 2$  可得  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ , 方程  $e^x = \int_0^{x-t} \frac{\sin t}{t} dt$  两边对  $x$  求导,

$$e^x = \frac{\sin(x-z)}{x-z} \cdot \left(1 - \frac{dz}{dx}\right) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 - \frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}$$

代入  $\frac{dz}{dx}$ , 得  $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial y} + \left[1 - \frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right] \frac{\partial f}{\partial z}$ .

**例 5.2.6.** 函数  $f(x, y) = x + (y-1) \arcsin \sqrt{\frac{|x|}{y}}$  在  $(0, 1)$  处

- |                                  |                           |
|----------------------------------|---------------------------|
| A. $f'_x(0, 1) = f'_y(0, 1) = 1$ | B. $df\Big _{(0,1)} = dy$ |
| C. $df\Big _{(0,1)} = dx$        | D. $df\Big _{(0,1)}$ 不存在  |

因为  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \left[ x + (y-1) \arcsin \sqrt{\frac{|x|}{y}} \right] = 0$ , 于是

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + \Delta x, 1) - f(0, 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x + (1-1) \arcsin \sqrt{\frac{\Delta x}{1}}}{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + \Delta x, 1) - f(0, 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta x + (1 - 1) \arcsin \sqrt{\frac{-\Delta x}{1}}}{\Delta x} = 1$$

则  $f'_x(0, 1) = 1$ , 同理可得  $f'_y(0, 1) = 0$ , 并且

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(0 + \Delta x, 1 + \Delta y) - f(0, 1) - [f'_x(0, 1)\Delta x + f'_y(0, 1)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x + (\Delta y) \arcsin \sqrt{\frac{|\Delta x|}{1 + \Delta y}} - 0 - \Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \arcsin \sqrt{\frac{|\Delta x|}{1 + \Delta y}} \cdot \frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0 \left( \arcsin \sqrt{\frac{|\Delta x|}{1 + \Delta y}} \rightarrow 0, \left| \frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right| \leq 1 \right) \end{aligned}$$

故  $f(x, y)$  在  $(0, 1)$  处可微, 所以  $df \Big|_{(0,1)} = 1 \cdot dx + 0 \cdot dy = dx$ , 选 C.

## 隐函数

**定理 5.2.1 (隐函数存在定理 A).** 设函数  $F(x, y, z)$  在点  $P(x_0, y_0, z_0)$  的某一邻域内具有连续偏导数, 且

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

则方程  $F(x, y, z) = 0$  在点  $P(x_0, y_0, z_0)$  的某一邻域内能确定唯一一个连续且具有连续导数的函数  $z = f(x, y)$ , 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

**定理 5.2.2 (隐函数存在定理 B).** 由方程组确定的隐函数的导数, 方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

若在  $P_0$  某邻域内偏导连续,  $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$  且  $G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ ,  $J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$  在

$P_0$  处不等于 0, 则可确定一个隐函数组  $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ , 其唯一、连续、偏导也连续, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}$$

**例 5.2.7.** 设  $F(x, y, z)$  连续可偏导,  $F_y \cdot F_z \neq 0$ , 且  $F(1, 1, -2) = 0$ , 则在点  $(1, 1, -2)$  邻域内, 由  $F(x, y, z) = 0$

A. 既可确定  $x$  为  $y, z$  的二元函数, 也可确定  $y$  为  $x, z$  的二元函数

- B. 既可确定  $x$  为  $y, z$  的二元函数, 也可确定  $z$  为  $x, y$  的二元函数
- C. 既可确定  $y$  为  $x, z$  的二元函数, 也可确定  $z$  为  $x, y$  的二元函数
- D. 可确定  $x$  为  $y, z$  的二元函数,  $y$  为  $x, z$  的二元函数,  $z$  为  $x, y$  的二元函数

根据定理 5.2.1,  $F(x, y, z) = 0$  确定的隐函数  $z = z(x, y)$  的偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

因此确定  $z$  为  $x, y$  的二元函数, 需要  $F_z \neq 0$ ; 确定  $x$  为  $y, z$  的二元函数, 需要  $F_x \neq 0$ ; 确定  $y$  为  $x, z$  的二元函数, 需要  $F_y \neq 0$ , 而  $F_y \cdot F_z \neq 0$  得  $F_y \neq 0, F_z \neq 0$ , 因此可确定  $y$  为  $x, z$  的二元函数, 也可确定  $z$  为  $x, y$  的二元函数, 故选 C.

**例 5.2.8 (2018 数三).** 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $\ln z + e^{z-1} = xy$  确定, 求  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2, \frac{1}{2})}$ .

法一: 求偏导,  $\frac{1}{z} \cdot z'_x + e^{z-1} \cdot z'_x = y$ , 代入  $x = 2, y = \frac{1}{2}, z = 1$ , 求得  $z'_x \left(2, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ .

法二: 求全微分:  $\frac{1}{z} dz + e^{z-1} dz = y dx + x dy \Rightarrow dz = \frac{yz}{1+ze^{z-1}} dx + \frac{xz}{1+ze^{z-1}} dy$ , 那么  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2, \frac{1}{2})} = \frac{1}{4}$ .

法三: 公式法: 令  $F(x, y, z) = \ln z + e^{z-1} - xy$ , 那么  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2, \frac{1}{2})} = -\left. \frac{F_x}{F_y} \right|_{(2, \frac{1}{2})} = \left. \frac{y}{\frac{1}{z} + e^{z-1}} \right|_{(2, \frac{1}{2})} = \frac{1}{4}$ .

## 5.2.2 全微分形式不变性

**定义 5.2.2 (全微分的定义).** 设点  $P_0(x_0, y_0)$  为  $f(x, y)$  定义域  $D$  的一个内点, 如果函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处的全增量  $\Delta z$  可表示为

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

其中  $A, B$  是与  $\Delta x, \Delta y$  无关的常量, 则称函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处可微, 并称函数  $z = f(x, y)$  的全增量  $\Delta z$  的线性主部  $A\Delta x + B\Delta y$  为函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处的全微分, 记作

$$dz = A\Delta x + B\Delta y = Adx + Bdy \quad (dx = \Delta x, dy = \Delta y)$$

当函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处可微时, 有

$$dz = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy.$$

**定理 5.2.3 (全微分的形式不变性).** 设函数  $z = f(u, v), u = \varphi(x, y)$  及  $v = \psi(x, y)$  分别具有连续偏导数, 则  $z = f(u, v)$  的全微分

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

若把  $u$  和  $v$  视为中间变量, 则复合函数  $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$  的全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

不论是  $u$  和  $v$  自变量还是中间变量, 以上微分形式保持不变, 这一性质称为一阶全微分形式不变性.

**例 5.2.9.** 设  $xu - yv = 0, yu + xv = 1$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ .

**法一:** 记  $F(x, y, u, v) = xu - yv, G(x, y, u, v) = yu + xv - 1$ , 则方程组化为  $\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$  于是由公式知, 在

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2 \neq 0$$

条件下, 有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} u & -y \\ v & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}$$

同理可得,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(y, v)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}} = -\frac{xv - yu}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}.$$

**法二:** 直接推导法, 由题意  $u = u(x, y), v = v(x, y)$ , 方程组两边对  $x$  求导, 得

$$\begin{cases} u + x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ y\frac{\partial u}{\partial x} + v + x\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial v}{\partial x} = -u \\ y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial v}{\partial x} = -v \end{cases}$$

当  $J = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2 \neq 0$  时, 解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2}$$

同理, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}.$$

**法三:** 利用全微分形式不变性, 方程组  $xu - yv = 0, yu + xv = 1$  两边分别微分, 得

$$\begin{cases} udx + xdu - ydv - vdy = 0 \\ vdx + ydu + xdv + udy = 0 \end{cases}$$

第 1 个方程两边乘以  $x$  加上第 2 个方程两边乘以  $y$ , 消去  $dv$ , 得

$$du = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}dx + \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}dy$$

于是由全微分形式不变性, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}$$

同理, 消去  $du$ , 得

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}.$$

**例 5.2.10.** 设  $f(x, y) = x \cos \frac{x}{y} + (2-y) \ln \arctan \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ , 求  $f'_x(0, 2)$ .

利用全微分不变性,

$$df(x, y) = \cos \frac{x}{y} dx - x \sin \frac{x}{y} \cdot \frac{ydx - xdy}{y^2} - \ln \arctan \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dy$$

因为  $df(0, 2) = dx - \ln \arctan(-1)dy$ , 所以  $f_x(0, 2) = 1$ .

**例 5.2.11.** 设  $z = z(x, y)$  是由  $x - 2z = e^{y+3z} - 1$  所确定的函数, 求  $2\frac{\partial z}{\partial x} - 3\frac{\partial z}{\partial y}$ .

由全微分的形式不变性, 得  $dx - 2dz = e^{y+3z}(dy + 3dz)$ , 即

$$dz = \frac{1}{3e^{y+3z} + 2}dx - \frac{e^{y+3z}}{3e^{y+3z} + 2}dy$$

于是  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3e^{y+3z} + 2}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{e^{y+3z}}{3e^{y+3z} + 2}$ , 那么  $2\frac{\partial z}{\partial x} - 3\frac{\partial z}{\partial y} = 1$ .

**例 5.2.12.** 设  $e^x - xyz = 0$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

由方程  $e^x - xyz = 0$  两边分别求微分, 得

$$e^x dx - yzdx + xzdy + xydz = 0$$

整理得,  $dz = \frac{yz - e^x}{xy} dx - \frac{z}{y} dy$ , 由全微分不变性, 得  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz - e^x}{xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z}{y}$ ,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{yz - e^x}{xy} \right) = \frac{\frac{\partial z}{\partial x} - e^x}{y} = \frac{yz - e^x(1 + xy)}{xy^2}.$$

**例 5.2.13.** 设  $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ .

由方程  $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$  两边分别求微分, 得

$$\frac{zdx - xdz}{z^2} = \frac{y}{z} \cdot \frac{ydz - zdy}{y^2}$$

整理得,  $dz = \frac{z}{x+z} dx + \frac{z^2}{y(x+z)} dy$ , 由全微分不变性, 得  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x+z}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y(x+z)}$ .

**例 5.2.14.** 设  $z + e^z = xy$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

由方程  $z + e^z = xy$  两边分别求微分, 得

$$dz + e^z dx = ydx + xdy$$

整理得,  $dz = (y - e^z)dx + xdy$ , 由全微分不变性, 得  $\frac{\partial z}{\partial x} = y - e^z, \frac{\partial z}{\partial y} = x$ ,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (y - e^z) = 1.$$

**例 5.2.15.** 设  $z = z(x, y)$  是由  $ze^x = xy$  所确定的函数, 求  $dz, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

由方程  $ze^x = xy$  两边分别求微分, 得

$$e^x dz + ze^x dx = ydx + xdy$$

整理得,  $dz = \frac{y - ze^x}{e^x} dx + \frac{x}{e^x} dy$ , 由全微分不变性, 得  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y - ze^x}{e^x}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{e^x}$ ,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y - ze^x}{e^x} \right) = e^{-x} \left( 1 - \frac{\partial z}{\partial y} e^x \right) = \frac{1-x}{e^x}.$$

**例 5.2.16 (2006 年江苏省高等数学竞赛题).** 已知由  $x = ze^{y+z}$  可确定  $z = z(x, y)$ , 求  $dz|_{(e,0)}$ .

由方程  $x = ze^{y+z}$  两边分别求微分, 得

$$dx = e^{y+z} dz + ze^{y+z} (dz + dy)$$

整理得,  $dz = \frac{1}{e^{y+z}(1+z)} - \frac{z}{1+z} dy$ , 所以  $dz|_{(e,0)} = \frac{1}{2e} dx - \frac{1}{2} dy$ .

**例 5.2.17 (2015 数二).** 若函数  $z = z(x, y)$  由方程  $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$  所确定, 求  $dz|_{(0,0)}$ .

由方程  $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$  两边分别求微分, 得

$$e^{x+2y+3z} (dx + 2dy + 3dz) + yzdx + xzdy + xydz = 0$$

整理得,  $dz = -\frac{e^{x+2y+3z} + yz}{3e^{x+2y+3z} + xy} dx - \frac{2e^{x+2y+3z} + xz}{3e^{x+2y+3z} + xy} dy$ , 所以  $dz|_{(0,0)} = -\frac{1}{3} dx - \frac{2}{3} dy$ .

**例 5.2.18 (2016 数一).** 设函数  $f(u, v)$  可微,  $z = z(x, y)$  由方程  $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$  确定, 求  $dz|_{(0,1)}$ .

由方程  $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$  两边分别求微分, 得

$$zdx + (x+1)dz - 2ydy = 2xdx \cdot f(x-z, y) + x^2 [f'_1(dx - dz) + f'_2 dy]$$

$$\text{整理得, } dz = \frac{2xf(x-z, y) + x^2 f'_1 - z}{x+1} dx + \frac{2y + x^2 f'_2}{x+1} dy, \text{ 所以 } dz|_{(0,1)} = -dx + 2dy.$$

**例 5.2.19 (第九届数学竞赛决赛).** 设函数  $f(x, y)$  具有一阶连续偏导数, 且满足

$$df(x, y) = ye^y dx + x(1+y)e^y dy$$

及  $f(0, 0) = 0$ , 求  $f(x, y)$ .

对方程  $df(x, y) = ye^y dx + x(1+y)e^y dy$  两边积分, 有  $f(x, y) = xye^y + C$ , 又  $f(0, 0) = 0$ , 所以  $f(x, y) = xye^y$ .

**例 5.2.20 (2021 数一).** 设函数  $f(x, y)$  可微, 且  $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$ ,  $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$ , 则  $df(1, 1)$

- A.  $dx + dy$       B.  $dx - dy$       C.  $dy$       D.  $-dy$

由题意  $\begin{cases} f'_1(x+1, e^x) + e^x f'_2(x+1, e^x) = (x+1)^2 + 2x(x+1) \\ f'_1(x, x^2) + 2x f'_2(x, x^2) = 4x \ln x + 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_1(1, 1) + f'_2(1, 1) = 1 \\ f'_1(1, 1) + 2f'_2(1, 1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_1(1, 1) = 0 \\ f'_2(1, 1) = 1 \end{cases}$ , 因此

$$df(1, 1) = f'_1(1, 1)dx + f'_2(1, 1)dy = dy$$

故选 C.

**例 5.2.21.** 设函数  $f(x, y)$  可微且  $\begin{cases} f(x+1, \ln(x+1)) = (x+1)^3 + x \ln(x+1)(x+1)^{\ln(x+1)} \\ f(x^2, x-1) = x^4 e^{x-1} + (x-1)(x^2-1)x^{2(x-1)} \end{cases}$

则  $df(1, 0)$

- A.  $dx + dy$       B.  $dx - dy$       C.  $2dx + dy$       D.  $dx - 2dy$

令  $g(x) = x \ln(x+1)(x+1)^{\ln(x+1)}$ ,  $h(x) = (x-1)(x^2-1)x^{2(x-1)}$ , 那么

$$\begin{cases} f(x+1, \ln(x+1)) = (x+1)^3 + g(x) \\ f(x^2, x-1) = x^4 e^{x-1} + h(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_1(x+1, \ln(x+1)) + \frac{1}{x+1} f'_2(x+1, \ln(x+1)) = 3(x+1)^2 + g'(x) \\ 2x f'_1(x^2, x-1) + f'_2(x^2, x-1) = 4x^3 e^{x-1} + x^4 e^{x-1} + h'(x) \end{cases}$$

则  $\begin{cases} f'_1(1, 0) + f'_2(1, 0) = 3 + g'(0) \\ 2f'_1(1, 0) + f'_2(1, 0) = 5 + h'(1) \end{cases}$  其中

$$g'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(o + \Delta x) - g(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln(\Delta x + 1)(\Delta x + 1)^{\ln(\Delta x + 1)} = 0$$

$$h'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 1} \frac{h(1 + \Delta x) - h(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(1 + \Delta x)^2 - 1] (1 + \Delta x)^{2\Delta x} = 0$$

所以  $\begin{cases} f'_1(1, 0) + f'_2(1, 0) = 3 \\ 2f'_1(1, 0) + f'_2(1, 0) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_1(1, 0) = 2 \\ f'_2(1, 0) = 1 \end{cases} \Rightarrow df(1, 0) = f'_1(1, 0)dx + f'_2(1, 0)dy = 2dx + dy.$

**例 5.2.22.** 设连续函数  $f(x, y)$  满足  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - 2x - 3y - 2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ , 又  $z = f(3x, x+y)$ , 且  $y = y(x)$

由  $(2x+1)y + e^y = 4x+1$  确定, 求  $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0}$ .

令  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 由  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - 2x - 3y - 2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$  得  $f(0, 0) = 2$ , 且

$$f(x, y) - 2x - 3y - 2 = o(\rho) \Rightarrow f(x, y) - f(0, 0) = 2x + 3y + o(\rho)$$

即  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处可微, 且  $f'_x(0, 0) = 2, f'_y(0, 0) = 3$ , 将  $x = 0$  代入  $(2x + 1)y + e^y = 4x + 1$  解得  $y(0) = 0$ , 在  $(2x + 1)y + e^y = 4x + 1$  两边对  $x$  求导得

$$2y + (2x + 1)\frac{dy}{dx} + e^y \cdot \frac{dy}{dx} = 4$$

将  $x = 0, y = 0$  代入上式, 得  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 2$ , 则

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0} = 3f'_x(3x, x+y) + f'_y(3x, x+y) \left( 1 + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} \right) = 3f'_x(0, 0) + f'_y(0, 0) \left( 1 + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} \right) = 15.$$

### 5.2.3 复合函数微分法 (链式法则)

对自变量作变量替换

**例 5.2.23 (2023 四川大学).** 设  $x = u + v^2, y = u^2 - v^3, z = 2uv$ , 求  $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{u=2 \\ v=1}}$ .

对方程组  $\begin{cases} x = u + v^2 \\ y = u^2 - v^3 \end{cases}$  等式两边同时对  $x$  求导得

$$\begin{pmatrix} 1 & 2v \\ 2u & -3v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \left( \frac{3v}{3v+4u}, \frac{2u}{3v^2+4uv} \right)$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{6v^3 + 4u^2}{3v^2 + 4uv}$$

再对上式两边的  $y$  求偏导, 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{8u(4uv + 3v^2) - (6v^3 + 4u^2) \cdot (4v)}{(4uv + 3v^2)^2} \frac{2}{4u + 3v} + \frac{18v^2 \cdot (4uv + 3v^2) - (6v^3 + 4u^2) \cdot (4u + 6v)}{(4uv + 3v^2)^2} \cdot \frac{-1}{4uv + 3v^2}$$

代入  $u = 2, v = 1$ , 可得  $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{u=2 \\ v=1}} = \frac{26}{121}$ .

**例 5.2.24.** 试用关系  $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, v = \arctan \frac{y}{x}$ , 将  $(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$  变成关于  $u, v$  的方程.

依赖关系如图 5.2.1 所示,

$$\begin{array}{c} u \leftarrow x \\ z \leftarrow y \\ v \leftarrow x \\ y \leftarrow y \end{array} \quad \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

图 5.2.1

于是

$$\begin{aligned} (x+y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} &= (x+y) \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) - (x-y) \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \left( \frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2} - \frac{xy - y^2}{x^2 + y^2} \right) \frac{\partial z}{\partial u} + \left( \frac{-xy - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{x^2 - xy}{x^2 + y^2} \right) \frac{\partial z}{\partial v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0. \end{aligned}$$

**例 5.2.25.** 试用关系  $u = x^2 - y^2, v = 2xy$ , 将  $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$  变成关于  $u, v$  的方程.

依赖关系如图 5.2.2 所示, 于是有

$$\begin{array}{c} u \\ \swarrow \\ W \\ \searrow \\ v \end{array}$$

图 5.2.2

其中

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2x \frac{\partial W}{\partial u} + 2y \frac{\partial W}{\partial v} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = 2x \frac{\partial}{\partial u} + 2y \frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( 2x \frac{\partial W}{\partial u} + 2y \frac{\partial W}{\partial v} \right) = 2 \frac{\partial W}{\partial u} + 2x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial u} \right) + 2y \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial v} \right)$$

同理

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial u} \right) = 2x \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial W}{\partial u} \right) + 2y \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial W}{\partial u} \right) = 2x \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + 2y \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v}$$

故

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial W}{\partial u} + 4x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + 4xy \frac{\partial^2 W}{\partial v \partial u} + 4xy \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} + 4y^2 \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial W}{\partial u} + 4y^2 \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} - 4xy \frac{\partial^2 W}{\partial v \partial u} - 4xy \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} + 4x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}$$

两式相加得

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = (4x^2 + 4y^2) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} = 0.$$

**例 5.2.26.** 试将方程  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$  变换为极坐标的形式.

因为  $z = z(x, y), x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , 所以依赖关系如图 5.2.3 所示, 于是有

$$\begin{array}{c} x \\ \swarrow \\ z \\ \searrow \\ y \end{array}$$

图 5.2.3

解得

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial y} r \cos \theta$$

即

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial z}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial z}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \cos^2 \theta - \frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial r} \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \sin \theta \cos \theta \\ &\quad - \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{1}{r} \sin^2 \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

同理, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial r} \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta \\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{1}{r} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \frac{1}{r^2} \cos^2 \theta - \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

将上述结果代入原方程, 化简即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = 0.$$

**例 5.2.27.** 设  $u = x + y, v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ , 试用  $u, v$  作新自变量变换方程

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

(假设出现的二阶偏导数都连续.)

依赖关系如图 5.2.4 所示,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right) + \frac{2}{x^3} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right) &= \left( \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial v} \right) \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right) &= \left( \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial v} \right) \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{aligned}$$

于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{2}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{2}{x^3} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{x^4} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \quad (1)$$

同理有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{2}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{2}{y^3} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{y^4} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \quad (2)$$

并且

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right) - \frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{x^2 y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{aligned} \quad (3)$$

将式 (1)、(2)、(3) 代入  $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ , 化简得

$$uv(uv - 4) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2v \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

**例 5.2.28.**  $z$  为  $x, y$  的可微函数, 试将方程

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$$

变成  $w = w(u, v)$  的方程, 假设

$$x = u, \quad y = \frac{u}{1 + uv}, \quad z = \frac{u}{1 + uw}.$$

已知  $z = \frac{u}{1 + uw}$ ,  $w = w(u, v)$ ,  $u = x$ ,  $v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$ , 于是存在关系如图 5.2.5 所示,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{1 + uw - uw}{(1 + uw)^2} + \frac{-u^2}{(1 + uw)^2} \left( \frac{\partial w}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1 - u^2 \left( \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{1}{x^2} \right)}{(1 + uw)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-u^2}{(1 + uw)^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \left( -\frac{1}{y^2} \right) = \frac{u^2}{(1 + uw)^2 y^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v}$$

于是

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 - u^2 \left( x^2 \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right)}{(1 + uw)^2} + \frac{u^2}{(1 + uw)^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{u^2}{(1 + uw)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{u^2} - \frac{\partial w}{\partial u} \cdot x^2 = 1 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial u} = 0.$$

图 5.2.5

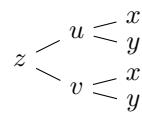


图 5.2.4

**例 5.2.29.** 取  $u, v$  为新的自变量, 而  $w = w(u, v)$  为新函数, 变化下列方程:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad u = x + y, \quad v = \frac{y}{x}, \quad w = \frac{z}{x}.$$

由已知得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{z}{x^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{x}$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cdot x + w = \left( \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot x + w = x \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x} \frac{\partial w}{\partial v} + w \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = x \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) = x \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \end{aligned}$$

令  $R = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = w - \left(1 + \frac{y}{x}\right) \frac{\partial w}{\partial v}$ , 于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{\partial R}{\partial v} \left( -\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left[ w - \left(1 + \frac{y}{x}\right) \frac{\partial w}{\partial v} \right] \left( -\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} (1+v)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0. \end{aligned}$$

由于  $x \neq 0, 1+v \neq 0$ , 故原方程变为  $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$ .

**例 5.2.30.** 取  $u, v$  为新的自变量, 而  $w = w(u, v)$  为新函数, 变化下列方程:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 + \frac{y}{x}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad u = x, \quad v = x + y, \quad w = x + y + z.$$

由已知得

$$\frac{du}{dx} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -1 + \frac{\partial w}{\partial x} = -1 + \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -1 + \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -1 + \frac{\partial w}{\partial y} = -1 + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -1 + \frac{\partial w}{\partial v} \end{aligned}$$

令  $R = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}$ , 于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial R}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \\ \frac{y}{x} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \left(\frac{v}{u} - 1\right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial v} - 1\right) = \left(\frac{v}{u} - 1\right) \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right) \frac{\partial v}{\partial y} \right] = \left(\frac{\partial v}{\partial u} - 1\right) \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \end{aligned}$$

将上述结果代入原方程得  $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \left(\frac{v}{u} - 1\right) \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$ .

**例 5.2.31.** 取  $u, v$  为新的自变量, 而  $w = w(u, v)$  为新函数, 变化下列方程:

$$(1-x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1-y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \quad x = \sin u, \quad y = \sin v, \quad z = e^w.$$

由已知

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}} = \sec u, \quad \frac{dy}{dv} = \sec v$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = e^w \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = e^w \cdot \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} = e^w \sec u \frac{\partial w}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^w \sec v \frac{\partial w}{\partial v}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial w^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( e^w \sec u \frac{\partial w}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( e^w \sec u \frac{\partial w}{\partial u} \right) \frac{du}{dx} = e^w \sec^2 u \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \tan u \frac{\partial w}{\partial u} \right] \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= e^w \sec^2 v \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial v} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \tan v \frac{\partial w}{\partial v} \right]\end{aligned}$$

将上述结果代入原方程，并注意到  $1 - x^2 = \cos^2 u, 1 - y^2 = \cos^2 v$ ，化简即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \left( \frac{\partial w}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial v} \right)^2 = 0.$$

求变换中的常数

**例 5.2.32.** 设变换  $\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + ay \end{cases}$ ，可把方程  $6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$  化简为  $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$ ，求常数  $a$ ，其

中  $z = z(x, y)$  具有连续的二阶偏导数。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -2 \frac{\partial z}{\partial u} + a \frac{\partial z}{\partial v}，由此得到$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -2 \frac{\partial}{\partial u} + a \frac{\partial}{\partial v}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \left( \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left( -2 \frac{\partial}{\partial u} + a \frac{\partial}{\partial v} \right) \left( -2 \frac{\partial z}{\partial u} + a \frac{\partial z}{\partial v} \right) = 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4a \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \left( \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \left( -2 \frac{\partial z}{\partial u} + a \frac{\partial z}{\partial v} \right) = -2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (a-2) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\end{aligned}$$

$$由 6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 得 (10+5a) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + (6+a-a^2) \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0, 于是有 \begin{cases} 10+5a \neq 0 \\ 6+a-a^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3.$$

**例 5.2.33.** 设函数  $z = z(u, v)$  有连续 2 阶导数，并且变换  $u = x + 2y, v = x + ay$  能将方程  $2z''_{xx} + z''_{xy} - z''_{yy} = 0$  变成  $z''_{uv} = 0$ ，求  $a$ 。

因为  $z = z(u, v), u = x + 2y, v = x + ay$ ，所以依赖关系如图 5.2.4 所示，那么有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$$

同理有

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial u} + a \frac{\partial z}{\partial v}$$

于是

$$z''_{xx} = z''_{uu} + z''_{vv}, z''_{xy} = 2z''_{uu} + az''_{vv}, z''_{yy} = 4z_{uu} + a^2 z''_{vv}$$

因此

$$0 = 2z''_{xx} + z''_{xy} - z''_{yy} = (2+a-a^2)z''_{vv} = (1+a)(2-a)z''_{vv}$$

得  $a = -1$  或  $a = 2$ ，但  $a = 2$  不合题意，否则  $u = x + 2y = v$ ，整个  $xOy$  平面将变成  $u = v$  的一条直线，将不可逆，故  $a = -1$ 。

### 5.2.4 高阶全微分

**定义 5.2.3 (二阶全微分).** 设函数  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  在  $x_0$  处可微, 则

$$dy = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} dx_n$$

若函数  $f$  在开集  $D$  上的每一点都可微, 则对于给定的  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ , 全微分  $dy$  是  $D$  上的一个  $n$  元函数:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n$$

若  $f$  在  $D$  上有二阶连续偏导数, 则  $dy$  就有一阶连续偏导数, 于是函数  $dy$  继续可微, 它的微分记作  $d^2y$ , 称为  $f$  的二阶微分.

**定义 5.2.4 (高阶全微分).** 二阶微分实际上仍然是函数的全微分, 因此我们只需按照全微分的定义按部就班地计算二阶微分:

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy) = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right) dx_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \right) dx_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i \end{aligned}$$

用同样的方法可以继续定义三阶微分. 于是用数学归纳法可以定义  $k$  阶全微分:

$$d^k y = d(d^{k-1} y)$$

但是随着阶数的增加, 计算复杂度呈指数级增长, 为了使得形式上的简洁, 我们可以把一阶全微分等式的右侧看作一个算子对  $y$  作用:

$$\begin{aligned} dy &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right) y \\ d^k y &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k y \end{aligned}$$

这里的算子

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right).$$

**定理 5.2.4.** 当  $x$  与  $y$  是独立的自变量时  $d^2x = d(dx) = 0$ ,  $d^2y = d(dy) = 0$ .

**例 5.2.34.** 已知  $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$ , 求  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

法一: 设  $F(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - a^2 = 0$ , 则

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x + 2y}{2x - 2y} = \frac{y + x}{y - x}$$

那么

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{y + x}{y - x} \right) = \frac{(y' + 1)(y - x) - (y' - 1)(y + x)}{(y - x)^2} = \frac{2y - 2xy'}{(y - x)^2} = \frac{2y^2 - 4xy - 2x^2}{(y - x)^3} = \frac{2a^2}{(x - y)^3}.$$

法二：对等式两边全微分，有

$$2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y - 2y\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}y = 0$$

对上式再微分一次，并注意到  $\mathrm{d}^2x = 0$ ，于是

$$\mathrm{d}x^2 + 0 + \mathrm{d}y\mathrm{d}x + 0 + \mathrm{d}x\mathrm{d}y + x\mathrm{d}^2y - \mathrm{d}y^2 - y\mathrm{d}^2y = 0 \Rightarrow \mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \mathrm{d}y^2 + (x-y)\mathrm{d}^2y = 0$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}{y-x} = \frac{1+2\left(\frac{y+x}{y-x}\right) - \left(\frac{y+x}{y-x}\right)^2}{y-x} = \frac{2a^2}{(x-y)^3}.$$

## 5.2.5 高阶偏导数

**例 5.2.35.** 设函数  $u = f(\ln \sqrt{x^2 + y^2})$  满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$$

试求函数  $f$  的表达式。

令  $t = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ ，于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= f'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = f'(t) \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= f'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = f'(t) \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f''(t) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2 + f'(t) \cdot \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= f''(t) \cdot \left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)^2 + f'(t) \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

于是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(t) \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(t) = (x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}} = e^{5t}$$

两边积分两次得  $f(t) = \frac{1}{25}e^{5t} + C_1t + C_2$ .

**例 5.2.36.** 已知  $z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + 2y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ ，其中  $f, \varphi$  皆为二次可微函数。

(1) 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

(2) 当  $f = \varphi$ ，且  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{x=a} = -by^2$  时，求  $f(y)$ .

(1)  $\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) + 2\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)$ ，那么

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) + 2\varphi'\left(\frac{x}{y}\right) \right] = -\frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{2x}{y^2}\varphi''\left(\frac{x}{y}\right).$$

(2) 当  $f = \varphi, x = a$  时

$$I = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{x=a} = -\frac{y}{a^2}f''\left(\frac{y}{a}\right) - \frac{2a}{y^2}\varphi''\left(\frac{a}{y}\right) = -by^2$$

令  $y = au$  得  $I = u^3 f''(u) + 2f''\left(\frac{1}{u}\right) = a^3 bu^4$ , 用  $\frac{1}{u}$  替换  $u$  得  $J = \frac{1}{u^3} f''\left(\frac{1}{u}\right) + 2f''(u) = \frac{a^3 b}{u^4}$ , 联立  $I$  和  $J$ , 消去  $f''\left(\frac{1}{u}\right)$  得  $f''(u) = \frac{1}{3} a^3 b \left(\frac{2}{u^4} - u\right)$ , 两次积分得

$$f(u) = \frac{1}{9} a^3 b \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{2} u^3\right) + C_1 u + C_2$$

所以  $f(y) = \frac{1}{9} a^3 b \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{2} y^3\right) + C_1 y + C_2$ , 其中  $C_1, C_2$  是常数.

**例 5.2.37.** 若函数  $f(x, y, z)$  满足  $f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$ , 则称它为  $n$  次齐次函数, 试证可微的  $n$  次齐次函数满足关系式:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = n f.$$

证 由于  $f$  可微, 且  $f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$ , 那么有

$$x f'_1 + y f'_2 + z f'_3 = n t^{n-1} f(x, y, z)$$

令  $t = 1$ , 即得等式.

**例 5.2.38.** 设  $u = f(z)$ , 其中  $z$  为方程式

$$z = x + y\varphi(z)$$

所定义的变量 (为  $x$  和  $y$  的隐函数). 证明 Lagrange 公式

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left[ \varphi^n(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right].$$

证  $u$  是  $x, y$  的复合函数, 存在依赖关系如图 5.2.6 所示,

由隐函数求导法则, 可得  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\varphi(z)}{1 - y\varphi'(z)}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 - y\varphi'(z)}$ , 用数学归纳法, 当  $n = 1$  时,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f'(z)\varphi(z)}{1 - y\varphi'(z)}$$

同理可得,  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{f'(z)}{1 - y\varphi'(z)}$ , 所以有  $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(z) \frac{\partial u}{\partial x}$ , 这就是待证式当  $n = 1$  时的情况. 现假设当  $n - 1$  时等式成立, 来证明对  $n$  的情况也成立. 事实上,

$$\begin{aligned} I &= \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^{n-1} u}{\partial y^{n-1}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}} \left[ \varphi^{n-1}(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \varphi^{n-1}(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ &= \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}} \left[ (n-1) \varphi^{n-2}(z) \cdot \varphi'(z) \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi^{n-1}(z) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] \end{aligned}$$

图 5.2.6  
u — z  
y —————— x

$$J = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left[ \varphi^{n-1}(z) \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}} \left[ (n-1) \varphi^{n-2}(z) \varphi'(z) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \varphi^{n-1}(z) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right]$$

由于  $z'_y = \varphi(z)z'_x$  及  $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(z) \frac{\partial u}{\partial x}$ , 有  $\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$ , 故  $I = J$ , 等式成立.

**例 5.2.39.** 若  $u = \frac{x+y}{x-y}$ , 求  $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} \Big|_{(2,1)}$ .

因为  $u = 1 + \frac{2y}{x-y}$ , 所以

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m} = (-1)^m \frac{m! 2y}{(x-y)^{m+1}} = -2m! \left[ \frac{1}{(y-x)^m} + \frac{x}{(y-x)^{m+1}} \right]$$

由于

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+1}u}{\partial x^m \partial y} &= -2m! \left[ \frac{-m}{(y-x)^{m+1}} + \frac{-(m+1)x}{(y-x)^{m+2}} \right] \\ \frac{\partial^{m+2}u}{\partial x^m \partial y^2} &= -2m! \left[ (-1)^2 \frac{m(m+1)}{(y-x)^{m+2}} + (-1)^2 \frac{(m+1)(m+2)x}{(y-x)^{m+3}} \right] \\ &\vdots \\ \frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n} &= -2m! \left[ (-1)^n \frac{m(m+n-1)!}{(y-x)^{m+n}} + (-1)^n \frac{(m+n)!x}{(y-x)^{m+n+1}} \right]\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n} \Big|_{(2,1)} &= -2m! \left[ (-1)^n \frac{m(m+n-1)!}{(-1)^{m+n}} + (-1)^n \frac{2(m+n)!}{(-1)^{m+n+1}} \right] \\ &= 2(-1)^m (m+n-1)! (2m+2n-m) = 2(-1)^m (m+n-1)! (m+2n).\end{aligned}$$

### 5.2.6 偏微分方程

**例 5.2.40.** 已知可微函数  $f(u, v)$  满足

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = 2(u-v)e^{-(u+v)}$$

且  $f(u, 0) = u^2 e^{-u}$ ,

(1) 记  $g(x, y) = f(x, y-x)$ , 求  $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$ ;

(2) 求  $f(u, v)$  的表达式.

(1) 由题意,  $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y-x)}{\partial x} = f'_u - f'_v = 2(u-v)e^{-(u+v)} = 2(2x-y)e^{-y}$

(2) 由 (1) 可知,  $f(x, y-x) = g(x, y) = \int 2(2x-y)e^{-y} dx + \varphi(y) = \frac{1}{2}(2x-y)^2 e^{-y} + \varphi(y)$ , 令  $x=y=u$ , 得

$$f(u, 0) = \frac{1}{2}u^2 e^{-u} + \varphi(u) = u^2 e^{-u}$$

于是  $\varphi(u) = \frac{1}{2}u^2 e^{-u}$ , 再令  $x=u, y-x=v$ , 那么  $f(u, v) = (u^2 + v^2)e^{-(u+v)}$ .

**例 5.2.41.** 设函数  $u = u(x, y)$  具有连续的二阶偏导数, 并且满足等式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(1) 证明: 用变量代换  $\xi = x-y, \eta = x+y$  可将上式转化为  $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ ;

(2) 求满足  $u(x, 2x) = x$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x, 2x)} = x^2$  和  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  的函数  $u(x, y)$ .

(1)  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$ , 于是  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ , 同理可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

又  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , 故得证  $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ .

(2) 由  $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$  两边对  $\eta$  积分得  $\frac{\partial y}{\partial \xi} = f(\xi)$ , 两边再对  $\xi$  积分得

$$u(\xi, \eta) = \int f(\xi) d\xi + g(\eta) = F(\xi) + g(\eta)$$

又  $\xi = x - y, \eta = x + y$ , 于是  $u(x, y) = F(x - y) + g(x + y)$ , 则  $u(x, 2x) = F(-x) + g(3x) = x$ ,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x, 2x)} = F'(-x) + g'(3x) = x^2 \Rightarrow -F(-x) + \frac{1}{3}g(3x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

于是  $\begin{cases} F(-x) + g(3x) = x \\ -F(-x) + \frac{1}{3}g(3x) = \frac{1}{3}x^3 + C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^3 + C \\ g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{108}x^3 + C \end{cases}$ , 故

$$u(x, y) = F(x - y) + g(x + y) = \frac{(x+y)^3}{108} + \frac{(x-y)}{4} + \frac{1}{2}y.$$

## 5.3 多元函数极值

多元函数极值的判定方法有很多种, 包括但不限于条件极值和非条件极值的情况. 这些方法的选择依赖于具体问题的性质和约束条件. 例如, Lagrange 乘数法是一种常用的求解条件极值问题的方法, 而对于无条件极值, 可以通过分析函数的一阶偏导数来判断是否存在极值.

### 5.3.1 二元函数的极值

**定理 5.3.1 (二元函数取极值的必要条件).** 可偏导的二元函数  $f(x, y)$  在  $(a, b)$  取极值的必要条件是

$$f'_x(a, b) = 0, f'_y(a, b) = 0$$

称点  $(a, b)$  为  $f(x, y)$  的驻点.

**定理 5.3.2 (二元函数取极值的充分条件).** 若  $f(x, y)$  在  $(a, b)$  处二阶偏导函数连续,  $(a, b)$  是  $f(x, y)$  的驻点, 令

$$A = f''_{xx}(a, b), B = f''_{xy}(a, b), C = f''_{yy}(a, b)$$

- (1) 当  $\Delta = B^2 - AC < 0, A > 0$  时,  $f(a, b)$  为极小值;
- (2) 当  $\Delta = B^2 - AC < 0, A < 0$  时,  $f(a, b)$  为极大值;
- (3) 当  $\Delta = B^2 - AC > 0$  时,  $f(a, b)$  不是  $f$  的极值;

**例 5.3.1 (2009 数二).** 设函数  $z = f(x, y)$  的全微分为  $dz = xdx + ydy$ , 则点  $(0, 0)$

- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| A. 不是 $f(x, y)$ 的连续点 | B. 不是 $f(x, y)$ 的极值点 |
| C. 是 $f(x, y)$ 的极大值点 | D. 是 $f(x, y)$ 的极小值点 |

$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 1, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1$ , 又在点  $(0, 0)$  处,  $B^2 - AC < 0, A > 0$ , 故  $(0, 0)$  为函数  $z = f(x, y)$  的一个极小值点, 选 D.

**例 5.3.2 (2009 数一).** 求二元函数  $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$  的极值.

令  $\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x(2 + y^2) = 0 \\ f'_y(x, y) = 2x^2y + \ln y + 1 = 0 \end{cases}$ , 解得驻点  $(0, \frac{1}{e})$ , 因此

$$A = f''_{xx}\left(0, \frac{1}{e}\right) = 4 + 2y^2\Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 4 + \frac{2}{e^2}, B = f''_{xy}\left(0, \frac{1}{e}\right) = 4xy\Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 0, C = f''_{yy}\left(0, \frac{1}{e}\right) = 2x^2 + \frac{1}{y}\Big|_{(0, \frac{1}{e})} = e$$

则  $B^2 - AC = -4e - \frac{2}{e} < 0$ , 又  $A > 0$ , 从而  $f\left(0, \frac{1}{e}\right)$  是  $f(x, y)$  的极小值, 极小值为  $f\left(0, \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ .

**例 5.3.3.** 求函数  $f(x, y) = 3(x - 2y)^2 + x^3 - 8y^3$  的极值, 并证明  $f(0, 0) = 0$  不是  $f(x, y)$  的极值.

由  $\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 6x - 12y = 0 \\ f'_y = -24y^2 + 24y - 12x = 0 \end{cases} \Rightarrow$  驻点  $\begin{cases} P_1(-4, 2) \\ P_2(0, 0) \end{cases}$ , 且

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 6, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12, C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -48y + 24$$

在  $P_1$  处  $A = -18, B = -12, C = -72, \Delta = -1152 < 0$ , 且  $A < 0$ , 所以  $f(-4, 2) = 64$  为极大值; 在  $P_2$  处  $A = 6, B = -12, C = 24, \Delta = 0$ , 所以不能用  $\Delta$  来证明  $f(0, 0)$  不是极值, 下面用极值的定义来判断, 任取  $(0, 0)$  的去心邻域

$$U_\delta^\circ = \{(x, y) \mid 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta\}$$

(1) 在  $y = 0$  上, 取  $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 则当  $n$  充分大时, 显然有  $(x_n, y_n) \in U_\delta^\circ$ , 且

$$f(x_n, y_n) = f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{1}{n^2} \left(3 + \frac{1}{n}\right) > 0$$

(2) 在  $x = ky$  ( $0 < k < 2$ ) 上, 有  $f(ky, y) = (k^3 - 8)y^2 \left(y - \frac{3(2-k)}{4+2k+k^2}\right)$ , 故取  $y = \frac{4(2-k)}{4+2k+k^2} (> 0)$  时  $f(ky, y) = (k^3 - 8)y^2 \frac{2-k}{4+2k+k^2} < 0$ , 即取

$$(x_k, y_k) = \left(\frac{4k(2-k)}{4+2k+k^2}, \frac{4(2-k)}{4+2k+k^2}\right)$$

时有

$$\begin{aligned} f(x_k, y_k) &= f\left(\frac{4k(2-k)}{4+2k+k^2}, \frac{4(2-k)}{4+2k+k^2}\right) \\ &= (k^3 - 8) \frac{16(2-k)^3}{(4+2k+k^2)^3} = -\frac{16(2-k)^4}{(4+2k+k^2)^2} < 0 \end{aligned}$$

又因为

$$\lim_{k \rightarrow 2^-} (x_k, y_k) = \lim_{k \rightarrow 2^-} \left(\frac{4k(2-k)}{4+2k+k^2}, \frac{4(2-k)}{4+2k+k^2}\right) = (0, 0)$$

所以当  $k$  小于 2 且充分接近 2 时,  $(x_k, y_k) \in U_\delta^\circ$ . 由上述 (1) 和 (2) 可得, 在  $P_2(0, 0)$  的任意小邻域  $U_\delta^\circ$  内, 既存在点  $(x_n, y_n)$ , 使得  $f(x_n, y_n) > 0$ , 也存在点  $(x_k, y_k)$ , 使得  $f(x_k, y_k) < 0$ , 故  $f(0, 0) = 0$  不是极值.

**定理 5.3.3 (Hesse 矩阵与极值定理).** 设  $P_0$  为稳定点, 若在  $P_0$  处 Hesse 矩阵

$$\mathbf{H}(P_0) = \begin{pmatrix} f''_{x_1 x_1} & f''_{x_1 x_2} & \cdots & f''_{x_1 x_n} \\ f''_{x_2 x_1} & f''_{x_2 x_2} & \cdots & f''_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f''_{x_n x_1} & f''_{x_n x_2} & \cdots & f''_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

为正定的, 则  $f$  在  $P_0$  处取极小值; 若  $\mathbf{H}(P_0)$  为负定的, 则  $f$  在  $P_0$  处取极大值; 若  $\mathbf{H}(P_0)$  为不定的, 则  $f$  在  $P_0$  处无极值. 关于正定性的介绍可阅读定理 14.2.1.

**例 5.3.4.** 求函数  $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2$  的极值.

$$\text{令 } \begin{cases} f'_x(x, y) = 4x^3 - 2(x + y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 4y^3 - 2(x + y) = 0 \end{cases} \quad \text{解得驻点 } P_1(0, 0), P_2(1, 1), P_3(-1, -1), \text{ 又}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2$$

由 Hesse 矩阵  $\mathbf{H}(P_1) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{H}(P_2) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{H}(P_3) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$  且  $\mathbf{H}(P_1)$  不定, 故  $(0, 0)$  不是极值点;  $\mathbf{H}(P_2)$  正定, 故  $(1, 1)$  为极小值点;  $\mathbf{H}(P_3)$  正定, 故  $(-1, -1)$  为极小值点, 综上,  $f$  的极小值为  $f(1, 1) = f(-1, -1) = -2$ .

**例 5.3.5.** 求  $f(x, y) = x^3 - x^2y + \frac{5}{6}y^2 + \frac{1}{3}y^3$  的极值.

$$\text{因为 } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2xy = 0 \\ [6pt] \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 + \frac{5}{3}y + y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{解得驻点为 } P_1(0, 0), P_2(-2, -3), P_3\left(0, -\frac{5}{3}\right), \text{ 且 } f''_{xx} = 6x - 2y, f''_{yy} = \frac{5}{3} + 2y, f''_{xy} = -2x, \text{ 于是}$$

$$\mathbf{H}(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \text{ 不定}, \quad \mathbf{H}(P_2) = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -\frac{13}{3} \end{pmatrix} \text{ 负定}, \quad \mathbf{H}(P_3) = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \text{ 不定}$$

故  $f(x, y)$  有极大值, 无极小值,  $f_{\text{极大}} = f(-2, -3) = -8 + 12 + \frac{15}{2} - 9 = \frac{5}{2}$ .

**例 5.3.6 (2004 数一).** 设  $z = z(x, y)$  是由  $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$  确定的函数, 求  $z = z(x, y)$  的极值点与极值.

$$\text{在 } x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0 \text{ 两边对 } x, y \text{ 求偏导, 得} \quad \begin{cases} 2x - 6y - 2y \frac{\partial z}{\partial x} - 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ -6x + 20y - 2z - 2y \frac{\partial z}{\partial y} - 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{令 } \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases},$$

$$\text{得 } \begin{cases} x = 3y \\ z = y \end{cases} \quad \text{代入 } x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0 \text{ 得 } \begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \quad \text{或} \\ z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -9 \\ y = -3 \quad \text{并且} \\ z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2 - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ 0 &= -6 - 2 \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ 0 &= 20 - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{aligned}$$

$$\text{于是 } \mathbf{H}(P_1) = \begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{pmatrix} \Big|_{(9, 3, 3)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \text{ 正定, 故点 } (9, 3) \text{ 是 } z(x, y) \text{ 的极小值点, 极小值为 } z(9, 3) = 3, \text{ 同理可}$$

$$\text{得 } \mathbf{H}(P_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \text{ 负定, 从而点 } (-9, -3) \text{ 是 } z(x, y) \text{ 的极大值点, 极大值为 } z(-9, -3) = -3.$$

**例 5.3.7 (2012 数一).** 求函数  $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$  的极值.

$$\text{法一: 令 } \begin{cases} f'_x(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - x^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0 \\ f'_y(x, y) = -xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0 \end{cases} \quad \text{解得驻点 } P_1(1, 0), P_2(-1, 0), \text{ 且}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -3xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + x^3e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + xy^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + x^2ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

由 Hesse 矩阵  $\mathbf{H}(P_1) = \begin{pmatrix} -2e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{H}(P_2) = \begin{pmatrix} 2e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{H}(P_1)$  负定, 故  $(1, 0)$  为极大值点;  $\mathbf{H}(P_2)$  正定,

故  $(-1, 0)$  为极大值点, 因此  $f$  的极大值为  $f(1, 0) = e^{-\frac{1}{2}}$ ; 极小值为  $f(-1, 0) = -e^{-\frac{1}{2}}$ .

法二: 在驻点  $(1, 0)$  处,

$$A = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(1,0)} = -2e^{-\frac{1}{2}}, B = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(1,0)} = 0, C = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{(1,0)} = -e^{-\frac{1}{2}}$$

由于  $AC - B^2 = 2e^{-1} > 0$ , 且  $A < 0$ , 故  $(1, 0)$  为极大值点,  $f(1, 0) = e^{-\frac{1}{2}}$  为极大值; 在驻点  $(-1, 0)$  处,

$$A = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(-1,0)} = 2e^{-\frac{1}{2}}, B = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(-1,0)} = 0, C = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{(-1,0)} = e^{-\frac{1}{2}}$$

由于  $AC - B^2 = 2e^{-1} > 0, A > 0$ , 故  $(-1, 0)$  为极小值点,  $f(-1, 0) = -e^{-\frac{1}{2}}$  为极小值.

**例 5.3.8 (2015 数二).** 已知函数  $f(x, y)$  满足  $f''_{xy}(x, y) = 2(y+1)e^x$ ,  $f'_x(x, 0) = (x+1)e^x$ ,  $f(0, y) = y^2 + 2y$ , 求  $f(x, y)$  的极值.

方程  $f''_{xy}(x, y) = 2(y+1)e^x$  两边对  $y$  求积分, 得  $f'_x = e^x(y+1)^2 + \varphi(x)$ , 并令  $y=0$ , 与  $f'_x(x, 0) = (x+1)e^x$  对比得  $\varphi(x) = xe^x$ , 那么  $f'_x(x, y) = e^x(y+1)^2 + xe^x$ , 两边再对  $x$  求积分, 得

$$f(x, y) = (y+1)^2e^x + (x-1)e^x + \psi(y)$$

又  $f(0, y) = y^2 + 2y$ , 得  $\psi(y) = 0$ , 则  $f(x, y) = (y+1)^2e^x + (x-1)e^x$ , 因此  $\begin{cases} f'_x = (y+1)^2e^x + xe^x = 0 \\ f'_y = 2(y+1)e^x = 0 \end{cases}$  得  $x=0, y=-1$ ,

且  $f''_{xx} = (y+1)^2e^x + (x+1)e^x$ ,  $f''_{xy} = 2(y+1)e^x$ ,  $f''_{yy} = 2$ , 则  $\mathbf{H}(0, -1) = \begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{pmatrix} \Big|_{(0, -1)}$  正定, 于是  $f(x, y)$  在  $(0, -1)$  处取得极小值,  $f(0, -1) = -1$ .

**例 5.3.9 (2023 数一).** 求函数  $f(x, y) = (y-x^2)(y-x^3)$  的极值.

法一: 令  $\begin{cases} f'_x(x, y) = 5x^4 - 3x^2y - 2xy = 0 \\ f'_y(x, y) = 2y - x^3 - x^2 = 0 \end{cases}$  解得驻点为  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2(1, 1)$ ,  $P_3\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{27}\right)$ , 且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 20x^3 - 6xy - 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3x^2 - 2x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

由 Hesse 矩阵得  $\mathbf{H}(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  为不定, 故  $(0, 0)$  非极值点;  $\mathbf{H}(P_2) = \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$  为不定, 故  $(1, 1)$  非极值点;  $\mathbf{H}(P_3) = \begin{pmatrix} 100 & -8 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$  为正定, 故  $\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{27}\right)$  为极小值点, 且函数的极小值为  $f\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{27}\right) = -\frac{4}{27^2}$ .

法二: 计算二阶偏导以及二阶混合偏导, 有

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y - 6xy + 20x^3$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2x - 3x^2, C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

(i) 当驻点为  $(x, y) = (0, 0)$  时, 有  $A = 0, B = 0, C = 2$ , 此时  $AC - B^2 = 0$ , 多元函数取得极值的充分条件失效, 由  $f(x, y) = (y-x^2)(y-x^3)$  可知  $f(0, 0) = 0$ , 取  $y = 2x^2$ , 当  $x$  为充分小的正数时,  $f(x, y) = x^4(2-x) > 0$ ; 取  $y = 2x^3$ , 当  $x$  为充分小的正数时,  $f(x, y) = x^5(2x-1) < 0$ , 由极值点的定义可知,  $(0, 0)$  点不是  $f(x, y)$  的极值点;

(ii) 当驻点为  $(x, y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{10}{27}\right)$  时, 有

$$A = \frac{100}{27}, B = -\frac{8}{3}, C = 2$$

则  $AC - B^2 = \frac{100}{27} \cdot 2 - \left(-\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{8}{27} > 0$  且  $A = \frac{100}{27} > 0$ , 故  $f(x, y)$  在  $\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{27}\right)$  取得极小值;

(iii) 当驻点为  $(x, y) = (1, 1)$  时, 有

$$A = 12, B = -5, C = 2$$

此时  $AC - B^2 = 12 \cdot 2 - (-5)^2 = -1$ , 所以  $f(x, y)$  在  $(1, 1)$  处不取极值, 综上可知,  $f(x, y)$  仅有一个极小值点  $\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{27}\right)$

且取得极小值为

$$f\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{27}\right) = \left(\frac{10}{27} - \frac{4}{9}\right) \left(\frac{10}{27} - \frac{8}{27}\right) = -\frac{4}{729}.$$

### 5.3.2 条件极值

二元函数  $z = f(x, y)$  在条件  $\varphi(x, y) = 0$  下的极值. 构造 Lagrange 函数:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

得方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

解得满足方程组所有点  $(x, y)$ , 即为可能的极值点, 然后再逐一判定.

#### 单项链等法

当目标函数  $f(x, y, z) = mx^a y^b z^c$  ( $mabc \neq 0$ ) 时, 可构造出相等的项, 将其放在等号一边使其连等, 消除  $\lambda$ .

**例 5.3.10.** 设  $x, y, z > 0$ , 求  $f(x, y, z) = 8xyz$ , 在条件  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  ( $a, b, c > 0$ ) 下的最大值.

$F(x, y, z, \lambda) = 8xyz + \lambda \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$ , 那么

$$\begin{cases} F'_x = 8yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \xrightarrow{\text{乘 } x} -8xyz = \frac{2\lambda x^2}{a^2} \\ F'_y = 8xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \xrightarrow{\text{乘 } y} -8xyz = \frac{2\lambda y^2}{b^2} \\ F'_z = 8xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0 \xrightarrow{\text{乘 } z} -8xyz = \frac{2\lambda z^2}{c^2} \\ F'_\lambda = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{由此可得 } \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{b}{\sqrt{3}} \\ z = \frac{c}{\sqrt{3}} \end{cases}, \text{ 故 } f_{max} = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}.$$

#### 齐次构造法

如果目标函数  $f$  是齐次的, 同时约束条件可以转化成齐次函数  $g(x, y, z) = c$  的形式. 若此时目标函数  $f(x, y, z)$  为  $m$  次齐次函数,  $g(x, y, z)$  为  $n$  次齐次函数 ( $m, n \neq 0$ ), 则可以构造出这个式子:  $f(x, y, z) = -\frac{cn}{m}\lambda$ , 此时再求出  $\lambda$  的值即可求出目标函数  $f(x, y, z)$  的最值.

**例 5.3.11 (2010 数三).** 求函数  $u = xy + 2yz$  在约束条件  $x^2 + y^2 + z^2 = 10$  下的最大值和最小值.

$$\text{令 } F(x, y, z, \lambda) = xy + 2yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 10), \text{ 解方程组} \begin{cases} F'_x = 2\lambda x + y = 0 \\ F'_y = 2\lambda y + x + 2z = 0 \\ F'_z = 2\lambda z + 2y = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0 \end{cases} \text{ 那么} \\ \frac{x}{2} \cdot F'_x + \frac{y}{2} \cdot F'_y + \frac{z}{2} \cdot F'_z = 0 \Rightarrow xy + 2yz = -10\lambda$$

由于  $x, y, z$  全为 0 显然不成立, 因此  $\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ , 故  $u_{min} = -5\sqrt{5}, u_{max} = 5\sqrt{5}$ .

## 多约束条件

**例 5.3.12 (2019 数一).** 已知曲线  $C : \begin{cases} x^2 + 2y^2 - z = 6 \\ 4x + 2y + z = 30 \end{cases}$  求  $C$  上的点到  $xOy$  坐标平面的距离的最大值.

设  $P(x, y, z) \in C$ , 到  $xOy$  坐标平面的距离为  $d = |z|$ , 则目标函数  $f(x, y, z) = z^2$ , 约束函数为  $x^2 + 2y^2 - z - 6 = 0$  及  $4x + 2y + z - 30 = 0$ , 则构造 Lagrange 函数

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = z^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 - z - 6) + \mu(4x + 2y + z - 30) = 0$$

所以  $\begin{cases} F'_x = 2\lambda x + 4\mu = 0 \\ F'_y = 4\lambda y + 2\mu = 0 \\ F'_z = 2z - \lambda + \mu = 0 \\ F'_{\lambda} = x^2 + 2y^2 - z - 6 = 0 \\ F'_{\mu} = 4x + 2y + z - 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = 12 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x = -8 \\ y = -2 \\ z = 66 \end{cases}$  得驻点  $(4, 1, 12)$  和  $(-8, -2, 66)$ , 故曲线  $C$  上的点到  $xOy$  坐标平面的距离的最大值  $d_{max} = 66$ .

## 三角代换

**例 5.3.13.** 求  $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 2y^2$  在单位圆周  $x^2 + y^2 = 1$  上的最大值和最小值.

令  $x = \cos \theta, y = \sin \theta$ , 那么  $f(\theta) = 3\cos^2 \theta + 2\sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}[5 - \sqrt{5}\sin(2\theta - \varphi)]$ , 其中  $\varphi = \arctan \frac{1}{2}$ , 由  $\theta \in [0, 2\pi]$  可知  $2\theta - \varphi \in [-\varphi, 4\pi - \varphi]$ , 所以  $\sin(2\theta - \varphi) \in [-1, 1]$ , 故  $f_{max} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}, f_{min} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ .

## 5.3.3 多元函数的最值问题

求连续函数在有界闭域  $D$  上最值的步骤:

- (1) 求  $D$  内的驻点和不可导点;
- (2) 用求极值的方法求  $D$  的边界上最值的可疑点;
- (3) 比较这些点的函数值的大小.

**例 5.3.14.** 求  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$  在  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$  上的最大值和最小值.

$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2xy^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 2x^2y = 0 \end{cases}$  解得  $P(\sqrt{2}, 1)$  ( $x, y \geq 0$ ),  $f''_{xx} = 2 - 2y^2, f''_{yy} = 4 - 2x^2, f''_{xy} = -4xy$ , 那么  $H(P) = \begin{pmatrix} 0 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$  不定, 所以  $P$  点不是极值点, 从而也非最值点, 当  $x = 0$  ( $0 \leq y \leq 2$ ) 时,  $f_{min} = 0, f_{max} = 8$ , 当  $y = 0$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) 时,  $f_{min} = 0, f_{max} = 4$ , 考虑边界情况, 令  $F = x^2 + 2y^2 - x^2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$ , 那么

$$\begin{cases} F'_x = 2x - 2xy^2 + 2\lambda x = 0 \\ F'_y = 4y - 2x^2y + 2\lambda y = 0 \\ F'_{\lambda} = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{10}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

即  $f\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{7}{4}$ , 故所求的最小值为  $m = 0$ , 最大值为  $M = 8$ .

**例 5.3.15 (2005 数二).** 已知函数  $z = f(x, y)$  的全微分  $dz = 2xdx - 2ydy$ , 并且  $f(1, 1) = 2$ , 求  $f(x, y)$  在椭圆域  $D = \left\{(x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$  上的最大值和最小值.

由  $dz = 2xdx - 2ydy$  知,  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ , 那么  $f(x, y) = x^2 - y^2 + C$ , 又  $f(1, 1) = 2$ , 求得  $C = 2$ , 因此  $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$ , 那么  $f''_{xx} = 2, f''_{xy} = 0, f''_{yy} = -2$ , 令  $f'_x = 0, f'_y = 0$ , 得可疑极值点  $P(0, 0)$ , 所以  $H(P) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  不定,  $P(0, 0)$  不是极值点, 从而也非最值点,

再考虑边界情况,  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$  上的情形, 作 Lagrange 函数  $F(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + 2 + \lambda\left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\right)$ , 那么

$$\begin{cases} F'_x = 2x(\lambda + 1) = 0 \\ F'_y = \frac{y(\lambda - 4)}{2} = 0 \\ F'_{\lambda} = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \end{cases}$$

解得  $\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 2 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$  代入  $f(x, y)$ , 得  $f(0, \pm 2) = -2, f(\pm 1, 0) = 3$ , 综上,  $z = f(x, y)$  在区域  $D$  上的最大值为 3, 最小值为 -2.

**例 5.3.16.** 设  $I(a, b) = \int_0^{2\pi} (a \cos x - 2b \sin x)^2 dx$ , 在  $I(a, b) \leq 4\pi$ , 求使得  $a^2 + 4b^2 - 2a - b \leq k$  成立的  $k$  的最小值.

由题意,

$$I(a, b) = \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 x + 4b^2 \sin^2 x - 4ab \sin x \cos x) dx = \pi a^2 - 4\pi b^2$$

即  $a^2 + 4b^2 \leq 4$ , 令  $f(a, b) = a^2 + 4b^2 - 2a - b$ , 即求  $f(a, b)$  在闭区域  $a^2 + 4b^2 \leq 4$  上的最大值, 当  $a^2 + 4b^2 = \pi$  时, 构造 Lagrange 函数  $F = a^2 + 4b^2 - 2a - b + \lambda(a^2 + 4b^2 - 4)$ , 那么

$$\begin{cases} F'_a = 2a - 2 + 2\lambda a = 0 \\ F'_b = 8b - 1 + 8\lambda b = 0 \\ F'_{\lambda} = a^2 + 4b^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{\sqrt{17}} \\ b = \frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -\frac{8}{\sqrt{17}} \\ b = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

当  $a^2 + 4b^2 < 4$  时,  $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a} = 2a - 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial b} = 8b - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{8} \end{cases}$ , 那么  $f\left(\frac{8}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right) = 4 - \sqrt{17}, f\left(-\frac{8}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = 4 + \sqrt{17}, f\left(1, \frac{1}{8}\right) = -\frac{17}{16}$ , 于是  $f_{max} = 4 + \sqrt{17}$ , 故  $k_{min} = 4 + \sqrt{17}$ .

## 5.4 方向导数与梯度

方向导数和梯度是多元函数微积分中与偏导数密切相关的概念, 用于描述函数在某一点处的变化率和最大增长率.

### 5.4.1 方向导数的计算

**定义 5.4.1 (方向导数).** 设  $\mathbf{l}$  是空间的常向量,  $P_0$  是定点, 动点  $P$  使得  $\overrightarrow{P_0P}$  与  $\mathbf{l}$  方向相同, 则

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} \Big|_{P_0} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{|P_0P|}.$$

**定理 5.4.1 (方向导数的计算).** 设  $f(x, y, z)$  在点  $(a, b, c)$  处可微, 则函数  $f(x, y, z)$  在点  $(a, b, c)$  处沿任一方向  $\mathbf{l}$  的方向导数存在, 且若  $\mathbf{l}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ , 则有计算公式

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} \Big|_{(a,b,c)} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b,c)} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a,b,c)} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(a,b,c)} \cos \gamma$$

**例 5.4.1 (2017 数一).** 函数  $f(x, y, z) = x^2y + z^2$  在点  $(1, 2, 0)$  处沿向量  $\mathbf{n} = \{1, 2, 2\}$  的方向导数为

A. 12

B. 6

C. 4

D. 2

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(1,2,0)} = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1,2,0)} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(1,2,0)} = 0, \quad \text{且 } \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\}, \quad \text{因此 } \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = 4 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{2}{3} = 2.$$

**例 5.4.2 (1996 数一).** 求函数  $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$  在点  $A(1, 0, 1)$  处沿点  $A$  指向点  $B(3, -2, 2)$  方向的方向导数.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1,0,1)} &= \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(1,0,1)} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(1,0,1)} = \frac{1}{2}, \quad \text{方向 } \overrightarrow{AB} = (2, -2, 1), \quad \text{方向余弦为 } \cos \alpha = \frac{2}{3}, \cos \beta = \frac{-2}{3}, \cos \gamma = \frac{1}{3}, \\ \text{那么 } \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{-2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**例 5.4.3.** 求函数  $u = e^{xy} + x^2yz$  在点  $(1, 2, 1)$  处沿  $x$  轴负方向的方向导数.

由公式

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} \Big|_{(a,b,c)} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b,c)} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a,b,c)} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(a,b,c)} \cos \gamma$$

其中  $(a, b, c) = (1, 2, 1)$ ,  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = (-1, 0, 0)$  且  $f'_x = ye^{xy} + 2yzx$ , 所以方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} \Big|_{(1,2,1)} = f'_x(1, 2, 1) \cos \alpha = -(2e^2 + 4).$$

**例 5.4.4.** 求函数  $u = xy^2z^3$  处沿曲面  $x^2 + y^2 = 5$  的外法向的方向导数.

已知  $F = x^2 + y^2 - 5 = 0$ ,  $\mathbf{l} = 2(x, y, 0)$ , 故曲面在  $P$  的外法向的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \gamma = 0$$

并且

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_P = (y^2z^3, 2xyz^3, 2xy^2z^2) \Big|_P = (-4, -4, 12)$$

于是

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \Big|_P = u'_x(P) \cos \alpha + u'_y(P) \cos \beta + u'_z(P) \cos \gamma = -\frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{8}{\sqrt{5}} + 0 = -\frac{12}{\sqrt{5}}.$$

## 5.4.2 梯度的计算

**定理 5.4.2 (方向导数与梯度的关系).** 设  $f(x, y, z)$  在点  $(a, b, c)$  处可微, 则函数  $f(x, y, z)$  在点  $(a, b, c)$  处沿梯度

$$\mathbf{grad} f \Big|_{(a,b,c)} = (f'_x(a, b, c), f'_y(a, b, c), f'_z(a, b, c))$$

的方向导数取最大值, 且其值为梯度的模, 即

$$\max_l \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} \Big|_{(a,b,c)} \right\} = |\mathbf{grad} f \Big|_{(a,b,c)} = \sqrt{(f'_x(a, b, c))^2 + (f'_y(a, b, c))^2 + (f'_z(a, b, c))^2}$$

**例 5.4.5 (2012 数一).** 求  $\text{grad} \left( xy + \frac{z}{y} \right) \Big|_{(2,1,1)}$ .

由梯度的定义  $\text{grad } f(x, y, z) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\}$ , 那么  $\text{grad} \left( xy + \frac{z}{y} \right) \Big|_{(2,1,1)} = \left( y, x - \frac{z}{y^2}, \frac{1}{y} \right) \Big|_{(2,1,1)} = \{1, 1, 1\}$ , 或  $i + j + k$ .

**例 5.4.6 (1992 数一).** 函数  $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$  在点  $M(1, 2, -2)$  处的梯度  $\text{grad } u|_M$ .

$$\text{grad } u|_M = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (2xi + 2yj + 2zk) \Big|_{(1,2,-2)} = \frac{2}{9} \{1, 2, -2\}.z$$

**例 5.4.7 (2015 数一).** 已知函数  $f(x, y) = x + y + xy$ , 曲线  $C: x^2 + y^2 + xy = 3$ , 求  $f(x, y)$  在曲线  $C$  上的最大方向导数.

函数  $f$  在点  $(x, y)$  处的最大方向导数为

$$\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2} = \sqrt{(1+y)^2 + (1+x)^2}$$

构造 Lagrange 函数  $F(x, y, \lambda) = (1+y)^2 + (1+x)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + xy - 3)$ , 所以  $\begin{cases} F'_x = \lambda(2x+y) + 2x + 2 = 0 \\ F'_y = \lambda(x+2y) + 2y + 2 = 0 \\ F'_{\lambda} = x^2 + y^2 + xy - 3 = 0 \end{cases}$  解得

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}, \text{代入 } \sqrt{(1+y)^2 + (1+x)^2} \text{ 中, 得 } f(x, y) \text{ 在曲线 } C \text{ 上的最大方向导数为 } 3.$$

**例 5.4.8.** 在椭球面  $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$  上求一点, 使函数  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  在该点沿方向  $l = (1, -1, 0)$  的方向导数最大, 并求出这个最大值.

由题意  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ , 则

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma = \sqrt{2}x - \sqrt{2}y$$

在约束条件  $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$  下求  $\sqrt{2}(x-y)$  的最大值, 构造 Lagrange 函数, 有

$$F(x, y, z, \lambda) = \sqrt{2}(x-y) + \lambda(2x^2 + 2y^2 + z^2 - 1)$$

则  $\begin{cases} F_x = \sqrt{2} + 4\lambda x = 0 \\ F_y = -\sqrt{2} + 4\lambda y = 0 \\ F_z = 2\lambda z = 0 \\ F_{\lambda} = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$  当  $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$  时,  $\frac{\partial f}{\partial l} = \sqrt{2}$  且为最大值.

**例 5.4.9.** 已知  $a, b$  为实数, 函数  $z = 2 + ax^2 + by^2$  在点  $(3, 4)$  的方向导数中沿方向  $l = -3i - 4j$  的方向导数最大, 且最大值为 10.

(1) 求  $a, b$  的值;

(2) 求曲面  $z = 2 + ax^2 + by^2$  ( $z \geq 0$ ) 的面积.

(1) 函数  $z = 2 + ax^2 + by^2$  在点  $(3, 4)$  的梯度为

$$\text{grad } z \Big|_{(3,4)} = \left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \Big|_{(3,4)} = (6a, 8b)$$

因沿梯度的方向导数取最大值, 其值等于梯度的模, 所以有

$$\frac{\partial z}{\partial l} \Big|_{(3,4)} = \left| \text{grad } z \Big|_{(3,4)} \right| = 10 \Rightarrow l^0 = \left( \frac{6a}{10}, \frac{8b}{10} \right) = \left( -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right)$$

于是  $a = -1, b = -1$ .

(2) 曲面  $z = 2 - x^2 - y^2$  ( $z \geq 0$ ) 是由  $yOz$  平面上的曲线  $y = \sqrt{2-z}$  ( $0 \leq z \leq 2$ ) 绕  $z$  轴旋转而成, 于是所求曲面的面积为

$$S = 2\pi \int_0^2 y \sqrt{1 + (y'(z))^2} dz = 2\pi \int_0^2 \sqrt{2-z} \sqrt{1 + \left( \frac{-1}{2\sqrt{2-z}} \right)^2} dz = \pi \int_0^2 \sqrt{9-4z} dz = -\frac{\pi}{6}(9-4z)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{13}{3}\pi.$$

## 第 6 章

### 多元函数积分学

“给我最大快乐的，不是已懂得知识，而是不断的学习；  
不是已达到的高度，而是继续不断的攀登。”

——高斯

多元函数积分学是微积分的另一个重要分支，主要研究多元函数的积分、重积分、曲线积分、曲面积分等概念。以下是多元函数积分学的几个重要内容和概念：

1. 重积分：对于二元函数  $f(x, y)$ ，它的重积分表示在平面区域上对函数的积分，可以用来计算平面区域上的面积、质量、质心等物理量。重积分可以分为二重积分和三重积分，分别对应于在平面区域和立体区域上的积分。
2. 曲线积分：对于矢量值函数  $\mathbf{F}(x, y, z)$  和曲线  $C$ ，曲线积分表示矢量场沿曲线的积分，可以用来计算矢量场沿曲线的功、流量等物理量。曲线积分可以分为第一类曲线积分和第二类曲线积分，分别对应于标量场和矢量场的情况。
3. 曲面积分：对于矢量值函数  $\mathbf{F}(x, y, z)$  和曲面  $S$ ，曲面积分表示矢量场通过曲面的积分，可以用来计算矢量场通过曲面的流量、通量等物理量。曲面积分可以分为第一类曲面积分和第二类曲面积分，分别对应于标量场和矢量场的情况。
4. Green 公式、Stokes 公式和 Gauss 公式：这三个公式分别是描述平面区域、曲线和曲面上积分之间关系的重要定理。Green 公式将平面区域的积分与曲线的积分联系起来，Stokes 公式将曲面的积分与曲线的积分联系起来，Gauss 公式将立体区域的积分与曲面的积分联系起来。

多元函数积分学在物理学、工程学、地理学等领域有着广泛的应用，例如在电磁场分析、流体力学、地形分析等方面都需要用到多元函数积分学的知识。通过学习多元函数积分学，可以更深入地理解多元函数在空间中的积分性质。

## 6.1 重积分

重积分是对多元函数在一个区域上进行积分的过程. 在二维空间中, 重积分可以是对平面区域上的函数进行积分; 在三维空间中, 重积分可以是对立体区域上的函数进行积分.

### 6.1.1 重积分定义

#### 二重积分

**定义 6.1.1 (二重积分).** 设  $f(x, y)$  是有界闭区域  $D$  上的有界函数, 将闭区域  $D$  任意分成  $n$  个小闭区域  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ , 其中  $\Delta\sigma_i$  表示第  $i$  个小闭区域, 也表示它的面积, 在每个  $\Delta\sigma_i$  上取一点  $(\xi_i, \eta_i)$ , 作乘积  $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 并作和  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ , 如果当各小闭区域的直径中的最大值  $\lambda$  趋近于零时, 这和式极限存在, 则称此极限为函数  $f(x, y)$  在闭区间  $D$  上的二重积分, 记作  $\iint_D f(x, y)d\sigma$ , 即

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

其中  $d\sigma$  称为面积元.

**例 6.1.1.** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i^2 \sin \frac{j\pi}{2n}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i^2 \sin \frac{j\pi}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \sin \left(j \frac{\pi}{2n}\right) = \int_0^1 x^2 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y dy = \frac{1}{3}.$$

**例 6.1.2 (2010 数一).** 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$ .

由二重积分的定义

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{n \left(1 + \frac{i}{n}\right) n^2 \left[1 + \left(\frac{j}{n}\right)^2\right]} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{n}\right) \left[1 + \left(\frac{j}{n}\right)^2\right]} = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{dy}{(1+x)(1+y^2)} = \ln 2 \cdot \arctan 1. \end{aligned}$$

**例 6.1.3.** 计算极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{(n+1)(n+2)}$ .

利用二重积分的定义, 得

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} \\ &= \int_0^1 \sqrt{x} dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

### 三重积分

**定义 6.1.2 (三重积分).** 设  $f(x, y, z)$  是空间闭区域  $\Omega$  上的有界函数, 将  $\Omega$  任意分成  $n$  个小区域  $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$ , 其中  $\Delta v_i$  表示第  $i$  个小区域, 也表示它的体积, 在每个  $\Delta v_i$  上取一点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , 作乘积  $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 并作和  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$ , 如果当各小区域的直径中的最大值  $\lambda$  趋近于零时, 这和式极限存在, 则称此极限为函数  $f(x, y, z)$  在闭区间  $\Omega$  上的三重积分, 记作  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv$ , 即

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$$

其中  $dv$  称为体积元.

**例 6.1.4.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n^5} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n i^2 \sin \frac{\pi j}{2n} \cos \frac{k}{n}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \sin \frac{\pi j}{2n} \cos \frac{k}{n} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) dy \int_0^1 \cos zdz = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3\pi} \cdot \sin 1 = \frac{\sin 1}{3}.$$

### 重积分大小的比较

比较二重积分的大小, 本质上涉及用二重积分的不等式性质和函数的单调性进行分析讨论.

**例 6.1.5 (2005 数一).** 设  $I_1 = \iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$ ,  $I_2 = \iint_D \cos(x^2 + y^2) d\sigma$ ,  $I_3 = \iint_D \cos(x^2 + y^2)^2 d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ , 则

- A.  $I_3 > I_2 > I_1$       B.  $I_1 > I_2 > I_3$       C.  $I_2 > I_1 > I_3$       D.  $I_3 > I_1 > I_2$

在区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$  上有  $0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1$ , 从而有

$$0 \leqslant (x^2 + y^2)^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 1 < \frac{\pi}{2}$$

又因为  $\cos x$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上为单调递减函数, 于是

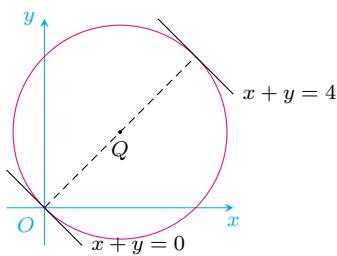
$$0 \leqslant \cos \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant \cos(x^2 + y^2) \leqslant \cos(x^2 + y^2)^2$$

于是  $I_3 > I_2 > I_1$ , 选 A.

**例 6.1.6.** 设区域  $D = \{(x, y) | (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 2\}$ ,  $I_1 = \iint_D (x + y) d\sigma$ ,  $I_2 = \iint_D \sin(x + y) d\sigma$ , 则下列结论正确的是

- A.  $8\pi > I_1 > I_2$       B.  $8\pi \geqslant I_1 \geqslant I_2$       C.  $I_1 > 8\pi > I_2$       D.  $I_1 \geqslant 8\pi \geqslant I_2$

作出积分区域后可分析  $x+y$  的取值范围,



由图 6.1.1 易知,  $0 \leq x+y \leq 4$ , 所以  $x+y \geq \sin(x+y)$ , 但取等的条件为  $(x,y)=(0,0)$ , 而在该点处的二重积分为 0, 因此

$$\iint_D (x+y) d\sigma > \iint_D \sin(x+y) d\sigma$$

排除 B、D 选项, 又因为当  $x+y=4$  时, 有

$$4 \iint_D d\sigma = 8\pi$$

并且同样地在  $(2,2)$  点处的二重积分为 0, 因此  $8\pi > I_1$ , 故选 A.

图 6.1.1

**例 6.1.7.** 设  $I_1 = \iint_D \frac{x+y}{4} dx dy$ ,  $I_2 = \iint_D \sqrt{\frac{x+y}{4}} dx dy$ ,  $I_3 = \iint_D \sqrt[3]{\frac{x+y}{4}} dx dy$ , 且

$$D = \{(x,y) | (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$$

则有

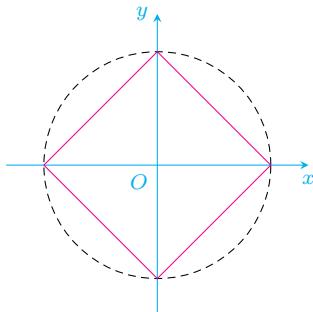
- A.  $I_1 < I_2 < I_3$       B.  $I_2 < I_3 < I_1$       C.  $I_3 < I_1 < I_2$       D.  $I_3 < I_2 < I_1$

由图 6.1.1 知,  $0 < \frac{x+y}{4} < 1$ , 且  $\frac{x+y}{4} < \sqrt{\frac{x+y}{4}} < \sqrt[3]{\frac{x+y}{4}}$ , 因此  $I_1 < I_2 < I_3$ , 选 A.

**例 6.1.8 (2019 数二).** 已知平面区域  $D = \{(x,y) | |x| + |y| \leq \frac{\pi}{2}\}$ , 记  $I_1 = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ ,  $I_2 = \iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ ,  $I_3 = \iint_D (1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$ , 则

- A.  $I_3 < I_2 < I_1$       B.  $I_2 < I_1 < I_3$       C.  $I_1 < I_2 < I_3$       D.  $I_2 < I_3 < I_1$

作出积分区域  $D$ :



在区域  $D$  上, 有  $0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{\pi}{2}$ , 那么

$$\sin \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

下面比较  $1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}$  与  $\sin \sqrt{x^2 + y^2}$ , 令  $u = \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , 那么

$$1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2} - \sin \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - \cos u - \sin u = 1 - \sqrt{2} \sin \left(u + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$$

故  $1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sin \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ , 所以  $I_3 < I_2 < I_1$ , 选 A.

图 6.1.2

## 6.1.2 重积分的计算及相关方法

### 重积分的性质

**例 6.1.9 (1993 年数三).** 设  $f(x, y)$  连续, 且

$$f(x, y) = xy + \iint_D f(u, v) dudv$$

其中  $D$  是由  $y = 0, y = x^2, x = 1$  所围成区域, 求  $f(x, y)$ .

设  $A = \iint_D f(u, v) dudv$ , 则  $f(x, y) = xy + A$ , 等式两边分别积分, 得

$$A = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D (xy + A) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (xy + A) dy = \int_0^1 \left( \frac{1}{2}x^5 + Ax^2 \right) dx = \frac{4A + 1}{12}$$

即  $A = \frac{1}{8}$ , 于是  $f(x, y) = xy + \frac{1}{8}$ .

**例 6.1.10.** 计算二重积分  $\iint_D y^2 dx dy$ , 其中  $D$  是由摆线  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$  与  $x$  轴围成的区域.

因为  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $dx = a(1 - \cos t) dt$ , 于是

$$\begin{aligned} \iint_D y^2 dx dy &= \int_0^{2\pi a} dx \int_0^{y(x)} y^2 dy = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi a} y^3(x) dx = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} a^4 (1 - \cos t)^4 dt = \frac{a^4}{3} \int_0^{2\pi} \left( 2 \sin^2 \frac{t}{2} \right)^4 dt \\ &\stackrel{\frac{t}{2}=u}{=} \frac{a^4}{3} \cdot 2^4 \cdot 2 \int_0^\pi \sin^8 u du = \frac{a^4}{3} \cdot 2^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u du = \frac{a^4}{3} \cdot 2^6 \cdot \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 4 \times 6 \times 8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{35\pi}{12} a^4. \end{aligned}$$

**例 6.1.11.** 设  $D$  由  $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$  与  $x$  围成, 求  $\iint_D (x + 2y) dx dy$ .

$$I = \iint_D (x + 2y) dx dy = \int_0^{2\pi} dx \int_0^{y(x)} (x + 2y) dy = \int_0^{2\pi} (xy + y^2) dx = \int_0^{2\pi} [(t - \sin t)(1 - \cos t)^2 + (1 - \cos t)^3] dt$$

令  $I_1 = \int_0^{2\pi} t(1 - \cos t)^2 dt$ ,  $I_2 = \int_0^{2\pi} \sin t(1 - \cos t)^2 dt$ ,  $I_3 = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt$ , 则

$$I_1 = \int_0^{2\pi} t \left( 2 \sin^2 \frac{t}{2} \right)^2 dt \stackrel{\frac{t}{2}=u}{=} 16 \int_0^\pi u \cdot \sin^4 u du \stackrel{\int_0^\pi x \cdot f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx}{=} 16\pi \cdot \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \cdot \frac{\pi}{2} = 3\pi^2$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \left( 2 \sin^2 \frac{t}{2} \right)^3 dt = 8 \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{t}{2} dt \stackrel{\frac{t}{2}=u}{=} 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 u du = 32 \times \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi$$

且  $I_2 = \int_0^{2\pi} \sin t(1 - \cos t)^2 dt \stackrel{u=\pi-t}{=} 0$ , 故  $I = I_1 - I_2 + I_3 = 3\pi^2 + 5\pi$ .

### 运用分部积分法

**定理 6.1.1 (重积分分部积分法).** 一般地, 对于  $\int_a^b f(x) dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} g(y) dy$ , 令  $G(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} g(y) dy$ ,  $F'(x) = f(x)$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} g(y) dy = \int_a^b G(x) dF(x) = G(x)F(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)G'(x) dx.$$

**例 6.1.12.** 计算  $\int_0^1 dy \int_1^{\sqrt{y}} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} dx$ .

由分部积分公式,

$$I = \int_0^1 \left[ \int_1^{\sqrt{y}} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} dx \right] dy = y \int_1^{\sqrt{y}} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} dx \Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 y d \left[ \int_1^{\sqrt{y}} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} dx \right] = 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1+y} dy = 1 - 2\sqrt{2}.$$

**例 6.1.13.** 计算二重积分  $I = \int_0^1 dx \int_{x-x^3}^1 (3x^2 - 1)e^{y^2} dy$ .

令  $\varphi(x) = \int_{x-x^3}^1 e^{y^2} dy$ , 于是原式可化为

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (3x^2 - 1)\varphi(x) dx = \int_0^1 \varphi(x) d(x^3 - x) = (x^3 - x)\varphi(x) \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (x^3 - x)(3x^2 - 1)e^{(x-x^3)^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 e^{(x-x^3)^2} d(x-x^3)^2 = -\frac{1}{2} e^{(x-x^3)^2} \Big|_{x=0}^{x=1} = 0. \end{aligned}$$

**例 6.1.14.** 计算二重积分  $\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 x^3 \sin y^3 dy$ .

令  $\varphi(x) = \int_{x^2}^1 \sin y^3 dy$ , 于是原式可化为

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^3 \varphi(x) dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \varphi(x) dx^4 = \frac{1}{4} x^3 \varphi(x) \Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 \cdot (-2x \sin x^6) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^5 \sin x^6 dx = \frac{1}{12} \int_0^1 \sin x^6 dx^6 = \frac{-\cos x^6}{12} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1 - \cos 1}{12}. \end{aligned}$$

### 交换积分顺序

**例 6.1.15 (2004 数一).** 设  $f(x)$  为连续函数,  $F(t) = \int_0^t dy \int_y^t f(x) dx$ , 则  $F'(2)$  等于

- A.  $2f(2)$ .      B.  $f(2)$ .      C.  $-f(2)$ .      D. 0.

交换积分次序,  $F(t) = \int_1^t dx \int_1^x f(x) dy = \int_1^t (x-1)f(x) dx$ , 于是  $F'(2) = (2-1)f(2) = f(2)$ , 故选 B.

**例 6.1.16.** 计算  $I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y \frac{\sin z}{1-z} dz$ .

逐次交换积分顺序, 得

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dz \int_z^x \frac{\sin z}{1-z} dy = \int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_x^z \frac{\sin z}{1-z} dy = \int_0^1 \frac{\sin z}{1-z} \frac{(1-z)^2}{2} dz = \frac{1 - \sin 1}{2}.$$

**例 6.1.17.** 计算  $I = \int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_y^1 y \sqrt{1+z^4} dz$ .

逐次交换积分顺序, 得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_x^1 dz \int_x^z y \sqrt{1+z^4} dy = \int_0^1 dz \int_0^z dx \int_x^z y \sqrt{1+z^4} dy = \int_0^1 dz \int_0^z \frac{z^2 - x^2}{2} \sqrt{1+z^4} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 z^3 \sqrt{1+z^4} dz = \frac{1}{12} \int_0^1 \sqrt{1+z^4} d(1+z^4) = \frac{(1+z^4)^{\frac{3}{2}}}{18} \Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{18}. \end{aligned}$$

**例 6.1.18.** 计算  $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \int_0^{1-x-z} (1-y)e^{-(1-y-z)^2} dy$ .

逐次交换积分顺序, 得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \int_0^{1-x-z} (1-y)e^{-(1-y-z)^2} dy = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} (1-y)e^{-(1-y-z)^2} dx \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} (1-y-z)(1-y)e^{-(1-y-z)^2} dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (1-y-z)(1-y)e^{-(1-y-z)^2} dz \\ &= \int_0^1 \frac{1-y}{2} e^{-(1-y-z)^2} \Big|_0^{1-y} dy = \frac{1}{4e}. \end{aligned}$$

**例 6.1.19.** 求极限  $I = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sqrt{t}} dx \int_{x^2}^t \sin y^2 dy}{\left(e^{-\frac{2}{\pi}t^2} - 1\right) \arctan t^{\frac{3}{2}}}.$

$$\int_0^{\sqrt{t}} dx \int_{x^2}^t \sin y^2 dy = \int_0^t \sin y^2 dy \int_0^{\sqrt{y}} dx = \int_0^t \sqrt{y} \sin y^2 dy, I = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^t \sqrt{y} \sin y^2 dy}{-\frac{2}{\pi} t^{\frac{7}{2}}} \stackrel{L'H}{=} -\frac{\pi}{7}.$$

**例 6.1.20.** 计算  $\int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{1+y^2} dy + 3 \int_0^1 dy \int_1^{\sqrt{2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} dx.$

对前部分交换积分次序, 后部分采用极坐标换元,

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{1+y^2} dy &= \int_0^1 dy \int_y^1 \sqrt{1+y^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+y^2} dy - \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1) \\ 3 \int_0^1 dy \int_1^{\sqrt{2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} dx &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\sec \theta}^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\sec^2 \theta} d\theta \tan \theta = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} - \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt \end{aligned}$$

两式相加得  $\frac{\sqrt{2}\pi}{2} - \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$ .

**例 6.1.21.** 计算  $\int_0^1 dy \int_0^1 \sqrt{e^{2x}-y^2} dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 \sqrt{e^{2x}-y^2} dx.$

交换积分次序先  $x$  后  $y$  有,

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{e^x} \sqrt{e^{2x}-y^2} dy = \int_0^1 e^{2x} dx \int_0^{e^x} \sqrt{1-\left(\frac{y}{e^x}\right)^2} d\left(\frac{y}{e^x}\right)$$

其中  $\int_0^{e^x} \sqrt{1-\left(\frac{y}{e^x}\right)^2} d\left(\frac{y}{e^x}\right) \stackrel{\frac{y}{e^x}=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}$ ,  $\int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{e^2-1}{2}$ ,

综上, 原式等于  $\frac{\pi-1}{2}(e^2-1)$ .

## 圆代换与球代换

**例 6.1.22 (2011 数二).** 设平面区域  $D$  由直线  $y=x$ , 圆  $x^2+y^2=2y$  及  $y$  轴所围成, 计算  $\iint_D xy d\sigma$ .

圆的极坐标为  $r=2\sin\theta$ , 于是

$$I = \iint_D xy d\sigma = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^2 \cos\theta \sin\theta r dr = 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta d\sin\theta = \frac{7}{12}.$$

**例 6.1.23 (2015 数一).** 设  $D$  是第一象限中由曲线  $2xy=1$ ,  $4xy=1$  与直线  $y=x$ ,  $y=\sqrt{3}x$  围成的平面区域, 函数  $f(x,y)$  在  $D$  上连续, 则  $\iint_D f(x,y) dx dy$ .

A.  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2 \sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$

C.  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2 \sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr.$

B.  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2 \sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$

D.  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2 \sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr.$

积分区域可用极坐标表示为  $D = \left\{ (r, \theta) \mid \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \frac{1}{\sqrt{2 \sin 2\theta}} \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}} \right\}$ , 于是有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2 \sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

故选 B.

**例 6.1.24.** 设函数  $f(u)$  连续, 区域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2y\}$ , 则  $\iint_D f(xy) dx dy$ .

A.  $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(xy) dy.$

C.  $\int_0^\pi d\theta \int_0^{2 \sin \theta} f(r^2 \sin \theta \cos \theta) dr.$

B.  $2 \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy) dx.$

D.  $\int_0^\pi d\theta \int_0^{2 \sin \theta} f(r^2 \sin \theta \cos \theta) r dr.$

在直角坐标系下

$$\iint_D f(xy) dx dy = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} f(xy) dx = \int_{-1}^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(xy) dy$$

故排除 A、B, 在极坐标下

$$\iint_D f(xy) dx dy = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2 \sin \theta} f(r^2 \sin \theta \cos \theta) r dr$$

故选 D.

**例 6.1.25.** 计算三重积分  $I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是两个球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$  和  $x^2 + y^2 + z^2 = z$

围成的区域.

由球坐标变化,  $\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$ , 则  $\Omega' = \left\{ 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \cos \varphi \leq r \leq 2 \cos \varphi \right\}$ , 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} r^3 dr \\ &= \frac{15\pi 2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos^5 \varphi d\varphi = \frac{5\pi}{4}. \end{aligned}$$

**例 6.1.26.** 设积分区域  $\Omega_t : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2tz$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 15$ , 求极限

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^5} \iiint_{\Omega_t} f(x^2 + y^2 + z^2) dV.$$

法一: 由三重积分的球坐标计算方法, 积分区域可用球坐标变量表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2t \cos \varphi$$

故三重积分表示为  $g(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2t \cos \varphi} f(r^2) r^2 dr$ , 设  $F'(r) = f(r^2) r^2$ , 则

$$g(t) = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [F(2t \cos \varphi) - F(0)] \sin \varphi d\varphi = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(2t \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi - 2\pi F(0) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi$$

$$= -2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(2t \cos \varphi) d\cos \varphi - 2\pi F(0) = \frac{\pi}{t} \int_0^{2t} F(u) du - 2\pi F(0)$$

故

$$\begin{aligned} I &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^5} \iiint_{\Omega_t} f(x^2 + y^2 + z^2) dV = \pi \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{2t} F(u) du - 2tF(0)}{t^6} \xrightarrow{L'} \pi \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2F(2t) - 2F(0)}{6t^5} \\ &= \frac{\pi}{3} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(2t) - F(0)}{t^5} \xrightarrow{L'} \frac{\pi}{3} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2F'(2t)}{5t^4} = \frac{2\pi}{15} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4t^2 f(4t^2)}{t^4} = \frac{32\pi}{15} f'(0) = 32\pi. \end{aligned}$$

法二：有题意可假设  $f(x) = 15x + o(x)$ , 并令  $g(t) = \iiint_{\Omega_t} f(x^2 + y^2 + z^2) dV$ , 于是

$$\begin{aligned} g(t) &= \iiint_{\Omega_t} [15(x^2 + y^2 + z^2) + o(x^2 + y^2 + z^2)] dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2t \cos \varphi} [15r^2 + o(r^2)] r^2 \sin \varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi [3r^5 + o(r^5)] \Big|_0^{2t \cos \varphi} d\varphi = -6\pi \cdot 32t^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\cos \varphi + o(t^5) = 32\pi t^5 + o(t^5) \end{aligned}$$

所以  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(t)}{t^5} = 32\pi$ .

**例 6.1.27.** 设  $f(x)$  是  $(0, +\infty)$  上连续可导的函数,  $f(x) \neq 0$  且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = c > 0$ , 记

$$F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dV, \quad G(t) = \iint_{x^2+y^2 \leqslant t^2} f(\sqrt{x^2+y^2}) d\sigma$$

求函数  $h(t)$ , 使得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(t)}{h(t)G(t)} = 1$ .

由三重积分的球坐标计算公式和二重积分的极坐标计算公式, 得

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^t f(r) r^2 dr = 4\pi \int_0^t f(r) r^2 dr \\ G(t) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(r) r dr = 2\pi \int_0^t f(r) r^2 dr \end{aligned}$$

由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = c > 0$  知,  $\exists X_0 > 0$ , 当  $x > X_0$  时,  $f(x)$  与  $f'(x)$  同号, 故  $f(x) > 0$  时,  $f(x)$  单调递增, 则

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) = +\infty, \quad \int_{X_0}^{+\infty} f(t) dt = +\infty$$

那么

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(t)}{tG(t)} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4\pi \int_0^t f(r) r^2 dr}{2\pi t \int_0^t f(t) r dr} = 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^t f(r) r^2 dr}{t \int_0^t f(t) r dr} \xrightarrow{L'} 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^t f(t) r^2 dr}{\int_0^t f(t) r dr + f(t)t^2} \\ &\xrightarrow{L'} 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2tf(t) + t^2 f'(t)}{3tf(t) + t^2 f'(t)} = 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2tf'(t)}{f(t)}}{3 + \frac{tf'(t)}{f(t)}} = \frac{2(2+c)}{3+c} \end{aligned}$$

故  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(t)}{2(2+c)tG(t)} = 1$ , 所以取  $h(t) = \frac{2(2+c)}{3+c}t$  即为所求函数.

**Jacobian 行列式**

**例 6.1.28.** 计算  $\iint_D e^{\frac{y}{x+y}} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $x + y = 1$  与坐标轴所围成的区域.

法一: 利用极坐标, 令  $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$  则区域  $D$  化为  $D' = \left\{ (\theta, \rho) \mid 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \rho < \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} \right\}$ ,  $dx dy = \rho d\theta d\rho$  于是

$$\begin{aligned} \iint_D e^{\frac{y}{x+y}} dx dy &= \iint_{D'} e^{\frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}} \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} \rho e^{\frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}} d\rho \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}} d\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}\right) = \frac{1}{2} e^{\frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(e - 1). \end{aligned}$$

法二: 利用变量代换, 令  $x + y = u, y = uv$ , 则区域  $D$  化为  $D' = \{(u, v) \mid 0 < u < 1, 0 < v < 1\}$ ,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u$$

于是  $\iint_D e^{\frac{y}{x+y}} dx dy = \iint_{D'} e^v \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \int_0^1 u du \int_0^1 e^v dv = \frac{1}{2}(e - 1)$ .

法三: 利用变量代换, 令  $x + y = u, y - x = v$ , 则区域  $D$  化为  $D' = \{(u, v) \mid 0 < u < 1, -u < v < u\}$ ,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

于是  $\iint_D e^{\frac{y}{x+y}} dx dy = \iint_{D'} e^{\frac{u+v}{2u}} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 du \int_{-u}^u e^{\frac{u+v}{2u}} dv = \frac{1}{2}(e - 1)$ .

**例 6.1.29.** 设  $D$  是  $y = \sqrt{x}, x = \sqrt{y}$  和  $x^2 + y^2 - x - y + \frac{1}{4} = 0$ ,  $\left( x, y \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \right)$  围成的封闭区域, 求积分分

$$\iint_D (x - y^2)(y - x^2)(1 - 4xy) dx dy.$$

令  $u = x - y^2, v = y - x^2$ , 那么  $D' = \left\{ (u, v) \mid u, v \geq 0, u + v \leq \frac{1}{4} \right\}$

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|} = \frac{1}{|1 - 4xy|}$$

$$\text{原式} = \iint_{D'} uv du dv = \int_0^{\frac{1}{4}} du \int_0^{\frac{1}{4}-u} uv dv = \int_0^{\frac{1}{4}} \left( \frac{1}{2}u^3 - \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{32}u \right) du = \frac{1}{6144}.$$

**例 6.1.30.** 设  $z = z(x, y)$  是由  $\varphi(y - bz) = x - az$  确定的隐函数, 其中  $\varphi$  是连续可微函数, 且  $a - b\varphi'(y - bz) \neq 0$ , 求二重积分

$$I = \iint_D (az'_x + bz'_y) e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$$

其中  $D$  是由  $x = 0, y = 0, x + y = 1$  所围成的区域.

令  $F(x, y, z) = x - az - \varphi(y - bz)$ , 那么

$$F'_x = 1, F'_y = -\varphi'(y - bz), F'_z = -a + b\varphi'(y - bz)$$

当  $a - b\varphi'(y - bz) \neq 0$  时, 由隐函数求导公式, 得

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{1}{a - b\varphi'(y - bz)}, z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\varphi'(y - bz)}{a - b\varphi'(y - bz)}$$

于是  $az'_x + bz'_y = 1$ , 代入被积函数表达式, 得  $I = \iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$  令  $u = x - y, v = x + y, J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{2}$ , 且变换后的积

分区域为  $D_{uv} = \{(u, v) : -v \leq u \leq v, 0 \leq v \leq 1\}$ , 所以二重积分化为

$$I = \iint_{D_{uv}} e^{\frac{u}{v}} \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 dv \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du = \frac{e - e^{-1}}{4}.$$

**例 6.1.31 (2007 湖南大学).** 计算积分

$$I = \iint_D \frac{(x+y)[\ln(x+y) - \ln y]}{\sqrt{2-x-y}} dx dy$$

其中区域  $D$  为  $x=0, x+y=1, y=x$  所围成的三角形区域.

原式改写为  $I = \iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)}{\sqrt{2-(x+y)}} dx dy$ , 则令  $u = x+y, v = \frac{x}{y}$ , 那么  $\begin{cases} x = \frac{uv}{1+v} \\ y = \frac{u}{1+v} \end{cases}$ , 并且

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \\ \frac{1}{1+v} & \frac{-u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = -\frac{u}{(1+v)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{D_{uv}} \frac{u \ln(1+v)}{\sqrt{2-u}} |J| du dv = \iint_{D_{uv}} \frac{u \ln(1+v)}{\sqrt{2-u}} \cdot \frac{u}{(1+v)^2} du dv \\ &= \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{2-u}} du \cdot \int_0^1 \frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2} dv = \frac{2}{15} (32\sqrt{2} - 43) \cdot \frac{1}{2} (1 - \ln 2) = \frac{32\sqrt{2} - 43}{15} (1 - \ln 2). \end{aligned}$$

**例 6.1.32.** 设  $\Omega$  是由曲面  $z = y^2, z = 4y^2$  ( $y > 0$ ), 平面  $z = x, z = 2x$  及  $z = 2$  所围区域, 求积分

$$\iiint_{\Omega} \frac{z\sqrt{z}}{y^3} \cos \frac{z}{y^2} dx dy dz.$$

令  $u = \frac{z}{y^2}, v = \frac{z}{x}, z = z$ , 即  $x = \frac{z}{v}, y = \sqrt{\frac{z}{u}}, z = z, \Omega' : 0 \leq z \leq 2, 1 \leq v \leq 2, 1 \leq u \leq 4$ .

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, z)} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{z}{v^2} & \frac{1}{v} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{u^3}} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uz}} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{z}{2v^2} \left(\frac{z}{u}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{z\sqrt{z}}{y^3} \cos \frac{z}{y^2} dx dy dz &= \iiint_{\Omega'} u^{\frac{3}{2}} \cos u |J| du dv dz = \iiint_{\Omega'} u^{\frac{3}{2}} \cos u \cdot \frac{z}{2v^2} \left(\frac{z}{u}\right)^{\frac{3}{2}} du dv dz \\ &= \frac{1}{2} \int_1^4 \cos u du \int_1^2 \frac{1}{v^2} dv \int_0^2 z^{\frac{5}{2}} dz = \frac{4\sqrt{2}}{7} (\sin 4 - \sin 1). \end{aligned}$$

**例 6.1.33.** 设  $x = x(u, v), y = y(u, v)$  有连续偏导数, 一一对应地将区域  $D'$  映射到  $xOy$  平面的区域  $D$ , 满足  $J \neq 0$ , 且

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}$$

证明:  $\iint_D \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \iint_{D'} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 \right] du dv$ .

证 由已知得

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 = \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\end{aligned}$$

两式相加

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right] \\ &= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] \left[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right]\end{aligned}$$

另外

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2$$

从而

$$dudv = |J^{-1}| dx dy = \frac{dx dy}{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2}$$

综上所述, 得证  $\iint_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dx dy = \iint_{D'} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right] dudv$ .

## 四重积分换元

**定理 6.1.2 (高次积分球坐标公式).** 根据球坐标变换公式:

$$x_1 = r \cos \phi_1$$

$$x_2 = r \sin \phi_1 \cos \phi_2$$

⋮

$$x_{n-1} = r \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2} \cos \phi_{n-1}$$

$$x_n = r \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2} \sin \phi_{n-1}$$

将直角坐标  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  变换为极坐标  $(r, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1})$  特别地,

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 &= 1 \\ \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(r, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1})} &= r^{n-1} \sin^{n-2} \phi_1 \sin^{n-3} \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2}.\end{aligned}$$

**例 6.1.34.** 求  $\iiint_V \sqrt{\frac{1-x^2-y^2-z^2-u^2}{1+x^2+y^2+z^2+u^2}} dx dy dz du$ , 其中  $V$  为  $x, y, z, u \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leq 1$ .

法一: 用球坐标

$$x = r \cos \psi, y = r \sin \psi \cos \varphi, z = r \sin \psi \sin \varphi \cos \theta, u = r \sin \psi \sin \varphi \sin \theta$$

此时

$$\begin{aligned}J &= \frac{\partial(x, y, z, u)}{\partial(r, \psi, \varphi, \theta)} = r^3 \sin^2 \phi \sin \varphi, x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = r^2 \\ V &= \left\{(r, \phi, \varphi, \theta) \mid 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1\right\}\end{aligned}$$

故原积分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi d\psi \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} r^3 dr = \frac{\pi^2}{16} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} r^2 dr^2$$

$$\frac{\pi^2}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t - \sin^2 t) dt = \frac{\pi^2}{16} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

法二：用双极坐标

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = \rho \cos \varphi, u = \rho \sin \varphi$$

此时

$$J = \frac{\partial(x, y, z, u)}{\partial(r, \theta, \rho, \varphi)} = r\rho, x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = r^2 + \rho^2$$

$$V = \left\{ (r, \theta, \rho, \varphi) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, r \geq 0, \rho \geq 0, r^2 + \rho^2 \leq 1 \right\}$$

故原积分

$$I = \iiint_V \sqrt{\frac{1-r^2-\rho^2}{1+r^2+\rho^2}} r\rho dr d\rho d\theta d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \iint_{\substack{r^2+\rho^2 \leq 1 \\ r, \rho \geq 0}} \sqrt{\frac{1-r^2-\rho^2}{1+r^2+\rho^2}} r\rho dr d\rho = \frac{\pi^2}{16} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

## 分区积分及对称性的应用

**定理 6.1.3 (重积分的对称性).** (1) 二重积分情形:

(i) 若积分区域  $D$  关于  $x$  轴对称, 而  $D_1$  是  $D$  中对应于  $y \geq 0$  的部分, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy, & f(x, -y) = f(x, y), \\ 0, & f(x, -y) = -f(x, y). \end{cases}$$

(ii) 若积分区域  $D$  关于  $y$  轴对称, 而  $D_1$  是  $D$  中对应于  $x \geq 0$  的部分, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy, & f(-x, y) = f(x, y), \\ 0, & f(-x, y) = -f(x, y). \end{cases}$$

(iii) 若积分区域  $D$  关于  $x$  轴和  $y$  轴均对称, 而  $D_1$  是  $D$  中对应于  $x \geq 0, y \geq 0$  的部分, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \begin{cases} 4 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy, & f(-x, y) = f(x, -y) = f(x, y), \\ 0, & f(-x, y) \text{ 或 } f(x, -y) = -f(x, y). \end{cases}$$

(2) 三重积分情形:

(i) 若积分区域  $\Omega$  关于  $xOy$  平面对称, 而  $\Omega_1$  是  $\Omega$  中对应于  $z \geq 0$  的部分, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \begin{cases} 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv, & f \text{ 关于 } z \text{ 为偶函数,} \\ 0, & f \text{ 关于 } z \text{ 为奇函数.} \end{cases}$$

如果积分区域  $\Omega$  关于  $xOz$  或  $yOz$  平面对称, 那么也有类似的结果.

(ii) 若积分区域  $\Omega$  关于  $xOy$  平面和  $xOz$  平面均对称, 而  $\Omega_1$  是  $\Omega$  中对应于  $z \geq 0, y \geq 0$  的部分, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \begin{cases} 4 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv, & f \text{ 关于 } y, z \text{ 均为偶函数,} \\ 0, & f \text{ 关于 } y \text{ 或 } z \text{ 为奇函数.} \end{cases}$$

如果积分区域  $\Omega$  关于  $xOz$  平面和  $yOz$  平面均对称, 或者关于  $xOy$  平面和  $yOz$  平面均对称, 那么也有类似的结果.

(iii) 如果积分区域  $\Omega$  关于 3 个坐标平面均对称, 而  $\Omega_1$  是  $\Omega$  中位于第一卦限的部分, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \begin{cases} 8 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv, & f \text{ 关于 } x, y, z \text{ 均为偶函数}, \\ 0, & f \text{ 关于 } x \text{ 或 } y \text{ 或 } z \text{ 为奇函数}. \end{cases}$$

**例 6.1.35.** 计算  $\iint_D \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy$ , 其中  $D$  为圆域:  $x^2 + y^2 \leq R^2$ .

**法一:** 利用轮换对称性, 因为积分区域  $D$  关于直线  $y = x$  对称, 所以由轮换对称性有

$$\iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$\text{从而 } \iint_D \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy = \frac{1}{a^2} \iint_D x^2 dx dy + \frac{1}{b^2} \iint_D y^2 dx dy = \frac{\pi R^4}{4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

**法二:** 利用轮换对称性, 因为积分区域  $D$  关于直线  $y = x$  对称, 所以由轮换对称性, 有

$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy &= \iint_D \left( \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} \right) dx dy = \frac{1}{2} \iint_D \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} \right) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{4} R^4 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right). \end{aligned}$$

**法三:** 利用极坐标, 令  $\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$  则  $0 < \theta \leq 2\pi, 0 < \rho \leq R$ ,

$$\iint_D \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \left( \frac{\rho^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{b^2} \right) \cdot \rho d\rho = \frac{\pi}{4} R^4 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

**法四:** 利用  $X$  型域及奇偶对称性, 因为圆域  $D$  既关于  $x$  轴对称又关于  $y$  轴对称, 且被积函数在关于  $x$  轴和  $y$  轴对称点上的值都相等, 所以由对称性, 有

$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy &= 4 \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dy = 4 \int_0^R \left[ \frac{x^2}{a^2} \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{1}{3b^2} (\sqrt{R^2 - x^2})^3 \right] \\ &\stackrel{x=R \sin t}{=} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{a^2} R^4 \sin^2 t \cos^2 t + \frac{1}{3b^2} R^4 \cos^4 t \right] dt \\ &= 4 \left[ \frac{R^4}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - \sin^4 t) dt + \frac{R^4}{3b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt \right] = \frac{\pi}{4} R^4 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right). \end{aligned}$$

**例 6.1.36.** 计算积分.

|   |   |
|---|---|
| (1) $\iint_{[0,1] \times [0,1]}  xy - \frac{1}{4}  dx dy.$                      | (2) $\iint_{x^2+y^2 \leq 5} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 3) dx dy.$   |
| (3) $\iint_{ x  \leq 1, 0 \leq y \leq 2} \sqrt{ y - x^2 } dx dy.$               | (4) $\iint_{0 \leq x, y \leq 2} [x + y] dx dy$ ([·] 表示不大于 · 最大整数).  |
| (5) $\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \frac{ xy (1+e^{x^2})}{2+e^{x^2}+e^{y^2}} dx dy.$ | (6) (2024 数一) $\iint_{\substack{\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy.$ |

$$(1) \left| xy - \frac{1}{4} \right| = \begin{cases} \frac{1}{4} - xy, & (x, y) \text{ 在双曲线 } xy = \frac{1}{4} \text{ 之下} \\ xy - \frac{1}{4}, & (x, y) \text{ 在双曲线 } xy = \frac{1}{4} \text{ 之上} \end{cases}, \text{ 如图 (a) 所示, 将积分区域划分为三个区域, 于是}$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_2 \cup D_3} \left( \frac{1}{4} - xy \right) dx dy + \iint_{D_1} \left( xy - \frac{1}{4} \right) dx dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}} dx \int_0^1 \left( \frac{1}{4} - xy \right) dy + \int_{\frac{1}{4}}^1 dx \int_0^{\frac{1}{4x}} \left( \frac{1}{4} - xy \right) dy + \int_{\frac{1}{4}}^1 dx \int_{\frac{1}{4x}}^1 \left( xy - \frac{1}{4} \right) dy \\ &= \frac{3}{64} + \frac{\ln 2}{16} + \frac{1}{16} \left( \frac{3}{4} + \ln 2 \right) = \frac{1}{8} \left( \frac{3}{4} + \ln 2 \right). \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 被积函数 } \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 3) = \begin{cases} 1, & x^2 - y^2 + 3 > 0 \\ 0, & x^2 - y^2 + 3 = 0 \\ -1, & x^2 - y^2 + 3 < 0 \end{cases}, \text{ 如图 (b) 所示, 被积函数和积分区域都关于坐标轴对称, 因此只要计算第一象限的部分, 再乘 4 即为原积分值, 故}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 4 \iint_{\substack{x^2+y^2 \leqslant 5 \\ x,y \geqslant 0}} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 3) dx dy = 4 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x^2+3}} dy - 4 \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x^2+5}}^{\sqrt{5-x^2}} dy + 4 \int_1^{\sqrt{5}} dx \int_0^{\sqrt{5-x^2}} dy \\ &= 8 \int_0^1 \sqrt{x^2+3} dx - 4 \int_0^1 \sqrt{5-x^2} dx + 4 \int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{5-x^2} dx = 6 \ln 3 + 5\pi - 20 \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

(3) 如图 (c) 所示,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{|x| \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2} \sqrt{|y - x^2|} dx dy = \iint_{|x| \leqslant 1, x^2 \leqslant y \leqslant 2} \sqrt{y - x^2} dx dy + \iint_{|x| \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x^2} \sqrt{x^2 - y} dx dy \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^2 \sqrt{y - x^2} dy + \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

(4) 如图 (d) 所示, 原式 =  $S_{ABCD} + 2S_{CDEF} + 3S_{\triangle EFG} + 3S_{\triangle CDG} = 6$ .

(5) 积分区域关于  $x, y$  都对称, 且具有轮换对称性, 则有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 4 \iint_{\substack{x^2+y^2 \leqslant a^2 \\ x,y \geqslant 0}} \frac{xy(1+e^{x^2})}{2+e^{x^2}+e^{y^2}} dx dy = 2 \iint_{\substack{x^2+y^2 \leqslant a^2 \\ x,y \geqslant 0}} \left[ \frac{xy(1+e^{x^2})}{2+e^{x^2}+e^{y^2}} + \frac{yx(1+e^{y^2})}{2+e^{y^2}+e^{x^2}} \right] dx dy \\ &= 2 \iint_{\substack{x^2+y^2 \leqslant a^2 \\ x,y \geqslant 0}} xy dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{a^4}{4}. \end{aligned}$$

(6) 积分区域关于  $x$  轴对称, 被积函数是  $y$  的偶函数, 那么

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2 \iint_{\substack{\sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = 2 \int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx = 2 \int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^1 \frac{d(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= 2 \int_0^1 \sqrt{1+y^2} dy - 2 = y\sqrt{1+y^2} + \ln(y + \sqrt{1+y^2}) \Big|_0^1 - 2 = \sqrt{2} - 2 + \ln(1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

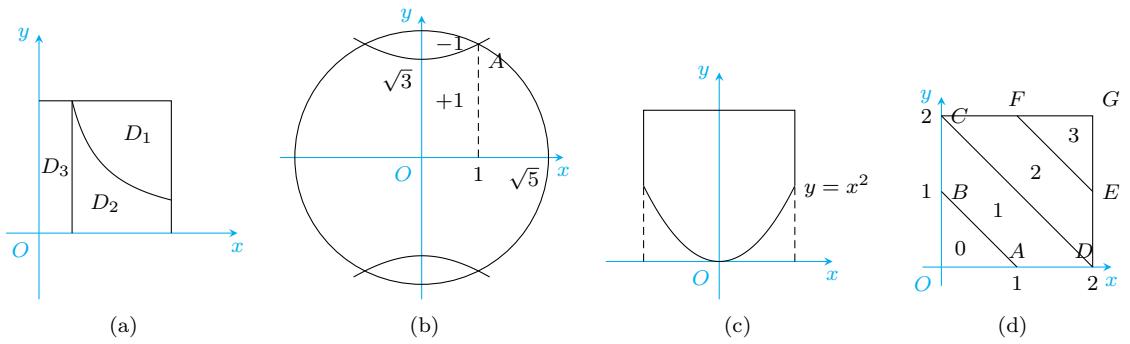


图 6.1.3

**例 6.1.37.** 设函数  $f(x)$  满足

$$f(x) = x^2 + x \int_0^{x^2} f(x^2 - t) dt + \iint_D f(xy) dx dy$$

其中  $D$  是以  $(-1, -1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$  为顶点的三角形, 且  $f(1) = 0$ , 求  $\int_0^1 f(x) dx$ .

令  $\iint_D f(xy) dx dy = A$ , 那么  $f(x) = x^2 + x \int_0^{x^2} f(x^2 - t) dt + A$ , 将  $x$  替换为  $xy$  得

$$f(xy) = x^2 y^2 + xy \int_0^{x^2 y^2} f(x^2 y^2 - t) dt + A \Rightarrow f(xy) = x^2 y^2 + xy \int_0^{x^2 y^2} f(u) du + A$$

对等式两边二重积分得

$$A = \iint_D x^2 y^2 dx dy + \iint_D \left[ xy \int_0^{x^2 y^2} f(u) du \right] dx dy + A \iint_D dx dy$$

其中  $\iint_D x^2 y^2 dx dy = \int_{-1}^1 x^2 dx \int_{-1}^x y^2 dy = \frac{2}{9}$ ,  $\iint_D dx dy = 2$ , 作  $y = -x$ , 将  $D$  划分为关于  $x$  轴对称的  $D_1$  和关于  $y$  轴对称的  $D_2$ , 并令函数  $g(x, y) = \int_0^{x^2 y^2} f(u) du$ , 关于  $x$  和  $y$  都是奇函数, 利用二重积分的对称性知

$$\iint_D g(x, y) dx dy = \iint_{D_1} g(x, y) dx dy + \iint_{D_2} g(x, y) dx dy = 0$$

故  $A = -\frac{2}{9}$ , 又由已知条件  $f(0) = 1$ , 那么

$$0 = 1 + \int_0^1 f(1-t) dt - \frac{2}{9} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{9}.$$

**例 6.1.38.** 求积分  $I = \int_{-1}^1 dz \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1-z^2} \frac{(\cos x + \sin y + \sqrt{3}z)^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dx dy$ .

记  $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$ , 由对称性得

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} \frac{(\cos x + \sin y + \sqrt{3}z)^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dV = \iiint_{\Omega} \frac{(\cos x + \sin y)^2 + 3z^2 + 2\sqrt{3}z(\cos x + \sin y)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dV \\ &= \iiint_{\Omega} \frac{(\cos x + \sin y)^2 + 3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dV = \iiint_{\Omega} \frac{(\cos x + \sin y)^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dV + 3 \iiint_{\Omega} \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iiint_{\Omega} \frac{\cos^2 x + \sin^2 y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dV + 3 \iiint_{\Omega} \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dV \\
&= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \frac{\cos^2 x + \cos^2 y + \sin^2 x + \sin^2 y}{(x^2 + y^2 + z^2) + 1} dV + 3 \iiint_{\Omega} \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dV \\
&= \iiint_{\Omega} \frac{dV}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} + 3 \iiint_{\Omega} \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dV \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \frac{r^2}{r^4 + 1} dr + 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^1 \frac{r^4}{r^4 + 1} dr \\
&= 4\pi \int_0^1 \frac{r^4 + r^2}{r^4 + 1} dr = 4\pi + \sqrt{2}\pi \ln(3 - 2\sqrt{2}) \\
\text{其中 } \int_0^1 \frac{r^4 + r^2}{r^4 + 1} dr &= \int_0^1 \frac{r^4 + 1 + r^2 - 1}{r^4 + 1} dr = \int_0^1 dr + \int_0^1 \frac{r^2 - 1}{r^4 + 1} dr, \\
\int \frac{r^2 - 1}{r^4 + 1} dr &= \int \frac{1 - \frac{r^2}{r}}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - 2} dr \stackrel{r + \frac{1}{r} = t}{=} \int \frac{dt}{(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{r + \frac{1}{r} - \sqrt{2}}{r + \frac{1}{r} + \sqrt{2}} \right| + C.
\end{aligned}$$

### 6.1.3 反常二重积分与含参变量积分

#### 反常二重积分

**定义 6.1.3 (反常二重积分).** 若  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  为反常积分, 则取  $D'$ , 使  $D' \subset D$  并且  $\iint_{D'} f(x, y) d\sigma$  为一般的二重积分, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{D' \rightarrow D} \iint_{D'} f(x, y) d\sigma$$

事实上, 当反常二重积分可积时, 其计算方法与一般二重积分基本相同.

**例 6.1.39.** 计算二重积分  $I = \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy$ .

令  $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta$ , 那么  $dx dy = abr dr d\theta$ , 故

$$I = ab \iint_{\substack{0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1 \leq r \leq +\infty}} e^{-r^2} r dr d\theta = ab \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{+\infty} r e^{-r^2} dr = \frac{\pi ab}{e}.$$

**例 6.1.40.** 求不定积分  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{x} \cos x dx, a > 0$ .

注意到

$$\int_a^b e^{-yx} \cos x dy = -\frac{\cos x}{x} \int_a^b e^{-yx} d(-yx) = -\frac{\cos x}{x} (e^{-yx}) \Big|_{y=a}^{y=b} = -\frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} \cos x$$

所以  $\int_0^a e^{-yx} \cos x dy = \frac{1 - e^{-ax}}{x} \cos x$ , 交换积分次序可知: 原式  $= \int_0^a dy \int_0^{+\infty} e^{-yx} \cos x dx$

$$\int_0^{+\infty} e^{-yx} \cos x dx = \int_0^{+\infty} e^{-yx} d(\sin x) = e^{-yx} \sin \Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \int_0^{+\infty} \sin x d(e^{-yx})$$

$$= -y \int_0^{+\infty} e^{-yx} \sin x dx = y \int_0^{+\infty} e^{-yx} d(\cos x) = y \left( e^{-yx} \cos x \Big|_{x=0}^{x=+\infty} + y \int_0^{+\infty} \cos x e^{-yx} dx \right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-yx} \cos x dx = \frac{y}{1 + y^2}$$

故

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{x} \cos x dx = \int_0^a \frac{y}{1+y^2} dy = \frac{1}{2} \ln(1+y^2) \Big|_0^a = \frac{1}{2} \ln(1+a^2).$$

**例 6.1.41.** 计算  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{x} e^{-2x} dx$ .

注意到  $\frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{x} = \int_3^5 \cos(xy) dy$ , 所以原式 =  $\int_0^{+\infty} dx \int_3^5 e^{-2x} \cos(xy) dy$ ,

由于  $|e^{-2x} \cos(xy)| \leq e^{-2x}$ , 且  $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$  收敛, 所以  $\int_3^5 \cos(xy) dx$  关于  $y \in [3, 5]$  一致收敛, 再结合  $e^{-2x} \cos(xy)$  为  $[0, +\infty) \times [3, 5]$  上的连续函数, 所以

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} dx \int_3^5 e^{-2x} \cos(xy) dy = \int_3^5 dy \int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos(xy) dx \\ &= \int_3^5 \frac{e^{-2x}}{4+y^2} [-2 \cos(xy) + y \sin(xy)]_0^{+\infty} dy = 2 \int_3^5 \frac{dy}{4+y^2} \\ &= \arctan \frac{y}{2} \Big|_3^5 = \arctan \frac{5}{2} - \arctan \frac{3}{2} = \arctan \frac{4}{19}. \end{aligned}$$

**例 6.1.42.** 计算  $I = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2) dx dy$ , 其中  $D$  是全平面.

用极坐标, 化为先  $\theta$  后  $\rho$  次序的二次积分,

$$I = \int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{2\pi} \rho e^{-\rho^2} \cos \rho^2 d\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} \cos \rho^2 d\rho.$$

其中,

$$\begin{aligned} \int \rho e^{-\rho^2} \cos \rho^2 d\rho &= \int \frac{4\rho \cos \rho^2}{4e^{\rho^2}} d\rho = \int \frac{2\rho \cos \rho^2 + 2\rho \sin \rho^2 - 2\rho (\sin \rho^2 - \cos \rho^2)}{4e^{\rho^2}} d\rho \\ &= \int \frac{(2\rho \cos \rho^2 + 2\rho \sin \rho^2) 4e^{\rho^2} - 8\rho e^{\rho^2} (\sin \rho^2 - \cos \rho^2)}{16e^{\rho^2}} d\rho \\ &= \int d \left( \frac{\sin \rho^2 - \cos \rho^2}{4e^{\rho^2}} \right) = \frac{\sin \rho^2 - \cos \rho^2}{4e^{\rho^2}} + C \end{aligned}$$

所以,  $I = 2\pi \cdot \frac{\sin \rho^2 - \cos \rho^2}{4e^{\rho^2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ .

**例 6.1.43.** 计算  $\iint_D \frac{x^2 + y^2 - 2}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy$ , 其中  $D : x^2 + y^2 \geq 2, x \leq 1$ .

注意到  $D$  关于  $x$  轴对称, 且被积函数关于  $y$  变量为偶函数, 记  $x$  轴上方部分积分区域为  $D_1$ , 令  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , 则在极坐标下,  $D_1$  可以描述为两部分, 如图 6.1.4 所示, 记作

$$D'_1 : \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \sqrt{2} \leq r \leq \sec \theta, D'_2 : \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \sqrt{2} \leq r \leq +\infty$$

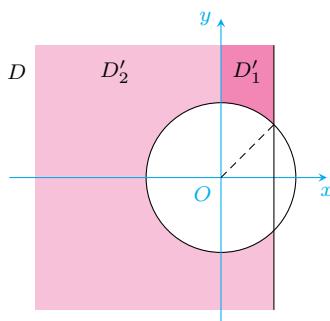


图 6.1.4

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\sqrt{2}}^{\sec \theta} \frac{r^2 - 2}{r^5} r dr + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{r^2 - 2}{r^5} r dr \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{2}{3r^3} - \frac{1}{r} \right)_{\sqrt{2}}^{\sec \theta} d\theta + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left( \frac{2}{3r^3} - \frac{1}{r} \right)_{\sqrt{2}}^{+\infty} d\theta \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{2 \cos^3 \theta}{3} - \cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) d\theta + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sqrt{2}}{3} d\theta \\ &= 2 \left[ \frac{2}{3} \left( \sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right) - \sin \theta + \frac{\sqrt{2}}{3} \theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + 2 \cdot \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \\ &= 2 \cdot \left( \frac{\pi}{3\sqrt{2}} - \frac{5}{9} - \frac{\pi}{6\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{9} \right) + \frac{\sqrt{2}}{3} \pi = \frac{4\sqrt{2}}{9} - \frac{10}{9} + \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \end{aligned}$$

**例 6.1.44.** 计算  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \min\{x, y\} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ .

由题意

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{+\infty} r \sin \theta e^{-r^2} r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\theta \int_0^{+\infty} r \cos \theta e^{-r^2} r dr = -2\sqrt{2} \int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2} dr \\ &= -\sqrt{2} \cdot 2 \int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2} dr = -\sqrt{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = -\sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2}. \end{aligned}$$

### 含参变量积分

含参变量积分是指在积分运算中, 被积函数中包含一个或多个参数的情况. 这种情况下, 参数被视  
为常数, 而不是变量, 因此在积分时需要将参数视为常数处理.

**定理 6.1.4 (含参变量积分求导公式).** 设  $f(t, x), f_x(t, x)$  在  $R = [a, b] \times [p, q]$  上连续,  $\alpha(x), \beta(x)$  为定义  
在  $[a, b]$  上其值含于  $[p, q]$  内的可微函数, 则函数

$$F(t, x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t, x) dt$$

在  $[a, b]$  上可微, 且

$$F'(t, x) = \frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t, x) dt = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(t, x) dt + f[\beta(x), x] \beta'(x) - f[\alpha(x), x] \alpha'(x).$$

**例 6.1.45.** 已知  $F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{(xt+x^2)} dt$ , 求  $\frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x=0}$ .

法一: 由含参变量积分求导公式, 有

$$\begin{aligned} I &= \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} e^{(xt+x^2)} dt = \left[ \int_{\sin x}^{\cos x} (t+2x)e^{(xt+x^2)} dt - \sin x e^{(x \cos x + x^2)} - \cos x e^{(x \sin x + x^2)} \right]_{x=0} \\ &= \int_0^1 t dt - 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

法二: 由题意,

$$F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{(xt+x^2)} dt = e^{x^2} \int_{\sin x}^{\cos x} e^{xt} dt \stackrel{xt=u}{=} \frac{e^{x^2}}{x} \int_{x \sin x}^{x \cos x} e^u du = \frac{e^{x^2}}{x} (e^{x \cos x} - e^{x \sin x})$$

其中  $x \neq 0$ , 且  $F(0) = 1$ , 所以考虑导数定义式, 有

$$\frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x=0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{x^2}}{x} (e^{x \cos x} - e^{x \sin x}) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} (e^{x \cos x} - e^{x \sin x}) - x}{x^2}$$

由  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ ,  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ ,  $\sin x = x + o(x)$  得

$$\begin{aligned} e^{x \cos x} &= 1 + x \cos x + \frac{1}{2}(x \cos x)^2 + o((x \cos x)^2) \\ &= 1 + x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \frac{x^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o(x^2) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

$$e^{x \sin x} = 1 + x \sin x + (x \sin x)^2 + o((x \sin x)^2) = 1 + x^2 + o(x^2)$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$$

将上述展开式代入原极限式, 化简最终求得原极限等于  $-\frac{1}{2}$ .

**例 6.1.46.** 设  $f(x)$  为连续函数,  $t > 0$ , 区域  $\Omega$  是由抛物面  $z = x^2 + y^2$  和球面  $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$  ( $t > 0$ ) 所围成的部分, 定义三重积分  $F(t) = \iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) dv$ , 求  $F'(t)$ .

利用柱坐标系, 令  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$ , 则由  $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \end{cases}$  联立得  $z^2 = z + t^2$ , 解得  $z = \frac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2} := b^2(t)$ , 于是区域  $\Omega$  在  $xOy$  平面上的投影区域为  $D_{xy} : x^2 + y^2 \leq b^2(t)$ , 从而

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{b(t)} r dr \int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}} f(r^2 + z^2) dz = 2\pi \int_0^{b(t)} r \left[ \int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}} f(r^2 + z^2) dz \right] dr$$

记  $g(t, r) = r \left[ \int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}} f(r^2 + z^2) dz \right]$ , 则由  $f(x)$  的连续知,  $g(t, r)$  及  $\frac{\partial g(t, r)}{\partial r}$  连续, 于是由含参变量积分的求导公式, 得

$$\begin{aligned} F'(t) &= 2\pi \left[ \int_0^{b(t)} \frac{\partial g}{\partial t} dr + g(t, b(t)) \cdot b'(t) \right] \\ &= 2\pi \left[ \int_0^{b(t)} r f(t^2) \frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}} dr + b(t) \int_{b^2(t)}^{\sqrt{t^2-b^2(t)}} f(b^2(t) + z^2) dz \cdot b'(t) \right] \\ &= 2\pi t f(t^2) \int_0^{b(t)} \frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}} dr = -\pi t f(t^2) \int_0^{b(t)} \frac{d(t^2-r^2)}{\sqrt{t^2-r^2}} \\ &= 2\pi t f(t^2) \left( t - \sqrt{t^2-b^2(t)} \right) = 2\pi t f(t^2) (t - b^2(t)) = \pi t f(t^2) (2t + 1 - \sqrt{1+4t^2}). \end{aligned}$$

**例 6.1.47.** 求  $\frac{d^n}{dx^n} \left[ \int_0^x e^{nt} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!} dt \right]$ .

记  $f_k(x) = \int_0^x e^{nt} \frac{(x-t)^k}{k!} dt$ , 那么  $\frac{d}{dx} f_k(x) = \int_0^x e^{nt} \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} dt = f_{k-1}(x)$ , 于是

$$f''(x) = f'_{k-1}(x) = f_{k-2}(x), \dots, f_k^{(k)}(x) = f_0(x)$$

由于  $f'_0(x) = \left( \int_0^x e^{nt} dt \right)' = e^{nx}$ ,  $f''_0(x) = ne^{nx}$ ,  $\dots$ ,  $f_0^{(n)}(x) = n^{n-1}e^{nx}$ , 所以

$$\frac{d^n}{dx^n} \left[ \int_0^x e^{nt} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!} dt \right] = \sum_{k=0}^{n-1} f_k^{(n)}(x) = f_0^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} [f_k^{(k)}(x)]^{(n-k)} = \sum_{k=1}^n f_0^{(k)}(x) = \frac{1-n^n}{1-n} e^{nx}.$$

### 6.1.4 重积分的积分中值定理

**定理 6.1.5 (二重积分中值定理).** 若函数  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上连续, 函数  $g(x, y)$  在  $D$  上可积且不变号, 则  $\exists(\xi, \eta) \in D$ , 使得

$$\iint_D f(x, y) g(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \iint_D g(x, y) dx dy.$$

**例 6.1.48.** 已知  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x dv \int_{\ln(1+v)}^v \sin(u^2) du}{x^k} = c \neq 0$ , 求  $c$ .

错解. 记积分区域为  $D$ , 则由二重积分中值定理知,  $\exists(\xi, \eta) \in D$ , 使得  $\iint_D \sin(u^2) du dv = \sin(\eta^2) \iint_D du dv$ , 下求  $D$  的面积  $S$ ,

记  $I_1 = \frac{1}{2}x^2$ ,  $I_2 = \int_0^x \ln(1+t) dt$ , 于是

$$I_2 = \int_0^x \ln(1+t) dt = x \ln(1+x) - x + \ln(1+x)$$

因此  $S = I_1 - I_2 = \frac{1}{2}x^2 - x \ln(1+x) + x - \ln(1+x)$ , 故极限式化为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \left[ \frac{1}{2}x^2 - x \ln(1+x) + x - \ln(1+x) \right]}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \left[ \frac{1}{2}x^2 - x^2 + \frac{1}{2}x^3 + x - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right]}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{6}{x^k}}{x^5} = \frac{6}{x^k}$$

因为  $c \neq 0$ , 所以分子与分母等阶, 因此  $c = \frac{1}{6}$ .

**错因:** 对二重积分中值定理内容了解不透彻, 该定理说的是: 若函数  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上连续, 函数  $g(x, y)$  在  $D$  上可积且不变号, 则存在一点  $(\xi, \eta) \in D$ , 使得

$$\iint_D f(x, y)g(x, y)dxdy = f(\xi, \eta) \iint_D g(x, y)dxdy.$$

**法一:** 先使用 L'Hospital 法则, 将二重积分转化为定积分, 再使用积分中值定理, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x dv \int_{\ln(1+v)}^v \sin(u^2) du}{x^k} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{\ln(1+x)}^x \sin(u^2) du}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \xi^2 [x - \ln(1+x)]}{kx^{k-1}}$$

其中  $x \leftarrow \ln(1+x) < \xi < x$  ( $x \rightarrow 0^+$ ), 因此原极限等于  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^4}{kx^{k-1}}$ , 因此  $k=5, c=\frac{1}{10}$ .

**法二:** 因为  $\sin(u^2)$  在积分区间内不变号, 因此  $\int_{\ln(1+v)}^v \sin(u^2) du \sim \int_{\ln(1+v)}^v u^2 du$ , 又因为  $\ln(1+v) \sim v$  ( $v \rightarrow 0^+$ ), 因此原极限等价为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x dv \int_{\ln(1+v)}^v \sin(u^2) du}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x [v - \ln(1+v)] \xi_v^2 dv}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \frac{1}{2}v^4 dv}{x^k} = c$$

因为  $c \neq 0$ , 因此分子与分母等阶, 即  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}x^5}{x^k} = c \Rightarrow c = \frac{1}{10}$ .

**例 6.1.49.** 设区域  $D$  为  $x^2 + y^2 \leq r^2$ , 求极限  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_D e^{x^2 - y^2} \cos(x+y)dxdy$ .

由二重积分的积分中值定理知,  $\exists(\xi, \eta) \in D$ , 使得

$$\iint_D e^{x^2 - y^2} \cos(x+y)dxdy = \pi r^2 \cdot e^{\xi^2 - \eta^2} \cos(\xi + \eta)$$

于是,  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_D e^{x^2 - y^2} \cos(x+y)dxdy = \lim_{\xi, \eta \rightarrow 0} e^{\xi^2 - \eta^2} \cos(\xi + \eta) = 1$ .

**例 6.1.50 (2009 南京工业大学).** 求极限  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^2} \int_0^t dx \int_0^{t-x} e^{x^2 + y^2} dy$ .

由二重积分的积分中值定理知,  $\exists(\xi, \eta) \in \{(x, y) | 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq t-x\}$ , 使得

$$\int_0^t dx \int_0^{t-x} e^{x^2 + y^2} dy = \frac{t^2}{2} e^{\xi^2 + \eta^2}$$

于是,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^2} \int_0^t dx \int_0^{t-x} e^{x^2 + y^2} dy = \frac{1}{2} \lim_{\xi, \eta \rightarrow 0^+} e^{\xi^2 + \eta^2} = \frac{1}{2}$ .

**例 6.1.51 (2016 年天津市 (理工)).** 设函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  的某个领域内连续, 求  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F'(t)}{t}$  其中

$$F(t) = \iint_{x^2 + y^2 \leq t^2} f(x, y)dxdy.$$

由二重积分的积分中值定理知,  $\exists(\xi, \eta) \in x^2 + y^2 \leq t^2$ , 使得

$$F(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(x, y) dx dy = \pi t^2 f(\xi, \eta)$$

于是,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F'(t)}{t} = \lim_{\xi, \eta \rightarrow 0^+} \frac{2\pi t f(\xi, \eta)}{t} = 2\pi t f(0, 0)$ .

**例 6.1.52 (第十届“景润杯”).** 计算极限  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{D_R} e^{-x} \arctan \frac{y}{x} dx dy$ , 其中  $D_R$  是由

$$x = R, y = 0, y = \frac{2}{R}x - 1$$

所围成.

由二重积分的积分中值定理知,  $\exists(\xi, \eta) \in D_R$ , 使得

$$\iint_{D_R} e^{-x} \arctan \frac{y}{x} dx dy = e^{-\xi} \arctan \frac{\eta}{\xi} \iint_{D_R} dx dy = \frac{R}{4} e^{-\xi} \arctan \frac{\eta}{\xi}$$

其中  $R \in \left(\frac{R}{2}, R\right)$ ,  $\eta \in (0, 1)$ , 故

$$\left| \iint_{D_R} e^{-x} \arctan \frac{y}{x} dx dy \right| = e^{-\xi} \arctan \frac{\eta}{\xi} \iint_{D_R} dx dy \leq \frac{R}{4} e^{-\frac{R}{2}} \arctan \frac{\eta}{\xi} \rightarrow 0 (R \rightarrow +\infty)$$

所以  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{D_R} e^{-x} \arctan \frac{y}{x} dx dy = 0$ .

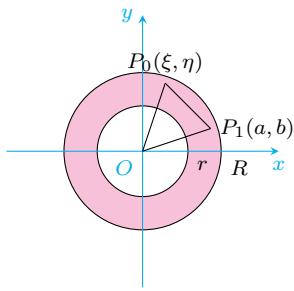
**例 6.1.53.** 证明:

$$\frac{\pi(R^2 - r^2)}{R + K} \leq \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \leq \frac{\pi(R^2 - r^2)}{r - K}$$

其中  $0 < K = \sqrt{a^2 + b^2} < r < R$ ,  $D : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ .

证 函数  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}$  在环形闭域  $D : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$  上连续, 则由积分中值定理知, 存在  $P_0(\xi, \eta) \in D$ , 使

$$\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2}} \iint_D d\sigma = \frac{1}{|P_0 P_1|} \pi(R^2 - r^2)$$



由图 6.1.5 知,  $r \leq |OP_0| \leq R$ , 且存在关系

$$r - K \leq |OP_0| - |OP_1| \leq |P_0 P_1| \leq |OP_1| + |OP_0| \leq R + K$$

所以

$$\frac{1}{R + K} \leq \frac{1}{|P_0 P_1|} \leq \frac{1}{r - K}$$

代入上式得证不等式成立.

图 6.1.5

### 6.1.5 重积分的应用

#### 重积分在几何上的应用

**例 6.1.54.** 求球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  和抛物面  $x^2 + y^2 = 3z$  所围的立体 (含在抛物面内部)  $\Omega$  的体积  $V$ .

法一：“先一后二”法，配合柱坐标

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho d\rho \int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} dz = \frac{19}{6}\pi.$$

法二：“先二后一”法

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dv = \iiint_{\Omega_1} dv + \iiint_{\Omega_2} dv = \int_0^1 dz \iint_{D_{z_1}} dx dy + \int_1^2 dz \iint_{D_{z_2}} dx dy \\ &= \int_0^1 \pi(\sqrt{3z})^2 dz + \int_1^2 \pi(\sqrt{4-z^2})^2 dz = \frac{19}{6}\pi. \end{aligned}$$

法三：利用球坐标

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^2 \rho^2 \sin \varphi d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{3\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}} \rho^2 \sin \varphi d\rho = \frac{19}{6}\pi.$$

**例 6.1.55.** 求由方程  $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = z$  所确定的曲面  $\Sigma$  所围成空间立体  $\Omega$  的体积，其中  $a, b, c$  为正常数.

利用广义球坐标公式  $\begin{cases} x = a\rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = b\rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = c\rho \cos \varphi \end{cases}$ ，于是  $\left| \frac{\partial x, y, z}{\partial \rho, \theta, \varphi} \right| = abc\rho^2 \sin \varphi$ ，且

$$\Omega' = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \left( \frac{c \cos \varphi}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi} \right)^{\frac{1}{3}} \right\}$$

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega'} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\left(\frac{c \cos \varphi}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi}\right)^{\frac{1}{3}}} abc\rho^2 \sin \varphi d\rho = \frac{2}{3}\pi abc^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi} d\varphi \\ &= \frac{2}{3}\pi abc^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{(\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) + 2\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{2}{3}\pi abc^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2\cos^4 \varphi - 2\cos^2 \varphi + 1} d\varphi \\ &\stackrel{\cos^2 \varphi = t}{=} \frac{\pi}{3} abc^2 \int_0^1 \frac{dt}{2t^2 - 2t + 1} = \frac{\pi}{3} abc^2 \cdot \arctan(2t - 1) \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{6} abc^2. \end{aligned}$$

#### 重积分在力学上的应用

**定理 6.1.6 (物体的质量).** 若一物体占有区域  $V$ ,  $\rho = \rho(x, y, z)$  为它在点  $(x, y, z)$  的密度，则该物体的质量等于  $M = \iiint_V \rho dx dy dz$ .

**例 6.1.56.** 设立体  $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2, t > 0, z \geq 0\}$ , 其密度为  $zf(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ ,  $f$  为非负可微函数，且  $f(0) = 1$ ,  $m(t)$  为立体  $\Omega$  的质量，求  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{m(t)}{t^4}$ .

由球坐标公式  $\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi \\ y = r \sin \theta \cos \varphi \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$  那么

$$m(t) = \iiint_{\Omega} zf(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^t r \cos \varphi f(r) r^2 dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^t r^3 f(r) dr = \pi \int_0^t r^3 f(r) dr$$

所以

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{m(t)}{t^4} = \pi \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^t r^3 f(r) dr}{t^4} \xrightarrow{L'} \pi \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^3 f(t)}{4t^3} = \frac{\pi}{4} f(0) = \frac{\pi}{4}.$$

**例 6.1.57.** 设某物体所在的空间区域为  $\Omega : x^2 + y^2 + 2z^2 \leq x + y + 2z$ , 密度函数为  $x^2 + y^2 + z^2$ , 求质量  $M = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ .

将  $x^2 + y^2 + 2z^2 \leq x + y + 2z$  化为

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left[\sqrt{2}\left(z - \frac{1}{2}\right)\right]^2 \leq 1$$

于是  $\Omega$  为一椭球, 令  $u = x - \frac{1}{2}$ ,  $v = y - \frac{1}{2}$ ,  $w = \sqrt{2}\left(z - \frac{1}{2}\right)$ , 则区域  $\Omega \rightarrow \Omega' : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$ , 且 Jacobian 行列式

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ 于是}$$

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{1}{\sqrt{2}} \iiint_{\Omega'} \left[ \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{w}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)^2 \right] du dv dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \iiint_{\Omega'} \left(u^2 + v^2 + \frac{w^2}{2}\right) du dv dw = \frac{1}{\sqrt{2}} \iiint_{\Omega'} \left(u + v + \frac{w}{\sqrt{2}}\right) du dv dw + \frac{1}{\sqrt{2}} \iiint_{\Omega'} \frac{3}{4} du dv dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \iiint_{\Omega'} \left(u^2 + v^2 + \frac{w^2}{2}\right) du dv dw + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

记  $I = \iiint_{\Omega'} \left(u^2 + v^2 + \frac{w^2}{2}\right) du dv dw$ , 则

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^4 d\rho = \frac{4\pi}{5}$$

由对称性知,  $\iiint_{\Omega'} u^2 du dv dw = \iiint_{\Omega'} v^2 du dv dw = \iiint_{\Omega'} w^2 du dv dw = \frac{I}{3} = \frac{4\pi}{15}$ , 故

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{4\pi}{15} + \frac{4\pi}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{15} \right) + \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{5}{6} \sqrt{2}\pi.$$

**定理 6.1.7 (物体的质心).** 物体的质心坐标  $(x_0, y_0, z_0)$  按下列公式来计算

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{M} \iiint_V \rho x dx dy dz, \\ y_0 = \frac{1}{M} \iiint_V \rho y dx dy dz, \\ z_0 = \frac{1}{M} \iiint_V \rho z dx dy dz, \end{cases}$$

若物体是均匀的, 则  $\rho = 1$ .

**例 6.1.58.** 求以下列曲面为界的均匀物体的质心坐标.

$$(1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z = c. \quad | \quad (2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x, y, z \geq 0.$$

(1) 令  $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta, z = z$ , 则质量为

$$M = \iiint_V dxdydz = ab \int_0^c dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{z}{c}} r dr = \frac{\pi abc}{3}$$

设质心坐标为  $(x_0, y_0, z_0)$ , 由对称性知,  $x_0 = y_0 = 0$ , 而

$$z_0 = \frac{1}{M} \iiint_V zdxdydz = \frac{1}{M} \int_0^c zdz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{z}{c}} r dr = \frac{3c}{4}$$

于是质心坐标为  $\left(0, 0, \frac{3c}{4}\right)$ .

(2) 令  $x = a\rho \sin \varphi \cos \theta, y = b\rho \sin \varphi \sin \theta, z = c\rho \cos \varphi$ , 则质量为

$$M = abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{\pi abc}{6}$$

设质心坐标为  $(x_0, y_0, z_0)$ , 那么

$$x_0 = \frac{1}{M} \iiint_V x dxdydz = \frac{a^2 bc}{M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{3}{8} a$$

由对称性知质心坐标为  $\left(\frac{3}{8}a, \frac{3}{8}b, \frac{3}{8}c\right)$ .

**定理 6.1.8 (转动惯量).** 积分

$$I_{xy} = \iiint_V \rho z^2 dxdydz, I_{yz} = \iiint_V \rho x^2 dxdydz, I_{zx} = \iiint_V \rho y^2 dxdydz$$

分别称为物体对坐标平面的转动惯量;

$$I_l = \iiint_V \rho r^2 dxdydz$$

其中  $r$  为物体各点  $(x, y, z)$  与轴  $l$  的距离, 特别地, 对于坐标轴  $Ox, Oy, Oz$  分别有

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, I_y = I_{yx} + I_{yz}, I_z = I_{zx} + I_{zy}$$

物体对坐标原点的转动惯量  $I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}$ .

与重积分有关的不等式证明

**例 6.1.59.** 证明不等式  $\frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{e}\right) < \left(\int_0^1 e^{-x^2} dx\right)^2 < \frac{16}{25}$ .

证 因为

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 e^{-x^2} dx\right)^2 &= \int_0^1 e^{-x^2} dx \int_0^1 e^{-y^2} dy = \iint_{0 \leq x, y \leq 1} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \\ &\geq \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ x, y \geq 0}} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$

又因为  $e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2}$  ( $x < 0$ ), 所以  $e^{-x^2} < 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$ , 于是

$$\left(\int_0^1 e^{-x^2} dx\right)^2 < \left[\int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\right) dx\right]^2 = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right)^2 < \frac{16}{25}.$$

**例 6.1.60.** 设正值函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且有

$$\int_a^b f(x)dx = A$$

证明:  $\int_a^b f(x)e^{f(x)}dx \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geq (b-a)(b-a+A)$ .

证 记  $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ , 则

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)e^{f(x)}dx \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx = \int_a^b f(x)e^{f(x)}dx \int_a^b \frac{1}{f(y)}dy = \iint_D \frac{f(x)}{f(y)}e^{f(x)}dxdy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \left[ \frac{f(y)}{f(x)}e^{f(y)} + \frac{f(x)}{f(y)}e^{f(x)} \right] dxdy \geq \iint_D e^{\frac{f(x)+f(y)}{2}} dxdy \geq \iint_D \left( \frac{f(x)+f(y)}{2} + 1 \right) dxdy \\ &= \int_a^b dx \int_a^b \left( \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) + 1 \right) dy = (b-a)^2 + \int_a^b dx \int_a^b f(y)dy = (b-a)(b-a+A) \end{aligned}$$

故得证.

**例 6.1.61.** 设  $f \in [a, b]$ , 不恒为 0, 满足  $0 \leq f(x) \leq M$ , 证明:

$$\left( \int_a^b f(x)dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f(x) \sin xdx \right)^2 + \left( \int_a^b f(x) \cos xdx \right)^2 + \frac{M^2(b-a)^4}{12}.$$

证 设  $D = \{(x, y) \mid a \leq x, y \leq b\}$ , 那么

$$\begin{aligned} I_1 &= \left( \int_a^b f(x)dx \right)^2 = \iint_D f(x)f(y)dxdy \\ I_2 &= \left( \int_a^b f(x) \sin xdx \right)^2 = \iint_D f(x)f(y) \sin x \sin y dxdy \\ I_3 &= \left( \int_a^b f(x) \cos xdx \right)^2 = \iint_D f(x)f(y) \cos x \cos y dxdy \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= \iint_D f(x)f(y)(1 - \cos x \cos y - \sin x \sin y)dxdy = \iint_D f(x)f(y)[1 - \cos(x-y)]dxdy \\ &= \iint_D f(x)f(y) \cdot 2 \sin^2 \left( \frac{x-y}{2} \right) dxdy \leq \iint_D M^2 \cdot \frac{(x-y)^2}{2} dxdy \end{aligned}$$

即得证  $\left( \int_a^b f(x)dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f(x) \sin xdx \right)^2 + \left( \int_a^b f(x) \cos xdx \right)^2 + \frac{M^2(b-a)^4}{12}$ .

**例 6.1.62.** 设函数  $f(x)$  是  $[0, 1]$  上单调递减且连续的正值函数, 证明

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx} \leq \frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}.$$

证法一 要证不等式成立, 即证  $\int_0^1 f^2(x)dx \cdot \int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 xf^2(x)dx \cdot \int_0^1 f(x)dx \geq 0$ , 为此

$$I = \int_0^1 f^2(x)dx \cdot \int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 xf^2(x)dx \cdot \int_0^1 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 f^2(x) dx \int_0^1 yf(y) dy - \int_0^1 xf^2(x) dx \int_0^1 f(y) dy = \int_0^1 \int_0^1 f^2(x)f(y)(y-x) dx dy$$

又因为  $I = \int_0^1 xf(x) dx \int_0^1 f^2(y) dy - \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 yf^2(y) dy = \int_0^1 \int_0^1 f^2(y)f(x)(x-y) dx dy$ , 则有

$$2I = \int_0^1 \int_0^1 f(x)f(y)(x-y)[f(y)-f(x)] dx dy$$

因为  $f(x)$  单调递减, 所以当  $y \geq x$  时,  $f(y) \leq f(x)$ , 从而  $2I \geq 0$ , 故得证.

证法二  $\frac{\int_0^1 xf^2(x) dx}{\int_0^1 xf(x) dx} - \frac{\int_0^1 f^2(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx} = \frac{\int_0^1 xf^2(x) dx \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 f^2(x) dx \int_0^1 xf(x) dx}{\int_0^1 xf(x) dx \int_0^1 f(x) dx}$ , 上式右边分母显然为正, 上式

右边分子令为  $F(x) = \int_0^x tf^2(t) dt \int_0^x f(t) dt - \int_0^x f^2(t) dt \int_0^x tf(t) dt$ , 则

$$\begin{aligned} F'(x) &= xf^2(x) \cdot \int_0^x f(t) dt + f(x) \int_0^x tf^2(t) dt - f^2(x) \int_0^x tf(t) dt - xf(x) \int_0^x f^2(t) dt \\ &= f^2(x) \left[ \int_0^x (x-t)f(t) dt \right] + f(x) \left[ \int_0^x (t-x)f^2(t) dt \right] = f(x) \left[ \int_0^x (x-t)f(t)f(x) dt - \int_0^x (x-t)f^2(t) dt \right] \\ &= f(x) \left[ \int_0^x (x-t)f(t)[f(x)-f(t)] dt \right]. \end{aligned}$$

因  $f(x)$  单调减少, 所以当  $x > t$  时,  $f(x) - f(t) < 0$ , 因此  $F'(x) < 0$ , 所以  $F(x)$  单调减少, 所以  $F(x) \leq F(0) = 0$ , 当  $0 \leq x \leq 1$  时, 命题得证.

**例 6.1.63 (第五届数学竞赛决赛).** 设  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ , 函数  $f(x, y)$  在  $D$  上有连续的二阶偏导数,

其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , 若对任何  $x, y$  有  $f(0, y) = f(x, 0) = 0$ , 且  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \leq A$ , 证明:

$$I \leq \frac{A}{4}.$$

证 令  $g(x, y) = (1-x)(1-y)$ , 那么

$$\begin{aligned} \iint_D g(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^1 g(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy = \int_0^1 dx \int_0^1 g(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} dx \\ &= \int_0^1 dx \left[ g(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} dy \right] = - \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} dy \\ &= - \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial y} dx f = - \int_0^1 dy \left[ f(x, y) \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f(x, y) \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} dx \right] \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) dx dy = I \end{aligned}$$

所以

$$I = \iint_D g(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \leq A \iint_D g(x, y) dx dy = A \left[ \int_0^1 (1-x) dx \right]^2 = \frac{A}{4}.$$

**例 6.1.64 (广东省 1991 年竞赛题).** 设二元函数  $f(x, y)$  在区域  $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  上具有连续的四阶偏导数, 并且  $f(x, y)$  在区域  $D$  的边界上恒为 0, 又已知  $\left| \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right| \leq 3$ , 试证明:

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{1}{48}.$$

证 令  $g(x, y) = xy(1-x)(1-y)$ , 那么

$$\iint_D g(x, y) \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 g(x, y) \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} dy = \int_0^1 dx \int_0^1 g(x, y) \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 dx \left[ g(x, y) \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial g}{\partial y} dy \right] \\
&= - \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial g}{\partial y} dy = - \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial y} dy \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\
&= - \int_0^1 dx \left( \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} dy \right) = \iint_D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} dxdy.
\end{aligned}$$

同理可得

$$\iint_D f(x, y) \frac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2} dxdy = \iint_D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} dxdy.$$

则

$$\iint_D g(x, y) \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} dxdy = \iint_D f(x, y) \frac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2} dxdy = 4 \iint_D f(x, y) dxdy$$

$$\left| \iint_D f(x, y) dxdy \right| \leq \frac{1}{4} \iint_D g(x, y) \left| \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right| dxdy \leq \frac{3}{4} \iint_D g(x, y) dxdy = \frac{3}{4} \left[ \int_0^1 x(1-x) dx \right]^2 = \frac{1}{48}.$$

**例 6.1.65.** 设  $f(x, y, z)$  在  $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x, y, z \leq 1\}$  上有六阶连续偏导数,  $f$  在边界上恒为零, 且  $\left| \frac{\partial^6 f(x, y, z)}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2} \right| \leq M$ , 证明:

$$\left| \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz \right| \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M}{6^3}.$$

证 令  $g(x, y, z) = xyz(x-1)(y-1)(z-1)$ , 因为  $f, g$  在  $\Omega$  上均有六阶连续偏导数, 且  $f$  在边界上恒为零, 故

$$\iiint_{\Omega} g(x, y, z) \frac{\partial^6 f(x, y, z)}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2} dV = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \frac{\partial^6 g(x, y, z)}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2} dV = 8 \iiint_{\Omega} \Omega f(x, y, z) dV$$

所以

$$\left| \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz \right| \leq \frac{1}{8} \iint_{\Omega} g(x, y, z) \left| \frac{\partial^6 f(x, y, z)}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2} \right| dV \leq \frac{M}{8} \left[ \int_0^1 x(1-x) dx \right]^3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{M}{6^3}$$

**例 6.1.66.** 设  $f(x, y)$  在区域  $D : x^2 + y^2 \leq 1$  上有连续的二阶偏导数, 且满足  $f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 \leq M$  及  $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ , 证明:

$$\left| \iint_D f(x, y) dxdy \right| \leq \frac{\pi \sqrt{M}}{4}.$$

证 由二元函数的 Taylor 公式, 存在  $\theta \in (0, 1)$ , 使得

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= f(0, 0) + \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) f \Big|_{(0,0)} + \frac{1}{2} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f \Big|_{(\theta x, \theta y)} \\
&= \frac{1}{2} [x^2 f_{xx}(\theta x, \theta y) + 2xy f_{xy}(\theta x, \theta y) + y^2 f_{yy}(\theta x, \theta y)]
\end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式, 得

$$\left| (x^2, \sqrt{2}xy, y^2) \cdot (f_{xx}(\theta x, \theta y), \sqrt{2}f_{xy}(\theta x, \theta y), f_{yy}(\theta x, \theta y)) \right| \leq \sqrt{M}(x^2 + y^2)$$

所以

$$\left| \iint_D f(x, y) dxdy \right| \leq \frac{\sqrt{M}}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dxdy = \frac{\sqrt{M}}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi \sqrt{M}}{4}.$$

**例 6.1.67 (第十五届北京市数学竞赛).** 设区域  $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ , 证明

$$\frac{4\sqrt[3]{2}\pi}{3} \leq \iiint_{\Omega} \sqrt[3]{x+2y-2z+5} dv \leq \frac{8\pi}{3}.$$

证 由 Cauchy 不等式, 当  $(x, y, z) \in \Omega$ , 即  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  时, 有

$$(x + 2y - 2z)^2 \leq [1^2 + 2^2 + (-2)^2] \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \leq 9$$

于是,  $-3 \leq x + 2y - 2z \leq 3$ , 从而  $2 \leq x + 2y - 2z + 5 \leq 8$ , 故

$$\frac{4\sqrt[3]{2}\pi}{3} = \sqrt[3]{2} \iiint_{\Omega} dv \leq \iiint_{\Omega} \sqrt[3]{x^2 + 2y - 2z} dv \leq 2 \iiint_{\Omega} dv = \frac{8\pi}{3}.$$

**例 6.1.68.** 设  $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$ , 证明  $28\sqrt{3}\pi \leq \iiint_{\Omega} (x + y - z + 10) dx dy dz \leq 52\sqrt{3}\pi$ .

证 由 Cauchy 不等式, 当  $(x, y, z) \in \Omega$ , 即  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$  时, 有

$$(x + y - z)^2 \leq [1^2 + 1^2 + (-1)^2]^2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq 9$$

于是,  $7 \leq x + y - z \leq 13$ , 故

$$28\sqrt{3}\pi = 7 \iiint_{\Omega} dv \leq \iiint_{\Omega} (x + y - z + 10) dv \leq 13 \iiint_{\Omega} dv = 52\sqrt{3}\pi.$$

## 6.2 曲线积分

曲线积分是对向量场沿着曲线进行积分的数学工具, 用于描述向量场沿着曲线的积分值. 曲线积分可以分为第一类曲线积分和第二类曲线积分.

### 6.2.1 两类曲线积分

#### 第一类曲线积分的计算

**定义 6.2.1 (对弧长的曲线积分 (第一类曲线积分)).**  $\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$ , 如果函数  $f(x, y)$  在曲线  $L$  上连续, 则  $f(x, y)$  在曲线  $L$  上对弧长的曲线积分  $\int_L f(x, y) ds$  一定存在.  
上述概念可以推广到空间, 如果  $f(x, y, z)$  是定义在空间中分段光滑曲线  $L$  上的有界函数, 则函数  $f(x, y, z)$  在曲线  $L$  上对弧长的曲线积分是

$$\int_L f(x, y, z) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i.$$

**定理 6.2.1.** 第一类曲线积分有如下基本性质:

$$(1) \int_L [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)] ds = \int_L f_1(x, y) ds + \int_L f_2(x, y) ds;$$

$$(2) \int_L kf(x, y) ds = k \int_L f(x, y) ds, \text{ 其中 } k \text{ 为常数};$$

$$(3) \text{ 若 } L = L_1 + L_2, \text{ 且 } L_1 \text{ 与 } L_2 \text{ 无公共点, 则}$$

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{L_1} f(x, y) ds + \int_{L_2} f(x, y) ds.$$

**定理 6.2.2 (轴对称性).** 若积分弧段  $L$  关于  $y$  轴对称, 则

$$I = \begin{cases} 2 \int_{L_1} f(x, y) ds, & f(x, y) = f(-x, y) \\ 0, & f(x, y) = -f(-x, y) \end{cases}$$

其中  $L_1 = \{(x, y) \mid (x, y) \in L, x \geq 0\}$ .

若积分弧段  $L$  关于  $x$  轴对称, 则

$$I = \begin{cases} 2 \int_{L_2} f(x, y) ds, & f(x, y) = f(x, -y) \\ 0, & f(x, y) = -f(x, -y) \end{cases}$$

其中  $L_2 = \{(x, y) \mid (x, y) \in L, y \geq 0\}$ .

**定理 6.2.3 (轮换对称性).** 若把  $x$  与  $y$  对调后,  $L$  不变, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_L f(y, x) ds.$$

**例 6.2.1.** 设曲线  $L : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$  求  $\oint_L (x^2 + 2y^2 + z) ds$ .

有轮换对称性  $\oint_L x^2 ds = \oint_L y^2 ds = \oint_L z^2 ds = \frac{1}{3} \oint_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$ ,  $\oint_L x ds = \oint_L y ds = \oint_L z ds = \frac{1}{3} \oint_L (x + y + z) ds$ , 因此

$$\oint_L (x^2 + 2y^2 + z) ds = \oint_L (x^2 + y^2 + z^2) ds + \frac{1}{3} \oint_L (x + y + z) ds = a^2 \oint_L ds + 0 = 2\pi a^3.$$

**例 6.2.2.** 设  $L : \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$  求  $\oint_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$ .

将球心平移到坐标原点, 即  $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \\ Z = z - 1 \end{cases}$  那么  $L' : \begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = 3 \\ X + Y + Z = 0 \end{cases}$  因此

$$\begin{aligned} \oint_L (x^2 + y^2 + z^2) ds &= \oint_{L'} [(X+1)^2 + (Y+1)^2 + (Z+1)^2] ds \\ &= \oint_{L'} (X^2 + Y^2 + Z^2) ds + 2 \oint_{L'} (X+Y+Z) ds + 3 \oint_{L'} ds = 6 \oint_{L'} ds = 12\sqrt{3}\pi. \end{aligned}$$

**定理 6.2.4 (第一类曲线积分化为定积分).** (1) 直角坐标形式

平面曲线  $L$  由直角坐标  $y = y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  给出, 则:

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

(2) 参数方程形式

平面曲线  $L$  由参数方程  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ \alpha \leq t \leq \beta \end{cases}$  给出, 则:

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

### (3) 极坐标形式

平面曲线  $L$  由极坐标  $r = r(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$  给出, 则:

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta.$$

(4) 空间曲线  $\Gamma$  由参数方程  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \\ \alpha \leq t \leq \beta \end{cases}$  给出, 则:

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\omega'(t)]^2} dt.$$

**例 6.2.3.** 设  $L$  是由点  $O(0, 0)$ ,  $A(2, 0)$  及  $B(2, 2)$  所围成的三角形的周界, 计算曲线积分  $\oint_L (x+y) ds$ .

$$OA : y = 0, x \in [0, 2], \int_{OA} (x+y) ds = \int_0^2 x dx = 2; AB : x = 2, y \in [0, 2], \int_{AB} (x+y) ds = \int_0^2 (2+y) dy = 6;$$

$$OB : y = x, x \in [0, 2], \int_{OB} (x+y) ds = \int_0^2 (2x) \sqrt{1+y'^2} dx = 4\sqrt{2}$$

因此  $\oint_L (x+y) ds = 8 + 4\sqrt{2}$ .

**例 6.2.4 (2009 数一).** 已知曲线  $L : y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$ , 求  $\int_L x ds$ .

$$ds = \sqrt{1+y'^2} dx = \sqrt{1+4x^2} dx, \text{ 于是}$$

$$\int_L x ds = \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{1+4x^2} dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (1+4x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{6}.$$

**例 6.2.5.** 设  $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$  求曲线积分  $\int_{\Gamma} (x+y)^2 ds$ .

法一: 由  $x + y = -z$ , 于是  $\int_{\Gamma} (x+y)^2 ds = \int_{\Gamma} z^2 ds$ , 由轮换对称性知

$$\int_{\Gamma} x^2 ds = \int_{\Gamma} y^2 ds = \int_{\Gamma} z^2 ds = \frac{1}{3} (x^2 + y^2 + z^2) ds$$

又  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , 于是

$$\int_{\Gamma} (x+y)^2 ds = \frac{1}{3} \int_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{a^2}{3} \int_{\Gamma} ds = \frac{2\pi}{3} a^3.$$

法二：由  $z = -(x + y)$ , 代入  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , 得  $x^2 + y^2 + xy = \frac{a^2 A}{2}$ , 故由旋转变换

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)$$

将其转换为  $3X^2 + Y^2 = a^2$ , 并令  $X = \frac{a}{\sqrt{3}} \cos t, Y = a \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ , 可得  $\Gamma$  的参数方程为

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{a}{\sqrt{3}} \cos t - a \sin t \right) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{a}{\sqrt{3}} \cos t + a \sin t \right) \\ z = -\frac{\sqrt{6}}{3} a \cos t \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

又  $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt = adt$ , 于是

$$I = \int_0^{2\pi} (x(t) + y(t))^2 \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt = \int_0^{2\pi} \left( \frac{\sqrt{6}}{3} a \cos t \right)^2 \cdot adt = \frac{2}{3} a^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \frac{2}{3} \pi a^3.$$

## 第二类曲线积分的计算

**定义 6.2.2** (对坐标的曲线积分 (第二类曲线积分)).

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i \\ \int_L Q(x, y) dy &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i \end{aligned}$$

如果函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在有向曲线  $L$  上连续时, 上述积分都存在. 类似地, 在空间中有向曲线  $\Gamma$  上对坐标  $x, y, z$  的曲线积分

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y, z) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i \\ \int_L Q(x, y, z) dy &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i \\ \int_L R(x, y, z) dz &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i. \end{aligned}$$

**定理 6.2.5.**  $\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy = - \int_{\widehat{BA}} P dx + Q dy.$

**定理 6.2.6** (第二类曲线积分分化为定积分). (1) 设函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在有向曲线  $L$  上连续,  $L$  的参

数方程为  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$ , 且  $x'(t), y'(t)$  连续, 而  $t = \alpha$  时对应于起点  $A$ ,  $t = \beta$  时对应于终点  $B$ , 则

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} P[x(t), y(t)] x'(t) dt \\ \int_{\widehat{AB}} Q(x, y) dy &= \int_{\alpha}^{\beta} Q[x(t), y(t)] y'(t) dt \end{aligned}$$

- (2) 如果曲线  $L$  由方程  $y = y(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) 给出, 曲线  $L$  的起点  $A$  的横坐标为  $x = a$ , 终点  $B$  的横坐标为  $x = b$ , 函数  $y(x)$  具有连续的一阶导数, 则

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx &= \int_a^b P[x, y(x)] dx \\ \int_{\widehat{AB}} Q(x, y) dy &= \int_a^b Q[x, y(x)] y'(x) dx\end{aligned}$$

- (3) 如果曲线  $L$  由方程  $x = x(y)$  ( $c \leq y \leq d$ ) 给出, 曲线  $L$  的起点  $A$  的横坐标为  $y = c$ , 终点  $B$  的横坐标为  $y = d$ , 函数  $x(y)$  具有连续的一阶导数, 则

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx &= \int_c^d P[x(y), y] x'(y) dy \\ \int_{\widehat{AB}} Q(x, y) dy &= \int_c^d Q[x(y), y] dy\end{aligned}$$

- (4) 对于空间曲线积分, 如果函数  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  在有向曲线  $\Gamma$  上连续,  $\Gamma$  的参数方程为  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ), 且  $x'(t)$ ,  $y'(t)$ ,  $z'(t)$  连续, 而  $t = \alpha$  时对应于起点  $A$ ,  $t = \beta$  时对应于终点  $B$ , 则

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{AB}} P(x, y, z) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} P[x(t), y(t), z(t)] x'(t) dt \\ \int_{\widehat{AB}} Q(x, y, z) dy &= \int_{\alpha}^{\beta} Q[x(t), y(t), z(t)] y'(t) dt \\ \int_{\widehat{AB}} R(x, y, z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} R[x(t), y(t), z(t)] z'(t) dt.\end{aligned}$$

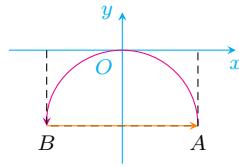
**例 6.2.6 (2004 数一).** 设  $L$  为正向圆周  $x^2 + y^2 = 2$  在第一象限中的部分, 求曲线积分  $\int_L x dy - 2y dx$ .

正向圆周在第一象限内可表示为  $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \theta \\ y = \sqrt{2} \sin \theta \\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$  于是

$$\int_L x dy - 2y dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2} \cos \theta) (\sqrt{2} \cos \theta) d\theta - 2(\sqrt{2} \sin \theta) (\sqrt{2} \sin \theta) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

**例 6.2.7.** 设  $L$  是从点  $A(-1, 1)$  沿曲线  $x^2 + y^2 = -2y$  ( $y \geq -1$ ) 到点  $B(-1, -1)$  的有向线段,  $f(x)$  是连续函数, 计算

$$I = \int_L x[f(x) + 1] dy - \frac{y^2[f(x) + 1] + 2yf(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$



错解. 补一有向线段  $\overrightarrow{BA}$ , 然后用 Green 公式计算,

$$\text{令 } P = -\frac{y^2[f(x) + 1] + 2yf(x)}{\sqrt{1-x^2}}, Q = x[f(x) + 1], \text{ 那么 } \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \dots$$

错因: 这道题考查了第二型曲线积分的计算, 注意到题目只说  $f$  连续, 并没有说可导, 所以不能用 Green 公式, 只能用基本方法将  $I$  化为定积分来计算.

图 6.2.1

令  $x = \cos t, y = \sin t - 1, (0 \leq t \leq \pi)$  代入  $I$  并化简, 有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \cos t [f(\cos t) + 1] \cos t dt + \frac{(\sin t - 1)^2 [f(\cos t) + 1] + 2(\sin t - 1)f(\cos t)}{\sin t} \sin t dt \\ &= \int_0^\pi \left\{ \cos^2 t [f(\cos t) + 1] + (\sin t - 1)[f(\cos t) + 1] + (2 \sin t - 2)f(\cos t) \right\} dt \\ &= 2 \int_0^\pi (1 - \sin t) dt = 2(t + \cos t) \Big|_0^\pi = 2\pi - 4. \end{aligned}$$

### 方向导数与两类曲线积分的联系

**例 6.2.8.** 设  $u(x, y)$  于圆盘  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}\}$  内有二阶连续的偏导数, 并且满足:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2) \sin^6(x^2 + y^2)$$

记  $D$  的正向边界曲线为  $\partial D$ ,  $\partial D$  的外法线向量为  $\vec{n}$ , 求  $\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds$ .

设  $\vec{T} = (\cos \alpha, \cos \beta)$  对应的正向切线的单位向量, 则单位向量为  $\vec{n} = (\cos \alpha, -\cos \beta)$ , 由题设可知  $u(x, y)$  可微, 故由方向导数计算公式和两类曲线积分之间的关系, 得

$$I = \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = \oint_{\partial D} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \beta - \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha \right) ds = \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

于是由 Green 公式和二重积分的极坐标计算公式, 得

$$I = \iint_D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \iint_D (x^2 + y^2) \sin^6(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} r^2 \sin^6 r^2 dr = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \sin^6 u du$$

$$\text{又因为 } \sin^n x = \begin{cases} \frac{1}{(2i)^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k C_n^k \cos((n-2k)x) \\ \frac{2}{(2i)^n} \left[ \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k C_n^k \cos((n-2k)x) + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2} C_n^{\frac{n}{2}} \right] \end{cases} \Rightarrow \sin^6 x = -\frac{1}{8} \cos^3 2x + \frac{3}{16} \cos 4x - \frac{3}{8} \cos 2x +$$

$\frac{5}{16}$ , 由分部积分公式

$$\int u \cos n u du = \frac{\cos n u}{n^2} + \frac{u \sin n u}{n} + C$$

分别取  $n = 2, 4, 6$ , 得  $I = \pi \left( \frac{17}{72} + \frac{5\pi^2}{128} \right)$ .

### 6.2.2 Green 公式

**定理 6.2.7 (Green 公式).** Green 公式给出了平面上有限条逐段光滑封闭曲线上的线积分与它们所包围区域上的二重积分的关系:

$$\oint_{L^+} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

这里  $L^+$  表示沿  $L$  的正向取积分. 正向指前进时保持在左边的方向, 当  $D$  为单连通区域时, 即是逆时针方向; 当  $D$  为多联通区域时, 外边界为逆时针方向, 内边界为顺时针方向.  $P, Q$  要求在区域  $D$  内直到边界  $L$  上连续, 并且连续偏导数. 由此可得  $D$  的面积公式为:

$$S = \iint_D dxdy = \oint_{L^+} xdy = -\oint_{L^-} ydx = \frac{1}{2} \int_L xdy - ydx.$$

### 计算封闭曲线上的线积分

**例 6.2.9.** 已知  $L$  是区域  $D : \frac{x}{2} \leq y \leq 2x, 1 \leq xy \leq 2$  的正向边界曲线, 求

$$\oint_L e^{x^2 y^2} \left[ \left( y - \frac{1}{x} \right) dx + \left( x + \frac{1}{y} \right) dy \right].$$

令  $u = \frac{y}{x}, v = xy$ , 那么  $x = \sqrt{\frac{v}{u}}$ ,  $y = \sqrt{uv}$ ,  $du = d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$ ,  $dv = d(xy) = ydx + xdy$ ,  $L'$  是区域  $D' : \frac{1}{2} \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2$  的正向边界曲线, 于是

$$\begin{aligned} I &= \oint_L e^{x^2 y^2} \left[ \left( y - \frac{1}{x} \right) dx + \left( x + \frac{1}{y} \right) dy \right] = \oint_{L'} e^{x^2 y^2} \left( ydx + xdy + \frac{x}{y} \cdot \frac{xdy - ydx}{x^2} \right) \\ &= \oint_{L'} e^{v^2} \left( dv + \frac{1}{u} du \right) = \iint_{D'} \frac{2ve^{v^2}}{u} dudv = \int_{\frac{1}{2}}^2 du \int_1^2 \frac{2ve^{v^2}}{u} dv = 2 \ln 2(e^4 - e). \end{aligned}$$

**例 6.2.10.** 设  $\Gamma$  为  $x^2 + y^2 = 2x (y \geq 0)$  上从  $O(0, 0)$  到  $A(2, 0)$  的一段弧, 连续函数  $f(x)$  满足

$$f(x) = x^2 + \int_{\Gamma} y[f(x) + e^x]dx + (e^x + xy^2)dy$$

求  $f(x)$ .

设  $\int_{\Gamma} y[f(x) + e^x]dx + (e^x + xy^2)dy = a$ , 那么

$$\begin{aligned} a &= \left( \int_{\Gamma+AO} - \int_{AO} \right) y[f(x) + e^x]dx + (e^x + xy^2)dy = - \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x}(e^x - xy^2) - \frac{\partial}{\partial y}(y(f(x) + e^x)) \right] dxdy \\ &= - \iint_D (e^x - y^2 - x^2 - a - e^x) dxdy = \iint_D (x^2 + y^2) dxdy + a \iint_D dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} \rho^3 d\rho + \frac{\pi a}{2} \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta + \frac{\pi a}{2} = \frac{3}{4}\pi + \frac{\pi a}{2} \Rightarrow a = \frac{3\pi}{2(2-\pi)} \Rightarrow f(x) = x^2 + \frac{3\pi}{2(2-\pi)}. \end{aligned}$$

**例 6.2.11.** 计算积分  $I = \oint_{L^+} \frac{x dy - y dx}{[(\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2]^{\alpha}}$  ( $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ), 其中  $L^+$  为椭圆  $(\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2 = 1$ , 取逆时针方向.

$L$  上  $(\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2 = 1$ , 因此

$$I = \oint_{L^+} x dy - y dx = 2 \iint_{(\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2 \leq 1} dxdy$$

令  $u = \alpha x + \beta y, v = \gamma x + \delta y$ , 作变换, 有  $I = 2 \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} |J| dxdy$ , 其中

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

$$\text{因此 } I = \frac{2}{|\alpha\delta - \beta\gamma|} \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} dudv = \frac{2\pi}{|\alpha\delta - \beta\gamma|}.$$

## 含有奇点形式

**例 6.2.12.** 设  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ ,  $\partial D$  为  $D$  的正向边界, 求

$$I = \int_{\partial D} \frac{(xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy}{x^2 + 4y^2}.$$

设  $l : x^2 + 4y^2 = \varepsilon^2$ ,  $\varepsilon$  充分小且大于 0, 取顺时针, 如图 6.2.2 所示,

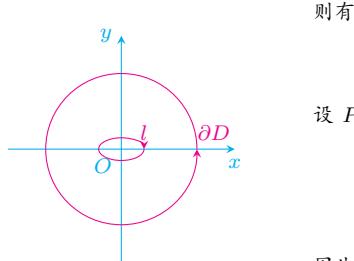


图 6.2.2

则有

$$\int_{\partial D} = \int_{\partial D+l-l} = \int_{\partial D+l} + \int_{l^-} := I_1 + I_2$$

设  $P = \frac{xe^{x^2+4y^2} + y}{x^2 + 4y^2}$ ,  $Q = \frac{4ye^{x^2+4y^2} - x}{x^2 + 4y^2}$ , 那么

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{8xye^{x^2+4y^2}(x^2 + 4y^2 - 1) + x^2 - 4y^2}{(x^2 + 4y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\text{因此 } I_1 = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0, \text{ 下求 } I_2,$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{l^-} \underbrace{\left( xe^{x^2+4y^2} + y \right) dx}_{P_1} + \underbrace{\left( 4ye^{x^2+4y^2} - x \right) dy}_{Q_1} = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{D_\varepsilon} \left( \frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \frac{-2}{\varepsilon^2} \iint_{x^2+4y^2 \leq \varepsilon^2} dx dy = \frac{-2}{\varepsilon^2} \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon}{2} = -\pi \end{aligned}$$

故  $I = 0 - \pi = \pi$ .

**例 6.2.13.** 计算  $\oint_{C^+} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2}$ ,  $C$  为以  $(1, 0)$  为圆心, 以  $R$  为半径的圆周 ( $R \neq 1$ ), 设  $C^+$  表示其上的方向为逆时针方向.

当  $R < 1$  时, 满足 Green 公式的条件, 则

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{4x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{4x^2 + y^2} \right)$$

所以  $\oint_{C^+} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = 0$  ( $x, y \neq 0$ );

当  $R > 1$  时, 取  $\varepsilon > 0$  充分小, 使得  $\Gamma_\varepsilon : 4x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ , 且  $\Gamma_\varepsilon^+$  表示其上的方向为顺时针方向, 记  $C$  与  $\Gamma$  所围成区域为  $D$ , 则  $\oint_{C^+ + \Gamma_\varepsilon^+} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = 0$ , 那么

$$\oint_{C^+} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = \oint_{\Gamma_\varepsilon^-} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \oint_{\Gamma_\varepsilon^-} x dy - y dx = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \pi \varepsilon^2 = \pi.$$

**例 6.2.14.** 设  $f(x, y)$  单位圆上有连续的偏导数, 且在边界上取值为零, 求证:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_D \frac{x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}}{x^2 + y^2} dx dy = -2\pi f(0, 0).$$

其中  $D$  为圆环域:  $\varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ .

证 记  $L_1 : x^2 + y^2 = 1$  (逆时针方向),  $L_2 : x^2 + y^2 = \varepsilon^2$  (顺时针方向),

$$\iint_D \frac{x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}}{x^2 + y^2} dx dy = \oint_{L_2} \frac{-yf(x, y)dx + xf(x, y)dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \oint_{L_2} -yf(x, y)dx + xf(x, y)dy$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{2\pi}^0 [(-\varepsilon \sin \theta)(-\varepsilon \sin \theta) + \epsilon \cos \theta \cdot \epsilon \cos \theta] f(\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta) d\theta \\
&= - \int_0^{2\pi} f(\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta) d\theta = -2\pi f(\varepsilon \cos \theta^*, \varepsilon \sin \theta^*) \quad (\theta^* \in [0, 2\pi]) \\
\text{故 } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_D \frac{x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}}{x^2 + y^2} dx dy &= -2\pi f(0, 0).
\end{aligned}$$

### 外法向量形式

**例 6.2.15.** 设  $u(x, y)$  于圆盘  $D : x^2 + y^2 \leq \pi$  内有二阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{\pi-x^2-y^2} \sin(x^2 + y^2)$$

记  $D$  的正向边界曲线为  $\partial D$ ,  $\partial D$  的外法线向量为  $\mathbf{n}$ , 求  $\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds$ .

令  $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta)$ , 则  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta$ ,  $\partial D$  的单位切向量  $\tau = (-\cos \beta, \cos \alpha)$ , 于是

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds &= \int_{\partial D} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta \right) ds = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx = \iint_D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy \\
&= \iint_D e^{\pi-x^2-y^2} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\pi}} \rho e^{\pi-\rho^2} \sin(\rho^2) d\rho \\
&\stackrel{t=\rho^2}{=} \pi \int_0^\pi e^{\pi-t} \sin t dt = \frac{\pi}{2} (e^\pi + 1).
\end{aligned}$$

**例 6.2.16.** 设函数  $u(x, y)$  在区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq \pi\}$  上有二阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{\pi-x^2-y^2} \cdot \sin(x^2 + y^2)$$

记  $D$  的正向边界曲线为  $L$ ,  $L$  的外法向量为  $\vec{n}$ , 求  $\oint_L \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds$ .

因为

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = \iint_D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy$$

所以

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = \iint_D e^{\pi-x^2-y^2} \cdot \sin(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\pi}} \rho e^{\pi-\rho^2} \sin \rho^2 d\rho = \pi \int_0^\pi e^{\pi-t} \sin t dt = \frac{\pi}{2} (e^\pi + 1)$$

### 积分与路径无关问题

该部分内容可能需要结合第八章“微分方程”的知识, 若不熟悉常见的微分方程求解, 可暂缓阅读.

**定义 6.2.3 (单连通与复连通区域).** 若平面区域  $D$  内任一闭曲线所围的部分都属于  $D$ , 则称  $D$  为平面单连通区域, 否则称为复连通区域. 通俗地讲, 平面单连通区域就是不含有“洞”的区域.

**定理 6.2.8 (路径无关).** 设函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在区域  $D$  内具有一阶连续偏导数, 若对于  $D$  内的任意指定的两点  $A, B$  以及  $D$  内从点  $A$  到点  $B$  的两条任意曲线  $L_1, L_2$ , 等式

$$\int_{L_1} P dx + Q dy = \int_{L_2} P dx + Q dy$$

恒成立, 则称曲线积分  $\int_L P dx + Q dy$  在  $D$  内与路径无关, 否则称与路径有关.

设在单连通区域  $D$  内  $P, Q$  具有一阶连续偏导数, 则下述 6 个说法等价

(1)  $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  在  $D$  内与路径无关;

(2)  $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  其中  $L$  是区域  $D$  内任意分段光滑闭曲线.

(3)  $P dx + Q dy = du(x, y);$

(4)  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \forall (x, y) \in D;$

(5)  $P dx + Q dy = 0$  为全微分方程;

(6)  $P i + Q j$  为某二元函数  $u(x, y)$  的梯度.

**例 6.2.17.** 计算  $\int_{\widehat{AB}} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$ , 其中  $\widehat{AB}$  是自点  $A(-1, 0)$  沿  $y = x^2 - 1$  到点  $B(2, 3)$  的弧段.

**错解. 错解一:** 因为  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$ , 所以与路径无关, 选取  $l_4^-$  作为积分路径, 则

$$I = \int_0^3 \frac{-1}{1+y^2} dy + \int_{-1}^2 \frac{-3}{x^2+9} dx = -\arctan 3 - \arctan \frac{2}{3} - \arctan \frac{1}{3} = -\arctan \frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}$$

**错因:**  $l_4^-$  与  $l_3^-$  所围成的区域必须是一个单连通区域, 因为原点  $(0, 0)$  无定义, 所以不能取  $l_4^-$  作为积分路径.

**错解二:** 因为  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$ , 所以与路径无关, 选取  $l_5$  作为积分路径, 则

$$I = \int_0^3 \frac{-1}{1+y^2} dy + \int_{-1}^2 \frac{-3}{x^2+9} dx = \int_0^3 \frac{2dy}{4+y^2} = \arctan \frac{3}{2}$$

**错因:** 路径  $l_5$  上含有无定义点  $(0, 0)$ , 故不能选取该路径作积分.

记  $l_2 : \overrightarrow{BA}$ ,  $l_3 : x^2 + y^2 = \varepsilon^2$  方向: 顺时针,  $l_4 : \overrightarrow{BCA}$ ,  $l_5 : \overrightarrow{AFB}$ ,  $l_6 : \overrightarrow{ADEB}$ , 则有向线段  $l_1, l_2, l_3$  围成的区域记为  $D_1$ , 且  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$

法一:  $l_3$  围成的区域记为  $D_\varepsilon$  由 Green 公式,

$$\begin{aligned} I &= \left( \oint_{l_1+l_2+l_3} \right) \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \\ &= \iint_{D_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \left( \int_{BA} + \int_{l_3} \right) \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \\ &= 0 - \int_{-1}^2 \frac{dx}{2x^2 + 2x + 1} + \frac{2}{\varepsilon^2} \iint_{D_\varepsilon} dx dy = -\frac{\pi}{4} - \arctan 5 + 2\pi \\ &= \pi + \arctan \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

法二: 因为  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$ , 所以与路径无关, 选取  $l_6$  作为积分路径, 则有

$$\begin{aligned} I &= \int_{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB}} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \int_0^{-1} \frac{dy}{1+y^2} + \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2+1} + \int_{-1}^3 \frac{2dy}{4+y^2} \\ &= \frac{\pi}{2} + \arctan 2 + \arctan \frac{3}{2} + \arctan \frac{1}{2} = \pi + \arctan \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

法三:  $I = \int_{\widehat{AB}} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \int_{(-1,0^-)}^{(2,3)} d(\arctan \frac{y}{x}) = \int_{-\pi}^{\arctan \frac{3}{2}} d\theta = \arctan \frac{3}{2} + \pi.$

**例 6.2.18.** 已知  $\varphi(0) = \frac{1}{2}$ , 求连续可微函数  $\varphi(x)$ , 使得曲线积分  $\int_A^B [e^x + \varphi(x)]y dx - \varphi(x) dy$  与路径无关.

令  $P = [e^x + \varphi(x)]y$ ,  $Q = -\varphi(x)$ , 因为积分与路径无关, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \varphi'(x) + \varphi(x) = -e^x$$

该方程为一阶线性微分方程, 有通解公式

$$\varphi(x) = e^{-\int dx} \left[ \int (-e^x) \cdot e^{\int dx} dx + C \right] = -\frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$$

又因为  $\varphi(0) = \frac{1}{2}$ , 解得  $C = 1$ , 因此  $\varphi(x) = -\frac{1}{2}e^x + e^{-x}$ .

## 二重积分分部积分

**定理 6.2.9 (二重积分分部积分公式).** 设  $D$  是由一条或几条按段光滑的封闭曲线围成的平面有界闭区域, 若函数  $u, v$  在闭区域  $D$  上有连续的一阶偏导数, 则

$$\iint_D u \frac{\partial v}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial D} uv dy - \iint_D v \frac{\partial u}{\partial x} dx dy, \quad \iint_D u \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = -\oint_{\partial D} uv dx - \iint_D v \frac{\partial u}{\partial y} dx dy.$$

**例 6.2.19 (2023 西北大学).** 设  $D$  是由简单光滑闭曲线  $L$  围成的区域,  $f(x, y)$  在  $D$  上具有连续的偏导数, 记作:  $d = \max_{(x,y) \in D} \sqrt{x^2 + y^2}$ ,

$$(1) \text{ 证明: } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_L x \cdot f dy - \iint_D x \frac{\partial f}{\partial x} dx dy;$$

(2) 若  $\forall (x, y) \in L$ , 有  $f(x, y) = 0$ , 证明:

$$\iint_D f^2(x, y) dx dy \leq d^2 \iint_D \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

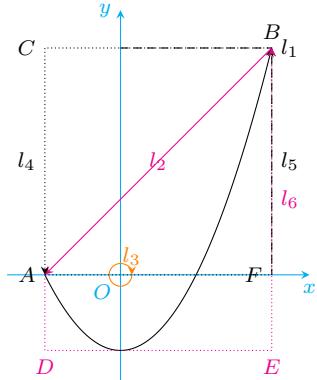


图 6.2.3

证

(1) 有 Green 公式得

$$\iint_D u \frac{\partial v}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial D} uv dy - \iint_D v \frac{\partial u}{\partial x} dx dy$$

令  $u = x, v = f$ , 则有  $\iint_D x \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_L x \cdot f dy - \iint_D f(x, y) dx dy$ , 整理得证;

(2) 由 (1) 可得,  $\iint_D f^2 dx dy = \frac{1}{2} \int_L f^2(x dy - y dx) - \frac{1}{2} \iint_D \left( x \frac{\partial f^2}{\partial x} + y \frac{\partial f^2}{\partial y} \right) dx dy$  又  $\forall (x, y) \in L$ , 有  $f(x, y) = 0$ , 于是  $\int_L f^2(x dy - y dx) = 0$ , 故  $\iint_D f^2 dx dy = -\frac{1}{2} \iint_D \left( x \frac{\partial f^2}{\partial x} + y \frac{\partial f^2}{\partial y} \right) dx dy$ , 于是由 Cauchy-Schwarz 不等式得,

$$\begin{aligned} \iint_D f^2 dx dy &\leq \iint_D \left| xf \frac{\partial f}{\partial x} + yf \frac{\partial f}{\partial y} \right| dx dy \leq \iint_D |f| \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} dx dy \\ &\leq d \iint_D |f| \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} dx dy \leq d \left[ \iint_D f^2 dx dy \cdot \iint_D \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \right]^{\frac{1}{2}} \\ \text{即 } \left( \iint_D f^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} &\leq d \cdot \left[ \iint_D \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ 不等式两边平方, 即得证.} \end{aligned}$$

**例 6.2.20.** 设函数  $f(x, y)$  在区域  $D : x^2 + y^2 \leq 1$  上有二阶连续偏导数, 且  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{-(x^2+y^2)}$ , 证明:

$$\iint_D \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \frac{\pi}{2e}.$$

证法一 积分区域  $D$  是圆形域, 考虑采用极坐标, 然后利用已知等式化简被积函数. 令  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ , 则

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

于是

$$\iint_D \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} \left( \rho \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \rho \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\theta.$$

记  $L_\rho$  为半径是  $\rho$  ( $0 \leq \rho \leq 1$ ) 的圆周 (逆时针方向),  $D_\rho$  为  $L_\rho$  包围的区域, 则

$$\int_0^{2\pi} \left( \rho \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \rho \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\theta = \oint_{L_\rho} -\frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dy.$$

由 Green 公式及已知等式, 得

$$\text{上式} = \iint_{D_\rho} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy = \iint_{D_\rho} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\rho e^{-r^2} r dr = \pi \left( 1 - e^{-\rho^2} \right)$$

故

$$\iint_D \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_0^1 \rho \pi \left( 1 - e^{-\rho^2} \right) d\rho = \frac{\pi}{2e}.$$

证法二 由 Green 公式, 可导出二重积分的分部积分公式:

$$\iint_D u \frac{\partial v}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial D} uv dy - \iint_D v \frac{\partial u}{\partial x} dx dy, \quad \iint_D u \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = -\oint_{\partial D} uv dx - \iint_D v \frac{\partial u}{\partial y} dx dy.$$

其中  $D$  是由一条分段光滑闭曲线所围成的闭区域,  $\partial D$  为  $D$  的正向边界.

令  $u = \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} = x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right)$ , 则由上述公式, 有

$$\iint_D x \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \iint_D \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} (x^2 + y^2) \frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx dy$$

再令  $u = \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} = y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right)$ , 类似地, 有

$$\iint_D y \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \iint_D \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) dx dy = -\frac{1}{2} \oint_{\partial D} (x^2 + y^2) \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dx dy$$

于是

$$\iint_D \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} (x^2 + y^2) \frac{\partial f}{\partial x} dy - (x^2 + y^2) \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy.$$

因为在边界  $\partial D$  上,  $x^2 + y^2 = 1$ , 所以利用 Green 公式, 得

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \frac{1}{2} \oint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy - \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D (1 - x^2 - y^2) e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - \rho^2) \rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{\pi}{2e}. \end{aligned}$$

**例 6.2.21 (首届数学竞赛数学类决赛).** 设  $f(x, y)$  是  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  上二次连续可微函数, 满足  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 y^2$ , 计算积分

$$I = \iint_D \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$

由 Green 公式, 可导出二重积分的分部积分公式:

$$\iint_D u \frac{\partial v}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial D} u v dy - \iint_D v \frac{\partial u}{\partial x} dx dy, \quad \iint_D u \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = -\oint_{\partial D} u v dx - \iint_D v \frac{\partial u}{\partial y} dx dy.$$

其中  $D$  是由一条分段光滑闭曲线所围成的闭区域,  $\partial D$  为  $D$  的正向边界.

令  $u = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x}$ , 则由上述公式, 有

$$\iint_D u \frac{\partial v}{\partial x} dx dy = \iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial D} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{\partial f}{\partial x} dy - \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx dy$$

再令  $u = \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial y}$ , 类似地, 有

$$\iint_D u \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = -\oint_{\partial D} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{\partial f}{\partial y} dx - \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dx dy$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{\partial D} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{\partial f}{\partial x} dy - \sqrt{x^2 + y^2} \frac{\partial f}{\partial y} dx - \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy \\ &= \iint_D x^2 y^2 \left( 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \int_0^1 \rho^5 (1 - \rho) d\rho = \frac{\pi}{168} \end{aligned}$$

因为在边界  $\partial D$  上,  $x^2 + y^2 = 1$ , 所以利用 Green 公式, 得

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \oint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx - \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \cdot x^2 y^2 dx dy = \iint_D \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy - \iint_D x^2 y^2 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \iint_D x^2 y^2 \left( 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \int_0^1 \rho^5 (1 - \rho) d\rho = \frac{\pi}{168} \end{aligned}$$

**例 6.2.22 (第十三届数学竞赛非数学预赛补赛).** 设函数  $f(x, y)$  在闭区间  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  上具有二阶连续偏导数, 且  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 + y^2$ , 求

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy}{(\tan r - \sin r)^2}.$$

记  $D_r = x^2 + y^2 \leq r^2$ , 由 Green 公式, 可导出二重积分的分部积分公式:

$$\iint_{D_r} u \frac{\partial v}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial D_r} uv dy - \iint_{D_r} v \frac{\partial u}{\partial x} dx dy, \quad \iint_{D_r} u \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = - \oint_{\partial D_r} uv dx - \iint_{D_r} v \frac{\partial u}{\partial y} dx dy.$$

其中  $D_r$  是由一条分段光滑闭曲线所围成的闭区域,  $\partial D_r$  为  $D_r$  的正向边界.

令  $u = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} = x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right)$ , 则由上述公式, 有

$$\iint_{D_r} x \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \iint_{D_r} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\partial D_r} (x^2 + y^2) \frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{1}{2} \iint_{D_r} (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx dy$$

再令  $u = \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right)$ , 类似地, 有

$$\iint_{D_r} y \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \iint_{D_r} \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) dx dy = -\frac{1}{2} \oint_{\partial D_r} (x^2 + y^2) \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{1}{2} \iint_{D_r} (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dx dy$$

于是

$$\iint_{D_r} \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\partial D_r} (x^2 + y^2) \frac{\partial f}{\partial x} dy - (x^2 + y^2) \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{1}{2} \iint_{D_r} (x^2 + y^2) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy$$

因为在边界  $\partial D_r$  上,  $x^2 + y^2 = r^2$ , 所以利用 Green 公式, 得

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \frac{r^2}{2} \oint_{\partial D_r} \frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{1}{2} \iint_{D_r} (x^2 + y^2)^2 dx dy = \frac{r^2}{2} \iint_{D_r} (x^2 + y^2) dx dy - \frac{1}{2} \iint_{D_r} (x^2 + y^2)^2 dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{D_r} \left[ r^2 (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2 \right] dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r (r^2 \rho^3 - \rho^5) d\rho = \frac{\pi r^6}{12} \end{aligned}$$

另一方面,  $(\tan r - \sin r)^2 = \left( r + \frac{r^3}{3} - r + \frac{r^3}{6} + o(r^3) \right)^2 \sim \frac{r^6}{4}$ ,  $r \rightarrow 0^+$ .

综上, 原式  $= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\pi r^6}{12} \cdot \frac{4}{r^6} = \frac{\pi}{3}$ .

**例 6.2.23.** 设  $u(x, y)$  在  $D : x^2 + y^2 \leq 1$  上有二阶连续偏导数, 且  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2 + y^2}{e^x + e^y} \cdot e^x$ , 试求

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\iint_{x^2+y^2 \leq t^2} \left( x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy}{(\tan t - \arctan t)^2}.$$

令  $D_t : x^2 + y^2 \leq t^2$ , 由 Green 公式可得二重积分分部积分公式,

$$\begin{cases} \iint_{D_t} x \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial D_t} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} dy - \iint_{D_t} \frac{x^2 + y^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy \\ \iint_{D_t} y \frac{\partial u}{\partial y} dx dy = - \oint_{\partial D_t} \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} dx - \iint_{D_t} \frac{x^2 + y^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{D_t} \left( x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \frac{t^2}{2} \oint_{\partial D_t} \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx - \frac{1}{2} \iint_{D_t} (x^2 + y^2) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \iint_{D_t} [t^2 - (x^2 + y^2)] \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \frac{1}{2} \iint_{D_t} [t^2 - (x^2 + y^2)] (x^2 + y^2) \cdot \frac{e^x}{e^x + e^y} dx dy \\
 &= \frac{e^\xi}{2(e^\xi + e^\eta)} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t [t^2 - r^2] r^3 dr = \frac{e^\xi}{2(e^\xi + e^\eta)} \cdot 2\pi \cdot \frac{t^6}{12}
 \end{aligned}$$

其中  $(\xi, \eta) \in D_t$ , 那么

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\iint_{x^2+y^2 \leq t^2} \left( x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy}{(\tan t - \arctan t)^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{e^\xi \pi t^6}{12(e^\xi + e^\eta)}}{\left(-\frac{2}{3}t^3\right)^2} = \frac{3\pi}{32}.$$

**例 6.2.24 (第九届数学竞赛决赛).** 设函数  $f(x, y)$  在区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$  上是一阶连续偏导数, 且满足

$$f(x, y)|_{x^2+y^2=a^2} = a^2, \text{ 以及 } \max_{(x, y) \in D} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] = a^2$$

其中  $a > 0$ . 证明:  $\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{4}{3}\pi a^4$ .

证 由 Green 公式, 可导出二重积分的分部积分公式:

$$\iint_D u \frac{\partial v}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial D} uv dy - \iint_D v \frac{\partial u}{\partial x} dx dy, \quad \iint_D u \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = -\oint_{\partial D} uv dx - \iint_D v \frac{\partial u}{\partial y} dx dy.$$

其中  $D$  是由一条分段光滑闭曲线所围成的闭区域,  $\partial D$  为  $D$  的正向边界.

令  $\frac{\partial v}{\partial x} = 1 = \frac{\partial x}{\partial x}$ ,  $u = f(x, y)$ , 则由上述公式, 有

$$\iint_D u \frac{\partial v}{\partial x} dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy = \oint_{\partial D} xf(x, y) dy - \iint_D x \frac{\partial f}{\partial x} dx dy$$

再令  $\frac{\partial v}{\partial y} = 1 = \frac{\partial y}{\partial y}$ ,  $u = f(x, y)$ , 则有

$$\iint_D u \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy = -\oint_{\partial D} yf(x, y) dx - \iint_D y \frac{\partial f}{\partial y} dx dy$$

所以由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned}
 \left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| &= \frac{1}{2} \left| \oint_{\partial D} |xf(x, y) dy - yf(x, y) dx| + \frac{1}{2} \iint_D \left| x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right| dx dy \right| \\
 &\leq a^2 \iint_D dx dy + \frac{1}{2} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} dx dy \\
 &\leq \pi a^4 + \frac{a}{2} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \pi a^4 + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^2 d\rho = \frac{4}{3}\pi a^4
 \end{aligned}$$

### 6.3 曲面积分

曲面积分是对矢量场在曲面上进行积分的数学概念, 类似于曲线积分, 但是在三维空间中考虑曲面而不是曲线. 曲面积分可以分为两类: 第一类曲面积分和第二类曲面积分.

### 6.3.1 两类曲面积分

#### 第一型曲面积分的计算

**定义 6.3.1 (对面积的曲面积分 (第一型曲面积分)).** 设  $\Sigma$  为空间的有界曲面, 函数  $f(x, y, z)$  在  $\Sigma$  上定义, 将  $\Sigma$  任意地分割为  $n$  个小曲面  $\Sigma_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $\Sigma_i$  的面积为  $\Delta S_i$ ,  $\Sigma_i$  的直径为  $d_i$ ,  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i\}$ , 在  $\Sigma_i$  上任取点  $(x_i, y_i, z_i)$ , 则函数  $f$  沿  $\Sigma$  的第一型曲面积分定义为

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i$$

这里右端的极限存在, 且与分割  $\Sigma$  的方式无关, 与点  $(x_i, y_i, z_i)$  的取法无关. 当  $f(x, y, z)$  在  $\Sigma$  上连续时,  $f$  在  $\Sigma$  上的第一型曲面积分存在, 即可积.

**定理 6.3.1 (偶倍奇零性).** (1) 若曲面  $\Sigma$  的点关于  $x = 0$  对称,  $f$  在  $\Sigma$  上可积, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \begin{cases} 0, & \text{若 } f(-x, y, z) = -f(x, y, z), \\ 2 \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS, & \text{若 } f(-x, y, z) = f(x, y, z) \end{cases}$$

这里  $\Sigma_1$  是  $\Sigma$  的  $x \geq 0$  的部分曲面.

(2) 若曲面  $\Sigma$  的点关于  $y = 0$  对称,  $f$  在  $\Sigma$  上可积, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \begin{cases} 0, & \text{若 } f(x, -y, z) = -f(x, y, z), \\ 2 \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS, & \text{若 } f(x, -y, z) = f(x, y, z) \end{cases}$$

这里  $\Sigma_2$  是  $\Sigma$  的  $y \geq 0$  的部分曲面.

(3) 若曲面  $\Sigma$  的点关于  $z = 0$  对称,  $f$  在  $\Sigma$  上可积, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \begin{cases} 0, & \text{若 } f(x, y, -z) = -f(x, y, z), \\ 2 \iint_{\Sigma_3} f(x, y, z) dS, & \text{若 } f(x, y, -z) = f(x, y, z) \end{cases}$$

这里  $\Sigma_3$  是  $\Sigma$  的  $z \geq 0$  的部分曲面.

**定理 6.3.2 (第一型曲面积分化为二重积分).** 假设曲面  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  为有界的光滑曲面, 其参数方程为

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D$$

$D \subset \mathbb{R}^2$  为有界闭域,  $\Sigma$  与  $D$  的点一一对应, 其中函数  $x, y, z \in \mathcal{C}^{(1)}(D)$ . 令

$$E = \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_u, F = \mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{r}'_v, G = \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v$$

若函数  $f \in \mathcal{C}(\Sigma)$ , 则函数  $f(x, y, z)$  沿曲面  $\Sigma$  的第一型曲面积分存在, 且有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EF - G^2} du dv.$$

特别, 取参数  $u, v$  为  $x, y$ , 或  $y, z$ , 或  $z, x$ :

- (1) 若曲面  $\Sigma$  的方程为  $z = z(x, y), (x, y) \in D$ ,  $D$  为  $xOy$  平面上的有界闭域, 函数  $z(x, y)$  在  $D$  上连续可微, 函数  $f(x, y, z)$  在  $\Sigma$  上连续, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$$

- (2) 若曲面  $\Sigma$  的方程为  $x = x(y, z), (y, z) \in D_1$ ,  $D_1$  为  $yOz$  平面上的有界闭域, 函数  $x(y, z)$  在  $D_1$  上连续可微, 函数  $f(x, y, z)$  在  $\Sigma$  上连续, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_1} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz$$

- (3) 若曲面  $\Sigma$  的方程为  $y = y(z, x), (z, x) \in D_2$ ,  $D_2$  为  $zOx$  平面上的有界闭域, 函数  $y(z, x)$  在  $D_2$  上连续可微, 函数  $f(x, y, z)$  在  $\Sigma$  上连续, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_2} f(x, y(z, x), z) \sqrt{1 + (y'_z)^2 + (y'_x)^2} dz dx$$

**例 6.3.1.** 计算  $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$ , 式中  $\Sigma$  为曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $z \geq 0$ .

由于

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS = \iint_{D_{xy}} \left( x + y + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right) \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \left( x + y + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right) \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy \\ &= \int_{-a}^a \left( \pi ax + 2a\sqrt{a^2 - x^2} \right) dx = 4a \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \pi a^3. \end{aligned}$$

**例 6.3.2.** 设二元函数  $u = u(x, y)$  满足  $du = 2xy dx + (x^2 + 2y) dy$ ,  $u(0, 0) = 1$ , 且曲面  $\Sigma$  为锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  所截的部分, 求  $I = \iint_{\Sigma} yu(x, y) dS$ .

由题意

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int 2xy dx = x^2 y + \psi(y) \\ u(x, y) &= \int (x^2 + 2y) dy = x^2 y + y^2 + \varphi(x) \end{aligned}$$

又  $u(0, 0) = 1$ , 所以  $u(x, y) = x^2 y + y^2 + 1$ , 那么

$$I = \iint_{\Sigma} x^2 y^2 dS = \sqrt{2} \iint_{D_{xy}} x^2 y^2 dx dy = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} r^5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta dr = 2\sqrt{2} \cdot \frac{64}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{7\sqrt{2}\pi}{24}.$$

**例 6.3.3.** 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{2ydz}{x \cos^2 x} + \frac{dzdx}{\cos^2 y} - \frac{dxdy}{z \cos^2 z}$$

其中  $\Sigma$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的外侧.

由  $\frac{dydz}{x} = \frac{dzdx}{y} = \frac{dxdy}{z} = dS$  将原式积分化为第一型曲面积分, 得

$$I = \iint_{\Sigma} \left( \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{y}{\cos^2 y} - \frac{1}{\cos^2 z} \right) dS$$

由于曲面  $\Sigma$  关于三个坐标平面对称,  $\frac{2}{\cos^2 x}$  是关于  $x$  的偶函数,  $\frac{y}{\cos^2 y}$  关于  $y$  为奇函数,  $\frac{1}{\cos^2 z}$  关于  $z$  为偶函数, 应用第一型曲面积分的偶倍奇零性, 得

$$I = 4 \iint_{\Sigma(x \geq 0)} \frac{1}{\cos^2 x} dS + 0 - 2 \iint_{\Sigma(z \geq 0)} \frac{1}{\cos^2 z} dS$$

$\Sigma(x \geq 0)$  的方程是  $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$ ,  $D_{yz} : y^2 + z^2 \leq 1$ ;  $\Sigma(z \geq 0)$  的方程是  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ,  $D_{xy} : x^2 + y^2 \leq 1$ , 由于曲面  $\Sigma(x \geq 0)$  与  $\Sigma(z \geq 0)$  的方程关于  $x, z$  具有轮换性, 所以

$$\iint_{\Sigma(x \geq 0)} \frac{1}{\cos^2 x} dS = \iint_{\Sigma(z \geq 0)} \frac{1}{\cos^2 z} dS \Rightarrow I = 2 \iint_{\Sigma(z \geq 0)} \frac{1}{\cos^2 z} dS$$

将曲面积分化为区域  $D_{xy}$  上的二重积分, 并在区域  $D_{xy}$  上用极坐标计算, 有

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy \\ I &= 2 \iint_{D_{xy}} \frac{\sec^2 \sqrt{1 - x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\sec^2 \sqrt{1 - \rho^2}}{\sqrt{1 - \rho^2}} \rho d\rho \\ &= 4\pi \int_0^1 \sec^2 \sqrt{1 - \rho^2} d\sqrt{1 - \rho^2} = 4\pi \cdot \tan x \Big|_0^1 = 4\pi \tan 1. \end{aligned}$$

**例 6.3.4.** 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} yz(y - z) dy dz + zx(z - x) dz dx + xy(x - y) dx dy$$

其中  $\Sigma$  是上半球面  $z = \sqrt{4Rx - x^2 - y^2}$  ( $R \geq 1$ ) 在柱面  $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = 1$  之内部的上侧.

记  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4Rx = 0$  ( $z \geq 0, R \geq 1$ ), 则曲面  $\Sigma$  的法向量为

$$\vec{n} = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = (x - 2R, y, z)$$

于是

$$\frac{dy dz}{x - 2R} = \frac{dz dx}{y} = \frac{dxdy}{z}$$

代入曲面积分得,

$$I = \iint_{\Sigma} \left[ yz(y - z) \cdot \frac{x - 2R}{z} + zx(z - x) \cdot \frac{y}{z} + xy(x - y) \right] dx dy = 2R \iint_{\Sigma} y(z - y) dx dy$$

记曲面  $\Sigma$  在  $xOy$  平面上的投影区域为  $D : \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 \leq 1$ , 由偶倍奇零性, 则

$$\begin{aligned} I &= 2R \iint_D y(\sqrt{4Rx - x^2 - y^2} - y) dx dy = 2R \iint_D y \sqrt{4Rx - x^2 - y^2} dx dy - 2R \iint_D y^2 dx dy \\ &= -2R \iint_D y^2 dx dy = -2R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 \sin^2 \theta d\rho = -2R \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = -\frac{\pi R}{2}. \end{aligned}$$

**例 6.3.5.** 计算  $I = \iint_{\Sigma} z dS$ , 其中  $\Sigma$  是柱面  $x^2 + y^2 = 2az$  ( $a > 0$ ) 被圆锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  所割下的部分曲面.

利用柱面坐标  $x = a \sin \theta$ ,  $y = y$ ,  $z = a(1 + \cos \theta)$ , 那么  $\Sigma$  在参数平面上的投影为

$$D : -\sqrt{2a^2 \cos \theta (\cos \theta + 1)} \leq y \leq \sqrt{2a^2 \cos \theta (\cos \theta + 1)}, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

并且  $dS = \sqrt{EF - G^2} d\theta dy = ad\theta dy$ , 记  $y(\theta) = \sqrt{2a^2 \cos \theta (\cos \theta + 1)}$ , 并由对称性,

$$\begin{aligned} I &= a^2 \iint_D (1 + \cos \theta) d\theta dy = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{-y(\theta)}^{y(\theta)} (1 + \cos \theta) dy = 2\sqrt{2}a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos \theta)^{\frac{3}{2}} \cos^{\frac{1}{2}} \theta d\theta \\ &\stackrel{\sqrt{\cos \theta} = \sin t}{=} 8\sqrt{2}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t + \sin^4 t) dt = 8\sqrt{2}a^3 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{16} \right) = \frac{7\pi a^3}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

**例 6.3.6.** 设  $P$  为椭球面  $S : x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$  上一动点, 若  $S$  在点  $P$  处的切平面与  $xOy$  面垂直, 求点  $P$  的轨迹  $C$ , 并计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{(x + \sqrt{3}) |y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS$$

其中  $\Sigma$  是椭球面  $S$  位于曲线  $C$  上方的部分.

设  $P(x_0, y_0, z_0)$ ,  $z$  轴上的单位向量为  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ , 椭球面方程为

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - yz - 1 = 0$$

则椭球面  $S$  上动点  $P$  的法向量为

$$\mathbf{n} = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)_P = (2x_0, 2y_0 - z_0, 2z_0 - y_0)$$

由题意有  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0 \Rightarrow 2z_0 = y_0$ , 又因为  $P$  在  $S$  上, 于是

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - y_0 z_0 - 1 = 0 \\ 2z_0 = y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 + 3y^2 = 4 \\ 2z - y = 0 \end{cases}$$

下求曲面积分, 先计算  $\sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2}$ , 因为  $z = z(x, y)$ , 于是

$$\begin{cases} 2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ 2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} - z - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y - 2z} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z - 2y}{2z - y} \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} &= \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(y - 2z)^2} + \frac{(z - 2y)^2}{(2z - y)^2}} = \sqrt{\frac{4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4yz + y^2 + z^2 - 4yz}{(2z - y)^2}} \\ &\stackrel{x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1}{=} \frac{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}}{|2z - y|} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_{4x^2 + 3y^2 \leq 4} \frac{(x + \sqrt{3}) |y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} \cdot \frac{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}}{|2z - y|} dx dy = \iint_{4x^2 + 3y^2 \leq 4} (x + \sqrt{3}) dx dy \\ &= \sqrt{3} \iint_{4x^2 + 3y^2 \leq 4} dx dy = \sqrt{3} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = 2\pi. \end{aligned}$$

**例 6.3.7 (第十一届数学竞赛初赛).** 计算积分  $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi e^{\sin \varphi (\cos \theta - \sin \theta)} \sin \varphi d\varphi$ .

由  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  得  $\begin{cases} x = \sin \varphi \cos \theta \\ y = \sin \varphi \sin \theta \\ z = \cos \varphi \end{cases}$  并且

$$E = x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2 + z_\varphi'^2 = (\cos \varphi \cos \theta)^2 + (\cos \varphi \sin \theta)^2 + (-\sin \varphi)^2 = 1$$

$$F = x_\varphi' x_\theta' + z_\varphi' x_\theta' + z_\varphi' x_\theta' = -\cos \varphi \cos \theta \cdot \sin \varphi \sin \theta + \cos \varphi \sin \theta \cdot \sin \varphi \cos \theta = 0$$

$$G = x_\theta'^2 + y_\theta'^2 + z_\theta'^2 = (-\sin \varphi \sin \theta)^2 + (\sin \varphi \cos \theta)^2 = \sin \varphi^2$$

那么

$$\sqrt{EG - F^2} = |\sin \varphi| = \sin \varphi \quad (\varphi \in [0, \pi])$$

于是原积分化为

$$I = \iint_{\Sigma} e^{x-y} dS \stackrel{x=\frac{x+y}{\sqrt{2}}, y=\frac{x-y}{\sqrt{2}}, z=w}{=} \iint_{\Sigma'} e^{\sqrt{2}u} dS = \iint_{\Sigma'} e^{\sqrt{2}w} dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi e^{\sqrt{2} \cos \varphi} \sin \varphi d\varphi = \sqrt{2}\pi(e^{\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{2}}).$$

## 第二型曲面积分的计算

**定义 6.3.2 (有向曲面).** 通常遇到的曲面都是双侧的, 规定正侧的曲面称为有向曲面.

**定义 6.3.3 (对坐标的曲面积分 (第二型曲面积分)).** 设  $\Sigma$  为光滑的有向曲面,  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  都是定义在  $\Sigma$  上的有界函数, 将曲面  $\Sigma$  任意分成  $n$  个小曲面  $\Delta S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 在每个小曲面上任取一点  $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , 曲面  $\Sigma$  的正侧在点  $N_i$  处的法向量为

$$\mathbf{n}_i = \cos \alpha_i \mathbf{i} + \cos \beta_i \mathbf{j} + \cos \gamma_i \mathbf{k}$$

有向小曲面  $\Delta S_i$  在  $xOy$  平面上投影为  $\Delta S_{i,xy} = \Delta S_i \cos \gamma_i$ , 如果当各小曲面直径的最大值  $\lambda \rightarrow 0$ , 和式  $\sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_{i,xy}$  的极限存在, 则称此极限为函数  $R(x, y, z)$  沿有向曲面  $\Sigma$  的正侧上对坐标  $x, y$  的曲面积分, 记作  $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$ , 即

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_{i,xy}$$

类似地, 函数  $P(x, y, z)$  沿有向曲面  $\Sigma$  的正侧上对坐标  $y, z$  的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_{i,yz}$$

其中  $\Delta S_{i,yz} = \Delta S_i \cos \alpha_i$ , 函数  $Q(x, y, z)$  沿有向曲面  $\Sigma$  的正侧上对坐标  $z, x$  的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_{i,zx}$$

其中  $\Delta S_{i,zx} = \Delta S_i \cos \beta_i$ .

**定理 6.3.3.** 若  $\Sigma$  表示有向曲面的正侧, 该曲面的另一侧为负侧, 记为  $\Sigma^-$ , 则有

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = - \iint_{\Sigma^-} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

即当积分曲面改变为相反侧时, 对坐标的曲面积分也要变号.

计算第二类曲面积分的基本方法是通过投影转化为二重积分的计算; 转化过程可概括为“一代二投三定向”. 现以形如  $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$  的曲面积分为例, 具体阐述如下:

- (1) 选择  $dx dy$  中所含的两个变量  $x, y$  作为自变量, 将曲面积分  $\Sigma$  的方程表示为函数  $z = z(x, y)$ , 再将函数  $z(x, y)$  代替  $R(x, y, z)$  中的变量  $z$ , 则复合二元函数  $R(x, y, z(x, y))$  就是二重积分的被积函数.
- (2) 将曲面  $\Sigma$  投影到与  $dx dy$  这两个变量同名的  $xOy$  坐标面上, 得投影区域  $D_{xy}$ , 这就是二重积分的积分区域, 这样就把对坐标的曲面积分化为二重积分:

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

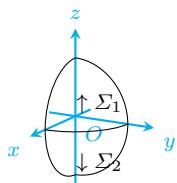
- (3) 根据题中给定的曲面  $\Sigma$  的方向决定上述等式右端的符号. 如果  $\Sigma$  取上侧, 应取正号; 反之为负号. 此外, 如果曲面  $\Sigma$  上的法向量始终垂直于  $z$  轴方向 (即曲面的法向量垂直于投影方向), 则曲面积分的值为零.

值得注意的是: 曲面  $\Sigma$  的表达式  $z = z(x, y)$  必须是单值函数, 否则, 应先将  $\Sigma$  分成两部分  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  之和:  $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ , 使得  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  的表达式  $z = z(x, y)$  都是单值函数.

类似的可计算  $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz$  和  $\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx$ .

**例 6.3.8.** 计算  $I = \iint_{\Sigma} xyz dx dy$ ,  $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1 (x, y \geq 0)$  的外侧.

$xOy$  平面将  $\Sigma$  分为上、下两部分, 分别记作  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$ , 如图 6.3.1 所示, 记在  $xOy$  平面上的投影区域为  $D_{xy}$ ,



$$I = \left( \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} \right) xyz dx dy = \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy + (-1) \iint_{D_{xy}} xy \left( -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \right) dx dy$$

$$= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 \sin \theta \cos \theta \sqrt{1 - r^2} r dr$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^1 r^3 \sqrt{1 - r^2} dr = 1 \cdot \frac{2}{15} = \frac{2}{15}.$$

图 6.3.1

**例 6.3.9.** 计算曲面积分  $I = \iint_{\Sigma} \left( \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{y}{\cos^2 y} - \frac{1}{\cos^2 z} \right) dS$ , 其中  $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

由于  $\Sigma$  关于  $xOz$  面对称, 而  $\frac{y}{\cos^2 y}$  关于  $y$  是奇函数, 故  $\iint_{\Sigma} \frac{y}{\cos^2 y} dS = 0$ , 由有轮换对称性, 则

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{1}{\cos^2 z} dS = 2 \iint_{\Sigma \uparrow} \sec^2 z dS$$

且  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ , 所以  $dS = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy$ , 因此

$$I = 2 \iint_{D_{xy}} \sec^2 \sqrt{1 - x^2 - y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\sec^2 \sqrt{1 - r^2}}{\sqrt{1 - r^2}} r dr$$

$$\underline{\underline{\sqrt{1-r^2}=t}} \quad 4\pi \int_0^1 \sec^2 t dt = 4\pi \tan t \Big|_0^1 = 4\pi \tan 1$$

**例 6.3.10.** 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z}$ , 式中  $\Sigma$  为椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的外侧.

根据轮换对称性知, 只要计算一个积分, 不妨计算  $\iint_{\Sigma} \frac{dxdy}{z}$ , 并令  $\begin{cases} x = a\rho \cos \theta \\ y = b\rho \sin \theta \end{cases}$  于是

$$\iint_{\Sigma} \frac{dxdy}{z} = \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{2dxdy}{c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = \frac{2ab}{c} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} d\rho = 4\pi \frac{ab}{c}$$

$$\text{于是原式} = 4\pi \left( \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right) = \frac{4\pi}{abc} (b^2 c^2 + a^2 c^2 + a^2 b^2).$$

**例 6.3.11.** 计算  $\iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$ , 其中  $\Sigma$  为球面  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$  的外侧.

根据轮换对称性知, 只要计算一个积分, 不妨计算  $\iint_{\Sigma} z^2 dxdy$ ,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} z^2 dxdy &= \iint_{D_{xy}} \left[ c + \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} \right]^2 dxdy - \iint_{D_{xy}} \left[ c - \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} \right]^2 dxdy \\ &= 4c \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} dxdy = 4c \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho \\ &= 8\pi c \left[ -\frac{1}{3} (R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^R = \frac{8}{3} \pi c R^3 \end{aligned}$$

$$\text{于是原式} \iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = \frac{8}{3} \pi R^3 (a+b+c).$$

### 三重积分分部积分

**定理 6.3.4 (三重积分分部积分公式).** 该定理是定理 6.2.9 推广到三维的形式, 设  $\Omega$  是由一张或几张分片光滑的双侧封闭曲面围成的空间有界闭区域, 若  $u, v$  在闭区域  $\Omega$  上有连续的一阶偏导数, 则

$$\begin{cases} \iiint_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x} dxdydz = \iint_{\partial\Omega} uv dydz - \iiint_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x} dxdydz, \\ \iiint_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial y} dxdydz = \iint_{\partial\Omega} uv dzdx - \iiint_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial y} dxdydz, \\ \iiint_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial z} dxdydz = \iint_{\partial\Omega} uv dx dy - \iiint_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial z} dxdydz. \end{cases}$$

**例 6.3.12 (第八届数学竞赛决赛).** 设函数  $f(x, y, z)$  在区域  $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  上具有连续的二阶偏导数, 且满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\text{计算 } I = \iiint_{\Omega} \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right) dxdydz.$$

因为

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x} dx dy dz &= \iint_{\partial\Omega} uv dy dz - \iiint_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz \\ \iiint_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial y} dx dy dz &= \iint_{\partial\Omega} uv dz dx - \iiint_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial y} dx dy dz \\ \iiint_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{\partial\Omega} uv dx dy - \iiint_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial z} dx dy dz\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}I &= \iint_{x^2+y^2+z^2=1} \left( \frac{x^2+y^2+z^2}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} dy dz + \frac{x^2+y^2+z^2}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} dz dx + \frac{x^2+y^2+z^2}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} dx dy \right) \\ &\quad - \iint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \left[ \frac{x^2+y^2+z^2}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \right] dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2+z^2=1} \left( \frac{\partial f}{\partial x} dy dz + \frac{\partial f}{\partial y} dz dx + \frac{\partial f}{\partial z} dx dy \right) - \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \sqrt{x^2+y^2+z^2} [1 - (x^2+y^2+z^2)] dx dy dz = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \rho (1-\rho^2) \rho^2 \sin \varphi d\rho = \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

**例 6.3.13.** 设函数  $f(x, y, z)$  在  $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  上具有连续的二阶偏导数, 且满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq r^2} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{\partial f}{\partial z} \right) dV$$

$$\text{求极限 } \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq r^2} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{\partial f}{\partial z} \right) dV}{\sin r (\tan r - \sin r)^2}.$$

记  $\Omega_r : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ , 由三重积分分部积分公式:

$$\iint_{\Omega_r} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{\partial f}{\partial x} dV = \iint_{\partial\Omega_r} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \frac{\partial f}{\partial x} dy dz - \iiint_{\Omega_r} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dV$$

同理可得,

$$\begin{aligned}&\iint_{\Omega_r} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{\partial f}{\partial z} \right) dV \\ &= \iint_{\partial\Omega_r} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} dy dz + \frac{\partial f}{\partial y} dz dx + \frac{\partial f}{\partial z} dx dy \right) - \iiint_{\Omega_r} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) dV \\ &= \iint_{\Omega_r} (r - \sqrt{x^2+y^2+z^2}) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) dV = \iint_{\Omega_r} (r - \sqrt{x^2+y^2+z^2}) (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} dV \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^r (r - \rho) \rho^5 d\rho = \frac{2\pi r^7}{21}\end{aligned}$$

$$\text{且 } \sin r (\tan r - \sin r)^2 \sim r \left( r + \frac{r^3}{3} - r + \frac{r^3}{6} \right) = \frac{r^7}{4}, r \rightarrow 0^+, \text{ 故原极限 } = \frac{8\pi}{21}.$$

## 第二型曲面积分的分部积分公式

**定理 6.3.5 (第二型曲面积分的分部积分公式).** 设光滑曲面  $\Sigma$  的边界曲线  $\Gamma$  按段光滑, 函数  $P_i(x, y, z)$ ,  $Q_i(x, y, z)$ ,  $R_i(x, y, z)$  ( $i = 1, 2$ ) 在  $\Sigma$  (连同  $\Gamma$ ) 上有连续的一阶偏导数, 则

$$\iint_{\Sigma} \left( R_1 \frac{\partial R_2}{\partial y} - Q_1 \frac{\partial Q_2}{\partial z} \right) dy dz + \left( P_1 \frac{\partial P_2}{\partial z} - R_1 \frac{\partial R_2}{\partial x} \right) dz dx + \left( Q_1 \frac{\partial Q_2}{\partial x} - P_1 \frac{\partial P_2}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \oint_{\Gamma} P_1 P_2 dx + Q_1 Q_2 dy + R_1 R_2 dz - \iint_{\Sigma} \left( R_2 \frac{\partial R_1}{\partial y} - Q_2 \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right) dy dz \\
&\quad + \left( P_2 \frac{\partial P_1}{\partial z} - R_2 \frac{\partial R_1}{\partial x} \right) dz dx + \left( Q_2 \frac{\partial Q_1}{\partial x} - P_2 \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) dx dy
\end{aligned}$$

其中  $\Sigma$  的方向与  $\Gamma$  的方向满足右手定则.

证 由 Stokes 公式

$$\oint_{\Gamma} P_1 P_2 dx = \iint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial z} (P_1 P_2) dz dx - \frac{\partial}{\partial y} (P_1 P_2) dx dy = \iint_{\Sigma} P_1 \left( \frac{\partial P_2}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P_2}{\partial y} dx dy \right) + \iint_{\Sigma} P_2 \left( \frac{\partial P_1}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P_1}{\partial y} dx dy \right)$$

移项得

$$\iint_{\Sigma} P_1 \left( \frac{\partial P_2}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P_2}{\partial y} dx dy \right) = \oint_{\Gamma} P_1 P_2 dx - \iint_{\Sigma} P_2 \left( \frac{\partial P_1}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P_1}{\partial y} dx dy \right)$$

同理可得

$$\iint_{\Sigma} Q_1 \left( \frac{\partial Q_2}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q_2}{\partial z} dy dz \right) = \oint_{\Gamma} Q_1 Q_2 dy - \iint_{\Sigma} Q_2 \left( \frac{\partial Q_1}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q_1}{\partial z} dy dz \right)$$

$$\iint_{\Sigma} R_1 \left( \frac{\partial R_2}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R_2}{\partial x} dz dx \right) = \oint_{\Gamma} R_1 R_2 dz - \iint_{\Sigma} R_2 \left( \frac{\partial R_1}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R_1}{\partial x} dz dx \right)$$

三式相加即得证.

### 6.3.2 Gauss 公式、Stokes 公式

Gauss 公式与 Stokes 公式, 它们都是重要的数学定理, 用于描述向量场在不同维度下的积分关系.

1. Gauss 公式: 高斯公式是关于向量场的散度的一个重要定理, 也称为散度定理.
2. Stokes 公式: 斯托克斯公式是关于向量场的旋度的一个定理, 描述了曲面和曲线之间的关系.

#### Gauss 公式

**定理 6.3.6 (Gauss 公式).** 设空间封闭区域  $\Omega$  由分片光滑闭曲面  $\Sigma$  所围成,  $P(x, y, z), Q(x, y, z)$  与  $R(x, y, z)$  在  $\Omega$  内具有连续的一阶偏导数, 则

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

这里  $\Sigma$  是  $\Omega$  的整个边界曲线的外侧.

**例 6.3.14.** 设光滑曲面  $S$  是有界区域  $V$  的边界,  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为曲面  $S$  的外法线的方向余弦.

|   |   |
|---|---|
| $(1) \iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy.$  | $(2) \iint_S xy dx dy + xz dz dx + yz dy dz.$   |
| $(3) \iint_S \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS.$ | $(4) \iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS.$ |

(1) 因为  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$ , 所以

$$\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

(2) 因为  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$ , 所以  $\iint_S xy dx dy + xz dz dx + yz dy dz = 0$ .

(3) 因为  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ , 所以

$$\iint_S \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS = 2 \iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

(4) 因为  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$ , 所以

$$\iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS = \iiint_V \Delta u dxdydz.$$

**例 6.3.15.** 求  $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ , 其中  $S$  为立方体  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$  的外表面.

$$\text{原式} = 2 \iiint_V (x + y + z) dxdydz = 2 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x + y + z) dz = 3a^4.$$

**例 6.3.16.** 求  $\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$ , 其中  $S$  为球  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  的外表面.

$$\text{原式} = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^a r^4 \sin \varphi dr = \frac{12\pi}{5} a^5.$$

**例 6.3.17.** 计算  $\iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS$ , 其中  $S$  为部分圆锥面  $x^2 + y^2 = z^2 (0 \leq z \leq h)$ ,  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为曲面  $S$  的外法线的方向余弦.

合并  $S_1 : z = h, x^2 + y^2 \leq h^2$  组成封闭曲面:  $S + S_1$ , 它是空间区域  $V$  的边界, 那么

$$\begin{aligned} I &= \iint_{S+S_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS = 2 \iiint_V (x + y + z) dxdydz \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \rho d\rho \int_\rho^h (\rho \cos \theta + \rho \sin \theta + z) dz = \frac{\pi h^4}{2} \end{aligned}$$

又因为  $\iint_{S_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS = h^2 \iint_{x^2 + y^2 \leq h^2} dxdy = \pi h^4$ , 所以原式  $= I - \pi h^4 = -\frac{\pi h^4}{2}$ .

**例 6.3.18.** 设  $\Sigma$  为曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2} (1 \leq x^2 + y^2 \leq 4)$  的下侧,  $f(x)$  是连续函数, 计算

$$I = \iint_{\Sigma} [xf(xy) + 2x - y] dy dz + [yf(xy) + 2y + x] dz dx + [zf(xy) + z] dx dy.$$

**错解.** 补  $\Sigma_1 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1$  方向取下侧,  $\Sigma_2 : x^2 + y^2 \leq 4, z = 2$  方向取上侧, 后用 Gauss 公式, 下略.

**错因:** 题目说  $f$  连续, 并没有说它可导, 所以  $f'(xy)$  不一定存在, 因此不能使用 Gauss 公式.

曲面  $\Sigma$  在  $xOy$  面上的投影区域为  $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ , 且  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , 并且

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{\Sigma} (P, Q, R)(-f'_x, -f'_y, 1) dx dy$$

于是

$$\begin{aligned} I &= - \iint_D \left\{ [xf(xy) + 2x - y] \left( -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + [yf(xy) + 2y + x] \left( -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + [f(xy) + 1] \sqrt{x^2 + y^2} \right\} dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 |r| \cdot r dr \stackrel{r>0}{=} 2\pi \int_1^2 r^2 dr = \frac{14}{3}\pi. \end{aligned}$$

**例 6.3.19.** 设  $\Sigma$  为任意闭曲面,

$$I = \iint_{\Sigma} \left( x - \frac{1}{3}x^3 \right) dy dz - \frac{4}{3}y^3 dz dx + \left( 3y - \frac{1}{3}z^3 \right) dx dy$$

(1) 证明  $\Sigma$  为椭球面  $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$  时,  $I$  达到最大值;

(2) 求  $I$  的最大值  $I_{max}$ .

(1) 令  $P = x - \frac{1}{3}x^3$ ,  $Q = -\frac{4}{3}y^3$ ,  $R = 3y - \frac{1}{3}z^3$ , 那么

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 - x^2 - 4y^2 - z^2$$

由 Gauss 定理知,  $I = \iiint_{\Omega} (1 - x^2 - 4y^2 - z^2) dx dy dz$ , 为使  $I$  最大, 要求  $\Omega$  是使得  $1 - x^2 - 4y^2 - z^2 \geq 0$  的最大空间区域, 即

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid 1 - x^2 - 4y^2 - z^2 \geq 0\}$$

$\Sigma$  是  $\Omega$  的表面, 即为椭球面  $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ .

(2) 即求  $I = \iiint_{x^2+4y^2+z^2 \leq 1} (1 - x^2 - 4y^2 - z^2) dx dy dz$ , 令  $\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = \frac{r}{2} \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$  则有

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \frac{1}{2} \sin \varphi \sin \theta & \frac{r}{2} \cos \varphi \sin \theta & \frac{r}{2} \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi$$

因此

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^1 (1 - r^2) r^2 dr = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 2 \int_0^1 (r^2 - r^4) dr = \frac{4\pi}{15}.$$

**例 6.3.20.** 求曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} 4xz dy dz - 2yz dz dx + (1 - z^2) dx dy$$

其中  $\Sigma$  是由  $z = e^y$  ( $0 \leq y \leq 1$ ) 绕  $z$  轴旋转一周所得的曲面, 方向取下侧.

取  $\Sigma_1 : x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $z = e$ , 方向取上侧, 则由 Gauss 公式得,

$$\begin{aligned} I &= \left( \iint_{\Sigma + \Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} \right) [4xz dy dz - 2yz dz dx + (1 - z^2) dx dy] = - \iint_{\Sigma_1} 4xz dy dz - 2yz dz dx + (1 - z^2) dx dy \\ &= - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1 - z^2) dx dy = (e^2 - 1)\pi. \end{aligned}$$

**例 6.3.21.** 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{ax dy dz + (z+a)^2 dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$ , 其中  $\Sigma$  为下半球面  $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  上侧,  $a$  为大于零的常数.

取  $\Sigma_1 : z = 0, x^2 + y^2 \leq a^2$ , 方向取上侧, 并记  $\Sigma + \Sigma_1$ , 围成的有界闭区域为  $\Omega$ , 于是

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 0 + \frac{2z + 2a}{a} = 3 + \frac{2}{a}z$$

于是由 Gauss 公式得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma^- + \Sigma_1} x dy dz + \frac{(z+a)^2}{a} dx dy = \iiint_{\Omega} \left(3 + \frac{2}{a}z\right) dV = 3 \iiint_{\Omega} dV + \frac{2}{a} \iiint_{\Omega} zdV \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi a^3 + \frac{2}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^a \rho \cos \varphi \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho = 2\pi a^3 + \frac{4\pi}{a} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^a \rho^3 d\rho \\ &= 2\pi a^3 - \frac{\pi a^3}{2} = \frac{3\pi a^3}{2} \end{aligned}$$

于是

$$\iint_{\Sigma} = \iint_{\Sigma_1} - \iint_{\Sigma^- + \Sigma_1} = a \iint_D dx dy - \frac{3\pi a^3}{2} = -\frac{\pi a^3}{2}.$$

**例 6.3.22.** 计算曲面积分  $I = \iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ , 其中  $\Sigma : (x-1)^2 + (y-1)^2 + \frac{z^2}{4} = 1 (y \geq 1)$ ,

取外侧.

设  $\Sigma_1$  为平面  $y = 1$  与  $\Sigma$  的交线所围成的平面区域, 取左侧, 记  $D = \left\{ (x, y) \mid (x-1)^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1 \right\}$ ,  $\Omega$  为由曲面  $\Sigma$  与平面  $y = 1$  所围立体, 由 Gauss 公式

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma + \Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = 2 \iiint_{\Omega} (x+y+z) dV + \iint_D dz dx = 2 \int_0^2 x dx \iint_{D_x} dy dz + 2 \int_1^2 y dy \iint_{D_y} dz dx + 2\pi \\ &= 2 \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot \sqrt{2x-x^2} \cdot \sqrt{2x-x^2} dx + 2 \int_1^2 y \cdot \pi \cdot \sqrt{2y-y^2} \cdot \sqrt{2y-y^2} dy + 2\pi \\ &= 2\pi \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx + 4\pi \int_1^2 (2y^2 - y^3) dy + 2\pi = \frac{8\pi}{3} + \frac{11\pi}{3} + 2\pi = \frac{25\pi}{3}. \end{aligned}$$

**例 6.3.23.** 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma^+} (x+y-z) dy dz + [2y + \sin(z+x)] dz dx + (3z + e^{x+y}) dx dy$$

其中  $\Sigma^+$  为曲面  $|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1$  的外表面.

由 Gauss 公式得  $I = \iiint_{\Omega} (1+2+3) dV$ , 其中  $\Omega$  为  $|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| \leq 1$ , 作旋转变换  $\begin{cases} u = x-y+z \\ v = y-z+x \\ w = z-x+y \end{cases}$ , 此时  $\Sigma$  变成  $|u| + |v| + |w| = 1$ , 并且有

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{4}$$

故<sup>1</sup>  $I = \frac{3}{2} \iiint_{\Omega'} dV = \frac{3}{2} \times 8 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = 2$ .

**例 6.3.24.** 计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} (x^2 + y) dy dz + (y^2 + z) dy dz + (z^2 + x) dx dy$ , 其中  $\Sigma$  为下半椭球面

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \leq 0$$

的上侧.

<sup>1</sup>因为有 8 个卦限, 每个卦限中均为正四面体, 故体积为  $8 \times \frac{1}{6}$ .

补一平面  $S : \frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} \leq 1, z=0$  方向取下侧, 由 Gauss 公式, 得

$$\iint_{\Sigma} + \iint_S = \iint_{\Sigma+S} - \iint_{(\Sigma+S)^-} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = -2 \iiint_{\Omega} (x+y+z) dV$$

其中  $P = x^2 + y, Q = y^2 + z, R = z^2 + x, \Omega = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$ , 并且注意到

$$\iiint_{\Omega} x dV = \bar{x} \cdot V = 1 \cdot \frac{4}{3} \pi abc = \frac{4}{3} \pi abc, \quad \iiint_{\Omega} y dV = \bar{y} \cdot V = 2 \cdot \frac{4}{3} \pi abc = \frac{8}{3} \pi abc$$

用截面法求  $\iiint_{\Omega} z dV$ ,

$$\iiint_{\Omega} z dV = \int_{-c}^0 z dz \iint_{\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2}} dx dy = \pi ab \int_{-c}^0 \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right) z dz = -\frac{\pi abc^2}{4}$$

又

$$\iint_S (x^2 + y) dy dz + (y^2 + z) dy dz + (z^2 + x) dx dy = \iint_S (z^2 + x) dx dy = - \iint_D (z^2 + x) d\sigma = - \iint_D x d\sigma = -\bar{x} \cdot A = -\pi ab$$

所以

$$\iint_{\Sigma} = - \iint_{(\Sigma+S)^-} - \iint_S = -2 \left( \frac{4}{3} \pi abc + \frac{8}{3} \pi abc - \frac{\pi abc^2}{4} \right) + \pi ab = \pi ab \left( \frac{c^2}{2} - 8c + 1 \right).$$

**例 6.3.25.** 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma^+} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$$

其中  $\Sigma^+ : 1 - \frac{z}{7} = \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} (z \geq 0)$  的上侧.

用  $\Sigma_1^+$  表示以原点为中心,  $\varepsilon$  为半径的上半球面,  $\Sigma_1^-$  则表示内侧,  $\Sigma_2^-$  表示  $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} \leq 1$  的下表面,  $\sigma^-$  表示  $x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2$  的下表面, 由 Gauss 公式得

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma^+} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = \left( \iint_{\Sigma^+ + \Sigma_1^- + \Sigma_2^-} - \iint_{\Sigma_1^-} - \iint_{\Sigma_2^-} \right) \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \\ &= \iiint_{\Omega} 0 dV + \iint_{\Sigma_1^+} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} - \iint_{\Sigma_2^-} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^3} \iint_{\Sigma_1^+} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \frac{1}{\varepsilon^3} \left( \iint_{\Sigma_1^+ + \sigma^-} - \iint_{\sigma^-} \right) x dy dz + y dz dx + z dx dy \\ &= \frac{3}{\varepsilon^3} \iiint_{\substack{x^2 + y^2 + z^2 \leq \varepsilon^2 \\ z \geq 0}} dV = \frac{3}{\varepsilon^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3 = 2\pi. \end{aligned}$$

**例 6.3.26.** 求  $I = \iint_{\Sigma} \frac{ax dy dz + 2(x+a)y dz dx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}}$ , 且  $\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq 0, a > 0 \right\}$ ,

$\Sigma$  为  $\Omega$  的边界曲面外侧.

$I = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \iint_{\Sigma} ax dy dz + 2(x+a)y dz dx$ , 记  $\Sigma_1 : z = 0 (x^2 + y^2 \leq a^2)$ , 取上侧。

$$\iint_{\Sigma_1 + \Sigma} ax dy dz + 2(x+a)y dz dx = \iiint_{\Omega} (3a + 2x) dx dy dz$$

$$\begin{aligned}
&= 3a \iiint_{\Omega} dv + 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^a r \cos \theta \sin \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr \\
&= 3a \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \frac{1}{2} + 0 = 2\pi a^4
\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} &= \iint_{\Sigma_1 + \Sigma} - \iint_{\Sigma_1} = 2\pi a^4 - \iint_{\Sigma_1} ax dy dz + 2(x+a)y dz dx = 2\pi a^4 - 2 \iint_{\Sigma_1} (x+a)y dz dx \\
&= 2\pi a^4 - 2 \iint_{D_{xz}} (x+a) \sqrt{a^2 - x^2} dz dx = 2\pi a^4
\end{aligned}$$

$$\text{所以 } I = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \cdot \iint_{\Sigma} ax dy dz + 2(x+a)y dz dx = \frac{2\pi a^4}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

**例 6.3.27.** 已知点  $A(1, 0, 0)$  与点  $B(1, 1, 1)$ ,  $\Sigma$  是由直线  $\overline{AB}$  绕  $z$  轴旋转一周而成的旋转曲面介于平面  $z = 0$  与  $z = 1$  之间部分的外侧, 函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内具有连续导数, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} [xf(xy) - 2x] dy dz + [y^2 - yf(xy)] dz dx + (z+1)^2 dx dy.$$

易得旋转曲面方程为  $x^2 + y^2 = 1 + z^2$  ( $0 \leq z \leq 1$ ), 添加以下辅助面:

$$\Sigma_0 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0, \text{ 方向向下}$$

$$\Sigma_1 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1, \text{ 方向向上}$$

并且令  $P = xf(xy) - 2x$ ,  $Q = y^2 - yf(xy)$ ,  $R = (z+1)^2$ , 那么

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2y + 2z$$

由 Gauss 公式得,

$$\begin{aligned}
I &= \left( \iint_{\Sigma + \Sigma_0 + \Sigma_1} - \iint_{\Sigma_0} - \iint_{\Sigma_1} \right) [(xf(xy) - 2x) dy dz + (y^2 - yf(xy)) dz dx + (z+1)^2 dx dy] \\
&= \iiint_{\Omega} (2y + 2z) dV - (-\pi) - (8\pi) = 2 \iiint_{\Omega} zdV - 7\pi = 2 \int_0^1 zdz \iint_{x^2 + y^2 \leq 1 + z^2} d\sigma - 7\pi = \frac{3}{2}\pi - 7\pi = -\frac{11\pi}{2}.
\end{aligned}$$

**例 6.3.28.** 求  $I = \iint_{\Sigma} \frac{dS}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$ , 其中曲面  $\Sigma$  是方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c > 0)$$

确定的椭球面.

记  $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ , 取  $\vec{n}$  为曲面  $\Sigma$  指向外侧的法向量, 则

$$\vec{n} = (F'_x, F'_y, F'_z) = \left( \frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{a^2}, \frac{2z}{a^2} \right)$$

对应的单位向量, 即方向余弦构成的向量为

$$\begin{aligned}\vec{n}^\circ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{a^4} + \frac{4z^2}{a^4}}} \left( \frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{a^2}, \frac{2z}{a^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{a^4} + \frac{z^2}{a^4}}} \left( \frac{x}{a^2}, \frac{y}{a^2}, \frac{z}{a^2} \right) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}I &= \iint_{\Sigma} \frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} dS = \iint_{\Sigma} \frac{\left( \frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right)}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} \cdot \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dS \\ &= \iint_{\Sigma} \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dS = \iint_{\Sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

补  $\Sigma_\varepsilon : x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2$  ( $\varepsilon > 0$ ), 取内侧,  $\Omega_\varepsilon$  是  $\Sigma_\varepsilon$  所围成立体区域, 因此

$$\begin{aligned}I &= \left( \iint_{\Sigma + \Sigma_\varepsilon} - \iint_{\Sigma_\varepsilon} \right) \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = - \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= - \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Sigma_\varepsilon} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \frac{3}{\varepsilon^3} \iiint_{\Omega_\varepsilon} dV = \frac{3}{\varepsilon^3} \cdot \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3 = 4\pi.\end{aligned}$$

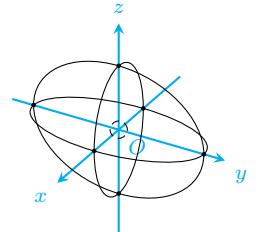


图 6.3.2

**例 6.3.29.** (第十一届数学竞赛决赛) 设  $\Omega$  是由光滑简单封闭曲面  $\Sigma$  围成的有界闭区域, 函数  $f(x, y, z)$  在  $\Omega$  上具有连续二阶导数, 且  $f(x, y, z)|_{(x,y,z) \in \Sigma} = 0$ , 记  $\nabla f$  为  $f(x, y, z)$  的梯度, 并令

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

证明, 对任意常数  $C > 0$ , 恒有

$$C \iiint_{\Omega} f^2 dx dy dz + \frac{1}{C} \iiint_{\Omega} (\Delta f)^2 dx dy dz \geq 2 \iiint_{\Omega} |\nabla f|^2 dx dy dz$$

证 由 Gauss 公式, 得

$$\iint_{\Sigma} f \frac{\partial f}{\partial x} dy dz + f \frac{\partial f}{\partial y} dz dx + f \frac{\partial f}{\partial z} dx dy = \iiint_{\Omega} (f \Delta f + |\nabla f|^2) dx dy dz$$

因为  $f(x, y, z)|_{(x,y,z) \in \Sigma} = 0$ , 所以上式左端等于 0.

$$\iiint_{\Omega} |\nabla f|^2 dx dy dz = - \iiint_{\Omega} f \Delta f dx dy dz \leq \left( \iiint_{\Omega} f^2 dx dy dz \right)^{\frac{1}{2}} \left( \iiint_{\Omega} (\Delta f)^2 dx dy dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

故对任意的  $C$  均有,

$$C \iiint_{\Omega} f^2 dx dy dz + \frac{1}{C} \iiint_{\Omega} (\Delta f)^2 dx dy dz \geq 2 \left( \iiint_{\Omega} f^2 dx dy dz \right)^{\frac{1}{2}} \left( \iiint_{\Omega} (\Delta f)^2 dx dy dz \right)^{\frac{1}{2}} \geq 2 \iiint_{\Omega} |\nabla f|^2 dx dy dz$$

**例 6.3.30.** 设  $f(x, y, z)$  在  $\Sigma$  上的连续函数, 且满足

$$f(x, y, z) = (x + y + z)^2 + \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dy dz + x^2 dx dy$$

其中  $\Sigma : x^2 + y^2 = 5z$  ( $0 \leq z \leq 1$ ), 方向为下侧, 求  $f(x, y, z)$  的表达式.

令  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dy dz = A$ , 并且

$$\iint_{\Sigma} x^2 dx dy = - \iint_{x^2+y^2 \leq 5} x^2 dx dy = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{5}} \rho^2 \cos^2 \theta \rho d\rho = - \frac{25\pi}{4}$$

于是,  $f(x, y, z) = (x + y + z)^2 + A - \frac{25\pi}{4}$ , 两边积分得

$$A = \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dy dz = \iint_{\Sigma} \left[ (x + y + z)^2 + A - \frac{25\pi}{4} \right] dy dz$$

添加一平面  $\Sigma_1 : z = 1, x^2 + y^2 \leq 5$ , 方向取上侧, 则由 Gauss 公式

$$\iint_{\Sigma + \Sigma_1} \left[ (x + y + z)^2 + A - \frac{25\pi}{4} \right] dy dz = \iiint_{\Omega} 2(x + y + z) dV = 2 \iiint_{\Omega} z dV = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{5}} r dr \int_{\frac{r^2}{5}}^1 z dz = \frac{10\pi}{3}$$

且  $\iint_{\Sigma_1} \left[ (x + y + z)^2 + A - \frac{25\pi}{4} \right] dy dz = 0$ , 所以  $A = \frac{10\pi}{3}$ , 于是  $f(x, y, z) = (x + y + z)^2 - \frac{35}{12}\pi$ .

**例 6.3.31.** 证明公式:

$$\frac{d}{dt} \left[ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right] = \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z, t) dS + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz \quad (t > 0)$$

证 作变量代换  $x = tu, y = tv, z = tw$ , 则

$$\begin{aligned} I &= \frac{d}{dt} \left[ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right] = \frac{d}{dt} \left[ \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1^2} t^3 f(tu, tv, tw, t) du dv dw \right] \\ &= \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} \left[ t^3 \left( \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w + \frac{\partial f}{\partial t} \right) + 3t^2 f \right] du dv dw \\ &= \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} t^3 \left\{ \frac{1}{t} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (fx) + \frac{\partial}{\partial y} (fy) + \frac{\partial}{\partial z} (fz) \right] \right\} du dv dw + \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} t^3 \frac{\partial f}{\partial t} du dv dw \\ &= \frac{1}{t} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (fx) + \frac{\partial}{\partial y} (fy) + \frac{\partial}{\partial z} (fz) \right] dx dy dz + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz \\ &= \frac{1}{t} \iint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} (fx \cos \alpha + fy \cos \beta + fz \cos \gamma) dS + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz \quad (t > 0) \end{aligned}$$

其中  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$  上向外法线的方向余弦, 显然

$$\cos \alpha = \frac{x}{t}, \cos \beta = \frac{y}{t}, \cos \gamma = \frac{z}{t}$$

于是

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} (fx \cos \alpha + fy \cos \beta + fz \cos \gamma) dS = \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f \cdot \frac{x^2+y^2+z^2}{t} dS = t \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f dS$$

即得证.

### Stokes 公式

**定理 6.3.7 (Stokes 积分法).** 设  $\Sigma$  是逐段光滑的单闭曲线  $\Gamma$  所包围的非封闭光滑双侧曲面, 取某定侧  $\Sigma^+$ , 按右手规则确定  $\Gamma$  的正向  $\Gamma^+$ ,  $\Omega$  是空间的立体区域, 使得  $\Sigma \subset \Omega$ , 函数  $P, Q, R$  在  $\Omega$  上连续可微, 则有 Stokes 公式:

$$\oint_{\Gamma^+} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{\Sigma^+} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\
&= \iint_{\Sigma^+} \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma^+} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS
\end{aligned}$$

**定理 6.3.8.** 空间曲线积分与路径无关的充要条件: 设  $G$  是空间的面单连通区域, 函数  $P, Q, R$  在  $G$  上连续可微, 则下列四条陈述相互等价:

$$(1) \forall (x, y, z) \in \Omega, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y};$$

$$(2) \forall A, B \in \Omega, \int_A^B P dx + Q dy + R dz \text{ 与路线无关;}$$

$$(3) \forall \Gamma \subset \Omega, \Gamma \text{ 为封闭曲线, } \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = 0;$$

$$(4) \text{ 存在可微函数 } u(x, y, z), \text{ 使得 } du = P dx + Q dy + R dz, \text{ 且}$$

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz + C$$

或

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz + C$$

这里  $(x_0, y_0, z_0), (x, y, z) \in G$ .

**例 6.3.32.** 计算  $I = \int_{\Gamma} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$ , 其中  $\Gamma$  是柱面  $x^2 + y^2 = R^2$  和平面  $x+z=R$  相交的椭圆, 且从  $x$  轴正向看去,  $\Gamma$  的方向是逆时针的.

设  $\Sigma$  为平面  $x+y=R$  被柱面截下部分的上侧, 则由 Stokes 公式, 有

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} -2dy dz - 2dz dx - 2dx dy \\
&= -2 \iint_{D_{yz}} dy dz - 2 \iint_{D_{zx}} dz dx - 2 \iint_{D_{xy}} dx dy = -2\pi R^2 - 0 - 2\pi R^2 = -4\pi R^4.
\end{aligned}$$

**例 6.3.33 (第九届数学竞赛预赛).** 设曲线  $\Gamma$  为在  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x+z=1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  上从  $A(1, 0, 0)$  到  $B(0, 0, 1)$  的一段, 求  $I = \oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz$ .

记  $\Gamma_1$  为  $B$  到  $A$  的直线段, 则

$$x = t, y = 0, z = 1-t, 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{\Gamma_1} y dx + z dy + x dz = \int_0^1 t d(1-t) = -\frac{1}{2}$$

$$\oint_{\Gamma+\Gamma_1} y dx + z dy + x dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} -dx dy - dz dx - dy dz$$

$$= - \iint_{D_{xy}} dx dy - \iint_{D_{zx}} dz dx - \iint_{D_{yz}} dy dz = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$I = \oint_{\Gamma + \Gamma_1} - \int_{\Gamma_1} = \oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

**例 6.3.34 (2001 数一).** 计算

$$I = \oint_L (y^2 - z^2) dx + (2z^2 - x^2) dy + (3x^2 - y^2) dz$$

其中  $L$  是平面  $x + y + z = 2$  与柱面  $|x| + |y| = 1$  的交线, 从  $z$  轴正方向看去,  $L$  为逆时针方向.

设  $\Sigma$  为平面  $x + y + z = 2$  的上侧被  $L$  所围成的部分,  $\Sigma$  在  $xOy$  面的投影区域为

$$D_{xy} = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$$

$\Sigma$  的单位向量为  $\frac{1}{\sqrt{3}}\{1, 1, 1\}$ , 于是由 Stokes 公式得

$$I = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & 2z^2 - x^2 & 3x^2 - y^2 \end{vmatrix} dS = -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (4x + 2y + 3z) dS$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{D_{xy}} (x - y + 6) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = -2 \iint_{D_{xy}} (x - y + 6) dx dy$$

由二重积分的对称性知  $\iint_{D_{xy}} (x - y) dx dy = 0$ , 所以  $I = -12 \iint_{D_{xy}} dx dy = -24$ .

**例 6.3.35.** 求曲线积分

$$I = \oint_L (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$$

其中  $L$  是两球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$$

的交线, 积分方向从  $z$  轴正向看为逆时针方向.

由  $\begin{cases} x^2 \\ (x - 1)^2 \end{cases} + \begin{cases} y^2 \\ (y - 1)^2 \end{cases} + \begin{cases} z^2 \\ (z - 1)^2 \end{cases} = 1 \\ = 4 \end{cases} \Rightarrow x + y + z = 0$ , 平面  $x + y + z = 0$  上, 曲线  $L$  所包围的圆域为  $\Sigma$ , 即

$$\Sigma = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

于是, 由 Stokes 公式得

$$I = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y - z & z - x & x - y \end{vmatrix} dS = -2 \iint_{\Sigma} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) dS$$

$$= -\frac{6}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} dS = -\frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \pi \cdot 1^2 = -2\sqrt{3}\pi.$$

**例 6.3.36.** 设  $L$  为空间某封闭光滑曲线,  $P, Q, R$  为空间中具有一阶连续偏导数的函数, 证明:

$$\left| \oint_{L^+} P dx + Q dy + R dz \right| \leq \max_{(x, y, z) \in S} \sqrt{\left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2} \cdot S$$

其中  $S$  表示  $L$  上展开的 (以  $L$  为边界的) 某曲面, 同时也用它表示曲面的面积.

证 由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned} \text{左端} & \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_S [(R'_y - Q'_z) \cos \alpha + (P'_z - R'_x) \cos \beta + (Q'_x - P'_y) \cos \gamma] dS \\ & \leq \iint_S \sqrt{[(R'_y - Q'_z)^2 + (P'_z - R'_x)^2 + (Q'_x - P'_y)^2]} \cdot (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) dS \\ & \leq \max_{(x,y,z) \in S} \sqrt{(R'_y - Q'_z)^2 + (P'_z - R'_x)^2 + (Q'_x - P'_y)^2} \cdot \iint_S dS = \text{右端} \end{aligned}$$

例 6.3.37. 设  $f(x)$  一阶连续可导,

$$R(x, y, z) = \int_0^{x^2+y^2} f(z-t) dt$$

曲面  $\Sigma$  为抛物面  $z = x^2 + y^2$  被平面  $y + z = 1$  所截的下面部分的内侧,  $L$  为  $\Sigma$  的正向边界, 求

$$I = \oint_L 2xz f(z - x^2 - y^2) dx + [x^3 + 2yz f(z - x^2 - y^2)] dy + R(x, y, z) dz.$$

证 记  $P(x, y, z) = 2xz f(z - x^2 - y^2)$ ,  $Q(x, y, z) = x^3 + 2yz f(z - x^2 - y^2)$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= -4xyzf'(z - x^2 - y^2), \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 2x(f(z - x^2 - y^2) + zf'(z - x^2 - y^2)) \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 3x^2 - 4xyzf'(z - x^2 - y^2), \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 2y(f(z - x^2 - y^2) + zf'(z - x^2 - y^2)) \end{aligned}$$

令  $u = z - t$ , 则  $dt = -du$ , 于是  $R(x, y, z) = \int_{z-x^2-y^2}^z f(u) du$ ,

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{z-x^2-y^2}^z f(u) du \right) = 2xf(z - x^2 - y^2), \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 2yf(z - x^2 - y^2)$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} &= -2yzf'(z - x^2 - y^2) = -2yzf'(0) \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} &= 2xzf'(z - x^2 - y^2) = 2xzf'(0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= 3x^2 \end{aligned}$$

则由 Stokes 公式知,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_{\Sigma} -2yzf'(0) dy dz + 2xzf'(0) dz dx + 3x^2 dx dy \end{aligned}$$

补面  $\Sigma_1 : \begin{cases} y+z=1 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$ , 方向取下侧, 由 Gauss 公式可知,

$$\begin{aligned} I &= \left( \iint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} \right) (-2yzf'(0) dy dz + 2xzf'(0) dz dx + 3x^2 dx dy) \\ &= - \iint_{\Sigma_1} (-2yzf'(0) dy dz + 2xzf'(0) dz dx + 3x^2 dx dy) = 3 \iint_{x^2+(y+\frac{1}{2})^2 \leq \frac{5}{4}} x^2 dx dy \end{aligned}$$

令  $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{2} \rho \cos \theta \\ y = \frac{\sqrt{5}}{2} \rho \sin \theta - \frac{1}{2} \end{cases}$ , 于是  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \frac{5}{4} \rho$ , 所以  $I = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{5}{4} \rho^2 \cos^2 \theta \frac{5}{4} \rho d\rho = \frac{75\pi}{64}$ .

## 6.4 多元积分学的应用与场论概述

场论是物理学中的一个重要分支, 主要研究空间中的场的性质和相互作用. 场可以是标量场(只有大小没有方向)或者矢量场(有大小和方向), 描述了空间中各个点的物理量. 在场论中, 多元积分学的概念和方法经常被用来描述和计算场的性质和相互作用.

### 6.4.1 多元积分学的应用

下表是各积分的应用公式及物理意义.

表 6.1: 各积分的应用公式及物理意义

| 应用   | 积分形式  |  |   |   |
|------|---|--|---|---|
|      | 二重积分  | 三重积分   | 曲线积分  | 曲面积分  |
| 几何量  | 平面面积<br>$S = \iint_D dxdy$  | 立体体积<br>$V = \iiint_{\Omega} dxdydz$   | 弧长<br>$L = \int_L ds$   | 曲面面积<br>$S = \iint_{\Sigma} dS$   |
| 质量   | $m = \iint_D \rho(x, y)dxdy$  | $m = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)dxdydz$  | $m = \int_L \rho(x, y, z)ds$  | $m = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z)dS$  |
| 质心   | $\bar{x} = \frac{\iint_D x\rho(x, y)dxdy}{m}$<br>$\bar{y} = \frac{\iint_D y\rho(x, y)dxdy}{m}$  | $\bar{x} = \frac{\iint_{\Omega} x\rho(x, y, z)dxdydz}{m}$<br>$\bar{y} = \frac{\iint_{\Omega} y\rho(x, y, z)dxdydz}{m}$<br>$\bar{z} = \frac{\iint_{\Omega} z\rho(x, y, z)dxdydz}{m}$                | $\bar{x} = \frac{\int_L x\rho(x, y, z)ds}{m}$<br>$\bar{y} = \frac{\int_L y\rho(x, y, z)ds}{m}$<br>$\bar{z} = \frac{\int_L z\rho(x, y, z)ds}{m}$             | $\bar{x} = \frac{\iint_{\Sigma} x\rho(x, y, z)dS}{m}$<br>$\bar{y} = \frac{\iint_{\Sigma} y\rho(x, y, z)dS}{m}$<br>$\bar{z} = \frac{\iint_{\Sigma} z\rho(x, y, z)dS}{m}$             |
| 转动惯量 | $I_x = \iint_D y^2 \cdot \rho dxdy$<br>$I_y = \iint_D x^2 \cdot \rho dxdy$<br>$I_0 = I_x + I_y$ | $I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \cdot \rho dxdydz$<br>$I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \cdot \rho dxdydz$<br>$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \cdot \rho dxdydz$<br>$I_0 = I_x + I_y + I_z$ | $I_x = \int_L (y^2 + z^2) \cdot \rho ds$<br>$I_y = \int_L (x^2 + z^2) \cdot \rho ds$<br>$I_z = \int_L (x^2 + y^2) \cdot \rho ds$<br>$I_0 = I_x + I_y + I_z$ | $I_x = \iint_{\Sigma} (y^2 + z^2) \cdot \rho dS$<br>$I_y = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2) \cdot \rho dS$<br>$I_z = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) \cdot \rho dS$<br>$I_0 = I_x + I_y + I_z$ |
| 通量   |   |  |   | $\Phi = \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$<br>向量场: $\mathbf{F} = Pi + Qj + Rk$  |
| 变力做功 |   |  | $W = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$  | 力: $\mathbf{F} = Pi + Qj + Rk$  |

**例 6.4.1.** 设  $C$  是曲线  $x^2 + y^2 = 2(x + y)$ , 求  $\oint_C (2x^2 + 3y^2)ds$ .

由轮换对称性, 以及形心公式得:  $\oint_C (2x^2 + 3y^2)ds = 5 \oint_C x^2 ds = 5 \oint_C y^2 ds = \frac{5}{2} \oint_C (x^2 + y^2)ds = 5 \oint_C (x + y)ds = 5(\bar{x} + \bar{y}) \oint_C ds = 5(\bar{x} + \bar{y}) \cdot 2\pi r = 20\sqrt{2}\pi$ .

**例 6.4.2.** 设  $V$  是曲面  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  与曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$  所围成的立体,

$$(1) \text{ 计算 } I = \iiint_V (\sqrt{2}x + z)^2 dV;$$

(2) 若流速场  $\mathbf{v} = (P, Q, R)$ , 其中  $P = \frac{x}{r_0^{\frac{3}{2}}}$ ,  $Q = \frac{y}{r_0^{\frac{3}{2}}}$ ,  $R = \frac{z}{r_0^{\frac{3}{2}}}$ ,  $r_0 = x^2 + y^2 + z^2$ , 求  $\mathbf{v}$  由  $V$  内部流向外部的流量.

(1) 将  $(\sqrt{2}x + z)^2$  展开, 并且注意到  $2\sqrt{2}xz$  关于  $x$  为奇函数, 且被积空间关于  $xOy$  面对称, 又有  $x$  与  $y$  轮换对此, 则

$$I = \iiint_V (2x^2 + z^2 + 2\sqrt{2}xz) dV = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV = \iiint_{V_1} (x^2 + y^2 + z^2) dV + \iiint_{V_2} (x^2 + y^2 + z^2) dV$$

其中  $V_1$  为曲面  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  与  $xOy$  面所围成的空间,  $V_2$  为曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$  与  $xOy$  面所围成的空间, 则

$$I_1 = \iiint_{V_1} (x^2 + y^2 + z^2) dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^2 \cdot r^2 dr = \frac{2\pi}{5}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \iiint_{V_2} (x^2 + y^2 + z^2) dV = \int_{-1}^0 dz \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy = \int_{-1}^0 \left[ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{z+1} (r^2 + z^2) r dr \right] dz \\ &= 2\pi \int_{-1}^0 \left[ \frac{1}{4}(z+1)^4 + \frac{1}{2}z^2(z+1)^2 \right] dz = \frac{2\pi}{15} \end{aligned}$$

$$\text{故 } I = I_1 + I_2 = \frac{8\pi}{15}.$$

(2) 流量  $\Phi = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$ ,  $S$  取外侧, 所以  $\Phi = \iint_S \frac{x dy dz + y dx dz + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ , 记  $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2$

其中方向向内, 则

$$\Phi = \iint_S = \iint_{S+S_1-S_1} = \iint_{S+S_1} + \iint_{S_1^-}$$

并且

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{x^2 + z^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

因此  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$ , 则有 Gauss 公式  $\iint_{S+S_1} \frac{x dy dz + y dx dz + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$ , 且

$$\Phi' = \iint_{S_1^-} \frac{x dy dz + y dx dz + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\varepsilon^3} \iint_{S_1^-} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \frac{3}{\varepsilon^3} \iiint_{\Omega_\varepsilon} dV = 4\pi$$

因此  $\Phi = 4\pi$ .

**定义 6.4.1 (环流量).** 设有向量场

$$\mathbf{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

其中函数  $P$ 、 $Q$  与  $R$  均连续,  $\Gamma$  是  $\mathbf{A}$  的定义域内的一条分段光滑的有向闭曲线,  $\tau$  是  $\Gamma$  在点  $(x, y, z)$  处的单位切向量, 则积分

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \tau ds$$

称为向量场  $\mathbf{A}$  沿有向曲线  $\Gamma$  的环流量.

**例 6.4.3.** 设向量场  $\mathbf{A}(x, y, z) = (z^2, x^2, y^2)$ , 以点  $M_0(1, 1, 0)$  为圆心,  $\varepsilon$  为半径, 在  $xOy$  面上作一圆盘  $\Sigma_\varepsilon$ , 面积为  $\sigma_\varepsilon$ ,  $\Gamma$  为该圆盘的正向边界,  $\tau$  为  $\Gamma$  上点  $(x, y, z)$  处的单位切向量, 求  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \tau ds$ .

由题意知  $\sigma_\varepsilon = \pi\varepsilon^2$ , 并且由 Stokes 公式得

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \tau ds = \oint_{\Gamma} z^2 dx + x^2 dy + y^2 dz = \iint_{\Sigma_\varepsilon} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma_\varepsilon} 2ydydz + 2xdxdy + 2zdzdx$$

$$= \iint_{(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq \varepsilon^2} 2xdxdy = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\varepsilon (r \cos \theta + 1) r dr = 2\pi\varepsilon^2$$

于是  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \tau ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{2\pi\varepsilon^2}{\pi\varepsilon^2} = 2$ .

## 6.4.2 梯度、散度和旋度

**定义 6.4.2** (Hamilton 算符).  $\nabla := \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) := i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$  为一向量算符.

利用 Hamilton 算符, 可以写出梯度、散度和旋度的定义.

**定义 6.4.3.** 设  $u = u(x, y, z)$  为光滑的数量场 (“光滑”指  $u(x, y, z)$  有连续偏导数),

$$\mathbf{A} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

为光滑的向量场 (“光滑”指  $P, Q, R$  有连续偏导数), 则由  $u$  和  $\mathbf{A}$  产生的梯度、散度和旋度为:

$$\begin{aligned} \text{grad } u := \nabla u &:= \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) := \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} \\ \text{div } \mathbf{A} := \nabla \cdot \mathbf{A} &:= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \\ \text{rot } \mathbf{A} := \nabla \times \mathbf{A} &:= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R & Q \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

**例 6.4.4.** 设  $u = z(x^2 + 3)$ , 求向量场  $\mathbf{A} = \nabla u$  通过球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  上半部分的流量  $Q$ , 指向外.

因为  $\mathbf{A} = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} = 2xz\mathbf{i} + (x^2 + 3)\mathbf{k}$ , 所以

$$Q = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}^\circ dS = \iint_{\Sigma} 2xzdydz + (x^2 + 3)dxdy$$

取  $\Sigma_1 : x^2 + y^2 \leq 1$  方向竖直向下,  $D : \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ , 则

$$Q = \iint_{\Sigma + \Sigma_1 - \Sigma_1} = \iint_{\Sigma + \Sigma_1} + \iint_{\Sigma_1^-}$$

其中, 由 Gauss 公式  $\iint_{\Sigma + \Sigma_1} 2xzdydz + (x^2 + 3)dxdy = \iiint_{\Omega} 2zdV = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2}$ , 且

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1^-} 2xzdydz + (x^2 + 3)dxdy &= \iint_D (x^2 + 3)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^2 \cos^2 \theta + 3)r dr \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{4} + 3\pi \end{aligned}$$

因此  $Q = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 3\pi = \frac{15\pi}{4}$ .

**定理 6.4.1 (方向导数与 Hamilton 算符).** 设  $u = u(x, y, z)$ , 则函数  $u(x, y, z)$  的方向导数计算公式为

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

其中  $\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ .

**例 6.4.5 (2005 数一).** 设函数  $u(x, y, z) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{18}$ , 单位向量  $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1, 1, 1\}$ , 求  $\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{(1,2,3)}$ .

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{(1,2,3)} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right|_{(1,2,3)} = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

### 6.4.3 梯度、散度、旋度的基本公式及其应用

以下  $u, v, f$  都是  $(x, y, z)$  的函数, 有连续偏导数,  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  是向量函数,  $c$  为常数,

$$\mathbf{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0), r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

表 6.2: 梯度、散度、旋度的基本公式

关于梯度的公式

|  |  |
|--|--|
| (1) $\nabla(cu) = c\nabla u$             | (2) $\nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v$                            |
| (3) $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$ | (4) $\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}$ |
| (5) $\nabla(f(u)) = f'(u)\nabla u$       | (6) $\nabla(f(u, v)) = f'_u \nabla u + f'_v \nabla v$                    |
| (7) $\nabla(r) = \frac{\mathbf{r}}{r}$   | (8) $\nabla(f(r)) = f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$                           |

---

关于散度的公式

|  |   |
|--|---|
| (9) $\nabla \cdot (c\mathbf{A}) = c\nabla \cdot \mathbf{A}$                              | (10) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} \pm \nabla \cdot \mathbf{B}$ |
| (11) $\nabla \cdot (u\mathbf{A}) = u\nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla u \cdot \mathbf{A}$ | (12) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$  |

---

关于旋度的公式

|   |  |
|---|--|
| (13) $\nabla \times (c\mathbf{A}) = c\nabla \times \mathbf{A}$                              | (14) $\nabla \times (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} \pm \nabla \times \mathbf{B}$ |
| (15) $\nabla \times (u\mathbf{A}) = u\nabla \times \mathbf{A} + \nabla u \times \mathbf{A}$ | (16) $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$   |

---

混合运算

|  |   |
|--|---|
| (17) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ |   |
| (18) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$   |   |
| (19) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$            |   |
| (20) $\nabla \cdot (\nabla u) = \Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$   |   |
| (21) $\nabla \times (\nabla u) = \mathbf{0}$   | (22) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$  |
| (23) $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \Delta \mathbf{A}$  | (24) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$ |

---

注意

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} = \left( B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{A}, (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} = \left( A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{B}$$

**定义 6.4.4 (Laplace 算符).**  $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , 并且有

$$\nabla^2 := \nabla \cdot \nabla := \Delta$$

$f$  为函数, 则  $\nabla^2 f$  为标量; 若  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$  是向量, 则  $\nabla^2 \mathbf{A} = (\nabla^2 A_x, \nabla^2 A_y, \nabla^2 A_z)$  为向量.

**例 6.4.6 (2001 数一).** 设  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 求  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)|_{(1,-2,2)}$ .

$$\text{原式} = \nabla \cdot \nabla r|_{(1,-2,2)} = \nabla^2 r|_{(1,-2,2)} = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}|_{(1,-2,2)} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}|_{(1,-2,2)} = \frac{2}{3}.$$

**例 6.4.7 (2012 数一).** 计算  $\operatorname{grad}\left(xy + \frac{z}{y}\right)|_{(2,1,1)}$ .

$$\nabla\left(xy + \frac{z}{y}\right)|_{(2,1,1)} = y\nabla x + x\nabla y + \frac{y\nabla z - z\nabla y}{y^2}|_{(2,1,1)} = (y, x, 0) + \frac{(0, -z, y)}{y^2}|_{(2,1,1)} = (1, 1, 1).$$

**例 6.4.8.** 求向量场  $\mathbf{A} = 2x^3yz\mathbf{i} - x^2y^2z\mathbf{j} - x^2yz^2\mathbf{k}$  的散度  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  在点  $M(1, 1, 2)$  处沿方向  $\mathbf{l} = (2, 2, -1)$  的方向导数  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{l}}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \Big|_M$ .

设  $P = 2x^3yz$ ,  $Q = -x^2y^2z$ ,  $R = -x^2yz^2$ , 那么

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 6x^2yz - 2x^2yz - 2x^2yz = 2x^2yz$$

并且

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{l}}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \Big|_M = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \Big|_M \cdot \mathbf{l}^\circ = \nabla(2x^2yz) \Big|_M \cdot \mathbf{l}^\circ = (4xyz, 2x^2z, 2x^2y) \Big|_M \cdot \frac{1}{3}(2, 2, -1) = \frac{22}{3}.$$

**例 6.4.9.** 设  $\nabla \cdot [\nabla f(r)] = 0$ , 求  $f(r)$ .

$$\text{原式} = \nabla \cdot \left[ f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \right] = \frac{f'(r)}{r} \nabla \cdot \mathbf{r} + \nabla \frac{f'(r)}{r} \cdot \mathbf{r} = 3 \frac{f'(r)}{r} + \frac{r \nabla f'(r) - f'(r) \nabla r}{r^2} \mathbf{r} = 3 \frac{f'(r)}{r} + \frac{f''(r) \cdot \mathbf{r} - f'(r) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}}{r^2} \mathbf{r} = f''(r) + 2 \frac{f'(r)}{r} = 0, \text{解微分方程, 可得 } f(r) = \frac{C_1}{r} + C_0.$$

## 第7章

### 无穷级数

“数学主要的目标是公众的利益和自然现象的解释。”

——傅立叶

无穷级数是数学中一个重要的概念，它是由无限个项相加而成的数列。无穷级数的研究涉及到收敛性、发散性、求和等概念。以下是无穷级数的一些基本内容和重要概念：

1. 收敛和发散：一个无穷级数如果当项数趋于无穷时，其部分和趋于一个有限的值，我们称这个无穷级数是收敛的；如果部分和趋于无穷大或者不存在极限，我们称这个无穷级数是发散的。

2. 常见的无穷级数：常见的无穷级数包括等比级数、调和级数、幂级数等。等比级数是形如  $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$  的级数，其中  $a$  是首项， $r$  是公比；调和级数是形如  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$  的级数；

幂级数是形如  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  的级数，其中  $c_n$  是系数， $x$  是变量。

3. 收敛性的判别法：判断一个无穷级数是否收敛的方法有很多，常见的包括比较判别法、比值判别法、根值判别法、积分判别法等。这些方法可以帮助我们判断无穷级数的收敛性，进而求出其和。

4. 级数的运算：对于收敛的级数，我们可以进行加法、减法、乘法等运算。此外，级数还可以进行逐项求导、逐项积分等操作，这些操作可以帮助我们研究级数的性质。

无穷级数在数学中有着广泛的应用，例如在数学分析、物理学、工程学等领域都有着重要的地位。通过学习无穷级数，我们可以更深入地理解数列和级数的性质，为解决实际问题提供了有力的数学工具。

#### 7.1 常数项级数

在处理常数项级数时，一个重要的概念是其敛散性，即是否收敛或发散。这一点对于确定级数的性质至关重要，因为它直接影响到求和过程中可能遇到的问题，如收敛域内的函数项级数的和函数。

### 7.1.1 常数项级数的敛散性及其判别法

**定义 7.1.1 (常数项级数).** 设有数列  $\{u_n\} : u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ , 将其各项依次累加所得的式子  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  称为 (常数项) 无穷级数, 简称 (常数项) 级数, 记作  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , 即  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ .

**定义 7.1.2 (常数项级数收敛).** 设给定常数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

称  $S_n = \sum_{i=1}^n u_i = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的前  $n$  项部分和, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  (有限值), 则称级数 (1) 收敛; 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  不存在, 则称级数 (1) 发散.

常数项级数的基本性质:

(1) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$  有相同的敛散性 ( $k$  是不为零的常数).

(2) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$  均收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$  亦收敛, 且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

(3) 在级数中去掉或添加有限项, 不影响级数的敛散性 (但收敛时, 级数和一般会改变).

(4) 收敛级数任意加括号后所成的级数仍收敛. 如果正项级数加括号后所成的级数收敛, 则原级数收敛.

(5) 级数收敛的必要条件: 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

**例 7.1.1.** 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$  的敛散性的下列结论中, 正确的是

A. 因  $1 + \frac{1}{n} > 1$  故级数收敛

B. 因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = 0$  故级数收敛

C. 因  $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} < \frac{1}{n}$  故级数收敛

D. 级数发散

$p$ -级数中的  $p$  表示为常数, 与  $n$  无关, 所以选项 A 错误, 事实上,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = 1$ , 其中  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$  (重要极限), 则原级数的敛散性与  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  同敛散, 又  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$  发散, 选 D.

**例 7.1.2.** 判别级数的敛散性  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+2^n) \ln \frac{n+1}{n}$ .

将所给级数的一般项作适当变形, 有

$$\begin{aligned} a_n &= \ln \left[ 2^n \left( \frac{1}{2^n} + 1 \right) \right] \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \left[ n \ln 2 + \ln \left( \frac{1}{2^n} + 1 \right) \right] \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= \ln 2 \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n + \ln \left( \frac{1}{2^n} + 1 \right) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

可见,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ln 2$ , 即  $a_n \lim_{n \rightarrow \infty} \neq 0$ , 不满足级数收敛的必要条件, 故级数发散.

### 7.1.2 正项级数的审敛法

为了迅速而又准确地判断一个级数的敛散性, 掌握以下几个已知其敛散性的级数往往是有益的.

**定义 7.1.3 (几何级数).** 若有几何级数  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$ , 那么当  $|r| < 1$  时收敛, 且其和为  $\frac{a}{1-r}$ ; 当  $|r| \geq 1$  时发散.

**定义 7.1.4 (调和级数).** 称  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  为调和级数, 并且该级数是发散的.

**定义 7.1.5 (p-级数).** 若有 p-级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ , 那么当  $p > 1$  时收敛, 当  $p \leq 1$  时发散.

**定理 7.1.1 (正项级数收敛的充要条件).** 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的充要条件是其部分和数列  $\{s_n\}$  有上界.

**定理 7.1.2 (比较审敛法).** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$  是两个正项级数, 且  $u_n \leq v_n (n = 1, 2, \dots)$ , 若  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛,

则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛; 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散 (“大收敛, 小发散”).

特别地, 条件  $u_n \leq v_n (n = 1, 2, \dots)$  可改为  $u_n \leq cv_n (n \geq k, c > 0)$ , 结论仍然成立.

**定理 7.1.3 (比较审敛法的极限形式).** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$  是两个正项级数, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ , 则有

(1) 当  $0 < l < +\infty$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  同收敛或同发散;

(2) 当  $l = 0$  且  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也收敛;

(3) 当  $l = +\infty$  且  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散时,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也发散.

**例 7.1.3 (2009 数一).** 设有两个数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  则

A. 当  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛

B. 当  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  发散

C. 当  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$  收敛

D. 当  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  发散时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$  发散

若令  $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 却有  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 故排除 A; 若取  $a_n = b_n = \frac{1}{n}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  发散, 却有  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 故排除 B; 又  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$  均为正项级数, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 b_n^2}{|b_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0$$

由正项级数比较判别法的极限形式知: 当  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$  收敛, 因此选 C.

**定理 7.1.4 (比值审敛法).** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ , 则当  $\rho < 1$  时, 级数收敛; 当  $\rho > 1$  时, 级数发散; 当  $\rho = 1$  时, 级数可能收敛, 也可能发散.

特别地, 当  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  一定发散; 当  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$  时, 级数可能收敛, 也可能发散.

**定理 7.1.5 (根值审敛法).** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$ , 则当  $\rho < 1$  时, 级数收敛; 当  $\rho > 1$  时, 级数发散; 当  $\rho = 1$  时, 级数可能收敛, 也可能发散.

**定理 7.1.6 (积分判别法).** 设  $f(x)$  为  $[1, +\infty)$  上的非负递减函数, 则正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  与反常积分  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  同时收敛或同时发散.

**例 7.1.4.** 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$  的敛散性.

法一: 利用级数收敛的必要条件, 因为  $\frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdots n}{1 \cdot 2 \cdots n} > 1 (n > 1)$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} \neq 0$ , 故由级数收敛的必要条件知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$  发散.

法二: 利用比较判别法, 因为当  $n > 2$  时, 有  $\frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdots n}{1 \cdot 2 \cdots n} > n$ , 且级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n$  发散, 所以由比较判别法知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$  发散.

法三: 利用比值判别法, 记  $u_n = \frac{n^n}{n!}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$ , 由比值判别法知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$  发散.

法四: 利用根值判别法, 由 Stirling 公式:  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n (n \rightarrow \infty)$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}} = e > 1$$

故由根值判别法知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$  发散.

**例 7.1.5.** 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{8^n - 5^n}$  的敛散性.

法一: 利用比值判别法, 记  $u_n = \frac{7^n}{8^n - 5^n}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{n+1}}{8^{n+1} - 5^{n+1}} \cdot \frac{8^n - 5^n}{7^n} = 7 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{5}{8}\right)^n}{8 - 5 \left(\frac{5}{8}\right)^n} = \frac{7}{8} < 1$$

故由比值判别法知原级数收敛.

法二: 利用根值判别法, 记  $u_n = \frac{7^n}{8^n - 5^n}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{7^n}{8^n - 5^n}} = \frac{7}{8} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1 - \left(\frac{5}{8}\right)^n}} = \frac{7}{8} < 1$$

故由根值判别法知原级数收敛.

法三: 利用比较判别法的极限形式, 记  $u_n = \frac{7^n}{8^n - 5^n}$ , 则  $u_n \sim \frac{7^n}{8^n} = \left(\frac{7}{8}\right)^n (n \rightarrow \infty)$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n$  收敛, 故由比较判别法的极限形式知原级数收敛.

**例 7.1.6.** 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$  的敛散性.

法一: 利用级数敛散的定义, 分别记  $u_n, S_n$  为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$  的通项和部分和, 则

$$u_n = \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

于是

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left[ (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) - (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \right] = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - \sqrt{2} + 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \sqrt{2} + 1 \rightarrow -\sqrt{2} + 1 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

故原级数收敛.

法二: 令  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $u_n$  为原级数的通项, 将  $f(x)$  分别在  $[n, n+1]$  和  $[n+1, n+2]$  上用 Lagrange 中值定理, 有

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{\xi_1}}, \quad \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{\xi_2}}$$

其中  $n < \xi_1 < n+1, n+1 < \xi_2 < n+2$ , 于是

$$\begin{aligned} 0 < -u_n &= (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = \frac{1}{2\sqrt{\xi_1}} - \frac{1}{2\sqrt{\xi_2}} = \frac{\sqrt{\xi_2} - \sqrt{\xi_1}}{2\sqrt{\xi_1}\sqrt{\xi_2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi_2 - \xi_1}{\sqrt{\xi_1}\sqrt{\xi_2}(\sqrt{\xi_1} + \sqrt{\xi_2})} < \frac{2}{2\xi_1 \cdot 2\sqrt{\xi_1}} = \frac{1}{2\xi_1^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

又  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  收敛, 故由比较判别法知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-u_n)$  收敛, 从而原级数  $\sum_{k=1}^n u_n$  收敛.

法三: 利用比较判别法的极限形式, 记  $u_n$  为原级数的通项, 则

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\ &= -\frac{2}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})} \sim -\frac{1}{4(\sqrt{n})^3} \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

所以  $0 < -u_n \sim \frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}$ , 又  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  收敛, 故由比较判别法的极限形式知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-u_n)$  收敛, 从而原级数  $\sum_{k=1}^n u_n$  收敛.

**例 7.1.7.** 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{2}}{2^n}$  的敛散性.

法一: 因为  $0 \leq \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{2}}{2^n} < \frac{n}{2^n}$ , 所以转而考虑级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  的收敛性, 记  $u_n = \frac{n}{2^n}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} < 1$$

于是由比值判别法知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  收敛, 从而由比较判别法知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \cos^2 \frac{n\pi}{2}}{2^n}$  收敛.

法二: 同法一, 先考虑级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  的敛散性, 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

所以由根值判别法知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  收敛, 进而由比较判别法知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \cos^2 \frac{n\pi}{2}}{2^n}$  收敛.

法三: 因为  $\cos^2 \frac{n\pi}{2} = \frac{1 + \cos n\pi}{2} = \frac{1 + (-1)^n}{2}$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{2}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \cdot \frac{1 + (-1)^n}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2^{2k}}.$$

记  $u_k = \frac{2k}{2^{2k}}$ , 则  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{u_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{2k}{2^{2k}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{2k}}{4} = \frac{1}{4} < 1$ , 故级数  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2^{2k}}$  收敛, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{2}}{2^n}$  收敛.

**例 7.1.8.** 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$  的敛散性.

法一: 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$ , 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 故由比较判别法的极限形式知, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$  发散.

法二: 利用微分中值定理, 因为  $\ln x$  在  $[1, +\infty)$  上满足 Lagrange 定理的条件, 所以由 Lagrange 中值定理知, 存在  $\xi_n \in (n, n+1)$  ( $n \geq 1$ ), 有  $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{\xi_n}$ , 从而有  $\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ , 又级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$  发散, 故

由比较判别法知, 原级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$  发散.

法三: 由 Taylor 公式, 有  $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , 又  $\frac{1}{2n^2} - o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n^2} - o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$  收敛. 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 故由级数的性质, 得原级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$  发散.

法四: 利用级数敛散的定义, 记原级数的部分和为  $S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ , 则

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left[ \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) - \ln k \right] = \ln(1+n) \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$  发散.

法五: 利用广义积分与级数的联系

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n+1) - \ln n] = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

因为  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = +\infty$ , 所以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$  发散.

**例 7.1.9.** 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$  收敛, 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 0$ .

证记  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k}$ ,  $S_0 = 0$ ,  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ , 则  $S_n - S_{n-1} = \frac{a_n}{n}$ , 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \Rightarrow S_n = S + \varepsilon_n, (n \geq 1, \varepsilon_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty)$$

令  $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ , 则  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{S_1 + (S_2 - S_1) + \cdots + (S_n - S_{n-1})}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n k(S_k - S_{k-1})}{n} = \frac{S + \varepsilon_1 + \sum_{k=2}^n k(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1})}{n} \\ &= \frac{S}{n} + \frac{\varepsilon_1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n k(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) = \frac{S}{n} + \varepsilon_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k \end{aligned}$$

而因为  $\varepsilon_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = 0$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

**例 7.1.10.** 设数列  $\{u_n\}$  满足  $u_1 = 3, u_2 = 5$ , 当  $n \geq 3$  时,  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ , 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$  收敛.

证法一 由已知得  $u_n > 0$ , 且  $\{u_n\}$  是单调增加的, 所以  $u_n = u_{n-2} + u_{n-1} < 2u_{n-1}$ , 于是得

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-1} > \frac{1}{2}u_{n-1} + u_{n-1} = \frac{3}{2}u_{n-1}$$

从而得

$$u_n > \frac{3}{2}u_{n-1} > \left(\frac{3}{2}\right)^2 u_{n-2} > \cdots > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} u_1 = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

即  $\frac{1}{u_n} < \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ , 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$  收敛, 故由比较判别法知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$  收敛.

证法二 由已知得  $u_n > 0$ , 且  $\{u_n\}$  是单调增加的, 所以  $u_n = u_{n-2} + u_{n-1} < 2u_{n-1}$ , 于是得

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-1} > \frac{1}{2}u_{n-1} + u_{n-1} = \frac{3}{2}u_{n-1}$$

从而得  $\frac{u_n^{-1}}{u_{n-1}^{-1}} = \frac{u_{n-1}}{u_n} < \frac{2}{3} < 1$ , 故由达朗贝尔判别法知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$  收敛.

证法三 将递推关系式改写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

记  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 由  $|\lambda E - \mathbf{A}| = 0$ , 求得  $\mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , 其对应的特征向量为  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 取  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 则有  $\mathbf{X}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \mathbf{X} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}^{-1}$ ,

$$\mathbf{A}^{n-2} = \mathbf{X} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-2} \mathbf{X}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} & -\lambda_2 \lambda_1^{n-1} + \lambda_1 \lambda_2^{n-1} \\ \lambda_1^{n-2} - \lambda_2^{n-2} & -\lambda_2 \lambda_1^{n-2} + \lambda_1 \lambda_2^{n-2} \end{pmatrix}$$

于是由  $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{n-2} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$  得

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} [(\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}) u_2 + (-\lambda_2 \lambda_1^{n-1} + \lambda_1 \lambda_2^{n-1}) u_1]$$

从而

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_2 \left[ \frac{1}{\lambda_1} - \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{n-1} \right] + u_1 \left[ -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{n-1} \right]}{u_2 \left[ 1 - \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \right] + u_1 \left[ -\lambda_2 + \lambda_1 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \right]}$$

因为  $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$ , 故由正项级数的比值判别法, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$  收敛.

### 7.1.3 交错级数

**定理 7.1.7 (Leibniz 定理).** 若  $\{u_n\}$  单调递减, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , 则  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$  收敛.

**例 7.1.11.** 判别级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$  的敛散性.

法一: 将通项化简为

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n} + (-1)^n)} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n} (\sqrt{n} + (-1)^n)}$$

于是

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} (\sqrt{n} + (-1)^n)}$$

对于  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ , 由 Leibniz 判别法知收敛, 对于  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} (\sqrt{n} + (-1)^n)}$ , 该级数为正项级数, 且  $\frac{1}{\sqrt{n} (\sqrt{n} + (-1)^n)} \sim \frac{1}{n}$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 而  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 所以  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} (\sqrt{n} + (-1)^n)}$  发散, 从而知原级数发散.

法二: 将通项的分母有理化, 原级数可化为

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

而  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 由 Leibniz 判别法知  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$  收敛, 从而得原级数发散.

法三: 对原级数重新分组, 依次每两项加括号, 得到一个新级数  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ :

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}-1} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{\sqrt{2k+1}} - \frac{1}{\sqrt{2k+1}-1} \right) + \cdots$$

其通项  $u_k = \frac{1}{\sqrt{2k+1}} - \frac{1}{\sqrt{2k+1}-1} = \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k}-2}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} < 0$ , 所以新级数  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  是负项级数, 又由

$$u_k = \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k}-2}{2k} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k}} - 2}{2k} \sim -\frac{1}{k} (k \rightarrow \infty)$$

知  $(-u_k) \sim \frac{1}{k} (k \rightarrow \infty)$ , 所以级数  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  发散, 故由级数收敛的性质得原级数发散.

原级数通项  $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} (n \rightarrow \infty)$ , 但原级数发散, 级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  却是收敛的. 由此可见: 对于变号级数不能用比较判别法的极限形式判别.

**例 7.1.12.** 设  $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$ ,  $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),

(1) 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ ;

(2) 证明: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_n}{b_n}$  收敛, 并求其和.

(1) 由推论 1.3.4 知,  $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 大于 1 的奇数} \end{cases}$ , 并且

$a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{(n+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数} \\ \frac{(n-1)!!}{(n+2)!!}, & n \text{ 大于 1 的奇数} \end{cases}$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{(n+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n!!}{(n-1)!!} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{1}{n+2} \rightarrow 0, & n \text{ 为正偶数} \\ \frac{(n-1)!!}{(n+2)!!} \cdot \frac{n!!}{(n-1)!!} = \frac{1}{n+2} \rightarrow 0, & n \text{ 大于 1 的奇数} \end{cases}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

(2) 由 (1) 可知  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n+2}$  为交错级数, 由 Leibniz 定理, 知级数收敛, 并令  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+2}}{n+2}$ , 则

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+2} = \frac{x^2}{1+x} \quad (-1 < x < 1)$$

$$\text{即 } S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t) dt = \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt = \frac{1}{2} t^2 - t + \ln|1+t| \Big|_0^x = \frac{1}{2} x^2 - x + \ln(1+x), x \in (-1, 1], \text{ 故}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_n}{b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n+2} = S(1) = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

**例 7.1.13.** 讨论级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$  的敛散性.

令  $u_n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{H_n}{n}$ , 由 Stolz 定理可知,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_{n+1} - H_n}{n+1 - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

且

$$u_{n+1} - u_n = \frac{nH_{n+1} - (n+1)H_n}{(n+1)n} = \frac{\frac{n}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}{(n+1)n} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{i}\right)}{(n+1)n} < 0$$

所以, 数列  $u_n$  单调递减, 且趋于零, 由 Leibniz 判别法知, 原级数收敛, 但非绝对收敛, 事实上

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = +\infty$$

且  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 所以由比较判别法知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$  发散, 故原交错级数条件收敛, 但非绝对收敛.

#### 7.1.4 一般数项级数的判别法

**定义 7.1.6 (绝对收敛与条件收敛).** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛, 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  发散, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  条件收敛.

判别任意项级数收敛的常用方法:

(1) 绝对值判别法: 若  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛;

(2) 交错级数一般使用 Leibniz 判别法;

(3) 将级数分解成两个收敛级数之和.

判别级数发散的常用方法:

- (1) 证明级数的一般项的极限不存在或不为零;
- (2) 将级数按某种方式加括号后所得级数发散;
- (3) 将级数分解为一个收敛级数与一个发散级数之和.

**定理 7.1.8.** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  是任意项级数, 其中  $\sum$  的上标都是  $\infty$ , 下标并非总是 1,

- |   |  |
|---|--|
| (1) 若 $\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 1}}^{\infty}  u_n $ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.    | (2) 若 $\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 1}}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}  u_n $ 发散.             |
| (3) 若 $\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 1}}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}  u_n $ 不一定收敛. | (4) 若 $\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 1}}^{\infty} u_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 绝对收敛. |
| (5) 若 $\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 1}}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 不一定收敛. | (6) 若 $\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 1}}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 不一定收敛.         |
| (7) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛.             | (8) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm u_{n+1})$ 收敛.                        |

### 7.1.5 其他判别法

**定理 7.1.9 (Kummer 判别法).** 设  $a_n > 0, b_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$

- (1) 若存在常数  $\alpha > 0$ , 使得  $\frac{b_n}{b_{n+1}} a_n - a_{n+1} \geq \alpha (n = 1, 2, \dots)$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛;
- (2) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$  发散, 且  $\frac{b_n}{b_{n+1}} a_n - a_{n+1} \leq 0 (n = 1, 2, \dots)$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散.

**定理 7.1.10 (Raabe 判别法).** 设  $a_n > 0, n = 1, 2, \dots$

- (1) 若存在  $r > 1$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq r$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;
- (2) 若对充分大的  $n$  都有  $n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

**定理 7.1.11 (Raabe 判别法的极限形式).** 设  $a_n > 0, n = 1, 2, \dots$ , 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{l}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) (n \rightarrow \infty)$$

, 则当  $l > 1$  时级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛; 当  $l < 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

**定理 7.1.12 (Gauss 判别法).** 设  $a_n > 0, n = 1, 2, \dots$ , 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right) (n \rightarrow \infty)$$

则当  $\beta > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛; 当  $\beta < 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

**定理 7.1.13 (Frink 判别法).** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为正项级数,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^n = \rho$ , 则当  $\rho < \frac{1}{e}$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛; 当  $\rho > \frac{1}{e}$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

## 7.2 幂级数

幂级数可以在某个区间内收敛, 也可以在某些点处发散. 对于幂级数, 我们通常关心以下几个问题:

1. 收敛半径: 幂级数的收敛半径  $R$  是一个非负实数, 表示幂级数在哪些区间内收敛. 收敛半径的计算可以使用根试验、比值试验、比较试验等方法.
2. 收敛区间: 根据收敛半径  $R$ , 我们可以确定幂级数的收敛区间. 在收敛区间内, 幂级数可以表示为某个函数的展开形式.
3. 函数表示: 在收敛区间内, 幂级数可以表示为一个函数的展开形式. 这种展开形式有助于我们研究函数的性质和行为.
4. 求和: 在幂级数的收敛区间内, 我们可以通过幂级数的求和来计算函数在某一点的值, 或者对函数进行近似.

### 7.2.1 下降阶乘幂

**定义 7.2.1 (下降阶乘幂).**  $x^m = x(x-1)\cdots(x-m+1)$  ( $m \in \mathbb{N}_+$ ).

**定义 7.2.2 (上升阶乘幂).**  $x^{\overline{m}} = x(x+1)\cdots(x+m-1)$  ( $m \in \mathbb{N}_+$ ).

**定义 7.2.3.**  $x^0 = x^{\bar{0}} = 1$ .

**定理 7.2.1 (阶乘与阶乘幂).**  $n! = n^{\underline{n}} = 1^{\bar{n}}$ .

**定理 7.2.2.**  $\Delta(x^m) = mx^{m-1}$ .

证  $\Delta(x^m) = (x+1)^m - x^m = (x+1)x\cdots(x-m+2) - x\cdots(x-m+2)(x-m+1) = mx(x-1)\cdots(x-m+2) = mx^{\underline{m-1}}$ .

**定义 7.2.4 (不定和).**  $g(x) = \Delta f(x) \iff \sum g(x)\delta x = f(x) + C$ .

**定义 7.2.5 (定和).**  $\sum_a^b g(x)\delta x = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$ .

$$(1) \sum_a^a g(x)\delta x = f(a) - f(a) = 0;$$

$$(2) \sum_a^{a+1} g(x)\delta x = f(a+1) - f(a) = g(a);$$

$$(3) \sum_a^{b+1} g(x)\delta x - \sum_a^b g(x)\delta x = f(b+1) - f(a) - f(b) + f(a) = g(b).$$

**定理 7.2.3.**  $\sum_a^b g(x)\delta x = \sum_{k=a}^{b-1} g(k) = \sum_{a \leq k < b} g(k)$  ( $b \geq a$ ).

**定理 7.2.4.**  $\sum_a^b g(x)\delta x + \sum_b^c g(x)\delta x = \sum_a^c g(x)\delta x$ .

**定理 7.2.5.**  $\sum_{0 \leq k < n} k^m = \frac{k^{\frac{m+1}{m+1}}}{m+1} \Big|_0^n = \frac{n^{\frac{m+1}{m+1}}}{m+1}$  ( $m, n \in \mathbb{N}_+$ ).

**定义 7.2.6.**  $x^{-m} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}$  ( $m > 0$ ).

**定理 7.2.6.**  $x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}}$  ( $m, n \in \mathbb{Z}$ ).

**定理 7.2.7.**  $\sum_a^b x^m \delta x = \begin{cases} \frac{x^{\frac{m+1}{m+1}}}{m+1} \Big|_a^b, & m \neq -1 \\ H_x \Big|_a^b, & m = -1 \end{cases}$ , 其中  $H_x = \sum_{k=1}^x \frac{1}{k}$  称为调和级数.

**定义 7.2.7.**  $Ef(x) = f(x+1)$ .

**定理 7.2.8 (分部和公式).**  $\sum u \Delta v = uv - \sum Ev \Delta u$ .

表 7.1: 下降阶乘幂的性质

| $f = \sum g$                      | $\Delta f = g$           | $f = \sum g$      | $\Delta f = g$           |
|-----------------------------------|--------------------------|-------------------|--------------------------|
| $x^0 = 1$                         | 0                        | $2^x$             | $2^x$                    |
| $x^1 = x$                         | 1                        | $c^x$             | $(c-1)c^x$               |
| $x^2 = x(x-1)$                    | $2x$                     | $\frac{c^x}{c-1}$ | $c^x$                    |
| $x^m$                             | $mx^{\underline{m-1}}$   | $cf$              | $c\Delta f$              |
| $\frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}$ | $x^m$                    | $f+g$             | $\Delta f + \Delta g$    |
| $H_x$                             | $x^{-1} = \frac{1}{x+1}$ | $fg$              | $f\Delta g + Ev\Delta f$ |

**例 7.2.1 (第五届数学竞赛初赛).** 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2} + \cdots$  的敛散性, 若收敛, 则求其和.

令  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{H_k}{(k+1)(k+2)} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n+1 \\ k \in \mathbb{N}_+}} \frac{H_k}{(k+1)(k+2)} = \sum_1^{n+1} \frac{H_x}{(x+1)(x+2)} \delta x$ , 那么记

$$u(x) = H_x, \Delta v(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = -\frac{1}{x+2} - \left(-\frac{1}{x+1}\right)$$

因此

$$\Delta u(x) = x^{-1}, v(x) = -\frac{1}{x+1} = -x^{-1}, Ev(x) = -(x+1)^{-1}$$

于是

$$S_n = \sum_1^{n+1} \frac{H_x}{(x+1)(x+2)} \delta x = -x^{-1} H_x \Big|_1^{n+1} + \sum_1^{n+1} (x+1)^{-1} x^{-1} \delta x$$

$$\begin{aligned}
&= -(n+1)^{-1}H_{n+1} + 1^{-1}H_1 + \sum_1^{n+1} x^{-2}\delta x = \frac{1}{2} - \frac{H_{n+1}}{n+2} - x^{-1} \Big|_1^{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+2} - \frac{H_{n+1}}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{H_n}{n+2}
\end{aligned}$$

又因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n + \gamma + \alpha(n)}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n+2} = 0 \quad (\alpha(n) \rightarrow 0)$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ , 因此级数收敛, 且其和为 1.

## 7.2.2 幂级数的性质

**定义 7.2.8 (幂级数).** 形如  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  的函数项级数称为  $x-x_0$  的幂级数, 其中  $a_n (n=0, 1, 2, \dots)$  称为幂级数的项  $(x-x_0)^n$  的系数. 当  $x_0=0$  时,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  称为  $x$  的幂级数.

**定理 7.2.9 (Abel 定理).** 若幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  在  $x=x_0 (x_0 \neq 0)$  处收敛, 则它在满足不等式  $|x| < |x_0|$  的一切  $x$  处绝对收敛; 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x=x_0$  处发散, 则它在满足不等式  $|x| > |x_0|$  的一切  $x$  处发散.

**定义 7.2.9 (收敛半径与收敛区间).** 由 Abel 定理可知, 必存在  $R > 0$ , 当  $|x| < R$  时, 幂级数绝对收敛; 当  $|x| > R$  时, 幂级数发散, 则称  $R$  为幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径,  $(-R, R)$  为其收敛区间.

特别地, 当  $x=R$  与  $x=-R$  时, 幂级数可能收敛, 也可能发散; 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  仅在  $x=0$  处收敛, 其他点处都发散, 则  $R=0$ , 收敛域为  $\{0\}$ ; 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  处处收敛, 则  $R=\infty$ , 收敛域为  $(-\infty, +\infty)$ .

**定理 7.2.10.** 设  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (a_n \neq 0)$ , 其收敛半径为  $R$ , 则  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$  或  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ .

**定理 7.2.11 (奇偶次项幂级数的收敛半径).** 对于只含有偶次项  $\sum_{n=1}^{\infty} (x-x_0)^{2n}$  或只含有奇次项  $\sum_{n=1}^{\infty} (x-x_0)^{2n+1}$  的幂级数的收敛半径为: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ , 则  $R = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ ; 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ , 则  $R = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ .

**定理 7.2.12 (幂级数的运算性质).** 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  与  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  的收敛半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 当  $R_1 \neq R_2$  时, 令  $R = \min \{R_1, R_2\}$ , 则有

$$(1) k \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} k a_n x^n, |x| < R_1, \text{其中 } k \text{ 为常数};$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, |x| < R;$$

$$(3) \quad \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, |x| < R, \text{ 其中 } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

**定理 7.2.13 (幂级数的性质).** 设  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $R(R > 0)$ , 则有

(1) 和函数  $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在收敛域上连续, 若  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在端点  $x = R$  (或  $x = -R$ ) 处收敛, 则  $s(x)$  在  $x = R$  处左连续 (或在  $x = -R$  处右连续);

(2) 和函数  $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在收敛区间上可导, 且有逐项求导公式

$$s'(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

(3) 和函数  $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在收敛域上可积, 且有逐项求积公式

$$\int_0^x s(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

### 7.2.3 函数展开为幂级数

常见函数的幂级数展开式

表 7.2: 常见函数的幂级数展开式

|  |  |
|--|--|
| (1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},  x  < +\infty$  | (2) $a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \ln^n a \frac{x^n}{n!},  x  < +\infty$                              |
| (3) $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, x \in (-1, 1]$   | (4) $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},  x  < 1$                                       |
|  | (5) $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},  x  < 1$                   |
| (6) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},  x  < +\infty$  | (7) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},  x  < +\infty$                      |
| (8) ${}^1\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},  x  < 1.$   | (9) ${}^2\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)},  x  < 1$ |
| (10) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,  x  < 1$  | (11) $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n,  x  < 1$                                   |
| (12) $\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n,  x  < 1$  | (13) $\frac{m}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)^m x^n,  x  < 1$                            |
| (14) $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,  x  < 1$   | (15) $\frac{x^q}{1+x^p} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{np+q},  x  < 1$                            |
| (16) $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} x^n,  x  < 1$ |  |
| (17) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n},  x  < 1$  |  |

例 7.2.2. 写出下列函数关于  $x$  的幂级数展开式

|                                   |                              |                          |                                  |                                       |
|-----------------------------------|------------------------------|--------------------------|----------------------------------|---------------------------------------|
| (1) $e^{-x^2}.$                   | (2) $\cos^2 x.$              | (3) $\sin^3 x.$          | (4) $\frac{x^{10}}{1-x}.$        | (5) $\frac{1}{(1-x)^2}.$              |
| (6) $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$ | (7) $\frac{x^2}{(1+x^2)^2}.$ | (8) $\frac{x}{2+x-x^2}.$ | (9) $\arctan \frac{1-2x}{1+2x}.$ | (10) $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$ |

$$(1) e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \quad (|x| < +\infty).$$

$${}^1\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$${}^2\text{由 } (\arcsin x)' = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}+n-1\right)}{n!} (-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} x^{2n}$$

$$\text{则 } \arcsin x = \int_0^x \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} t^{2n} \right] dt = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}$$

$$(2) \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2x)^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} \quad (|x| < +\infty).$$

(3) 注意到  $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$ , 于是

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (3x)^{2n+1} \\ &= \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (|x| < +\infty). \end{aligned}$$

$$(4) \frac{x^{10}}{1-x} = x^{10} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=10}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1).$$

$$(5) \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2+n-1)}{n!} (-x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n \quad (|x| < 1).$$

$$(6) \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| < 1).$$

(7) 由  $(1+x)^\alpha$  展开式得

$$(1+x^2)^{-2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2+n-1)}{n!} (x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{2n}$$

$$\text{故 } \frac{x^2}{(1+x^2)^2} = x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{2n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n} \quad (|x| < 1).$$

$$(8) \text{ 因为 } \frac{x}{2+x-x^2} = \frac{x}{3} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} \right) = \frac{x}{3} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \right), \text{ 所以}$$

$$\frac{x}{2+x-x^2} = \frac{x}{3} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x}{2} \right)^n \right] = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}} \right] x^{n+1} \quad (|x| < 1).$$

$$(9) \text{ 因为 } \arctan \frac{A-B}{1+AB} = \arctan A - \arctan B, \text{ 所以}$$

$$\arctan \frac{1-2x}{1+2x} = \arctan 1 - \arctan 2x = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (2x)^{2n+1} \quad \left( x \neq -\frac{1}{2} \right).$$

$$(10) (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{-3}{2}-n+1\right)}{n!} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \quad (|x| < 1).$$

**例 7.2.3.** 写出下列函数关于  $x$  的幂级数展开式

|                                 |  |   |
|---------------------------------|--|---|
| $(1) (1+x) \ln(1+x).$           | $(2) \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x.$ | $(3) \arctan \frac{2-2x}{1+4x}.$              |
| $(4) \arctan \frac{2x}{2-x^2}.$ | $(5) x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}.$                          | $(6) x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}.$ |

$$(1) f(x) = (1+x) \ln(1+x) = (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad |x| < 1, \text{ 又 } |x| = 1 \text{ 时, 级数收敛, 因此原级数的收敛域为 } |x| \leqslant 1.$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \quad (|x| < 1).$$

(3) 法一: 由  $\arctan \frac{A-B}{1+AB} = \arctan A - \arctan B$ , 于是

$$\arctan \frac{2-2x}{1+4x} = \arctan 2 - \arctan(2x) = \arctan 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (2x)^{2n+1} \quad \left( |x| < \frac{1}{2} \right)$$

当  $|x| = \frac{1}{2}$  时, 级数为交错级数, 且满足 Leibniz 判别法的条件, 因此原级数的收敛域为  $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ .

法二:  $f'(x) = \left( \arctan \frac{2-2x}{1+4x} \right)' = -\frac{2}{1+4x^2}$ , 于是

$$\begin{aligned}\arctan \frac{2-2x}{1+4x} &= -2 \int_0^x \frac{dt}{1+4t^2} + \arctan 2 = -2 \int_0^x \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4t^2)^n \right] dt + \arctan 2 \\ &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n \int_0^x t^{2n} dt + \arctan 2 = \arctan 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{2n-1} x^{2n-1}\end{aligned}$$

收敛域的求法同法一.

(4) 由于  $f'(x) = \left( \arctan \frac{2x}{2-x^2} \right)' = \frac{4+2x^2}{4+x^4}$ , 故

$$\begin{aligned}\arctan \frac{2x}{2-x^2} &= \int_0^x \frac{4+2t^2}{4+t^4} dt = \int_0^x \left( 1 + \frac{t^2}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{t^4}{4} \right)^n dt \\ &= \int_0^x \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{t^{2n}}{2^n} \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{x^{2n+1}}{2^n (2n+1)} \quad (|x| < \sqrt{2})\end{aligned}$$

当  $|x| = \sqrt{2}$  时, 级数为

$$\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{2n+1} \text{ 及 } -\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{2n+1}$$

它们均由两收敛级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4n+1} \text{ 及 } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4n+3}$$

逐项相加并乘以常数  $\sqrt{2}$  及  $-\sqrt{2}$  而得, 故它们收敛, 因此原级数的收敛域为  $|x| \leqslant \sqrt{2}$ .

(5)  $f(x) = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x^2)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$  ( $|x| < 1$ ) 当  $|x| = 1$  时, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$  收敛, 因此原级数的收敛域为  $|x| \leqslant 1$ .

(6) 因为  $\left[ \ln \left( x + \sqrt{1+x^2} \right) \right]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ , 所以

$$\begin{aligned}\ln \left( x + \sqrt{1+x^2} \right) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int_0^x \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} \right] dt \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_0^x t^{2n} dt = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= x \left[ x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right] - \left[ 1 + \frac{1}{2} x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} x^{2n+2} \right] \\ &= -1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \right] \quad (|x| \leqslant 1).\end{aligned}$$

**例 7.2.4 (2003 数一).** 将函数  $f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x}$  展开成  $x$  的幂级数, 并求级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$  的和.

由  $\arctan \frac{A-B}{1+AB} = \arctan A - \arctan B$ , 所以

$$f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x} = \arctan 1 - \arctan 2x = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{2n+1}$$

于是

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{2n+1} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4} - f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1-1}{1+1} = \frac{\pi}{4}.$$

**例 7.2.5 (2007 数三).** 将函数  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$  展开成  $x - 1$  的幂级数, 并指出其收敛区间.

因为  $\frac{1}{x^2 - 3x - 4} = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1} \right)$ , 其中

$$\frac{1}{x-4} = \frac{1}{(x-1)-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-1}{3}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}} \quad x \in (-2, 4)$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x-1+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{x-1}{2} + 1} = (-1)^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n+1}} \quad x \in (-1, 3)$$

$$\text{故 } \frac{1}{x^2 - 3x - 4} = -\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right] (x-1)^n \quad x \in (-1, 3).$$

**例 7.2.6.** 求函数

$$f(x) = \arctan \left( \frac{2x}{2-x^2} \right) + \frac{1}{4} \ln |x^2 - 2x + 2| - \frac{1}{4} \ln |x^2 + 2x + 2| - \frac{1}{2} \arctan(x+1) - \frac{1}{2} \arctan(x-1)$$

关于  $x$  的幂级数展开式和收敛半径.

显然  $x^2 \pm 2x + 2 > 0$ , 故

$$f(x) = \arctan \left( \frac{2x}{2-x^2} \right) + \frac{1}{4} \ln (x^2 - 2x + 2) - \frac{1}{4} \ln (x^2 + 2x + 2) - \frac{1}{2} \arctan(x-1) - \frac{1}{2} \arctan(x+1)$$

对  $f(x)$  求导, 整理可得  $f'(x) = \frac{2x^2}{x^4 + 4}$ , 由于

$$\frac{1}{4+x^4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^4}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{4^n}$$

其中  $\frac{x^4}{4} < 1$ , 故得其收敛半径为  $R = \sqrt{2}$ , 于是

$$f'(x) = \frac{2x^2}{x^4 + 4} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{4^n}$$

对上式两端在  $[0, x]$  上积分, 且  $f(0) = 0$ , 得

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^x \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{4n+2}}{4^n} dt \\ f(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n \frac{t^{4n+2}}{4^n} dt = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)2^{2n+1}}. \end{aligned}$$

## 7.2.4 幂级数的收敛域及和函数

### 求幂级数的收敛域

求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛域的一般方法是, 先由公式

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

求出收敛半径, 若  $R = 0$ , 则幂级数仅在  $x = 0$  处收敛; 若  $R = +\infty$ , 则幂级数的收敛域为  $(-\infty, +\infty)$ ; 若  $0 < R < +\infty$ , 则再考察幂级数在  $x = -R$  和  $x = R$  处的敛散性, 进而确定幂级数的收敛域是  $(-R, R)$ ,  $[-R, R)$ ,  $(-R, R]$  或  $[-R, R]$  之中的某一区间.

**例 7.2.7.** 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1} x^n$  的收敛域.

令  $a_n = \frac{n^2}{n^3+1}$ , 则收敛半径

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3+1} \cdot \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^2} = 1$$

在  $x = -1$  处, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3+1}$ , 这是交错级数, 并且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3+1} = 0$ , 故由 Leibniz 判别法可知级数收敛, 在  $x = 1$  处, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ , 因为  $\frac{n^2}{n^3+1} \geq \frac{1}{n+1}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$  发散, 故由比较判别法知级数发散, 因此, 级数的收敛域为  $[-1, 1)$ .

求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  的收敛域的方法有两种: 一种是作变量代换:  $y = x - x_0$ , 得到级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ , 可按前述方法求得其收敛域, 进而可求得原级数的收敛域, 另一种是使用比值法.

**例 7.2.8.** 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n! \frac{(x-5)^n}{n^n}$  的收敛域.

法一: 令  $y = x - 5$ , 得级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{y}{n}\right)^n$ , 其收敛半径

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

当  $y = -e$  时, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!e^n}{n^n}$ , 这是交错级数, 可以证明:  $\frac{n!e}{n^n}$  不趋于零 ( $n \rightarrow \infty$ ), 级数发散; 当  $y = e$  时, 级数成为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n}$ , 显然也发散, 故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{y}{n}\right)^n$  的收敛域为  $(-e, e)$ , 从而可知原级数的收敛域为  $(5 - e, 5 + e)$ .

法二: 因为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! \frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{n! \frac{(x-5)^n}{n^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} \right)^n |x-5| = \frac{|x-5|}{e}$$

根据正项级数的比值判别法, 当  $\rho < 1$ , 即  $|x-5| < e$ ,  $5 - e < x < 5 + e$  时, 所给级数绝对收敛; 当  $\rho \geq 1$ , 即  $x \geq 5 + e$  或  $x \leq 5 - e$  时, 由于级数的一般项不趋于零, 故级数发散, 综上, 级数的收敛域为  $(5 - e, 5 + e)$ .

**例 7.2.9 (2009 数三).** 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - (-1)^n}{n^2} x^n$  的收敛半径.

令  $a_n = \frac{e^n - (-1)^n}{n^2}$ , 则

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{e^{n+1} - (-1)^{n+1}}{e^n - (-1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e + \left(\frac{-1}{e}\right)^n}{1 - \left(\frac{-1}{e}\right)^n} = e$$

于是收敛半径为  $R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{e}$ .

**例 7.2.10 (2020 数三).** 设幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-2)^n$  的收敛区间为  $(-2, 6)$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^{2n}$  的收敛区间为

A.  $(-2, 6)$ B.  $(-3, 1)$ C.  $(-5, 3)$ D.  $(-17, 15)$ 

因为幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n$  收敛区间为  $(-2, 6)$ , 所以幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n$  的收敛半径为 4, 令  $t = x-2$ , 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n = (x-2) \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^{n-1} = t \sum_{n=1}^{\infty} na_n t^{n-1} = t \sum_{n=1}^{\infty} (a_n t^n)'$$

因而幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$  的收敛半径为 4, 又因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n [(x+1)^2]^n$$

则  $(x+1)^2 < 4$ , 解得  $-3 < x < 1$ , 故选 B.

### 求幂级数的和函数

求幂级数在其收敛域内的和函数的基本方法是: 利用幂级数的四则运算、幂级数在其收敛域内可以逐项微分、逐项积分的性质以及幂级数的和函数在其收敛区间端点处的单侧连续性等.

**例 7.2.11.** 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (3+x)^{2n}$  的和函数.

因为  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x)$ , 所以有  $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ , 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+x)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(3+x)^2]^n}{n} = -\ln[1-(x+3)^2] \quad (-4 < x < -2).$$

**例 7.2.12.** 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n \cdot 8^n}$  的和函数.

设  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n \cdot 8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{3n}$ , 那么

$$S'(x) = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{3n-1} \Rightarrow \frac{x}{2} S'(x) = \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{3n} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{8-x^3} - \frac{3}{2}$$

解得  $S'(x) = \frac{24}{8x-x^4} - \frac{3}{x}$ , 两边对  $x$  积分得

$$\int S(x) dx = 24 \int \frac{dx}{8x-x^4} - 3 \int \frac{dx}{x} = -\ln(8-x^3) + C$$

又  $S(0) = 0$ , 解得  $C = \ln 8$ , 于是幂级数的和函数  $S(x) = \ln \frac{8}{8-x^3}$ .

**例 7.2.13.** 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2-n+1}{n \cdot 2^{2n+1}} (x-1)^n$  的和函数.

易求得幂级数的收敛区间为  $(-3, 5)$ , 并将原幂级数化为  $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2-n+1}{n} \cdot \left(\frac{x-1}{4}\right)^n$ , 令  $y = \frac{x-1}{4}$ , 有

$$S(y) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2-n+1}{n} \cdot y^n = \frac{1}{2} y^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1) y^{n-2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^n := \frac{y^2}{2} S_1(y) + \frac{1}{2} S_2(y)$$

于是

$$\int_0^y S_1(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1) \int_0^y t^{n-2} dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} y^{n-1} = \frac{1}{1+y} \Rightarrow S_1(y) = -\frac{1}{(1+y)^2} \quad (|y| < 1)$$

$$\text{又 } S_2(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{y^n}{n} = \ln(1+y) \quad (-1 < y \leq 1), \text{ 故}$$

$$S(y) = \frac{y^2}{2} S_1(y) + \frac{1}{2} S_2(y) = -\frac{1}{2} \left( \frac{y}{1+y} \right)^2 + \frac{1}{2} \ln(1+y) \quad (|y| < 1)$$

于是, 所求幂级数的和函数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2 - n + 1}{n \cdot 2^{2n+1}} (x-1)^n = S\left(\frac{x-1}{4}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+3}{4} - \frac{1}{2} \left( \frac{x-1}{x+3} \right)^2 \quad (-3 < x < 5).$$

**例 7.2.14.** 求  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n$  的收敛区间及和函数.

易得级数的收敛区间为  $(-\infty, +\infty)$ , 又因为  $n^3 = (n+1)(n^2 - n + 1) - 1$ , 于是  $\frac{n^3}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$ , 那么

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!} (-x)^n = -\frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(n+1)!} \\ &= -\frac{x}{2} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^{n-2}}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= -\frac{x}{2} + x^2 e^{-x} + (e^{-x} - 1 + x) + \frac{1}{x} \left( e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2} \right) = e \left( x^2 + 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

显然, 当  $x = 0$  时, 和函数为 0, 因此  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n = \begin{cases} e^{-x} \left( x^2 - 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

**例 7.2.15.** 求  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k! + (k+1)! + (k+2)!} \cdot$

因为  $\frac{k+2}{k! + (k+1)! + (k+2)!} = \frac{1}{k!(k+2)}$ , 于是考虑  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!(n+2)}$ , 则

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = xe^x$$

所以

$$S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t) dt = \int_0^x te^t dt = (t-1)e^t \Big|_0^x = (x-1)e^x + 1$$

$$\text{则 } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k! + (k+1)! + (k+2)!} = S(1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

对于有些系数含有阶乘符号的幂级数, 求其和函数的一种行之有效的方法是: 首先设法建立关于和函数的微分方程, 然后求解微分方程, 即得所求和函数.

**例 7.2.16.** 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1}$  的和函数.

设  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1}$ , 易求得收敛区间为  $(-1, 1)$ , 那么

$$S'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} x^{2n+2} = 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} x^{2n+1} = 1 + x \left[ x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1} \right]' = 1 + xS(x) + x^2 S'(x)$$

即  $S'(x) - \frac{x}{1-x^2} S(x) = \frac{1}{1-x^2}$ , 该方程为一阶非齐次线性微分方程, 由通解公式

$$S(x) = e^{\int \frac{x}{1-x^2} dx} \left[ \int \frac{1}{1-x^2} \cdot e^{-\int \frac{x}{1-x^2} dx} dx + C \right] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + C \right] = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}$$

又  $S(0) = 0$ , 解得  $C = 0$ , 于是幂级数的和函数  $S(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ .

## 综合运用

**例 7.2.17.** 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} x^n$  的收敛域及和函数.

记  $u_n = \frac{n+1}{n}$ , 则由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = 1$  知, 收敛半径  $R = 1$ . 又当  $x = \pm 1$  时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} (\pm 1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{1}{n}$$

发散, 故原级数的收敛域为  $(-1, 1)$ . 设和函数为  $S(x)$ , 即

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

两边在  $(0, x)$  上积分, 得

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} t^n \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{n+1}{n} t^n dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n}$$

即  $\frac{1}{x} \int_0^x S(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ , 然后两边分别对  $x$  求导, 得

$$\left( \frac{1}{x} \int_0^x S(t) dt \right)' = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

于是

$$\frac{1}{x} \int_0^x S(t) dt = \int_0^x \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x) + C$$

即  $\int_0^x S(t) dt = -x \ln(1-x) + Cx$ , 两边再次求导, 得

$$S(x) = \frac{x}{1-x} - \ln(1-x) + C$$

因为  $S(x)$  在  $(-1, 1)$  内连续, 且  $S(0) = 0$ , 所以  $C = 0$ , 所以原级数的和函数为

$$S(x) = \frac{x}{1-x} - \ln(1-x), \quad x \in (-1, 1).$$

**例 7.2.18.** 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$  的收敛域及和函数, 并求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  的和.

记  $u_n = n+1$ , 则由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$  知, 收敛半径  $R = 1$ . 又当  $x = \pm 1$  时,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(\pm 1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(\pm 1)^n$$

发散, 故原级数的收敛域为  $(-1, 1)$ . 设和函数为  $S(x)$ , 即  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ ,  $x \in (-1, 1)$ . 两边在  $(0, x)$  上积分, 得

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (n+1)t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$$

即  $\frac{1}{x} \int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \int_0^x S(t) dt = \frac{x}{1-x} \xrightarrow{\text{求导}} S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1)$ . 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{2^{n-1}} = x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{x}{(1-x)^2} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = 2$$

**例 7.2.19 (2014 数学 (三)).** 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$  的收敛域及和函数.

记  $u_n = (n+1)(n+3)$ , 则由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)} = 1$  知, 收敛半径  $R = 1$ . 又当  $x = \pm 1$  时,  $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)(\pm 1)^n$  发散, 故原级数的收敛域为  $(-1, 1)$ .

设和函数为  $S(x)$ , 即  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ ,  $x \in (-1, 1)$ . 两边在  $(0, x)$  上积分, 得

$$\begin{aligned} \int_0^x S(t)dt &= \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (n+1)(n+3)t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (n+2)t^{n+1} dt \right)' + \frac{x}{1-x} \\ &= \left( \frac{x^2}{1-x} \right)' + \frac{x}{1-x} = \frac{3x - 2x^2}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

于是  $S(x) = \left[ \frac{3x - 2x^2}{(1-x)^2} \right]' = \frac{x+3}{(1-x)^3}$ ,  $x \in (-1, 1)$ .

**例 7.2.20 (首届数学竞赛预赛).** 已知  $u_n(x)$  满足  $u'_n(x) = u_n(x) + x^{n-1}e^x$  ( $n$  为正整数), 且  $u_n(1) = \frac{e}{n}$ , 求函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  之和.

由  $u'_n(x) - u_n(x) = x^{n-1}e^x$  得,  $u_n(x) = e^{\int dx} \left[ \int x^{n-1}e^x \cdot e^{-\int dx} dx + C \right] = \frac{x^n}{n}e^x + Ce^x$ , 又因为  $u_n(1) = \frac{e}{n}$ , 所以  $C = 0$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}e^x = e^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -e^x \ln(1-x)$ ,  $x \in (-1, 1)$ .

**例 7.2.21.** 设  $a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = \frac{7}{2}$ ,

$$a_{n+1} = -\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)a_n \quad (n \geq 2)$$

求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $(-1, 1)$  内的和函数  $S(x)$ .

收敛半径  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} = 1$ , 所以  $|x| < 1$  时幂级数收敛,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n = 1 + 2x + \frac{7}{2}x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

当  $n \geq 2$  时, 由

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (-1) \frac{n+2}{n+1} a_n = (-1)^2 \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} a_{n-1} = \cdots = (-1)^{n-1} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \cdots \frac{4}{3} a_2 \\ &= (-1)^{n-1} \frac{n+2}{3} \cdot \frac{7}{2} = (-1)^{n-1} \frac{7}{6} (n+2) \end{aligned}$$

故

$$S(x) = 1 - 2x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{6} \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n$$

其中

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n = \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n (x^{n+1})' = \left[ \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n x^{n+1} \right]' = -\left[ \frac{x^4}{1+x} \right]' = -\frac{4x^3 + 3x^4}{(1+x)^2}$$

$$\text{故 } S(x) = 1 - 2x + \frac{7}{2}x^2 - \frac{7}{6} \frac{4x^3 + 3x^4}{(1+x)^2}.$$

**例 7.2.22.** 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$  的收敛域及和函数.

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2+2}{(n+2)(n^3+2)} = 0$ , 所以  $R = +\infty$ , 收敛域为  $(-\infty, +\infty)$ , 又

$$\frac{n^3+2}{(n+1)!} = \frac{(n-1)n(n+1)}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} (n \geq 2)$$

及级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n-2)!}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$  的收敛域都为  $(-\infty, +\infty)$ , 因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n-2)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)!} := S_1(x) + S_2(x) + S_3(x)$$

其中

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^{n+2} = (x-1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} = (x-1)^2 e^{x-1} \\ S_3(x) &= \frac{1}{x-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{x-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} = \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} \end{aligned}$$

$S_2(x) = e^{x-1}$ , 因此幂级数的和函数为

$$S(x) = \begin{cases} (x^2 - 2x + 2)e^{x-1} + \frac{e^{x-1} - 1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}.$$

**例 7.2.23 (2019 江苏年竞赛题).** 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{8^n(2n-1)} x^{3n-1}$  的收敛域与和函数.

记  $a_n = \frac{n}{8^n(2n-1)} x^{3n-1}$ , 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x^{3n+2}}{8^{n+1}(2n+1)} \cdot \frac{8^n(2n-1)}{nx^{3n-1}} \right| = \left| \frac{x}{2} \right|^3$$

$|x| < 2$  时原级数收敛,  $|x| > 2$  时原级数发散; 当  $x = \pm 2$  时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{8^n(2n-1)} (\pm 2)^{3n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

所以原级数发散, 因此原级数的收敛域为  $(-2, 2)$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{8^n(2n-1)} x^{3n-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1+1}{8^n(2n-1)} x^{3n-1} = \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{2} \right)^{3n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{8^n(2n-1)}$$

其中,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} \sum_{k=1}^n \left( \frac{x}{2} \right)^{3k} = \frac{x^2}{2(8-x^3)}$ , 现求第二项的和.

当  $x \in (0, 2)$  时, 令  $\frac{x}{2} = t^{\frac{2}{3}}$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{8^n(2n-1)} &= \frac{t}{2x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{2n-1} = \frac{t}{2x} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{t^{2n-1}}{2n-1} dt \right)' \\ &= \frac{t}{2x} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t^{2n-1})'}{2n-1} dt = \frac{t}{2x} \int_0^t \frac{dt}{1-t^2} = \frac{t}{4x} \ln \frac{1+t}{1-t} = \frac{\sqrt{x}}{8\sqrt{2}} \ln \frac{2\sqrt{2}+x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}-x^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

当  $x \in (-2, 0)$  时, 令  $\frac{x}{2} = -t^{\frac{3}{2}}$  ( $t > 0$ ), 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{8^n(2n-1)} &= \frac{t}{2x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} t^{2n-1} = \frac{t}{2x} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} (t^{2n-1})' dt \\ &= -\frac{t}{2x} \int_0^t \frac{dt}{1+t^2} = \frac{t}{2x} \arctan t = -\frac{\sqrt{-x}}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{x\sqrt{-x}}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

综上, 所求和函数为

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2(8-x^3)} + \frac{\sqrt{x}}{8\sqrt{2}} \ln \frac{2\sqrt{2}+x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}-x^{\frac{3}{2}}}, & 0 \leq x < 2 \\ \frac{x^2}{2(8-x^3)} - \frac{\sqrt{-x}}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{x\sqrt{-x}}{2\sqrt{2}}, & -2 < x < 0 \end{cases}$$

**例 7.2.24.** 设  $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \tan \frac{x}{2}}{1 - (1+x) \int_0^x \sin^2 \sqrt{t} dt}$ , 求常数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^{n-1} \alpha$  的和.

对极限式做恒等变换, 有

$$\begin{aligned} \alpha &= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \tan \frac{x}{2}}{\exp \int_0^x \sin^2 \sqrt{t} dt \ln(1+x) - 1} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^3}{2}}{\int_0^x \sin^2 \sqrt{t} dt \ln(1+x)} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\int_0^x \sin^2 \sqrt{t} dt} \stackrel{L'}{=} -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin^2 \sqrt{x}} = -1 \end{aligned}$$

为求  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^{n-1} \alpha$  的和, 先求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$  的和函数  $S(x)$ , 显然它的收敛域为  $(-1, 1)$ , 当  $x \in (-1, 1)$  时, 由幂级数在收敛区间的解析性质, 有

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \\ &= x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x \left( \sum_{n=2}^{\infty} x^n \right)'' + \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' \\ &= x \left( x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)'' + \left( x \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = x \left( \frac{x^2}{1-x} \right)'' + \left( \frac{x}{1-x} \right)' \\ &= \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

由于  $|\sin \alpha| = |\sin(-1)| < 1$ , 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^{n-1} \alpha = S(\sin \alpha) = \frac{1 - \sin 1}{(1 + \sin 1)^3}.$$

**例 7.2.25.** 设函数  $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ ,  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$  ( $n \geq 0$ ), 证明: 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}$  收敛并求它的和.

证法一 令  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 那么

$$\begin{aligned} 1 &= (1-x-x^2)f(x) = (1-x-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\ &= a_0 + (a_1 - a_0)x + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+2} - a_{n+1} - a_n)x^{n+2} \end{aligned}$$

比较系数得  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = a_0$ ,  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ , 从而有  $a_n \geq n$ , 故  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ , 故

$$\frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}} = \frac{a_{n+2} - a_n}{a_n a_{n+2}} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+2}}$$

所以  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^m \left( \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{m+1}} - \frac{1}{a_{m+2}} \right) = 1 + 1 = 2$ .

证法二 对  $(x^2 + x - 1)f(x) = -1$  求  $n+2$  阶导,

$$\sum_{k=0}^{n+2} C_{n+2}^k (x^2 + x - 1)^{(k)} f^{(n+2-k)}(x) = 0$$

故

$$(x^2 + x - 1)f^{(n+2)}(x) + (n+2)(2x+1)f^{(n+1)}(x) + (n+2)(n+1)f^{(n)}(x) = 0$$

将  $x = 0$ , 代入上式, 并化简得

$$f^{(n+1)}(0) = \frac{1}{n+2} [f^{(n+2)}(0) - (n+2)(n+1)f^{(n)}(0)]$$

于是有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(n+2)!}{(n+1)!} \cdot \frac{f^{(n+1)}(0)}{f^{(n)}(0)f^{(n+2)}(0)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{n!(n+2)!}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{n+2} \frac{f^{(n+2)}(0) - (n+2)(n+1)f^{(n)}(0)}{f^{(n)}(0)f^{(n+2)}(0)} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{f^{(n+2)}(0) - (n+2)(n+1)f^{(n)}(0)}{f^{(n)}(0)f^{(n+2)}(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{f^{(n)}(0)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{f^{(n+2)}(0)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{f^{(n)}(0)} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{f^{(n)}(0)} = \frac{1}{f(0)} + \frac{1}{f'(0)} = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

### 7.2.5 幂级数的应用

#### 证明不等式

**例 7.2.26.** 设  $x > 0, x \neq 1$ , 证明  $0 < \frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$ .

证 当  $0 < x < 1$  或  $x > 1$  时,  $x^2 - 1$  与  $x \ln x$  同号, 所以  $\frac{x \ln x}{x^2 - 1} > 0$ , 令  $x = \frac{1+t}{1-t}$ , 则  $\frac{x \ln x}{x^2 - 1} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{t} - t \right) \cdot \ln \frac{1+t}{1-t}$ ,  $0 < |t| < 1$ , 而由  $\ln \frac{1+t}{1-t}$  的幂级数展开式, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left( \frac{1}{t} - t \right) \ln \frac{1+t}{1-t} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} - t \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+2}}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} t^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right) t^{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} t^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{2n}}{4n^2 - 1} \end{aligned}$$

记  $u_n = \frac{t^{2n}}{4n^2 - 1}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n + 1}{u_n} = t^2 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{2n}}{4n^2 - 1}$  收敛, 且和大于 0, 于是  $0 < \frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$ .

**例 7.2.27.** 设  $x > 0, x \neq 1$ , 证明  $\frac{\ln x}{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

证 要证  $\frac{\ln x}{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ , 即证  $I = \frac{\ln x}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 0$ , 为此

$$I = \frac{\frac{x=(1+t)^2}{0 < |t| < 1} - \frac{1}{t} \ln \frac{1+t}{1-t} - \frac{2}{1-t^2}}{t} = \frac{2}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4nt^{2n}}{2n+1} \leq 0$$

故得证  $\frac{\ln x}{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

**例 7.2.28.** 设  $0 < x < 1$ , 证明:  $3 \ln \frac{1+x}{1-x} < \frac{6x-4x^3}{1-x^2}$ .

证 因为  $3 \ln \frac{1+x}{1-x} = 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ,  $|x| < 1$ , 于是要证

$$6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} < \frac{6x-4x^3}{1-x^2}$$

又  $6x + 2x^3 \leqslant 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ , 只需证

$$6x + 2x^3 < 4x + \frac{2x}{1-x^2} \Rightarrow 2x + 2x^3 - \frac{2x}{1-x^2} > 0 \Rightarrow 1 - x^4 > 1$$

而  $0 < x < 1$ , 故上式成立, 即得待证不等式.

### 求和问题

**例 7.2.29.** 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)(2n-1)}$  的和.

令  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1} x^{3n-1}$ , 那么  $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{3n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n+1} = \frac{x}{1+x^3}, |x| < 1$ , 于是

$$\begin{aligned} S(1) &= \int_0^1 S'(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^3} dx = \int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \frac{3}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) - \frac{1}{3} \ln(x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \ln 2 \end{aligned}$$

因为  $\frac{1}{(3n-1)(2n-1)} = \frac{2}{2n-1} - \frac{3}{3n-1}$ , 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{2}{2n-1} - \frac{3}{3n-1} \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$$

令  $Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ , 那么

$$Q'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \quad |x| < 1$$

因此  $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 2Q(1) = 2Q(0) + 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 2 \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1} = 3S(1) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2$ , 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)(2n-1)} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 2.$$

**例 7.2.30.** 设  $a_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ),

$$(1) \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{a_n};$$

$$(2) \text{ 求级数 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{a_n} \text{ 的和.}$$

(1) 因为  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$  ( $\alpha > 0$ ), 且  $\Gamma(\alpha+1) = \Gamma(\alpha)$ , 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n)}{n\Gamma(n)} = 0.$$

(2) 又因为  $a_n = \Gamma(n+1) = n!$ , 因此级数转化为  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{n!}$ , 为此构造幂级数  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{n!} x^n$ , 那么

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n!} = e^x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^n = e^x + x \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} \right)' = e^x + x \left( x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right)' \\ &= e^x + x(xe^x)' = e^x + xe^x + x^2 e^x \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{a_n} = S(1) = 3e. \end{aligned}$$

**例 7.2.31.** 设  $a_n = \int_0^{n\pi} x|\sin x|dx, n = 1, 2, \dots$ ,

$$(1) \text{ 证明: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n};$$

$$(2) \text{ 求级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \text{ 的和.}$$

(1) 化积分为求和形式

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x|\sin x|dx \stackrel{t=x-k\pi}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi (k\pi+t)|\sin(k\pi+t)|dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi (k\pi+t) \sin t dt = \pi \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2\pi \end{aligned}$$

$$\text{因此 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

(2) 令  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ , 即求  $S\left(\frac{1}{2}\right)$  的值, 为此,

$$\begin{aligned} S(x) &= x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = xS_1(x) \\ S_1(x) &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n^2 t^{n-1} dt \right)' = \left( \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \right)' = \left( x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \right)' = (xS_2(x))' \\ S_2(x) &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nt^{n-1} dt \right)' = \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \\ \Rightarrow S_1(x) &= \frac{1+x}{(1-x)^3} \Rightarrow S(x) = \frac{x^2+x}{(1-x)^3} \Rightarrow S\left(\frac{1}{2}\right) = 6. \end{aligned}$$

**例 7.2.32.** 证明:  $\lim_{m,n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$  存在, 并求之.

因为

$$\int_{-1}^0 x^{i+j-1} dx = \frac{1}{i+j} x^{i+j} \Big|_{-1}^0 = -\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$$

所以

$$\begin{aligned} S_{m,n} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{i+j}}{i+j} = -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_{-1}^0 x^{i+j-1} dx = -\sum_{i=1}^m \int_{-1}^0 \left( \sum_{j=1}^n x^{i+j-1} \right) dx \\ &= -\sum_{i=1}^m \int_{-1}^0 \frac{x^i (1-x^n)}{1-x} dx = -\int_{-1}^0 \frac{1}{1-x} \sum_{i=1}^m (x^i - x^{n+i}) dx \\ &= -\int_{-1}^0 \frac{x - x^{m+1}}{(1-x)^2} dx + \int_{-1}^0 \frac{x^{n+1} - x^{n+m+1}}{(1-x)^2} dx \end{aligned}$$

而  $x \in [-1, 0]$ ,  $(1-x)^2 \geq 1$ , 所以  $\int_{-1}^0 \frac{x^i}{(1-x)^2} dx \leq \int_{-1}^0 x^i dx$ , 又  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{-1}^0 x^i dx = 0$ , 所以  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{-1}^0 \frac{x^i}{(1-x)^2} dx = 0$ , 所以

$$\lim_{m,n \rightarrow +\infty} S_{m,n} = -\int_{-1}^0 \frac{x}{(1-x)^2} dx = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

## 计算积分

**例 7.2.33.** 用幂级数展开方式求例 3.2.5.

同样地，换元得到  $I = \frac{1}{4} \int_0^1 \ln t \ln(1-t) dt$ ，并且  $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} |x| < 1$ ，所以<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{4} \int_0^1 \ln t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} dt = -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{t^n \ln t}{n} dt = -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\ln t d(t^{n+1})}{n(n+1)} \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{t^{n+1} \ln t}{n(n+1)} \Big|_0^1 - \frac{1}{n(n+1)} \int_0^1 t^n dt \right] = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] = \frac{1}{4} \left( 2 - \frac{\pi^2}{6} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{24}. \end{aligned}$$

**例 7.2.34.** 设  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ ,  $0 < x < 1$ ,

$$(1) \text{ 证明: } f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6};$$

$$(2) \text{ 计算: } I = \int_0^1 \frac{1}{2-x} \ln \left( \frac{1}{x} \right) dx.$$

(1) 令  $F(x) = f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x)$ , 则

$$F'(x) = f'(x) - f'(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln x}{x-1} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n-1}}{n}$$

因此  $F'(x) = 0$ , 从而  $\forall x \in (0, 1), F(x) \equiv C$ , 又  $f(0) = 0, f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \ln(1-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x \ln x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$  在  $x=1$  处收敛, 故  $f(x)$  在  $x=1$  处左连续,  $f(1-x)$  在  $x=0$  处右连续, 可知  $F(x)$  在  $x=0$  处右连续, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = C = 0 + \frac{\pi^2}{6} + 0 = \frac{\pi^2}{6}$$

得  $C = \frac{\pi^2}{6}$ , 故得

$$f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6}.$$

(2) 令  $t = 2-x$ , 则

$$I = - \int_1^2 \frac{\ln(2-t)}{t} dt = - \int_1^2 \frac{\ln 2 + \ln \left(1 - \frac{t}{2}\right)}{t} dt = - \ln^2 2 - \int_1^2 \frac{1}{t} \ln \left(1 - \frac{t}{2}\right) dt$$

$$\text{下求 } \int_1^2 \frac{1}{t} \ln \left(1 - \frac{t}{2}\right) dt,$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{t} \ln \left(1 - \frac{t}{2}\right) dt &= - \int_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n \cdot 2^n} dt = - \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^2 \frac{t^{n-1}}{n \cdot 2^n} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2 \cdot 2^n} - \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2} - \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

其中,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \ln^2 2 \right)$ , 于是  $I = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2}$ .

$$3 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} - \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 1 \right] = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

$$4 \frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln [1+(x-1)]}{x-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n-1}}{n}$$

### 7.3 Fourier 级数

Fourier 级数是函数项级数的一种特殊形式. 它是研究和表示周期函数的有力工具.

#### 7.3.1 Fourier 系数

**定义 7.3.1 (Fourier 系数).** 形如  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  的级数称为 Fourier 级数或三角级数. 设  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的周期函数, 且能展开为 Fourier 级数, 即

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

若积分

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, n = 0, 1, 2 \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, n = 1, 2 \dots \end{aligned}$$

都存在, 则称  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  为  $f(x)$  的 Fourier 级数, 其中  $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, \dots$  称为  $f(x)$  的 Fourier 系数.

**定理 7.3.1 (Dirichlet 收敛定理).** 设  $f(x)$  是以  $2l$  为周期的周期函数, 如果它满足

- (1) 一个周期内除有限个第一类间断点外都连续;
- (2) 一个周期内至多只有有限个极值点.

则  $f(x)$  的 Fourier 级数收敛, 并且当  $x$  为  $f(x)$  的连续点时, 级数收敛于  $f(x)$ ; 当  $x$  为  $f(x)$  的间断点时, 级数收敛于  $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$ .

#### 7.3.2 周期为 $2l$ 的 Fourier 展开

**定义 7.3.2 (正弦级数与余弦级数).** 设  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的周期函数, 且能展开成 Fourier 系数, 即

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

- (1) 当  $f(x)$  为奇函数时

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0, a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0$$

此时  $f(x)$  的 Fourier 级数表达式为  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$  仅含正弦项, 称为正弦级数;

(2) 当  $f(x)$  为偶函数时

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0$$

此时  $f(x)$  的 Fourier 级数表达式为:  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ , 此式仅含余弦项, 称为余弦级数.

**定理 7.3.2 (Fourier 展开).** 设  $f(x)$  的周期为  $2l$ , 且满足收敛定理的条件, 则其在  $[-l, l]$  上的 Fourier 级数展开式为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

其中 Fourier 系数  $a_0, a_n, b_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 取值为:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \end{aligned}$$

特别地, 进行变量代换  $z = \frac{\pi}{l}x$ , 于是区间  $-l \leq x < l$  变换为  $-\pi \leq z < \pi$ , 存在周期为  $2\pi$  的函数  $F(z)$  使得  $f(x) = f\left(\frac{lz}{\pi}\right) = F(z)$ , 对  $F(z)$  进行 Fourier 展开, 最后将  $z = \frac{\pi}{l}x$  回代即可.

**定义 7.3.3 (周期延拓与奇偶延拓).** 若  $f(x)$  仅在  $[-\pi, \pi]$  上有定义, 此时需要将其展开为 Fourier 级数, 则需要在  $[-\pi, \pi]$  外补充  $f(x)$  的定义, 使其成为周期为  $2\pi$  的周期函数. 这种方法称为周期延拓. 若  $f(x)$  仅给出  $[0, \pi]$  上的定义, 若要将其展开为正弦级数, 则需补充  $[-\pi, 0]$  的定义, 使其成为奇函数, 这种方法称为函数的奇延拓; 若要将其展开为余弦级数, 则需补充  $[-\pi, 0]$  的定义, 使其成为偶函数, 这种方法称为函数的偶延拓. 进行奇偶延拓后, 补充周期延拓即可将函数  $f(x)$  进行 Fourier 展开. 给出函数  $f(x)$  在  $[0, l]$  的定义同理.

**例 7.3.1.** 在所指定的区间内把下列函数展开为 Fourier 级数.

$$\left| \begin{array}{ll} (1) \text{ 在区间 } (0, 2l) \text{ 内展开 } f(x) = \begin{cases} A, & 0 < x < l \\ 0, & l < x < 2l \end{cases} . & (2) \text{ 在区间 } (-\pi, \pi) \text{ 内展开 } f(x) = x \\ (3) \text{ 在区间 } (0, 2\pi) \text{ 内展开 } f(x) = \frac{\pi - x}{2}. & (4) \text{ 在区间 } (-\pi, \pi) \text{ 内展开 } f(x) = |x|. \end{array} \right.$$

(1) 由于

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) dx = \frac{1}{l} \int_0^l A dx = A; \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_0^l A \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0; \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_0^l A \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{A}{n\pi} [1 - (-1)^n] \end{aligned}$$

故按展开定理,  $f(x)$  可展开为

$$\frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\frac{\pi x}{l}) = \begin{cases} A, & 0 < x < l \\ \frac{A}{2}, & x = l \\ 0, & l < x < 2l \end{cases}$$

(2) 因为  $f(x) = x$  是奇函数, 从而  $a_0 = a_n = 0$ , 且

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = (-1)^{n-1} \frac{2}{n}$$

故按展开定理,  $f(x)$  可展开为  $2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} = x$ .

(3) 由于

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) dx = 0; \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx dx = \frac{\pi - x}{2n\pi} \sin nx \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx dx = 0; \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx = -\frac{\pi - x}{2n\pi} \cos nx \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

故按展开定理,  $f(x)$  可展开为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$ .

(4) 因为  $f(x) = |x|$  为偶函数, 从而  $b_n = 0$ , 且

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi; \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n\pi} x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

故按展开定理,  $f(x)$  可展开为  $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} = |x|$ .

**例 7.3.2.** 将函数  $f(x) = 1 - x^2$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 展开为余弦级数, 并求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$  的和.

由题意  $l = \pi$ ,  $b_n = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 那么  $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - x^2) dx = 2 - \frac{2\pi^2}{3}$ ,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - x^2) \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{1 - x^2}{n} \sin nx - \frac{2x}{n^2} \cos nx + \frac{2}{n^3} \sin nx \right) \Big|_0^{\pi} = -\frac{4}{n^2} (-1)^n \end{aligned}$$

于是  $f(x) = 1 - \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ , 将  $x = 0$  代入可得  $f(0) = 1 - \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$  又由  $f(x) = 1 - x^2$  知  $f(0) = 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ .

**例 7.3.3.** 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  的和.

法一: 由  $(1+x)^{\alpha}$  的二项展开式, 取  $\alpha = -\frac{1}{2}$ ,  $x = -t^2$ , 则有

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n}, \quad -1 < t < 1$$

$\forall x \in (-1, 1)$ , 上式两边分别在  $(0, x)$  或  $(x, 0)$  上积分, 有

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

又因为  $\forall k \geq 1$ ,  $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$ , 所以有  $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ , 于是

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{(2n+1)^{\frac{3}{2}}}$$

从而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$  收敛, 故当  $x = \pm 1$  时, 上述关于  $\arcsin x$  的等式也成立, 即有

$$\forall x \in [-1, 1], \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

令  $x = \sin u$ , 则上式化为

$$u = \sin u + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1) \cdot (2n)!!} \sin^{2n+1} u, \quad -\frac{\pi}{2} < u \leq \frac{\pi}{2}$$

再将上式两端从 0 到  $\frac{\pi}{2}$  积分, 得

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{8} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1) \cdot (2n)!!} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} u \, du = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1) \cdot (2n)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \end{aligned}$$

于是  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , 故得  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

**法二:** 将函数  $f(x) = x^2$  在  $(-\pi, \pi]$  上展开成 Fourier 级数, 因为  $f(x)$  在  $(-\pi, \pi)$  上为偶函数, 所以其 Fourier 系数为

$$b_0 = 0, a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \, dx = \frac{2\pi^2}{3}, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos nx \, dx = \frac{4}{n^2}, (n = 1, 2, \dots)$$

于是由收敛定理有

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cdot \cos nx \quad (-\pi < x \leq \pi)$$

当  $x = \pi$  时, 有  $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , 即得  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

### 7.3.3 Fourier 级数综合性问题

已知 Fourier 展开求 Fourier 系数

**例 7.3.4.** 设  $f(x)$  是在周期为 2 的周期函数且  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$   $f(x)$  的 Fourier 级数为  $\frac{a_0}{2} +$

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$ , 则  $n \geq 1$  时, 求  $a_n$ .

对于周期为  $2l$  的周期函数的 Fourier 级数为  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$  系数  $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx, n = 1, 2, \dots$ , 由题意知,  $f(x)$  的周期为 2, 故  $l = 1$ , 所以  $a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x \, dx$ , 即

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^2 f(x) \cos n\pi x \, dx = \int_0^1 f(x) \cos n\pi x \, dx + \int_1^2 f(x) \cos n\pi x \, dx = \int_0^1 x \cos n\pi x \, dx \\ &= \frac{x}{n\pi} \sin n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}. \end{aligned}$$

**定义 7.3.4 (平均收敛).** 若函数列  $f_n(x)$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - S(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0$ , 则称  $f_n(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  平均收敛于  $S(x)$ .

**引理 7.3.1.** 若  $f(x), g(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  平方可积, 则

(1)  $f(x)g(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  可积, 且

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)g(x)|dx \leq \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

(2)  $f(x) + g(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  可积, 且

$$\left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) + g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

**定理 7.3.3 (均方逼近).** 若  $f(x)$  以  $2\pi$  为周期, 在  $[-\pi, \pi]$  上平方可积, 则在所有  $n$  阶多项式  $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$  中, 当  $T_n(x)$  取  $f(x)$  的 Fourier 级数的  $n$  阶部分和  $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$  时,  $f(x)$  与  $T_n(x)$  的均方误差最小, 即

$$\min \|f(x) - T_n(x)\| = \|f(x) - S_n(x)\|.$$

## 第 8 章

# 微分方程

“读读欧拉，读读欧拉，他是我们大家的老师。”

——拉普拉斯

微分方程是数学中的一个重要分支，它研究的是包含未知函数及其导数的方程。微分方程在物理学、工程学、经济学等领域中有广泛的应用。

微分方程可以分为常微分方程和偏微分方程两大类（本章将不讨论偏微分方程）。常微分方程中，未知函数只依赖于一个自变量，而偏微分方程中，未知函数依赖于多个自变量。常微分方程的解可以是一个函数，也可以是一个函数族。解的形式和性质取决于方程的类型和边界条件。解常微分方程的方法包括分离变量法、变量代换法、特解法、级数法等。

## 8.1 一阶微分方程

一阶微分方程是指只涉及一个未知函数及其导数的微分方程。通常形式为： $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ，其中  $y$  是未知函数， $x$  是自变量， $f(x, y)$  是关于  $x$  和  $y$  的函数。解一阶微分方程通常需要使用微积分知识和积分技巧。常见的一阶微分方程包括变量分离微分方程、可分离变量微分方程、齐次微分方程等。

### 8.1.1 变量分离方程

**定义 8.1.1** (变量分离方程)。形如  $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$  的方程称为变量分离微分方程。

**例 8.1.1.** (把原方程化为分离变量方程) 求下列微分方程的通解

$$\begin{array}{l|l|l} (1) \tan x \cdot \frac{dy}{dx} - y = 5. & (2) x^2 y' + y + 1. & (3) y dx + (x^2 - 4x) dy = 0. \\ (4) 3e^x \tan y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0. & (5) \frac{dy}{dx} = (1 - y^2) \tan x. & (6) y' \tan x = y \ln y. \end{array}$$

(1) 原方程化为  $\frac{dy}{y+5} = \frac{dx}{\tan x}$ , 两边积分得  $\ln|y+5| = \ln|\sin x| + \ln C$ , 即  $y = C \sin x - 5$ .

(2) 原方程化为  $\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x^2}$ , 两边积分得  $\ln|y+1| = C - \frac{1}{x}$ , 即  $y = Ce^{-\frac{1}{x}} - 1$ .

(3) 原方程化为  $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{4x-x^2}$ , 两边积分得  $\ln|y| = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{4-x} \right| + \ln C$ , 即  $y = \sqrt[4]{\frac{Cx}{4-x}}$ .

(4) 原方程化为  $\frac{3e^x}{e^x-1} dx = \frac{dy}{\sin y \cos y}$ , 两边积分得  $3 \ln|e^x-1| = \ln C |\tan y|$ , 即  $(e^x-1)^3 = C \tan y$ .

(5) 原方程化为  $\frac{dy}{1-y^2} = \tan x dx$ , 两边积分得  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| = -\ln C |\cos x|$ , 即  $\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} = C \sec x$ .

(6) 原方程化为  $\frac{dy}{y \ln y} \cot x dx$ , 两边积分得  $\ln|\ln y| = \ln C |\sin x|$ , 即  $y = Ce^{\sin x}$ .

**例 8.1.2.** 求微分方程  $\cos y dx + (1 + e^{-x}) \sin y dy = 0$  满足  $y(0) = \frac{\pi}{4}$  的特解.

原式化为  $\frac{dx}{1 + e^{-x}} = -\tan y dy$ , 两边积分, 得  $\ln|\cos y| = \ln(1 + e^x) + \ln C$ , 即  $\cos y = C(1 + e^x)$ , 又  $y(0) = \frac{\pi}{4}$ , 故  $C = \frac{\sqrt{2}}{4}$ , 所以该微分方程的特解为  $y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + e^x)$ .

**例 8.1.3.** 设  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数, 且  $\frac{f(x)}{F(x)} = -2$ ,  $F(0) = 1$ , 求  $\int_0^{+\infty} F(x) dx$ .

因为  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数, 所以  $F'(x) = f(x)$ , 且  $f(x) = -2F(x)$ , 则

$$F'(x) = -F(x) \Rightarrow \frac{dF(x)}{F(x)} = -2dx$$

两边积分得  $F(x) = Ce^{-2x}$ , 又  $F(0) = 1$ , 所以  $C = 1$ , 于是

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

**例 8.1.4.** 设函数  $y = f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内严格单调递增且可导,  $x = f^{-1}(y)$  为其反函数,

$$\forall x, y > 0, xy \leq \frac{1}{2}[xf(x) + yf^{-1}(y)]$$

求  $f(x)$  的解析式.

令  $y = f(u)$ , 则由题设知

$$xf(u) \leq \frac{1}{2}[xf(x) + uf(u)] \Rightarrow x[f(u) - f(x)] \leq f(u)(u - x)$$

于是  $\forall x \in (0, +\infty)$ , 可得

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow x^+} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} &\leq \lim_{u \rightarrow x^+} \frac{f(u)}{x} \Rightarrow f'_+(x) \leq \frac{f(x)}{x} \\ \lim_{u \rightarrow x^-} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} &\geq \lim_{u \rightarrow x^-} \frac{f(u)}{x} \Rightarrow f'_-(x) \geq \frac{f(x)}{x} \end{aligned}$$

又因为  $f'_-(x) - f'_+(x)$ , 则必有  $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$ , 分离变量积分可得该方程的通解为  $f(x) = Cx$ , 又因为函数在  $(0, +\infty)$  上严格单调递增, 则  $C > 0$ , 即  $f(x) = Cx$ , 其中  $C$  为正常数.

## 8.1.2 齐次微分方程

**定义 8.1.2 (齐次微分方程).** 形如  $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$  的方程称为齐次微分方程.

**例 8.1.5.** 求微分方程  $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$  的通解.

令  $u = \frac{y}{x}$ , 则  $y = ux$ ,  $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ , 代入原方程, 化为  $x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}$ , 再化为  $udu = \frac{dx}{dx}$ , 两边积分  $\int u du = \int \frac{dx}{dx}$ , 解得  $\frac{u^2}{2} = \ln|Cx|$ , 故原方程的通解为  $\frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2} = \ln|Cx|$ , 其中  $C$  是任意常数.

**例 8.1.6.** 求微分方程  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{1}{\ln(x^2 + y^2) - 2\ln x}$  的通解.

$$\text{原式} \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \ln^{-1} \left[ 1 + \left( \frac{y}{x} \right)^2 \right] \xrightarrow{\frac{y}{x}=z} \ln(1+z^2) dz = \frac{dx}{x}, \text{ 两边积分, 得}$$

$$z \ln(1+z^2) - 2z + 2 \arctan z = \ln|x| + C$$

$$\text{即 } \frac{y}{x} \ln \left( 1 + \frac{y^2}{x^2} \right) - \frac{2y}{x} + 2 \arctan \frac{y}{x} = \ln|x| + C.$$

**例 8.1.7 (1996 数学 (三)).** 求微分方程  $\frac{dy}{dx} = \frac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$  的通解.

$$\text{原式} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left( \frac{y}{x} \right)^2} \xrightarrow{\frac{y}{x}=z} \frac{dz}{-\sqrt{1+z^2}} = \frac{dx}{x}, \text{ 两边积分, 得}$$

$$-\ln \left| \sqrt{1+z^2} + z \right| = \ln|x| + \ln C$$

$$\text{即 } \frac{1}{\sqrt{1+z^2} + z} = Cx \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + y = C.$$

可化为齐次方程的微分方程形如方程

$$\frac{dy}{dx} = f \left( \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \right)$$

其中  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  为常数, 且  $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ . 当  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$  时, 令  $x = X + h, y = Y + k$ , 由

$$\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{cases}$$

解出  $h$  与  $k$ , 可将原方程化为齐次方程

$$\frac{dY}{dX} = f \left( \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y} \right) = f \left( \frac{a_1 + b_1 \frac{Y}{X}}{a_2 + b_2 \frac{Y}{X}} \right) = g \left( \frac{Y}{X} \right)$$

当  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$  时, 即  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$ , 可设  $u = a_2x + b_2y$ , 代入原方程后可化为可分离变量的微分方程, 即有

$$\frac{dy}{dx} = f \left( \frac{ku + c_1}{u + c_2} \right) = g(u), \quad \frac{du}{dx} = a_2 + b_2g(u).$$

### 8.1.3 线性微分方程

**定义 8.1.3 (一阶线性微分方程).** 形如  $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$  的方程称为一阶线性微分方程.

**定理 8.1.1 (通解公式).** 对于一阶线性微分方程, 则有通解公式为

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[ \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right].$$

**例 8.1.8.** 用一阶线性微分方程的通解公式, 求解例题 8.1.5.

原方程化为  $yy' - \frac{1}{x}y^2 = x$ , 即  $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}y^2\right) - \frac{2}{x}\left(\frac{1}{2}y^2\right) = x$ , 令  $z = \frac{1}{2}y^2$ , 上式化为  $\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = x$ , 由公式得通解为

$$z = e^{2\int \frac{dx}{x}} \left[ \int xe^{-2\int \frac{dx}{x}} dx + C \right] = x^2(\ln|x| + C)$$

故原方程的通解为  $\frac{1}{2}y^2 = x^2(\ln|x| + C)$ .

**例 8.1.9 (2009 数二).** 设非负函数  $y = y(x)$  ( $x \geq 0$ ) 满足微分方程  $xy'' - y' + 2 = 0$ , 当曲线  $y = y(x)$  过原点时, 其与直线  $x = 1$  及  $y = 0$  围成平面区域  $D$  的面积为 2, 求  $D$  绕  $y$  轴旋转所得旋转体的体积.

**法一:** 令  $y' = p(x)$ , 则  $y'' = p'(x)$ , 代入原方程, 得  $p'(x) - \frac{2}{x}p(x) = -\frac{2}{x}$  ( $x > 0$ ), 由通解公式, 得通解为

$$y' = p(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} \left[ \int \left(-\frac{2}{x}\right) \cdot e^{-\int \frac{dx}{x}} dx + C_1 \right] = 2 + C_1 x$$

两边积分, 解得  $y = 2x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2$ , ( $x > 0$ ), 而由已知  $y(0) = 0$ , 有  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0$ , 于是得  $C_2 = 0$ , 从而  $y = 2x + \frac{1}{2}C_1x^2$ , 又由定积分的几何意义, 有  $2 = \int_0^1 \left(2x + \frac{1}{2}C_1x^2\right) dx = 1 + \frac{1}{6}C_1$ , 解得  $C_1 = 6$ , 从而得  $y = 2x + 3x^2$ , 由求根公式, 解得  $x = \frac{1}{3}(\pm\sqrt{3y+1} - 1)$ , 因为  $0 \leq x < 1$ , 且  $y = y(x)$  非负, 所以  $x = \frac{1}{3}(-\sqrt{3y+1} - 1)$  舍去, 从而得  $x = \frac{1}{3}(\sqrt{3y+1} - 1)$ ,  $0 < y < 5$ , 故所求体积为

$$V = 5\pi - \pi \int_0^5 x^2 dy = 5\pi - \frac{\pi}{9} \int_0^5 (\sqrt{3y+1} - 1)^2 dy = \frac{17\pi}{6}.$$

**法二:** 方程两边同时除以  $x^2$ , 化为  $\frac{xy'' - y'}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$ , 即  $\left(\frac{y'}{x}\right)' = \left(\frac{2}{x}\right)',$  于是得  $\frac{y'}{x} = \frac{2}{x} + C_1$ , 即  $y' = 2 + C_1 x$ , 两边积分, 得  $y = 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2$ , 而由  $y(0) = 0$ , 得  $C_2 = 0$ , 从而  $y = 2x + \frac{C_1}{2}x^2$ , 又由定积分的几何意义, 有  $2 = \int_0^1 \left(2x + \frac{1}{2}C_1x^2\right) dx = 1 + \frac{1}{6}C_1$ , 解得  $C_1 = 6$ , 于是  $y = 2x + 3x^2$ , 故所求旋转体的体积为

$$V = 2\pi \int_0^1 xy(x) dx = 2\pi \int_0^1 x(2x + 3x^2) dx = \frac{17\pi}{6}.$$

**法三:** 将方程  $xy'' - y' + 2 = 0$ , 化简为  $xy'' + y' - 2y' + 2 = 0$ , 即  $(xy' - 2y + 2x)' = 0$ . 于是得  $xy' - 2y + 2x = C_1$ , 即  $y' - \frac{2}{x}y = -2 + \frac{C_1}{x}$ , 由通解公式, 其通解为

$$y = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left[ \int \left(-2 + \frac{C_1}{x}\right) \cdot e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx + C_2 \right] = x^2 \left( \frac{2}{x} - \frac{C_1}{2x^2} + C_2 \right) = 2x - \frac{C_1}{2} + C_2 x^2$$

而由已知  $y(0) = 0$ , 代入得  $C_1 = 0$ , 于是  $y = 2x + C_2 x^2$ , 又由定积分的几何意义, 有  $2 = \int_0^1 (2x + C_2 x^2) dx = 1 + \frac{C_2}{3}$ , 解得  $C_2 = 3$ , 从而得  $y = 2x + 3x^2$ , 故所求旋转体的体积为

$$V = 2\pi \int_0^1 xy(x) dx = 2\pi \int_0^1 (2x^2 + 3x^3) dx = \frac{17\pi}{6}.$$

#### 8.1.4 Bernoulli 微分方程

**定义 8.1.4 (Bernoulli 微分方程).** 形如  $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$ ,  $n \neq 0, 1$  的方程称为 Bernoulli 微分方程.

**例 8.1.10.** 将例题 8.1.5 化为 Bernoulli 方程, 并求其通解.

原方程化为  $y' - \frac{1}{x}y = xy^{-1}$ , 此为 Bernoulli 方程, 其中  $n = -1$ , 令  $z = y^{1-n} = y^2$ , 代入上述方程, 化简得  $\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = x$ , 即  $\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = 2x$ , 由公式得通解为

$$z = e^{2\int \frac{dx}{x}} \left[ \int 2xe^{-2\int \frac{dx}{x}} dx + C \right] = x^2(2\ln|x| + C)$$

故原方程的通解为  $y^2 = x^2(2\ln|x| + C)$ .

**例 8.1.11 (2023 合肥工业大学).** 设  $f(x)$  是连续函数, 且满足  $f(x) = e^x + e^x \int_0^x f^2(t)dt$ , 求  $f(x)$ .

由题意可得  $f(0) = 1$ , 对方程两边  $x$  同时求导得

$$f'(x) = e^x + e^x \int_0^x f^2(t)dt + e^x f^2(x) = f(x) + e^x f^2(x)$$

该方程为 Bernoulli 方程, 令  $z(x) = \frac{1}{f(x)}$ , 那么有  $z'(x) + z(x) = -e^x$ , 由通解公式得

$$z(x) = e^{-\int dx} \left[ \int -e^x \cdot e^{\int dx} dx + C \right] = -\frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$$

且  $z(0) = 1$ , 解得  $C = \frac{3}{2}$ , 故  $f(x) = \frac{2}{3e^{-x} - e^x}$ .

**例 8.1.12.** 求微分方程  $y' \cos y = (1 + \cos x \sin y) \sin y$  的通解.

令  $\sin y = z$ , 那么原方程可化为  $\frac{dz}{dx} = z(z \cos x + 1)$  即  $\frac{dz}{dx} - z = z^2 \cos x$ , 再令  $z^{-1} = u$ , 整理上式得  $\frac{du}{dx} + u = -\cos x$ , 由通解公式:

$$u = e^{-\int dx} \left[ -\int e^{\int dx} dx + C_1 \right] = -\frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + C_1 e^{-x}$$

回代  $u = \frac{1}{\sin y}$ , 得原方程的通解为  $\frac{2}{\sin y} + \cos x + \sin x = C e^{-x}$ .

**例 8.1.13 (第十四届大学生数学竞赛).** 求方程的通解  $\frac{dy}{dx} x \ln x \sin y + \cos y(1 - x \cos y)dx = 0$ .

令  $\cos y = u$ , 那么  $u' = -\sin y \cdot y'$ , 原式化为  $u' - \frac{1}{x \ln x}u = -\frac{u^2}{\ln x}$ , 则

$$\begin{aligned} \text{原式 } &\xrightarrow[n=2]{z=u^{1-n}} \frac{dz}{dx} + \frac{1}{x \ln x}z = \frac{1}{\ln x} \Rightarrow z = e^{-\int \frac{dx}{x \ln x}} \left[ \int \frac{1}{\ln x} \cdot e^{\int \frac{dx}{x \ln x}} dx + C \right] \\ &z = \frac{x+C}{\ln x} \Rightarrow \cos y = \frac{\ln x}{x+C}. \end{aligned}$$

## 8.1.5 恰当方程与积分因子

### 恰当方程

**定义 8.1.5 (全微分方程).** 对于微分方程

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

若  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 则该方程称为恰当方程或全微分方程.

**例 8.1.14.** 求微分方程  $(\sin y - ye^{-x})dx + (x \cos y + e^{-x})dy = 2xdx$  的通解

记  $P(x, y) = \sin y - ye^{-x}$ ,  $Q(x, y) = x \cos y + e^{-x}$ , 则由

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos y - e^{-x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

知原方程为全微分方程, 且曲线积分  $\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy$  与路径无关, 取  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , 原函数为

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(0, 0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_0^x P(x, 0) dx + \int_0^y Q(x, y) dy \\ &= \int_0^x (-2x) dx + \int_0^y (x \cos y + e^{-x}) dy = -x^2 + x \sin y + ye^{-x} \end{aligned}$$

故原方程的通解为  $u(x, y) \equiv C$ , 即  $x \sin y + ye^{-x} - x^2 \equiv C$ .

**例 8.1.15.** 求微分方程  $y''(3y'^2 - x) = y'$  的通解.

原方程化为  $y''(3y'^2 - x) - y' = 0$ , 且注意到  $d(y'^3) = 3y'^2$ ,  $d(xy') = y' + xy''$ , 于是原式化为

$$d(y'^3 - xy') = 0 \Rightarrow y'^3 - xy' = C_1$$

令  $p = y' = \frac{dy}{dx}$ , 那么  $dx = \frac{dy}{p}$ , 则  $p^3 - xp = C_1$ , 即  $x = p^2 - \frac{C_1}{p}$ , 两边全微分得

$$dx = 2pdः + \frac{C_1 dp}{p^2}$$

代入  $dx = \frac{dy}{p}$ , 得  $dy = \left(2p^2 + \frac{C_1}{p}\right)dp$ , 为变量分离方程, 于是两边积分得

$$\int dy = \int \left(2p^2 + \frac{C_1}{p}\right) dp \Rightarrow y = \frac{2}{3}p^3 + C_1 \ln p + C_2$$

其中  $x = p^2 - \frac{C_1}{p}$ .

以下一些简单函数的全微分公式, 将对我们较快地进行这种重新组合有所帮助.

表 8.1: 简单函数的全微分公式

|   |  |
|---|--|
| (1) $xdy + ydx = d(xy)$   | (2) $xdx + ydy = \frac{1}{2}d(x^2 + y^2)$                            |
| (3) $\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$                         | (4) $\frac{xdy - ydx}{y^2} = d\left(-\frac{x}{y}\right)$             |
| (5) $\frac{2xydy - y^2dx}{x^2} = d\left(\frac{y^2}{x}\right)$                   | (6) $\frac{2xydx - x^2dy}{y^2} = d\left(\frac{x^2}{y}\right)$        |
| (7) $\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}d[\ln(x^2 + y^2)]$                | (8) $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$ |
| (9) $\frac{xdy - ydx}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}d\left(\ln\frac{x+y}{x-y}\right)$ | (10) $\frac{xdy - ydx}{xy} = d\left(\ln\frac{y}{x}\right)$           |

## 积分因子

**定理 8.1.2 (积分因子).** 若微分方程  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  不满足  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 令  $\Delta_\partial = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 那么对于以下特殊情况, 可确定积分因子.

(1) 若  $\frac{\Delta_\partial}{Q}$  与  $y$  无关, 则有积分因子  $\mu(x) = \exp \int \frac{\Delta_\partial}{Q} dx$ .

(2) 若  $\frac{\Delta_\partial}{P}$  与  $x$  无关, 则有积分因子  $\mu(y) = \exp \int \frac{-\Delta_\partial}{P} dy$ .

(3) 若满足  $f(mx^a + ny^b) = \frac{\Delta_\partial}{max^{a-1}Q - nby^{b-1}P}$ , 则有积分因子

$$\mu(xy) = \exp \int f(mx^a + ny^b) d(mx^a + ny^b).$$

(4) 若满足  $f(\sqrt{x^a y^b}) = \frac{2\sqrt{x^a y^b} \Delta_\partial}{x^{a-1} y^{b-1} (ayQ - bxP)}$ , 则有积分因子

$$\mu(xy) = \exp \int f(\sqrt{x^a y^b}) d(\sqrt{x^a y^b}).$$

**例 8.1.16.** 求解下列方程的通解.

$$\begin{array}{ll} (1) (x + y^2)dx - 2xydy = 0. & (2) (x - y)dx + (x + y)dy = 0. \\ (3) (1 + xy)ydx + (1 - xy)x dy = 0. & (4) xdx = \left( \frac{x^2}{y} - y^3 \right) dy. \end{array}$$

(1)  $P(x, y) = x + y^2$ ,  $Q = -2xy$ , 于是  $\frac{1}{Q} \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = -\frac{2}{x}$ , 于是有积分因子

$$\mu(x) = \exp \left( -2 \int \frac{dx}{x} \right) = \frac{1}{x^2}$$

方程两边同时乘以积分因子  $\mu(x)$ , 并化简为  $d(\ln|x|) + d\left(-\frac{y^2}{x}\right) = 0$ , 故原方程的通解为

$$\ln|x| - \frac{y^2}{x} \equiv C.$$

(2)  $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = -2$ , 于是  $\frac{-2}{2(xQ - yP)} = -\frac{1}{x^2 + y^2}$ , 则有积分因子

$$\mu(xy) = \exp \left( - \int \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

方程两边同时乘以积分因子  $\mu(xy)$ , 得  $\frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy = 0$ , 整理得

$$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} + \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow d\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) + d\left(\frac{\ln(x^2 + y^2)}{2}\right) = 0$$

故原方程的通解为  $\arctan\frac{y}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \equiv C$ .

(3)  $\Delta_\partial = 4xy$ , 于是  $\frac{2x^2y^2 \cdot \Delta_\partial}{x^3y^3[4(-2xy)]} = -\frac{1}{xy}$ , 则有积分因子  $\mu(xy) = \exp \left( - \int \frac{dxy}{xy} \right) = \frac{1}{xy}$ , 方程两边同时乘以积分因子  $\mu(xy)$ , 得  $\frac{1+xy}{x}dx + \frac{1-xy}{y}dy = 0$ , 整理得

$$\begin{aligned} \frac{1+xy}{x}dx + \frac{1-xy}{y}dy &= \frac{dx}{x} + ydx + \frac{dy}{y} - xdy = \left( \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \right) + (ydx - xdy) \\ &= \frac{1}{xy}(ydx - xdy) + \frac{1}{xy} \left( \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \right) = \frac{y}{x} \cdot \frac{ydx - xdy}{y^2} + \frac{ydx + xdy}{x^2y^2} \\ &= d\left(\ln\frac{x}{y}\right) + d\left(-\frac{1}{xy}\right) = d\left(\ln\frac{x}{y} - \frac{1}{xy}\right) = 0 \end{aligned}$$

故原方程的通解为  $\ln\frac{x}{y} - \frac{1}{xy} \equiv C$ .

(4) 方程化为  $x \mathrm{d}x + \left(y^3 - \frac{x^2}{y}\right) \mathrm{d}y = 0$ , 那么  $\Delta_\partial = \frac{2x}{y}$ , 那么有积分因子  $\mu(y) = \exp \int \frac{-\Delta_\partial}{P} \mathrm{d}y = \frac{1}{y^2}$ , 方程两边同时乘以积分因子  $\mu(y)$ , 得  $\frac{x}{y^2} \mathrm{d}x + \left(y - \frac{x^2}{y^3}\right) \mathrm{d}y = 0$ , 整理得

$$\frac{x}{y^2} \mathrm{d}x + \left(y - \frac{x^2}{y^3}\right) \mathrm{d}y = \frac{2x}{y^2} \mathrm{d}x + 2\left(y - \frac{x^2}{y^3}\right) \mathrm{d}y = 2y \mathrm{d}y + \frac{2xy \mathrm{d}x}{y^3} - \frac{2x^2 \mathrm{d}y}{y^3} = \mathrm{d}(y^2) + \mathrm{d}\left(\frac{x^2}{y^2}\right) = 0$$

故原方程的通解为  $y^2 + \frac{x^2}{y^2} \equiv C$ .

**定理 8.1.3.** 若  $\mu = \mu(x, y)$  是微分方程  $P(x, y) \mathrm{d}x + Q(x, y) \mathrm{d}y = 0$  的一个积分因子, 使得

$$\mu(x, y)P(x, y) \mathrm{d}x + \mu(x, y)Q(x, y) \mathrm{d}y = \mathrm{d}\Phi(x, y)$$

则  $\mu(x, y)g(\Phi(x, y))$  也是该方程的一个积分因子, 其中  $g$  是任意一可微的非零函数.

**定理 8.1.4 (积分因子的存在性定理).** 如果微分方程  $P(x, y) \mathrm{d}x + Q(x, y) \mathrm{d}y = 0$  有通解  $u(x, y) = C$ , 那么它总有一个积分因子  $\mu = \mu(x, y)$ , 同时  $\mu\varphi(u)$  也是该方程的一个积分因子, 并且方程的积分因子必须具有  $\mu\varphi(u)$  的形式, 其中  $\varphi(u)$  是  $u$  的任意一个可微函数.

**例 8.1.17.** 求解下列方程.

$$(1) x(4y \mathrm{d}x + 2x \mathrm{d}y) + y^3(3y \mathrm{d}x + 5x \mathrm{d}y) = 0. \quad | \quad (2) (x^3y - 2y^2) \mathrm{d}x + x^4 \mathrm{d}y = 0.$$

(1) 对第一组, 有

$$x(4y \mathrm{d}x + 2x \mathrm{d}y) + y^3(3y \mathrm{d}x + 5x \mathrm{d}y) = x[(2y \mathrm{d}x + 2x \mathrm{d}y) + 2y \mathrm{d}x] = x[2 \mathrm{d}(xy) + 2y \mathrm{d}x] = 2x \mathrm{d}(xy) + 2xy \mathrm{d}x = \mathrm{d}(2x^2y)$$

则其积分因子和二元函数为

$$\mu_1 = 1, u_1 = 2x^2y$$

对第二组, 有

$$y^3(3y \mathrm{d}x + 5x \mathrm{d}y) = 3y^4 \mathrm{d}x + 5xy^3 \mathrm{d}y$$

易见它有一个积分因子  $\mu_2 = \frac{1}{xy^4}$ , 相乘后得

$$\frac{3}{x} \mathrm{d}x + \frac{5}{y} \mathrm{d}y = 3 \mathrm{d}(\ln|x|) + 5 \mathrm{d}(\ln|y|) = \mathrm{d}(\ln|x^3y^5|)$$

相应地有  $u_2 = \ln|x^3y^5|$ , 根据积分因子的存在性定理, 可以考虑选择适当的可微函数  $\varphi$  与  $\tilde{\varphi}$  使得

$$1 \cdot \varphi(2x^2y) = \frac{1}{xy^4} \tilde{\varphi}(\ln|x^3y^5|)$$

取  $\varphi(2x^2y) = 2x^2y$ ,  $\tilde{\varphi}(\ln|x^3y^5|) = 2x^3y^5$ , 则得到原方程的一个积分因子  $\mu = 2x^2y$ , 将它乘原方程两边, 得

$$2x^2y \mathrm{d}(2x^2y) + 6x^2y^5 \mathrm{d}x + 10x^3y^4 \mathrm{d}y = 0$$

即

$$\frac{1}{2} \mathrm{d}(2x^2y)^2 + 2y^5 \mathrm{d}x^3 + 2x^3 \mathrm{d}y^5 = \mathrm{d}(2x^4y^2) + \mathrm{d}(2x^2y^5) = \mathrm{d}(2x^4y^2 + 2x^3y^5) = 0$$

故原方程的通解为  $x^4y^2 + x^3y^5 = C$ .

(2) 将方程改写为

$$x^3y \mathrm{d}x + x^4 \mathrm{d}y + (-2y^2) \mathrm{d}x = 0$$

即

$$x^3(y \mathrm{d}x + x \mathrm{d}y) + (-2y^2) \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow x^3 \mathrm{d}(xy) + (-2y^2) \mathrm{d}x = 0$$

第一组有积分因子  $\mu_1 = \frac{1}{x^3}$  和原函数  $u_1 = xy$ ; 第二组有积分因子  $\mu_2 = \frac{1}{-2y^2}$  和原函数  $u_2 = x$ , 现寻找可微函数  $\varphi$  与  $\tilde{\varphi}$ , 使得

$$\frac{1}{x^3} \varphi(xy) = \frac{1}{-2y^2} \tilde{\varphi}$$

取  $\varphi(xy) = \frac{1}{(xy)^2}$ ,  $\tilde{\varphi} = -\frac{2}{x^5}$ , 则得到原方程的一个积分因子  $\mu = \mu(x, y) = \frac{1}{x^5 y^2}$ , 将它乘原方程两边, 得

$$\frac{d(xy)}{x^2 y^2} - \frac{2}{x^5} dx = 0$$

即

$$d\left(-\frac{1}{xy}\right) + d\left(\frac{1}{2x^4}\right) = 0$$

故原方程的通解为  $\frac{1}{2x^4} - \frac{1}{xy} = C$ .

## 8.2 高阶微分方程

高阶微分方程是指涉及一个未知函数及其多阶导数的微分方程. 通常形式为:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

其中  $y$  是未知函数,  $y^{(i)}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 是  $y$  的  $i$  阶导数,  $F$  是关于  $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$  的函数, 解高阶微分方程需要使用微积分知识、积分技巧以及一些特定的方法, 如常数变易法、特征方程法等.

### 8.2.1 常系数齐次线性微分方程

二阶常系数线性齐次微分方程的通解

**定理 8.2.1** (二阶常系数线性齐次微分方程的通解结构). 设

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (1)$$

(1) 特征方程有两个相异实根  $r_1 \neq r_2$ , 则方程 (1) 的通解为  $Y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ ;

(2) 特征方程有两个相等实根  $r_1 = r_2 = r$ , 则方程 (1) 的通解为  $Y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$ ;

(3) 特征方程有一对共轭复根  $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , 则方程 (1) 的通解为

$$Y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

**例 8.2.1.** 求解下列微分方程的通解.

|  |                             |                                   |
|--|-----------------------------|-----------------------------------|
| $(1) y'' - 12y' + 35y = 0$                 | $(2) y'' + 2y' + 3y = 0$    | $(3) y''' - 6y'' + 3y' + 10y = 0$ |
| $(4) y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$ | $(5) y''' - 2y'' + 5y' = 0$ | $(6) y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$   |

(1) 特征方程  $r^2 - 12r + 35 = 0 \Rightarrow r_1 = 5, r_2 = 7$ , 因此微分方程的通解为  $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{7x}$ .

(2) 特征方程  $r^2 + 2r + 3 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}i$ , 因此微分方程的通解为  $y = e^{-x} (C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x)$ .

(3) 特征方程  $r^3 - 6r^2 + 3r + 10 = 0 \Rightarrow r_1 = -1, r_2 = 2, r_3 = 5$ , 因此微分方程的通解为  $y = C_1 e^{-x} C_2 e^{2x} + C_3 e^{5x}$ .

(4) 特征方程  $r^4 - 2r^3 + 2r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2(r^2+1) = 0$  得二重实根 1, 单重共轭复根  $\pm i$ , 因此微分方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

- (5) 特征方程  $r^3 - 2r^2 + 5r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_{2,3} = 1 \pm 2i$ , 因此微分方程的通解为  $y = C_1 + e^x(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)$ .  
(6) 特征方程  $r^3 - 2r^2 + r - 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = -1, r_3 = 1$ , 因此微分方程的通解为  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^x$ .

**例 8.2.2 (第十三届数学竞赛决赛).** 求区间  $[0, 1]$  上的连续函数  $f(x)$ , 使之满足

$$f(x) = 1 + (1-x) \int_0^x y f(y) dy + x \int_x^1 (1-y) f(y) dy.$$

分别令  $x = 0, 1$ , 代入关系式, 得  $f(0) = f(1) = 1$ , 并对关系式求导, 有

$$f'(x) = - \int_0^x y f(y) dy + \int_x^1 (1-y) f(y) dy$$

再次求导有

$$f''(x) + f(x) = 0$$

该常系数齐次线性微分方程的特征方程为  $r^2 + 1 = 0$ , 特征根为  $r = \pm i$ , 故通解为

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

代入初值  $f(0) = f(1) = 1$ , 得

$$C_1 = 1, C_2 = \frac{1 - \cos 1}{\sin 1} = \tan \frac{1}{2}$$

故所求函数为

$$f(x) = \cos x + \tan \frac{1}{2} \sin x.$$

### $n$ 阶常系数线性齐次微分方程

**定理 8.2.2 ( $n$  阶常系数线性齐次微分方程通解结构).** 设  $n$  阶常系数线性齐次微分方程是

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \quad (2)$$

其中  $p_1, p_2, \dots, p_n$  是常数, 代数方程

$$r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \cdots + p_{n-1} r + p_n = 0$$

称为微分方程 (2) 的特征方程, 特征方程的根叫作微分方程 (2) 的特征根.

(1) 如果  $r_1$  是特征方程的单根, 则

$$y = C e^{r_1 x}$$

是微分方程 (2) 的解;

(2) 如果特征方程有一对共轭复根  $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ , 则

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

是微分方程 (2) 的解;

(3) 如果  $r_1$  是特征方程的  $k$  重根, 则

$$y = (C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) e^{r_1 x}$$

是微分方程 (2) 的解;

(4) 如果  $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$  都是特征方程的  $k$  重根, 则

$$y = e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$$

是微分方程 (2) 的解.

## 8.2.2 常系数非齐次线性微分方程

### 二阶常系数非齐次线性微分方程的通解结构

**例 8.2.3 (1993 数三).** 设二阶常系数非齐次线性微分方程  $y'' + ay' + by = ke^x$  的一个特解为  $y = e^{2x} + (1+x)e^x$ , 试确定  $a, b, k$ , 并求该方程的通解.

法一: 将特解  $y = e^{2x} + (1+x)e^x$  代入原方程, 得

$$(4+2a+b)e^{2x} + (3+2a+b)e^x + (1+a+b)xe^x = ke^x$$

比较两边同类项的系数, 得  $2a+b=-4, 2a+b-k=-3, a+b=-1$ , 解得  $a=-3, b=2, k=-1$  故原方程为

$$y'' - 3y' + 2y = -e^x$$

又对应的齐次线性方程的特征方程为  $r^2 - 3r + 2 = 0$ , 解得特征根为  $r_1 = 1, r_2 = 2$ , 于是可设原方程的特解形式为  $y^* = cxe^x$ , 把它代入原方程中得  $c = 1$ , 故由通解结构知原方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + xe^x$$

其中  $C_1, C_2$  为任意常数.

法二: 由已知及通解的结构与特解形式, 得  $e^{2x}$  与  $e^x$  应是对应齐次线性方程的特解,  $xe^x$  是非齐次线性方程的一个特解. 于是特征方程为

$$r^2 + ar + b = (r-1)(r-2) = r^2 - 3r + 2$$

即得  $a=-3, b=2$ , 又将  $y^* = xe^x$  代入原方程  $y'' - 3y' + 2y = ke^x$  中得  $k=-1$ , 故原方程为  $y'' - 3y' + 2y = -e^x$ , 其通解为  $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + xe^x$ , 其中  $C_1, C_2$  为任意常数.

法三: 由已知及通解的结构与特解形式, 得  $e^{2x}, e^x$  是对应齐次线性方程的特解,  $xe^x$  是非齐次线性方程的一个特解, 分别代入对应的方程, 得

$$\begin{cases} 4+2a+b=0, \\ 1+a+b=0, \\ (2+x)+a(1+x)+bx=k \end{cases}$$

解得  $a=-3, b=2, k=-1$ , 故原方程为  $y'' - 3y' + 2y = -e^x$ , 其通解为  $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + xe^x$  其中  $C_1, C_2$  为任意常数.

**例 8.2.4.** 设  $y = e^x(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$  ( $C_1, C_2$  为任意常数) 为某二阶常系数齐次线性微分方程的通解, 求该微分方程.

法一: 由二阶常系数齐次线性微分方程的通解公式, 可知特征方程的根应为  $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ , 从而特征方程为  $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = (\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i) = 0$ , 即  $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ . 故所求微分方程为  $y'' - 2y' + 2y = 0$ .

法二: 设所求微分方程为  $y'' + py' + qy = 0$ , 其中  $p, q$  为常数. 将已知解  $y = e^x(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$  代入上述方程, 得

$$e^x \sin x [p(C_1 - C_2) + qC_1 - 2C_2] + e^x \cos x [p(C_1 + C_2) + qC_2 + 2C_1] = 0$$

因为  $e^x \sin x$  与  $e^x \cos x$  线性无关, 所以

$$p(C_1 - C_2) + qC_1 - 2C_2 = 0, p(C_1 + C_2) + qC_2 + 2C_1 = 0$$

解得  $p = -2, q = 2$ , 故所求微分方程为  $y'' - 2y' + 2y = 0$ .

法三: 设所求微分方程为  $y'' + py' + qy = 0$ , 其中  $p, q$  为常数. 因为  $y = e^x(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$  为上述方程的通解, 所以  $y_1 = e^x \sin x$  和  $y_2 = e^x \cos x$  为  $y'' + py' + qy = 0$  的特解, 代入方程, 得

$$\begin{cases} p(\cos x + \sin x) + q \sin x + 2 \cos x = 0 \\ p(\cos x - \sin x) + q \cos x - 2 \sin x = 0 \end{cases}$$

改写为矩阵形式, 有  $\begin{pmatrix} \cos x + \sin x & \sin x \\ \cos x - \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cos x \\ 2 \sin x \end{pmatrix}$ , 而

$$\begin{pmatrix} \cos x + \sin x & \sin x \\ \cos x - \sin x & \cos x \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x - \cos x & \cos x + \sin x \end{pmatrix}$$

且  $\begin{vmatrix} \cos x + \sin x & \sin x \\ \cos x - \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$ , 所以

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x - \cos x & \cos x + \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \cos x \\ 2 \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

故所求微分方程为  $y'' - 2y' + 2y = 0$ .

**法四:** 由通解  $y = e^x(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$ , 求出  $y', y''$ :

$$y' = e^x[(C_1 - C_2) \sin x + (C_1 + C_2) \cos x], \quad y'' = e^x(-2C_2 \sin x + 2C_1 \cos x)$$

消去  $C_1$  与  $C_2$ , 得  $y'' - 2y' + 2y = 0$ , 此即为所求微分方程.

**例 8.2.5.** 已知  $y_1 = x$ ,  $y_2 = x + \sin x$ ,  $y_3 = e^x + x$  为某二阶非齐次线性微分方程的三个特解, 求该微分方程, 并求其通解.

因为  $\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{\sin x}{e^x} \neq C$ , 所以  $y_2 - y_1$  与  $y_3 - y_2$  线性无关, 从而得所求微分方程的通解为  $y = C_1 \sin x + C_2 e^x + x$ , 分别求一、二阶导数, 并解出  $C_1$ ,  $C_2$ ,

$$\begin{cases} y' = C_1 \cos x + 7C_2 e^x + 1 \\ y'' = -C_1 \sin x + C_2 e^x \end{cases}$$

即得所求的微分方程为

$$(\cos x - \sin x)y'' + 2 \sin x \cdot y' - (\sin x + \cos x)y = 2 \sin x - x(\sin x + \cos x).$$

**例 8.2.6 (1997 数二).** 设某个二阶常系数非齐次线性微分方程有三个特解:

$$y_1 = xe^x + e^{2x}, \quad y_2 = xe^x + e^{-x}, \quad y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$$

求该微分方程, 并给出其通解.

因为  $\frac{y_1 - y_3}{(y_1 - y_2) + (y_1 - y_3)} = \frac{e^{-x}}{e^{2x}} \neq C$ , 于是该方程的通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + xe^x$$

分别求一、二阶导数, 有

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x} + e^x(x+1), \quad y'' = C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{2x} + e^x(x+2)$$

于是

$$\begin{pmatrix} -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^{-x} & 4e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' - e^x(x+1) \\ y'' - e^x(x+2) \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^{-x} & 4e^{2x} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y' - e^x(x+1) \\ y'' - e^x(x+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^x[y'' - e^x(x+2)] - \frac{2}{3}e^x[y' - e^x(x+1)] \\ \frac{1}{6}e^{-2x}[y'' - e^x(x+2)] + \frac{1}{6}e^{-2x}[y' - e^x(x+1)] \end{pmatrix}$$

消去  $C_1$ ,  $C_2$  得该微分方程为  $y'' - y' - 2y = (1 - 2x)e^x$ .

### 微分算子法

微分算子法是在求解非齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

的一个特解时常采用的一种方法. 具体地说, 在求解常系数微分方程上述方程时, 可以先求解其特征方程, 得到相应齐次方程的通解, 再求出非齐次方程的一个特解即可.

**定义 8.2.1 (微分算子).** 为了求非齐次方程的一个特解, 引入微分算子:

$$D = \frac{d}{dx}, D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \dots, D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

以及算子多项式

$$L(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$$

这样一来, 微分方程可以写成

$$L(D)y = f(x)$$

显然, 如果记  $\frac{1}{D}f(x)$  为此方程的任一解, 则

$$L(D)\left(\frac{1}{L(D)}f(x)\right) = f(x)$$

因此, 在形式上可以把  $\frac{1}{D}f(x)$  看成是  $L(D)$  的逆算子.

**定理 8.2.3.**  $\frac{1}{D}f(x) = \int f(x)dx.$

**定理 8.2.4.** 对于任意常数  $a$ ,  $\frac{1}{D-a}f(x) = e^{ax} \int e^{-ax}f(x)dx.$

**定理 8.2.5.** 对于任意常数  $\alpha$  和  $\beta$ ,  $\frac{1}{L(D)}(\alpha u(x) + \beta v(x)) = \alpha \frac{1}{L(D)}u(x) + \beta \frac{1}{L(D)}v(x).$

**定理 8.2.6.**  $\frac{1}{L_1(D)L_2(D)}f(x) = \frac{1}{L_1(D)}\left(\frac{1}{L_2(D)}f(x)\right) = \frac{1}{L_2(D)}\left(\frac{1}{L_1(D)}f(x)\right).$

**定理 8.2.7 (算子特性).** (1)  $F(D) = D^m$ ,  $\frac{1}{F(D)}f^{(m)}(x) = f(x);$

(2)  $F(D) = D - k$  时,  $\frac{1}{F(D)}e^{bx} = \frac{e^{bx}}{b - k}$ ,  $b \neq k$ ;

(3)  $F(D) = (D - b)(D - a)$  时,  $\frac{1}{F(D)}f(x) = \frac{1}{D - b}\frac{1}{D - a}f(x)$ , 当  $ab \neq 0$  时,  $\frac{1}{D - b}\frac{1}{D - a} = \frac{1}{ab}$ ;

(4)  $\frac{1}{F(D)}e^{kx} = \frac{1}{F(k)}e^{kx}$ ,  $F(k) \neq 0$ ;

(5)  $\frac{1}{F(D)}u(x)e^{kx} = e^{kx}\frac{1}{F(D+k)}u(x);$

(6)  $\frac{1}{F(D)}[f_1(x) + f_2(x)] = \frac{1}{F(D)}f_1(x) + \frac{1}{F(D)}f_2(x);$

(7)  $F(D) = D - k$ ,  $\frac{1}{F(D)}x^\alpha = \left(-\sum_{n=0}^{\alpha} \frac{D^n}{k^{n+1}}\right)x^\alpha.$

**例 8.2.7 (2010 数学 (一)).** 求微分方程  $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$  的通解.

记  $D = \frac{d}{dx}$ ,  $Iy = y$ , 则原方程可改写为  $(D^2 - 3D + 2I)y = 2xe^x$ , 即  $(D - I)(D - 2I)y = 2xe^x$ , 令  $(D - 2I)y = z(x)$ , 则有  $(D - I)z(x) = 2xe^x$ , 即  $\frac{dz(x)}{dx} - z(x) = 2xe^x$ , 解得

$$z(x) = e^{\int dx} \left[ \int 2xe^x \cdot e^{-\int dx} + C_1 \right] = e^x (x^2 + C_1)$$

再由  $(D - 2I)y = z(x)$  化为  $\frac{dy}{dx} - 2y = e^x (x^2 + C_1)$ , 故原方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{\int dx} \left[ \int e^x (x^2 + C_1) \cdot e^{-\int 2dx} + C_2 \right] = e^{2x} \left[ \int e^{-x} (x^2 + C_1) dx + C_2 \right] \\ &= e^{2x} [(-x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}) - C_1 e^{-x} + C_2] = (-x^2 - 2x - 2 - C_1) e^x + C_2 e^{2x} \end{aligned}$$

其中  $C_1, C_2$  为任意常数.

**例 8.2.8.** 求微分方程  $y'' + y' - 2y = \frac{e^x}{1 + e^x}$ .

记  $D = \frac{d}{dx}$ , 则原方程可改写为  $(D^2 + D - 2)y = \frac{e^x}{1 + e^x}$ , 即  $(D + 2)(D - 1)y = \frac{e^x}{1 + e^x}$ , 令  $z(x) = (D - 1)y$ , 则有  $(D + 2)z(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$ , 即  $\frac{dz(x)}{dx} + 2z = \frac{e^x}{1 + e^x}$ , 解得

$$z(x) = e^{-2 \int dx} \left[ \int \frac{e^x}{1 + e^x} \cdot e^{2 \int dx} dx + C_1 \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{e^x} + \frac{\ln(e^x + 1)}{e^{2x}}$$

再由  $(D - 1)y = z(x)$  化为  $\frac{dy}{dx} - y = \frac{1}{2} - \frac{1}{e^x} + \frac{\ln(e^x + 1)}{e^{2x}}$ , 故原方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{\int dx} \left\{ \int \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{e^x} + \frac{\ln(e^x + 1)}{e^{2x}} \right] \cdot e^{-\int dx} dx + C_2 \right\} = e^x \left\{ \int \left[ \frac{1}{2e^x} - \frac{1}{e^{2x}} + \frac{\ln(e^x + 1)}{e^{3x}} \right] dx + C_2 \right\} \\ &= -\frac{(e^{3x} + 1) \ln(e^x + 1)}{3e^{2x}} + \frac{xe^x}{3} + C_2 e^x + \frac{1}{3e^x} + \frac{C_1}{e^{2x}} - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

其中  $\int \frac{\ln(e^x + 1)}{e^{3x}} dx \stackrel{e^x=t}{=} \int \frac{\ln(t+1)}{t^4} dt = -\frac{1}{3} \int \ln(t+1) d\frac{1}{t^3} = -\frac{1}{3} \left[ \frac{\ln(t+1)}{t^3} - \int \frac{dt}{t^3(t+1)} \right]$ , 且

$$\int \frac{dt}{t^3(t+1)} \stackrel{u=\frac{t}{t+1}}{=} \int \left( \frac{1}{u} - \frac{2}{u^2} + \frac{1}{u^3} \right) du = \ln|u| + \frac{4u-1}{2u^2} + C$$

即得  $\int \frac{\ln(e^x + 1)}{e^{3x}} dx = -\frac{\ln(e^x + 1)}{3} + \frac{-2 \ln(e^x + 1) + 2e^{2x} - e^x}{6e^{3x}} + \frac{x}{3} + C$ .

### Laplace 变换法

**定义 8.2.2 (Laplace 变换).** 假设函数  $f(x)$  在区间  $[0, +\infty)$  上分段连续, 如果参变量积分

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

收敛, 则称函数  $F(s)$  为  $f(x)$  的 Laplace 变换, 并记为

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

称函数  $f(t)$  为  $F(s)$  的 Laplace 逆变换, 并记为

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

常见的 Laplace 变换 (以下  $s > 0, \alpha, \lambda, n > -1$ ).

表 8.2: 常见的 Laplace 变换

|  |  |
|--|--|
| (1) $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$   | (2) $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$  |
| (3) $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s - \alpha}$   | (4) $\mathcal{L}\{t^n e^{\alpha t}\} = \frac{n!}{(s - \alpha)^{n+1}}$  |
| (5) $\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$   | (6) $\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$  |
| (7) $\mathcal{L}\{t \sin \omega t\} = \frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}$                                       | (8) $\mathcal{L}\{t \cos \omega t\} = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$                                       |
| (9) $\mathcal{L}\{e^{\lambda t} \sin \omega t\} = \frac{\omega}{(s - \lambda)^2 + \omega^2}$                     | (10) $\mathcal{L}\{e^{\lambda t} \cos \omega t\} = \frac{s - \lambda}{(s - \lambda)^2 + \omega^2}$                     |
| (11) $\mathcal{L}\{te^{\lambda t} \sin \omega t\} = \frac{2\omega(s - \lambda)}{[(s - \lambda)^2 + \omega^2]^2}$ | (12) $\mathcal{L}\{te^{\lambda t} \cos \omega t\} = \frac{(s - \lambda)^2 - \omega^2}{[(s - \lambda)^2 + \omega^2]^2}$ |

**例 8.2.9 (2010 数学 (一)).** (用 Laplace 变换) 求解例题 8.2.7.

对方程两边进行 Laplace 变换, 得  $s^2 Y(s) - 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{2}{(s-1)^2}$ , 解得

$$Y(s) = 2 \left[ \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} \right]$$

所以一个特解为  $y^* = 2 \left( e^{2x} - e^x - xe^x - \frac{x^2}{2} e^x \right)$ , 又对应齐次线性微分方程  $y'' - 3y' + 2y = 0$  的通解为  $Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ , 故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - (x^2 + 2x + 2) e^x.$$

### 8.2.3 可降阶的高阶微分方程

$$y^{(n)} = f(x)$$

方程特点是右端为自变量  $x$  的函数, 且不含有函数  $y$  及其导数  $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ , 将方程两边对  $x$  积分  $n$  次, 即得其通解

$$y = \int dx \cdots \int f(x) dx + \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(n-i)!} x^{n-i}.$$

**定理 8.2.8.** 对于二阶常系数非齐次线性微分方程  $y'' + py' + qy = f(x)$ , 若由特征方程  $r^2 + pr + q = 0$  求出特征根为  $\lambda_1, \lambda_2$ , 且有

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -p, \lambda_1 \cdot \lambda_2 = q$$

那么方程总可以化为

$$(y' - \lambda_1 y)' - \lambda_2(y' - \lambda_1 y) = f(x).$$

**例 8.2.10.** 试用降阶法求解例题 8.2.7.

将原方程改写为  $(y' - 2y)' - (y' - 2y) = 2xe^x$ , 设  $u = y' - 2y$ , 则上述方程化为  $u' - u = 2xe^x$ , 解得

$$u = e^{\int dx} \left[ \int 2xe^x e^{-\int dx} dx + C_1 \right] = e^x \left( \int 2x dx + C_1 \right) = x^2 e^x + C_1 e^x$$

再求一阶微分方程  $y' - 2y = x^2 e^x + C_1 e^x$  得原方程的通解为

$$y = e^{2x} \left[ \int (x^2 e^x + C_1 e^x) e^{-2x} dx + C_2 \right] = -(x^2 + 2x + 1) e^x - C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

$$y'' = f(x, y')$$

方程的特点是右端不显含  $y$ , 令  $y' = p(x), y'' = \frac{dp}{dx} = p'$ , 代入原方程即可化为一阶方程  $p' = f(x, p)$ , 若其解为  $p = \varphi(x, C_1)$ , 则原方程的通解为

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

$$y'' = f(y, y')$$

方程的特点是右端不显含自变量  $x$ , 令  $y' = p(x)$ , 并利用复合函数的求导法则, 有

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}$$

代入原方程即可化为一阶方程

$$p \cdot \frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

若其解为  $p = \varphi(y, C_1)$ , 即  $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$ , 则原方程的通解为

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

#### 8.2.4 Euler 微分方程

##### 齐次 Euler 微分方程

**定义 8.2.3** (齐次 Euler 微分方程). 形如

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0.$$

的微分方程称为齐次 Euler 微分方程.

**定理 8.2.9.** 若采用记号  $D$  表示对  $t (t = \ln x)$  求导的运算  $\frac{d}{dt}$ , 那么有

$$x^k y_x^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y_t = D^k y_t \quad (k \in \mathbb{N}).$$

**例 8.2.11.** 求微分方程  $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$  的通解.

令  $x = e^t$ ,  $D = \frac{d}{dt}$ , 那么原方程化为  $(D-1)(D-2)y = 0$ , 易得  $y = C_1 x^2 + C_2 x$ .

**例 8.2.12.** 求 Euler 方程  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad (x > 0)$  的通解.

令  $x = e^t$ ,  $D = \frac{d}{dt}$ , 那么原方程化为  $(D+1)(D+2)y = 0$ , 易得  $y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}$ .

**例 8.2.13.** 求方程  $x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + x \frac{dy}{dx} - y = 0$  的通解.

令  $x = e^t$ ,  $D = \frac{d}{dt}$ , 那么原方程化为  $(D - 1)^3 y = 0$ , 令  $z_1 = (D - 1)^2 y$ , 则有

$$(D - 1)z = 0 \Rightarrow z_1 = (D - 1)^2 y = C_1 e^t$$

再令  $z_2 = (D - 1)y$ , 有

$$(D - 1)z_2 = C_1 e^t \Rightarrow z_2 = (D - 1)y = C_1 t e^t + C_2 e^t$$

进而得到

$$y = e^{\int dt} \left[ \int (C_1 t e^t + C_2 e^t) \cdot e^{-\int dt} dt + C_3 \right] = (C_1 t^2 + C_2 t + C_3) e^t$$

回代  $t = \ln x$ , 得  $y = x(C_1 \ln^2 x + C_2 \ln x + C_3)$ .

### 非齐次 Euler 微分方程

**定义 8.2.4 (非齐次 Euler 微分方程).** 形如

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x).$$

的微分方程称为非齐次 Euler 微分方程.

**例 8.2.14.** 求微分方程  $xy' + 2y = 4 \ln x$  的通解.

$$\text{原式 } \xrightarrow{x=e^t} \frac{dy}{dt} + 2y = 4t \Rightarrow y = e^{-2 \int dt} \left[ \int 4t \cdot e^{2 \int dt} dt + C \right] = (2t - 1) + Ce^{-2t} = 2 \ln x - 1 + \frac{C}{x^2}.$$

**例 8.2.15.** 求微分方程  $4x^4 y''' - 4x^3 y'' + 4x^2 y' = 1$  的通解.

将原方程改写为  $x^3 y''' - x^2 y'' + xy' = \frac{1}{4x}$ , 并令  $x = e^t$ ,  $D = \frac{d}{dt}$ , 于是原式化为

$$D(D - 1)(D - 2)y - D(D - 1)y + Dy = D(D - 2)^2 y = \frac{1}{4e^t}$$

令  $(D - 2)^2 y = z$ , 那么  $z = \frac{1}{D} \frac{1}{4e^t} = \int \frac{dt}{4e^t} = -\frac{1}{4} e^{-t} + C_1$ , 再令  $w = (D - 2)y$ , 于是,  $(D - 2)w = w' - 2w = -\frac{1}{4} e^{-t} + C_1$ , 由一阶线性微分方程通解公式得

$$w = e^{2 \int dt} \left[ \int \left( -\frac{1}{4} e^{-t} + C_1 \right) e^{-2 \int dt} dt + C_2 \right] = e^{2t} \left[ \frac{1}{12} e^{-3t} - \frac{C_1}{2} e^{-2t} + C_2 \right] = \frac{1}{12} e^{-t} + \frac{C_1}{2} + C_2 e^{2t}$$

又  $y' - 2y = w$ , 再由一阶线性微分方程通解公式得

$$y = C_2 x^2 \ln x + C_1 x^2 - \frac{1}{36x} + C_3.$$

**例 8.2.16.** 求微分方程  $(1+x)^2 y'' - (1+x)y' + y = \frac{1}{1+x}$  满足初值条件  $y(0) = y'(0) = 0$  的特解.

令  $1+x = t$ , 再令  $t = e^u$ ,  $D = \frac{d}{dt}$ , 于是原式化为

$$D(D - 1)y - Dy + y = e^{-u} \Rightarrow (D - 1)^2 y = e^{-u}$$

令  $z = (D - 1)y$ , 于是上式化为  $z' - z = e^{-u}$ , 由一阶线性微分方程通解公式得

$$z = e^{\int du} \left[ \int e^{-u} \cdot e^{-\int du} du + C_1 \right] = e^u \left[ -\frac{1}{2} e^{-2u} + C_1 \right] = -\frac{1}{2} e^{-u} + C_1 e^u$$

由已知得  $z(0) = -\frac{1}{2(1+x)} + C_1(1+x) \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$ , 又  $y' - y = -\frac{1}{2} e^{-u} + \frac{1}{2} e^u$ , 再求一阶微分方程通解公式

$$y = e^{\int du} \left[ \int \left( -\frac{1}{2} e^{-u} + \frac{1}{2} e^u \right) e^{-\int du} du + C_2 \right] = e^u \left[ \frac{1}{4} e^{-2u} + \frac{1}{2} u + C_2 \right] = \frac{1}{4} e^{-u} + \frac{1}{2} u e^u + C_2$$

回代  $e^u = 1+x$ , 并  $y(0) = 0$ , 解得  $C_2 = -\frac{1}{4}$ , 于是该方程的特解为

$$y = \frac{x+1}{2} \ln(x+1) + \frac{1}{4}(x+1) - \frac{x+1}{4}.$$

**例 8.2.17.** 求微分方程  $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3$  的通解.

法一: 令  $x = e^t$ ,  $D = \frac{d}{dt}$ , 则  $xy' = Dy$ ,  $x^2y'' = D(D-1)y$ , 原方程化为

$$(D^2 - 3D + 2)y = 2e^{3t} = (D-1)(D-2)y = 2e^{3t}$$

令  $(D-2)y = z$ , 那么有  $(D-1)z = \frac{dz}{dt} - z = 2e^{3t}$ , 为一阶线性微分方程, 则有通解

$$z = e^{\int dt} \left[ \int 2e^{3t} \cdot e^{-\int dt} + C_1 \right] = e^t \left[ \int 2e^{2t} dt + C_1 \right] = e^{3t} + C_1 e^t$$

又  $z = (D-2)y = \frac{dy}{dt} - 2y = e^{3t} + C_1 e^t$ , 故又有通解公式

$$y = e^{2 \int dt} \left[ \int (e^{3t} + C_1 e^t) \cdot e^{-2 \int dt} dt + C_2 \right] = e^{2t} [e^t - C_1 e^{-t} + C_2] = e^{3t} - C_1 e^t + C_2 e^{2t}$$

回代  $e^t = x$ , 解得该方程的通解为  $y = x^3 + C_2 x^2 - C_1 x$ .

法二: 设  $y = x^k$ , 代入对应齐次线性微分方程

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

得到  $k$  满足的方程, 即特征方程为  $k^2 - 3k + 2 = 0$ , 解得  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$ , 于是齐次 Euler 微分方程的通解为  $Y = C_1 x + C_2 x^2$ ,

又因为  $f(x) = 2x^3$  于是  $f(e^t) = 2e^{3t}$ , 而 3 不是特征根, 故可设其特解为  $y^* = ae^{3t}$ , 即原方程的特解为  $y^* = ax^3$ , 代入原方程解得  $a = 1$ , 所以原方程的通解为  $y = C_1 x + C_2 x^2 + x^3$ .

**例 8.2.18.** 求微分方程  $x^2y'' - 2xy' + 2y + x - 2x^3 = 0$  的通解.

法一: 令  $x = e^t$ ,  $D = \frac{d}{dt}$ , 那么原方程化为

$$(D-1)(D-2)y = 2e^{3t} - e^t$$

令  $(D-2)y = z$ , 那么有  $(D-1)z = \frac{dz}{dt} - z = 2e^{3t} - e^t$ , 为一阶线性微分方程, 则有通解

$$z = e^{\int dt} \left[ \int (2e^{3t} - e^t) e^{-\int dt} dt + C_1 \right] = e^t [e^{2t} - t + C_1] = e^{3t} - te^t + C_1 e^t$$

又  $z = (D-2)y = \frac{dy}{dt} - 2y = e^{3t} - te^t + C_1 e^t$ , 故又有通解公式

$$\begin{aligned} y &= e^{2 \int dt} \left[ \int (e^{3t} - te^t + C_1 e^t) e^{-2 \int dt} dt + C_2 \right] = e^{2t} [e^t + (t+1)e^{-t} - C_1 e^{-t} + C_2] \\ &= e^{3t} + (t+1)e^t - C_1 e^t + C_2 e^{2t} = x^3 + C_2 x^2 + x \ln x + C'_1 x \end{aligned}$$

其中  $C'_1 = 1 - C_1$ .

法二: 令  $y = x^k$ , 代入对应齐次线性微分方程, 即例题 8.2.11, 得通解为  $Y = C_1 x^2 + C_2 x$ , 又  $f(x) = 2x^3 - x$  即  $f(e^t) = 2e^{3t} - e^t$ , 而 3 不是特征根, 但 1 是方程的一重特征根, 故可设其特解为  $y^* = 2Ae^{3t} + Bte^t$ , 即设原方程的特解为  $y^* = 2Ax^3 + Bx \ln x$ , 代入原方程解得,  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = 1$ , 所以原方程的通解为  $y = x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + x \ln x$ .

## 8.2.5 二阶变系数齐次线性微分方程

### 二阶变系数齐次线性微分方程

**引理 8.2.1 (Liouville 引理).** 设函数  $y_1(x)$  为二阶变系数齐次线性微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的一个非零解, 则该方程的与  $y_1(x)$  线性无关的另一个特解为

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{\exp\left(-\int P(x)dx\right)}{y_1^2(x)} dx.$$

**例 8.2.19 (2016 数二).** 已知函数  $y_1(x) = e^x$ ,  $y_2(x) = u(x)e^x$  是二阶微分方程

$$(2x - 1)y'' - (2x + 1)y' + 2y = 0$$

的两个解, 若  $u(-1) = e$ ,  $u(0) = -1$ , 求  $u(x)$ , 并写出该微分方程的通解.

由引理 8.2.1 知,  $u(x) = \int \frac{\exp\left(\int \frac{2x+1}{2x-1} dx\right)}{e^{2x}} dx = C_1 \int (2x-1)e^{-x} dx = -C_1 e^{-x}(1+2x) + C_2$ , 由  $u(-1) = e$ ,  $u(0) = -1$ , 解得  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0$ , 则  $u(x) = -e^{-x}(1+2x)$ , 那么  $y_1$  与  $y_2$  线性无关, 则微分方程的通解为

$$y = k_1 e^x - k_2 e^{-x}(1+2x) \quad k_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

**定理 8.2.10.** 设有二阶变系数齐次线性微分方程  $p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0$  那么

(1) 当关于  $r$  的一元二次方程  $r^2 p_1(x) + r p_2(x) + p_3(x) = 0$  的两个根

$$r_{1,2} = \frac{-p_2(x) \pm \sqrt{p_2^2(x) - 4p_1(x)p_3(x)}}{2p_1(x)}$$

中至少有一个  $r$  是非零常数时,  $y^* = e^{rx}$  是该方程的一个特解; 特别地, 当

$$p_1(x) \pm p_2(x) + p_3(x) = 0$$

时,  $y^* = e^{\pm x}$  是原方程的一个特解;

(2) 当  $\frac{p_2(x) + xp_3(x)}{p_3(x)} = a$  (其中  $a$  为常数) 时,  $y^* = x - a$  是该方程的一个特解; 特别地, 当

$$p_2(x) + xp_3(x) = 0$$

时,  $y^* = x$  是该方程的一个特解;

(3) 当  $\alpha(\alpha - 1)p_1(x) + \alpha x p_2(x) + x^2 p_3(x) = 0$  ( $\alpha$  为非零常数) 时,  $y^* = x^\alpha$  是该方程的一个特解;

(4) 当  $\frac{p_3(x) - p_1(x)}{p_2(x)} = -\cot x$ , 时  $y^* = \sin x$  是该方程的一个特解;

(5) 当  $\frac{p_3(x) - p_1(x)}{p_2(x)} = \tan x$ , 时  $y^* = \cos x$  是该方程的一个特解.

**例 8.2.20.** 求微分方程  $(2x - 1)y'' - (2x + 1)y' + 2y = 0$  满足初值条件  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  的特解.

记  $p_1(x) = 2x - 1$ ,  $p_2(x) = -(2x + 1)$ ,  $p_3(x) = 2$ , 则有  $p_1(x) + p_2(x) + p_3(x) = 0$ , 且

$$\frac{p_2(x) + xp_3(x)}{p_3(x)} = -\frac{1}{2}$$

于是由定理 8.2.10 (1)(2) 可知  $y_1(x) = e^x$ ,  $y_2(x) = x + \frac{1}{2}$  为原方程的两个特解, 且它们线性无关, 于是方程的通解为  $y = C_1 e^x + C_2 \left(x + \frac{1}{2}\right)$ , 又有初值条件  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  代入解得  $C_1 = -1$ ,  $C_2 = 2$ , 于是该方程的特解为  $y = 2x + 1 - e^x$ .

**例 8.2.21.** 求微分方程  $xy'' + (x - 2)y' - (2x + 4)y = 0$  的通解.

记  $p_1(x) = x$ ,  $p_2(x) = x - 2$ ,  $p_3(x) = -(2x + 4)$ , 则由  $r^2 p_1(x) + r p_2(x) + p_3(x) = 0$  解得

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \frac{-p_2(x) \pm \sqrt{p_2^2(x) - 4p_1(x)p_3(x)}}{2p_1(x)} = \frac{2-x \pm \sqrt{(x-2)^2 + 4x(2x+4)}}{2x} \\ &= \frac{2-x \pm |3x+2|}{2x} = 1 + \frac{2}{x} \text{ 或 } -2 \end{aligned}$$

于是由定理 8.2.10 (1) 知  $y_1(x) = e^{-2x}$  是该方程的一个特解, 再由引理 8.2.1 得与  $y_1(x)$  线性无关的另一个特解为

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \cdot \int \frac{\exp\left(-\int P(x)dx\right)}{y_1^2(x)} dx = e^{-2x} \int \frac{\exp\left(-\int \frac{x-2}{x} dx\right)}{e^{-4x}} dx \\ &= e^{-2x} \int x^2 e^{3x} dx = e^x \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right) \end{aligned}$$

故由通解结构知原方程的通解为  $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right)$ .

**例 8.2.22.** 求微分方程的通解  $(x^2 \ln x)y'' - xy' + y = 0$  的通解.

记  $p_1(x) = x^2 \ln x$ ,  $p_2(x) = -x$ ,  $p_3(x) = 1$ , 则  $p_2(x) + xp_3(x) = 0$ , 于是由定理 8.2.10 (2) 知  $y_1(x) = x$  是该方程的一个特解, 再由引理 8.2.1 得与  $y_1(x)$  线性无关的另一个特解为

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \cdot \int \frac{\exp\left(-\int P(x)dx\right)}{y_1^2(x)} dx = x \int \frac{\exp\left(\int \frac{x}{x^2 \ln x} dx\right)}{x^2} dx \\ &= x \int \frac{\ln x}{x^2} dx = -x \int \ln x d\left(\frac{1}{x}\right) = -(\ln x + 1) \end{aligned}$$

故由通解结构知原方程的通解为  $y = C_1 x + C_2 (\ln x + 1)$ .

**例 8.2.23.** 求微分方程  $y'' \cos x - 2y' \sin x + 3y \cos x = 0$  的通解.

记  $p_1(x) = \cos x$ ,  $p_2(x) = -2 \sin x$ ,  $p_3(x) = 3 \cos x$ , 则  $\frac{p_3(x) - p_1(x)}{p_2(x)} = -\cot x$ , 于是由定理 8.2.10 (4) 知,  $y_1(x) = \sin x$  是该方程的一个特解, 再由引理 8.2.1 得与  $y_1(x)$  线性无关的另一个特解为

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \cdot \int \frac{\exp\left(-\int P(x)dx\right)}{y_1^2(x)} dx = \sin x \int \frac{\exp\left(\int \frac{2 \sin x}{\cos x} dx\right)}{\sin^2 x} dx \\ &= \sin x \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \sin x (\tan x - \cot x) \end{aligned}$$

故由通解结构知原方程的通解为  $y = C_1 \sin x + C_2 \sin x (\tan x - \cot x)$ .

## 二阶变系数非齐次线性微分方程

**例 8.2.24.** 试用定理 8.2.1, 求解例题 8.2.17 的通解.

记  $p_1(x) = x^2$ ,  $p_2(x) = -2x$ ,  $p_3(x) = 2$ , 则  $p_2(x) + xp_3(x) = 0$  且

$$\alpha(\alpha - 1)p_1(x) + \alpha x p_2(x) + x^2 p_3(x) = (\alpha^2 - 3\alpha + 2)x^2$$

令  $(\alpha^2 - 3\alpha + 2) = 0$  解得  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 2$ , 于是  $y_1(x) = x$ ,  $y_2(x) = x^2$  是对应齐次方程  $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$  的两个线性无关的特解, 从而由通解结构知齐次方程的通解为

$$Y = C_1 x + C_2 x^2$$

下面利用常系数变易法求原方程的解, 将原方程改写为

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 2x$$

令  $y = C_1(x)x + C_2(x)x^2$  为原方程的解, 代入原方程, 且由

$$\begin{cases} C_2''(x) \\ C_1''(x) + 2C_2'(x) \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$

解得  $\begin{cases} C_1(x) = C_1 - x^2 \\ C_2(x) = C_2 + 2x \end{cases}$ , 故所求通解为

$$y = (C_1 - x^2)x + (C_2 + 2x)x^2 = C_1x + C_2x^2 + x^3.$$

**例 8.2.25.** 已知  $y_1 = e^x$  是微分方程  $y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = x - 1$  对应的齐次线性微分方程的一个特解, 求所给二阶变系数非齐次线性微分方程的通解.

记  $p_1(x) = 1$ ,  $p_2(x) = \frac{x}{1-x}$ ,  $p_3(x) = -\frac{1}{1-x}$ , 则  $p_2(x) + xp_3(x) = 0$ , 于是由定理 8.2.1 (2) 知  $y_2(x) = x$  是该方程的一个特解, 则该方程对应的齐次线性微分方程的通解为

$$Y = C_1e^x + C_2x$$

利用常系数变易法求原方程的同解为

$$y = -1 - x - x^2 + C_1e^x - C_2x.$$

## 8.3 微分方程综合性问题

### 8.3.1 微分方程与函数性质

**例 8.3.1 (2002 数二).** 已知函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内可导,  $f(x) > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ , 且满足  $\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+hx)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}$ , 求  $f(x)$ .

$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+hx)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{x}} = \exp \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \frac{f(x+hx)}{f(x)} = \exp \lim_{h \rightarrow 0} x \frac{\ln f(x+hx) - \ln f(x)}{hx} = e^{x[\ln f(x)]'} = e^{\frac{1}{x}}$  于是  $f(x) = Ce^{-\frac{1}{x}}$ , 又  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ , 所以  $C = 1$ , 于是  $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ .

**例 8.3.2 (2022 数一).** 设函数  $y(x)$  是微分方程  $y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y = 2 + \sqrt{x}$  的满足条件  $y(1) = 3$  的解, 求曲线  $y = y(x)$  的渐近线.

根据求解公式,

$$y = e^{-\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}} \left[ \int (2 + \sqrt{x}) \cdot e^{\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}} dx + C \right] = e^{-\sqrt{x}} \left[ 2 \int e^{\sqrt{x}} dx + \int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx + C \right] = 2x + Ce^{-\sqrt{x}}$$

由  $y(1) = 3$  得  $C = e$ , 故  $y = 2x + e^{1-\sqrt{x}}$ ,  $x \in [0, +\infty)$ , 由于函数  $y(x)$  在  $[0, +\infty)$  上没用无定义的点, 故曲线  $y = 2x + e^{1-\sqrt{x}}$  没用铅直渐近线, 又因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + e^{1-\sqrt{x}}) = +\infty$ , 所以曲线  $y(x)$  没用水平渐近线, 下计算斜渐近线

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + e^{1-\sqrt{x}}}{x} = 2 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-\sqrt{x}} = 0 \end{aligned}$$

因此  $y = 2x$  为曲线  $y = 2x + e^{1-\sqrt{x}}$  的斜渐近线, 也是唯一的渐近线.

**例 8.3.3.** 设函数  $f(x)$  在  $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$  可导, 且  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[(x+h)^2] - f(x^2+h)}{h} = 1$ ,  $f(1) = 1$ , 求  $f(x)$  的表达式.

因为  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[(x+h)^2] - f(x^2+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[(x+h)^2] - f(x^2)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(x^2+h)}{h} = [f(x^2)]' - f'(x^2) = 1$ , 则  
 $2xf'(x^2) - f'(x^2) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}-1} \Rightarrow f(x) = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}-1} = \sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln(2\sqrt{x}-1) + C$   
 $\because f(1) = 1$ , 解得  $C = 0$ , 因此  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln(2\sqrt{x}-1)$ .

**例 8.3.4.** 设函数  $f(x)$  在区间  $[1, +\infty)$  上二阶连续可导,  $f(1) = 0, f'(1) = 1, z = (x^2 + y^2)f(x^2 + y^2)$  满足  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ , 求  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上的最大值.

令  $u = x^2 + y^2$ , 则  $z = uf(u)$ , 那么

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 2xf(u) + 2uxf'(u) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 2f(u) + 2(5x^2 + y^2)f'(u) + 4x^2uf''(u)\end{aligned}$$

利用函数  $z$  中  $x$  与  $y$  的对称性, 易得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f(u) + 2(x^2 + 5y^2)f'(u) + 4y^2uf''(u) \quad (1)$$

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ , 所以

$$u^2f''(u) + 3uf'(u) + f(u) = 0$$

(1) 式为二阶的 Euler 微分方程, 令  $u = e^t$ , 则 (1) 式化为  $\frac{d^2 f}{dt^2} + 2\frac{df}{dt} + f = 0$ , 其特征方程为  $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1$ , 于是 (1) 式的通解为

$$f = e^{-t}(C_1 + C_2 t) \Rightarrow \frac{1}{u}(C_1 + C_2 \ln u)$$

$\therefore f(1) = 0, f'(1) = 1$ , 解得  $C_1 = 0, C_2 = 1$ , 故  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ , 令  $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} = 0$ , 解得  $x = e$ , 且在  $[1, e]$  上  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \searrow$ ; 在  $[e, +\infty)$  上  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \nearrow$ , 故  $f_{max} = \left. \frac{\ln x}{x} \right|_{x=e} = \frac{1}{e}$ .

### 8.3.2 微分方程与积分

#### 微分方程与定积分

**例 8.3.5.** 设  $y = y(x)$  是  $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$  满足  $y(0) = y'(0) = 0$  的解,

(1) 求  $y = y(x)$  的单调区间与极值;

(2) 当  $x \in [0, +\infty)$  时, 求  $y = y(x)$  与  $x$  之间无界区域的面积.

(1) 令  $D = \frac{d}{dx}$ , 那么  $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \Rightarrow (D+2)^2 y = e^{-2x}$ , 令  $z = (D+2)y$ , 由一阶线性微分方程通解公式得

$$z = e^{-2 \int dx} \left[ \int e^{-2x} \cdot e^{2 \int dx} dx + C_1 \right] = e^{-2x}(x + C_1)$$

及  $y' + 2y = e^{-2x}(x + C_1) \Rightarrow y = e^{-2x} \left( \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2 \right)$ , 由  $y(0) = y'(0) = 0$  解得  $C_1 = C_2 = 0$ , 故  $y(x) = \frac{x^2}{2}e^{-2x}$ , 那么令  $y'(x) = xe^{-2x}(1-x) = 0$ , 解得  $y$  在  $(-\infty, 0), (1, +\infty)$  上单调递减, 在  $(0, 1)$  上单调递增, 且极大值为  $y(1) = \frac{1}{2e^2}$ , 极小值为  $y(0) = 0$ .

(2) 因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0^+$ , 所以

$$S(x) = \int_0^{+\infty} y(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{2} e^{-2x} dx = -\frac{1}{4}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{4}xe^{-2x} - \frac{1}{8}e^{-2x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{8}.$$

**例 8.3.6 (2023 四川大学).** 设函数  $f(x)$  满足  $\int_0^x f^2(t)dt = e^x f(x) + 1$ , 求  $f(x)$ .

令  $x = 0$ , 得  $f(0) = -1$ , 对方程两边求导, 得 Bernoulli 方程:

$$f'(x) + f(x) = e^{-x} f^2(x)$$

令  $z(x) = \frac{1}{f(x)}$ , 于是上式化为  $z'(x) - z(x) = -e^{-x}$ , 由一阶线性微分方程通解公式得

$$z(x) = e^{\int dx} \left[ \int -e^{-x} \cdot e^{-\int dx} dx + C \right] = \frac{1}{2} e^{-x} + C e^x$$

并且  $z(0) = -1$ , 得  $C = -\frac{3}{2}$ , 于是  $f(x) = \frac{2e^x}{1 - 3e^{2x}}$ .

**例 8.3.7.** 求出所有在  $[0, +\infty)$  上的正值连续函数  $g(x)$ , 使得  $\frac{1}{2} \int_0^x g^2(t)dt = \frac{1}{x} \left( \int_0^x g(t)dt \right)^2$ .

对方程两边求导, 得

$$\frac{1}{2} g^2(x) = \frac{2 \int_0^x g(t)dt \cdot g(x) \cdot x - \left( \int_0^x g(t)dt \right)^2}{x^2}$$

即

$$\left( \int_0^x g(t)dt \right)^2 - 2xg(x) \int_0^x g(t)dt + \frac{x^2}{2} g^2(x) = 0$$

注意到当  $x \in [0, +\infty)$  时, 有  $g(x) > 0$ , 于是  $\int_0^x g(t)dt > 0$ ,  $\forall x > 0$ , 故

$$\int_0^x g(t)dt = \frac{2xg(x) + \pm \sqrt{4x^2 g^2(x) - 2x^2 g^2(x)}}{2} = xg(x) \pm \frac{1}{\sqrt{2}} xg(x)$$

两边再次求导, 得

$$g(x) = \left( 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (g(x) + xg'(x)) \Rightarrow \begin{cases} g(x) &+ (1 + \sqrt{2})xg'(x) = 0 \\ -g(x) &+ (\sqrt{2} - 1)xg'(x) = 0 \end{cases}$$

当  $g'(x) + \frac{1}{(1 + \sqrt{2})x} g(x) = 0$  时, 化为变量分离方程  $\frac{dg(x)}{g(x)} = -\frac{dx}{(1 + \sqrt{2})x}$ , 两边积分得

$$\ln |g(x)| = -\frac{1}{1 + \sqrt{2}} \ln |x| + \ln C_1 \Rightarrow g(x) = e^{-\frac{1}{1 + \sqrt{2}} \ln x + C_1} = e^{C_1} x^{1 - \sqrt{2}}$$

同理可得  $g(x) = e^{C_1} x^{1 + \sqrt{2}}$ , 由于  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上为连续正值函数, 而  $x^{1 - \sqrt{2}}$  在  $x = 0$  处不连续, 所以  $g(x) = e^{C_1} x^{1 + \sqrt{2}}$ ,  $x > 0$ .

**例 8.3.8.** 设  $f(x)$  具有连续导数, 且  $\forall a \in \mathbb{R}$ ,  $f(x+a) = \int_x^{x+a} \frac{t(t^2+1)}{f(t)} dt + f(x)$ ,  $f(1) = \sqrt{2}$ , 求  $f(x)$ .

法一: 视  $a$  为未知数, 令  $x = 0$ , 有  $f(a) = \int_0^a \frac{t(t^2+1)}{f(t)} dt + f(0)$ , 两边求导有

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{a(a^2+1)}{f(a)} \Rightarrow f'(a) \cdot f(a) = a(a^2+1) \Rightarrow \frac{1}{2} [f^2(a)]' = a^3 + a \\ &\Rightarrow \int f^2(a)da = \int (2a^3 + 2a)da \Rightarrow f^2(a) = \frac{1}{2} a^4 + a^2 + C \end{aligned}$$

由  $f(1) = \sqrt{2}$  解得  $C = \frac{1}{2}$ , 于是  $f^2(x) = \frac{1}{2} x^4 + x^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (x^2 + 1)^2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{2}}$  (由  $f(1) > 0$  可舍负).

法二: 利用导数的定义,

$$f'(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(x+a) - f(x)}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+a} \frac{t(t^2+1)}{f(t)} dt + f(x) - f(x)}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+a} \frac{t(t^2+1)}{f(t)} dt}{a} = \frac{x(x^2+1)}{f(x)}$$

得  $f'(x) \cdot f(x) = x(x^2+1)$ , 下同法一.

**例 8.3.9.** 设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内一阶可导,  $g(x)$  为  $f(x)$  的反函数, 且  $g(x)$  连续, 若

$$\int_1^{f(x)} g(t) dt = x^2 e^x - 4e^2 - \int_1^{x-1} f(t+1) dt, \quad f(2) = 1$$

求  $f(x)$  的表达式.

方程两边对  $x$  求导得

$$g[f(x)]f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x - f(x)$$

即

$$xf'(x) = 2xe^x + x^2 e^x - f(x) \Rightarrow f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = (2+x)e^x$$

由一阶线性微分方程通解公式得

$$f(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[ \int (2x+1)e^x \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} + C \right] = xe^x + \frac{C}{x}$$

由  $f(2) = 1$ , 故  $C = 2 - 4e^2$ , 故  $f(x) = xe^x + \frac{2 - 4e^2}{x}$  ( $x > 0$ ).

**例 8.3.10.** 设  $f(x)$  可微, 且满足  $x = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x tf(t-x) dt$ , 求

(1)  $f(x)$  的表达式;

$$(2) I(n) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |f(t)|^n dt \quad (n = 2, 3, \dots).$$

(1) 令  $t-x=u$ , 则

$$x = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x tf(t-x) dt = \int_0^x f(t) dt + \int_{-x}^0 uf(u) du + x \int_{-x}^0 f(u) du$$

上式两边分别对  $x$  求导, 得

$$1 = f(x) - xf(-x) + \int_{-x}^0 f(u) du + xf(-x) \quad (1)$$

对式 (1) 求导得

$$f'(x) + f(-x) = 0 \quad (2)$$

对式 (2) 再次求导得  $f''(x) - f'(-x) = 0$ , 并用  $-x$  替换式 (2) 中的  $x$ , 得  $f'(-x) + f(x) = 0$  于是有二阶常系数齐次线性方程  $f''(x) + f(x) = 0$ , 且  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = -1$ , 微分方程的特征方程为  $r^2 + 1 = 0$ , 故它的通解为

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

代入初值条件, 得  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = -1$ , 故  $f(x) = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$ .

(2) 令  $x = t + \frac{\pi}{4}$ , 得

$$I(n) = 2^{\frac{n}{2}} \int_0^{\pi} |\cos x|^n dx = 2^{\frac{n}{2}+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}+1} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n = 3, 5, 7, \dots \\ 2^{\frac{n}{2}+1} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

## 微分方程与重积分

**例 8.3.11.** 设函数  $f(t)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 求  $\lim_{t \rightarrow 0} f^{-t^2}(t)$ , 其中  $f(t)$  满足方程

$$f(t) = e^{4\pi t^2} + \iint_{x^2+y^2 \leq 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right) dx dy.$$

因为  $\iint_{x^2+y^2 \leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2t} \rho f\left(\frac{1}{2}\rho\right) d\rho = 8\pi \int_0^t u f(u) du$ , 所以  $f(t) = e^{4\pi t^2} + 8\pi \int_0^t u f(u) du$ ,

且  $f(0) = 1$ , 方程两边对  $t$  求导, 得  $f'(t) = 8\pi t e^{4\pi t^2} + 8\pi t f(t)$

$$f(t) = e^{8\pi \int t dt} \left[ \int 8\pi t e^{4\pi t^2} \cdot e^{-8\pi \int t dt} + C \right] = e^{4\pi t^2} \left[ 8\pi \int t dt + C \right] = 4\pi t^2 e^{4\pi t^2} + C e^{4\pi t^2}$$

$$\xrightarrow{f(0)=1} 4\pi t^2 e^{4\pi t^2} + e^{4\pi t^2}$$

那么

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f^{-t^2}(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} (4\pi t^2 e^{4\pi t^2} + e^{4\pi t^2})^{-t^2} = \exp \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \ln (4\pi t^2 e^{4\pi t^2} + e^{4\pi t^2}) \\ &= \exp \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4\pi t^2 e^{4\pi t^2} + e^{4\pi t^2} - 1}{t^2} = e^{4\pi+4\pi} = e^{8\pi}. \end{aligned}$$

**例 8.3.12.** 设函数  $u = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ , 满足  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$ , 且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \iint_{s^2+t^2 \leqslant x^2+y^2} \frac{ds dt}{1+s^2+t^2}$$

(1) 试求函数  $f'(x)$  的表达式; (2) 若  $f(0) = 0$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^4}$ .

(1) 设  $r = \sqrt{x^2+y^2}$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= f'(r) \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(r) \frac{x^2}{r^2} + f'(r) \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} = f''(r) \frac{x^2}{r^2} + f'(r) \frac{r^2 - x^2}{r^3} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= f'(r) \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) \frac{y^2}{r^2} + f'(r) \frac{r - \frac{y^2}{r}}{r^2} = f''(r) \frac{y^2}{r^2} + f'(r) \frac{r^2 - y^2}{r^3} \\ \iint_{s^2+t^2 \leqslant r^2} \frac{ds dt}{1+s^2+t^2} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \frac{\rho d\rho}{1+\rho^2} = \pi \ln(1+r^2) \end{aligned}$$

因为  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \iint_{s^2+t^2 \leqslant x^2+y^2} \frac{ds dt}{1+s^2+t^2}$ , 所以  $f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) = \pi \ln(1+r^2)$ ,

$$f'(r) = e^{-\int \frac{dr}{r}} \left[ \int \pi \ln(1+r^2) \cdot e^{\int \frac{dr}{r}} dr + C \right] = \frac{\pi(1+r^2)}{2r} [\ln(1+r^2) - 1] + \frac{C}{r}$$

即

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\pi(1+x^2)}{2x} [\ln(1+x^2) - 1] + \frac{C}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{\pi(1+x^2)}{2x} \ln(1+x^2) + \frac{2C - \pi - \pi x^2}{2x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2C - \pi - \pi x^2}{2x} = 0 \end{aligned}$$

即  $C = \frac{\pi}{2}$ , 所以  $f'(x) = \frac{\pi(1+x^2)}{2x} [\ln(1+x^2) - 1] + \frac{\pi}{2x}$ .

(2) 运用 L'Hospital 法则得到  $f'(x)$ , 再将  $f'(x) = \frac{\pi(1+x^2)}{2x} [\ln(1+x^2) - 1] + \frac{\pi}{2x}$  代入得,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^4} &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{4x^3} = \frac{\pi}{8} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \left[ \frac{1+x^2}{x} \ln(1+x^2) - x \right] \\ &= \frac{\pi}{8} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \left[ \frac{1+x^2}{x} \left( x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \right) - x \right] \\ &= \frac{\pi}{8} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \left( \frac{x^3}{2} + o(x^3) \right) = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

**例 8.3.13.** 设  $z = (x^2 + y^2)f(x^2 + y^2)$ , 其中  $f$  具有连续二阶偏导数,  $f(1) = 0$ ,  $f'(1) = 1$ , 且  $z$  满足方程  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ , 求

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_D z \, dx \, dy, \quad D : 0 < \varepsilon \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1.$$

令  $x^2 + y^2 = t$ , 则  $z = tf(t)$ , 于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial x} f(t) + t \cdot f'(t) \frac{\partial t}{\partial x} = 2xf(t) + 2txf'(t) = 2x[f(t) + 2tf'(t)]$$

于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 2[f(t) + tf'(t)] + 2x[f'(t) \cdot 2x + 2xf'(t) + tf''(t) \cdot 2x] \\ &= 2[f(t) + tf'(t)] + 4x^2[2f'(t) + tf''(t)] \end{aligned}$$

同理可得  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2[f(t) + tf'(t)] + 4y^2[2f'(t) + tf''(t)]$ , 解此 Euler 方程, 由  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 1$ , 特解  $f(t) = \frac{1}{t} \ln t$ , 所以  $z = tf(t) = \ln t = \ln(x^2 + y^2)$ , 从而可得

$$\iint_D z \, dx \, dy = \iint_D \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\varepsilon}^1 r \ln r^2 \, dr = -\pi(1 + 2\varepsilon^2 \ln \varepsilon - \varepsilon^2) = -\pi.$$

**例 8.3.14.** 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且满足

$$f(t) = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} (x^2 + y^2) f(\sqrt{x^2 + y^2}) \, dx \, dy + t^4$$

求  $f(x)$ .

采用极坐标将二重积分化为定积分, 得

$$\iint_{x^2+y^2 \leq t^2} (x^2 + y^2) f(\sqrt{x^2 + y^2}) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t \rho^3 f(\rho) \, d\rho = 2\pi \int_0^t \rho^3 f(\rho) \, d\rho$$

代入原式得

$$f(t) = 4\pi \int_0^t \rho^3 f(\rho) \, d\rho + t^4$$

两边求导得

$$f'(t) = 4\pi t^3 f(t) + 4t^3 f(0) = 0$$

此为一阶线性微分方程, 其通解为

$$f(t) = e^{4\pi \int t^3 dt} \left[ \int 4t^3 \cdot e^{-4\pi \int t^3 dt} dt + C \right] = e^{\pi t^4} \left[ \int 4t^3 \cdot e^{-\pi t^4} dt + C \right] = C e^{\pi t^4} - \frac{1}{\pi}.$$

又有  $f(0) = 0$  得  $C = \frac{1}{\pi}$ , 于是  $f(x) = \frac{1}{\pi} (e^{\pi x^4} - 1)$ .

## 微分方程与曲线(面)积分

**例 8.3.15.** 设曲线积分

$$\int_L [f'(x) + 2f(x) + e^x]y \, dx + [f'(x) - x] \, dy$$

与路径无关, 且  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = \frac{1}{2}$ , 其中  $f(x)$  一阶连续可导, 求  $f(x)$  的表达式.

令  $P = [f'(x) + 2f(x) + e^x]y$ ,  $Q = [f'(x) - x]$ , 因为积分与路径无关, 所以

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow f''(x) - f'(x) - 2f(x) = e^x + 1$$

该方程为二阶常系数非齐次线性微分方程, 令  $D = \frac{d}{dx}$ , 则有

$$(D^2 - D - 2)f(x) = e^x + 1 \Rightarrow (D - 2)\underbrace{(D + 1)f(x)}_z = e^x + 1$$

那么  $z' - 2z = e^x + 1$ , 该方程为一阶线性微分方程, 有通解公式

$$z = e^{2\int dx} \left[ \int (e^x + 1)e^{-2\int dx} dx + C_1 \right] = C_1 e^{2x} - e^x - \frac{1}{2}$$

因此  $f' + f = C_1 e^{2x} - e^x - \frac{1}{2}$ , 继续由通解公式

$$f = e^{-\int dx} \left[ \int \left( C_1 e^{2x} - e^x - \frac{1}{2} \right) e^{\int dx} dx + C_2 \right] = \frac{C_1}{3} e^{2x} - \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} + C_2 e^{-x}$$

代入  $f(0) = 0, f'(0) = \frac{1}{2}$ , 得方程组  $\begin{cases} C_1 + 3C_2 = 3 \\ 2C_1 - 3C_2 - 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$  因此  $f(x) = \frac{2}{3} e^{2x} - \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{3} e^{-x} - \frac{1}{2}$ .

**例 8.3.16.** 设二元函数  $u = u(x, y)$  满足  $du = 2xydx + (x^2 + 2y)dy$ ,  $u(0, 0) = 1$ , 且曲面  $\Sigma$  为锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  所截的部分, 求  $I = \iint_{\Sigma} yu(x, y)dS$ .

由  $du = 2xydx + (x^2 + 2y)dy$  得  $du = d(x^2y + y^2)$ , 即  $u = x^2y + y^2 + C$ , 又  $u(0, 0) = 1$ , 解得  $C = 1$ ,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

得  $I = \iint_{\Sigma} yu(x, y)dS = \sqrt{2} \iint_D x^2 y^2 dx dy = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^5 \sin^2\theta \cos^2\theta dr = 2\sqrt{2} \cdot \frac{64}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos^8\theta d\theta = \frac{7\sqrt{2}\pi}{24}$ .

**例 8.3.17.** 设对右半空间  $x > 0$  内任意的光滑有向封闭曲面  $\Sigma$  都有

$$\iint_{\Sigma} xf(x) dy dz - xyf(x) dz dx - ze^{2x} dx dy = 0$$

其中函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内具有连续一阶导数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ , 求  $f(x)$  的表达式.

设  $P = xf(x)$ ,  $Q = -xyf(x)$ ,  $R = -ze^{2x}$ , 那么

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = xf'(x) + f(x) - xf(x) - e^{2x}$$

由 Gauss 定理知,  $I = \pm \iiint_{\Omega} (xf'(x) + f(x) - xf(x) - e^{2x}) dx dy dz = 0$ , 由  $\Omega$  的任意性知,

$$xf'(x) + f(x) - xf(x) - e^{2x} = 0 \Rightarrow f'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right)f(x) = \frac{1}{x}e^{2x}$$

该方程为一阶线性微分方程, 有通解为

$$f(x) = e^{\int (1 - \frac{1}{x}) dx} \left[ \int \frac{1}{x} e^{2x} \cdot e^{\int (\frac{1}{x} - 1) dx} dx + C \right] = \frac{e^x}{x} \left[ \int e^x dx + C \right] = \frac{e^x}{x} (e^x + C)$$

又因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} (e^x + C) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + C}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x + o(x^2) + C}{x} = 1$$

即  $C = -1$ , 因此  $f(x) = \frac{e^x}{x} (e^x - 1)$ .

**例 8.3.18.** 设  $S$  是曲面  $az = x^2 + y^2$ , ( $0 \leq z \leq a$ ) 的第一卦限部分上侧,

$$A = \iint_S (x^2 z dy dz + y^2 z dz dx + xz^2 dx dy)$$

求满足  $f(0) = A$ ,  $f'(0) = -A$  的二阶可导函数  $f(x)$ , 使得  $y(f(x) + 3e^{3x})dx + f'(x)dy$  是某二元函数的全微分.

补充三个面, 分别为

$$\Sigma_1 : z = a, x^2 + y^2 \leq a^2 z, y \geq 0, \text{ 方向取下侧}$$

$$\Sigma_2 : x = 0, \text{ 方向取前侧}, \Sigma_3 : y = 0, \text{ 方向取右侧}$$

于是, 由 Gauss 定理

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + S} (x^2 z dy dz + y^2 z dz dx + xz^2 dx dy) = - \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= -2 \iiint_{\Omega} (2x + y) z dx dy dz = -2 \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} (2x + y) dx dy \int_{\frac{x^2 + y^2}{a}}^a z dz \\ &= -2 \iint_D (2x + y) \left[ \frac{a^2}{2} - \frac{(x^2 + y^2)^2}{2a^2} \right] dx dy = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a (2r \cos \theta + r \sin \theta) \left( a^2 - \frac{r^4}{a^2} \right) r dr \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{8a^5}{21} \cos \theta + \frac{4a^5}{21} \sin \theta \right) d\theta = -\frac{4}{7} a^5 \end{aligned}$$

则

$$A = I - \iint_{\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_2} - \iint_{\Sigma_3} = I - \left( -a^2 \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} x dx dy \right) = -\frac{4}{7} a^5 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a r^2 \cos \theta dr = -\frac{5}{21} a^5$$

由于  $y(f(x) + 3e^{3x})dx + f'(x)dy$  是某二元函数的全微分, 所以

$$\frac{\partial [yf(x) + 3e^{3x}]}{\partial y} = \frac{df'(x)}{dx} \Rightarrow f''(x) - f(x) = 3e^{2x}$$

记  $D = \frac{d}{dx}$ , 则上式可改写为  $(D+1)(D-1)f(x) = 3e^{2x}$ , 令  $z(x) = (D-1)f(x)$ , 于是

$$z(x) = e^{-\int dx} \left[ \int 3e^{2x} \cdot e^{\int dx} dx + C_1 \right] = e^{2x} + C_1 e^{-x}$$

由题意可求得  $C_1 = \frac{10}{21}a^5 - 1$ , 且  $f'(x) - f(x) = e^{2x} + C_1 e^{-x}$  的通解为

$$f(x) = e^{\int dx} \left[ \int (e^{2x} + C_1 e^{-x}) \cdot e^{-\int dx} dx + C_2 \right] = e^{2x} - \frac{C_1}{2} e^{-x} + C_2 e^x$$

并且令  $x = 0$ , 解得  $C_2 = -\frac{3}{2}$ , 于是  $f(x) = e^{2x} - \frac{3}{2} e^{-x} - \left( \frac{5}{21} a^5 - \frac{1}{2} \right) e^{-x}$ .

**例 8.3.19.** 设曲面积分

$$A = \frac{1}{a^5} \iint_S (x^2 z dy dz + y^2 z dz dx + xz^2 dx dy)$$

其中  $S$  是曲面  $x^2 + y^2 = az$  ( $0 \leq z \leq a$ ),  $a > 0$  第一卦限部分的外侧, 求三阶可导函数  $f(x)$ , 使得满足以下条件:

$$(1) \quad f^{(i)}(0) = (-1)^i A, \quad (i = 0, 1, 2);$$

$$(2) \quad \text{使得 } y[f'(x) + 3e^{2x}]dx + f''(x)dy \text{ 是某个函数的全微分.}$$

**法一：**曲面  $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$  的法向量的方向余弦为  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{(2x, 2y, -a)}{\sqrt{a^2 + 4x^2 + 4y^2}}$ , 故由两类曲面积分之间的关系, 得  
 $A = \frac{1}{a^5} \iint_S \frac{(x^2 z, y^2 z, z^2 x) \cdot (2x, 2y, -a)}{\sqrt{a^2 + 4x^2 + 4y^2}} dS$ , 并且  $dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$ , 则

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a^6} \iint_D \left( x^2 \left( \frac{x^2 + y^2}{a} \right), y^2 \left( \frac{x^2 + y^2}{a} \right), \left( \frac{x^2 + y^2}{a} \right)^2 x \right) \cdot (2x, 2y, -a) dx dy \\ &= \frac{1}{a^7} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a r^5 (2\cos^3 \theta + 2\sin^3 \theta - \cos \theta) \cdot r dr = \frac{1}{7} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^3 \theta + 2\sin^3 \theta - \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{7} \left( \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - 1 \right) = \frac{5}{21} \end{aligned}$$

**法二：**添加辅助面  $S_x : x = 0, (y, z) \in D_{yz}$ , 方向向外,  $S_y : y = 0, (z, x) \in D_{zx}$ , 方向向左,  $S_z : z = a, (x, y) \in D_{xy}$ :  $x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0$ , 方向上, 它们三个与  $S$  围成的区域为  $\Omega$ , 易得  $\iint_{S_x} = \iint_{S_y} = 0$ , 而

$$\iint_{S_z} (x^2 z dy dz + y^2 z dz dx + z^2 x dx dy) = \iint_{D_{xy}} a^2 x dx dy = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^a r^2 dr = \frac{a^5}{3}$$

由 Gauss 公式, 可得

$$\iint_{S_x + S_y + S_z + S} = \iiint_{\Omega} (4xz + 2yz) dV$$

其中  $\Omega : x^2 + y^2 \leq az, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq a$ , 那么

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (4xz + 2yz) dV &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^a (2x + y) \cdot 2z dz = \iint_{D_{xy}} (2x + y) \left[ a^2 - \left( \frac{x^2 + y^2}{a} \right)^2 \right] dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a (2r \cos \theta + r \sin \theta) \left( a^2 - \frac{r^4}{a^2} \right) r dr = \frac{4a^5}{7} \end{aligned}$$

于是可得  $A = \frac{1}{a^5} \left( \frac{4a^5}{7} - \frac{a^5}{3} \right) = \frac{5}{21}$ ,

再求函数  $f(x)$ , 由于  $y[f'(x) + 3e^{2x}] dx + f''(x) dy$  是某个函数的全微分, 于是有

$$\frac{\partial}{\partial y} (y[f'(x) + 3e^{2x}]) = \frac{\partial}{\partial x} (f''(x))$$

整理得  $f'''(x) - f'(x) = 3e^{2x}$ , 该方程的齐次通解为  $r^3 - r = r(r^2 - 1) = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = -1$ , 那么  $Y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$ , 其特解为  $f(x) = \frac{1}{D(D-1)(D+1)} 3e^{2x} = \frac{1}{2} e^{2x}$ , 那么该微分方程的通解为

$$f(x) = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + \frac{1}{2} e^{2x}$$

又  $f(0) = A, f'(0) = -A, f''(0) = A$ , 解得  $f(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{3}{2} e^x - \frac{11}{42} e^{-x} + \frac{3}{2}$ .

**例 8.3.20.** 设函数  $f(t)$  在  $[0, +\infty)$  上连续,

$$\Omega(t) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2, z \geq 0, t \geq 0\}$$

$S(t)$  是  $\Omega(t)$  的表面,  $D(t)$  是  $\Omega(t)$  在  $xOy$  平面上的投影区域,  $L(t)$  是  $D(t)$  的边界曲线, 已知  $\forall t \in (0, +\infty)$  恒有,

$$\oint_{L(t)} f(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2} ds + \iint_{S(t)} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma + \iiint_{\Omega(t)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$$

求  $f(t)$  的表达式.

$S(t)$  由两部分组成, 分别记作:

$$S_1(t) : z = \sqrt{t^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D(t); S_2(t) : z = 0, (x, y) \in D(t)$$

对弧长曲线积分的直接参数方程计算法,  $L(t)$  的参数方程为

$$L(t) : x = t \cos \theta, y = t \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

则

$$ds = \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)} d\theta = t d\theta$$

代入对弧长的曲线积分式, 得

$$\oint_{L(t)} f(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2} ds = \int_0^{2\pi} f(t^2) t \cdot t d\theta = 2\pi f(t^2) t^2$$

由曲面积分被积函数定义在积分曲面上和二重积分的极坐标计算方法, 得

$$\begin{aligned} \iint_{S(t)} (x^2 + y^2 + z^2) dS &= t^2 \iint_{S_1(t)} dS + \iint_{S_2(t)} (x^2 + y^2) dS = t^2 \cdot \frac{4\pi t^2}{2} + \iint_{D(t)} (x^2 + y^2) d\sigma \\ &= 2\pi t^4 + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t \rho^2 \rho d\rho = 2\pi t^4 + \frac{\pi}{2} t^4 = \frac{5}{2}\pi t^4 \end{aligned}$$

由二重积分的极坐标计算方法, 得

$$\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t \rho f(\rho^2) d\rho = 2\pi \int_0^t \rho f(\rho^2) d\rho$$

由三重积分的球坐标计算方法, 得

$$\iiint_{\Omega(t)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^t r \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{\pi}{2} t^4$$

将上述结果代入题设等式, 得

$$2\pi t^2 f(t^2) + \frac{5}{2}\pi t^4 = 2\pi \int_0^t f(\rho^2) \rho d\rho + \frac{\pi}{2} t^4 \quad (*)$$

整理得  $f(t^2) = \frac{\int_0^t f(\rho^2) d\rho}{t^2} - t^2$ , 由  $f(t)$  在  $t = 0$  连续, 故

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t^2) = f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^t f(\rho^2) \rho d\rho}{t^2} - \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t^2)t}{2t} = \frac{f(0)}{2}$$

故  $f(0) = 0$ , 由等式 (\*) 知  $f(t)$  可导, 对两端求导并整理得

$$f'(t^2) + \frac{1}{2t^2} f(t^2) + 2 = 0$$

令  $u = t^2$ , 有  $f'(u) + \frac{1}{2u} f(u) = -2$ , 该方程为一阶非齐次线性微分方程, 由通解公式, 得

$$f(u) = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{du}{u}} \left[ \int -2 \cdot e^{\frac{1}{2} \int \frac{du}{u}} du + C \right] = \frac{1}{\sqrt{u}} \left[ -2 \int \sqrt{u} du + C \right] = -\frac{4}{3} u + \frac{C}{\sqrt{u}}$$

即  $f(t) = -\frac{4}{3}t + \frac{C}{\sqrt{t}}$ , 其中  $C$  为任意常数, 由  $f(0) = 0$  得  $C = 0$ , 故  $f(t) = -\frac{4}{3}t$ .

### 8.3.3 微分方程与幂级数

**例 8.3.21 (2007 数一).** 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $(-\infty, +\infty)$  内收敛, 其和函数  $y(x)$  满足

$$y'' - 2xy' - 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$$

(1) 证明:  $a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n, n = 1, 2, \dots$ ; (2) 求  $y(x)$  的表达式.

(1) 对  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  求一、二阶导数, 有

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

并代入关系式  $y'' - 2xy' - 4y = 0$ , 整理可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+2)a_n x^n$$

对比上式系数可得  $a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n$ .

(2) 因为  $y(0) = a_0 = 0, y'(0) = a_1 = 1$ , 故  $a_{2n} = 0, n = 0, 1, 2, \dots$ , 且

$$a_{2n+1} = \frac{2}{2n} a_{2n-1} = \cdots = \frac{2^n}{2n \cdot (2n-2) \cdots 4 \cdot 2} a_1 = \frac{1}{n!} \quad n = 1, 2, \dots$$

从而

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = x e^{x^2} \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

**例 8.3.22.** 求级数  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$  的值.

因为  $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \searrow$ , 且注意到

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{\sqrt{1 \cdot 3} \cdot \sqrt{3 \cdot 5} \cdots \sqrt{(2n-1) \cdot (2n+1)}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

由  $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$  ( $a \neq b$ ), 所以

$$0 < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

由 Leibniz 定理, 原级数收敛; 收敛半径为 1, 这是因为

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = 1$$

由此可知幂级数在  $(-1, 1)$  内收敛, 记  $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$ , 那么

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! n}{(2n)!!} x^{n-1}, \quad 2xf'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!} x^n$$

于是有

$$2f'(x) - 2xf'(x) = f(x)$$

及

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2(1-x)}$$

两边积分得  $\ln f(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ , 因此  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ , 即  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ , 令  $x \rightarrow -1^+$  取极限得

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \right] = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**例 8.3.23.** 已知当  $x > 0$  时, 有  $(1+x^2)f'(x) + (1+x)f(x) = 1$ , 且

$$g'(x) = f(x), \quad f(0) = g(0) = 0$$

证明:  $\frac{1}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{n}\right) < 1$ .

证 因为  $f'(x) + \frac{1+x}{1+x^2} f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , 由一阶线性微分方程通解公式得

$$f(x) = e^{-\int \frac{1+x}{1+x^2} dx} \left[ \int \frac{1}{1+x^2} \cdot e^{\int \frac{1+x}{1+x^2} dx} dx + C \right] = \frac{e^{-\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} \int_0^x \frac{e^{\arctan t}}{\sqrt{1+t^2}} dt$$

在  $x \in (0, 1]$  上, 有

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{\arctan t - \arctan x}}{\sqrt{1+t^2} \cdot \sqrt{1+x^2}} dt \leq \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x < x$$

于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx < \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} x dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} < 1$$

另一方面, 由  $e^x > 1+x$ ,  $x \neq 0$ , 有

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \frac{1}{1+x^2} \int_0^x e^{\arctan t - \arctan x} dt \geq \frac{1}{1+x^2} \int_0^x [1 + (\arctan t - \arctan x)] dt \\ &= \frac{1}{1+x^2} \int_0^x \left[1 + \frac{(t-x)}{1+\xi^2}\right] dt \geq \frac{1}{1+x^2} \int_0^x [1+t-x] dt = \frac{1}{1+x^2} \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{n}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{1+x^2} \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \int_0^{\frac{1}{n}} \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \left(1 - \frac{1}{3n}\right) \geq \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \geq \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{3} > \frac{1}{4} \end{aligned}$$

综上得证.

**例 8.3.24 (第十届数学竞赛决赛).** 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdots \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{1}{n+1}$ .

级数的通项化为

$$a_n = \frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2(n+1)}$$

令  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)} x^{2(n+1)}$ , 记  $u_n(x) = \frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)} x^{2(n+1)}$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(2n+2)!!}{(2n+3)!!(n+2)} x^{2(n+1)} \cdot \frac{(2n+1)!!(n+1)}{2(2n)!!x^{2(n+1)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)(n+1)}{(2n+3)(n+2)} x^2 = x^2 \end{aligned}$$

所以  $x^2 < 1$  时,  $f(x)$  的幂级数收敛, 其收敛区间为  $(-1, 1)$ ,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1}, \quad f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (2n)!!}{(2n-1)!!} x^{2n}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (2n)!!}{(2n-1)!!} x^{2n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (2n)!!}{(2n-1)!!} x^{2n-1} = x \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (2n)!!}{(2n-1)!!} \int_0^x x^{2n-1} dx \right)' \\ &= x \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (2n-2)!!}{(2n-1)!!} x^{2n} \right)' = x \left( x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (2n-2)!!}{(2n-1)!!} x^{2n-1} \right)' \\ &= x \left( x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cdot (2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1} \right)' = x \left[ x \left( 4x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1} \right) \right]' \\ &= x [x(4x + f'(x))]' = x(8x + f'(x) + xf''(x)) \Rightarrow f''(x) - \frac{x}{1-x^2} f'(x) = \frac{8x^2}{1-x^2} \end{aligned}$$

这是关于  $f'(x)$  的一阶线性微分方程, 其通解为

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\int \frac{-x}{1-x^2} dx} \left[ \int \frac{8x^2}{1-x^2} \cdot e^{-\int \frac{-x}{1-x^2} dx} dx + C_1 \right] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[ 8 \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx + C_1 \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (4 \arcsin x - 4x \sqrt{1-x^2} + C_1) \end{aligned}$$

因为  $f'(0) = 0$ , 可得  $C_1 = 0$ , 所以  $f'(x) = 4 \left( \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - x \right)$ , 积分得

$$f(x) = 4 \int \left( \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - x \right) dx = 2 \arcsin^2 x - 2x^2 + C_2$$

又有  $f(0) = 0$ , 可得  $C_2 = 0$ , 所以  $f(x) = 2 \arcsin^2 x - 2x^2$ , 于是有

$$\text{原式} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 \arcsin^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 = \frac{\pi^2}{8} - 1$$



---

## 线性代数

## 第9章

### 行列式

“不管数学的任一分支是多么抽象，总有一天会应用在这实际世界上。”

——罗巴切夫斯基

行列式是一个与方阵相关的数值，它是一个重要的线性代数概念。对于一个  $n \times n$  的方阵  $A$ ，其行列式记作  $|A|$  或  $\det(A)$ 。

行列式的计算方法是通过对方阵的元素进行特定的运算得到的。对于  $2 \times 2$  的方阵：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

对于  $3 \times 3$  的方阵，可以使用 Sarrus 规则来计算行列式：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

行列式在线性代数中有着广泛的应用，例如用来求解方程组的解、计算矩阵的逆、判断矩阵的可逆性、计算特征值等。行列式的性质包括：

1. 互换行或列，行列式变号；
2. 行或列成比例，行列式为零；
3. 行或列加减另一行或列的倍数，行列式不变。

行列式的计算方法和性质在解决线性代数中的各种问题时都起着重要的作用。深入理解行列式的概念和运算规则可以帮助我们更好地理解和应用线性代数知识。

#### 9.1 行列式的定义及其性质

行列式的性质可以帮助我们更加深入地理解行列式的本质，同时也为行列式的计算提供了一些重要的技巧和方法。

### 9.1.1 逆序数

**定义 9.1.1 (排列).**  $n$  级排列由  $1, 2, \dots, n$  组成的一个有序数组称为一个  $n$  级排列, 通常记为  $i_1 i_2 \cdots i_n$ .

**定义 9.1.2 (逆序数).** 在一个排列中, 如果一对数的前后位置与大小顺序相反, 即前面的数大于后面的数, 则它们构成一个逆序. 一个排列中的逆序总数, 称为这个排列的逆序数, 通常记为  $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ .

**定义 9.1.3 (奇 (偶) 排列).** 逆序数为奇数 (偶数) 的排列, 称为奇 (偶) 排列.

**定义 9.1.4 (对换).** 把一个排列中某两个数的位置互换, 而其余的数不动, 就得到另一个排列, 这样的一个变换称为一次对换.

**定理 9.1.1.** 任意一个排列经过一次对换后, 奇偶性改变.

**定理 9.1.2.**  $n (n > 1)$  级排列共有  $n!$  种, 奇偶排列各占一半.

**例 9.1.1.** 选择  $i$  与  $k$ , 使  $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$  成为五阶行列式中一个带负号的项.

将给定的项改写成行标自然顺序, 即

$$a_{1i}a_{25}a_{32}a_{4k}a_{53}$$

列标构成的排列  $i52k4$  中缺 1 和 4, 令  $i = 1, k = 4, \tau(15243) = 3 + 1 = 4$ , 故该项带正号; 令  $i = 4, k = 1, \tau(45213) = 3 + 3 + 1 = 7$ , 故该项带负号.

### 9.1.2 行列式的概念

**定义 9.1.5 ( $n$  阶行列式).**  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$  是所有取自不同行不同列的  $n$  个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和, 这里  $j_1 j_2 \cdots j_n$  是一个  $n$  级排列. 当  $j_1 j_2 \cdots j_n$  是偶排列时, 该项前面带正号; 当  $j_1 j_2 \cdots j_n$  是奇排列时, 该项前面带负号, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中  $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$  表示对所有  $n$  级排列求和.  $n$  阶行列式有时简记为  $|a_{ij}|_n$ , 而且有如下另外两种类似的定义:

$$|a_{ij}|_n = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$$

和

$$|a_{ij}|_n = \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ j_1 j_2 \cdots j_n}} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_{j_2} \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}.$$

由  $n$  级排列的性质可知,  $n$  阶行列式共有  $n!$  项, 其中冠以正号的项和冠以负号的项 (不算元素本身所带的负号) 各占一半.

**例 9.1.2.** 求  $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$  中  $x^4$  与  $x^3$  的系数.

只有行列式的对角线上的元素相乘才出现  $x^4$ , 并且带正号, 于是  $x^4$  的系数为 2; 同理, 含  $x^3$  的项只有一项, 即

$$x \cdot 1 \cdot x \cdot x = x^3$$

而且其列标所构成的排列为 2134, 于是  $\tau(2134) = 1$ , 即  $x^3$  的系数为 -1.

**例 9.1.3.** 证明  $n$  阶行列式微分法:

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{i1} & f_{i2} & \cdots & f_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx} f_{i1} & \frac{d}{dx} f_{i2} & \cdots & \frac{d}{dx} f_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 从行列式的定义出发予以证明,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{i1} & f_{i2} & \cdots & f_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} &= \frac{d}{dx} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \prod_{i=1}^n f_{i j_i} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \frac{d}{dx} \prod_{i=1}^n f_{i j_i} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \sum_{i=1}^n f_{1 j_1} f_{2 j_2} \cdots \frac{d}{dx} f_{i j_i} \cdots f_{n j_n} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} f_{1 j_1} f_{2 j_2} \cdots \frac{d}{dx} f_{i j_i} \cdots f_{n j_n} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx} f_{i1} & \frac{d}{dx} f_{i2} & \cdots & \frac{d}{dx} f_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

### 9.1.3 行列式的基本性质

**定理 9.1.3 (行列式的转置).** 行列式  $D$  与它的转置行列式  $D^\top$  (将  $D$  行的项转为列的项, 如第 1 行转为第 1 列,  $\dots$ , 第  $n$  行转为第  $n$  列) 相等.

**定理 9.1.4 (变号定理).** 互换行列式的两行 (列), 行列式变号 (例如, 交换第 1 行和第 2 行, 记为  $r_1 \leftrightarrow r_2$ ; 交换第 1 列和第 2 列, 记为  $c_1 \leftrightarrow c_2$ ).

**定理 9.1.5 (行列式的数乘).** 行列式的某一行(列) 中所有的元素都乘以同一数  $k$ , 等于用数  $k$  乘此行列式.

**推论 9.1.1.** 行列式中某一行 (列) 的所有元素的公因子可以提到整个行列式的外面.

**定理 9.1.6.** 行列式中如果有两行 (列) 元素成比例, 则此行列式等于零.

**定理 9.1.7 (行列式拆分).** 若行列式的某一列 (行) 的所有元素都是两数之和, 例如第  $i$  列的元素都是两数之和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} + a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} + a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{22} & \cdots & a_{ni} + a'_{ni} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

则  $D$  等于下列两个行列式之和

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{22} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{22} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**定理 9.1.8 (行列式变换).** 把行列式的某一行 (列) 的各元素乘以同一数然后加到另一行 (列) 对应的元素上, 行列式不变.

#### 9.1.4 几种特殊的行列式

常见的行列式展开.

表 9.1: 常见的行列式展开

上三角形、下三角形、对角行列式

$$(1) \begin{array}{c|ccccc} & a_{11} & & * & a_{11} & O \\ & & a_{22} & & a_{22} & a_{22} \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots \\ \hline & O & & a_{nn} & * & O \\ & & & & a_{nn} & a_{nn} \end{array} = \begin{array}{c|ccccc} & a_{11} & & a_{22} & O & O \\ & & a_{22} & & a_{22} & a_{22} \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots \\ \hline & O & & O & O & O \end{array} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

副对角线方向的行列式

$$(2) \begin{array}{c|ccccc} * & & a_{1n} & & a_{1n} & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & & a_{2,n-1} & a_{2,n-1} \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots \\ \hline & a_{n1} & & a_{n1} & & a_{n1} \\ & & O & & & O \end{array} = \begin{array}{c|ccccc} O & & & & O & O \\ & & & & a_{2,n-1} & a_{1n} \\ & & & & \ddots & \ddots \\ \hline & a_{n1} & & a_{n1} & & a_{n1} \\ & & O & & & O \end{array} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n a_{i,n-i+1}$$

## 9.2 行列式按行 (列) 展开定理

行列式按行 (列) 展开定理是计算行列式的一种有效方法, 适用于任意阶数的方阵. 通过按行 (列) 展开定理, 可以将复杂的行列式计算问题简化为一系列较小的行列式计算问题, 从而更容易地求解行列式的值.

### 9.2.1 行列式展开定理

**定义 9.2.1 (余子式).** 在  $n$  阶行列式  $D = |a_{ij}|$  中, 去掉元素  $a_{ij}$  所在的第  $i$  行和第  $j$  列后, 余下的  $n-1$  阶行列式, 称为  $a_{ij}$  的余子式, 记为  $M_{ij}$ .

**定义 9.2.2 (代数余子式).** 称  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  为  $a_{ij}$  的代数余子式.

**定义 9.2.3 ( $k$  阶子式).** 在  $n$  阶行列式  $D = |a_{ij}|$  中, 任意选定  $k$  行  $k$  列 ( $1 \leq k \leq n$ ), 位于这些行列交叉处的  $k^2$  个元素, 按原来顺序构成一个  $k$  阶行列式, 称为  $D$  的一个  $k$  阶子式.

**定理 9.2.1 (按行 (列) 展开).** 行列式等于它的任一行 (列) 的各元素与其对应的代数余子式乘积之和, 即按第  $i$  行展开,  $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ); 按第  $j$  列展开,  $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

行列式某一行 (列) 的元素与另一行 (列) 的对应元素的代数余子式乘积之和等于零, 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, i \neq j$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, i \neq j.$$

**例 9.2.1.** 设四阶矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 8 \\ -2 & 1 & 4 & -7 \\ 3 & 0 & 5 & -9 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

而  $A_{ij}$  是  $\mathbf{A}$  的  $(i, j)$  元的代数余子式 ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ), 试计算

$$(1) 2A_{14} - 2A_{24} + 3A_{34} - 3A_{44};$$

$$(2) A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44}.$$

(1) 由于  $a_{11}A_{14} + a_{21}A_{24} + a_{31}A_{34} + a_{41}A_{44} = 0$ , 所以

$$2A_{14} - 2A_{24} + 3A_{34} + a_{44} = 0 \Rightarrow 2A_{14} - 2A_{24} + 3A_{34} - 3A_{44} = -(a+3)A_{44}$$

$$\text{且 } A_{44} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 7, \text{ 所以 } 2A_{14} - 2A_{24} + 3A_{34} - 3A_{44} = -7(a+3).$$

(2) 构造一个新矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 8 \\ -2 & 1 & 4 & -7 \\ 3 & 0 & 5 & -9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

易知  $|\mathbf{B}| = -217$ , 所以  $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = -217$ .

**例 9.2.2 (2010 云南大学).** 设四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & d \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

计算  $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$ , 其中  $A_{ij}$  是元素  $a_{ij}$  的代数余子式.

由于  $A_{ij}$  与  $a_{ij}$  的值无关, 现构造一个新的行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

由例 9.3.19 知  $D_1 = (a+b+c+d)(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ , 将  $D_1$  按第一行展开即得

$$A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} = (a+b+c+d)(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

**例 9.2.3.** 设 3 阶矩阵  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{3 \times 3}$  满足  $\mathbf{A}^\top = k\mathbf{A}^*$  ( $k > 0$ ), 若  $a_{11} = a_{12} = a_{13} = c > 0$ , 求  $c$ .

对  $\mathbf{A}^\top = k\mathbf{A}^*$  两边取行列式, 则

$$\det(\mathbf{A}^\top) = \det(k\mathbf{A}^*) \Rightarrow \det \mathbf{A} = k^n (\det \mathbf{A})^{n-1} = k^3 (\det \mathbf{A})^2 \Rightarrow \det \mathbf{A} = \frac{1}{k^3}$$

又因为  $\mathbf{A}^\top = k\mathbf{A}^*$ , 所以  $a_{ij} = kA_{ij}$ , 其中  $A_{ij}$  是  $a_{ij}$  对应的代数余子式, 那么

$$\det \mathbf{A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^3 a_{1i}^2 = \frac{3c^2}{k}$$

$$\text{于是 } \frac{1}{k^3} = \frac{3c^2}{k} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{3k}.$$

## 9.2.2 Laplace 展开定理

**定理 9.2.2 (Laplace 展开定理).** 取定行指标  $i_1, i_2, \dots, i_p, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$ , 遍取行列式  $\det \mathbf{A}$  中第  $i_1, i_2, \dots, i_p$  行上的  $p$  阶子式, 并分别乘以相应的代数余子式, 其和即为  $\det \mathbf{A}$ , 具体地说, 有

$$\det \mathbf{A} = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq n} \mathbf{A} \begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_p \\ j_1 j_2 \cdots j_p \end{pmatrix} \left[ (-1)^{\sum_{k=1}^p i_k + \sum_{k=1}^p j_k} \mathbf{A} \begin{pmatrix} i_{p+1} i_{p+2} \cdots i_n \\ j_{p+1} j_{p+2} \cdots j_n \end{pmatrix} \right]$$

其中  $i_1 i_2 \cdots i_p i_{p+1} \cdots i_n$  和  $j_1 j_2 \cdots j_p j_{p+1} \cdots j_n$  都是  $1, 2, \dots, n$  的排列, 并且  $1 \leq i_{p+1} < i_{p+2} < \dots \leq i_n, 1 \leq j_{p+1} < j_{p+2} < \dots \leq j_n$ .

**例 9.2.4.** 利用 Laplace 展开定理计算下列行列式:

$$(1) D = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}. \quad (2) D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & 1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & x_1 & x_2 & x_3 & c_2 \\ a_3 & b_3 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & c_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & 0 & 0 & 0 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

(1) 将行列式  $D$  按第 1 列、第 3 列作 Laplace 展开, 得到

$$\begin{aligned} D &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 5} \mathbf{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \left[ (-1)^{i_1+i_2+1+3} \mathbf{A} \begin{pmatrix} i_3 & i_4 & i_5 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \right] \\ &= (-1)^{1+3+1+3} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4+1+3} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+4+1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -8 \times (-20) - (-10) \times (-62) - 7 \times 87 = -1069. \end{aligned}$$

(2) 将行列式  $D$  按第 3 列、第 4 列和第 5 列作 Laplace 展开, 得到

$$\begin{aligned} D &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 6} \mathbf{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \left[ (-1)^{i_1+i_2+i_3+3+4+5} \mathbf{A} \begin{pmatrix} i_4 & i_5 & i_6 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \right] \\ &= (-1)^{3+4+5+3+4+5} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq 3} (x_i - x_j)^2. \end{aligned}$$

## 9.3 行列式的计算

### 9.3.1 具象行列式的计算

化为三角形矩阵

**例 9.3.1 (2016 复旦大学).** 设  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ , 其中  $a_{ij} = \max\{i, j\}$ , 求行列式  $\det \mathbf{A}$ .

对于  $i = 2, \dots, n$ , 依次将第  $i$  行的  $-1$  倍加到第  $i - 1$  行, 得

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2, \dots, n]{r_{i-1}-r_i} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n.$$

**例 9.3.2.** 设  $n \geq 2$ , 计算  $n$  阶行列式  $D_n = \det(a_{ij})$ , 其中  $a_{ij} = |i - j|$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

从最后一行起, 依次将后一行减去前一行, 再将所得行列式的最后一行加到其他行, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2, \dots, n]{r_i-r_{i-1}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[j=1, \dots, n-1]{c_j+c_n} \begin{vmatrix} n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-3 & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} 2^{n-2} (n-1).$$

$$\text{例 9.3.3.} \text{ 计算行列式 } D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}.$$

依次将第  $n$  行减去第  $n-1$  行, 第  $n-1$  行减去第  $n-2$  行,  $\dots$ , 第 2 行减去第 1 行, 再将各列加到第 1 列, 得

$$D_n \xrightarrow[i=n, \dots, 1]{r_i-r_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[j=2, \dots, n]{c_1+c_j} \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[j=2, \dots, n-1]{c_1+c_j} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1-n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 1-n & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xrightarrow[j=2, \dots, n-1]{c_j+c_1} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & -n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -n & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

**例 9.3.4 (2008 山西师范大学).** 计算  $f(x+1) - f(x)$ , 其中

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & x^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & x^n \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & x^{n+1} \end{vmatrix}.$$

由二项式定理  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$ ,

$$f(x+1) - f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2x+1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 3x^2+3x+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & nx^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \cdots + 1 \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & (n+1)x^n + C_{n+1}^2 x^{n-1} + \cdots + 1 \end{vmatrix}$$

将第一列乘  $-1$ , 第二列乘  $-x$ , 第三列乘  $-x^2$ ,  $\dots$ , 第  $n$  列乘  $-x^{n-1}$ , 都加到最后一列, 得

$$f(x+1) - f(x) \xrightarrow[j=1, \dots, n]{c_{n+1}-x^{j-1}c_j} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & 0 \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & (n+1)x^n \end{vmatrix} = (n+1)!x^n.$$

化为对角型矩阵

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 2-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2-n & \cdots & 1 & 1 \\ 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

第二列至第  $n$  列都加到第一列, 再将第一列的  $-1$  倍加到其他各列, 得

$$D_n \xrightarrow[j=2, \dots, n]{c_1+c_j} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 2-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[j=2, \dots, n]{c_j-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1-n \\ 1 & 0 & \cdots & 1-n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n^2+n-2}{2}} (n-1)^{n-1}.$$

**例 9.3.6 (2008 北京科技大学).** 计算行列式  $|A|$ , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n+x \\ 1 & 2 & \cdots & (n-1)+x & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2+x & \cdots & n-1 & n \\ 1+x & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

从第二行至第  $n$  行都减去第一行, 再把所有列都加到最后一列, 得对角型行列式

$$\begin{aligned} |A| &\stackrel{r_i - r_1}{\substack{i=2, \dots, n}} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n+x \\ 0 & 0 & \cdots & x & -x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & x & \cdots & 0 & -x \\ x & 0 & \cdots & 0 & -x \end{array} \right| \stackrel{c_n + c_j}{\substack{j=1, \dots, n-1}} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdots & n-1 & x + \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ x & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right| \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left( x + \frac{n^2+n}{2} \right) x^{n-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} x & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 1 & x & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

**例 9.3.7 (2002 华东师范大学).** 计算  $n$  阶行列式  $D_n =$

先把第一列乘二, 再把第一行除以二, 得

$$\begin{aligned} D_n &\stackrel{c_1 \times 2}{\substack{r_1/2}} \left| \begin{array}{ccccc} x & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & x & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & x & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & x \end{array} \right| \stackrel{r_i - r_1}{\substack{i=2, \dots, n}} \left| \begin{array}{ccccc} x & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2-x & x-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2-x & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2-x & 0 & 0 & \cdots & x-2 \end{array} \right| \\ &\stackrel{c_1+c_j}{\substack{j=2, \dots, n}} \left| \begin{array}{ccccc} x+2(n-1) & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & x-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-2 \end{array} \right| = (x+2n-2)(x-2)^{n-1} \end{aligned}$$

**例 9.3.8 (2005 北京工业大学).** 计算  $n$  阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a+3 & \cdots & a+n \\ a+2 & a+3 & a+4 & \cdots & a+1 \\ a+3 & a+4 & a+5 & \cdots & a+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+n & a+1 & a+2 & \cdots & a+n-1 \end{vmatrix}.$$

从最后一行开始, 每行都减去其前一行, 然后各列都加到第一列, 并按第一列展开, 得

$$\begin{aligned}
 D & \xrightarrow[i=n, \dots, 2]{r_i - r_{i-1}} \left| \begin{array}{cccccc} a+1 & a+2 & a+3 & \cdots & a+n-1 & a+n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{array} \right| \\
 & \xrightarrow[j=2, \dots, n]{c_1 + c_j} \left| \begin{array}{cccccc} \frac{1}{2}n(2a+n+1) & a+2 & a+3 & \cdots & a+n-1 & a+n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{array} \right| \\
 & = \frac{1}{2}n(2a+n+1) \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{array} \right|_{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left[ a + \frac{n(n+1)}{2} \right] n^{n-1}.
 \end{aligned}$$

建立递推公式

**例 9.3.9.** 求下列  $n$  阶行列式

$$(1) D_n = \left| \begin{array}{ccc} 2a & a^2 & \\ 1 & 2a & a^2 \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ & 1 & 2a & a^2 \\ & & 1 & 2a \end{array} \right|. \quad (2) D_n = \left| \begin{array}{ccc} a+b & ab & \\ 1 & a+b & ab \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ & 1 & a+b & ab \\ & & 1 & a+b \end{array} \right|.$$

(1) 把  $D_n$  第 1 列乘  $-\frac{1}{2}a$  加到第 2 列, 再把第 2 列乘  $-\frac{2}{3}a$  加到第 3 列, 如此下去, 直至把第  $n-1$  列乘  $-\frac{n-1}{n}a$  加到第  $n$  列, 得

$$D_n \xrightarrow[j=1, \dots, n-1]{c_{j+1} - c_j \times \frac{j}{j+1} a} \left| \begin{array}{ccccc} 2a & 0 & & & \\ 1 & \frac{3}{2}a & 0 & & \\ & 1 & \frac{4}{3}a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 1 & \frac{n+1}{n}a \end{array} \right| = (n+1)a^n.$$

(2) 把  $D_n$  按第一行展开, 得

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - ab \left| \begin{array}{ccccc} 1 & ab & & & \\ 0 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{array} \right|_{n-1} = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}.$$

所以有递推公式

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$$

由此逐次递推, 得

$$D_n - aD_{n-1} = b^2(D_{n-2} - aD_{n-3}) = \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1)$$

注意到

$$D_1 = a + b, D_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = a^2 + ab + b^2$$

所以

$$D_n - aD_{n-1} = b^n$$

根据对称性, 有

$$D_n - bD_{n-1} = a^n$$

若  $a = b$  (可见上题), 则  $D_n = a^n + aD_{n-1}$ , 由此递推, 得

$$D_n = (n+1)a^n$$

若  $a \neq b$ , 可得  $D_n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}$ .

**例 9.3.10** (1994 华中师范大学). 计算  $n+1$  阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a & -1 & & & & & \\ ax & a & -1 & & & & \\ ax^2 & ax & a & -1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ ax^{n-1} & ax^{n-2} & ax^{n-3} & \cdots & a & -1 & \\ ax^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & ax & a & \end{vmatrix}.$$

**法一:** 将第二列的  $-x$  倍加到第一列, 第三列的  $-x$  倍加到第二列, 以此类推,

$$D_{n+2} \xrightarrow[j=1, \dots, n]{c_j - xc_{j+1}} \begin{vmatrix} a+x & -1 & & & & & \\ 0 & a+x & -1 & & & & \\ 0 & 0 & a+x & -1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+x & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & \end{vmatrix} = a(a+x)^n.$$

**法二:** 先把第二列乘  $a$  加到第一列, 并提出第一列的公因子  $x+a$ , 再按第一行展开, 得

$$D_{n+1} = (x+a)D_n = (x+a)^2 D_{n-1} = \cdots = (x+a)^{n-1} D_2 = (x+a)^{n-1} \begin{vmatrix} a & -1 \\ ax & a \end{vmatrix} = a(x+a)^n.$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & & & \\ \gamma & \alpha & \beta & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \gamma & \alpha & \beta \\ & & & & \gamma & \alpha & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ 的值.}$$

**例 9.3.11** (2006 中国科学院). 已知  $\alpha, \beta, \gamma$  为实数, 求  $\det \mathbf{A} =$

显然, 若  $\beta = 0$  或  $\gamma = 0$ , 则  $\det \mathbf{A} = \alpha^n$ . 因此, 下设  $\beta\gamma \neq 0$  把  $D_n = \det \mathbf{A}$  按第一行展开, 得

$$D_a = \alpha D_{n-1} - \beta\gamma D_{n-2}$$

令  $p+q = \alpha, pq = \beta\gamma$ , 则  $p, q$  是二次方程  $x^2 - \alpha x + \beta\gamma = 0$  的根. 故有如下递推公式

$$D_n - pD_{n-1} = q(D_{n-1} - pD_{n-2})$$

由此逐次递推, 得

$$D_n - pD_{n-1} = q^2(D_{n-2} - pD_{n-3}) = \cdots = q^{n-2}(D_2 - pD_1)$$

注意到

$$D_1 = \alpha = p+q, D_2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \beta\gamma = p^2 + pq + q^2$$

所以

$$D_n - pD_{n-1} = q^{n-2}[p^2 + pq + q^2 - p(p+q)] = q^n$$

根据对称性

$$D_n - qD_{n-1} = p^n$$

若  $\alpha^2 = 4\beta\gamma$ , 则  $p = q$ , 所以  $D_n = p^n + pD_{n-1}$ . 由此递推, 得

$$D_n = (n+1)p^n = (n+1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n$$

若  $\alpha^2 \neq 4\beta\gamma$ , 则  $p \neq q$ , 则有

$$D_n = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q} = \frac{\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}\right)^{n+1} - \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}\right)^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}.$$

升阶法

**例 9.3.12.** 计算下列行列式  $|\mathbf{A}|$ ,  $a_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),

$$(1) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 + a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & 1 + a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & 1 + a_n^2 \end{pmatrix} \quad \parallel \quad (2) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 + a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 + a_n \end{pmatrix}.$$

(1) 把  $|\mathbf{A}|$  添加一行、一列且保持值不变,

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 + a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ 0 & a_2 a_1 & 1 + a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & 1 + a_n^2 \end{vmatrix}_{n+1} \xrightarrow[i=1, \dots, n]{r_{i+1} - a_i r_1} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[j=1, \dots, n]{c_1 + a_j c_{j+1}} \begin{vmatrix} 1 + \sum_{k=1}^n a_k^2 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 + \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

(2) 同样地, 把  $|\mathbf{A}|$  添加一行、一列且保持值不变,

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 + a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 + a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 + a_n \end{vmatrix}_{n+1} \xrightarrow[i=1, \dots, n]{r_{i+1} - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[j=1, \dots, n]{c_1 + \frac{1}{a_j} c_{j+1}} \begin{vmatrix} 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n a_k \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right).$$

**例 9.3.13 (2003 南开大学).** 计算下列行列式的值:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 c_1 & a_2 + b_1 c_2 & \cdots & a_n + b_1 c_n \\ a_1 + b_2 c_1 & a_2 + b_2 c_2 & \cdots & a_n + b_2 c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 + b_n c_1 & a_2 + b_n c_2 & \cdots & a_n + b_n c_n \end{vmatrix}$$

其中  $n \geq 3$ .

**法一:** 利用升阶法,

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & \cdots & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ 0 & \cdots & a_1 + b_1 c_1 & a_2 + b_1 c_2 & \cdots & a_n + b_1 c_n \\ 0 & \cdots & a_1 + b_2 c_1 & a_2 + b_2 c_2 & \cdots & a_n + b_2 c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_1 + b_n c_1 & a_2 + b_n c_2 & \cdots & a_n + b_n c_n \end{vmatrix}_{n+1} \xrightarrow[r_{i+1}-b_i r_1]{i=1,\dots,n} \begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ -b_1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -b_2 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ -1 & -b_1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & -b_2 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -b_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{n+2} \xrightarrow[c_{j+2}+a_j c_1]{j=1,\dots,n} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ -1 & -b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[n \geq 3]{\text{Laplace}} 0. \end{aligned}$$

**法二:** 由行列式的乘法规则, 并注意到  $n \geq 3$ , 得

$$D = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

**例 9.3.14 (2017 中国科学院大学).** 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 - a_1 & a_2 & & & \\ -1 & 1 - a_2 & a_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 - a_{n-1} & a_n \\ & & & -1 & 1 - a_n \end{vmatrix}.$$

利用升阶法, 考虑  $n+1$  阶行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & \cdots & 1 - a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & -1 & 1 - a_2 & a_3 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ \vdots & \cdots & & & -1 & 1 - a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \cdots & & & & -1 & 1 - a_n \end{vmatrix}_{n+1} \xrightarrow[r_{i+1}+r_i]{i=1,\dots,n} 1$$

另一方面, 将  $\Delta$  按第一行展开, 得  $\Delta = D + a_1 D'$ , 即  $D = 1 - a_1 D'$ , 其中  $D'$  是  $\Delta$  右下角的  $n-1$  阶子式, 由此递推, 可得

$$D = 1 - a_1 + a_1 a_2 - a_1 a_2 a_3 + \cdots + (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n.$$

### 9.3.2 抽象行列式的计算

**定理 9.3.1 (行列式的乘法公式).**  $|kA| = k^n |A|$ .

**例 9.3.15 (2006 数一).** 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $E$  为 2 阶单位矩阵, 矩阵  $B$  满足  $BA = B + 2E$ , 求  $|B|$ .

由  $BA = B + 2E$  得  $B(A - E) = 2E$ , 两边取行列式, 有

$$|B| \cdot |A - E| = |2E| = 4$$

因为  $|A - E| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ , 所以  $|B| = 2$ .

**例 9.3.16.** 已知  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta, \gamma$  均为 4 维列向量, 又  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$ ,  $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma)$ , 若  $|A| = 3, |B| = 2$ , 求  $|A + 2B|$ .

$$|A + 2B| = |3\alpha_1, 3\alpha_2, 3\alpha_3, \beta + 2\gamma| = 3^3 |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + 2\gamma| = 3^3 (|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta| + 2|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma|) = 27 \times 7 = 187.$$

### 9.3.3 Vandermonde 行列式计算

**定理 9.3.2 (Vandermonde 行列式).**  $n$  阶 Vandermonde 行列式为

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

**例 9.3.17.** 计算下列行列式:

$$(1) D_{n+1} = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}. \quad (2) D_{n-1} = \begin{vmatrix} 2^n - 2 & 2^{n-1} - 2 & \cdots & 2^3 - 2 & 2 \\ 3^n - 3 & 3^{n-1} - 3 & \cdots & 3^3 - 3 & 6 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n^n - n & n^{n-1} - n & \cdots & n^3 - n & n^2 - n \end{vmatrix}.$$

(1) 将  $D_{n+1}$  的第  $n+1$  行依次与第  $n, n-1, \dots, 1$  行互换, 再将新的行列式的第  $n+1$  行依次与第  $n, n-1, \dots, 2$  行互换, 如此下去, 总共经过  $n + (n+1) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$  次行与行的互换, 最后得 Vandermonde 行列式

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{0 \leq j < i \leq n} [(a-i) - (a-j)] \\ &= \prod_{0 \leq j < i \leq n} (i-j) = \prod_{k=1}^n k! \end{aligned}$$

(2) 利用升阶法, 将  $D$  添上一行一列, 然后将第一行的  $i$  倍加到后面各行, 再将第  $j$  列与后面的  $n-j$  列逐次交换,  $j=2, 3, \dots, n-1$ , 化为  $Vandermonde$  行列式,

$$\begin{aligned} D &= \left| \begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2^n - 2 & 2^{n-1} - 2 & \cdots & 2^3 - 2 & \cdots & 2 & \cdots \\ 0 & 3^n - 3 & 3^{n-1} - 3 & \cdots & 3^3 - 3 & \cdots & 3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & n^n - n & n^{n-1} - n & \cdots & n^3 & n^2 - n & n & \cdots \end{array} \right|_n \xrightarrow{i=2, \dots, n} \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^n & 2^{n-1} & \cdots & 2^3 & 2^2 \\ 3 & 3^n & 3^{n-1} & \cdots & 3^3 & 3^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n^n & n^{n-1} & \cdots & n^3 & n^2 \end{array} \right| \\ &= n! \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2^{n-1} & 2^{n-2} & \cdots & 2^2 & 2^1 \\ 1 & 3^{n-1} & 3^{n-2} & \cdots & 3^2 & 3^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n^{n-1} & n^{n-2} & \cdots & n^2 & n^1 \end{array} \right| = n!(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-2} & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-2} & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-2} & n^{n-1} \end{array} \right| \\ &= (-1)^{\frac{n^2+n+2}{2}} \prod_{1 \leq j < i \leq n+1} (i-j). \end{aligned}$$

例 9.3.18. 计算下列行列式:

$$(1) D_n = \left| \begin{array}{cccccc} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} + S/a_1 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} + S/a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} + S/a_n \end{array} \right|. \quad (2) D = \left| \begin{array}{ccccc} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 \end{array} \right|.$$

其中  $S = \sum_{i=1}^n a_i$ , 且  $a_i \neq 0$ .

(1) 先拆项, 再利用  $Vandermonde$  行列式计算,

$$\begin{aligned} D_n &= \left| \begin{array}{cccccc} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cccccc} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & S/a_1 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & S/a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & S/a_n \end{array} \right| \\ &= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) + \frac{S}{\prod_{i=1}^n a_i} \left| \begin{array}{cccccc} a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} & 1 \\ a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} & 1 \end{array} \right| \\ &= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) + (-1)^{n-1} \frac{S}{\prod_{i=1}^n a_i} \left| \begin{array}{cccccc} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{array} \right| \\ &= \left[ 1 + (-1)^{n-1} \frac{S}{\prod_{i=1}^n a_i} \right] \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j). \end{aligned}$$

(2) 先拆项, 再利用  $Vandermonde$  行列式计算,

$$D = \left| \begin{array}{ccccc} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \\ -2 & -2 & -2 & \cdots & -2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccccc} 0 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 0 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \\ 2 & -2 & -2 & \cdots & -2 \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + (-1)^n 2 \prod_{i=1}^n \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= -2 \prod_{i=1}^n (1-x_i) \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) + (-1)^n 2 \prod_{i=1}^n x_i \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \\
&= 2 \left[ - \prod_{i=1}^n (1-x_i) + (-1)^n \prod_{i=1}^n x_i \right] \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).
\end{aligned}$$

**例 9.3.19 (2006 山东大学).** 计算  $n$  阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

在  $D$  中增加一行一列, 溜成  $n+1$  阶 Vandermonde 行列式:

$$D_{n+1} = \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & y^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ \hline x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ \hline x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{array} \right| = \prod_{k=1}^n (y - x_k) \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

这是关于变量  $y$  的恒等式, 一方面, 将上式左边  $D_{n+1}$  按第  $D_{n+1}$  列展开, 得  $y$  的  $n$  次多项式:

$$D_{n+1} = A_{1,n+1} + yA_{2,n+1} + \cdots + y^{n-1}A_{n,n+1} + y^nA_{n+1,n+1}$$

其中  $A_{k,n+1}$  是  $D_{n+1}$  的  $(k, n+1)$  元的代数余子式 ( $1 \leq k \leq n+1$ ), 且  $y^{n-1}$  的系数为

$$A_{n,n+1} = (-1)^{n+n+1}D = -D$$

另一方面, 对于  $D_{n+1}$  的右边, 因为

$$\prod_{k=1}^n (y - x_k) = y^n - \sum_{k=1}^n x_k y^{n-1} + \cdots + (-1)^n \prod_{k=1}^n x_k$$

所以,  $y^{n-1}$  的系数为  $-\sum_{k=1}^n x_k \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$ , 因此, 有

$$D = \sum_{k=1}^n x_k \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

## 第 10 章

### 矩阵

“我有一个对这个命题的十分美妙的证明，  
这里空白太小，我写不下了。”

——费马

矩阵是数学中的一个重要概念，它是由数个数排成矩形形式的集合。矩阵在代数、几何、物理、工程等领域都有着广泛的应用。以下是关于矩阵的基本概念和性质：

1. 定义：矩阵是一个由  $m$  行  $n$  列元素排成的矩形数组，通常表示为一个黑体大写字母，如  $\mathbf{A}$ 。矩阵中的每个元素可以是实数、复数或其他数域中的元素。例如，一个 3 行 2 列的矩阵可以表示为：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

2. 矩阵运算：矩阵加法和减法：对应位置的元素相加或相减。矩阵乘法：矩阵乘法不满足交换律，即  $AB \neq BA$ 。乘法规则为：如果  $\mathbf{A}$  是  $m$  行  $n$  列的矩阵， $\mathbf{B}$  是  $n$  行  $p$  列的矩阵，则它们的乘积  $\mathbf{AB}$  是一个  $m$  行  $p$  列的矩阵。矩阵转置：将矩阵的行和列互换得到的新矩阵称为原矩阵的转置。矩阵求逆：对于可逆矩阵  $\mathbf{A}$ ，存在一个矩阵  $\mathbf{B}$ ，使得  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$ ，其中  $\mathbf{E}$  是单位矩阵。 $\mathbf{B}$  称为  $\mathbf{A}$  的逆矩阵，记作  $\mathbf{A}^{-1}$ 。

4. 应用：矩阵在线性代数、微积分、概率论、信号处理、机器学习等领域有着广泛的应用。例如，在线性代数中，矩阵可以用来表示线性变换和解决线性方程组；在机器学习中，矩阵可以用来表示数据集和模型参数。

通过对矩阵的运算和性质的理解，我们可以更好地处理各种数学问题，并在实际应用中解决复杂的计算和分析。因此，矩阵是数学中一个非常重要且基础的概念。

## 10.1 矩阵

### 10.1.1 矩阵的定义

**定义 10.1.1 (矩阵).** 由  $m \times n$  个数  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ) 按一定次序排成的  $m$  行  $n$  列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为  $m \times n$  矩阵 ( $m$  行  $n$  列矩阵),  $a_{ij}$  叫做矩阵的元素, 矩阵可简记为

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n} \text{ 或 } \mathbf{A} = (a_{ij}).$$

当  $m = n$  时, 即矩阵的行数与列数相同时, 称  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶方阵; 当  $m = 1$  时, 矩阵只有一行, 称为行矩阵, 记为

$$\mathbf{A} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

这样的行矩阵也称为  $n$  维行向量; 当  $n = 1$  时, 矩阵只有一列, 称为列矩阵, 记为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

这样的列矩阵也称为  $m$  维列向量.

**定义 10.1.2 (矩阵的负).** 矩阵  $\mathbf{A}$  中各元素变号得到的矩阵叫做  $\mathbf{A}$  的负矩阵, 记作  $-\mathbf{A}$ , 即

$$-\mathbf{A} = (-a_{ij})_{m \times n}.$$

**定义 10.1.3 (零矩阵).** 如果矩阵  $\mathbf{A}$  的所有元素都是 0, 即

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

则  $\mathbf{A}$  称为零矩阵, 记为  $\mathbf{O}$ .

**定义 10.1.4 (单位矩阵).** 主对角线上元素都是 1, 其余元素均为零的方阵称为单位矩阵, 记为  $\mathbf{E}$  (或  $\mathbf{I}$ ), 即

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

**定义 10.1.5 (数量矩阵).** 主对角线上元素为任意常数, 而主对角线外的元素均为零的矩阵. 若对角矩阵的主对角线上的元素相等, 则称为数量矩阵.

**定义 10.1.6 (三角形矩阵).** 主对角线下方元素全为零的方阵称为上三角形矩阵; 主对角线上方元素全为零的方阵称为下三角形矩阵; 上、下三角形矩阵统称为三角形矩阵.

**定义 10.1.7 (矩阵的转置).** 把矩阵  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$  的行列互换而得到的矩阵  $(a_{ji})_{n \times m}$  称为  $\mathbf{A}$  的转置矩阵, 记为  $\mathbf{A}^\top$  (或  $\mathbf{A}'$ ).

**定义 10.1.8 (对称矩阵).** 如果  $n$  阶方阵  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  满足  $a_{ij} = a_{ji}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), 即  $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$ , 则称  $\mathbf{A}$  为对称矩阵.

**定义 10.1.9 (反对称矩阵).** 如果  $n$  阶方阵  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  满足  $a_{ij} = -a_{ji}$  ( $i \neq j$ ),  $a_{ii} = 0$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), 即  $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$ , 则称  $\mathbf{A}$  为反对称矩阵.

**定理 10.1.1 (方阵的对称表达).** 任意  $n$  阶方阵都可以表示成一个对称方阵与一个反对称方阵的和.

证 设  $\mathbf{A}$  为任意  $n$  阶方阵, 令  $\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top)$ ,  $\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top)$ , 则

$$\mathbf{B}^\top = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top)^\top = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top) = \mathbf{B}, \quad \mathbf{C}^\top = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top)^\top = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^\top - \mathbf{A}) = -\mathbf{C}$$

即  $\mathbf{B}$  为对称矩阵,  $\mathbf{C}$  为反对称矩阵, 显然  $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ .

**定义 10.1.10 (正交矩阵).** 对方阵  $\mathbf{A}$ , 如果有  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^\top = \mathbf{E}$ , 则称  $\mathbf{A}$  为正交矩阵.

**定理 10.1.2 (正交矩阵的行列式).** 若方阵  $\mathbf{A}$  为正交矩阵, 那么  $|\mathbf{A}| = \pm 1$ .

证  $1 = \det \mathbf{E} = \det(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top) \det \mathbf{A} = \det^2 \mathbf{A} \Rightarrow \det \mathbf{A} = \pm 1$ .

**例 10.1.1.** 已知  $\mathbf{A}$  是 4 阶正交矩阵且  $|\mathbf{A}| < 0$ ,  $\mathbf{B}$  是 4 阶矩阵, 若  $|\mathbf{B} - \mathbf{A}| = 5$ , 求  $|\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{B}^\top|$ .

因为  $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \mathbf{E}$ , 所以  $|\mathbf{A}| = \pm 1$ , 又  $|\mathbf{A}| < 0$ , 即  $|\mathbf{A}| = -1$ ,

$$|\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{B}^\top| = |\mathbf{A}\mathbf{A}^\top - \mathbf{A}\mathbf{B}^\top| = |\mathbf{A}| |(\mathbf{A} - \mathbf{B})^\top| = -|\mathbf{A} - \mathbf{B}| = -|-(\mathbf{B} - \mathbf{A})| = -(-1)^4 |\mathbf{B} - \mathbf{A}| = -5.$$

**定义 10.1.11 (幂零矩阵).** 对方阵  $\mathbf{A}$ , 如果存在正整数  $m$ , 使  $\mathbf{A}^m = \mathbf{0}$ , 则称  $\mathbf{A}$  为幂零矩阵.

**定义 10.1.12 (幂等矩阵).** 满足  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$  的方阵  $\mathbf{A}$  称为幂等矩阵.

**定义 10.1.13 (对合矩阵).** 满足  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$  的方阵  $\mathbf{A}$  称为对合矩阵.

**定义 10.1.14 (方阵的行列式).** 方阵  $A$  的元素按原来的位置构成的行列式, 称为方阵  $A$  的行列式, 记为  $|A|$ .

**例 10.1.2.** 设矩阵  $A$  是 3 阶方阵, 且

$$|A - 2E| = |A - 3E| = |A - 4E| = 3$$

求  $|A - E|$ .

设  $f(x) = |A - xE| = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - x \end{vmatrix}$ , 那么  $f(x)$  一定是以  $x$  为变量的首项系数为  $-1$  的三次多项式, 又

$$|A - 2E| = |A - 3E| = |A - 4E| = 3$$

所以  $f(x) = -(x-2)(x-3)(x-4) + 3$ , 那么  $|A - E| = f(1) = 9$ .

**定义 10.1.15 (奇异矩阵与非奇异矩阵).** 若  $|A| = 0$ , 称  $A$  为奇异矩阵, 否则称为非奇异矩阵.

**定义 10.1.16 (矩阵的迹).** 设有  $n$  阶方阵  $A$ , 那么  $A$  的迹定义为  $\text{tr} A = \sum_{k=1}^n a_{kk}$ .

**定理 10.1.3 (迹的相关性质).** 又设  $B \in M_n(K)$ ,  $\lambda \in K$ , 则

$$\begin{array}{ll} (1) \text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) & (2) \text{tr}(A^\top) = \text{tr}(A) \\ \hline (3) \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) & (4) \text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A) \end{array}$$

## 10.1.2 矩阵的运算

矩阵的运算公式.

表 10.1: 矩阵的运算公式

关于矩阵的加法运算公式

$$\begin{array}{ll} (1) \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} & (2) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \\ (3) \quad \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0} & (4) \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \end{array}$$


---

关于数乘运算的公式

$$\begin{array}{ll} (5) \quad (kl)\mathbf{A} = k(l\mathbf{A}) & (6) \quad (k+l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{A} \\ (7) \quad k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B} & \end{array}$$


---

关于矩阵乘法运算的公式

$$\begin{array}{ll} (8) \quad (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) & (9) \quad k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B}) \\ (10) \quad \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} & (11) \quad (\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA} \\ (12) \quad \mathbf{EA} = \mathbf{AE} = \mathbf{A} & (13) \quad (\lambda\mathbf{E})\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{E}) \\ (14) \quad \mathbf{A}^k \mathbf{A}^l = \mathbf{A}^{k+l} & (15) \quad (\mathbf{A}^k)^l = \mathbf{A}^{kl} \end{array}$$


---

关于矩阵转置运算的公式

$$\begin{array}{ll} (16) \quad (\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A} & (17) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top \\ (18) \quad (k\mathbf{A})^\top = k\mathbf{A}^\top & (19) \quad (\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top \end{array}$$


---

关于方阵的行列式的公式, 若  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  是  $n$  阶方阵, 则

$$\begin{array}{ll} (20) \quad |\mathbf{A}^\top| = |\mathbf{A}| & (21) \quad |\lambda\mathbf{A}| = \lambda^n |\mathbf{A}| \\ (22) \quad |\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| & (23) \quad |\mathbf{AB}| = |\mathbf{BA}| \end{array}$$

需要注意的事项:

- (1) 矩阵的乘法一般不满足交换律, 即  $\mathbf{AB}$  有意义, 但  $\mathbf{BA}$  不一定有意义; 即使  $\mathbf{AB}$  和  $\mathbf{BA}$  都有意义, 两者也不一定相等.
- (2) 两个非零矩阵相乘, 可能是零矩阵, 从而不能从  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$  推出  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  或  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ .
- (3) 矩阵的乘法一般不满足消去律, 即不能从  $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$  推出  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ .

**定义 10.1.17 (矩阵相等).** 设

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}, \mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times n}$$

如果  $a_{ij} = b_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ), 则称矩阵  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  相等, 记作  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ .

**定义 10.1.18 (矩阵加减).** 设

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}, \mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times n}, \mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times n}$$

其中  $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ), 则称  $\mathbf{C}$  为矩阵  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  的和 (或差), 记为  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}$ .

**定义 10.1.19 (矩阵数乘).** 设  $k$  为一个常数,

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}, \mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times n}$$

其中  $c_{ij} = ka_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ), 则称矩阵  $\mathbf{C}$  为数  $k$  与矩阵  $\mathbf{A}$  的数量乘积, 简称数乘, 记为  $k\mathbf{A}$ .

**定义 10.1.20 (矩阵乘法).** 设  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times s}, \mathbf{B} = (b_{ij})_{s \times n}, \mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times n}$ , 其中

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^s a_{il} b_{lj} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

则称矩阵  $\mathbf{C}$  为矩阵  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  的乘积, 记为  $\mathbf{AB}$ , 即  $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ .

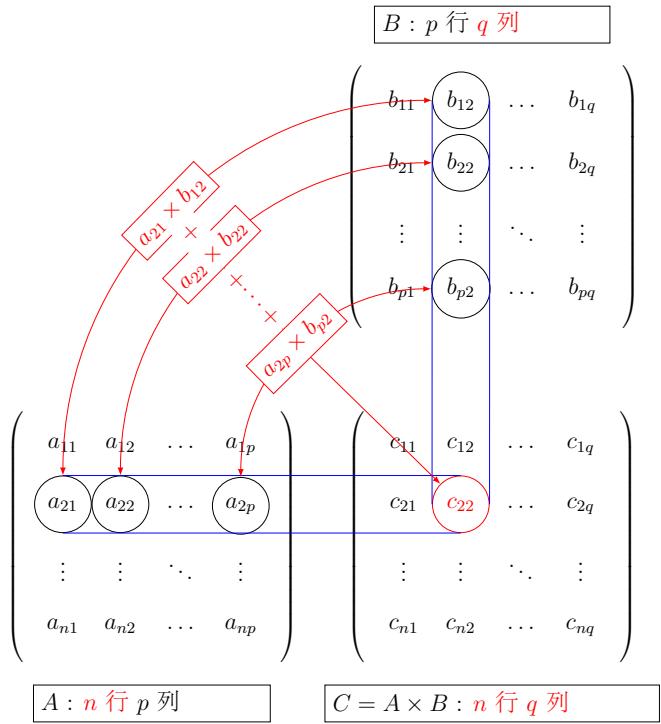


图 10.1.1

**例 10.1.3.** 设  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$ , 求  $\mathbf{AB}$  和  $\mathbf{CA}$ .

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 & a_{12}b_2 \\ a_{21}b_1 & a_{22}b_2 \\ a_{31}b_1 & a_{32}b_2 \end{pmatrix}; \text{ 同理 } \mathbf{CA} = \begin{pmatrix} c_1a_{11} & c_1a_{12} \\ c_2a_{21} & c_2a_{22} \\ c_3a_{31} & c_3a_{32} \end{pmatrix}$$

**例 10.1.4.** 设  $\mathbf{A}$  是 4 阶方阵,  $\mathbf{B}$  是 5 阶方阵, 且  $|\mathbf{A}| = 2, |\mathbf{B}| = -2$ , 求  $|-|\mathbf{A}|\mathbf{B}|$  与  $|-|\mathbf{B}|\mathbf{A}|$ .

$$|-|A|B| = |-2B| = (-2)^5 |B| = 64, \quad |-|B|A| = |2A| = 2^4 |A| = 32.$$

**例 10.1.5.** 设  $A, B$  均为 3 阶矩阵, 满足  $AB + 2A + B + E = O$ , 若  $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ , 求  $|A + E|$ .

对  $AB + 2A + B + 2E$  使用多项式除法, 得

$$AB + 2A + B + 2E = (A + E)(B + 2E) = E \Rightarrow |A + E| = \frac{1}{|B + 2E|} = \frac{1}{30}.$$

### 10.1.3 方阵的幂

**定义 10.1.21 (方阵的幂).** 对  $n$  阶方阵  $A$ , 定义  $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots \cdot A}_{k \text{ 个}}$ , 称为  $A$  的  $k$  次幂.

**例 10.1.6.** 设  $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ , 求  $A^9$ .

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = A, \text{ 因此 } A^9 = A(A^2)^4 = AA^4 = A(A^2)^2 = A^2 = A.$$

#### 利用幂零矩阵求解

**例 10.1.7.** 设  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 求解  $A^n$ .

因为  $A^4 = O$ , 并且

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#### 利用方阵的迹求解

**定理 10.1.4 (秩一矩阵的幂).** 当  $A$  为方阵且秩  $\text{rank } A = 1$ , 则  $A^n = [\text{tr}(A)]^{n-1} A$ .

**例 10.1.8.** 设  $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 2a & 2b & 2c & 2d \\ 3a & 3b & 3c & 3d \\ 4a & 4b & 4c & 4d \end{pmatrix}$  ( $a, b, c, d$  不全为 0, 求解  $A^n$ ).

显然  $\text{rank } A = 1$ , 则

$$A^n = [\text{tr}(A)]^{n-1} A = (a + 2b + 3c + 4d)^{n-1} A.$$

**例 10.1.9.** 设  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 已知矩阵  $B$  与矩阵  $A$  相似, 求  $\text{rank}(B - 2E) + \text{rank}(B - E)$ , 及  $(A - E)^n$ ,  $n$  为大于 1 的正整数.

因为  $B \sim A$ , 所以

$$\begin{aligned} \text{rank}(B - 2E) + \text{rank}(B - E) &= \text{rank}(A - 2E) + \text{rank}(A - E) = \text{rank} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \text{rank} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 3 + 1 = 4 \end{aligned}$$

$$\text{因为 } \text{rank}(A - E) = 1, \text{ 所以 } (A - E)^n = [\text{tr}(A - E)A]^{n-1}(A - E) = (-2)^{n-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

利用二项式展开求解

**例 10.1.10.** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $A^n$ .

由  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E + B$ , 而  $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ , 所以当  $k \geq 2$  时, 有  $B^k = 0$ , 而单位矩阵  $E$  与任意矩阵可换, 由二项式定理, 得

$$\begin{aligned} A^n &= (E + B)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k E^{n-k} B^k = E^n + C_n^1 E^{n-1} B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**例 10.1.11 (2002 复旦大学).** 证明:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 51 & -50 \\ 50 & -49 \end{pmatrix}.$$

证 注意到

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} (1, -1) = E + \alpha \beta^\top$$

其中  $E$  是二阶单位矩阵,  $\alpha = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^\top$ ,  $\beta = (1, -1)^\top$ , 并且  $\beta \alpha^\top = 0$ , 所以

$$(\alpha \beta^\top)^2 = (\alpha \beta^\top)(\alpha \beta^\top) = \alpha (\beta^\top \alpha) \beta^\top = O$$

于是

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{100} &= (\mathbf{E} + \alpha \boldsymbol{\beta}^\top)^{100} = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k (\alpha \boldsymbol{\beta}^\top)^k = \mathbf{E} + 100\alpha \boldsymbol{\beta}^\top \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 100 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1) = \begin{pmatrix} 51 & -50 \\ 50 & -49 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

#### 10.1.4 分块矩阵

**定理 10.1.5 (分块矩阵的加减法).** 若矩阵  $\mathbf{A}$  与矩阵  $\mathbf{B}$  有相同的行数和列数, 且有

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{B}_{sr} \end{pmatrix}$$

其中  $\mathbf{A}_{ij}$  与  $\mathbf{B}_{ij}$  有相同的行数和列数, 则

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} \pm \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} \pm \mathbf{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} \pm \mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} \pm \mathbf{B}_{sr} \end{pmatrix}.$$

**定理 10.1.6 (分块矩阵的数乘).** 设矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} \end{pmatrix}$ ,  $\lambda$  为数, 则

$$\lambda \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{A}_{11} & \cdots & \lambda \mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \lambda \mathbf{A}_{sr} \end{pmatrix}.$$

**定理 10.1.7 (分块矩阵的乘法).** 若  $\mathbf{A}$  为  $m \times l$  矩阵,  $\mathbf{B}$  为  $l \times n$  矩阵, 且

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{st} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{B}_{t1} & \cdots & \mathbf{B}_{tr} \end{pmatrix}$$

其中  $\mathbf{A}_{i1}, \mathbf{A}_{i2}, \dots, \mathbf{A}_{ii}$  的列数分别与  $\mathbf{B}_{1j}, \mathbf{B}_{2j}, \dots, \mathbf{B}_{ij}$  的行数相等, 则

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \cdots & \mathbf{C}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}_{s1} & \cdots & \mathbf{C}_{sr} \end{pmatrix}$$

其中  $\mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^t \mathbf{A}_{ik} \mathbf{B}_{kj} (i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, r)$ .

**定理 10.1.8 (分块矩阵的转置).** 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$ , 则  $A^\top = \begin{pmatrix} A_{11}^\top & \cdots & A_{s1}^\top \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^\top & \cdots & A_{sr}^\top \end{pmatrix}$ .

**定理 10.1.9 (分块矩阵的行列式).** 设  $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$ , 其中  $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$  都是方阵, 则

$$|A| = |A_1| |A_2| \cdots |A_m|, \quad A^n = \begin{pmatrix} A_1^n & & & \\ & A_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^n \end{pmatrix}.$$

### 10.1.5 Carlson 不等式及其应用

**定理 10.1.10 (Carlson 不等式).** 对于  $n \times m$  矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

其中  $a_{ij} \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m)$ , 则

$$\left[ \prod_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} \right) \right]^{\frac{1}{m}} \geq \sum_{i=1}^n \left( \prod_{j=1}^m a_{ij} \right)^{\frac{1}{m}}$$

其中, 等号成立的充要条件是至少有一列数都是 0 或所有行中的数对应成比例.

**证** 记  $A_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} (j = 1, 2, \dots, m)$ ,  $G_j = \prod_{i=1}^m a_{ij} (i = 1, 2, \dots, n)$ , 若某个  $A_j = 0$ , 则由  $a_{ij} \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 得

$$a_{1j} = a_{2j} = \cdots = a_{nj} = 0$$

此时,  $G_1 = G_2 = \cdots = G_n = 0$ , 从而

$$\left[ \prod_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} \right) \right]^{\frac{1}{m}} = \sum_{i=1}^n \left( \prod_{j=1}^m a_{ij} \right)^{\frac{1}{m}}$$

若所有  $A_j > 0$ , 由均值不等式得

$$\frac{a_{i1}}{A_1} + \frac{a_{i2}}{A_2} + \cdots + \frac{a_{im}}{A_m} \geq m \left( \frac{\prod_{j=1}^m a_{ij}}{\prod_{j=1}^m A_j} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

将以上  $n$  个不等式相加得

$$m \geq m \sum_{i=1}^n \left( \frac{\prod_{j=1}^m a_{ij}}{\prod_{j=1}^m A_j} \right)^{\frac{1}{m}} = m \frac{\sum_{i=1}^n G_i^{\frac{1}{m}}}{\left( \prod_{j=1}^m A_j \right)^{\frac{1}{m}}}$$

等号成立的充要条件是至少有一列数都是 0 或  $\frac{a_{i1}}{A_1} = \frac{a_{i2}}{A_2} = \dots = \frac{a_{im}}{A_m}$ .

**例 10.1.12.** 已知  $a, b, c > 0$ , 证明:

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \geq (ab + bc + ca)^3.$$

证 构造  $3 \times 3$  矩阵

$$\begin{pmatrix} a^2 & c^2 & ca \\ ab & b^2 & a^2 \\ b^2 & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

由 Carlson 不等式得证.

**例 10.1.13.** 已知  $a, b, c > 0$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 = 14$ , 求证:  $a^5 + \frac{b^5}{8} + \frac{c^5}{27} \geq 14$ .

证 构造  $3 \times 5$  矩阵

$$\begin{pmatrix} a^5 & a^5 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{b^5}{8} & \frac{b^5}{8} & 4 & 4 & 4 \\ \frac{c^5}{27} & \frac{c^5}{27} & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

由 Carlson 不等式得,

$$\begin{aligned} \left[ \left( a^5 + \frac{b^5}{8} + \frac{c^5}{27} \right)^2 (1+4+9)^3 \right]^{\frac{1}{5}} &\geq (a^5 \cdot a^5 \cdot 1^3)^{\frac{1}{5}} + \left( \frac{b^5}{8} \cdot \frac{b^5}{8} \cdot 4^3 \right)^{\frac{1}{5}} + \left( \frac{c^5}{27} \cdot \frac{c^5}{27} \cdot 9^3 \right)^{\frac{1}{5}} \\ \left[ \left( a^5 + \frac{b^5}{8} + \frac{c^5}{27} \right)^2 14^3 \right]^{\frac{1}{5}} &\geq a^2 + b^2 + c^2 = 14 \end{aligned}$$

整理得证  $a^5 + \frac{b^5}{8} + \frac{c^5}{27} \geq 14$ .

**例 10.1.14.** 已知  $a_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $n \geq 2$ , 且  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ , 证明:  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2-a_i} \geq \frac{n}{2n-1}$ .

证 原不等式等价为

$$\sum_{i=1}^n \frac{2}{2-a_i} \geq \frac{2n^2}{2n-1}$$

为此, 构造  $n \times 2$  矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{2-a_1} & 2-a_1 \\ \frac{2}{2-a_2} & 2-a_2 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{2}{2-a_n} & 2-a_n \end{pmatrix}$$

由 Carlson 不等式得,

$$\left[ \left( \sum_{i=1}^n \frac{2}{2-a_i} \right) \sum_{i=1}^n (2-a_i) \right]^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{2n} \Rightarrow \left( \sum_{i=1}^n \frac{2}{2-a_i} \right) (2n-1) \geq 2n^2$$

整理得证  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2-a_i} \geq \frac{n}{2n-1}$ .

**例 10.1.15.** (第 36 届 IMO) 设  $a, b, c > 0$ , 且  $abc = 1$ , 证明:  $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$ .

证 原不等式等价为

$$\frac{b^2c^2}{a(b+c)} + \frac{a^2c^2}{b(c+a)} + \frac{a^2b^2}{c(a+b)}$$

构造  $3 \times 2$  矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{b^2c^2}{a(b+c)} & a(b+c) \\ \frac{a^2c^2}{b(c+a)} & b(a+c) \\ \frac{a^2b^2}{c(a+b)} & c(a+b) \end{pmatrix}$$

由 Carlson 不等式得,

$$\left\{ \left[ \frac{b^2c^2}{a(b+c)} + \frac{a^2c^2}{b(c+a)} + \frac{a^2b^2}{c(a+b)} \right] \cdot 2(ab+bc+ca) \right\}^{\frac{1}{2}} \geq ab+bc+ca$$

$$\frac{b^2c^2}{a(b+c)} + \frac{a^2c^2}{b(c+a)} + \frac{a^2b^2}{c(a+b)} \geq \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = \frac{3}{2}.$$

## 10.2 伴随矩阵、逆矩阵与矩阵方程

### 10.2.1 伴随矩阵

**定义 10.2.1** (伴随矩阵的定义). 设  $A = (a_{ij})$  是  $n$  阶方阵 ( $n \geq 2$ ),  $A$  的伴随矩阵  $A^*$  (或  $\text{adj } A$ ) 定义为

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

其中  $A_{ij}$  为  $A$  的元素  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) 的代数余子式.

伴随矩阵具有如下性质.

表 10.2: 伴随矩阵性质

$$(1) AA^* = A^*A = |A|E$$

$$(2) (\lambda A)^* = \lambda^{n-1} A^*$$

$$(3) |A^*| = |A|^{n-1}$$

$$(4) (A^*)^\top = (A^\top)^*$$

$$(5) (AB)^* = B^*A^*$$

$$(6) \text{当 } A \text{ 可逆时, } A^* = |A|A^{-1}$$

$$(7) \text{当 } A \text{ 可逆时, } (A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A \quad (8) \text{当 } A \text{ 可逆时, } (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

$$(9) (A^*)^* = \begin{cases} |A|^{n-2}A, & n > 2 \\ A, & n = 2 \end{cases}$$

$$(10) \text{rank } A^* = \begin{cases} n, & \text{rank } A = n \\ 1, & \text{rank } A = n - 1 \\ 0, & \text{rank } A < n - 1 \end{cases}$$

**例 10.2.1.** 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 矩阵  $B$  满足  $ABA^* = 2BA^* + E$ , 求  $|2B^\top|$ .

注意到  $\det A = 3$ , 且  $A^*A = |A|E$ , 对  $ABA^* = 2BA^* + E$ , 右乘矩阵  $A$ , 得

$$3AB = 6B + A \Rightarrow 3(A - 2E)B = A \Rightarrow |3(A - 2E)B| = 3 \Rightarrow |B| = \frac{1}{9|A - 2E|}$$

其中  $|A - 2E| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$ , 于是  $B = \frac{1}{9} \Rightarrow |2B^\top| = \frac{8}{9}$ .

**例 10.2.2.** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  的所有代数余子式之和.

记矩阵分块矩阵  $A = \begin{pmatrix} O_{2 \times 3} & B \\ C & O_{3 \times 2} \end{pmatrix}$ , 其中  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $\det B = 5$ ,  $\det C = 1$ , 那么

$$A^* = |A|A^{-1} = (-1)^{2 \times 3}|B||C|\begin{pmatrix} O_{3 \times 2} & C^{-1} \\ B^{-1} & O_{2 \times 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此矩阵  $A$  的所有代数余子式之和为  $5 - 5 + 5 - 5 + 5 + 2 - 3 + 1 + 1 = 6$ .

**例 10.2.3.** 设实矩阵  $A = (a_{ij})$ ,  $A_{ij}$  是  $a_{ij}$  的代数余子式,  $|a_{ij}|$  与  $|A_{ij}|$  分别表示两个表达式的绝对值, 则下列结论不正确的是

- A. 若  $\det A = 1$  且对任意  $i, j$  均有  $a_{ij} = A_{ij}$ , 则  $A$  为正交矩阵
- B. 若  $\det A = 1$  且对任意  $i, j$  均有  $a_{ij} = -A_{ij}$ , 则  $A$  为正交矩阵
- C. 若  $A$  为正交矩阵且  $\det A = 1$ , 则对任意  $i, j$ , 有  $|a_{ij}| = |A_{ij}|$
- D. 若  $A$  为正交矩阵且  $\det A = -1$ , 则对任意  $i, j$ , 有  $|a_{ij}| = |A_{ij}|$

由  $a_{ij} = A_{ij}$ , 可知, 对于 A 选项

$$AA^\top = AA^* = \det A \cdot E = E \Rightarrow A \text{ 是正交矩阵}$$

因此 A 正确; 那么 B 选项错误, 因为

$$a_{ij} = -A_{ij} \Rightarrow A^* = -A^\top \not\Rightarrow AA^\top = E$$

对于 C、D 选项, 有

$$AA^\top = E = A^\top A \Rightarrow A^*A = \det A \cdot E = \pm E = \pm A^\top A \Rightarrow A^* = \pm A^\top \Rightarrow |a_{ij}| = |A_{ij}|$$

因此 C,D 正确, 故选 B.

### 10.2.2 可逆矩阵

可逆矩阵具有如下性质:

- (1) 方阵  $A$  可逆的充分必要条件是  $|A| \neq 0$ ;
- (2) 若  $A$  可逆, 则  $A^\top$  亦可逆, 且  $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$ ;
- (3) 若  $A$  可逆, 则  $A^{-1}$  亦可逆, 且  $(A^{-1})^{-1} = A$ ;
- (4) 若  $A$  可逆, 数  $\lambda \neq 0$ , 则  $\lambda A$  亦可逆, 且  $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$ ;
- (5) 若  $A$  可逆, 则  $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ ;
- (6) 若  $A, B$  为同阶方阵, 且均可逆, 则  $AB$  亦可逆, 且  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

**定理 10.2.1 (矩阵逆的和).** 设矩阵  $A$  与  $B$  均为  $n$  阶矩阵, 则  $|A^{-1} + B^{-1}| = \frac{|A + B|}{|A| \cdot |B|}$ .

$$\text{证 } |A^{-1} + B^{-1}| = |EA^{-1} + B^{-1}E| = |B^{-1}BA^{-1} + B^{-1}AA^{-1}| = |B^{-1}(B + A)A^{-1}| = \frac{|A + B|}{|A| \cdot |B|}.$$

**定理 10.2.2 (分块矩阵的逆 A).** 设  $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$ , 其中  $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$  均为可逆矩阵, 则

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^{-1} \end{pmatrix}.$$

设  $A = \begin{pmatrix} & & A_1 & \\ & \ddots & & \\ & & A_2 & \\ A_m & & & \end{pmatrix}$ , 其中  $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$  均为可逆矩阵, 则

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} & & & A_m^{-1} \\ & & \ddots & \\ & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}.$$

**定理 10.2.3 (分块矩阵的逆 B).** 设  $A$  是  $m \times m$  可逆矩阵,  $B$  是  $m \times n$  矩阵,  $C$  是  $n \times m$  矩阵,  $D$  是  $n \times n$  可逆矩阵, 则有以下分块矩阵的求逆公式:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BWCA^{-1} & -A^{-1}BW \\ -WCA^{-1} & W \end{pmatrix}$$

其中  $W = (D - CA^{-1}B)^{-1}$ .

证 为方便叙述, 记  $W = (D - CA^{-1}B)^{-1}$  设  $F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  的逆矩阵为  $U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$ , 其中  $U$  的分块与  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  分块后满足乘法原则, 则根据可逆矩阵的定义  $FU = E$ , 下面直接计算  $FU$  的分块矩阵的乘积即可,

$$\begin{pmatrix} E_{11} & O \\ O & E_{12} \end{pmatrix} = E = FU = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AU_{11} + BU_{21} & AU_{12} + BU_{22} \\ CU_{11} + DU_{21} & CU_{12} + DU_{22} \end{pmatrix}$$

所以, 各个矩阵小块分别对应相等得:

$$AU_{11} + BU_{21} = E_{11} \quad (1)$$

$$AU_{12} + BU_{22} = O \quad (2)$$

$$CU_{11} + DU_{21} = O \quad (3)$$

$$CU_{12} + DU_{22} = E_{22} \quad (4)$$

由 (1) 可得:  $U_{11} = A^{-1}(E_{11} - BU_{21})$ , 代入 (3) 中, 有

$$CA^{-1}(E_{11} - BU_{21}) + DU_{21} = O$$

化简后得:  $CA^{-1} + (D - CA^{-1}B)U_{21} = O$ , 即

$$U_{21} = -(D - CA^{-1}B)CA^{-1} = -WCA^{-1}$$

由 (4) 可得:  $U_{12} = C^{-1}(E_{22} - DU_{22})$ , 代入 (2) 中, 有

$$A(C^{-1} - C^{-1}DU_{22}) + BU_{22} = O$$

即

$$\begin{aligned} U_{22} &= -(B - AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} = -(B - AC^{-1}D)^{-1}(CA^{-1})^{-1} = -((CA^{-1})(B - AC^{-1}D))^{-1} \\ &= -(CA^{-1}B - CA^{-1}AC^{-1}D)^{-1} = -(CA^{-1}B - D)^{-1} = (D - CA^{-1}B) = W \end{aligned}$$

由 (2) 可得:  $U_{12} = -A^{-1}BU_{22}$  将  $U_{22} = W$  代入其中可得:  $U_{12} = -A^{-1}BW$ , 由 (3) 可得:  $U_{11} = A^{-1}(E_{11} - BU_{21})$ , 将  $U_{21} = -WCA^{-1}$  代入其中可得:

$$U_{11} = A^{-1}(E_{11} + BWCA^{-1}) = A^{-1} + A^{-1}BWCA^{-1}$$

综上所述, 即得证.

**例 10.2.4.** 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$  的逆矩阵.

法一: 因为  $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ , 于是

$$A^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 8 & 11 \\ 17 & -7 & -9 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

法二: 将  $(A : E)$  初等行变换为  $(E : B)$ , 则  $B = A^{-1}$ , 于是

$$(A : E) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -17 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \times (-1)]{r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+10r_3]{r_2-9r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -20 & 8 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 17 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

于是  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -20 & 8 & 11 \\ 17 & -7 & -9 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**法三：(该方法仅对三阶矩阵有效)** 第一步，将矩阵前两列复制一份在原矩阵的右侧，将矩阵前两行复制一份在矩阵的下侧，再将子矩阵  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  复制到原矩阵的右下角，即

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} := B$$

第二步，删去  $B$  矩阵的第一行、第一列，得到  $4 \times 4$  大小的  $C$  矩阵，即  $C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ；第三步，计算  $C$  的二阶子式，

得到矩阵  $A$  的伴随矩阵  $A^*$ ，即

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 \times 4 - 7 \times 4 & 4 \times 5 - 4 \times 3 & 3 \times 7 - 5 \times 2 \\ 7 \times 3 - 1 \times 4 & 4 \times 2 - 3 \times 5 & 5 \times 1 - 2 \times 7 \\ 1 \times 4 - 2 \times 3 & 3 \times 3 - 4 \times 2 & 2 \times 2 - 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 8 & 11 \\ 17 & -7 & -9 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

最后一步，选择  $A^*$  的第  $i$  行（或列）与  $A$  的第  $i$  列（或行）相乘，即为  $|A|$ ，此题  $|A| = 1$ ，故  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -20 & 8 & 11 \\ 17 & -7 & -9 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

**例 10.2.5.** 已知  $n$  阶矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ ，求  $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}$ .

其实  $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}$  为  $A^*$  的所有值相加，所以只需要求出  $A^*$ ，为此

$$(A : E) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \times \frac{1}{2} - r_2]{i=2, \dots, n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

于是  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ ，且  $|A| = 2$ ，则  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$ ，那么

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} = 1 + 2^{n-1} - 2^{n-1} = 1.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

**例 10.2.6.** 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ ， $B = (2A + E)(A + 2E)^{-1}$ ，则  $|B - 2E|$  中所有元素的代数

余子式之和为多少.

由  $B = (2A + E)(A + 2E)^{-1}$ , 可知

$$\begin{aligned}(B - 2E)^{-1} &= ((2A + E)(A + 2E)^{-1} - 2E)^{-1} = ((2A + E)(A + 2E)^{-1} - 2(A + 2E)(A + 2E)^{-1})^{-1} \\ &= ((-3E)(A + 2E)^{-1})^{-1} = (-3(A + 2E)^{-1})^{-1} = -\frac{1}{3}(A + 2E) \\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

因为所有代数余子式之和等于这个伴随矩阵所有元素之和, 故先求出它的伴随矩阵, 再计算伴随矩阵各个元素相加,  $|B - 2E| = \frac{1}{24}$ , 于是  $(B - 2E)^* = |B - 2E|(B - 2E)^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ , 因此  $|B - 2E|$  中所有元素的代数余子式之和为  $-\frac{2}{3}$ .

**例 10.2.7.** 设矩阵  $A$  的伴随矩阵  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ , 且  $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$ , 其中  $E$  为 4 阶单位矩阵, 求矩阵  $B$ .

因为  $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E \Rightarrow B = (A - E)^{-1} \cdot 3A = 3[A^{-1}(A - E)]^{-1} = 3(A^{-1}A - A^{-1})^{-1} = 3\left(E - \frac{1}{|A|}A^*\right)^{-1}$ , 且  $|A^*| = 8$ , 又  $|A^*| = |A|^{n-1}$ , 故  $|A| = 2$ , 所以

$$B = 3\left(\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 4 \end{pmatrix}\right)^{-1} = 3\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**例 10.2.8.** 设 3 阶矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 求  $\left|\left(\frac{1}{4}A^2\right)^{-1} - A^*\right|$  及  $\left[\left(\frac{1}{4}A^2\right)^{-1} - A^*\right]^*$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 - 1 = 2, \text{ 又因为}$$

$$\begin{aligned}(A : E) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & : & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & : & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & : & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_3} 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & : & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & : & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

于是  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 因为  $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ , 所以  $2A^{-1} = A^*$ ,

$$\left(\frac{1}{4}A^2\right)^{-1} = 4(A^2)^{-1} = 4\frac{1}{|A||A|}(A^2)^* = (A^2)^*$$

所以

$$\left| \left( \frac{1}{4} \mathbf{A}^2 \right)^{-1} - \mathbf{A}^* \right| = \left| (\mathbf{A}^2)^* - \mathbf{A}^* \right| = |\mathbf{A}^*(\mathbf{A}^* - \mathbf{E}_3)| = |\mathbf{A}^*||\mathbf{A}^* - \mathbf{E}_3| = -2$$

所以

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{1}{4} \mathbf{A}^2 \right)^{-1} - \mathbf{A}^* \right]^* &= [\mathbf{A}^*(\mathbf{A}^* - \mathbf{E}_3)]^* = (\mathbf{A}^* - \mathbf{E}_3)^*(\mathbf{A}^*)^* \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 6 \\ 6 & 10 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 10.2.3 矩阵方程

**例 10.2.9.** 设矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , 其伴随矩阵记作  $\mathbf{A}^*$ , 求满足

$$\mathbf{A}^* \mathbf{X} \left( \frac{1}{2} \mathbf{A}^* \right)^* = 8\mathbf{A}^{-1} \mathbf{X} + 4\mathbf{E}$$

的矩阵  $\mathbf{X}$ .

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \text{ 且 } \mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{E} = 4\mathbf{E}, \text{ 于是给矩阵方程同时左乘 } \mathbf{A}, \text{ 得}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* \mathbf{X} \left( \frac{1}{2} \mathbf{A}^* \right)^* = 8\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} \mathbf{X} + 4\mathbf{A}\mathbf{E} \Rightarrow 4\mathbf{EX} \left( \frac{1}{2} \mathbf{A}^* \right)^* = 8\mathbf{EX} + 4\mathbf{AE} \Rightarrow \mathbf{X} \left( \frac{1}{2} \mathbf{A}^* \right)^* = 2\mathbf{X} + \mathbf{A}$$

并且  $\left( \frac{1}{2} \mathbf{A}^* \right)^* = \left( \frac{1}{2} \right)^{3-1} (\mathbf{A}^*)^* = \frac{1}{4} |\mathbf{A}^*|^* = \frac{1}{4} |\mathbf{A}|^{3-2} \mathbf{A} = \mathbf{A}$ , 以及  $\det(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) = -4 \neq 0$ , 于是  $\mathbf{A} - 2\mathbf{E}$  可逆, 而  $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 那么

$$\mathbf{X} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**例 10.2.10.**  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  是数域  $K$  上的  $n$  阶已知方阵,  $\det \mathbf{A} = \frac{1}{2}$ ,  $\det \mathbf{B} = \frac{1}{3}$ , 求解关于  $\mathbf{X}$  的矩阵方程

$$\mathbf{X} + \left( (\mathbf{A}^\top \mathbf{B})^* \mathbf{A}^\top \right)^{-1} + \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{X} \left( \mathbf{B}^\top \left( \mathbf{AB}^\top \right)^{-1} \mathbf{A}^2 \right)^{-1} (\mathbf{A} + 2\mathbf{B}).$$

注意到  $(\mathbf{A}^\top \mathbf{B})^* = |\mathbf{A}^\top \mathbf{B}|(\mathbf{A}^\top \mathbf{B})^{-1} = |\mathbf{A}^\top \mathbf{B}| \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{A}^\top)^{-1}$ , 那么

$$\left( (\mathbf{A}^\top \mathbf{B})^* \mathbf{A}^\top \right)^{-1} = \left( |\mathbf{A}^\top \mathbf{B}| \mathbf{B}^{-1} \mathbf{E} \right)^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}^\top \mathbf{B}|} \mathbf{B} = 6\mathbf{B}$$

并且  $\left( \mathbf{B}^\top (\mathbf{AB}^\top)^{-1} \mathbf{A}^2 \right)^{-1} = \left( \mathbf{B}^\top (\mathbf{B}^\top)^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}^2 \right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$ , 于是

$$\mathbf{X} \left( \mathbf{B}^\top \left( \mathbf{AB}^\top \right)^{-1} \mathbf{A}^2 \right)^{-1} (\mathbf{A} + 2\mathbf{B}) = \mathbf{X} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A} + 2\mathbf{B}) = \mathbf{X} + 2\mathbf{X} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$$

那么

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2} (6\mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}) (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} = \frac{1}{2} (6\mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}) (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}) = 3\mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{B}$$

**例 10.2.11 (2016 浙江大学).** 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & x & y \end{pmatrix}$  的逆矩阵  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ , 矩阵

$B = \begin{pmatrix} a-2b & b-3 & -c \\ d-2e & e-3f & -f \\ h-2x & x-3y & -y \end{pmatrix}$ , 求矩阵  $X$  使之满足

$$X + \left( B(A^\top B^2)^{-1} A^\top \right)^{-1} = X \left( A^2(B^\top A)^{-1} B^\top \right)^{-1} (A + B).$$

先证  $B$  是可逆矩阵, 为此, 对行列式  $|B|$  依次将第 2 列减去第 3 列的 3 倍, 第 1 列加上第 2 列的 2 倍, 再按第 1 行拆项, 得

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} a-2b & b-3 & -c \\ d-2e & e-3f & -f \\ h-2x & x-3y & -y \end{vmatrix} \frac{c_2-3c_3}{c_1+2c_2} \begin{vmatrix} a+6c-6 & b+3c-3 & -c \\ d & e & -f \\ h & x & -y \end{vmatrix} = -|A| + 3(c-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ d & e & -f \\ h & x & -y \end{vmatrix} \\ &= 1 - 3(c-1)(2A_{11} - A_{12}) \end{aligned}$$

其中  $A_{11}, A_{12}$  是矩阵  $A$  的第 1 行的前两个元素的代数余子式, 另一方面, 易知  $|A^{-1}| = -1$ , 所以  $|A| = -1$ , 于是, 有  $A^* = |A|A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ , 由此可知  $A_{11} = 1, A_{12} = 2$ , 于是  $|B| = 1$ , 表明  $B$  是可逆矩阵, 因此

$$\left( B(A^\top B^2)^{-1} A^\top \right)^{-1} = B, X \left( A^2(B^\top A)^{-1} B^\top \right)^{-1} = A^{-1}$$

故原方程可化简为  $X + B = XA^{-1}(A + B) \Rightarrow X(A^{-1}B) = B$ , 所以

$$X = B(A^{-1}B)^{-1} = A.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**例 10.2.12.** 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 求解方程

$$X(E_n - B^{-1}A)^\top B^\top = E_n.$$

$$E_n = X(B(E_n - B^{-1}A))^\top = X(BE_n - BB^{-1}A)^\top = X(B - A)^\top \Rightarrow X = ((B - A)^\top)^{-1},$$

$$\begin{aligned} X &= \left( \left( \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^\top \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} & \vdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**例 10.2.13.** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & \end{pmatrix}$ , 求  $X$  使  $X \begin{pmatrix} O & B \\ A & O \end{pmatrix} = C$ .

易得  $A, B$  都可逆, 且  $\begin{pmatrix} O & B \\ A & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & A^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$ , 所以  $X = C \begin{pmatrix} O & A^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$ , 且

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ O & C_3 \end{pmatrix}$$

并且  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 那么

$$X = \begin{pmatrix} C_2 B^{-1} & C_1 A^{-1} \\ C_3 B^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & : & 7 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & : & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & : & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & : & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & : & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

例 10.2.14. 设 4 阶矩阵  $A$  的伴随矩阵  $A^* =$

同例题 10.2.7 的解法, 解得  $X = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , 由于

$$X^* A = X^* \frac{1}{|A|^{4-2}} (A^*)^* = \frac{1}{4} X^* (A^*)^* = \frac{1}{4} (A^* X)^*$$

$$\begin{aligned} X^* A &= \frac{1}{4} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right)^* = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -8 \end{pmatrix}^* \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 0 & (6 & 0)^* & \vdots & O \\ 0 & -8 & (0 & 6)^* & \vdots & \vdots \\ -\left(\begin{array}{c|cc} 6 & 0 \\ 0 & -8 \end{array}\right)^* & \left(\begin{array}{c|cc} 12 & 0 \\ 0 & 6 \end{array}\right)^* & \left(\begin{array}{c|cc} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{array}\right)^* & \vdots & \left(\begin{array}{c|cc} 6 & 0 \\ 0 & -8 \end{array}\right)^* & \vdots \\ \hline 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -72 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -72 & 0 & 0 \\ 144 & 0 & -72 & 0 \\ 0 & -54 & 0 & 54 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例 10.2.15. 设 4 阶矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ , 求解  $\left[ \left( \frac{1}{2} A \right)^* \right]^{-1} X A^{-1} = 2AX + 12E_4$ .

因为  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$ ,  $\left[ \left( \frac{1}{2} A \right)^* \right]^{-1} = \left[ \left| \frac{1}{2} A \right| \left( \frac{1}{2} A \right)^{-1} \right]^{-1} = 8 \cdot \frac{1}{2} A = 4A$ , 因此原方程变成

$$4AXA^{-1} = 2AX + 12E_4 \Rightarrow 2AXA^{-1} = AX + 6E_4 \Rightarrow X = 6A^{-1}(2A^{-1} - E_4)^{-1} = 6(2E_4 - A)^{-1}$$

$$\begin{aligned} X &= 6 \left( \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} = 6 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= 6 \begin{pmatrix} \left( \begin{array}{c|cc} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{array} \right)^{-1} & O & \vdots & O \\ O & \vdots & \left( \begin{array}{c|cc} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{array} \right)^{-1} & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \left( \begin{array}{c|cc} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right)^{-1} & O & \vdots & O \\ O & \vdots & \left( \begin{array}{c|cc} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{array} \right)^{-1} & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{6} \left( \begin{array}{c|cc} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{array} \right)^{-1} & \vdots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & \cdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

## 10.3 初等变换与初等矩阵

### 10.3.1 初等变换

**定义 10.3.1 (矩阵的初等变换).** 矩阵的初等行变换与初等列变换统称为初等变换. 下列三种关于矩阵的变换称为矩阵的初等行(列)变换:

- (1) 互换矩阵中两行(列)的位置 ( $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$ );
- (2) 以一非零常数乘矩阵的某一行(列) ( $kr_i, kc_j$ );
- (3) 将矩阵的某一行(列)的  $k$  倍加到另一行(列)上去 ( $r_i + kr_j, c_i + kc_j$ ).

**例 10.3.1.** 设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{pmatrix}$ ,

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则必有

$$\text{A. } AP_1P_2 = B \quad \text{B. } AP_2P_1 = B \quad \text{C. } P_1P_2A = B \quad \text{D. } P_2P_1A = B$$

矩阵  $B$  是矩阵  $A$  经过初等行变换得到的, 首先把矩阵  $A$  的第一行加到第三行, 即  $P_2A$ ; 然后再把  $P_2A$  的第一行与第二行互换, 即选 C.

**例 10.3.2.** 设  $A$  是 3 阶方阵, 将  $A$  的第 1 列与第 2 列交换得到  $B$ , 再把  $B$  的第 2 列加到第 3 列得到  $C$ , 求满足  $AQ = C$  的可逆矩阵  $Q$ .

将所述变换用相应的初等矩阵表示, 即  $B = AE_{12}$ ,  $C = BE_{23}(1)$ , 那么  $C = AE_{12}E_{23}(1)$ , 则

$$Q = E_{12}E_{23}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**例 10.3.3.** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $P^{2022}AQ^{2023}$ .

$P$  左乘  $A$  相当于把  $A$  的第 1、3 行互换, 故  $P^{2022}A$  是把  $A$  的第 1、3 行互换 2022 次, 结果仍为  $A$ ; 同理  $AQ^{2023}$  相当于把  $A$  的第 2、3 列互换 2023 次, 那么结果为  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ .

**例 10.3.4 (2006 数一).** 设  $A$  为 3 阶方阵, 将  $A$  的第 2 行加到第 1 行得  $B$ , 再将  $B$  的第 1 列的 -1 倍

加到第 2 列得  $C$ , 记  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则有

- A.  $C = P^{-1}AP$       B.  $C = PAP^{-1}$       C.  $C = P^TAP$       D.  $C = PAP^T$

将所述变换用相应的初等矩阵表示,  $B = E_{12}(1)A$ ,  $C = BE_{12}(-1)$ , 于是

$$C = E_{12}(1)AE_{23}(1) = PAP^{-1}$$

故选 B.

**例 10.3.5 (2009 数二).** 设  $A$ ,  $P$  均为 3 阶方阵, 且  $P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 若  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,

$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ , 则  $Q^TAQ$  为

- A.  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$       B.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$       C.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$       D.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

由题意,  $Q = PE_{21}(1)$ , 那么

$$\begin{aligned} Q^TAQ &= (PE_{21}(1))^T APE_{21}(1) = E_{21}^T(1)P^T APE_{21}(1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

故选 A.

**例 10.3.6. (2021 数二)** 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ , 若存在下三角可逆矩阵  $P$  和上三角可逆矩阵  $Q$ , 使  $PAQ$  为对角矩阵, 求  $P$  和  $Q$ .

对  $A$  做初等行变换, 化为上三角矩阵  $B$ ,

$$\begin{aligned} (A : E) &= \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2 - 2r_1]{r_3 + r_1} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[r_3 + 2r_2]{r_3 + 2r_2} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) = (B : P) \end{aligned}$$

所以  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 再对  $B$  作列变换 (或  $B^T$  作行变换) 化为对角矩阵, 可求得  $Q$  (或  $Q^T$ )

$$\begin{pmatrix} B \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3 + c_1]{c_3 + 3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可得  $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . 或

$$(\mathbf{B}^\top : \mathbf{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 : 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 : 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 : 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+3r_2]{r_3+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 : 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 : 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 : 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

得  $\mathbf{Q}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

### 10.3.2 初等矩阵

**定义 10.3.2 (初等矩阵).** 由于初等变换有 3 种, 相应可以得到 3 种初等矩阵:

- (1)  $\mathbf{E}_{ij} \Leftrightarrow$  交换  $\mathbf{E}$  的第  $i, j$  两行 (或列) 所得到的矩阵;
- (2)  $\mathbf{E}_i(k) \Leftrightarrow$   $\mathbf{E}$  的第  $i$  行 (或列) 乘以非零常数  $k$  所得到的矩阵;
- (3)  $\mathbf{E}_{ij}(k) \Leftrightarrow$  把  $\mathbf{E}$  的第  $j$  行的  $k$  倍加到第  $i$  行或者把  $\mathbf{E}$  的第  $i$  列的  $k$  倍加到第  $j$  列所得到的矩阵.

**定理 10.3.1 (初等矩阵的逆).** (1)  $\mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}$ ; (2)  $\mathbf{E}_i^{-1}(k) = \mathbf{E}_i\left(\frac{1}{k}\right)$ ; (3)  $\mathbf{E}_{ij}^{-1}(k) = \mathbf{E}_{ij}(-k)$ .

**定理 10.3.2 (初等变换与初等矩阵的联系).** 设  $\mathbf{A}$  是  $m \times n$  矩阵, 对  $\mathbf{A}$  施行一次初等行变换, 相当于在  $\mathbf{A}$  的左边乘以相应的  $m$  阶初等矩阵; 对  $\mathbf{A}$  施行一次初等列变换, 相当于在  $\mathbf{A}$  的右边乘以相应的  $n$  阶初等矩阵.

**例 10.3.7.** 试将矩阵  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$  写成若干个形如  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  的矩阵的乘积.

显然, 所给矩阵非奇异, 故可经一系列初等变换化为单位矩阵, 具体地, 有

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2-c_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2-c_1]{c_1-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

用初等矩阵表示, 即

$$\mathbf{E}_{21}(-1) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{E}_{12}(-1) \mathbf{E}_{21}(-1) \mathbf{E}_{12}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此, 有

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_{21}^{-1}(-1) \mathbf{E}_{12}^{-1}(-1) \mathbf{E}_{21}^{-1}(-1) \mathbf{E}_{12}^{-1}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**例 10.3.8.** 设  $a \neq 0$ , 把矩阵  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$  表示成一些形如  $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$  的矩阵的乘积.

考虑如何用消法变换将  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$  化为单位矩阵,

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+\frac{1-a}{a}r_2]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-a}{a^2} \\ a & a^{-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+\frac{a-1}{a^2}r_2]{r_2-ar_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

将上述过程用初等矩阵表示, 得

$$\mathbf{E}_{12}\left(\frac{a-1}{a^2}\right) \mathbf{E}_{21}(-a) \mathbf{E}_{12}\left(\frac{1-a}{a^2}\right) \mathbf{E}_{21}(1) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此, 有

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \mathbf{E}_{21}^{-1}(1) \mathbf{E}_{12}^{-1}\left(\frac{1-a}{a^2}\right) \mathbf{E}_{21}^{-1}(-a) \mathbf{E}_{12}^{-1}\left(\frac{a-1}{a^2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a-1}{a^2} \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-a}{a^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**例 10.3.9.** 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  经初等行变换变为矩阵  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & a \end{pmatrix}$

(1) 求  $a$  的值;

(2) 求满足  $PA = B$  的所有可逆矩阵  $P$ .

(1) 易得  $\text{rank } A = 2$ , 并且  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_2]{r_2 \times \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ , 则  $\text{rank } B = 2 \Rightarrow a = 0$ .

(2) 记  $X = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $B^\top = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , 求解  $A^\top X = B^\top$ , 转化为求解三个方程组  $A^\top x_i = \beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), 于是

$$(A^\top \mid B^\top) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-2r_1-2r_2]{r_1-r_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

因此  $A^\top X = \mathbf{0}$  的基础解系为  $\xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $A^\top x_i = \beta_i$  的通解分别为

$$\eta_1 = k_1 \xi + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k_1 \\ -2+k_1 \\ k_1 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = k_2 \xi + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k_2 \\ 1+k_2 \\ k_2 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = k_3 \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_3 \\ -2+k_3 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

故满足  $A^\top X = B^\top$  的解为  $X(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ , 当  $\det X \neq 0$  时,  $X$  可逆, 即

$$\begin{vmatrix} 1-k_1 & 1-k_2 & -k_3 \\ -2+k_1 & 1+k_2 & -2+k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} = -2k_1 + 2k_2 + 3k_3 \neq 0.$$

**例 10.3.10.** 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求三阶可逆矩阵  $P$ , 四阶可逆矩阵  $Q$ , 使得  $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q$ .

先对  $A$  作初等变换, 有

$$A \xrightarrow[r_1-2r_2]{r_3+3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应的初等矩阵为

$$E_{31}(3)E_{12}(-2)AE_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是  $P = (E_{31}(3)E_{12}(-2))^{-1} = E_{12}(2)E_{31}(-3)$ ,  $Q = E_{24}^{-1} = E_{24}$ , 即

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**推论 10.3.1.** 设  $A$ ,  $B$  分别是  $n \times m$  和  $m \times n$  矩阵 ( $n \geq m$ ),  $\lambda \neq 0$ , 求证:

$$|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m} |\lambda E_m - BA|.$$

证 只需证  $n > m$  的情形, 对分块矩阵  $\begin{pmatrix} E_n & A \\ B & \lambda E_m \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} \lambda E_n & A \\ B & E_m \end{pmatrix}$  作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_n & O \\ -B & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & A \\ B & \lambda E_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & \lambda E_m - AB \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} E_n & -A \\ O & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda E_n & A \\ B & E_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda E_n - AB & O \\ B & E_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

对上述二式两边同时取行列式, 可得

$$\lambda^m |\lambda E_n - AB| = \lambda^m \begin{vmatrix} \lambda E_n & A \\ B & E_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda E_n & A \\ \lambda B & \lambda E_m \end{vmatrix} = \lambda^n \begin{vmatrix} E_n & A \\ B & \lambda E_m \end{vmatrix} = \lambda^m |\lambda E_m - BA|$$

所以  $|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m} |\lambda E_m - BA|$ .

**例 10.3.11.** 计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1+x_1 & a_1+x_1 & \cdots & a_1+x_n \\ a_2+x_1 & 1+a_2+x_2 & \cdots & a_2+x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+x_1 & a_n+x_2 & \cdots & 1+a_n+x_n \end{vmatrix}$ .

令  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)^\top$ ,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ ,  $e = (1, 1, \dots, 1)^\top$ , 那么由推论 10.3.1 可得

$$\begin{aligned} D_n &= |E_n + Ae^\top + eX^\top| = |E_n + (A, e)\begin{pmatrix} e^\top \\ X^\top \end{pmatrix}| = |E_2 + \begin{pmatrix} e^\top \\ X^\top \end{pmatrix}(A, e)| = |E_2 + \begin{pmatrix} e^\top A & e^\top e \\ X^\top A & X^\top e \end{pmatrix}| \\ &= \begin{vmatrix} 1+e^\top A & e^\top e \\ X^\top A & 1+X^\top e \end{vmatrix} = (1+e^\top A)(1+X^\top e) - (e^\top e)(X^\top A) = \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i\right) \left(1 + \sum_{i=1}^n x_i\right) - n \sum_{i=1}^n a_i x_i \end{aligned}$$

**例 10.3.12 (2008 上海交通大学).** 设  $\prod_{i=1}^n a_i \neq 0$ , 计算  $n$  阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & a_1+a_3 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & a_2+a_3 & \cdots & a_2+a_n \\ a_3+a_1 & a_3+a_2 & 0 & \cdots & a_3+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & a_n+a_3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

取  $A = \text{diag}(-2a_1, -2a_2, \dots, -2a_n)$ ,  $A^\top = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ , 那么

$$\begin{aligned} D &= \det(A + AB) = \det A \cdot \det(E_n + A^{-1}AB) = (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i \det(E_2 + B\Lambda^{-1}A) \\ &= (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i \begin{vmatrix} 1 - \frac{n}{2} & -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \\ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i & 1 - \frac{n}{2} \end{vmatrix} = (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i \left[ (n-2)^2 - \sum_{i,j=1}^n \frac{a_i}{a_j} \right]. \end{aligned}$$

## 10.4 矩阵的秩

### 10.4.1 秩的相关不等式证明

**定义 10.4.1 (满秩方阵).** 对于  $n$  阶方阵  $A$ , 若  $\text{rank } A = n$ , 则称  $A$  为满秩 (非退化) 方阵, 否则称为降秩 (退化) 方阵.

**定理 10.4.1 (矩阵与向量组秩的联系).** 设  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ),  $\beta$  是  $n$  维列向量, 则

$$\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \leq \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta) \leq \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) + 1.$$

**例 10.4.1.** 设  $A, B$  分别是  $f \times m, f \times n$  的矩阵, 证明:  $\text{rank } A \leq \text{rank}(A, B) \leq \text{rank } A + n$ .

证 设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ ,  $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ , 那么

$$\text{rank } A = \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \leq \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1) \leq \dots \leq \text{rank}(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n) = \text{rank}(A, B)$$

又因为

$$\text{rank}(A, B) = \text{rank}(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n) \leq \text{rank}(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) + 1 \leq \dots \leq \text{rank}(\alpha_1, \dots, \alpha_m) + n$$

综上  $\text{rank } A \leq \text{rank}(A, B) \leq \text{rank } A + n$  成立.

**定理 10.4.2.** 对于  $m \times n$  矩阵  $A$  与  $B$ , 有  $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A, B)$ .

证 不妨设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ ,  $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ , 则结论显然成立.

**定理 10.4.3.** 对于  $m \times n$  矩阵  $A$  与  $m \times s$  矩阵  $B$ , 有  $\text{rank}(A, B) \leq \text{rank } A + \text{rank } B$ .

证 提示: 用极大无关组可证明.

**定理 10.4.4.** 对于  $n$  阶方阵  $A, B$ , 则  $\text{rank}(A \pm B) \leq \text{rank } A + \text{rank } B$ .

**定理 10.4.5.** 对于  $m \times n$  矩阵  $A$  与  $n \times s$  矩阵  $B$ , 有  $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank } A, \text{rank } B\}$ .

证 先设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$ , 并且无论是  $b_{11}\alpha_1 + \dots + b_{n1}\alpha_n$  还是  $b_{1s}\alpha_1 + \dots + b_{ns}\alpha_n$ , 均可由  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  线性表示, 于是

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}(b_{11}\alpha_1 + \dots + b_{n1}\alpha_n, \dots, b_{1s}\alpha_1 + \dots + b_{ns}\alpha_n) \leq \text{rank}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{rank}(A)$$

再设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}^\top$ , 同理  $\text{rank}(AB) \leq \text{rank } B$ , 则

$$\text{rank}(AB) \leq \text{rank } A \text{ 且 } \text{rank}(AB) \leq \text{rank } B.$$

**定理 10.4.6.** 若  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times s$  矩阵, 且  $AB = O$ , 则  $\text{rank } A + \text{rank } B \leq n$ .

**定理 10.4.7.** 对于  $m \times n$  矩阵  $A$  与  $s \times t$  矩阵  $B$ , 有  $\text{rank} \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \geq \text{rank } A + \text{rank } B$ .

**例 10.4.2.** 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 证明:

$$\text{rank}(AB - E) \leq \text{rank}(A - E) + \text{rank}(B - E)$$

这里  $E$  为  $n$  阶单位矩阵.

证 因为  $AB - E = (A - E)B + (B - E)$ , 于是

$$\text{rank}(AB - E) \leq \text{rank}((A - E)B) + \text{rank}(B - E) \leq \text{rank}(A - E) + \text{rank}(B - E).$$

**例 10.4.3.** 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 证明:

- (1)  $\text{rank}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \geq \text{rank } \mathbf{A} - \text{rank } \mathbf{B}$ ;
- (2) 若  $\mathbf{A}$  是可逆矩阵, 则结论 (1) 中的等号成立当且仅当  $\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B}$ .

证

- (1) 由  $\mathbf{A} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) + \mathbf{B}$ , 且  $\text{rank } \mathbf{A} \leq \text{rank}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + \text{rank } \mathbf{B}$ , 移项得  $\text{rank}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \geq \text{rank } \mathbf{A} - \text{rank } \mathbf{B}$ ;
- (2) 利用分块矩阵的初等行变换, 得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

因为初等行变化不会改变矩阵的秩, 所以

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

即

$$\text{rank}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + \text{rank } \mathbf{B} = \text{rank } \mathbf{A} + \text{rank}(\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$$

故  $\text{rank}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \text{rank } \mathbf{A} - \text{rank } \mathbf{B}$  当且仅当  $\text{rank}(\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) = 0$ , 即  $\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B}$ .

**例 10.4.4.** 设  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  都是数域  $P$  上的  $n$  阶方阵, 满足  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ , 证明:

$$\text{rank}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \text{rank } \mathbf{A} + \text{rank } \mathbf{B} - \text{rank}(\mathbf{AB}).$$

证 利用分块矩阵的初等行变换, 有

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

因为  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ , 于是

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{A} + \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{AB} \end{pmatrix}$$

于是, 有

$$\text{rank } \mathbf{A} + \text{rank } \mathbf{B} = \text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \geq \text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{AB} \end{pmatrix} \geq \text{rank}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \text{rank}(\mathbf{AB})$$

即得证不等式.

## 10.4.2 秩的相关等式证明

**定理 10.4.8.** 对于  $m \times n$  矩阵  $\mathbf{A}$  与  $s \times t$  矩阵  $\mathbf{B}$ , 有  $\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{pmatrix} = \text{rank } \mathbf{A} + \text{rank } \mathbf{B}$ .

**定理 10.4.9 (秩的第一降阶定理).** 若  $\mathbf{A}$  是  $r$  阶可逆矩阵, 分块矩阵  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$ , 那么

$$\text{rank } \mathbf{M} = r + \text{rank}(\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}).$$

**例 10.4.5.** 设  $\mathbf{A}, \mathbf{D}$  分别为  $m$  阶与  $n$  阶可逆矩阵,  $\mathbf{B}, \mathbf{C}$  分别为  $m \times n$  与  $n \times m$  矩阵, 证明:

$$\text{rank } \mathbf{A} - \text{rank}(\mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C}) = \text{rank } \mathbf{D} - \text{rank}(\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}).$$

证 利用分块矩阵的初等行变换, 得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix} &\xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix} &\xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因为初等行变化不会改变矩阵的秩, 于是

$$\begin{aligned}\operatorname{rank} \mathbf{A} + \operatorname{rank} (\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) &= \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \\ \operatorname{rank} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}) + \operatorname{rank} \mathbf{D} &= \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

得证  $\operatorname{rank} \mathbf{A} - \operatorname{rank} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}) = \operatorname{rank} \mathbf{D} - \operatorname{rank} (\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$ .

**推论 10.4.1.** 特别地, 令  $\mathbf{A} = \lambda_0 \mathbf{E}_m$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{E}_n$ , 其中  $\lambda_0$  为任意非零常数, 则有

$$m - \operatorname{rank} (\lambda_0 \mathbf{E}_m - \mathbf{B}\mathbf{C}) = n - \operatorname{rank} (\lambda_0 \mathbf{E}_n - \mathbf{C}\mathbf{B}).$$

**例 10.4.6.** 设  $\mathbf{A}$  是  $m \times n$  矩阵,  $\mathbf{B}$  是  $n \times s$  矩阵, 且  $\operatorname{rank}(\mathbf{AB}) = \operatorname{rank} \mathbf{B}$ , 证明: 对任一  $s \times t$  矩阵  $\mathbf{C}$ , 有  $\operatorname{rank}(\mathbf{ABC}) = \operatorname{rank}(\mathbf{BC})$ .

证 利用分块矩阵的初等行变换, 得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{ABC} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} \mathbf{ABC} & \mathbf{AB} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{AB} \\ -\mathbf{BC} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B} & \mathbf{BC} \end{pmatrix}$$

因为初等行变化不会改变矩阵的秩, 所以

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{ABC} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(\mathbf{ABC}) + \operatorname{rank} \mathbf{B} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B} & \mathbf{BC} \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(\mathbf{AB}) + \operatorname{rank}(\mathbf{BC})$$

又  $\operatorname{rank}(\mathbf{AB}) = \operatorname{rank} \mathbf{B}$ , 所以  $\operatorname{rank}(\mathbf{ABC}) \geq \operatorname{rank}(\mathbf{BC})$ , 又  $\operatorname{rank}(\mathbf{ABC}) \leq \operatorname{rank}(\mathbf{BC})$ , 故

$$\operatorname{rank}(\mathbf{ABC}) = \operatorname{rank}(\mathbf{BC}).$$

### 10.4.3 秩的应用

**例 10.4.7.** 设  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  分别是实数域上的  $3 \times 4$  和  $4 \times 3$  矩阵, 且满足

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -20 & 5 & 4 \\ -35 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -14 & 2x-5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & 3x-3 & 3 & 6 \\ -32 & 6x-7 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

求  $x$  的值.

由推论 10.4.1, 令  $\lambda_0 = 1$ , 于是  $3 - \operatorname{rank} (\mathbf{E}_3 - \mathbf{AB}) = 4 - \operatorname{rank} (\mathbf{E}_4 - \mathbf{BA})$ , 那么

$$\begin{aligned}\operatorname{rank} (\mathbf{E}_4 - \mathbf{BA}) &= 4 - 3 + \operatorname{rank} (\mathbf{E}_3 - \mathbf{AB}) \\ \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 15 & 5-2x & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 3-3x & -2 & -6 \\ 32 & 7-6x & -4 & -13 \end{pmatrix} &= 1 + \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 10 & -2 & -2 \\ 20 & -4 & -4 \\ 35 & -7 & -7 \end{pmatrix} = 2\end{aligned}$$

解得  $x = -2$ .

**例 10.4.8.** 设  $\mathbf{A}$  是 4 阶矩阵, 向量  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  是齐次方程组  $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的基础解系, 向量  $\boldsymbol{\gamma}$  是齐次方程组  $(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的基础解系, 求  $(\mathbf{A}^2 - \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的通解

- A.  $c_1 \boldsymbol{\alpha} + c_2 \boldsymbol{\beta}$  其中  $c_1, c_2$  为任意常数
- B.  $c_1 \boldsymbol{\alpha} + c_2 \boldsymbol{\gamma}$  其中  $c_1, c_2$  为任意常数
- C.  $c_1 \boldsymbol{\beta} + c_2 \boldsymbol{\gamma}$  其中  $c_1, c_2$  为任意常数
- D.  $c_1 \boldsymbol{\alpha} + c_2 \boldsymbol{\beta} + c_3 \boldsymbol{\gamma}$  其中  $c_1, c_2, c_3$  为任意常数

因为向量  $\alpha, \beta$  是齐次方程组  $(A - E)x = 0$  的基础解系, 所以

$$s = n - \text{rank}(A - E) \Rightarrow 2 = 4 - \text{rank}(A - E) \Rightarrow \text{rank}(A - E) = 2$$

同理  $\text{rank}(A + E) = 3$ , 又因为

$$\text{rank}(A^2 - E) = \text{rank}[(A + E)(A - E)] \leq \min\{\text{rank}(A + E), \text{rank}(A - E)\} \Rightarrow \text{rank}(A^2 - E) \leq 2$$

当  $\text{rank}(A^2 - E) = 0$  时,  $A^2 - E = O \Rightarrow (A + E)(A - E) = O \Rightarrow \text{rank}(A + E) + \text{rank}(A - E) \leq 4$ , 而  $\text{rank}(A + E) = 3$ ,  $\text{rank}(A - E) = 2$ , 与之矛盾; 当  $\text{rank}(A^2 - E) = 2$  时, 说明有 2 个线性无关解,  $(A^2 - E)x = 0 \Rightarrow (A + E)(A - E)x = 0$ , 即  $\alpha, \beta, \gamma$  是方程组的三个解, 又因为  $\alpha, \beta$  是齐次方程组  $(A - E)x = 0$  的基础解系, 说明  $\alpha, \beta$  线性无关, 且  $\alpha, \beta$  是特征值 1 对应的特征向量,  $\gamma$  是 -1 对应的特征向量, 因此  $\gamma$  与  $\alpha$  或  $\beta$  线性无关, 故方程组有 3 个线性无关解, 矛盾; 所以  $\text{rank}(A^2 - E) = 1 \Rightarrow s' = n - \text{rank}(A^2 - E) = 4 - 1 = 3$ , 因此选 D.

**例 10.4.9.** 设  $A$  是  $n$  阶方阵, 证明: 存在一  $n$  阶可逆矩阵  $B$  及一个  $n$  阶等幂矩阵  $C$ , 使得  $A = BC$ .

证 设  $\text{rank } A = r$ , 则存在  $n$  阶可逆矩阵  $P$  和  $Q$  使得,

$$A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = (PQ)Q^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$$

令  $B = PQ$ ,  $C = Q^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$ , 并且

$$C^2 = Q^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q Q^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = C$$

故得证.

**例 10.4.10.** 一个矩阵称为行 (列) 满秩矩阵, 如果它的行 (列) 向量组是线性无关的,

(1) 证明: 如果一个  $m \times n$  矩阵  $A$  的秩为  $r$ , 那么有  $m \times r$  的列满秩矩阵  $B$  和  $r \times n$  的行满秩矩阵  $C$ , 使得  $A = BC$ , 我们称  $A = BC$  为矩阵  $A$  的满秩分解表达式;

(2) 利用 (1) 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 36 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 2 & 27 \\ 6 & 12 & 1 & 7 & 5 & 73 \end{pmatrix}$  的满秩分解表达式.

(1) 因为  $\text{rank } A = r$ , 所以存在  $m$  阶可逆矩阵  $P$  和  $n$  阶可逆矩阵  $Q$ , 使得

$$A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = P \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix} (E_r, O) Q$$

令  $B = P \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}$ ,  $C = (E_r, O) Q$ , 则  $B$  是  $m \times r$  的列满秩矩阵,  $C$  是  $r \times n$  的行满秩矩阵, 且  $A = BC$ .

(2) 用初等行变换和初等列变换将矩阵  $A$  化为等价标准形, 然后求逆即可, 具体地, 有

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow[r_2-3r_1]{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-6r_1]{r_4-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[c_2-2c_1]{c_4-c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_5-c_1]{c_6-10c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_3 \leftrightarrow c_6} \begin{pmatrix} E_3 & O \\ O & O \end{pmatrix}_{4 \times 6} \end{aligned}$$

用矩阵表示为

$$L_4 L_3 L_2 L_1 A R_1 R_2 E_{23} E_{36} = \begin{pmatrix} E_3 & O \\ O & O \end{pmatrix}_{4 \times 6}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ -3 & 1 & \\ -2 & & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{L}_3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{L}_4 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & -1 & -10 \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & -1 & 1 & -6 \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

于是，有

$$\mathbf{A} = \left( \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{L}_3^{-1} \mathbf{L}_4^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \right) \left( (\mathbf{E}_3, \mathbf{O}) \mathbf{E}_{36} \mathbf{E}_{23} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{R}_1^{-1} \right) = \mathbf{BC}$$

那么

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{L}_3^{-1} \mathbf{L}_4^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix} \\ \mathbf{C} &= (\mathbf{E}_3, \mathbf{O}) \mathbf{E}_{36} \mathbf{E}_{23} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{R}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## 第 11 章

### 向量

“我们的知识只是一种影像，而不是事物本身。”

——施密特

在线性代数中，向量是一个基本的概念，它可以用来自表示空间中的方向和大小。向量可以是几何向量（有大小和方向）或者抽象向量（只有方向）。下面是一些关于向量的基本概念和性质：

1. 向量的表示：向量通常用箭头表示或黑体小写字母，例如  $\vec{v}$ 。在二维空间中，向量可以表示为  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ，其中  $v_1$  和  $v_2$  分别是向量在x轴和y轴上的分量。在三维空间中，向量可以表示为  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ 。
2. 向量的运算：向量之间可以进行加法和数乘运算。向量的加法是指将两个向量的对应分量相加，数乘是指一个向量乘以一个标量，即将向量的每个分量乘以该标量。
3. 向量的模长：向量的模长是指向量的大小，通常表示为  $\|\vec{v}\|$  或  $|\vec{v}|$ 。在二维空间中，向量  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  的模长为  $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ 。
4. 向量的点积：向量的点积（内积）是一种重要的向量运算，定义为两个向量对应分量相乘后再相加的结果，记为  $\vec{v} \cdot \vec{w}$ 。如果  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ ，则  $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1w_1 + v_2w_2$ 。
5. 向量的叉积：向量的叉积（外积）是二维或三维向量特有的运算，结果是一个新的向量。在三维空间中，如果  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ ，则  $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}$ 。

向量在几何、物理和工程等领域有着广泛的应用，是线性代数中的重要概念。通过对向量的运算和性质的理解，我们可以更好地处理空间中的问题，并解决各种复杂的计算和分析。

## 11.1 向量的运算

### 11.1.1 向量的定义

**定义 11.1.1 (向量的定义).** 由  $n$  个数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  组成的有序数组称为  $n$  维向量, 简称向量.

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

称为  $n$  维行向量,  $a_i$  称为  $\boldsymbol{\alpha}$  的第  $i$  个分量.

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$$

称为  $n$  维列向量. 由定义可以看出,  $n$  维行(列)向量就是  $1 \times n(n \times 1)$  矩阵.

**定义 11.1.2 (零向量与负向量).** 分量全为 0 的向量称为零向量; 设  $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , 称  $-\boldsymbol{\alpha} = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$  为  $\boldsymbol{\alpha}$  的负向量.

### 11.1.2 向量的运算

**定义 11.1.3 (向量的相等).** 设  $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , 如果  $a_i = b_i(i = 1, 2, \dots, n)$ , 则称向量  $\boldsymbol{\alpha}$  与  $\boldsymbol{\beta}$  相等.

**定义 11.1.4 (向量的加减).** 设  $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , 则

$$\boldsymbol{\alpha} \pm \boldsymbol{\beta} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \dots, a_n \pm b_n).$$

**定义 11.1.5 (向量的数乘).** 设  $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $k$  为常数, 则  $k\boldsymbol{\alpha} = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$ .

设  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$  均为  $n$  维向量,  $\lambda, \mu$  为实数, 则

- |  |   |
|--|---|
| (1) $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$ .                        | (2) $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$ . |
| (3) $\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}$ .   | (4) $\boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$ .   |
| (5) $1\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$ .   | (6) $\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}$ .   |
| (7) $\lambda(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \lambda\boldsymbol{\alpha} + \lambda\boldsymbol{\beta}$ . | (8) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha} + \mu\boldsymbol{\alpha}$ .  |

## 11.2 向量间的线性关系

### 11.2.1 基本概念

**定义 11.2.1 (线性表示).** 对于向量  $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , 如果存在一组数  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$$

成立, 则称  $\beta$  是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的线性组合, 或称  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表示.

**定义 11.2.2 (线性相关与线性无关).** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  为一组向量, 如果存在一组不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

成立, 则称向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关; 当且仅当  $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$  时等式成立, 则称向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关.

### 11.2.2 常用结论

设

$$\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})^\top, \quad \alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})^\top, \dots, \alpha_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})^\top,$$

$$\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^\top,$$

这里  $m \leq n$ .

- (1)  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表示的充要条件是线性方程组  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = \beta$  有解,  
即下列线性方程组有解

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m = b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m = b_2, \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m = b_n. \end{array} \right.$$

- (2) (a) 令  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ ,  $B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta)$ , 则  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表示的充要条件是以  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  为列向量的矩阵和以  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$  为列向量的矩阵有相同的秩, 即  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ .

- (b)  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  唯一线性表示的充要条件是  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = m$ .

- (c)  $\beta$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表示的充要条件是  $\text{rank}(A) < \text{rank}(B)$ .

(3) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关的充要条件是齐次线性方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = 0 \end{array} \right.$$

有非零解, 且当  $m = n$  时, 其线性相关的充要条件是

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

(4) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关的充要条件是齐次线性方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{array} \right.$$

只有零解, 且当  $m = n$  时, 其线性无关的充要条件是

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

(5) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关的充要条件是以  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  为列向量的矩阵的秩小于向量个数  $m$ .

(6) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关的充要条件是以  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  为列向量的矩阵的秩等于向量个数  $m$ .

(7) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$  线性相关的充要条件是向量组中至少有一个向量是其余向量的线性组合; 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$  线性无关的充要条件是向量组中任一个向量都不能由其余向量线性表示.

(8) 如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 而向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$  线性相关, 则  $\beta$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表示, 且表达式唯一.

- (9) 如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  可以由向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性表示, 并且  $m > t$ , 则向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关; 或者说, 如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 并且可以由  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性表示, 则  $m \leq t$ .
- (10) 在向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中, 如果有一个部分组线性相关, 则整个向量组线性相关; 如果整个向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 则其任一部分组也一定线性无关.
- (11) 设  $r$  维向量组  $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir})$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 线性无关, 则在每个向量上再添加  $n - r$  个分量所得到的  $n$  维向量组  $\alpha'_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir}, a_{i,r+1}, \dots, a_{in})$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 也线性无关.
- (12)  $n + 1$  个  $n$  维向量必线性相关.
- (13) 一个零向量线性相关; 一个非零向量线性无关; 两个非零向量线性相关的充要条件是对应分量成比例; 含有零向量的向量组必线性相关.
- (14) 设  $\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \varepsilon_n = (0, 0, \dots, 1)$ , 称  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  为  $n$  维单位向量组, 且
- $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  线性无关;
  - 任意  $n$  维向量  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  都可由  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  线性表示, 即
- $$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n.$$
- (15) 初等行变换不改变矩阵的列向量组之间的线性关系; 初等列变换不改变矩阵的行向量组之间的线性关系.

**例 11.2.1.** 设  $\alpha_1 = (0, 1, 2, 3), \beta_1 = (2, 2, 3, 1), \beta_2 = (-1, 2, 1, 2), \beta_3 = (2, 1, -1, -2)$ , 问  $\alpha_1$  是否可表示成  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的线性表示.

由线性表示秩的关系:

$$\begin{aligned} (\beta_1^\top, \beta_2^\top, \beta_3^\top, \alpha_1^\top) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 \leftrightarrow r_4 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 & -7 \\ 0 & -5 & 6 & -6 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{r_2 \times (-\frac{1}{2}) \\ r_3 - r_4 \\ r_4 + 5r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} & \frac{13}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 \times (-1) \\ r_4 \times (-\frac{2}{13}) - r_3 \\ r_4 \times (-\frac{1}{2})}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由  $\text{rank}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3 < \text{rank}(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1) = 4$ , 知  $\alpha_1$  不能表示为  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的线性组合.

**例 11.2.2 (2011 数一).** 设向量组  $\alpha_1 = (1, 0, 1)^\top, \alpha_2 = (0, 1, 1)^\top, \alpha_3 = (1, 3, 5)^\top$  不能由向量组  $\beta_1 = (1, 1, 1)^\top, \beta_2 = (1, 2, 3)^\top, \beta_3 = (3, 4, a)^\top$  线性表示,

- 求  $a$  的值;

(2) 将  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  用  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示.

(1) 因为四个 3 维向量  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha$  必定线性相关, 所以若  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性无关, 那么  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  必可由  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性表示, 与题设矛盾, 故  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  一定相关, 那么

$$|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-3 \end{vmatrix} = a-5=0 \Rightarrow a=5.$$

(2) 对  $(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 : \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3)$  做初等行变换, 有

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2 - 3r_3]{r_3 - r_1 - r_2} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-2}$$

所以  $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3$ ,  $\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ ,  $\beta_3 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3$ .

**例 11.2.3 (1998 数二).** 已知  $\alpha_1 = (1, 4, 0, 2)^\top$ ,  $\alpha_2 = (2, 7, 1, 3)^\top$ ,  $\alpha_3 = (0, 1, -1, a)^\top$ ,  $\beta = (3, 10, b, 4)^\top$ ,

(1)  $a, b$  取何值时,  $\beta$  不能由  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 线性表示;

(2)  $a, b$  取何值时,  $\beta$  可由  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 线性表示, 并写出表达式.

易知  $\beta$  不能由  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 线性表示当且仅当

$$\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$$

$\beta$  可由  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 线性表示当且仅当

$$\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$$

那么

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[r_4 - 2r_1]{r_2 - 4r_1} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[r_4 + r_2]{r_3 + r_2} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1 + 2r_2]{r_2 \times (-1)} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array} \right)$$

(1) 当  $b \neq 2$  时, 即  $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$  时, 从而  $\beta$  不能用  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 线性表示.

(2) 当  $b = 2$  时, 即  $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$  时, 从而  $\beta$  可由用  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 线性表示, 表达式如下:

(a) 当  $a = 1$  时, 表达式为  $\beta = (-2c-1)\alpha_1 + (c+2)\alpha_2 + c\alpha_3$ , 其中  $c$  为任意常数.

(b) 当  $a \neq 1$  时, 表达式为  $\beta = -\alpha_1 + 2\alpha_2$ .

### 11.3 向量组的极大线性无关组和秩

#### 11.3.1 极大线性无关组

**定义 11.3.1 (极大线性无关组).** 设向量组  $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ir}$  为向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的一个部分组, 且满足

(1)  $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_r$  线性无关;

(2) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中任一向量均可由  $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_r$  线性表示,

则称向量组  $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_r$  为向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的一个极大线性无关组, 简称极大无关组.

### 11.3.2 向量组的秩

**定义 11.3.2 (向量组的秩).** 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的极大无关组中所含向量的个数称为该向量组的秩, 记为  $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ , 如果一个向量组仅含零向量, 则规定它的秩为零.

向量组的秩的性质:

(1) 若  $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = r$ , 则

(a)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的任何含多于  $r$  个向量的部分组一定线性相关;

(b)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的任何含  $r$  个向量的线性无关部分组一定是极大无关组.

(2)  $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \leq m$ , 且  $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = m \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关.

(3) 向量  $\beta$  可用  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表示  $\Leftrightarrow \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta) = \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ .

(4) 向量  $\beta$  可用  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  唯一线性表示  $\Leftrightarrow \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta) = \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = m$ .

(5) 向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  可以用  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示  $\Leftrightarrow \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ .

(6) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  与  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  等价  $\Leftrightarrow \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = \text{rank}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$ .

(7) 设  $A$  是一个  $m \times n$  矩阵, 记  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $A$  的列向量组 ( $m$  维),  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  是  $A$  的行向量组 ( $n$  维), 则  $\text{rank}(A) = \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \text{rank}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ .

**定理 11.3.1.** 若向量组  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) 可以由向量组  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, t$ ) 表示, 则

$$\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \leq \text{rank}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t).$$

证 由于  $\alpha_i$  可由  $\beta_j$  线性表示, 不妨设

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^t x_{ik} \beta_k$$

故

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1t} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{s1} & x_{s2} & \cdots & x_{st} \end{pmatrix}$$

由于矩阵乘积的秩小于等于每一个, 则

$$\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \leq \text{rank} \min \left\{ (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t), \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1t} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{s1} & x_{s2} & \cdots & x_{st} \end{pmatrix} \right\}$$

即  $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \leq \text{rank}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$ .

**定义 11.3.3 (向量组的等价).** 两个向量组能够相互线性表示, 则称这两个向量组等价.

向量组等价的结论:

- (1) 任一向量组和它的极大无关组等价;
- (2) 向量组的任意两个极大无关组等价;
- (3) 两个等价的线性无关的向量组所含向量的个数相同;
- (4) 两个向量组等价的充要条件是它们的极大无关组等价;
- (5) 等价的两个向量组有相同的秩.

**例 11.3.1.** 设  $n$  维向量组  $(I) : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  ( $k < n$ ) 线性无关, 则  $n$  维向量组  $(II) : \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  也线性无关的充要条件为

- A.  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  线性表示
- B.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  可由  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  线性表示
- C. 向量组  $(I)$  与向量组  $(II)$  等价
- D. 矩阵  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  与矩阵  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$  等价

对于 A 选项, 因为  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  线性表示, 所以  $\text{rank}(II) \leq \text{rank}(I)$ , 而向量组  $(I)$  线性无关, 所以  $\text{rank}(I) = k$ , 即  $\text{rank}(II) \leq k$ , 由于无法保证  $\text{rank}(II) = k$ , 故不能得出  $(II)$  线性无关;

对于 B 选项, 因为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  可由  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  线性表示, 所以  $\text{rank}(I) \leq \text{rank}(II)$ , 同样地,

$$k = \text{rank}(I) \leq \text{rank}(II) \leq k \Rightarrow \text{rank}(II) = k$$

因此  $(II)$  线性无关, 充分条件成立, 但不是必要条件, 如  $(I) : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  与  $(II) : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  均线性无关, 但  $(I)$  不能由  $(II)$  线性表示;

对于 C 选项, 由  $(I)$  与  $(II)$  等价知  $(I)$  与  $(II)$  可相互线性表示, 则  $\text{rank}(I) = \text{rank}(II) = k$ , 故  $(II)$  线性无关, 充分条件成立, 同 B 选项知必须条件不成立;

因为矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  与矩阵  $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$  等价, 则  $\text{rank } A = \text{rank } B = k$ , 又  $(I) : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  ( $k < n$ ) 线性无关, 即  $\text{rank } A = \text{rank } B = k$ , 故  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  线性无关, 故选 D.

**例 11.3.2.** 已知  $n$  维向量组

$$(I) : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, (II) : \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$$

且  $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = \text{rank}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = r$ , 则

- A. 当  $s = r$  时, 向量组  $(I)$  与  $(II)$  等价
- B. 当  $s = t = r$  时, 向量组  $(I)$  与  $(II)$  等价
- C. 当  $\text{rank}(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t) = r$  时, 向量组  $(I)$  与  $(II)$  等价
- D. 当  $\text{rank}(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t) = 2r$  时, 向量组  $(I)$  与  $(II)$  等价

记向量组 (III) :  $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t$ , 取 I 和 II 的一个极大无关组  $(I_0)$  :  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  与  $(II_0)$  :  $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}$ , 那么向量组 (I) 与  $(I_0)$  等价, 向量组 (II) 与  $(II_0)$  的等价, 如果  $\text{rank}(III) = r$ , 那么向量组  $(I_0)$  与  $(II_0)$  都是 (III) 的一个极大无关组, 这表明向量组  $(I_0)$  与  $(II_0)$  等价, 因此, 向量组 (I) 与 (II) 等价.

另外, 考虑向量组

$$(I) : \alpha_1 = (1, 0, 0, 0)^\top, \alpha_2 = (0, 1, 0, 0)^\top, (II) : \beta_1 = (0, 0, 1, 0)^\top, \beta_2 = (0, 0, 0, 1)^\top$$

则  $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2) = \text{rank}(\beta_1, \beta_2) = 2$ ,  $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = 4$ , 但选项 A、B、D 均不成立.

**例 11.3.3 (2000 数二).** 已知向量组  $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\beta_2 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\beta_3 = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  与向量组  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$  具有相同的秩, 且  $\beta_3$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 求  $a, b$  的值.

易知  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关,  $\alpha_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$ , 即  $\alpha_3$  可由  $\alpha_1, \alpha_2$  线性表示, 所以向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的秩为 2, 且  $\alpha_1, \alpha_2$  是它的一个极大无关组, 由于向量组  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  与  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  具有相同的秩, 故  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性相关, 从而行列式

$$|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = 3b$$

又  $\beta_3$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 而  $\alpha_3$  可由  $\alpha_1, \alpha_2$  线性表示, 所以  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3$  线性相关, 于是

$$|\alpha_1, \alpha_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & b \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow a = 15.$$

**例 11.3.4 (2016 南京航空航天大学).** 设由向量组

$$(I) : \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ a \end{pmatrix}, (II) : \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) 求  $a$  的值, 使得向量组 (I) 线性相关;

(2) 求  $a$  的值, 使得向量组 (I) 不能由向量组 (II) 线性表示;

(3) 在题 (1) 和 (2) 同时成立的条件下, 将向量  $\gamma = (1, -2, -5)^\top$  用  $\beta_1, \beta_2, \alpha_3$  线性表示.

(1) 令  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , 则行列式  $\det A = 0$  等价于向量组 (I) 线性相关, 则

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & a & a \\ a & 4 & a \end{vmatrix} = a^2 - 2a - 8 = 0 \Rightarrow a = 4 \text{ 或 } -2.$$

(2) 令  $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , 由于向量组 (I) 不能由 (II) 线性表示, 说明向量组 (II) 线性相关, 如若不然, 则任一  $\alpha_i$ , 可由向量组 (II) 线性表示, 矛盾, 因此,  $\det B = 0$ , 则

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+2) = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ 或 } a = -2$$

当  $a = 1$  时,  $\alpha_3$  显然不能由  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) 线性表示, 符合题意; 当  $a = -2$  时, 将  $(B : A)$  化简为行阶梯形, 有

$$(B : A) = \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 4 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} r_2 - r_1 \\ r_3 + r_1 \\ r_3 \times (-\frac{1}{6}) \\ r_2 \times (-\frac{1}{3}) \\ r_1 - r_2 \end{array}} \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

由此可见,  $\alpha_3$  不能由  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 线性表示, 所以  $a = -2$  也符合题意.

(3) 若 (1) 和 (2) 同时成立, 则  $a = -2$ , 此时, 把  $(\beta_1, \beta_2, \alpha_3, \gamma)$  化为行最简形, 有

$$(\beta_1, \beta_2, \alpha_3 : \gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

因为初等行变换不改变列向量之间的线性关系, 所以  $\gamma = 2\beta_1 + \beta_2 + \alpha_3$ .

## 11.4 向量的内积与向量空间

### 11.4.1 向量的内积

**定义 11.4.1 (向量的内积).** 给定  $\mathbb{R}^n$  中的向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^\top, \quad \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^\top$$

则称  $\sum_{i=1}^n a_i b_i$  为向量  $\alpha$  与  $\beta$  的内积, 记为  $(\alpha, \beta)$ , 即  $(\alpha, \beta) = \alpha^\top \beta = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ .

内积具有下列性质:

$$(1) (\alpha, \beta) = (\beta, \alpha);$$

$$(2) (k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta);$$

$$(3) (\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma);$$

$$(4) (\alpha, \alpha) \geq 0, \text{ 当且仅当 } \alpha = \mathbf{0} \text{ 时, 等号成立.}$$

**定义 11.4.2 (向量的范数).** 设  $\alpha$  为  $\mathbb{R}^n$  中的任意向量, 将非负实数  $\sqrt{(\alpha, \alpha)}$  定义为  $\alpha$  的长度, 记为  $\|\alpha\|$ , 即若  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^\top$ , 则有

$$\|\alpha\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

向量的长度也称为向量的范数或模.

向量范数具有下列性质:

$$(1) \|\alpha\| \geq 0, \text{ 当且仅当 } \alpha = \mathbf{0} \text{ 时, 等号成立;}$$

$$(2) \text{对于任意向量 } \alpha \text{ 和任意实数 } k, \text{ 都有 } \|k\alpha\| = |k|\|\alpha\|;$$

$$(3) \text{对于任意 } n \text{ 维向量 } \alpha \text{ 和 } \beta, \text{ 有 } |(\alpha, \beta)| = |\alpha^\top \beta| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|.$$

**定义 11.4.3 (向量的正交).** 如果向量  $\alpha$  和  $\beta$  的内积等于零, 即  $(\alpha, \beta) = 0$ , 则称  $\alpha$  和  $\beta$  相互正交. 如果非零向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中的向量两两正交, 即  $(\alpha_i, \alpha_j) = 0 (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, s)$ , 则称该向量组为正交向量组.

正交向量具有下列性质:

- (1) 零向量与任何向量正交;
- (2) 与自己正交的向量只有零向量;
- (3) 正交向量组是线性无关的;
- (4) 对任意向量  $\alpha$  和  $\beta$ , 有三角不等式

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$$

当且仅当  $\alpha$  与  $\beta$  相互正交时, 有  $\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$ .

### 11.4.2 向量空间

**定义 11.4.4 (向量空间).** 设  $V$  是实数域  $\mathbb{R}$  上的  $n$  维向量组成的集合, 如果  $V$  关于向量的加法和数乘是封闭的, 即

若  $\alpha \in V, \beta \in V$ , 则  $\alpha + \beta \in V$ ; 若  $\alpha \in V, k \in \mathbb{R}$ , 则  $k\alpha \in V$ , 则称  $V$  是实数域  $\mathbb{R}$  上的向量空间. 显然, 实数域  $\mathbb{R}$  上的  $n$  维向量的全体构成一个向量空间, 记为  $\mathbb{R}^n$ .

**定义 11.4.5 (基与坐标).** 在向量空间  $\mathbb{R}^n$  中,  $n$  个线性无关的向量  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  称为  $\mathbb{R}^n$  的一组基. 若  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  为任一向量, 且

$$\alpha = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \dots + a_n\xi_n$$

则称  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $\alpha$  关于基  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  的坐标, 记作  $(a_1, a_2, \dots, a_n)^\top$ .

**定义 11.4.6 (基变换与坐标变换).** 设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  和  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  是  $\mathbb{R}^n$  的两组基, 且有

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) A$$

称  $A$  为由基  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  到基  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  的过渡矩阵, 两个基之间的过渡矩阵是可逆矩阵.

设  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  在基  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  和基  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  下的坐标分别为

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^\top, \quad (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$$

则有

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

称为坐标变换公式.

### 例 11.4.1. 若向量组

$$\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)^\top, \alpha_2 = (0, 1, -1, 2)^\top, \alpha_3 = (2, 3, 2+t, 4)^\top, \alpha_4 = (3, 1, 5, 9)^\top$$

不是 4 维向量空间  $\mathbb{R}^4$  的一个基, 求  $t$ .

以  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  为列构成矩阵  $A$ , 对  $A$  施行初等行变换:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2+t & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[i=2,3,4]{r_i-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & t & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & t+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

易知,  $t = -1$  时,  $\text{rank } A = 3 < 4$ , 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关, 故当  $t = -1$  时,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  不是向量空间  $\mathbb{R}^4$  的基.

### 例 11.4.2. 在线性空间 $P^{2 \times 2}$ 中定义线性变换 $A_1, A_2, A_3$ 为

$$A_1(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X, A_2(X) = X \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A_3(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (X \in P^{2 \times 2})$$

求  $A_1, A_2, A_3$  在基  $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$  下的矩阵.

因为

$$A_1(E_{11}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = aE_{11} + cE_{21}$$

$$A_1(E_{12}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = aE_{12} + cE_{22}$$

$$A_1(E_{21}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = bE_{11} + dE_{21}$$

$$A_1(E_{22}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = bE_{12} + dE_{22}$$

所以  $A_1$  在基  $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$  下的矩阵为  $\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$ , 同理可得  $A_2, A_3$  在基下的矩阵为  $\begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$  以

及  $\begin{pmatrix} a^2 & ac & ab & bc \\ ab & ad & b^2 & bd \\ ac & c^2 & ad & cd \\ bc & cd & bd & d^2 \end{pmatrix}$ .

**定义 11.4.7 ( $\mathbb{R}^n$  的标准正交基).** 向量空间  $\mathbb{R}^n$  中  $n$  个向量  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  满足

(1) 两两正交, 即  $\eta_i^\top \eta_j = 0, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$ ;

(2) 都是单位向量, 即  $\|\eta_i\| = 1, i = 1, 2, \dots, n$ ,

则称  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  为  $\mathbb{R}^n$  的一组标准正交基.

**定理 11.4.1 (Schmidt 正交化).** 标准正交基的求法.

(1) 给定一线性无关向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ , 由其生成等价的  $s$  个向量的正交向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  的

公式如下:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1, \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1, \\ \beta_3 &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2, \\ &\vdots \\ \beta_s &= \alpha_s - \frac{(\alpha_s, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_s, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_s, \beta_{s-1})}{(\beta_{s-1}, \beta_{s-1})} \beta_{s-1}.\end{aligned}$$

(2) 给定  $\mathbb{R}^n$  的任意一组基, 把它变为标准正交基的步骤如下:

- (a) 利用 Schmidt 正交化方法, 由这组基生成有  $n$  个向量的正交向量组;
- (b) 把正交向量组中每个向量标准化, 即单位化.

这样就得到  $\mathbb{R}^n$  的一组标准正交基. 这一过程称为标准正交化.

**例 11.4.3 (2021 数一).** 已知  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , 记  $\beta_1 = \alpha_1$ ,  $\beta_2 = \alpha_2 - k\beta_1$ ,  $\beta_3 = \alpha_3 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2$ , 若  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  两两正交, 则  $l_1, l_2$  依次为

- A.  $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$       B.  $-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$       C.  $\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$       D.  $-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$

法一: 因为  $\beta_1$  与  $\beta_2$  相互正交, 即

$$(1, 0, 1) \cdot (1 - k, 2, 1 - k) = 0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \beta_2 = \alpha_2 - \beta_1$$

同理  $\beta_1$  与  $\beta_3$  相互正交,  $\beta_2$  与  $\beta_3$  相互正交, 则

$$\begin{cases} (1, 0, 1) \cdot (3 - l_1, 1 - 2l_2, 2 - l_1) = 0 \\ (0, 2, 0) \cdot (3 - l_1, 1 - 2l_2, 2 - l_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = \frac{5}{2} \\ l_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

法二:  $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\alpha_3, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]} \beta_2 - \frac{[\alpha_3, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1$ , 因此  $l_1 = \frac{[\alpha_3, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} = \frac{5}{2}$ ,  $l_2 = \frac{[\alpha_3, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]} = \frac{1}{2}$ , 故选 A.

**定理 11.4.2 (两组标准正交基之间的过渡矩阵).** 设  $\mathbb{R}^n$  的两组标准正交基  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  到  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  的过渡矩阵为  $Q$ , 则存在下列关系

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) Q$$

且  $Q$  满足  $Q^\top Q = E$ , 即  $Q$  为正交矩阵.

**例 11.4.4 (2009 数一).** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是三维空间  $\mathbb{R}^3$  的一组基, 则由基  $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$  到基  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$  的过渡矩阵为

|  |  |  |   |
|--|--|--|---|
| A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ | B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ | C. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ | D. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ |
|--|--|--|---|

由  $(\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ , 因此

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因此选 A.

**例 11.4.5.** 设线性空间  $P^3$  的线性变换  $A$  定义如下:

$$A(a_1, a_2, a_3) = (2a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_2 + a_3)$$

(1) 求  $A$  在基  $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\varepsilon_3 = (0, 0, 1)$  下的矩阵  $A$ ;

(2) 求  $A$  在基  $\eta_1 = (1, 1, 0)$ ,  $\eta_2 = (0, 1, 1)$ ,  $\eta_3 = (0, 0, 1)$  下的矩阵  $B$ ;

(3) 求由基  $\varepsilon_{1,2,3}$  到  $\eta_{1,2,3}$  的过渡矩阵  $X$ , 并验证  $B = X^{-1}AX$ .

(1) 因为

$$A\varepsilon_1 = (2, 0, 0) = 2\varepsilon_1, A\varepsilon_2 = (-1, 1, 1) = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, A\varepsilon_3 = (0, -1, 1) = -\varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

所以  $A$  在基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  下的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

(2) 因为

$$A\eta_1 = (1, 1, 1) = \eta_1 + \eta_3, A\eta_2 = (-1, 0, 2) = -\eta_1 + \eta_2 + \eta_3, A\eta_3 = (0, -1, 1) = -\eta_2 + 2\eta_3$$

所以  $A$  在基  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  下的矩阵为  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

(3) 因为  $\eta_j = \sum_{i=1}^3 k_{ij} \varepsilon_i$   $j = 1, 2, 3$ , 于是

$$\eta_1 = k_{11}\varepsilon_1 + k_{21}\varepsilon_2 + k_{31}\varepsilon_3 \Rightarrow (k_{11}, k_{21}, k_{31}) = (1, 1, 0)$$

$$\eta_2 = k_{12}\varepsilon_1 + k_{22}\varepsilon_2 + k_{32}\varepsilon_3 \Rightarrow (k_{12}, k_{22}, k_{32}) = (0, 1, 1)$$

$$\eta_3 = k_{13}\varepsilon_1 + k_{23}\varepsilon_2 + k_{33}\varepsilon_3 \Rightarrow (k_{13}, k_{23}, k_{33}) = (0, 0, 1)$$

则  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 且  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**例 11.4.6.** 在  $P^4$  中, 求由  $\varepsilon_{1,2,3,4}$  到  $\eta_{1,2,3,4}$  的过渡矩阵, 并求向量  $\xi = (2, 1, 2, 1)$  对于基  $\eta_{1,2,3,4}$  的坐标, 其中

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0), \varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)$$

$$\eta_1 = (2, 1, 0, 1), \eta_2 = (0, 1, 2, 2), \eta_3 = (-2, 1, 2, 1), \eta_4 = (1, 3, 1, 2).$$

因为  $\eta_j = \sum_{i=1}^4 k_{ij} \varepsilon_i$ , 故由  $\varepsilon_{1,2,3,4}$  到  $\eta_{1,2,3,4}$  的过渡矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 因为  $\xi$  对于基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$  的坐标

为  $(2, 1, 2, 1)$ , 所以  $\xi$  对于基  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$  的坐标为

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{9}{2} & -5 \\ -1 & -1 & -2 & 3 \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{7}{2} & -4 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

即  $\xi$  对于基  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$  的坐标为  $(10, -4, 7, -4)$ .

**例 11.4.7 (2003 南京航空航天大学).** 已知  $\mathbb{R}^3$  的线性变换  $\sigma$  对于基

$$\varepsilon_1 = (-1, 0, 2)^\top, \varepsilon_2 = (0, 1, 1)^\top, \varepsilon_3 = (3, -1, -6)^\top$$

的像为  $\sigma(\varepsilon_1) = (-1, 0, 1)^\top, \sigma(\varepsilon_2) = (0, -1, 2)^\top, \sigma(\varepsilon_3) = (-1, -1, 3)^\top$ ,

(1) 求  $\sigma$  在基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  下的矩阵;

(2) 设  $x = (1, 1, 1)^\top$ , 求  $\sigma(x)$ ;

(3) 已知  $\sigma(x)$  在基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  下的坐标向量为  $(2, -4, -2)^\top$ , 求  $x$ ;

(4) 证明:  $\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$  是  $\mathbb{R}^3$  的基, 并求  $\sigma$  在该基下的矩阵.

(1) 考虑  $\mathbb{R}^3$  的自由基  $e_1 = (1, 0, 0)^\top, e_2 = (0, 1, 0)^\top, e_3 = (0, 0, 1)^\top$ , 由基  $e_1, e_2, e_3$  到  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  的过渡矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

即  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (e_1, e_2, e_3)P$ , 且向量组  $\sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  在基  $e_1, e_2, e_3$  下的矩阵表示为

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

即  $\sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (e_1, e_2, e_3)A$ , 于是, 有

$$\sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (e_1, e_2, e_3)A = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)P^{-1}A$$

因此,  $\sigma$  在基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  下的矩阵为

$$B = P^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2)  $\sigma(x) = \sigma(e_1, e_2, e_3)x = \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)P^{-1}x = (e_1, e_2, e_3)AP^{-1}x = (-7, -5, 17)^\top$ .

(3) 记  $y = (2, -4, -2)^\top$ , 则  $\sigma(x) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)y$ , 因为

$$\sigma(x) = \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)P^{-1}x = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)BP^{-1}x$$

所以  $BP^{-1}x = y$ , 其中  $BP^{-1} = \begin{pmatrix} 22 & -1 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 解非齐次线性方程组  $BP^{-1}x = y$ , 得  $x = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 18 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}$

其中  $k$  为任意常数.

(4) 记  $\alpha_1 = \varepsilon_1, \alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \alpha_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ , 易证,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 所以是  $\mathbb{R}^3$  的基, 显然, 由基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  到基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的过渡矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此,  $\sigma$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  下的矩阵为

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 9 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 12 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

## 第 12 章

### 线性方程组

“给我五个系数，我将画出一头大象，  
给我六个系数，大象将会摇动尾巴。”  
——柯西

线性方程组是由一组线性方程组成的方程系统，通常表示为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

其中， $a_{ij}$  是系数， $x_i$  是未知数， $b_i$  是常数。线性方程组的解就是一组满足所有方程的未知数的值。

解线性方程组的方法有很多种，其中比较常用的方法包括：

1. 高斯消元法：通过消元和回代的方式将线性方程组化为阶梯型或行阶梯型，从而求解未知数的值。
2. 矩阵方法：将线性方程组表示为矩阵形式，通过矩阵运算求解。可以使用高斯消元法、逆矩阵、Cramer 法则等方法。
3. Cramer 法则：通过行列式的性质，可以得到线性方程组的解。Cramer 法则适用于系数矩阵可逆的情况。
4. 矩阵的逆：如果系数矩阵可逆，可以通过矩阵的逆来求解线性方程组，即  $X = A^{-1}B$ ，其中  $X$  是未知数矩阵， $A$  是系数矩阵， $B$  是常数矩阵。
5. 矩阵的秩：利用矩阵的秩来判断线性方程组的解的情况。如果系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩且等于未知数的个数，那么方程组有唯一解；如果系数矩阵的秩小于增广矩阵的秩，那么方程组无解；如果系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩但小于未知数的个数，那么方程组有无穷解。

通过这些方法，我们可以有效地求解线性方程组，解决实际问题中的线性关系。线性方程组在数学、物理、工程、经济等领域都有着广泛的应用。

## 12.1 齐次线性方程组

### 12.1.1 Cramer 法则的应用

**定理 12.1.1 (Cramer 法则).** 如果数域  $K$  上的含有  $n$  个未知量  $n$  个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式  $D \neq 0$ , 那么此方程组有唯一解  $\left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \dots, \frac{D_n}{D}\right)$ , 其中  $D_j$  是把  $D$  中第  $j$  列的元素换成方程组的常数项  $b_1, b_2, \dots, b_n$  而成的行列式 ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

特别地, 当  $b_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$  时, 如果系数行列式  $D \neq 0$ , 那么方程组只有零解; 反之, 如果方程组有非零解, 那么必有  $D = 0$ .

**例 12.1.1 (2005 华中科技大学).** 解线性方程组  $\begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 = a^3 \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 = b^3 \\ x_1 + cx_2 + c^2x_3 = c^3 \end{cases}$  其中  $a, b, c$  是互不相等的常数.

利用 Cramer 法则求解, 因为系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a) \neq 0$$

所以方程组有唯一解, 又因为

$$D_1 = \begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & b & b^2 \end{vmatrix} = abcD, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 1 & b^3 & b^2 \\ 1 & c^3 & c^2 \end{vmatrix} = -(ab+ac+bc)D, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)D$$

因此  $x_1 = \frac{D_1}{D} = abc, x_2 = \frac{D_2}{D} = -ab-ac-bc, x_3 = \frac{D_3}{D} = a+b+c$ .

### 12.1.2 齐次方程组的一般解

**定理 12.1.2 (齐次解的线性组合).** 如果  $\xi_1, \xi_2$  是齐次线性方程组  $Ax = \mathbf{0}$  的解,  $k$  为任意数, 那么  $\xi_1 + \xi_2, k\xi_1$  都是该齐次线性方程组的解. 因此  $Ax = 0$  的解向量的线性组合仍是它的解向量.

**定理 12.1.3 (零解与非零解的充要条件).** 设齐次线性方程组  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  含有  $n$  个未知数和  $m$  个方程, 即系数矩阵  $\mathbf{A}:m \times n$  矩阵, 则  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  有非零解的充要条件是:

- (1)  $\text{rank}(\mathbf{A}) < n$ ;
- (2)  $\mathbf{A}$  的列向量组线性相关;
- (3)  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$  且  $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ ;
- (4) 当  $m = n$  时,  $|\mathbf{A}| = 0$ ;

亦即  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  只有零解的充要条件是:

- (1)  $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$ ;
- (2)  $\mathbf{A}$  的列向量组线性无关;
- (3) 当  $m = n$  时,  $|\mathbf{A}| \neq 0$ .

**定义 12.1.1 (齐次线性方程组的基础解系).** 设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ , 是齐次线性方程组  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解向量, 如果

- (1)  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  线性无关;
- (2) 方程组  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的任意一个解向量都可由  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ , 线性表示, 则称  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ , 是齐次线性方程组  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的一个基础解系.

**定理 12.1.4 (基础解系的个数).** 设  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  含有  $n$  个未知数, 则基础解系所含解向量的个数为  $n - \text{rank}(\mathbf{A})$ , 即自由未知量的个数.

**定义 12.1.2 (齐次方程组的通解).** 若  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  为齐次线性方程组  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的一个基础解系, 则  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的任意一个解向量都可由它们线性表示:

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_s\xi_s$$

称为齐次线性方程组  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的通解 (一般解或全部解), 其中  $k_1, k_2, \dots, k_s$  为任意常数.

**定义 12.1.3 (齐次线性方程组的解空间).** 齐次线性方程组  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解向量的全体构成的向量空间, 称为齐次线性方程组  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解空间. 设  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  含有  $n$  个未知数, 则解空间的维数为  $n - \text{rank}(\mathbf{A})$ .

如无特别说明, 我们总假设齐次线性方程组  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  含有  $n$  个未知数和  $m$  个方程, 即系数矩阵  $\mathbf{A}$  为  $m \times n$  矩阵.

**例 12.1.2.** 讨论当  $a, b$  取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}$$

有解? 无解? 并求出有解时的一般解.

对方程组的增广矩阵施行初等行变换, 化为简化的行阶梯形矩阵:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & b \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} r_2 \leftrightarrow r_3 \\ r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 5r_1 \\ r_1 - r_2 \\ r_3, 4 + r_2 \end{array}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b - 2 \end{array} \right)$$

(1) 当  $a \neq 0$  或  $b \neq 2$  时, 方程组无解;

(2) 当  $a = 0$  且  $b = 2$  时, 方程组有解, 此时, 易知方程组的一般解为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中  $k_1, k_2, k_3$  为任意常数.

**例 12.1.3.** 求  $\lambda$  的值, 使齐次线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda + 3)x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + (\lambda - 1)x_2 + x_3 = 0 \\ 3(\lambda + 1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda + 3)x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解, 并求出其一般解.

方程组的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda - 1 & 1 \\ 3\lambda + 3 & \lambda & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 1)$$

所以  $\lambda = 0$  或  $\lambda = 1$  时齐次方程组有非零解, 进一步, 当  $\lambda = 0$  时, 对方程组的系数矩阵施行初等行变换, 得  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

此时, 方程的一般解为  $\mathbf{x} = k(-1, 1, 1)$ ; 当  $\lambda = 1$  时, 系数矩阵可化为  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 于是, 可求得方程的一般解为  $\mathbf{x} = k(-1, 2, 1)$ , 其中  $k$  为任意常数.

**例 12.1.4.** 设向量  $\alpha = (1, 2, 1)^\top$ ,  $\beta = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)^\top$ ,  $\gamma = (0, 0, 8)^\top$ , 记

$$\mathbf{A} = \alpha\beta^\top, \mathbf{B} = \beta^\top\alpha$$

求线性方程组  $2\mathbf{B}^2\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{A}^4\mathbf{x} + \mathbf{B}^4\mathbf{x} + \gamma$ .

由题意可知,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, \frac{1}{2}, 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, \frac{1}{2}, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

于是

$$\begin{aligned} A^2 &= (\alpha\beta^\top)(\alpha\beta^\top) = \alpha(\beta^\top\alpha)\beta^\top = (\beta^\top\alpha)\alpha\beta^\top = 2A \\ A^4 &= (A^2)^2 = (2A)^2 = 4A^2 = 8A \end{aligned}$$

代入方程组, 得

$$16Ax = 8Ax + 16x + \gamma \Rightarrow (A - 2E_3)x = \frac{1}{8}\gamma \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}x = (0, 0, 1)^\top$$

则有增广矩阵  $M = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}$ , 并对  $M$  实行初等行变换, 有

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 \times (-1) \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

所以线性方程组的通解为

$$(x_1, x_2, x_3)^\top = k(1, 2, 1)^\top + \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)^\top, k \in \mathbb{R}.$$

### 12.1.3 齐次方程组的基础解系

**例 12.1.5 (2005 南开大学).** 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_2 + ax_3 + bx_4 = 0 \\ -x_1 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ ax_1 + cx_2 - ex_4 = 0 \\ bx_1 + dx_2 - ex_3 = 0 \end{cases}$$

的一般解以  $x_3, x_4$  为未知量,

- (1) 求  $a, b, c, d, e$  满足的条件;
- (2) 求齐次线性方程组的基础解系.

(1) 对方程组的系数矩阵施行初等行变换, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a & b \\ -1 & 0 & c & d \\ a & c & 0 & -e \\ b & d & -e & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c & -d \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & bc - e - ad & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ad - e - bc \end{pmatrix}$$

显然, 欲使方程组的一般解以  $x_3, x_4$  为自由未知量, 必需  $\begin{cases} bc - ad - e = 0 \\ ad - bc - e = 0 \end{cases}$ , 即  $\begin{cases} ad = bc \\ e = 0 \end{cases}$ .

(2) 当  $a, b, c, d, e$  满足 (1) 的条件时, 根据上述初等变换结果可得方程组的基础解系为

$$\xi_1 = (c, -a, 1, 0)^\top, \xi_2 = (d, -b, 0, 1)^\top.$$

**例 12.1.6 (2005 西安电子科技大学).** 设四元齐次线性方程组为

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

已知另一四元齐次线性方程组 (II) 的基础解系为

$$\alpha_1 = (2, -1, a+2, 1)^\top, \alpha_2 = (-1, 2, 4, a+8)^\top$$

(1) 求方程组 (I) 的基础解系;

(2) 问当  $a$  为何值时, 方程组 (I) 与 (II) 有非零公共解? 在有非零公共解时, 求出全部非零公共解.

(1) 方程组 (I) 的系数矩阵为  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ , 可用初等行变换化为  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ , 故 (I) 的基础解系为  $\beta_1 = (5, -3, 1, 0)^\top, \beta_2 = (-3, 2, 0, 1)^\top$ .

(2) 显然, 方程组 (I) 和方程组 (II) 有非零公共解等价于

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = k_3\alpha_1 + k_4\alpha_2$$

其中  $k_1$  与  $k_2$  不同时为 0, 这归结于关于  $k_i, i = 1, 2, 3, 4$  的齐次线性方程组

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 - k_3\alpha_1 - k_4\alpha_2 = 0 \quad (\text{III})$$

有非零解, 且  $k_1, k_2$  不同时为零, 对 (III) 的系数矩阵施行初等行变换, 得

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ 0 & 0 & a+1 & -a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

可见, 当  $a \neq -1$  时,  $\text{rank } A = 4$ , 方程组 (III) 仅有零解; 当  $a = -1$  时,  $\text{rank } A = 2$  方程组 (III) 有非零解, 其通解为

$$k = c_1(1, 1, 1, 0) + c_2(4, 7, 0, 1)$$

注意到  $\begin{cases} k_1 = c_1 + 4c_2 \\ k_2 = c_1 + 7c_2 \end{cases}$  所以  $k_1, k_2$  同时为零当且仅当  $c_1, c_2$  同时为零, 综上所述, 当且仅当  $a = -1$  时, 方程组 (I)

和方程组 (II) 有非零公共解, 且全部非零公共解为  $k_1 + \beta_1 + k_2\beta_2$ , 其中  $k_1, k_2$  取不同时为零的任意常数.

## 12.2 非齐次线性方程组

### 12.2.1 方程组与行列式

**例 12.2.1.** 已知线性方程组  $\begin{cases} ax_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 = 2 \end{cases}$  有解, 其中  $a, b$  为常数, 若  $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 4$ ,

求  $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}$ .

设  $x$  的系数矩阵为  $A, (1, 0, 0, 2)^\top = b$ , 因为方程组有解, 则  $\text{rank}(A, b) = \text{rank}(A)$ , 由于  $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ , 所以  $\text{rank } A \geq 3$ , 又因为  $A_{4 \times 3}$ , 所以  $\text{rank } A \leq 3$ , 于是

$$\text{rank } A = 3 \Rightarrow \text{rank}(A, b) = 3 \Rightarrow \det(A, b) = 0$$

对行列式  $\det(A, b)$  按最后一列展开, 得

$$\det(A, b) = -\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = 8.$$

## 12.2.2 线性相关与线性无关

线性无关

**例 12.2.2 (2009 数一).** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,

(1) 求满足  $A\xi_2 = \xi_1$ ,  $A^2\xi_3 = \xi_1$  的所有向量  $\xi_2$ ,  $\xi_3$ ;

(2) 对 (1) 中的任意向量  $\xi_2$ ,  $\xi_3$ , 证明:  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  线性无关.

(1) 对矩阵  $(A, \xi_1)$  施行初等行变换, 得

$$(A, \xi_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & : & -1 \\ -1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & -4 & -2 & : & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & : & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & : & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}$$

由此可解得  $\xi_2 = \left( -\frac{1}{2} + \frac{k}{2}, \frac{1}{2} - \frac{k}{2}, k \right)^\top$ , 其中  $k$  为任意常数, 再对矩阵  $(A^2, \xi_1)$  施行初等行变换, 得

$$(A^2, \xi_1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & : & -1 \\ -2 & -2 & 0 & : & 1 \\ 4 & 4 & 0 & : & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & : & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}$$

故可解得  $\xi_3 = \left( -\frac{1}{2} - a, b \right)^\top$ , 其中  $a, b$  为任意常数.

(2) 由 (1) 的结果, 有

$$|\xi_1, \xi_2, \xi_3| = \begin{vmatrix} -1 & \frac{k-1}{2} & -\frac{1}{2}-a \\ 1 & \frac{1-k}{2} & a \\ -2 & k & b \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{r}_1+r_2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1-k}{2} & a \\ -2 & k & b \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

所以  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  线性无关.

## 12.2.3 非齐次线性方程组解的讨论

方程组无解的充要条件

**例 12.2.3 (2000 数一).** 已知方程组  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  无解, 求  $a$ .

方程组无解的充要条件是  $\text{rank } A \neq \text{rank } \bar{A}$ , 故应对增广矩阵作初等行变换, 由

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & : & 3 \\ 1 & a & -2 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{r}_2-2\text{r}_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 1 \\ 0 & -1 & a & : & 1 \\ 0 & a-2 & -3 & : & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{r}_3+(a-2)\times\text{r}_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 1 \\ 0 & -1 & a & : & 1 \\ 0 & 0 & a^2-2a-3 & : & a-3 \end{pmatrix}$$

可知, 若  $a = -1$ , 则  $\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 1 \\ 0 & -1 & -1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & : & -4 \end{pmatrix}$ , 于是  $\text{rank } A = 2, \text{rank } \bar{A} = 3$ , 从而方程组无解, 因此  $a = -1$ .

**例 12.2.4 (2016 南京大学).** 讨论当  $a, b$  为何值时, 线性方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{array} \right.$$

有解? 无解? 并求出有解时的一般解.

对方程组的增广矩阵施行初等行变换, 化为简化的行阶梯形矩阵:

$$(A : B) \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - 3r_1 + r_3, r_4 - 5r_1 + r_3} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b - 2 \end{array} \right)$$

(1) 当  $a \neq 0$  或  $b \neq 2$  时, 方程组无解;

(2) 当  $a = 0$  且  $b = 2$  时, 方程组有解, 此时, 方程组的一般解为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中  $k_1, k_2, k_3$  为任意常数.

### 方程组解的结构与通解

**例 12.2.5.** 已知  $\xi_1 = (-9, 1, 2, 11)^\top, \xi_2 = (1, -5, 13, 0)^\top, \xi_3 = (-7, -9, 24, 11)^\top$  是方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 x_1 + 7x_2 + a_3 x_3 + x_4 = d_1 \\ 3x_1 + b_2 x_2 + 2x_3 + 2x_4 = d_2 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{array} \right.$$

的解, 求方程组的通解.

只要知道  $\text{rank } A$ , 算出  $n - \text{rank } A$  就知道解的结构, 因为矩阵  $A = \begin{pmatrix} a_1 & 7 & a_3 & 1 \\ 3 & b_2 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$  中有二阶子式  $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$ , 所以  $\text{rank } A \geq 2$ , 又

$$\mathbf{x}\xi_1 - \mathbf{x}\xi_2 = (-10, 6, -11, 11)^\top, \quad \mathbf{x}\xi_1 - \mathbf{x}\xi_3 = (-2, 10, -22, 0)^\top$$

是齐次方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的两个线性无关的解, 而有

$$4 - \text{rank } A \geq 2 \Rightarrow \text{rank } A \leq 2$$

从而得  $\text{rank } A = 2$ , 所以方程组的通解为  $\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix}, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ .

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

**例 12.2.6 (2014 数一).** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $E$  为 3 阶矩阵,

(1) 求方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的一个基础解系;

(2) 求满足  $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$  的所有矩阵  $\mathbf{B}$ .

(1) 对矩阵  $\mathbf{A}$  作初等行变换化为行最简形, 有

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1-4r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{r_2+r_3}{r_1+2r_2-3r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

因  $n - \text{rank } \mathbf{A} = 4 - 3 = 1$ , 令  $x_4 = 1$ , 则有  $x_3 = 3, x_2 = 2, x_1 = -1$ , 因此基础解系为  $\eta = (-1, 2, 3, 1)^T$ .

(2)  $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$  中  $\mathbf{B}$  的列向量其实是三个非齐次线性方程组

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的解, 由于这三个方程组的系数矩阵是相同的, 所以令  $\bar{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}, \mathbf{E})$  作初等行变换,

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{r_3-r_1-4r_2}{r_1+2r_2-3r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & : & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & : & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

由此解得三个方程组的通解

$$(-2, -1, -1, 0)^T + k_1\eta, \quad (6, -3, -4, 0)^T + k_2\eta, \quad (-1, 1, 1, 0)^T + k_3\eta$$

$$\text{因此 } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2-k_1 & 6+2k_2 & -1-k_3 \\ -1+2k_1 & -3+2k_2 & 1+2k_3 \\ -3+3k_1 & -4+3k_2 & 1+3k_2 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}, \forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$

## 12.3 方程组的同解与公共解

### 12.3.1 方程组的同解

线性方程组的同解性

**定义 12.3.1 (线性方程组的同解性).** 线性方程组有下列三种变换, 称为线性方程组的初等变换:

- (1) 换法变换, 交换某两个方程的位置;
- (2) 倍法变换, 某个方程的两端同乘以一个非零常数;
- (3) 消法变换, 把一个方程的若干倍加到另一个方程上去.

在线性方程组的三种初等变换之下, 线性方程组的同解性不变.

常见的同解方程组形式:

- (1) 设  $\mathbf{A}$  为  $m \times n$  矩阵,  $\mathbf{P}$  为  $m$  阶可逆矩阵, 则  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  与  $\mathbf{PAx} = \mathbf{0}$  为同解方程组,  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  与  $\mathbf{PAx} = \mathbf{Pb}$  为同解方程组.
- (2) 设  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶实矩阵,  $\mathbf{A}^\top$  为矩阵  $\mathbf{A}$  的转置, 则  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  与  $\mathbf{A}^\top \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  为同解方程组.
- (3) 设  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶实对称矩阵, 则  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  与  $\mathbf{A}^2 \mathbf{x} = \mathbf{0}$  为同解方程组.

有关两个方程组的公共解:

- (1) 由通解表达式相等求公共解此类题目一般所给条件为方程组 (I) 的基础解系及方程组 (II) 的一般表示式. 这时一般只需把方程组 (I) 的通解代入方程组 (II) 即可求得两个方程组的公共解.
- (2) 由两个方程组合并为一个新的方程组求公共解此类题目一般所给条件为方程组 (I)、(II) 的一般表示式. 这时只须把两个方程组合并为方程组 (III), 则方程组 (III) 的通解即为方程组 (I)、(II) 的公共解.

**定理 12.3.1 (同解与秩的等价形式).** 若  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  与  $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  同解, 它的充要条件为

$$\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank } \mathbf{B} = \text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

**定理 12.3.2.** 若  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解都是  $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解, 且  $\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank } \mathbf{B}$ , 则  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  与  $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  同解.

**例 12.3.1.** 今有物不知数, 三三数之剩一, 五五数之剩二, 七七数之剩三, 问: 物几何?

设此物体个数为  $z$ , 三三数的次数为  $x_1$ , 五五数的次数为  $x_2$ , 七七数的次数为  $x_3$ , 由题意可得

$$\begin{cases} z - 3x_1 = 1 \\ z - 5x_2 = 2 \\ z - 7x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

对增广矩阵  $\bar{\mathbf{A}}$  做初等行变换, 有

$$\bar{\mathbf{A}} \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \times \frac{1}{3}]{r_3 \times \frac{1}{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

方程组的同解方程组为  $\begin{cases} z = 7x_3 + 3, \\ x_1 = \frac{7}{3}x_3 + \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{7}{5}x_3 + \frac{1}{5} \end{cases}$  因为  $z, x_1, x_2, x_3$  必须为非负整数, 则所有解为

$$\begin{cases} z = 157 + 105c \\ x_1 = 52 + 35c \\ x_2 = 31 + 21c \\ x_3 = 22 + 15c \end{cases} \quad c = 0, 1, 2, \dots,$$

故此物的个数为  $157 + 105c$  ( $c = 0, 1, 2, \dots$ ).

**例 12.3.2 (2015 华南理工大学).** 已知齐次线性方程组

$$(I) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases} \quad (II) : \begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

同解, 求  $a, b, c$ .

**法一:** 注意到齐次方程组 (II) 的未知量个数大于方程的个数, 所以 (II) 必有非零解, 由题意设 (I) 与 (II) 同解, 因此 (I) 也有非零解, 对 (I) 的系数矩阵  $\mathbf{A}$  做初等行变换, 得

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

因为  $\text{rank } A < 3$ , 所以  $a = 2$ , 可求得方程组 (I) 的一个基础解系为  $\xi = (1, 1, -1)^\top$ , 将  $\xi$  代入 (II) 可求得  $\begin{cases} b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$   
或  $\begin{cases} b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$ , 当  $b = 0, c = 1$  时, (II) 的系数矩阵  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\text{rank } B < \text{rank } A$ , 可见方程组 (II) 与 (I) 不同  
解; 当  $b = 1, c = 2$  时, (II) 的系数矩阵  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 所以 (II) 与 (I) 同解, 综上所述, 当且仅当  $a = 2, b = 1, c = 2$  时, 方程组 (I) 与方程组 (II) 同解.

法二: 因为 (I) 与 (II) 同解, 所以  $\text{rank } A = \text{rank } B = \text{rank} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ , 其中  $A, B$  为方程组 (I) 和 (II) 的系数矩阵, 因为  $\text{rank } B \leq 2$ , 所以  $\text{rank } A \leq 2 \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow a = 2$ , 当  $a = 2$  时,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 那么

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & c \\ 2 & b^2 & c+1 \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-1 & c-2 \\ 0 & b^2-2 & c-3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{cases} b-1 = c-2 \\ b^2-2 = c-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} b=1 \\ c=2 \end{cases}$$

当  $b = 0, c = 1$  时,  $\text{rank } B = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 \neq 2$ , 故舍去; 当  $b = 1, c = 2$  时,  $\text{rank } B = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2$ , 因此  $a = 2, b = 1, c = 2$ .

### 12.3.2 方程组的公共解

**定理 12.3.3 (公共解的交集).** 设  $A_{m \times n}, B_{s \times n}$  满足  $A_{m \times n}x = \mathbf{0}$  与  $B_{s \times n}x = \mathbf{0}$  有公共解, 其公共解也满足

$$\begin{pmatrix} A_{m \times n} \\ B_{s \times n} \end{pmatrix}x = \mathbf{0}.$$

**例 12.3.3.** 求  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_2 + 2x_4 = 2 \end{cases}$  与  $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$  的公共解.

对方程组的增广矩阵施行初等行变换将其转变为最简行阶梯形, 有

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} r_3 - r_1 \\ r_3 + \frac{2}{3}r_2 \\ r_4 - \frac{1}{3}r_2 \end{array}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} r_4 - r_3 \\ r_3 \times \frac{3}{4} \\ r_2 \times \frac{1}{3} \\ r_1 - r_2 \end{array}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} r_2 - \frac{2}{3}r_3 \\ r_1 + \frac{2}{3}r_3 \end{array}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

即  $\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_4 = \frac{5}{2} \end{cases}$ , 令  $x_3 = \xi$  (没有下划线), 则公共解为  $\left( 2 - \xi, -1, \xi, \frac{5}{2} \right)^\top$ .

**例 12.3.4.** 已知两个四元齐次线性方程组 (I), (II) 其中 (I) 的一个基础解系为

$$(1, -2, 1, 3)^\top, (3, -2, -1, 3)^\top, (II) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

若 (I) 与 (II) 有非零公共解, 求所有公共解.

由题意可知,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} k_1 + 3k_2 = x_1 \\ -2k_1 - 2k_2 = x_2 \\ k_1 - k_2 = x_3 \\ 3k_1 + 3k_2 = x_4 \end{cases}$$

那么有矩阵

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & : & 1 & \\ -2 & -2 & : & & 1 \\ 1 & -1 & : & & \\ 3 & 3 & : & & \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} r_2+2r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-3r_1 \\ r_3+r_2 \\ r_4+\frac{3}{2}r_2 \end{array}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & : & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & : & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

由上式三四行可知方程组 (III)  $\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 = 0 \\ \frac{3}{2}x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$  与方程组 (I) 同解, 又因为 (I) 与 (II) 有非零公共解, 即 (III) 与 (II) 有非零公共解, 那么

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & a & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} r_3-r_1 \\ r_4-2r_1 \\ r_2 \times \frac{2}{3} \\ r_3+2r_2 \\ r_4-r_2 \end{array}} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & a-2 & \frac{4}{3} \end{array} \right)$$

因为矩阵  $\mathbf{A}$  有非零解, 所以  $\text{rank } \mathbf{A} < 4$ , 即  $a-2=0$ , 解得  $a=2$ , 所以矩阵  $\mathbf{A} = \left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ , 那么易得公共解.

## 第 13 章

### 矩阵的特征值与特征向量

“浅薄的学识使人远离神，广博的学识使人接近神。”

——高斯

矩阵的特征值与特征向量是线性代数中非常重要的概念，它们在矩阵的性质和应用中起着关键的作用。

1. 特征值：对于一个方阵  $A$ ，如果存在一个标量  $\lambda$  和一个非零向量  $\alpha$ ，使得  $A\alpha = \lambda\alpha$ ，则称  $\lambda$  是矩阵  $A$  的特征值， $\alpha$  是对应于特征值  $\lambda$  的特征向量。特征值和特征向量总是成对出现的。
2. 特征向量：特征向量是指在矩阵作用下，只发生缩放而不改变方向的非零向量。特征向量描述了矩阵在某些方向上的变化规律。

3. 求解特征值和特征向量：要求解一个矩阵的特征值和特征向量，通常需要解特征方程  $(A - \lambda I)\alpha = 0$ ，其中  $A$  是矩阵， $\lambda$  是特征值， $\alpha$  是特征向量， $I$  是单位矩阵。解特征方程可以得到特征值，然后将特征值代入原方程组求解对应的特征向量。

4. 性质和应用：特征值和特征向量在矩阵的对角化、矩阵的特征分解、矩阵的谱分解等方面有着重要的应用。通过特征值和特征向量，我们可以对矩阵进行简化和分解，更好地理解矩阵的性质和结构。

5. 实际应用：特征值和特征向量在物理学、工程学、计算机科学、统计学等领域都有着广泛的应用，例如在振动分析、图像处理、信号处理、主成分分析等方面。

特征值和特征向量是矩阵理论中非常重要的概念，对于理解和分析矩阵的性质和行为至关重要。深入了解特征值和特征向量可以帮助我们更好地处理线性代数和相关领域的问题。

#### 13.1 矩阵的特征值与特征向量

矩阵的特征值与特征向量是线性代数中的重要概念，它们在矩阵的可对角化问题、概率统计、物理、工程和经济学等领域有广泛应用。特征值代表了矩阵作用下的伸缩性，而特征向量则是在线性变换下保持方向不变的向量。

### 13.1.1 矩阵的特征值

**定理 13.1.1 (特征多项式展开定理).** 设  $\mathbf{A}$  是  $n$  阶矩阵, 则  $\mathbf{A}$  的特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^k a_k \lambda^{n-k} + \cdots + (-1)^n a_n$$

其中  $a_k$  是  $\mathbf{A}$  的所有  $k$  阶主子式之和, 即

$$a_k = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \begin{vmatrix} a_{j_1 j_1} & \cdots & a_{j_1 j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j_k j_1} & \cdots & a_{j_k j_k} \end{vmatrix}$$

特别地  $a_1 = \text{tr } \mathbf{A}$ ,  $a_n = \det \mathbf{A}$ . 对于常见的 3 阶矩阵有

$$f(\lambda) = \lambda^3 - \text{tr } \mathbf{A} \cdot \lambda^2 + \left( \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda - \det \mathbf{A}.$$

图 13.1.1 是  $a_2$  的形象化表达.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

图 13.1.1

**定理 13.1.2 (特征值的积与和).** 设  $n$  阶方阵  $\mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 则

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \quad \text{tr } \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

**例 13.1.1.** 设  $\mathbf{A}$  是 3 阶矩阵,  $\mathbf{A}$  的特征值为  $1, 2, -1$ , 如果  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} + 3\mathbf{E}$ , 求  $|\mathbf{B}|$ .

易求得  $\mathbf{B}$  的特征值分别是  $2, 3, 6$ , 那么  $\det \mathbf{B} = 2 \times 3 \times 6 = 36$ .

**定理 13.1.3 (逆矩阵的特征值).** 矩阵可逆当且仅当其特征值都不等于零, 若  $\lambda$  是可逆矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值, 则  $\frac{1}{\lambda}$  是逆矩阵  $\mathbf{A}^{-1}$  的特征值.

**定理 13.1.4 (秩一矩阵的特征值).** 若  $n$  阶方阵  $\mathbf{A}$  满足  $\text{rank } \mathbf{A} = 1$ , 那么矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值为  $\text{tr } \mathbf{A}$  及  $n-1$  重 0 根.

**例 13.1.2.** 已知  $A$  是 3 阶矩阵,  $E$  是 3 阶单位矩阵, 如果  $A, A - 2E, 3A + 2E$  均不可逆, 求  $|A + E|$ .

易知矩阵  $A$  的特征值分别为  $0, 2, -\frac{2}{3}$ , 那么  $\det(A + E) = 1 \times 3 \times \frac{1}{3} = 1$ .

**定理 13.1.5 (伴随矩阵的特征值 A).** 若  $A$  为  $n$  阶可逆矩阵, 且  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 是  $A$  的全部特征值, 则  $\frac{|A|}{\lambda_i}$  是  $A^*$  的全部特征值; 若  $A$  为  $n$  阶不可逆矩阵, 则  $A^*$  有  $n-1$  个特征值为 0, 另一个特征值为  $\text{tr } A^*$ .

**定理 13.1.6 (伴随矩阵的特征值 B).** 设  $n$  阶方阵  $A$  的特征值为  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), 则  $A^*$  的  $n$  个特征值为  $\lambda_i^*$ , 则

$$\lambda_i^* = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \lambda_j \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

**例 13.1.3.** 设  $A$  为 3 阶矩阵, 特征值为  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ , 对应的线性无关的特征向量为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , 令  $P = (\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3)$ , 则  $P^{-1}A^*P$  等于

|  |   |   |   |
|--|---|---|---|
| A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | B. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ | C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | D. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ |
|--|---|---|---|

由  $P = (\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3)$ , 得  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)E_{31}(-1)E_{32}(1) := BE_{31}(-1)E_{32}(1)$ , 那么

$$\begin{aligned} P^{-1}A^*P &= (BE_{31}(-1)E_{32}(1))^{-1}A^*BE_{31}(-1)E_{32}(1) = E_{32}(-1)E_{31}(1)\text{diag}(2, 2, 1)E_{31}(-1)E_{32}(1) \\ &= E_{32}(-1)E_{31}(1)E_1(2)E_2(2)E_{31}(-1)E_{32}(1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因此选 D.

**例 13.1.4.** 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 只有两个线性无关的特征向量, 求矩阵  $A$  的特征值以及  $a$ .

由  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -a \\ -1 & \lambda - 3 & -5 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 2) + (\lambda - 2) = (\lambda - 2)^3 = 0$ , 于是特征值为  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ ,

因为  $n - \text{rank}(2E - A) = 2$ , 于是  $\text{rank}(2E - A) = 1$ , 进而解得  $a = -5$ .

**定理 13.1.7 (特征值不等式).** 若  $A$  的特征值按从小到大排列, 即  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ , 则

$$\lambda_1 x^\top x \leq x^\top Ax \leq \lambda_n x^\top x.$$

证 存在正交矩阵  $Q$ , 令  $x = Qy$ , 使得

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^\top Ax = y^\top Q^\top AQy = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

不妨设  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ , 有

$$\lambda_1 \sum_{k=1}^n y_k^2 \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 \leq \lambda_n \sum_{k=1}^n y_k^2$$

即

$$\lambda_1 x^\top x \leq x^\top Ax \leq \lambda_n x^\top x.$$

**定理 13.1.8 (行均和定理).** 若矩阵  $A$  的每行元素之和均为  $k$ , 则  $A$  有一特征值为  $k$ , 所对应特征向量为  $(1, 1, \dots, 1)^\top$ .

## 特征值在求解迭代方程中的应用

**例 13.1.5.** 给定 3 个数列  $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$  满足  $x_1 = -2, y_1 = 1, z_1 = -1$ , 且当  $n \geq 1$  有

$$x_{n+1} = 3x_n - 6y_n - z_n, \quad y_{n+1} = -x_n + 2y_n + z_n, \quad z_{n+1} = x_n + 3y_n - z_n$$

求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + y_n + z_n}{3^n + 5^n}$ .

$$\text{由 } \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - 6y_n - z_n \\ y_{n+1} = -x_n + 2y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + 3y_n - z_n \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} := A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \text{ 于是特征方程为}$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 1)(\lambda - 5)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -2$$

于是  $x_n + y_n + z_n = a \cdot 1^n + b \cdot 5^n + c \cdot (-2)^n$ , 且

$$\begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 = -2 + 1 - 1 = -2 = a + 5b - 2c \\ x_2 + y_2 + z_2 = -11 + 3 + 3 = -6 = a + 25b + 4c \\ x_3 + y_3 + z_3 = -53 + 19 - 4 = -38 = a + 125b - 8c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{2}{7} \\ c = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\text{于是 } x_n + y_n + z_n = -\frac{2}{7} \cdot 5^n + \frac{2}{7}(-1)^n \cdot 2^n, \text{ 那么 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{2}{7} \cdot 5^n + \frac{2}{7}(-1)^n \cdot 2^n}{3^n + 5^n} = -\frac{2}{7}.$$

**例 13.1.6 (2024 数一).** 已知数列  $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$  满足  $x_0 = -1, y_0 = 0, z_0 = 2$ , 且

$$\begin{cases} x_n = -2x_{n-1} + 2z_{n-1} \\ y_n = -2y_{n-1} - 2z_{n-1} \\ z_n = -6x_{n-1} - 3y_{n-1} + 3z_{n-1} \end{cases}$$

记  $\alpha_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ , 写出满足  $\alpha_n = A\alpha_{n-1}$  的矩阵  $A$ , 并求  $A^n$  及  $x_n, y_n, z_n$ .

由题设知,  $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$ , 即  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ , 由  $|\lambda E - A| = 0$  得  $\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$ , 解得  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$ , 那么, 当  $\lambda_1 = 0$  时, 对应的特征向量为  $\xi_1 = (1, -1, 1)^\top$ , 当  $\lambda_2 = 1$  时, 对应的特征向量为  $\xi_2 = (2, -2, 3)^\top$ , 当  $\lambda_2 = -2$  时, 对应的特征向量为  $\xi_3 = (1, -2, 0)^\top$ , 故存在可逆矩阵  $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ , 使得  $P^{-1}AP = \text{diag}(0, 1, -2) = \Lambda$ , 即  $A = P\Lambda P^{-1}$ , 那么

$$A^n = P\Lambda^n P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 + (-1)^{n+1} \cdot 2^n & -2 + (-1)^{n+1} \cdot 2^n & 2 \\ 4 + (-1)^n \cdot 2^{n+1} & 2 + (-1)^n \cdot 2^{n+1} & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

由  $\alpha_n = A\alpha_{n-1}$ , 那么  $\alpha_n = A^n\alpha_0 = \begin{pmatrix} -4 + (-1)^{n+1} \cdot 2^n & -2 + (-1)^{n+1} \cdot 2^n & 2 \\ 4 + (-1)^n \cdot 2^{n+1} & 2 + (-1)^n \cdot 2^{n+1} & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 + (-2)^n \\ -8 + (-2)^{n+1} \\ 12 \end{pmatrix}$ , 则  $x_n = 8 + (-2)^n, y_n = -8 + (-2)^{n+1}, z_n = 12$ .

### 13.1.2 矩阵的特征向量

**例 13.1.7.** 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = P^{-1}A^*P$ , 求  $B + 2E$  的特征值与特征向量.

设  $A$  的特征值为  $\lambda$ , 对应的特征向量为  $\xi$ , 即  $A\xi = \lambda\xi$ , 由于  $|A| = 7 \neq 0$ , 所以  $\lambda \neq 0$ , 于是有

$$A^*\xi = \frac{|A|}{\lambda}\xi, (B + 2E)P^{-1}\xi = \left(\frac{|A|}{\lambda} + 2\right)P^{-1}\xi$$

即  $\frac{|A|}{\lambda} + 2$  是  $B + 2E$  的特征值,  $P^{-1}\xi$  为对应的特征向量, 易求得  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 7$ , 属于  $\lambda_{1,2} = 1$  的特征向量为

$$\xi_1 = (-1, 1, 0)^T, \xi_2 = (-1, 0, 1)^T$$

属于  $\lambda_3$  的特征向量为  $\xi_3 = (1, 1, 1)^T$ , 因此,  $B + 2E$  的三个特征向量为  $9, 9, 3$ , 属于特征值 9 的两个线性无关的特征向量为

$$P^{-1}\xi_1 = (1, -1, 0)^T, P^{-1}\xi_2 = (-1, -1, 1)^T$$

属于特征值 3 的特征向量为  $P^{-1}\xi_3 = (0, 1, 1)^T$ .

**例 13.1.8.** 设  $A$  是线性空间  $P^3$  的线性变换, 已知

$$A(1, 0, 0) = (5, 6, -3), A(0, 1, 0) = (-1, 0, 1), A(0, 0, 1) = (1, 2, 1)$$

(1) 求  $A$  的全部特征值和特征向量;

(2) 问: 能否找到  $P^3$  的一组基, 使  $A$  在这组基下的矩阵为对角矩阵? 说明理由.

(1)  $A$  在基  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$  下的矩阵为  $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 那么  $A$  的特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 1 & -1 \\ -6 & \lambda & -2 \\ -3 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^3$$

所以  $A$  的特征值为 2, 对  $\lambda = 2$  求特征向量, 解齐次方程组

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -6x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

求得基础解系为:  $(1, 3, 0), (0, 1, 1)$ , 所以  $A$  的全部特征向量为  $k_1(1, 3, 0) + k_2(0, 1, 1)$ , 其中  $k_1, k_2$  为数域  $P$  中不全为零的任意数, 这些特征向量都属于特征值 2.

(2) 因为  $A$  只有 2 个线性无关的特征向量, 而  $P^3$  是 3 维线性空间, 所以找不到一组基, 使  $A$  在这组基下的矩阵为对角矩阵.

**例 13.1.9.** 设  $A$  是线性空间  $P^3$  的线性变换, 已知

$$A(1, 0, 0) = (8, -6, 3), A(1, 1, 0) = (14, -10, 6), A(1, 1, 1) = (8, -4, 5)$$

求  $A$  的全部特征值和特征向量, 并求  $P^3$  的一组基使  $A$  在这组基下的矩阵为对角矩阵.

因为

$$A(1, 0, 0) = (8, -6, 3) = 14(1, 0, 0) - 9(1, 1, 0) + 3(1, 1, 1)$$

$$A(1, 1, 0) = (14, -10, 6) = 24(1, 0, 0) - 16(1, 1, 0) + 6(1, 1, 1)$$

$$\mathbf{A}(1, 1, 1) = (8, -4, 5) = 12(1, 0, 0) - 9(1, 1, 0) + 5(1, 1, 1)$$

所以  $\mathbf{A}$  在基  $(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$  下的矩阵为  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 14 & 24 & 12 \\ -9 & -16 & -9 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{A}$  的特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 14 & -24 & -12 \\ 9 & \lambda + 16 & 9 \\ -3 & -6 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{r_2+3r_3}{r_1-4r_3}} \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -4\lambda + 8 \\ 0 & \lambda - 2 & 3\lambda - 6 \\ -3 & -6 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$$

对  $\lambda = -1$  解齐次方程组

$$\begin{cases} -15x_1 - 24x_2 - 12x_3 = 0 \\ 9x_1 + 15x_2 + 9x_3 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

得基础解系:  $(4, -3, 1)$ , 对应特征向量为  $4(1, 0, 0) - 3(1, 1, 0) + (1, 1, 1) = (2, -2, 1)$ , 所以属于特征值  $-1$  的全部特征向量为  $k(2, -2, 1)$ , 其中  $k$  为数域  $P$  中任一非零数;

对  $\lambda = 2$  解齐次方程组

$$\begin{cases} -12x_1 - 24x_2 - 12x_3 = 0 \\ 9x_1 + 18x_2 + 9x_3 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

得基础解系  $(-1, 0, 1), (0, -1, 2)$ , 对应于特征向量分别为

$$-(1, 0, 0) + (1, 1, 1) = (0, 1, 1) \text{ 及 } -(1, 1, 0) + 2(1, 1, 1) = (1, 1, 2)$$

所以属于特征值  $2$  的全部特征向量为  $k_1(0, 1, 1) + k_2(1, 1, 2)$ , 其中  $k_1, k_2$  为数域  $P$  不全为 0 的任意性, 于是以

$$(2, -2, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 2)$$

为基, 则  $\mathbf{A}$  在这组基下的矩阵为对角矩阵  $\text{diag}(-1, 2, 2)$ .

**例 13.1.10.** 设  $\mathbf{A}$  是 3 阶矩阵,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  是  $\mathbf{A}$  的 3 个不同特征值, 对应的特征向量分别为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ,

令  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ,

(1) 证明:  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$  不是  $\mathbf{A}$  的特征向量;

(2) 证明:  $\beta, A\beta, A^2\beta$  线性无关;

(3) 若  $A^3\beta = 2A\beta$ , 求  $\mathbf{A}$  的特征值;

(4) 在 (3) 的基础上证明:  $A\beta$  和  $A^2\beta$  是方程组  $(A^2 - 2E)x = \mathbf{0}$  的基础解系.

(1) 反证法: 假设  $\lambda$  是  $\mathbf{A}$  的特征值, 且对应的特征向量为  $\beta$ , 那么  $A\beta = \lambda\beta$ , 即

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) &= \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ \Rightarrow A\alpha_1 + A\alpha_2 + A\alpha_3 &= \lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2 + \lambda\alpha_3 \\ \Rightarrow \lambda_1\alpha_1 + \lambda_1\alpha_2 + \lambda_1\alpha_3 &= \lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2 + \lambda\alpha_3 \end{aligned}$$

即  $\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda)\alpha_1 + (\lambda_2 - \lambda)\alpha_2 + (\lambda_3 - \lambda)\alpha_3 = 0$ , 即  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ , 但这与题意矛盾, 故假设不成立, 即  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$  不是  $\mathbf{A}$  的特征向量.

(2) 要证:  $\beta, A\beta, A^2\beta$  线性无关, 即证:  $k_1\beta + k_2A\beta + k_3A^2\beta = \mathbf{0}$ , 其中  $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ , 为此, 则有

$$k_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + k_2(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3) + k_3(\lambda_1^2\alpha_1 + \lambda_2^2\alpha_2 + \lambda_3^2\alpha_3) = \mathbf{0}$$

为使等式成立, 则有

$$\begin{cases} k_1 + k_2\lambda_1 + k_3\lambda_1^2 = 0 \\ k_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_2^2 = 0 \\ k_1 + k_2\lambda_3 + k_3\lambda_3^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}$$

该行列式为 Vandermonde 行列式, 则其值为  $(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) \neq 0$ , 故  $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ , 因此  $\beta, A\beta, A^2\beta$  线性无关.

(3) 设矩阵  $B \sim A$ , 且  $\exists P$  使得  $P^{-1}AP = B$ , 即  $AP = PB$ , 不妨取  $P = (\beta, A\beta, A^2\beta)$ , 因此

$$AP = (A\beta, A^2\beta, A^3\beta) \xrightarrow{A^3\beta=2A\beta} (A\beta, A^2\beta, 2A\beta) = (\beta, A\beta, A^2\beta) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

因此  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 则特征值方程为  $|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -2 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 2) = 0$ , 因此特征值为  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sqrt{2}, \lambda_3 = -\sqrt{2}$ .

(4) 为证:  $A\beta$  和  $A^2\beta$  是方程组  $(A^2 - 2E)x = \mathbf{0}$  的基础解系, 需分别证:

(i)  $A\beta$  和  $A^2\beta$  是方程组  $(A^2 - 2E)x = \mathbf{0}$  的解;

当  $x = A\beta$  时, 有  $(A^2 - 2E)A\beta = A^3\beta - 2A\beta \xrightarrow{A^3\beta=2A\beta} \mathbf{0}$  成立;

当  $x = A^2\beta$  时, 有  $(A^2 - 2E)A^2\beta = A^4\beta - 2A^2\beta = A(A^3\beta - 2A\beta) \xrightarrow{A^3\beta=2A\beta} \mathbf{0}$  成立;

(ii)  $A\beta$  和  $A^2\beta$  线性无关;

由 (2) 可知  $\beta, A\beta, A^2\beta$  线性无关 (整体无关, 部分必无关; 部分相关, 整体必相关), 故  $A\beta$  和  $A^2\beta$  线性无关;

(iii)  $S = n - \text{rank}(A^2 - 2E)$ , 其中  $S = 2$ .

因为  $P^{-1}AP = \Lambda_1$ , 即  $A$  能相似对角化, 故  $P^{-1}(A^2 - 2E)P$  亦能相似对角化为矩阵  $\Lambda_2$ , 又因为  $(A^2 - 2E)$  的特征值为  $2, 0, 0$ , 那么  $\text{rank}(A^2 - 2E) = 1$ , 且  $n = 3$ , 故  $S = n - \text{rank}(A^2 - 2E)$  成立,

综上所述,  $A\beta$  和  $A^2\beta$  是方程组  $(A^2 - 2E)x = \mathbf{0}$  的基础解系.

## 13.2 矩阵相似与可对角化

### 13.2.1 矩阵的相似

**定义 13.2.1** (矩阵的相似). 设  $A, B$  是  $n$  阶矩阵, 如果存在  $n$  阶可逆矩阵  $P$ , 使得

$$P^{-1}AP = B$$

则称矩阵  $A$  与  $B$  相似, 记为  $A \sim B$ .

**定理 13.2.1** (矩阵相似的必要条件). 若  $A$  与  $B$  是相似的, 则由相似矩阵的性质可得:

表 13.1: 矩阵相似的必要条件

(1)  $\det A = \det B$ . (2)  $\text{rank}(A) = \text{rank } B$ . (3)  $\text{tr } A = \text{tr } B$ . (4)  $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$ .

(5)  $kA \sim kB$ ,  $A^m \sim B^m$ ,  $f(A) \sim f(B)$ ,  $A^\top \sim B^\top$ ,  $A^{-1} \sim B^{-1}$ ,  $A^* \sim B^*$ .

**例 13.2.1.** 已知矩阵  $A \sim B$ , 其中  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $|A + E|$ .

因为  $A \sim B$ , 则  $|A + E| = |B + E| = -6$ .

**例 13.2.2.** 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  与  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$  相似, 求  $x$  与  $y$ .

因为  $A$  与  $B$  相似, 故具有相同的迹和相同的行列式, 故  $\begin{cases} x - 4 = 1 + y \\ 4x - 8 = -2y \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = -2.$

**例 13.2.3.** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $\Lambda = \text{diag}(1, 1, -3)$ , 则在  $A, B, C, D$  中与  $\Lambda$  相似的矩阵有

- A.  $A, C$       B.  $A, D$       C.  $B, C$       D.  $A, D$

矩阵相似有四个必要条件, 分别为: 秩相等, 迹相等, 行列式相等和特征多项式相等, 于是对于矩阵  $D$  因为  $\text{tr } D \neq \text{tr } \Lambda$ , 故排除选项  $B, D$ , 又因为矩阵相似对角矩阵等价于它的每一个特征值的重数与其对应的线性无关的特征向量个数相等, 对于矩阵  $B$ , 它的特征值显然是  $1, 1, -3$  与  $\Lambda$  相同, 但是对于  $\lambda = 1$  (二重),

$$n - \text{rank}(\lambda E - B) = 3 - 2 = 1 \neq 2 (\text{特征值重数})$$

因此矩阵  $B$  关于特征值 1 仅一个线性无关的特征向量, 矩阵  $B$  不能相似对角化为  $\Lambda$ , 排除选项  $C$ , 故选 A.

**例 13.2.4 (2013 数一).** 矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$  与  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  相似的充要条件为

- A.  $a = 0, b = 2$       B.  $a = 0, b$  为任意常数      C.  $a = 0, b = 0$       D.  $a = 2, b$  为任意常数

因为矩阵  $A$  是实对称矩阵, 矩阵  $B$  是对角矩阵, 则  $A$  与  $B$  相似的充要条件是  $A$  的特征值为  $2, b, 0$ , 因为 2 是  $A$  的特征值, 那么

$$|2E - A| = 0 \Rightarrow a = 0$$

当  $a = 0$  时,  $|\lambda E - A| = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - b)$  那么  $A$  的特征值为  $2, b, 0$ , 所以  $b$  为任意常数即可, 选 B.

**例 13.2.5 (2009 兰州大学).** 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ , 问  $a, b$  取何值时  $A$  与  $B$  相似? 并求可逆矩阵  $P$  使得  $P^{-1}AP = B$ .

法一: 由于  $A$  与  $B$  相似, 则它们的特征多项式相同, 所以  $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$ , 即

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - a & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - b \end{vmatrix}$$

得  $(\lambda + 1)(\lambda^2 - (3 + a)\lambda + 3a - 8) = (\lambda + 1)^2(\lambda - b)$ , 比较两边的系数, 得  $a = 1, b = 5$ , 那么

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{r_2 - r_3}{r_1 - r_3}} (\lambda + 1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$$

那么  $A$  的特征值为  $-1$  (二重) 和  $5$ , 则对应的特征向量依次为

$$\xi_1 = (-1, -1, 0)^\top, \xi_2 = (-1, 0, -1)^\top, \xi_3 = (1, 1, 1)^\top$$

从而可得可逆矩阵  $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 容易验证有  $P^{-1}AP = B$ , 故  $P$  即使所求.

法二: 因为  $A$  与  $B$  相似, 所以具有相同的迹和相同的行列式, 即  $\text{tr } A = \text{tr } B$ ,  $\det A = \det B$ , 故

$$2 + a = -2 + b, -3a + 8 = b$$

解得  $a = 1, b = 5$ .

**例 13.2.6.** 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ , 且  $A$  与  $B$  相似, 求  $a+b$ .

因为  $A \sim B$ , 所以  $\text{tr } A = \text{tr } B \Rightarrow b = -2$ , 又  $B$  为对角矩阵, 所以  $A$  可相似对角化, 所以  $\text{rank}(E - A) = 1$ , 即

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此  $a = -1$ , 所以  $a+b = -3$ .

**例 13.2.7 (2017 数一).** 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 则<sup>1</sup>

A.  $A$  与  $C$  相似,  $B$  与  $C$  相似

B.  $A$  与  $C$  相似,  $B$  与  $C$  不相似

C.  $A$  与  $C$  不相似,  $B$  与  $C$  相似

D.  $A$  与  $C$  不相似,  $B$  与  $C$  不相似

因为  $A$  和  $B$  都是上三角矩阵, 所以特征值都为  $2, 2, 1$ , 那么

$$\text{rank}(2E - A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 = 3 - 2$$

于是  $A$  与  $C$  相似; 同理

$$\text{rank}(2E - B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 3 - 2$$

所以  $B$  与  $C$  不相似, 选 B.

## 13.2.2 可对角化

**定理 13.2.2.** 若存在不相等的实数  $a, b$ , 使得  $(A - aE)(A - bE) = O$ , 则矩阵  $A$  一定能相似对角化.

证 因为  $(A - aE)(A - bE) = O$ , 所以

$$n = \text{rank}((b-a)E) = \text{rank}[(A - aE) - (A - bE)] \leqslant \text{rank}(A - aE) + \text{rank}(A - bE) \leqslant n$$

故  $\text{rank}(A - aE) + \text{rank}(A - bE) = n$ , 因此  $A$  的属于特征值  $a$  的特征向量个数有  $n - \text{rank}(A - aE)$ ; 属于特征值  $b$  的特征向量个数有  $n - \text{rank}(A - bE)$ , 共有

$$2n - [\text{rank}(A - aE) + \text{rank}(A - bE)] = n$$

又因为  $A$  有  $n$  个线性无关的特征向量等价于  $A$  一定能相似对角化.

**例 13.2.8 (2004 数一).** 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$  的特征方程有一个二重根, 求  $a$  的值, 并讨论  $A$  是否可相似对角化.

<sup>1</sup>假如三阶矩阵  $A$  的特征值为  $a, b, b$ , 那么有

$$A \text{ 可相似对角化} \Leftrightarrow \text{rank}(bE - A) = \text{阶数} - b \text{ 的重数}$$

即只需要判断  $\text{rank}(A - bE) = ?$  阶数  $- b$  的重数.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda - 4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda - 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{r_1 - r_2}{r_2 + r_3}} \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & \lambda - 4 - a & \lambda - 2 \\ -1 & -a & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)[(\lambda - 5)(\lambda - 4 - a) + (\lambda - 2)(1 + a)],$$

$\lambda = 2$  是方程的二重根时, 则有  $(2 - 5)(2 - 4 - a) = 0 \Rightarrow a = -2$ , 于是  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ , 此时,

$$\text{rank}(2E - A) = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = 1 = 3 - 2$$

因此可以相似对角化; 当 2 不是方程的二重根时,  $[(\lambda - 5)(\lambda - 4 - a) + (\lambda - 2)(1 + a)]$  为完全平方数, 解得  $a = -\frac{2}{3}$ , 此时 4

是该方程的二重根, 于是  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 5 \end{pmatrix}$ ,  $\text{rank}(4E - A) \neq 1$ , 于是  $a = -\frac{2}{3}$  时,  $A$  不能相似对角化.

$$\text{例 13.2.9. 设矩阵 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 已知  $A$  的一个特征值为 3, 求  $y$ ;

(2) 求矩阵  $P$ , 使得  $AP^\top(AP)$  为对角矩阵.

(1) 因为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - y & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda - y & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)[(\lambda - y)(\lambda - 2) - 1] = 0$$

将  $\lambda = 3$  代入得,  $y = 2$ .

(2) 由 (1) 可知  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 那么  $A^\top = A$ , 得  $(AP)^\top(AP) = P^\top A^2 P$ , 而  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ , 由

$|\lambda E - A^2| = 0$  解得  $\lambda_1 = 1$  (三重),  $\lambda_2 = 9$ , 对应  $\lambda_1 = 1$  的特征向量为

$$\alpha_1 = (1, 0, 0, 0)^\top, \alpha_2 = (0, 1, 0, 0)^\top, \alpha_3 = (0, 0, -1, 1)^\top$$

标准正交化得

$$\beta_1 = (1, 0, 0, 0)^\top, \beta_2 = (0, 1, 0, 0)^\top, \beta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -1, 1)^\top$$

对应于  $\lambda_2 = 9$  的特征向量为  $\alpha_4 = (0, 0, 1, 1)^\top$ , 经过单位化后,  $\beta_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 1)^\top$ , 于是

$$P = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, (AP)^\top(AP) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 9 \end{pmatrix}.$$

例 13.2.10. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  有 3 个线性无关的特征向量, 且  $\lambda = 2$  是  $A$  的二重特征值.

(1) 求  $x, y$  的值;

(2) 求可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  为对角矩阵.

(1) 根据题设,  $A$  有 3 个线性无关的特征向量, 所以  $A$  可对角化,  $A$  的任一特征值的几何重数与代数重数相等, 对于特征值  $\lambda = 2$  (二重),  $A$  有两个线性无关的特征向量, 由此可知  $\text{rank}(2E - A) = 1$ , 利用初等行变化, 得

$$2E - A = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -x & -2 & -y \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{r_2+r_1 \cdot x}{r_3-3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & x-2 & -y-x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此, 有  $x = 2, y = -2$ .

(2) 由 (1) 可知,  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ , 那么矩阵  $A$  的特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ 3 & 3 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{r_2+2r_1}{r_3-3r_1}} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ 2\lambda - 4 & \lambda - 2 & 0 \\ 6 - 3\lambda & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 6)$$

解得  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6$ , 对于特征值  $\lambda_{1,2} = 2$ , 解齐次方程组  $(2E - A)x = \mathbf{0}$ , 对应的特征向量为  $\alpha_1 = (1, -1, 0)^\top, \alpha_2 = (1, 0, 1)^\top$ , 对于特征值  $\lambda_3 = 6$ , 解齐次方程组  $(6E - A)x = \mathbf{0}$ , 对应的特征向量为  $\alpha_3 = (1, -2, 3)^\top$ ,

令  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ , 则  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$  为对角矩阵.

## 第 14 章

### 二次型

“数学是一种无限的创造力，它能够解释和预测自然界的现像。”

——欧拉

二次型是线性代数中一个重要的概念，它是一种关于变量的二次多项式形式。一般来说，二次型可以表示为如下形式：

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$$

其中， $\mathbf{x}$  是一个  $n$  维列向量， $\mathbf{A}$  是一个对称矩阵。二次型在数学中有着重要的应用，特别是在矩阵理论、优化问题、特征值问题等方面。

在实际应用中，二次型可以用来描述许多不同的问题，例如描述物体的能量、描述椭圆的形状、优化问题中的目标函数等。通过对二次型的研究和分析，我们可以深入理解矩阵的性质和结构，以及解决一些实际问题。

求解二次型的问题通常涉及到对矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值和特征向量的分析，以及对二次型的矩阵形式的变换。通过这些方法，我们可以得到二次型的最优解、极值点等重要信息。

二次型是线性代数中一个重要的概念，它在数学和应用领域都有着广泛的应用，对于理解矩阵、优化问题等具有重要意义。

#### 14.1 二次型的规范形与标准形

##### 1. 二次型的规范形：

如果一个二次型经过合适的线性变换可以化为对角形式，即对角元素非零，其他元素为零，那么这个对角形式就是二次型的规范形。规范形可以表示为：

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是对角矩阵  $A$  的特征值.

## 2. 二次型的标准形:

如果一个二次型经过合适的线性变换可以化为更简单的形式, 即对角元素为  $\pm 1$ , 其他元素为零, 那么这个形式就是二次型的标准形. 标准形可以表示为:

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_n^2$$

其中  $r$  是矩阵  $\mathbf{A}$  的正特征值的个数.

### 14.1.1 二次型的基本概念

**定义 14.1.1 (n 元二次型).** 含有  $n$  个变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的二次齐次函数

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + \\ & 2a_{1n}x_1x_n + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + \\ & 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

称为  $n$  元二次型.

常见的三元二次型:

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_3x_2 + fx_1x_3$$

几何意义: 三元二次型的几何图形是空间曲面.

二次型有矩阵表示.

**定义 14.1.2 (二次型的矩阵表达).** 在二次型表达式中取  $a_{ij} = a_{ji}$ , 则

$$2a_{ij}x_i x_j = a_{ij}x_i x_j + a_{ji}x_j x_i$$

于是上述二次型可以写为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$$

或

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2b \sum_{1 \leq j < k \leq n} x_j x_k = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$$

其中  $\mathbf{A}$  是对称矩阵, 称为二次型  $f$  的矩阵, 矩阵  $\mathbf{A}$  的秩称为二次型  $f$  的秩.

**例 14.1.1.** 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2x_2x_3$$

的秩为 2, 求  $a$ .

二次型  $f$  矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 由题意  $\text{rank } A = 2 \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow a = -2$ .

**定义 14.1.3 (二次型的标准形).** 如果二次型中只含有变量的平方项, 所有混合项  $x_i x_j (i \neq j)$  的系数全是零, 即

$$\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

这样的二次型称为标准形.

**定义 14.1.4 (二次型的规范形).** 在标准形中, 如平方项的系数  $d_j$  为 1, -1 或 0,

$$\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$$

则称其为二次型的规范形.

**例 14.1.2.** 化二次型  $f = 2x_2^2 + 2x_1x_3$  为标准形, 并写出所用坐标变换.

$$f = 2x_2^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_3)^2, \text{ 令 } \begin{cases} z_1 = \sqrt{2}x_2 \\ z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_3) \\ z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_3) \end{cases} \text{ 则 } \mathbf{x} = \mathbf{C}z, \text{ 其中 } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

**例 14.1.3.** 将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$$

化为标准形, 并写出所用坐标变换.

$f$  的标准形为

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 2(x_2 + x_3)^2 - 3x_3^2$$

$$\text{故令 } \begin{cases} z_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ z_2 = x_2 + x_3 \\ z_3 = x_3 \end{cases} \text{ 即坐标变换 } \begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 + 3z_3 \\ x_2 = z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}, \text{ 或 } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{z}, \text{ 则有 } f = z_1^2 + 2z_2^2 - 3z_3^2.$$

**例 14.1.4.** 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3, g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_2y_3$$

求可逆变换  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$  将  $f$  化为  $g$ .

$f$  的标准形为

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2$$

故令  $\begin{cases} z_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ z_2 = x_2 + x_3 \\ z_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 + 2z_3 \\ x_2 = z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$ , 则  $x = P_1 z$ , 其中  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

同理  $g(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + (y_2 + y_3)^2$ , 令  $\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$  即  $z = P_2 y$ , 其中  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  于是

$$x = P_1 P_2 y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$$

故  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**定义 14.1.5 (正负惯性指数).** 在二次型  $x^\top A x$  的规范形中, 正的平方项的个数  $p$  称为二次型的正惯性指数, 负的平方项的个数  $q$  称为二次型的负惯性指数.

**定义 14.1.6 (符号差).** 正惯性指数  $p$  与负惯性指数  $q$  的差称为符号差  $s$ , 即  $s = p - q$ .

**例 14.1.5.** 设  $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + (a-1)x_2^2 + (a+2)x_3^2$  的标准形是  $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ , 求  $a$  的取值范围.

由题意可知  $p = 1, q = 2$ , 于是  $a-1 < a < 0 < a+2 \Rightarrow -2 < a < 0$ .

**例 14.1.6.** 设  $A$  是  $n$  阶实对称矩阵, 秩为  $r$ , 符号差为  $s$ , 则必有

- |                     |                      |
|---------------------|----------------------|
| A. $r$ 是奇数, $s$ 是偶数 | B. $s$ 是奇数, $r$ 是偶数  |
| C. $r, s$ 均为偶数      | D. $r, s$ 或均为奇数或均为偶数 |

$r = p + q, s = p - q$ , 那么  $r + s = 2p$ , 从而  $r, s$  或均为奇数或均为偶数.

**例 14.1.7.** 求二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} x_j x_k$$

的符号差.

设此二次型的矩阵为  $A$ , 则

$$A = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

且  $|\lambda E - A| = \lambda(\lambda - n)^{n-1}$  (参考例题 9.3.12(2) 的解法), 所以  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = n, \lambda_n = 0$ , 故符号差  $s = n-1$ .

**定义 14.1.7 (非线性替换).** 如果

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \quad (*)$$

满足

$$|C| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

称 (\*) 为由  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$  到  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$  的非退化线性替换, 且 (\*) 可用矩阵描述, 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

或  $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$ , 其中  $C$  是可逆矩阵.

如果没有特别说明, 本章所涉及的二次型均为实二次型, 即二次型中变量的系数均为实数, 所涉及的矩阵和向量都是实的.

### 14.1.2 二次型的常用结论

- (1) 二次型与对称矩阵一一对应.
- (2) 变量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$  的  $n$  元二次型  $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$  经过非退化线性替换  $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$  后, 成为变量  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$  的  $n$  元二次型  $\mathbf{y}^\top B\mathbf{y}$ , 其中  $B = C^\top A C$ .
- (3) 任意的  $n$  元二次型  $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$  都可以通过非退化线性替换化成标准形  $d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$ , 其中  $d_i(i = 1, 2, \dots, n)$  是实数.
- (4) 任意  $n$  元二次型  $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ , 由于  $A$  是实对称矩阵, 故必存在正交变换  $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$  ( $Q$  为正交矩阵), 使得二次型化为标准形  $\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2$ , 且  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是  $A$  的  $n$  个特征值.
- (5) 非退化线性替换保持二次型的正负惯性指数、秩、正定性等.

**定理 14.1.1 (惯性定理).** 任意  $n$  元二次型  $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$  都可通过非退化线性替换化为规范形

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_{p+q}^2$$

其中  $p$  为正惯性指数,  $q$  为负惯性指数,  $p+q$  为二次型的秩, 且  $p, q$  由二次型唯一确定, 即规范形是唯一的.

**例 14.1.8.** 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $f$  的正惯性系数.

$$\text{实对称矩阵 } \mathbf{A}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top) = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & \frac{7}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 设 } \mathbf{A}_0 \text{ 的特征值为 } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ 则}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{tr } \mathbf{A}_0 = 4 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \det \mathbf{A}_0 = -1 \end{cases} \quad \text{由 } \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0 \text{ 知, 三个特征值中有且仅有一个特征值为负, 则 } f \text{ 的正惯性系数为 } 2.$$

**例 14.1.9.** 求二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 + x_3)^2$$

的正惯性指数  $p$ .

二次型  $f$  的矩阵为  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ , 那么特征方程为

$$|\lambda E - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 3)^2$$

故特征值为 3, 3, 0, 因此正惯性指数  $p = 2$ .

**定理 14.1.2.** 若  $f(x_1, x_2, x_3) = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 + (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)^2 + (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)^2$ , 令

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)^\top, \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, b_3)^\top, \boldsymbol{\gamma} = (c_1, c_2, c_3)^\top$$

则  $f$  的正惯性指数  $p = \text{rank}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ , 负惯性指数  $q = 0$ .

**例 14.1.10.** 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 + 2x_3)^2$  的正惯性指数与负惯性指数依次为

- A. 1, 0      B. 2, 0      C. 3, 0      D. 2, 1

令  $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, 1)^\top, \boldsymbol{\beta} = (0, 1, -1)^\top, \boldsymbol{\gamma} = (1, 0, 2)^\top$ , 易知  $\text{rank}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = 2$ , 则正惯性指数  $p = 2$ , 负惯性指数  $q = 0$ , 选 B.

**例 14.1.11.** (2012 数一) 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ , 求  $f$  的正惯性指数.

二次型的矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 于是

$$|\lambda E - \mathbf{A}| \stackrel{r_1=r_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda - 2 & -\lambda \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 4)$$

故  $\mathbf{A}$  的特征值为: 0, 1, 4, 所以正惯性指数为 2.

**例 14.1.12.** (2016 数二) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$  的正、负惯性指数分别为 1, 2, 求  $a$  的取值范围.

二次型的矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ , 则  $|\lambda E - \mathbf{A}| = (\lambda - a - 2)(\lambda - a + 1)^2 = 0$ , 得特征值  $a + 2, a - 1$  (二重), 则  $a + 2 > 0, a - 1 < 0$ , 故得  $-2 < a < 1$ .

### 14.1.3 运用偏导函数求标准形

运用偏导函数的思想将二次型化为标准形有以下两种情况:

- (1) 如果  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  中含有某变量的平方项, 即  $a_{ii}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 中至少有一个不为零, 不妨设  $a_{11} \neq 0$ , 记  $f_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1}$ , 令

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{a_{11}} f_1^2 + g$$

求得  $g$ , 此时  $g$  中已不含  $x_1$ , 再记  $g_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x_2}$ , 并令

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{a_{11}} f_1^2 + \frac{1}{a_{22}} g_1^2 + h$$

此时  $h$  中已不含  $x_1$  与  $x_2$ , 按这种方法继续运算, 可将二次型化为标准形;

- (2) 如果  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  中不含有任一变量的平方项, 即  $a_{ii} = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ), 但至少有一个  $a_{ij} \neq 0$  ( $j > 1$ ) 不为零 ( $a_{ij}$  是  $x_{ij}$  项的系数), 不妨设  $a_{12} \neq 0$ , 记  $f_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1}, f_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_2}$ , 令

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{a_{12}} [(f_1 + f_2)^2 - (f_1 - f_2)^2] + \varphi$$

求得  $\varphi$ , 此时  $\varphi$  中已不含  $x_1$  与  $x_2$ , 观察  $\varphi$  的结构, 如果  $\varphi$  中含有变量的平方项, 则按情况一中的方法进行, 否则按情况二中的方法进行, 直至二次型化为标准形.

**例 14.1.13.** 将二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$  化为标准形.

记  $f_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1} = x_1 + x_2$ , 令

$$f = \frac{1}{a_{11}} f_1^2 + g = (x_1 + x_2)^2 + g$$

求得  $g = x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_2x_3$ , 记  $g_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x_2} = x_2 - x_3$ , 令

$$g = \frac{1}{a_{22}} g_1^2 + h$$

求得  $h = -5x_3^2$ , 那么

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 - 5x_3^2$$

作可逆线性变换

$$\begin{cases} y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_2 - x_3 \\ y_3 &= x_3 \end{cases}$$

则有  $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 - 5y_3^2$ .

**例 14.1.14.** 将二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$  化为标准形.

二次型中不含有任一变量的平方项, 记  $f_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1}, f_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_2}$ , 则有

$$f_1 = \frac{1}{2}(-4x_2 + 2x_3) = -2x_2 + x_3, f_2 = \frac{1}{2}(-4x_1 + 2x_3) = -2x_1 + x_3$$

令

$$f = \frac{1}{a_{12}} [(f_1 + f_2)^2 - (f_1 - f_2)^2] + \varphi = -\frac{1}{4} [(-2x_1 - 2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_1 - 2x_2)^2] + \varphi$$

$$= (x_1 - x_2)^2 - (x_1 + x_2 - x_3)^2 + \varphi = (2x_1 - x_3)(-2x_2 + x_3) + \varphi = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - x_3^2 + \varphi$$

即  $\varphi = x_3^2$ , 所以

$$f(x_1, x_2, x_3) = -(x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_3^2$$

作可逆线性变换  $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ , 则有  $f(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ .

**例 14.1.15.** 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 - 4(x_2 - x_3)^2$$

的标准形为

A.  $y_1^2 + y_2^2$

B.  $y_1^2 - y_2^2$

C.  $y_1^2 + y_2^2 - 4y_3^2$

D.  $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

将  $f$  完全展开, 得

$$f = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3$$

那么

$$f_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{2}(4x_1 + 2x_2 + 2x_3) = 2x_1 + x_2 + x_3$$

则

$$f = \frac{1}{a_{11}} f_1^2 + g = 2x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3 + g$$

对比可得  $g = -\frac{7}{2}x_2^2 - \frac{7}{2}x_3^2 + 7x_2x_3$ , 再令

$$g_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{1}{2}(-7x_2 + 7x_3) = -\frac{7}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_3$$

又  $g = \frac{1}{a_{22}} g_1^2 + h$ , 可解出  $h = 0$ , 因此可排除 C, D 选项,

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}^2} (2x_1 + x_2 + x_3)^2 - \sqrt{\frac{7}{2}} (x_2 - x_3)^2$$

作可逆线性变换  $\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(2x_1 + x_2 + x_3) \\ y_2 = \sqrt{\frac{7}{2}}(x_2 - x_3) \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ , 因此  $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2$  选 B.

**例 14.1.16.** 运用标准形求例题 14.1.9 的惯性指数  $p$  和  $q$ .

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3, \text{ 令 } f_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \text{ 则}$$

$$f_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{2}(4x_1 + 2x_2 + 2x_3) = 2x_1 + x_2 + x_3$$

记  $f = \frac{1}{a_{11}} f_1^2 + g$ , 对比可得  $g = \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 - 3x_2x_3 = \frac{3}{2}(x_2 - x_3)^2$ , 于是

$$f = \frac{1}{2}(2x_1 + x_2 + x_3)^2 + \frac{3}{2}(x_2 - x_3)^2$$

于是正惯性指数  $p = 2$ , 负惯性指数  $q = 0$ .

## 14.2 正定性与矩阵的合同

正定矩阵是正实数概念的延伸——它定义了何为“正”的矩阵, 一种方法是全部元素为正数, 但这显然不是一个好的定义, 因为它完全不涉及矩阵的具体结构。因此尝试借助正实数的概念推广至矩阵的正定性。

一个正实数  $\alpha$  满足: 对任意一个矢量<sup>1</sup>  $v$ , 矢量  $\alpha v$  会和  $v$  在同一方向上<sup>2</sup>, 即内积为正  $v^\top \alpha v > 0$ .

借助这个准则, 一个正的矩阵  $A$  需要满足: 对任意一个矢量  $v$ ,  $Av$  和  $v$  在同一方向上, 即内积为正:  $v^\top Av > 0$ .

### 14.2.1 正定性

**定理 14.2.1 (Hurwitz 定理).** 对称矩阵  $A$  为正定的充分必要条件:  $A$  的各阶主子式 (顺序主子式) 都为正, 即

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

对称矩阵  $A$  为负定的充分必要条件: 奇数阶主子式为负, 偶数阶主子式为正, 即

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0 (r = 1, 2, \dots, n).$$

**定理 14.2.2 (实对称方阵的等价命题).** 设  $S = (s_{ij})$  是  $n$  阶实对称方阵, 则下述命题等价:

- (1) 方阵  $S$  是正定的;
- (2) 方阵  $S$  的每一个特征值均为正的;
- (3) 存在正定对称方阵  $S_1$ , 使得  $S = S_1^2$ ;
- (4) 存在可逆方阵  $P$ , 使得  $S = P^\top P$ ;
- (5) 方阵  $S$  的每个主子式均为正的;
- (6) 方阵  $S$  的顺序主子式均为正的.

**例 14.2.1.** 判断二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$  是否正定.

因为  $\begin{array}{c} \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & 5 & -2 \\ \hline x_2 & -2 & 6 \\ \hline x_3 & 0 & -2 \end{array} \dots \begin{array}{c} \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline \end{array}$ , 所以  $f$  的矩阵  $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ , 故  $A$  的顺序主子式分别为

$$|5| = 5 > 0, \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 26 > 0, \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 84 > 0$$

所以这个二次型是正定的.

<sup>1</sup>当强调方向时, 采用矢量的说法

<sup>2</sup>仅描述新矢量在原矢量的分量方向上的投影是正的情况, 不要求两个矢量之间的夹角为零角即完全重合.

**例 14.2.2.**  $t$  满足什么条件时, 下列二次型是正定的:

$$(1) f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3;$$

$$(2) f = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2tx_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

(1) 因为  $\begin{array}{c} \cdots \\ x_1 \\ \hline \cdots & 1 & \cdots & x_2 & \cdots & x_3 \\ \hline x_2 & t & 1 & 2 \\ x_3 & -1 & 2 & 5 \end{array}$ , 所以  $f$  的矩阵  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ , 故  $A$  的顺序主子式分别为

$$|1| = 1 > 0, \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1 - t^2 > 0, \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -t(5t + 4) > 0$$

所以当  $-\frac{4}{5} < t < 0$  时,  $f(x_1, x_2, x_3)$  是正定的.

(2)  $f$  的矩阵  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & t & 5 \\ t & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ , 那么  $A$  的顺序主子式分别为

$$|1| = 1 > 0, \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2 > 0, \begin{vmatrix} 1 & t & 5 \\ t & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -t^2 + 30t - 105 > 0$$

因为  $4 - t^2$  与  $-t^2 + 30t - 105$  不能同时大于零, 所以无论  $t$  取什么值, 这个二次型都不能是正定的.

**例 14.2.3.** 判断二次型  $f = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$  的正定性.

因为  $\begin{array}{c} \cdots \\ x \\ \hline \cdots & -5 & \cdots & y & \cdots & z \\ \hline y & 2 & -6 & 0 \\ z & 2 & 0 & -4 \end{array}$ , 所以  $f$  的矩阵  $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ , 故  $A$  的顺序主子式分别为

$$|-5| = -5 < 0, \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 26 > 0, \begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -80 < 0$$

即  $f$  是负定的.

**例 14.2.4.** 判断二次型  $f = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$  的正定性.

$f$  的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ , 任取  $A$  的一个  $k$  阶顺序主子式, 有

$$|\mathbf{A}_k| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^k} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} \frac{r_{i+1} - \frac{i}{i+1} r_i}{i=1, \dots, k-1} \frac{1}{2^k} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{k}{k-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{k+1}{k} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{k+1}{k} > 0, k = 1, 2, \dots, n$$

所以  $\mathbf{A}$  正定, 从而二次型正定.

**定理 14.2.3 (特征值与正定性).** 若一矩阵  $\mathbf{A}$  是正定的, 则其所有特征值  $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ .

**例 14.2.5.** 设  $\mathbf{A}$  是 3 阶正定矩阵, 证明  $|\mathbf{A} + 2\mathbf{E}| > 8$ .

证 由  $\mathbf{A}$  是正定的, 则  $\lambda_{1,2,3} > 0$ , 那么  $|\mathbf{A} + 2\mathbf{E}| = (\lambda_1 + 2)(\lambda_2 + 2)(\lambda_3 + 2) \geq 8$ .

**例 14.2.6 (2000 清华大学).** 设  $n$  阶实方阵 ( $n \geq 2$ )

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b+8 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & b & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 1 & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 3 & 1 & \cdots & 1 & b \end{pmatrix}$$

试求  $b$  的取值范围, 使  $\mathbf{A}$  为正定矩阵.

设  $k$  维列向量  $\alpha = (3, 1, \dots, 1)^\top$ , 则  $\mathbf{A}$  的  $k$  阶顺序主子式为

$$|\mathbf{A}_k| = \left| \begin{pmatrix} b-1 & & & \\ & b-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (3, 1, \dots, 1)^\top \right| = |(b-1)\mathbf{E}_k + \alpha\alpha^\top| \\ = (b-1)^{k-1} |(b-1)\mathbf{E}_1 + \alpha^\top \alpha| = (b-1)^{k-1} (b+k+7)$$

因为  $\mathbf{A}$  的正定的充分必要条件是

$$|\mathbf{A}_k| > 0 \Leftrightarrow b > 1 \text{ 且 } b > -(k+7), k = 1, 2, \dots, n$$

所以, 当  $b > 1$  时  $\mathbf{A}$  是正定矩阵.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix},$$

(1) 求正交矩阵  $\mathbf{P}$ , 使得  $\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}$  为对角矩阵;

(2) 求正定矩阵  $\mathbf{C}$ , 使得  $\mathbf{C}^2 = (a+3)\mathbf{E} - \mathbf{A}$ .

$$(1) \text{ 法一: } |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & 1 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1+r_3 \\ r_2+r_3}} \begin{vmatrix} \lambda-a+1 & 0 & \lambda-a+1 \\ 0 & \lambda-a+1 & \lambda-a+1 \\ 1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix} = (\lambda-a+1)^2(\lambda-a-2) = 0,$$

因此特征值为  $\lambda_1 = a+2, \lambda_{2,3} = a-1$  (二重), 则  $\lambda_1$  对应的特征向量为  $\xi_1 = (-1, -1, 1)^\top$ ,  $\lambda_{2,3}$  对应的特征向量分别为  $\xi_2 = (-1, 1, 0)^\top, \xi_3 = (1, 0, 1)^\top$ , 下作特征向量的正交单位化,

$$\alpha_1 = \xi_1, \alpha_2 = \xi_2 - \frac{[\alpha_1, \xi_2]}{[\alpha_1, \alpha_1]} \alpha_1 = \xi_2, \alpha_3 = \xi_3 - \frac{[\alpha_1, \xi_3]}{[\alpha_1, \alpha_1]} \alpha_1 - \frac{[\alpha_2, \xi_3]}{[\alpha_2, \alpha_2]} \alpha_2 = (1, 1, 2)^\top$$

单位化

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\|\alpha_1\|} \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\|\alpha_2\|} \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\|\alpha_3\|} \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

得正交矩阵  $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ , 使得  $P^\top AP = \begin{pmatrix} a+2 & & \\ & a-1 & \\ & & a-1 \end{pmatrix}$ .

法二: 因为  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ , 于是

$$f(\lambda) = \lambda^3 - \text{tr } A\lambda^2 + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq 3} A \begin{vmatrix} a_{j_1 j_1} & a_{j_1 j_2} \\ a_{j_2 j_1} & a_{j_2 j_2} \end{vmatrix} - \det A = \lambda^3 - 3a\lambda^2 + 3(a^2 - 1)\lambda - (a-1)^2(a+2) = 0$$

即得特征值  $\lambda_1 = a+2$ ,  $\lambda_{2,3} = a-1$  (二重), 当  $\lambda = \lambda_1$  时,  $\lambda_1 E - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

那么  $r_1$  可由  $r_2$  与  $(3, -3, 0)$  线性表示, 则

$$(2, -1, 1) \times (3, -3, 0) = (3, 3, -3) \Rightarrow (1, 1, -1) \Rightarrow \xi_1 = (1, 1, -1)^\top$$

当  $\lambda = \lambda_{2,3}$  时,  $\lambda_{2,3} E - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 那么

$$r_1 \cdot (1, 1, 2) = 0, r_1 \times (1, 1, 2) = (-3, 3, 0) \Rightarrow (-1, 1, 0)$$

则取  $\xi_2 = (-1, 1, 0)^\top$ ,  $\xi_3 = (1, 1, 2)^\top$ , 因此  $\xi_{1,2,3}$  已经两两相互正交, 则正交矩阵  $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ , 使

得  $P^\top AP = \begin{pmatrix} a+2 & & \\ & a-1 & \\ & & a-1 \end{pmatrix}$ .

(2) 因为  $P^\top AP = \begin{pmatrix} a+2 & & \\ & a-1 & \\ & & a-1 \end{pmatrix}$ , 所以  $P^\top [(a+3)E - A]P = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$ , 即

$$(a+3)E - A = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{pmatrix} P^\top = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} P^\top \cdot P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} P^\top$$

$$C = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} P^\top \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^\top = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

## 14.2.2 半正定性

**定理 14.2.4 (对称方阵的等价命题).** 设  $S$  是  $n$  阶对称方阵, 则下述命题等价:

- (1) 方阵  $S$  是半正定的;
- (2) 方阵  $S$  的所有特征值均为非负的;
- (3) 存在  $n$  阶半正定对称方阵  $S_1$ ,  $\text{rank } S_1 = \text{rank } S$ , 使得  $S = S_1^2$ ;
- (4) 存在  $n$  阶方阵  $P$ ,  $\text{rank } P = \text{rank } S$ , 使得  $S = P^\top P$ ;

- (5) 方阵  $\mathbf{S}$  的所有主子式均为非负的;  
(6) 方阵  $\mathbf{S}$  的所有  $k$  阶主子式之和均为非负的,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

**定理 14.2.5.** 若  $\mathbf{A}$  是  $n$  阶正定矩阵,  $\mathbf{B}$  是  $n$  阶非零半正定矩阵, 则  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  是正定矩阵, 且

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) > \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}.$$

**例 14.2.8 (2005 武汉大学).** 已知实二次型  $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 9x_4^2 + 2a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$ , 问当  $a$  取何值时,  $f$  是正定的、半正定的以及不定的二次型?

二次型  $f$  的矩阵为  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & a & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ a & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ , 得  $\mathbf{A}$  的顺序主子式分别为

$$\Delta_1 = 1, \Delta_2 = (1-a)(1+a), \Delta_3 = (1-a)^2(1+2a), \Delta_4 = 9\Delta_3$$

由此可见,

- (1) 当  $-\frac{1}{2} < a < 1$  时,  $f$  为正定二次型;  
(2) 当  $a = -\frac{1}{2}$  或  $a = 1$ ,  $f$  为半正定二次型;  
(3) 当  $a < -\frac{1}{2}$  或  $a > 1$  时,  $f$  为不定二次型.

**例 14.2.9 (2014 南京大学).** 设  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  均为  $n$  阶实对称矩阵,  $\mathbf{B}$  正定, 且  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  半正定, 证明:

- (1) 若  $\lambda$  是  $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}| = 0$  的根, 则  $\lambda \geq 1$ ;  
(2)  $\det \mathbf{A} \geq \det \mathbf{B}$ .

证

- (1) 因为  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  均为  $n$  阶实对称矩阵, 所以存在可逆实矩阵  $\mathbf{P}$ , 使得  $\mathbf{P}^\top \mathbf{B} \mathbf{P} = \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}$  仍为实对称矩阵, 故又存在正交矩阵  $\mathbf{Q}$  使得,

$$\mathbf{Q}^\top (\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}) \mathbf{Q} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

其中  $\lambda_k$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) 为  $\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}$  的特征值, 又因为

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}| = |\lambda \mathbf{P}^\top \mathbf{B} \mathbf{P} - \mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}| = |\mathbf{P}^2| |\lambda \mathbf{B} - \mathbf{A}| = |\mathbf{B}| |\mathbf{P}^2| |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1}| = 0$$

因为  $\mathbf{B}$  是正定的,  $\det \mathbf{P}^2 > 0$ , 所以  $|\mathbf{B}| |\mathbf{P}^2| > 0$ , 所以  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  是  $\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1}$  的全部特征值, 也是  $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}|$  的所有根, 又因为  $\mathbf{P}^\top (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{P}$  是实对称矩阵, 其特征值为  $\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \dots, \lambda_n - 1$ , 所以  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}$  半正定当且仅当  $\mathbf{P}^\top (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{P}$  半正定, 这又等价为  $\lambda_k - 1 \geq 0$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), 即  $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}| = 0$  的任一根  $\lambda \geq 1$ .

- (2) 由 (1) 可知  $\det(\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1}) = \prod_{i=1}^r \lambda_i \geq 1$ , 所以  $\det \mathbf{A} \geq \det \mathbf{B}$ .

**例 14.2.10 (1994 华中师范大学).** 设  $\mathbf{A}_{m \times n}$ ,  $\mathbf{B}_{s \times n}$  均为行满秩实矩阵,  $\mathbf{Q} = \mathbf{A} \mathbf{B}^\top (\mathbf{B} \mathbf{B}^\top)^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}^\top$ , 证明:

- (1)  $\mathbf{A} \mathbf{A}^\top - \mathbf{Q}$  是半正定的;  
(2)  $0 \leq \det \mathbf{Q} \leq \det(\mathbf{A} \mathbf{A}^\top)$ .

证

(1) 由题意知:  $\text{rank } \mathbf{A} = m$ ,  $\text{rank } \mathbf{B} = s$ , 且  $\text{rank}(\mathbf{AA}^\top) = m$ ,  $\text{rank}(\mathbf{BB}^\top) = s$ , 所以  $\mathbf{AA}^\top$ ,  $\mathbf{BB}^\top$  均为可逆矩阵, 并且分块矩阵  $\begin{pmatrix} \mathbf{AA}^\top & \mathbf{AB}^\top \\ \mathbf{BA}^\top & \mathbf{BB}^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}^\top$  是半正定的, 且与  $\begin{pmatrix} \mathbf{AA}^\top - \mathbf{Q} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{BB}^\top \end{pmatrix}$  合同, 因此  $\mathbf{AA}^\top - \mathbf{Q}$  是半正定的.

(2) 易知  $\mathbf{AA}^\top$  是正定的,  $\mathbf{Q}$  是半正定的, 所以存在可逆实矩阵  $P$ , 使得

$$\mathbf{P}^\top (\mathbf{AA}^\top) \mathbf{P} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{P}^\top \mathbf{Q} \mathbf{P} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad (\lambda_k \geq 0)$$

又因为  $\mathbf{AA}^\top - \mathbf{Q}$  是半正定的, 所以  $1 - \lambda_k \geq 0$  即  $0 \leq \lambda_k \leq 1$ , 其中  $k = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\det(\mathbf{P}^\top \mathbf{Q} \mathbf{P}) = |\mathbf{P}^2| |\mathbf{Q}| = \prod_{i=1}^r \lambda_i \leq 1 = |\mathbf{P}^2| |\mathbf{AA}^\top| \Rightarrow 0 \leq \det \mathbf{Q} \leq \det(\mathbf{AA}^\top).$$

**推论 14.2.1 (实对称半正定矩阵的单调性).** 设  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  均为  $n$  阶实对称半正定矩阵, 即  $\mathbf{A} \geq \mathbf{B} \geq 0$ , 则  $\det \mathbf{A} \geq \det \mathbf{B} \geq 0$ .

### 14.2.3 矩阵的合同

**例 14.2.11.** 对于二次型  $f = \mathbf{x}^\top \mathbf{Ax}$  经非奇异线性变换  $\mathbf{x} = \mathbf{Cy}$  化为  $f = \mathbf{y}^\top \mathbf{By}$ , 则  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  必定是

- A. 相等
- B. 相似
- C. 合同
- D. 具有相同的特征值

令  $\mathbf{x} = \mathbf{Cy}$ , 则

$$f = \mathbf{x}^\top \mathbf{Ax} = (\mathbf{Cy})^\top \mathbf{A}(\mathbf{Cy}) = (\mathbf{y}^\top \mathbf{C}^\top) \mathbf{A}(\mathbf{Cy}) = \mathbf{y}^\top (\mathbf{C}^\top \mathbf{AC}) \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{By}$$

因此  $\mathbf{B} = \mathbf{C}^\top \mathbf{AC}$ , 那么  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  合同.

**例 14.2.12.** 设矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ , 若  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  合同但不相似, 则常数  $k$  的取值范围是多少.

若  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  合同但不相似, 说明  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  的正负特征值个数分别相同, 但是  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  的特征值不全相同, 则

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda^2 - \lambda - 6)$$

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & -3 & 0 \\ -3 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - k \end{vmatrix} = (\lambda - k)(\lambda^2 - 9)$$

那么  $\mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = 3$ ,  $\mathbf{B}$  的特征值为  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = k$ ,  $\lambda_3 = 3$ , 所以  $k < 0$  且  $k \neq -2$ .

**例 14.2.13.** 用行初等变换法将矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$  化为标准形.

$(\mathbf{A}, \mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & : & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  由此可得  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 且  $\mathbf{C}^\top \mathbf{AC} = \mathbf{A}$ .

**例 14.2.14.** 设 3 阶矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,

(1) 若矩阵  $A$  与  $B$  合同, 求  $a$  与可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^\top AP = B$ ;

(2) 矩阵  $A$  与  $B$  是否相似.

(1) 因为  $A$  与  $B$  合同, 所以  $\text{rank } A = \text{rank } B$ , 那么

$$\det A = 0 = \det B = 5 - a \Rightarrow a = 5$$

实对称矩阵  $A$  对应二次型为  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 = (x_1 + x_2)^2 - (x_2 - x_3)^2$  作可逆线性变化  

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + x_2 \\ z_2 = x_2 - x_3 \\ z_3 = x_3 \end{cases}$$
 即

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P_1 X$$

实对称矩阵  $B$  对应二次型为  $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 5y_2^2 + 6y_1y_2 + 2y_1y_3 + 2y_2y_3 = (y_1 + 3y_2 + y_3)^2 - (y_2 - y_3)^2$  作可逆线性变化  

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + 3y_2 + y_3 \\ z_2 = y_2 - y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$
 即

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{pmatrix} = P_2 Y$$

则

$$X = P_1^{-1} P_2 Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{pmatrix}$$

记  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 于是在可逆线性变换  $X = PY$  下, 二次型  $f(X)$  化为二次型  $g(Y)$ , 从而有  $P^\top AP = B$ .

(2) 矩阵  $A$  与  $B$  不相似, 理由如下, 因为若矩阵  $A \sim B$  则  $|A| = |B|, \text{tr } A = \text{tr } B$ , 由于

$$|A| = 0, |B| = 5 - a, \text{tr } A = 0, \text{tr } B = 1 + a$$

方程组  $\begin{cases} 5 - a = 0 \\ 1 + a = 0 \end{cases}$  无解, 所以对任意实数  $a$ , 矩阵  $A$  与  $B$  均不相似.

### 14.3 正交变换与直角坐标变换

正交变换是一种线性变换, 它保持向量的内积不变, 即在变换前后, 向量的模长和夹角保持不变. 这种变换可以通过正交矩阵来实现, 这些矩阵的特征值的绝对值为 1, 并且可以准对角化. 在图形学中, 正交变换可以用来调整图形, 使其更加规整而不改变其大小和形状.

直角坐标变换则是指在平面上, 从一个直角坐标系到另一个直角坐标系的坐标转换, 这种转换通常涉及到坐标轴的旋转或平移. 正交变换与直角坐标变换不同, 因为它不仅仅是坐标的简单转换, 而是在保持向量内积不变的同时进行坐标系的变换.

### 14.3.1 正交变换

**定义 14.3.1 (正交矩阵).** 设  $A$  为  $n$  阶实对称矩阵, 则存在正交矩阵  $Q$ , 使得

$$Q^{-1}AQ = Q^\top AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是  $A$  的特征值, 矩阵  $Q$  的列向量是对应的正交规范化的特征向量.

**定理 14.3.1 (正交变换与相似).** 若二次型  $x^\top Ax$  经正交变换  $x = Qy$  有  $x^\top Ax = y^\top By$ , 则  $A \sim B$ .

**定理 14.3.2 (正交矩阵的行列式).** 若方阵  $A$  是正交矩阵, 那么等价为实方阵  $A$  的行列式等于  $\pm 1$ , 并且当  $|A| = 1$  时,  $A$  的每一个元素等于该元素的代数余子式, 即  $a_{ij} = A_{ij}$ ; 当  $|A| = -1$  时,  $A$  的每一个元素等于该元素的代数余子式乘以  $-1$ , 即  $a_{ij} = -A_{ij}$ .

**证 充分性:** 设  $A$  是正交矩阵, 则  $AA^\top = E$ , 所以  $|A|^2 = 1$ , 即  $|A| = \pm 1$ , 若  $|A| = 1$ , 则  $A^* = |A|A^{-1} = A^\top$ , 比较等式两边对应的元素, 得  $a_{ij} = A_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ); 同理当  $|A| = -1$ , 可证  $a_{ij} = -A_{ij}$ ,

**必要性:** 当  $|A| = 1$  时, 由  $a_{ij} = A_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ), 有  $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* = A^\top$ ; 当  $|A| = -1$  时, 由  $a_{ij} = -A_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ), 有  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} = -(-A)^\top = A^\top$ , 所以  $A$  是正交矩阵.

**例 14.3.1.** 求例题 14.1.4 中, 是否存在正交变换  $x = Qy$  将  $f$  化为  $g$ .

二次型  $f$  对应的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 其特征方程为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

则  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ , 同理可得  $g$  的特征值为  $0, 1, 2$ , 因为特征值不全相等, 故  $A \not\sim B$ , 因此不存在正交矩阵  $Q$  使得在正交变换  $x = Qy$  下将  $f$  化为  $g$ .

**例 14.3.2.** 已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + ax_3^2 + 2x_2x_3$  经正交变换  $x = Py$  可化为标准形  $y_1^2 + by_2^2 - y_3^2$ , 求  $a+b$ .

由题意  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & b & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ , 且  $A \sim B$ , 则

$$\begin{cases} \text{tr } A = \text{tr } B \\ \det A = \det B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+a=b \\ -2=-b \end{cases} \Rightarrow a+b=2.$$

**例 14.3.3.** 设  $\alpha, \beta$  是三维列向量, 且  $[\alpha, \beta] = -1$ , 又  $A = E - \alpha\beta^\top$  求  $(A+E)^{-1}$ .

因为  $[\alpha, \beta] = -1$  (两个向量的内积), 所以

$$A^2 = (E - \alpha\beta^\top)(E - \alpha\beta^\top) = E - 2\alpha\beta^\top + \alpha \underbrace{\beta^\top \cdot \alpha}_{[\alpha, \beta] = -1} \beta^\top = E - 3\alpha\beta^\top = 3(E - \alpha\beta^\top) - 2E = 3A - 2E$$

$$\text{即 } A^2 - 3A + 2E = O \Rightarrow (A+E)(A-4E) + 6E = O \Rightarrow (A+E) \frac{A-4E}{-6} = E \Rightarrow (A+E)^{-1} = \frac{4E-A}{6}.$$

**例 14.3.4.** 设  $\alpha, \beta$  均为 3 维单位列向量,  $\alpha^\top \beta = \frac{1}{2}$ ,  $A = \alpha\beta^\top + \beta\alpha^\top$ , 求正交变换下, 二次型  $x^\top Ax$  的标准形.

先证明  $A$  是实对称矩阵,

$$A^\top = (\alpha\beta^\top + \beta\alpha^\top)^\top = (\alpha\beta^\top)^\top + (\beta\alpha^\top)^\top = \beta\alpha^\top + \alpha\beta^\top = A$$

对  $A$  右乘  $\alpha$  和  $\beta$  得

$$\begin{cases} A\alpha = \alpha\beta^\top\alpha + \beta\alpha^\top\alpha \\ A\beta = \alpha\beta^\top\beta + \beta\alpha^\top\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(\alpha + \beta) = \frac{3}{2}(\alpha + \beta) \\ A(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2}(\alpha - \beta) \end{cases}$$

因为  $\alpha^\top \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta^\top \alpha = \frac{1}{2}$ , 且  $\alpha^\top \alpha = \beta^\top \beta = 1$ , 则得特征值  $\lambda_1 = \frac{3}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$ , 设  $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^\top, \beta = (b_1, b_2, b_3)^\top$ , 那么

$$\text{tr } A = 2a_1b_1 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3 = 2\alpha^\top\beta = 1 \Rightarrow \lambda_3 = \text{tr } A - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

于是  $x^\top Ax$  的标准形为  $\frac{3}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2$ .

**例 14.3.5.** 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$ ,

(1) 求  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  的解;

(2) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  的规范形为  $z_1^2, z_2^2$ , 求正交变换  $x = Qy$ , 使得二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  化为标准形.

**例 14.3.6.** 设 3 阶实对称矩阵  $A$  的秩为 2,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$  是  $A$  的二重特征值, 若  $\alpha_1 = (1, a, 0)^\top, \alpha_2 = (2, 1, 1)^\top, \alpha_3 = (0, 1, -1)^\top$  都是矩阵  $A$  属于特征值 6 的特征向量,

(1) 求  $a$  的值;

(2) 求  $A$  的另一特征值和对应的特征向量;

(3) 若  $\beta = (-2, 2, -1)^\top$ , 求  $A^n\beta$ .

(1) 对于实对称矩阵  $A$ , 若  $\lambda$  是矩阵  $A$  的  $k$  重特征值, 则矩阵  $A$  属于特征值  $\lambda$  的特征向量有且仅有  $k$  个是线性无关的, 因此  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  必线性相关, 那么

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1.$$

(2) 由  $\text{rank } A = 2$  知  $\det A = 0$ , 又  $\det A = \prod \lambda_i = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0$ , 不同的特征值对应的特征向量相互正交, 则  $\alpha_2 \times \alpha_3 = (-2, 2, 2)$ , 那么矩阵  $A$  属于特征值  $\lambda_3 = 0$  的全部特征向量为  $k\alpha = k(-1, 1, 1)^\top$ .

(3) 设  $x_1\alpha_1, x_2\alpha_2, x_3\alpha_3 = \beta$ , 对  $(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 : \beta)$  作初等行变换, 有

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - r_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + r_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

解得  $x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = 1$ , 故  $\beta = 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha$ , 因为  $A\alpha_1 = 6\alpha_1, A\alpha_2 = 6\alpha_2, A\alpha = 0\alpha$ , 所以

$$A^n\beta = 3A^n\alpha_1 - 2A^n\alpha_2 + A^n\alpha = 3 \cdot 6^n\alpha_1 - 2 \cdot 6^n\alpha_2 = (-6^n, 6^n, -2 \cdot 6^n)^\top.$$

**例 14.3.7.** 若二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3$ , 经正交变换  $x = Qy$  化为二次型  $g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + ay_3^2 + 2y_1y_2$ , 求  $a$  与矩阵  $Q$ .

由题意知  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ , 且  $A \sim B$ , 于是  $\text{tr } A = \text{tr } B \Rightarrow a = 2$ , 又

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

当  $\lambda = \lambda_1 = 0$  时, 对应的特征向量为  $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 当  $\lambda = \lambda_{2,3} = 2$  时, 对应的特征向量分别为  $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

令  $Q_1 = \left( \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}, \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}, \frac{\xi_3}{\|\xi_3\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$ , 二次型  $f(x)$  在  $x = Q_1 z$  下化为  $f(z) = z_2^2 + z_3^2$ , 同样的, 当

$\lambda = \lambda_1 = 0$  时, 对应的特征向量为  $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 当  $\lambda = \lambda_{2,3} = 2$  时, 对应的特征向量分别为  $\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 令

$Q_2 = \left( \frac{\eta_1}{\|\eta_1\|}, \frac{\eta_2}{\|\eta_2\|}, \frac{\eta_3}{\|\eta_3\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 二次型  $g(y)$  在  $y = Q_2 z$  下化为  $g(y) = z_2^2 + z_3^2$ , 则

$$Q = Q_1 Q_2^{-1} = Q_1 Q_2^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**例 14.3.8.** 已知  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 求正交矩阵  $P$ , 使  $P^\top AP$  成为对角矩阵.

特征多项式  $f(\lambda)$  为:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 & 1 - \lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & \lambda - 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 4} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \left[ (-1)^{i_1+i_2+i_3+1+2+3} A \begin{pmatrix} i_4 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ \lambda - 1 & \lambda - 1 & 0 \\ \lambda - 1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} - (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)^3(\lambda + 3) = 0 \end{aligned}$$

解得  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = 1$  (三重),  $\lambda_2 = -3$ , 对于  $\lambda_1 = 1$ , 可求得  $A$  的相应的 3 个线性无关的特征向量为

$$\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)^\top, \alpha_2 = (1, 0, 1, 0)^\top, \alpha_3 = (-1, 0, 0, 1)^\top$$

利用 Schmidt 正交化方法, 得

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)^\top, \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2, 0)^\top, \xi_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}(-1, 1, 1, 3)^\top$$

对于  $\lambda_2 = -3$ , 可求得  $A$  的相应的一个线性无关的特征向量为  $\alpha_4 = (1, -1, -1, 1)^\top$ , 把它单位化得  $\xi_4 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)^\top$ , 于是有  $P^\top AP = \text{diag}(1, 1, 1, -3)$ , 其中正交矩阵  $P$  为

$$P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

**例 14.3.9 (2010 武汉大学).** 设三阶实对称矩阵  $A$  的各行元素之和均为 3, 向量

$$\alpha_1 = (-1, 2, -1)^\top, \alpha_2 = (0, -1, 1)^\top$$

是线性方程组  $Ax = 0$  的两个解.

(1) 求  $A$  的特征值与特征向量;

(2) 求正交矩阵  $Q$  和对角矩阵  $D$ , 使得  $Q^\top A Q = D$ ;

(3) 求行列式  $\left| \left( \frac{2}{3} B^2 \right)^{-1} + \frac{4}{9} B^* + B \right|$ , 其中  $B$  是  $A - \frac{3}{2} E$  的相似矩阵,  $B^*$  为  $B$  的伴随矩阵.

(1) 因为  $A\alpha_1 = 0 = 0\alpha_1, A\alpha_2 = 0 = 0\alpha_2$ , 所以  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  是  $A$  的二重特征值,  $\alpha_1, \alpha_2$  是  $A$  的属于特征值 0 的两个线性无关的特征向量; 又  $A$  的各行元素之和均为 3, 所以

$$A(1, 1, 1)^\top = (3, 3, 3)^\top = 3(1, 1, 1)^\top$$

则  $\lambda_3 = 3$  是  $A$  的一个特征值,  $\alpha_3 = (1, 1, 1)^\top$  是  $A$  的属于特征值 3 的特征向量, 总之,  $A$  的特征值为 0, 0, 3, 属于特征值 0 的所有特征向量为  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$  ( $k_1, k_2$  不全为零), 属于特征值 3 的所有特征向量为  $k_3\alpha_3$  ( $k_3 \neq 0$ ).

(2) 先将  $\alpha_1, \alpha_2$  正交化

$$\xi_1 = \alpha_1 = (-1, 2, -1)^\top, \xi_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \xi_1]}{\|\xi_1\|^2} \xi_1 = \left( -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)^\top$$

再将  $\xi_1, \xi_2, \alpha_3$  单位化, 得

$$e_1 = \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)^\top, e_2 = \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^\top, e_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^\top$$

$$\text{那么 } Q = (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \text{ 于是 } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3) 因为  $B$  相似于  $A - \frac{3}{2}E$ , 而  $A - \frac{3}{2}E$  相似于  $D - \frac{3}{2}E$ , 于是  $B$  相似于  $D - \frac{3}{2}E$ , 故

$$|B| = \left| D - \frac{3}{2}E \right| = \left( \frac{3}{2} \right)^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow B^* = |B| \cdot B^{-1}$$

$$\left( \frac{2}{3} B^2 \right)^{-1} + \frac{4}{9} B^* + B = B \left( \frac{3}{2} (B^{-1})^3 + \frac{3}{2} (B^{-1})^2 + E \right) = B \varphi(B^{-1})$$

其中  $\varphi(x) = \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ , 因为  $B^{-1}$  的特征值为  $-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ , 所以  $\varphi(B^{-1})$  特征值为

$$\varphi\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 1 = \frac{11}{9} \text{ (二重)} \quad \varphi\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 = \frac{19}{9}$$

故所求的行列式的值为  $|d| = |B| |\varphi(B^{-1})| = \frac{27}{8} \times \left(\frac{11}{9}\right)^2 \times \frac{19}{9} = \frac{2299}{216}$ .

**例 14.3.10.** 设  $A$  是 3 阶实对称矩阵,  $\alpha = (0, -1, 1)^\top, \beta = (1, 0, -1)^\top, A\alpha = 3\beta, A\beta = 3\alpha$ , 且存在 3 阶矩阵  $B$ , 有  $\text{rank}(AB) < \text{rank } B$ ,

(1) 求正交变换  $x = Qy$ , 化二次型  $x^\top(A + A^*)x$  为标准形, 并写出该标准形;

(2) 若  $\gamma = (2, 0, -1)^\top$ , 求  $A^n\gamma$ .

(1) 由  $A\alpha = 3\beta$ ,  $A\beta = 3\alpha$ , 可得  $\begin{cases} A(\alpha + \beta) = 3(\alpha + \beta) \\ A(\alpha - \beta) = -3(\alpha - \beta) \end{cases}$  即特征值  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = -3$ , 其对应的特征向量为

$$\xi_1 = \alpha + \beta = (1, -1, 0)^\top, \quad \xi_2 = \alpha - \beta = (-1, -1, 2)^\top$$

因为  $\text{rank}(AB) < \text{rank } B$ , 可知  $A$  不可逆, 即  $\det A = 0$ , 又  $\det A = \prod_{i=1}^3 \lambda_i$ , 故  $\lambda_3 = 0$ , 并且  $A$  是实对称矩阵, 则其特征向量相互正交, 即

$$(1, -1, 0) \times (-1, -1, 2) = (-2, -2, -2) \Rightarrow (1, 1, 1) \Rightarrow \xi_3 = (1, 1, 1)^\top$$

则  $A^*$  的特征值为<sup>3</sup>  $\lambda_1^* = \lambda_2 \lambda_3 = 0$ ,  $\lambda_2^* = \lambda_1 \lambda_3 = 0$ ,  $\lambda_3^* = \lambda_1 \lambda_2 = -9$ , 由  $Q^\top A Q = \Lambda$  可得

$$\begin{aligned} Q^\top A^* Q &= Q^\top (Q \Lambda Q^\top)^* Q = Q^\top (Q^\top)^* \Lambda^* Q^* Q = Q^\top |Q^\top| (Q^\top)^{-1} \Lambda^* |Q| E \\ &= Q^\top Q |Q| \Lambda^* |Q| E = |Q|^2 \Lambda^* \xrightarrow{\det Q = \pm 1} \Lambda^* \end{aligned}$$

因此  $Q^\top (A + A^*) Q = \left[ \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -3 & \\ & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -9 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -3 & \\ & & -9 \end{pmatrix}$  即在正交变换  $x = Qy$  下, 二次型的标准形为  $3y_1^2 - 3y_2^2 - 9y_3^2$ .

(2)  $\gamma$  可由  $\xi_{1,2,3}$  线性表示, 即  $\exists k_1, k_2, k_3$ , 使得  $\gamma = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3$ , 即

$$A^n \gamma = A^n(k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3) = k_1 A^n \xi_1 + k_2 A^n \xi_2 + k_3 A^n \xi_3 = k_1 \lambda_1^n \xi_1 + k_2 \lambda_2^n \xi_2 + k_3 \lambda_3^n \xi_3 = k_1 \lambda_1^n \xi_1 + k_2 \lambda_2^n \xi_2$$

作增广矩阵  $B = (\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 : \gamma) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 2 \\ -1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 2 & 1 & : & -1 \end{pmatrix}$ , 将其化为行最简形

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 2 \\ -1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 2 & 1 & : & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 + r_1 \\ r_3 - 2r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & -1 & : & -1 \\ 0 & 0 & 3 & : & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 \times \frac{1}{3} \\ r_2 + r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{因此 } k_1 = 1, k_2 = -\frac{2}{3}, k_3 = \frac{1}{3}, \text{ 故 } A^n \gamma = \lambda_1^n \xi_1 - \frac{2}{3} \lambda_2^n \xi_2 = \begin{pmatrix} 3^n + \frac{2}{3} \cdot (-3)^n \\ -3^n + \frac{2}{3} \cdot (-3)^n \\ -\frac{4}{3} \cdot (-3)^n \end{pmatrix}.$$

**例 14.3.11.** 设二次型

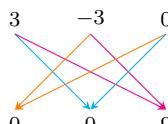
$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 2ax_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3 \quad (a \in \mathbb{N})$$

经过正交变换  $x = Qy$  化为标准形为  $y_1^2 + 6y_2^2 + by_3^2$ ,

(1) 求  $a, b$  的值及正交变换;

(2) 证明: 二次型  $x^\top (A^* + 37E)x$  正定, 其中  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵.

(1) 二次型的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -2 \\ a & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ , 且  $A \sim \text{diag}(1, 6, b)$ , 由矩阵相似可得  $\text{tr } A = 1 + 6 + b$ ,  $\det A = 6b$ , 解得  $a = 2, b = -6$ , 因此  $A$  的特征值分别为  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -6$ ,



<sup>3</sup>因为  $A^*$  的特征值为  $\frac{\det A}{\lambda}$ , 且  $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ , 或者可理解为

法一:  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 4 & -4 \\ 2 & -4 & \lambda + 3 \end{vmatrix}$ , 当  $\lambda = \lambda_1$  时,  $(\lambda E - A)x = 0$ , 解得特征向量为  $\xi_1 = (-2, 0, 1)^\top$ ; 当

$\lambda = \lambda_2$  时,  $(6E - A)x = 0$ , 解得特征向量为  $\xi_2 = (1, 5, 2)^\top$ ; 当  $\lambda = \lambda_3$  时,  $(-6E - A)x = 0$ , 解得特征向量为  $\xi_3 = (1, -1, 2)^\top$ ,

法二:  $\lambda = \lambda_1$  时,  $1E - A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $r_1$  可由  $r_2$  与  $(3, 1, 6)$  线性表示, 则

$$(-2, -3, -4) \times (3, 1, 6) = (-14, 0, 7) \Rightarrow (-2, 0, 1) \Rightarrow \xi_1 = (-2, 0, 1)^\top$$

当  $\lambda = \lambda_2$  时,  $6E - A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} r_3 - \frac{1}{3}r_1 \\ \frac{2}{3}r_3 + \frac{2}{3}r_2 \\ r_2 \times \frac{3}{2} \\ r_1 \times \frac{1}{2} \end{array}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $r_1$  可由  $r_2$  与  $(3, -3, 6)$  线性表示, 则

$$(0, 2, -5) \times (3, -3, 6) = (-3, -15, -6) \Rightarrow (1, 5, 2) \Rightarrow \xi_2 = (1, 5, 2)^\top$$

当  $\lambda = \lambda_3$  时,  $-6E - A = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 \\ -2 & -10 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} r_1 \times \frac{1}{2} \\ r_2 \times \frac{1}{2} \\ r_2 - r_1 - r_3 \\ r_2 \leftrightarrow r_3 \end{array}} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $r_1$  可由  $r_2$  与  $(-5, 3, 4)$  线性表示,

则

$$(2, -4, -3) \times (-5, 3, 4) = (-7, 7, -14) \Rightarrow (1, -1, 2) \Rightarrow \xi_3 = (1, -1, 2)^\top$$

将特征向量  $\xi_{1,2,3}$  单位化得

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

令  $Q = (e_1, e_2, e_3)$ , 则  $x = Qy$  为所求正交变换, 其中  $Q = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

(2) 因为  $A$  的特征值分别为  $1, 6, -6$ , 因此  $A^*$  的特征值为  $-36, -6, 6$ , 那么  $A^* + 37E$  的特征值为  $1, 31, 43$ , 皆大于 0, 因此二次型  $x^\top(A^* + 37E)x$  正定.

例 14.3.12. 设  $\alpha$  为 3 维非零实列向量,  $A = E - \frac{a}{\alpha^\top \alpha} \alpha \alpha^\top$  为正交矩阵, 其中  $a \neq 0$ ,  $E$  为三阶单位矩阵,

(1) 求  $a$  的值, 并证明:  $\alpha$  与  $A\alpha$  线性相关;

(2) 当  $\alpha = (b, b, 0)^\top$  ( $b \neq 0$ ) 时, 求正交变换  $x = Qy$  将二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x^\top Ax$  化为规范形.

(1) 由  $A^\top = \left(E - \frac{a}{\alpha^\top \alpha} \alpha \alpha^\top\right)^\top = E - \frac{a}{\alpha^\top \alpha} (\alpha \alpha^\top)^\top = E - \frac{a}{\alpha^\top \alpha} (\alpha^\top)^\top \alpha^\top = E - \frac{a}{\alpha^\top \alpha} \alpha \alpha^\top = A$  可知,  $A$  为实对称矩阵, 那么

$$A^2 = AA^\top = \left(E - \frac{a}{\alpha^\top \alpha} \alpha \alpha^\top\right)(E - \frac{a}{\alpha^\top \alpha} \alpha \alpha^\top) = E - \frac{2a}{\alpha^\top \alpha} \alpha \alpha^\top + \frac{a^2}{(\alpha^\top \alpha)^2} \alpha \underbrace{\alpha^\top \alpha}_{\alpha^\top \alpha} \alpha^\top = E + \frac{a^2 - 2a}{\alpha^\top \alpha} \alpha \alpha^\top$$

又因为  $A$  是正交矩阵, 所以  $A^2 = E$ , 即  $\frac{a^2 - 2a}{\alpha^\top \alpha} \alpha \alpha^\top = O$ , 而  $\alpha$  为 3 维非零实列向量, 即  $\alpha^\top \alpha \neq 0$ ,  $\alpha \alpha^\top \neq O$ , 因此  $a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 2$  ( $a \neq 0$ ),  $A\alpha = \left(E - \frac{a}{\alpha^\top \alpha} \alpha \alpha^\top\right)\alpha = \alpha - a\alpha = -\alpha$ , 因此  $\alpha$  与  $A\alpha$  线性相关.

(2) 法一: 当  $\alpha = (b, b, 0)^\top$  ( $b \neq 0$ ) 时,

$$\alpha^\top \alpha = (b, b, 0) \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = 2b^2, \quad \alpha \alpha^\top = \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} (b, b, 0) = \begin{pmatrix} b^2 & b^2 & 0 \\ b^2 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = b^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

那么  $A = E - \frac{2}{\alpha^\top \alpha} \alpha \alpha^\top = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 因此特征多项式为 (两种方法)

$$(i) |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)(\lambda - 1) = 0, \text{ 得特征值为 } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1,$$

$$(ii) \lambda^3 - \text{tr } A \cdot \lambda^2 + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq 3} \begin{vmatrix} a_{j_1 j_1} & a_{j_1 j_2} \\ a_{j_2 j_1} & a_{j_2 j_2} \end{vmatrix} \cdot \lambda - \det A = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1, \text{ 解得 } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1,$$

当  $\lambda = \lambda_1$  时, 解得特征向量为  $\xi_1 = (1, 1, 0)^\top$ ; 当  $\lambda = \lambda_{2,3}$  时, 解得对应的特征向量分别为  $\xi_2 = (-1, 1, 0)^\top$ ,  $\xi_3 = (0, 0, 1)^\top$ , 将  $\xi_{1,2,3}$  分别单位化, 得

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

令  $Q = (e_1, e_2, e_3)$ , 在正交变换  $x = Qy$  下, 标准形为  $-y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$  也是规范形.

**法二:** 不妨设  $B = \alpha\alpha^\top = b^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $\text{rank } B = 1$ , 所以矩阵  $B$  的特征值为

$$\lambda_{b1} = \lambda_{b2} = 0, \lambda_{b3} = \text{tr } B = \alpha^\top \alpha = 2b^2$$

又因为  $A = E - \frac{2}{\alpha^\top \alpha} \alpha\alpha^\top = E - \frac{1}{b^2} B$ , 因此矩阵  $A$  的特征值为  $\lambda_{a1} = \lambda_{a2} = 1, \lambda_{a3} = -1$ , 并且  $\lambda_{b1}$  对应的特征向量为  $\xi_1 = (-1, 1, 0)^\top$ ;  $\lambda_{b2}$  对应的特征向量为  $\xi_2 = (0, 0, 1)^\top$ ;

$$B\alpha = \alpha\alpha^\top \alpha = \text{tr } B \cdot \alpha \Rightarrow \xi_3 = (1, 1, 0)^\top$$

单位化得  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 令  $Q = (e_1, e_2, e_3)$ , 则在正交变换  $x = Qy$  下, 标准形为  $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$  也是规范形.

**例 14.3.13.** 设  $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  为二阶正交矩阵, 证明:  $P^n$  可以表示为

$$P^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}.$$

**证** 当  $n = 2$  时,  $P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$ , 当  $n = 3$  时,  $P^3 = P^2 \cdot P = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 3\theta & -\sin 3\theta \\ \sin 3\theta & \cos 3\theta \end{pmatrix}$ , 猜想  $P^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$ , 下面利用数学归纳法证明:

当  $k = 1, 2$  时, 显然成立, 假设当  $k = n$  时, 公式成立, 那么当  $k = n+1$  时, 有

$$\begin{aligned} P^{n+1} &= P^n \cdot P = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta & -\cos n\theta \sin \theta - \sin n\theta \cos \theta \\ \sin n\theta \cos \theta + \cos n\theta \sin \theta & -\sin n\theta \sin \theta + \cos n\theta \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos((n+1)\theta) & -\sin((n+1)\theta) \\ \sin((n+1)\theta) & \cos((n+1)\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

显然此时, 猜想公式成立, 因此对一切的正整数  $n$ , 猜想的公式均成立, 故  $P^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$ .

**例 14.3.14.** 已知  $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{n} \\ x & 1 \end{pmatrix}$ , 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (E - A^n) \right]$  (注明: 矩阵的极限, 即它每个元素取极限, 且  $n \in \mathbb{N}^*$ ).

注意到  $A$  的列向量相互正交, 且模为  $|\alpha| = \sqrt{1^2 + (\pm \frac{x}{n})^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{n^2}}$ , 把矩阵  $A$  表示为  $A = \alpha P$ , 其中  $P$  为正交矩阵, 由例题 14.3.13 知

$$A^n = \alpha^n \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$$

其中  $\theta = \arcsin\left(\frac{x}{n|\alpha|}\right)$ , 当  $n \rightarrow +\infty$  时, 有

$$|\alpha| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1, |\alpha|^n = 1$$

而  $n\theta = \frac{x}{|\alpha|} \left( \frac{|\alpha|n}{x} \arcsin \frac{x}{n|\alpha|} \right) \rightarrow x$  ( $n \rightarrow +\infty$ ), 所以  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathbf{E} - \mathbf{A}^n) = \begin{pmatrix} 1 - \cos x & \sin x \\ -\sin x & 1 - \cos x \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (\mathbf{E} - \mathbf{A}^n) \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 1 - \cos x & \sin x \\ -\sin x & 1 - \cos x \end{pmatrix} = \lim_{x \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{1 - \cos x}{x} & \frac{\sin x}{x} \\ -\frac{\sin x}{x} & \frac{1 - \cos x}{x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin x}{x} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 14.3.2 谱分解

**定理 14.3.3 (谱分解定理).** 若  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda_i$ , 所对应特征向量为  $\mathbf{x}_i$ , 经过单位化和正交化, 化为两两正交的单位特征向量  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 则有

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\top.$$

**例 14.3.15.** 设  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{3 \times 3}$  为实对称矩阵,  $\mathbf{A}$  的每行元素之和均为 0, 设 2, 3 是  $\mathbf{A}$  的非零特征值, 则  $a_{11}$  对应的代数余子式  $\mathbf{A}_{11}$  为

A. 1

B. 2

C. 5

D. 6

因为  $\mathbf{A}$  的每行元素之和均为 0, 故由定理 13.1.8 知,  $\mathbf{A}$  的另一特征值为 0, 因此矩阵  $\mathbf{A}$  的全部特征值为 0, 2, 3, 又由定理 13.1.6 知矩阵  $\mathbf{A}$  的伴随矩阵的特征值为

$$\lambda_1^* = 2 \times 3 = 6, \lambda_2^* = 0 \times 3 = 0, \lambda_3^* = 0 \times 2 = 0$$

且  $\lambda_1^*$  对应的特征向量为  $(1, 1, 1)^\top$ , 又由定理 14.3.3, 知

$$\mathbf{A}^* = 0 + 0 + 6 = 6 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

故  $\mathbf{A}_{11} = 2$ , 选 B.

**例 14.3.16.** 设  $\mathbf{A}$  为三阶实对称不可逆矩阵, 且  $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 3 \\ -12 & -6 & 12 \end{pmatrix}$ , 求  $\mathbf{A}$ .

对等式两边同时转置, 有  $\mathbf{A}^\top \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -6 & 12 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$ , 令  $\xi_1 = (2, -2, 1)^\top$ ,  $\xi_2 = (-2, -1, 2)^\top$ , 则有

$$\mathbf{A}^\top \xi_1 = 3\xi_1, \mathbf{A}^\top \xi_2 = 6\xi_2 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6$$

又因为  $\mathbf{A}$  不可逆, 所以  $\det \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0$ , 所以  $\mathbf{A}$  的特征值分别为 2, 6, 0, 故

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\top = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \cdot \frac{\xi_i}{\|\xi_i\|} \cdot \left( \frac{\xi_i}{\|\xi_i\|} \right)^\top = 3 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} (2, -2, 1) + 6 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (-2, -1, 2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**例 14.3.17.** 矩阵  $A$  为 3 阶实对称矩阵, 特征值为 0, 1, 1, 且  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$  是  $A$  的两个不同的特征向量, 若  $A(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_2$ , 求  $A$ .

若  $\alpha_1, \alpha_2$  都为 0 的特征向量, 则  $A(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$ , 与已知条件矛盾; 若  $\alpha_1, \alpha_2$  都为 1 的特征向量, 则  $A(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$ , 与已知条件矛盾; 若  $\alpha_1, \alpha_2$  分别为 1, 0 的特征向量, 则  $A(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1$ , 与已知条件矛盾; 综上,  $\alpha_1$  与  $\alpha_2$  分别为 0, 1 的特征向量, 又  $A$  为实对称矩阵, 那么  $\alpha_1$  与  $\alpha_2$  相互正交, 那么它们的内积为零, 解得  $a = 0$ , 故  $\alpha_1 = (1, 1, 0)^\top$ ,  $\alpha_2 = (1, -1, 1)^\top$ , 并且  $A - E$  的特征值为  $-1, 0, 0$ , 由定理 14.3.3 知

$$A - E = (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**例 14.3.18.** 假设 3 阶实对称矩阵  $A$  的秩为 2, 并且  $AB = C$ , 其中  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,

求  $A$  的所有特征值及相应的特征向量, 并求矩阵  $A$  及  $A^{2023}$ .

设  $\xi_1 = (1, 0, -1)^\top$ ,  $\xi_2 = (1, 0, 1)^\top$  那么  $B = (\xi_1, \xi_2)$ ,  $C = (-\xi_1, \xi_2)$ , 于是

$$AB = C \Rightarrow A(\xi_1, \xi_2) = (-\xi_1, \xi_2)$$

即  $A\xi_1 = -\xi_1$ ,  $A\xi_2 = \xi_2$ , 则  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$  是  $A$  的特征值,  $\xi_1, \xi_2$  是  $A$  的分别属于  $\lambda_1, \lambda_2$  的特征向量, 又  $\text{rank } A = 2$ , 则  $\xi_3 = 0$ , 于是

$$A = \sum_{i=1}^3 \lambda_i e_i e_i^\top = (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, -1) + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1) + 0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

那么  $A^{2023} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**例 14.3.19.** 设 3 阶实对称矩阵  $A$  的每行元素之和为 3, 且  $\text{rank } A = 1$ ,  $\beta = (-1, 2, 2)^\top$ ,

(1) 求  $A^n \beta$ ; (2) 求  $\left( A - \frac{3}{2}E \right)^{2024}$ .

(1) 法一: 因为  $A$  的每行元素之和为 3, 故特征值  $\lambda_1 = 3$ , 且对应的特征向量为  $\xi_1 = (1, 1, 1)^\top$ , 又因为  $A$  是实对称矩阵, 所以  $A$  一定能相似对角化, 并且由  $\text{rank } A = 1$ , 故矩阵  $A$  的非零特征值个数为 1, 即  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ , 设其对应的特征向量为  $\xi_2, \xi_3$ , 则  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  相互正交, 故可令  $\xi_2 = (-1, 1, 0)^\top$ ,  $\xi_3 = (-1, 0, 1)^\top$ , 因为  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  是三维空间中线性无关的三个向量, 则其线性组合能表示该空间中的任一向量, 即  $\exists k_1, k_2, k_3$ , 使得  $\beta = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3$ , 即

$$A^n \beta = A^n(k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3) = k_1 A^n \xi_1 + k_2 A^n \xi_2 + k_3 A^n \xi_3 = k_1 \lambda_1^n \xi_1 + k_2 \lambda_2^n \xi_2 + k_3 \lambda_3^n \xi_3$$

作增广矩阵  $B = (\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 : \beta) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 将其化为行最简形

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_1, r_3 - r_1]{r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \times (-\frac{1}{3})]{r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

因此  $k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = 1$ , 故  $A^n \beta = 2\lambda_1^n \xi_1 + \lambda_2^n \xi_2 + \lambda_3^n \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^n \\ 2 \cdot 3^n \\ 2 \cdot 3^n \end{pmatrix} = 3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

法二: 同上, 得  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \xi_1 = (1, 1, 1)^\top$ , 将  $\xi_1$  单位化, 得  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 因此

$$A = \sum_{i=1}^3 \lambda_i e_i e_i^\top = \lambda_1 e_1 e_1^\top = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

又因为  $\text{rank } \mathbf{A} = 1$ , 故  $\mathbf{A}^n = (\text{tr } \mathbf{A})^{n-1} \cdot \mathbf{A}$ , 因此  $\mathbf{A}^n \boldsymbol{\beta} = 3^{n-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\beta} = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

(2) 因为  $\mathbf{A}$  的特征值分别为  $3, 0, 0$ , 则  $\mathbf{A} - \frac{3}{2}\mathbf{E}$  的特征值分别为  $\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$ , 又因为  $\mathbf{A}$  是实对称矩阵, 即  $\exists \mathbf{P}$ , 使得

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}, \text{ 则有 } \mathbf{P}^{-1} \left( \mathbf{A} - \frac{3}{2}\mathbf{E} \right) \mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & & \\ & -\frac{3}{2} & \\ & & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \text{ 因此}$$

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{A} - \frac{3}{2}\mathbf{E} \right)^{2024} &= \underbrace{\mathbf{P} \mathbf{\Lambda}_2 \overbrace{\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{P}}^{\mathbf{E}} \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{P}^{-1} \cdots \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{P}^{-1}}_{2024} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}_2^{2024} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & & \\ & -\frac{3}{2} & \\ & & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}^{2024} \mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P} \left( \frac{3}{2} \right)^{2024} \mathbf{E} \mathbf{P}^{-1} = \left( \frac{3}{2} \right)^{2024} \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} = \left( \frac{3}{2} \right)^{2024} \mathbf{E}. \end{aligned}$$

**例 14.3.20.** 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  的矩阵为  $\mathbf{A}$ , 已知

$$|\mathbf{A} + \mathbf{E}| = 0, \quad \mathbf{AB} - 2\mathbf{B} = \mathbf{O}$$

其中  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ , 求一个正交变换  $x = \mathbf{Qy}$ , 将二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  化为标准形, 并写出矩阵  $\mathbf{A}$ .

法一: 由  $|\mathbf{A} + \mathbf{E}| = |\mathbf{A} - (-1)\mathbf{E}| = 0$ , 知  $\mathbf{A}$  的一个特征值为  $\lambda_1 = -1$ , 且记  $\mathbf{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$ , 由  $\mathbf{AB} - 2\mathbf{B} = \mathbf{O}$  知

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}_1, \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}_2, \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}_3) = (2\boldsymbol{\beta}_1, 2\boldsymbol{\beta}_2, 2\boldsymbol{\beta}_3)$$

又  $\text{rank } \mathbf{B} = 2$ , 所以 2 是矩阵  $\mathbf{A}$  的二重特征值, 对应的特征向量分别为<sup>4</sup>  $\boldsymbol{\xi}_2 = \boldsymbol{\beta}_2$ ,  $\boldsymbol{\xi}_3 = \boldsymbol{\beta}_3$ , 且已正交, 又因为  $\mathbf{A}$  是二次型的系数矩阵, 则  $\mathbf{A}$  是实对称矩阵<sup>5</sup>, 设  $\lambda_1$  对应的特征向量为  $\boldsymbol{\xi}_1$ , 于是

$$(-1, 0, 1) \times (-1, 2, 1) = (-2, -2, -2) \Rightarrow (1, 1, 1) \Rightarrow \boldsymbol{\xi}_1 = (1, 1, 1)^\top$$

分别将特征向量  $\boldsymbol{\xi}_{1,2,3}$  单位化, 有  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , 那么

$$\mathbf{Q} = (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

因此  $\mathbf{Q}^\top \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ , 因此二次型的标准形为  $f(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^\top$$

<sup>4</sup>这里最好要选择矩阵  $\mathbf{B}$  中已经正交的向量, 可以由  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ , 且  $(-1, 0, 1) \cdot (-1, 2, -1) = 0$  知选  $\boldsymbol{\beta}_2$  与  $\boldsymbol{\beta}_3$  最合适.

<sup>5</sup>一般地, 不考虑带有虚数的多项式.

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

法二：同上得  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ ,  $\xi_1 = (1, 1, 1)^\top$ ,  $\xi_2 = (-1, 0, 1)^\top$ ,  $\xi_3 = (-1, 2, -1)^\top$ , 那么  $A - 2E$  的特征值分别为  $-3, 0, 0$ , 则

$$A - 2E = -3e_1 e_1^\top = -3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)^\top = -\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**例 14.3.21.** 设 3 阶实矩阵  $A$  及其伴随矩阵  $A^*$  满足  $A - A^* - E = O$ , 且  $\det A = 2$ ,

(1) 证明:  $A$  能相似对角化;

(2) 如果  $A$  为实对称矩阵, 且  $\xi = (1, 1, -1)^\top$  是齐次线性方程组  $(A - 2E)x = 0$  的一个解, 求对称矩阵  $B$ , 使得  $B^2 = A + E$ .

(1) 因为  $AA^* = A^*A = |A|E = 2E$ , 所以

$$A(A - A^* - E) = O \Rightarrow A^2 - A - 2E = O \Rightarrow (A + E)(A - 2E) = O$$

那么

$$3 = \text{rank}[(A + E) - (A - 2E)] \leqslant \text{rank}(A + E) + \text{rank}(A - 2E) \leqslant 3 \Rightarrow \text{rank}(A + E) + \text{rank}(A - 2E) = 3$$

又因为属于特征值  $-1$  的特征向量的个数为  $3 - \text{rank}(A + E)$ , 属于特征值  $2$  的特征向量的个数为  $3 - \text{rank}(A - 2E)$ , 相加得  $A$  有 3 个线性无关的特征向量, 即  $A$  能相似对角化.

(2) 由 (1) 可知, 矩阵  $A$  的两个特征值分别为  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 2$ , 且  $\det A = 2 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ , 所以  $\lambda_3 = -1$ , 又因为  $\xi = (1, 1, -1)^\top$  是齐次线性方程组  $(A - 2E)x = 0$  的一个解, 所以  $\lambda_2$  对应的特征向量为  $\xi = (1, 1, -1)^\top$ , 故  $A + E$  的两个特征值分别为  $3, 0, 0$ , 所以存在正交矩阵  $Q$ , 使得  $Q^\top (A + E) Q = \text{diag}(3, 0, 0)$  因此

$$A + E = Q \text{diag}(3, 0, 0) Q^\top = Q \begin{pmatrix} \pm\sqrt{3} & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} Q^\top Q \begin{pmatrix} \pm\sqrt{3} & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} Q^\top \Rightarrow B = Q \begin{pmatrix} \pm\sqrt{3} & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} Q^\top$$

$$\text{即 } B = \pm\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, -1)^\top = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**例 14.3.22.** 设  $A = (a_{ij})$  为三阶实对称矩阵,  $\det A = -2$ ,  $\text{tr } A = 0$ , 记

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ x_3 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ x_4 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

已知  $(1, 1, 1)^\top$  为线性方程组  $(A^* - E)x = 0$  的解, 其中  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵, 试给出正交变换  $x = Qy$ , 使得  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  化为标准形, 并求出矩阵  $A$ .

记  $x = (x_2, x_3, x_4)^\top$ , 由行列式的降阶公式  $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D| |A - BD^{-1}C|$ , 得

$$f = \begin{vmatrix} x_1^2 & x^\top \\ x & A \end{vmatrix} = \det A \cdot (x_1^2 - x^\top A^{-1} x) = -2x_1^2 - x^\top A^* x$$

问题归结为求正交变换  $x = Py$  使得  $g(x) = x^\top A^* x$  化为标准形, 令  $\alpha_1 = (1, 1, 1)^\top$ , 那么

$$A^* \alpha_1 = \alpha_1 \Rightarrow AA^* \alpha_1 = A\alpha_1 \Rightarrow A\alpha_1 = \det A \cdot E\alpha_1 = -2\alpha_1$$

即  $\lambda_1 = -2$  是矩阵  $A$  的一个特征值, 其对应的特征向量为  $\alpha_1 = (1, 1, 1)^\top$ , 又因为  $\det A = -2$ ,  $\text{tr } A = 0$ , 所以  
 $\begin{cases} \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$  解得  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ , 设  $\lambda_2$  对应的特征向量为  $(t_1, t_2, t_3)^\top$ , 因为  $A$  是三阶实对称矩阵, 所以不同特征值的特征向量是正交的, 所以  $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ , 由此解得  $A$  的属于 1 的两个相互正交的特征向量为  $\alpha_2 = (-1, 1, 0)^\top$ ,  $\alpha_3 = (-1, -1, 2)^\top$ , 取正交矩阵

$$P = \left( \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}, \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}, \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

则  $P^\top AP = \text{diag}(-2, 1, 1)$ , 因此  $P^\top A^* P = |A|(P^\top AP)^{-1} \text{diag}(1, -2, -2)$ , 于是, 可取正交变换  $x = Py$ , 其中  $y = (y_2, y_3, y_4)^\top$ , 使得  $g = y^\top (P^\top A^* P)y = y_2^2 - 2y_3^2 - 2y_4^2$ , 最后再令  $x_1 = y_1$ , 以及  $Q = \begin{pmatrix} 1 & \\ & P \end{pmatrix}$ , 则正交变换  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y \end{pmatrix}$  可使  $f$  化为标准形  $f = -2y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2 + 2y_4^2$ , 并且由

$$A - E = \sum_{i=1}^3 \lambda_i e_i e_i^\top = -3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = E - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

其中  $e_i = \frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}$ .

### 14.3.3 正交变换的应用

#### 几何应用

**例 14.3.23.** 设中心在原点的椭圆方程为  $x^2 - 4xy + 5y^2 = 1$ , 求该椭圆的长半轴与短半轴.

方程系数矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ , 那么  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$ , 即

$$(3 + 2\sqrt{2})z_1^2 + (3 - 2\sqrt{2})z_2^2 = 1 \Rightarrow \frac{z_1^2}{3 + 2\sqrt{2}} + \frac{z_2^2}{3 - 2\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \frac{z_1^2}{\left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1}\right)^2} + \frac{z_2^2}{\left(\frac{1 + \sqrt{2}}{1}\right)^2} = 1$$

因此, 长半轴长度为  $\sqrt{2} + 1$ , 短半轴长度为  $\sqrt{2} - 1$ .

**例 14.3.24.** 求椭圆  $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 1$  的面积.

由题意  $f = X^\top AX = X^\top \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = 1$ , 那么  $|\lambda E - A| = (\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 6, \lambda_2 = 1$ , 因此

$$(\lambda_i E - A)\alpha_i = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = (1, 2)^\top, \alpha_2 = (-2, 1)^\top \Rightarrow Q = \left( \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}, \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} \right)$$

$f = X^\top AX$  在  $X = QY$  的作用下, 化为  $f = Y^\top Q^\top AQY = 6y_1^2 + y_2^2 = 1 \Rightarrow S = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$ .

**推论 14.3.1 (一般椭圆面积公式).** 设曲线  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1, A > 0$ , 且  $AC - B^2 > 0$ , 那么该曲线为椭圆, 该椭圆的面积  $S = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}$ .

#### 二次型与曲面方程

**例 14.3.25.** 转换一般二次型方程

$$2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz = 1$$

为标准二次型, 并判定其在直角坐标系  $O - xyz$  中描述的图形类型.

因为  $\begin{matrix} \cdots & \cdots & x & \cdots & y & \cdots & z \\ \cdots & \cdots & 2 & \cdots & 2 & \cdots & -2 \\ x & 2 & 5 & -4 \\ y & 2 & 5 & -4 \\ z & -2 & -4 & 5 \end{matrix}$ , 所以二次型对应的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ , 故特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{r_2+r_3}{r_3+2r_1}} \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ 2\lambda - 2 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10) = 0$$

得矩阵  $A$  的特征值  $\lambda_{1,2,3} = 1, 1, 10$ , 对  $\lambda = 1$ , 解齐次方程组

$$\begin{cases} -x - 2y + 2z = 0 \\ -2x - 4y + 4z = 0 \\ 2x + 4y - 4z = 0 \end{cases}$$

得基础解系  $\alpha_1 = (2, -1, 0)^\top$  与  $\alpha_2 = (2, 0, 1)^\top$ , 将他们正交化, 得  $\beta_1 = \alpha_1$ ,  $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{\|\beta_1\|^2} \beta_1$ , 即

$$\beta_1 = (2, -1, 0)^\top, \beta_2 = (2, 0, 1)^\top - \frac{4}{5}(2, -1, 0)^\top = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)^\top$$

单位化:  $e_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)^\top$ ,  $e_2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^\top$ ; 对  $\lambda = 10$ , 解齐次方程组

$$\begin{cases} 8x - 2y + 2z = 0 \\ -2x + 5y + 4z = 0 \\ 2x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

得基础解系  $(1, 2, -2)^\top$ , 单位化得  $e_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)^\top$ , 令  $T = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ , 则有正交变换  $y = Tx$ , 即

$$\begin{cases} x = \frac{2\sqrt{5}}{5}u + \frac{2\sqrt{5}}{15}v + \frac{1}{3}w \\ y = -\frac{\sqrt{5}}{5}u + \frac{4\sqrt{5}}{15}v + \frac{2}{3}w, \text{ 将原二次型化为 } u^2 + v^2 + 10w^2 = 1, \text{ 即为椭球面.} \\ z = \frac{\sqrt{5}}{2}v - \frac{2}{3}w \end{cases}$$

**例 14.3.26.** 用正交变换将二次曲面的方程

$$x^2 - 2y^2 - 2z^2 - 4xy + 4xz + 8yz - 27 = 0$$

化为标准方程, 并说明该曲面是什么曲面.

设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $X = (x, y, z)^\top$ , 则曲面方程为  $X^\top AX = 27$ ,  $A$  的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda + 2 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 7) = 0$$

对于  $\lambda_{1,2} = 2$ , 解齐次线性方程组  $(\lambda_{1,2}E - A)X = 0$ , 求得对应的线性无关的特征向量为  $\alpha_1 = (-2, 1, 0)^\top$ ,  $\alpha_2 = (2, 0, 1)^\top$ , 并将其正交化, 得

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)^\top, e_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2, 4, 5)^\top$$

对于  $\lambda_3 = -7$ , 解齐次线性方程组  $(\lambda_3 E - A)X = 0$ , 求得对应的单位化特征向量为  $e_3 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)^\top$ , 取正交矩阵  $Q = (e_1, e_2, e_3)$ , 令  $X' = (x', y', z')^\top$ , 则正交变换  $X = QX'$  将曲面的方程  $X^\top AX = 27$  可化为如下标准方程

$$2x'^2 + 2y'^2 - 7z'^2 = 27$$

这是单叶双曲面.

### 最值问题

**例 14.3.27.** 已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$ ,

- (1) 写出二次型  $f$  的矩阵表达式;
- (2) 用正交变换把二次型  $f$  化为标准形, 并写出相应的正交矩阵;
- (3) 若  $\mathbf{x}^\top \mathbf{x} = 5$ , 求  $f_{max}$ .

$$(1) f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$(2) |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda + 3 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 3)(\lambda + 4), \text{ 当 } \lambda = 2 \text{ 时, 由 } (2\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}, \text{ 即}$$

$$2\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \times \frac{1}{2}]{r_3 - \frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 - 2r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则基础解系  $\alpha_1 = (5, 1, -2)^\top$ ; 当  $\lambda = -3$  时,  $(-3\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 即

$$-3\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{r_2 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则基础解系  $\alpha_2 = (0, 2, 1)^\top$ ; 当  $\lambda = -4$  时,  $(-4\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 即

$$-4\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{r_2 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 + 5r_1]{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则基础解系  $\alpha_3 = (-1, 1, -2)$ , 因为  $\mathbf{A}$  为实对称矩阵, 对应于不同特征值的特征向量相互正交, 即  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  相互正交, 故只需将其单位化, 有

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{令 } \mathbf{Q} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ 则经正交变换 } \mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}, \text{ 二次型化为标准形}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{Q}\mathbf{y})^\top \mathbf{A}(\mathbf{Q}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^\top \mathbf{Q}^\top \mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{\Lambda}\mathbf{y} = 2y_1^2 - 3y_2^2 - 4y_3^2.$$

- (3) 因为  $\mathbf{x}^\top \mathbf{x} = (\mathbf{Q}\mathbf{y})^\top (\mathbf{Q}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^\top \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}\mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{y} = 5$ , 故求  $f$  在  $\mathbf{y}^\top \mathbf{y} = 5$  的最大值, 则由定理 13.1.7 得

$$f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{\Lambda}\mathbf{y} = 2y_1^2 - 3y_2^2 - 4y_3^2 \leq 2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = 10$$

**例 14.3.28.** 已知二次型  $f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2zx$ ,

- (1) 用正交变换把二次型  $f$  化为标准形, 并写出相应的正交矩阵;
- (2) 求函数  $f(x, y, z)$  在单位球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  上的最大值与最小值.

$$(1) \text{ 二次型对应的矩阵 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 则特征多项式为}$$

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4) \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$$

那么  $\lambda_1 \mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  其中  $r_1$  可由  $r_2$  与  $(0, 1, -1)$  线性表示, 则

$$(1, 0, 1) \times (0, 1, -1) = (-1, 1, 1) \Rightarrow \xi_1 = (-1, 1, 1)^\top$$

同理可得  $\xi_2 = (0, -1, 1)^\top$ ,  $\xi_3 = (2, 1, 1)^\top$ , 则令  $\mathbf{P} = \left( \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}, \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}, \frac{\xi_3}{\|\xi_3\|} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ , 于是正交

变换  $\mathbf{X}' = \mathbf{P}^\top \mathbf{X}$ , 其中  $\mathbf{X}' = (x', y', z')$ ,  $\mathbf{X} = (x, y, z)$ .

(2) 注意到

$$x^2 + y^2 + z^2 = \mathbf{X}^\top \mathbf{X} = \mathbf{X}^\top \mathbf{P} \mathbf{P}^\top \mathbf{X} = (\mathbf{P}^\top \mathbf{X})^\top (\mathbf{P}^\top \mathbf{X}) = \mathbf{X}'^\top \mathbf{X}' = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

$$f(x, y, z) = \mathbf{X}^\top \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{X}^\top \mathbf{P} \Lambda \mathbf{P}^\top \mathbf{X} = (\mathbf{P}^\top \mathbf{X})^\top \Lambda (\mathbf{P}^\top \mathbf{X}) = (\mathbf{X}')^\top \Lambda (\mathbf{X}') = x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2$$

函数  $f(x, y, z)$  在单位球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  上的最大值与最小值也就是函数  $x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2$  在  $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$  上的最大值与最小值, 因此

$$f_{max} = \max_{x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1} \{x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2\} = \max_{x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1} \{4 - 3x'^2 - 2y'^2\} = 4 - 3x'^2 - 2y'^2 \Big|_{(0,0,1)} = 4$$

$$f_{min} = \min_{x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1} \{x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2\} = \min_{x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1} \{1 + y'^2 + 3z'^2\} = 1 + y'^2 + 3z'^2 \Big|_{(1,0,0)} = 1.$$

#### 14.3.4 直角坐标变换

设一般二次曲面的方程为

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$$

写出矩阵形式为

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{B}^\top \mathbf{x} + c = 0 \quad (1)$$

其中  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  ( $a_{ij} = a_{ji}$ ),  $\mathbf{x} = (x, y, z)^\top$ ,  $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)^\top$ , 作正交矩阵  $\mathbf{Q}$ , 使  $\mathbf{Q}^\top \mathbf{A} \mathbf{Q} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , 其中  $\lambda_{1,2,3}$  为  $\mathbf{A}$  的特征值, 那么化为标准方程可分为两种情况进行.

(1) 若方程组  $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} = \mathbf{0}$  有解, 则取其任意一个解  $\boldsymbol{\delta}$ , 作直角坐标变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{x}' + \boldsymbol{\delta}$$

代入 (1) 式得

$$\mathbf{x}'^\top \mathbf{Q}^\top \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{x}' + 2(\mathbf{A}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{B})^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}' + \boldsymbol{\delta}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\delta} + 2\mathbf{B}^\top \boldsymbol{\delta} + c = 0$$

由  $\mathbf{Q}^\top \mathbf{A} \mathbf{Q} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ,  $\mathbf{A}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{B} = \mathbf{0}$ , 可得

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 = d \quad (2)$$

其中  $d = -(\boldsymbol{\delta}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\delta} + 2\mathbf{B}^\top \boldsymbol{\delta} + c)$ , (2) 式就是 (1) 式的标准方程.

- (2) 若方程组  $\mathbf{Ax} + \mathbf{B} = 0$  无解, 则必有  $\det \mathbf{A} = 0$ , 由于  $\det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ , 则  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  中至少有一个为 0, 不妨设  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_3 = 0$ , 作正交变换  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{x}'$ , 代入 (1) 式得

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b'_1 x' + 2b'_2 y' + 2b'_3 z' + c = 0 \quad (3)$$

(i) 若  $\lambda_2 \neq 0$ , 将 (3) 配方得

$$\lambda_1(x' + b'_1)^2 + \lambda_2(y' + b'_2)^2 = d - 2b'_3 z' \quad (4)$$

其中  $d = \lambda_1 b'^2_1 + \lambda_2 b'^2_2 - c$ , 当  $b'_3 \neq 0$  时, 作平移

$$\begin{cases} x'' = x' + b'_1 \\ y'' = y' + b'_2 \\ z'' = z' - \frac{d}{2b'_3} \end{cases}$$

则 (4) 式化为标准方程

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = -2b'_3 z''$$

当  $b'_3 = 0$  时, 作平移  $\begin{cases} x'' = x' + b'_1 \\ y'' = y' + b'_2 \\ z'' = z' \end{cases}$  则 (4) 式化为标准方程

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = d$$

(ii) 若  $\lambda_2 = 0$ , 将 (3) 配方得

$$\lambda_1(x' + b'_1)^2 = d - 2b'_2 y' - 2b'_3 z' \quad (5)$$

其中  $d = \lambda_1 b'^2_1 - c$ , 当  $b'_2, b'_3$  不全为 0 时, 作直角坐标变换

$$\begin{cases} x'' = x' + b'_1 \\ y'' = \frac{1}{\sqrt{b'^2_2 + b'^2_3}}(b'_2 y' + b'_3 z') - \frac{d}{2} \\ z'' = \frac{1}{\sqrt{b'^2_2 + b'^2_3}}(-b'_2 y' + b'_3 z') \end{cases}$$

(5) 式化为标准方程

$$\lambda_1 x''^2 = -2\sqrt{b'^2_2 + b'^2_3} y''$$

当  $b'_2, b'_3$  全为 0 时, 令  $\begin{cases} x'' = x' + b'_1 \\ y'' = y' \\ z'' = z' \end{cases}$  则 (5) 式化为标准方程

$$\lambda_1 x''^2 = d.$$

例 14.3.29. 作直角坐标变换化二次曲面

$$x^2 - 2y^2 + 10z^2 + 28xy + 20xz - 8yz - 26x + 32y + 28z - 38 = 0$$

为标准方程, 并说明是什么曲面.

设  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 14 & 10 \\ 14 & -2 & -4 \\ 10 & -4 & 10 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x} = (x, y, z)^\top$ ,  $\mathbf{B} = (-13, 16, 14)^\top$ ,  $c = -38$ , 曲面方程记为

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{B}^\top \mathbf{x} + c = 0$$

$\mathbf{A}$  的特征多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda - 9)(\lambda - 18)(\lambda + 18)$$

$\mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda_1 = 9$ ,  $\lambda_2 = 18$ ,  $\lambda_3 = -18$ , 当  $\lambda_1 = 9$  时, 由

$$9\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & -14 & -10 \\ -14 & 11 & 4 \\ -10 & 4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -7 & -5 \\ 14 & -11 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则  $r_1$  可由  $r_2$  与  $(2, -1, 0)$  线性表示, 那么特征向量为  $\vec{r}_2 \times (2, -1, 0) = (1, 2, -2) \Rightarrow \xi_1 = (1, 2, -2)^\top$ ; 当  $\lambda_2 = 18$  时, 由

$$18\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 17 & -14 & -10 \\ -14 & 20 & 4 \\ -10 & 4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -7 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则  $r_1$  可由  $r_2$  与  $(-1, 0, 1)$  线性表示, 那么特征向量为  $\vec{r}_2 \times (-1, 0, 1) = (2, 1, 2) \Rightarrow \xi_2 = (2, 1, 2)^\top$ ; 当  $\lambda_3 = -18$  时, 由

$$-18\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -19 & -14 & -10 \\ -14 & -16 & 4 \\ -10 & 4 & -28 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 8 & -2 \\ -5 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则  $r_1$  可由  $r_2$  与  $(1, 1, 0)$  线性表示, 那么特征向量为  $\vec{r}_2 \times (1, 1, 0) = (-2, 2, 1) \Rightarrow \xi_3 = (-2, 2, 1)^\top$ , 将各特征向量单位化, 有

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

得正交矩阵  $\mathbf{Q} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , 因为  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , 方程组  $\mathbf{Ax} + \mathbf{B} = \mathbf{0}$  有唯一解  $\delta = (-1, 1, 0)^\top$ , 作直角坐标变换  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{x}' + \delta$ , 曲面方程化为

$$9x'^2 + 18y'^2 - 18z'^2 = 9$$

得曲面的标准方程为

$$x'^2 + 2y'^2 - 2z'^2 = 1$$

因此曲面为单叶双曲面.



# 概率论与数理统计

## 第 15 章

### 概率论的基本概念

“概率论，当局限在适当的范围内，应该同样引起数学家、实验者和政治家的兴趣。”

——德·摩根

概率论是数学的一个分支，研究随机事件的发生概率和随机现象的规律性。它是研究不确定性的一种工具和方法。

概率论的基本概念包括随机试验、样本空间、事件、概率等。随机试验是指具有多种可能结果的试验，例如掷硬币、抛骰子等。样本空间是指随机试验的所有可能结果的集合。事件是样本空间的子集，表示试验中我们感兴趣的一些结果。概率是事件发生的可能性的度量，通常用一个介于 0 和 1 之间的数来表示。

概率论的基本原理包括古典概型、几何概型和统计概型。古典概型适用于试验结果的数量有限且每个结果发生的可能性相等的情况，例如抛硬币、掷骰子等。几何概型适用于试验结果的数量无限且每个结果发生的可能性相等的情况，例如在一条直线上选择一个点的位置。统计概型适用于试验结果的数量无限且每个结果发生的可能性不相等的情况，例如从一副牌中抽取一张牌。

概率论的应用广泛，包括统计学、金融学、物理学、工程学、生物学等领域。它可用于描述随机现象的规律性、进行风险评估和决策分析、进行数据分析和建模等。概率论提供了一种量化不确定性的方法，帮助我们理解和解决各种实际问题。

## 15.1 随机事件及其概率

### 15.1.1 事件的运算

**定理 15.1.1 (交换律).**  $A \cup B = B \cup A$ ,  $AB = BA$ .

**定理 15.1.2 (结合律).**  $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ,  $ABC = (AB)C = A(BC)$ .

特别地  $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$  不一定成立，比如当  $A \neq \emptyset$ ,  $B = \Omega$ ,  $C = \emptyset$  时，该式不成立。

**定理 15.1.3 (和与积的分配律).**  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ,  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ .

**定理 15.1.4 (差与积的分配律).**  $(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$ ,  $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$ .

**定理 15.1.5 (和与差的分配律).**  $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

特别地  $(A - B) \cup C = (A \cup C) - (B \cup C)$  不一定成立, 比如当  $A = B$ ,  $C \neq \emptyset$  时, 该式不成立.

**定理 15.1.6 (对偶律).**  $\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}$ ,  $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ,  $\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ,  $\overline{ABC} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ .

**定理 15.1.7 (和差转换).** (1) 差:  $A - B = \begin{cases} A - AB = A\bar{B} \\ A - BA = \bar{B}A. \end{cases}$

(2) 和:  $A \cup B = \begin{cases} (A - B) \cup B = A\bar{B} \cup B = \bar{B}A \cup B \\ A \cup (B - A) = A \cup \bar{A}B = A \cup B\bar{A}. \end{cases}$

## 15.1.2 概率的性质

**定理 15.1.8.**  $P(\emptyset) = 0$ ,  $P(\Omega) = 1$ .

**定理 15.1.9 (有限可加性).** 设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是两两互不相容的事件, 则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

(1) 事件  $S$  被分成两个不相容的事件  $S_1, S_2$  ( $S_1 S_2 = \emptyset$ ,  $S_1 \cup S_2 = S$ ), 则  $P(S) = P(S_1) + P(S_2)$ ;

(2) 若  $S_1 \subset S$ , 则  $P(S - S_1) = P(S) - P(S_1)$ .

**定理 15.1.10 (求逆公式).**  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

**例 15.1.1.** 设  $A, B$  为两个随机事件, 若  $P(AB) = 0.25$ ,  $P(B) = 0.3$ ,  $P(A \cup B) = 0.6$ , 求  $P(A | \bar{B})$ .

如图 15.1.1 所示, 则  $P(A | \bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.3}{1 - P(B)} = \frac{3}{7}$ .

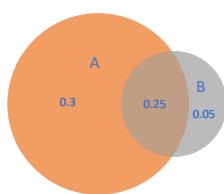


图 15.1.1



图 15.1.2



图 15.1.3

**例 15.1.2.** 设  $A, B$  为随机事件,  $AB = \bar{A}\bar{B}$ ,  $0 < P(B) < 1$ , 求  $P(A | \bar{B}) + P(\bar{A} | B)$ .

因为  $AB = \bar{A}\bar{B}$ , 所以事件  $A + B = \Omega$ , 如图 15.1.2 所示, 则  $P(A | \bar{B}) + P(\bar{A} | B) = P(A | A) + P(B | B) = 1 + 1 = 2$ .

**例 15.1.3.** 已知  $P(\bar{A}) = 0.3$ ,  $P(B) = 0.4$ ,  $P(A - B) = 0.5$ , 求  $P\{B | (A \cup \bar{B})\}$ .

由题意可作出如图 15.1.3 所示的 ven 图, 则  $P\{B | (A \cup \bar{B})\} = \frac{P(B \cap (A \cup \bar{B}))}{P(A \cup \bar{B})} = \frac{P(AB)}{1 - P(AB)} = 0.25$ .

### 15.1.3 古典概率与几何概率

#### 古典概率

**例 15.1.4.** 求 10 个不同规格的零件中混入 3 个次品, 现进行逐个检查, 则查完 5 个零件时正好查出 3 个次品的概率.

法一: 记  $A =$  查完 5 个零件正好查出 3 个次品, 那么事件  $A$  由两个事件构造:

$B =$  前 4 次检查, 查出 2 个次品,  $C =$  第 5 次检查, 查出的是次品

即  $A = BC$ , 由乘法公式  $P(A) = P(BC) = P(B)P(C|B)$ , 前 4 次检查中有 2 个正品和 2 个次品的组合为

$$P(B) = \frac{C_3^2 \cdot C_7^2}{C_{10}^4} = \frac{3}{10}$$

已知  $B$  发生的条件下, 剩下 6 个零件中查出 1 个次品的概率为  $\frac{1}{6}$ , 即  $P(C|B) = \frac{1}{6}$ , 于是  $P(A) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{20}$ .

法二: 事件  $A$  等价于在 3 个次品中选一个放在第 5 个位置上, 然后在 7 个正品中选 2 个与余下的 2 个次品排在前 4 个位置上, 最后将其余 5 个正品随意排在后面 5 个位置上, 所以

$$P(A) = \frac{C_3^1 C_7^2 C_2^2 \cdot 4! \cdot 5!}{10!} = \frac{1}{20}.$$

法三: 考虑 3 只次品在 10 次检查中的位置, 问题转化为前 4 个位置中选 2 个放次品, 第 5 个位置必须放次品, 于是

$$P(A) = \frac{C_4^2 \cdot 1}{C_{10}^3} = \frac{1}{20}.$$

法四: 只考虑放正品的位置, 则前 4 个位置需要放 2 个正品, 后 5 个位置全为正品, 则  $P(A) = \frac{C_4^2 C_5^5}{C_{10}^3} = \frac{1}{20}$

#### 几何概率

### 15.1.4 概率基本公式及条件概率

**定理 15.1.11 (与独立有关的条件概率).** 设  $P(B) \in (0, 1)$ , 则  $A$  与  $B$  相互独立的充要条件为:

$$(1) P(A | B) = P(A | \bar{B});$$

$$(2) P(A | B) + P(\bar{A} | \bar{B}) = 1;$$

$$(3) P(\bar{A} | B) + P(A | \bar{B}) = 1.$$

### 15.1.5 全概率公式和 Bayes 公式

**定义 15.1.1 (完备事件组).** 设  $B_1, B_2, \dots, B_n$  为试验  $E$  的一组事件,  $\Omega$  为样本空间, 若满足以下两个条件:

$$(1) B_i B_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$(2) \quad B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega.$$

则称  $B_1, B_2, \dots, B_n$  是一个完备事件组, 也称  $B_1, B_2, \dots, B_n$  为样本空间  $\Omega$  的一个划分.

**定理 15.1.12 (全概率公式与 Bayes 公式).** 设  $\Omega$  为试验  $E$  的样本空间,  $B_1, B_2, \dots, B_n$  为  $\Omega$  的一个划分, 且  $P(B_i) > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 则

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) P(A | B_i) = P(A | B_1) P(B_1) + P(A | B_2) P(B_2) + \cdots + P(A | B_n) P(B_n)$$

称为全概率公式. 而

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i A)}{P(A)} = \frac{P(A | B_i) P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A | B_j) P(B_j)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

称为 Bayes 公式.

**例 15.1.5.** 一条生产线生产  $n$  件产品不出故障的概率为  $\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) 若每件产品合格的概率为  $p$  ( $0 < p < 1$ ), 且各产品是否合格相互独立, 求该生产线在两次故障之间共生产  $k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) 件合格品的概率.

设事件  $A_i$  = “两次故障之间生产的产品总个数为  $i$  ( $i = 0, 1, \dots$ )”, 事件  $B_k$  = “两次故障之间生产的合格品个数为  $k$  ( $k = 0, 1, \dots, i$ ), 那么事件  $B_k$  的概率为

$$\begin{aligned} P\{B_k\} &= \sum_{i=0}^{\infty} P\{A_i\} \cdot P\{B_k | A_i\} = \sum_{i=k}^{\infty} P\{A_i\} \cdot P\{B_k | A_i\} = \sum_{i=k}^{\infty} \left( \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \right) \cdot [C_i^k p^k (1-p)^{i-k}] \\ &= e^{-\lambda} p^k \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} C_i^k (1-p)^{i-k} = e^{-\lambda} p^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i+k}}{(i+k)!} C_{i+k}^k (1-p)^i = e^{-\lambda} p^k \lambda^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i+k)!} \frac{(i+k)!}{k! i!} (1-p)^i \\ &= \frac{1}{k!} e^{-\lambda} p^k \lambda^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^i}{i!} = \frac{1}{k!} e^{-\lambda} p^k \lambda^k \cdot e^x \Big|_{x=\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \end{aligned}$$

## 15.2 事件的独立性

# 第 16 章

## 随机变量及其分布

“我创建了形貌随机征象的一种概率散布..”

——泊松

随机变量是一个可以随机取不同值的变量, 其取值是由随机事件的结果决定的. 随机变量可以是离散的, 也可以是连续的.

随机变量的分布描述了其取不同值的概率分布情况. 常见的随机变量分布包括:

1. 离散型随机变量的分布:

- (a) 二项分布: 描述了在一次伯努利试验中成功的次数的分布.
- (b) 泊松分布: 描述了在一段时间内某事件发生次数的分布.
- (c) 几何分布: 描述了在一系列独立伯努利试验中首次成功所需的次数的分布.

2. 连续型随机变量的分布:

- (a) 正态分布: 也称为高斯分布, 是最常见的连续型随机变量分布, 具有钟形曲线.
- (b) 均匀分布: 描述了在一个区间内各个数值出现的概率相同的分布.
- (c) 指数分布: 描述了连续时间内某事件发生的间隔时间的分布.

除了以上列举的分布外, 还有众多其他类型的随机变量分布, 每种分布都有其特定的数学形式和特征. 在统计学和概率论中, 随机变量及其分布是研究的重要对象, 用来描述和分析随机现象的规律.

### 16.1 离散型随机变量的概率分布

#### 16.1.1 离散型随机变量的分布函数

**定义 16.1.1 (分布函数).** 设离散型随机变量  $X$  的分布律为  $P\{X = x_k\} = p_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , 则  $X$  的分

布函数为

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_k \leq x} p_k$$

$$\text{或者 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p_1, & x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

**定理 16.1.1 (分布函数的性质).** 以下三条是判定一个函数是否为分布函数的充要条件.

- (1) 单调性:  $F(x)$  是  $x$  的单调不减函数, 即对于任意实数  $x_1 < x_2$ , 有  $F(x_1) \leq F(x_2)$ ;
- (2) 有界性:  $0 \leq F(x) \leq 1$ ,  $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ,  $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ ;
- (3) 右连续:  $F(x)$  是  $x$  的右连续函数, 即对任意实数  $x$ , 有  $F(x^+) = F(x)$ .

### 16.1.2 二项分布

**定义 16.1.2 (二项分布).** 在  $n$  重伯努利试验中, 若用随机变量  $X$  表示所关心事件 A 发生的次数,  $P(A) = p$  ( $0 < p < 1$ ), 则  $X$  的分布律为

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

则称  $X$  服从参数为  $n, p$  的二项分布, 记作  $X \sim B(n, p)$ .

- (1) 0-1 分布可以视为  $n = 1$  时的二项分布;
- (2) 若  $X \sim B(n, p)$ , 令  $Y = n - X$ , 则  $Y \sim B(n, 1 - p)$ .

## 16.2 连续型随机变量的概率分布

### 16.2.1 连续型随机变量概率密度

**定义 16.2.1 (连续型随机变量概率密度).** 设随机变量  $X$  的分布函数是  $F(x)$ , 若存在一个非负可积函数  $f(x)$ , 使对于任意实数  $x$ , 都有

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad x \in \mathbb{R}$$

则称  $X$  为连续型随机变量, 称  $f(x)$  为  $X$  的概率密度函数, 简称概率密度, 记为  $X \sim f(x)$ .

**定理 16.2.1 (连续型随机变量概率密度的性质).** 概率密度  $f(x)$  的性质如下:

- (1) 非负性:  $f(x) \geq 0$ ;

$$(2) \text{ 规范性: } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1;$$

$$(3) \text{ 对任意实数 } a \leq b \text{ 都有 } P\{a < X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx;$$

(4) 若  $f(x)$  在点  $x$  处连续, 则有  $F'(x) = f(x)$ .

## 16.2.2 均匀分布

**定义 16.2.2 (均匀分布).** 若随机变量  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

则称  $X$  在区间  $(a, b)$  上服从均匀分布, 记为  $X \sim U(a, b)$ . 其分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & b \leq x. \end{cases}$$

## 16.2.3 指数分布

**定义 16.2.3 (指数分布).** 若随机变量  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

则称  $X$  服从参数为  $\lambda (\lambda > 0)$  的指数分布, 记为  $X \sim E(\lambda)$ , 其分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

(1) 指数分布常用来描述电子元器件的寿命,  $P\{X > x\} = e^{-\lambda x}$ ;

(2) 指数分布具有无记忆性, 对于任意  $s, t > 0$ , 有  $P\{X > s + t | X > s\} = P\{X > t\}$ .

**例 16.2.1.** 设  $X$  是服从参数为 2 的指数分布的随机变量, 求随机变量  $Y = X - \frac{1}{2}$  的概率密度函数  $f_Y(y)$ .

因为  $X \sim E(2)$ , 所以其概率密度为  $f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ , 现  $Y = X - \frac{1}{2}$ , 所以

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\left\{X - \frac{1}{2} \leq y\right\} = P\left\{X \leq y + \frac{1}{2}\right\} = \int_{-\infty}^{y+\frac{1}{2}} f_X(x)dx = F_X\left(y + \frac{1}{2}\right)$$

那么

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = F'_X\left(y + \frac{1}{2}\right) = f_X\left(y + \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 2e^{-2y-1}, & y > -\frac{1}{2} \\ 0, & y \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

**例 16.2.2.** 设随机变量  $X \sim E(2)$ ,  $a$  为大于 2 的常数, 已知  $P\{X \leq a | X > 2\} = 1 - e^{-2}$ , 求  $a$ .

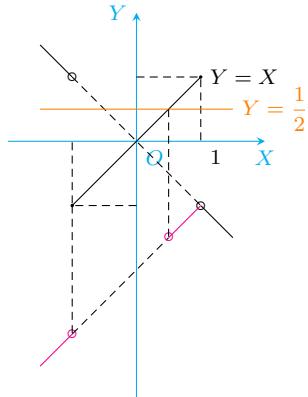
法一: 因为  $P\{X \leq a | X > 2\} = 1 - P\{X > a | X > 2\}$ , 于是

$$\begin{aligned} P\{X \leq a | X > 2\} &= 1 - \frac{P\{X > a, X > 2\}}{P\{X > 2\}} = 1 - \frac{P\{X > a\}}{P\{X > 2\}} = 1 - \frac{\int_a^{+\infty} 2e^{-2t} dt}{\int_2^{+\infty} 2e^{-2t} dt} \\ &= 1 - \frac{e^{-2a}}{e^{-4}} = 1 - e^{-2(a-2)} = 1 - e^{-2}. \end{aligned}$$

解得  $a = 3$ .

法二:  $P\{X \leq a | X > 2\} = 1 - P\{X > a | X > 2\} = 1 - P\{X > a - 2\} = 1 - e^{-2(a-2)} = 1 - e^{-2} \Rightarrow a = 3$ .

**例 16.2.3.** 已知随机变量  $X \sim E(\lambda)$  ( $\lambda > 0$ ), 且随机变量  $Y = \begin{cases} X, & |X| \leq 1 \\ -X, & |X| > 1 \end{cases}$ , 求  $P\left\{Y \leq \frac{1}{2}\right\}$ .



由图 16.2.1 可知,

$$\begin{aligned} P\left\{Y \leq \frac{1}{2}\right\} &= P\left\{-1 \leq X \leq \frac{1}{2}\right\} + P\{X > 1\} \\ &= P\left\{-1 \leq X \leq \frac{1}{2}\right\} + 1 - P\{X \leq 1\} \\ &= 1 - P\{X < -1\} + P\left\{\frac{1}{2} < X \leq 1\right\} \end{aligned}$$

而  $P\{X < -1\} = 0$ , 因此

$$P\left\{Y \leq \frac{1}{2}\right\} = 1 - P\left\{\frac{1}{2} < X \leq 1\right\} = 1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 + e^{-\lambda} - e^{-\frac{\lambda}{2}}.$$

图 16.2.1

#### 16.2.4 正态分布

**定义 16.2.4 (正态分布及其分布函数).** 若随机变量  $X$  的密度为  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ , 则称  $X$  服从参数为  $\mu, \sigma$  的正态分布, 简记为  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X$  的分布函数为  $F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$ .

**定理 16.2.2 (对称性).** 一般正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$  的概率密度  $f(x)$  满足  $f(x) = f(2\mu - x)$ .

**定理 16.2.3 (和一性).** 一般正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$  的分布函数  $F(x)$  满足  $F(x) + F(2\mu - x) = 1$ .

**定义 16.2.5 (标准正态分布).** 当定义 16.2.4 中  $\mu = 0, \sigma = 1$  时, 称  $X$  服从标准正态分布, 简记为  $X \sim N(0, 1)$ , 并且分别用  $\varphi(x)$  与  $\Phi(x)$  表示其概率密度函数和分布函数.

**例 16.2.4.** 设  $X, Y$  相互独立, 且  $X \sim N(1, 2)$ ,  $Y \sim N(0, 1)$ , 求  $Z = 2X - Y + 3$  的密度函数.

因为  $X \sim N(1, 2)$ ,  $Y \sim N(0, 1)$ , 所以

$$E(X) = 1, D(X) = 2, E(Y) = 0, D(Y) = 1$$

因此

$$E(Z) = E(2X - Y + 3) = 2E(X) - E(Y) + 3 = 2 - 0 + 3 = 5$$

$$D(Z) = D(2X - Y + 3) = 4D(X) + D(Y) = 8 + 1 = 9$$

故  $Z \sim N(5, 9)$ , 于是  $f_Z(z) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}$ .

**例 16.2.5.** 若随机变量  $X$  服从正态分布  $N(2, \sigma^2)$ , 且  $P\{2 < X < 4\} = 0.3$ , 则  $P\{X < 0\}$  等于

- A. 0.2                    B. 0.3                    C. 0.5                    D. 0.7

**法一:** 由  $X \sim N(2, \sigma^2)$  知  $\frac{X-2}{\sigma} \sim N(0, 1)$  从而  $P\{2 < X < 4\} = P\left\{\frac{2-2}{\sigma} < \frac{X-2}{\sigma} < \frac{4-2}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \Phi(0) = 0.3$ , 又  $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ , 得  $\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0.8$  于是得  $P\{X < 0\} = P\left\{\frac{X-2}{\sigma} < \frac{0-2}{\sigma}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0.2$  故选 A.

**法二:** 由  $X \sim N(2, \sigma^2)$  得到分布函数关于  $x = 2$  对称, 根据对称性, 并由  $P\{2 < X < 4\} = 0.3$  得到  $P\{0 < X < 2\} = 0.3$ , 那么  $P\{0 < X < 4\} = 0.6$ , 那么  $P\{X < 0\} = \frac{1}{2}(1 - 0.6) = 0.2$ , 故选 A.

**例 16.2.6.** 设  $b > 0$  为常数, 且  $\varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi b}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{b}} dt$ , 求  $\int_0^{+\infty} (1 - \varphi(x)) dx$ .

因为  $1 = \frac{2}{\sqrt{\pi b}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{b}} dt$ , 于是  $1 - \varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi b}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{b}} dt$ , 那么

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (1 - \varphi(x)) dx &= \frac{2}{\sqrt{\pi b}} \int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{b}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi b}} \int_0^{+\infty} dt \int_0^t e^{-\frac{t^2}{b}} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi b}} \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{b}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi b}} \frac{b}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{b}} d\frac{t^2}{b} = \sqrt{\frac{b}{\pi}}. \end{aligned}$$

## 第 17 章

# 多维随机变量及其分布

## 17.1 多维离散型随机变量

## 17.2 多维连续型随机变量

### 17.2.1 边缘概率密度与边缘分布函数

**定义 17.2.1 (边缘分布函数).** 设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合分布函数为  $F(x, y)$ , 随机变量  $X$  和  $Y$  的分布函数  $F_X(x)$  与  $F_Y(y)$  分别称为关于  $X$  和  $Y$  的边缘分布函数

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < +\infty\} = F(x, +\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y)$$

同理  $F_Y(y) = F(+\infty, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y)$ .

**定义 17.2.2 (二维连续型随机变量的边缘概率密度).** 设二维连续型随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为  $f(x, y)$ , 则称

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx \\ F_Y(y) &= F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^y \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$

分别为  $(X, Y)$  关于  $X$  和关于  $Y$  的边缘分布函数. 而称

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \end{aligned}$$

分别为  $(X, Y)$  关于  $X$  和关于  $Y$  的边缘概率密度.

**例 17.2.1.** 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{k}{2}xe^{-(x+y)}, & x, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 求常数  $k$ ;
- (2) 求  $(X, Y)$  关于  $X$  和关于  $Y$  的边缘概率密度函数;
- (3) 判断随机变量  $X$  和  $Y$  是否相互独立.

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1 \Rightarrow 1 = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} \frac{k}{2} xe^{-(x+y)} dx = \frac{k}{2} \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \Rightarrow k = 2.$$

$$(2) f_X(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-(x+y)} dy = xe^{-x} (x > 0) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \text{同理 } f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(3) 因为  $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ , 所以  $X, Y$  相互独立.

## 17.2.2 二维连续型随机变量函数的分布

**定理 17.2.1 (常见的二维连续型随机变量函数的分布).** 设二维连续型随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为  $f(x, y)$ ,  $X$  和  $Y$  概率密度分别为  $f_X(x)$  和  $f_Y(y)$ , 连续型随机变量  $Z = g(X, Y)$  是  $X$  和  $Y$  的函数, 则当

- (1)  $Z = X + Y$  的概率密度

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx \xrightarrow{\text{当 } X \text{ 和 } Y \text{ 相互独立时}} f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx \\ f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy \xrightarrow{\text{当 } X \text{ 和 } Y \text{ 相互独立时}} f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy \end{aligned}$$

- (2)  $Z = \pm X \mp Y$  的概率密度

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x \mp z) dx &\xrightarrow{\text{当 } X \text{ 和 } Y \text{ 相互独立时}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(x \mp z) dx \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(y \pm z, y) dy &\xrightarrow{\text{当 } X \text{ 和 } Y \text{ 相互独立时}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) f_X(y \pm z) dy \end{aligned}$$

- (3)  $Z = \frac{Y}{X}$  的概率密度

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz) dx \xrightarrow{\text{当 } X \text{ 和 } Y \text{ 相互独立时}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz) dx$$

- (4)  $Z = XY$  的概率密度

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx \xrightarrow{\text{当 } X \text{ 和 } Y \text{ 相互独立时}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) dx$$

(5)  $Z = \max\{X, Y\}$  的分布

$$F_Z(z) = P\{X \leq z, Y \leq z\} = F(z, z) \xrightarrow{\text{当 } X \text{ 和 } Y \text{ 相互独立时}} F_X(z)F_Y(z) \xrightarrow{\text{当 } X \text{ 和 } Y \text{ 独立同分布时}} F_X^2(z)$$

当  $X$  和  $Y$  独立同分布时,  $Z$  的概率密度为

$$f_Z(z) = 2F_X(z)f_X(z)$$

(6)  $Z = \min\{X, Y\}$  的分布

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= 1 - P\{X > z, Y > z\} \xrightarrow{\text{当 } X \text{ 和 } Y \text{ 相互独立时}} 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)] \\ &\xrightarrow{\text{当 } X \text{ 和 } Y \text{ 独立同分布时}} 1 - [1 - F_X(z)]^2 \end{aligned}$$

当  $X$  和  $Y$  独立同分布时,  $Z$  的概率密度为

$$f_Z(z) = 2[1 - F_X(z)]f_X(z).$$

### 17.2.3 二维随机变量条件概率密度与条件分布函数

**定义 17.2.3 (二维随机变量条件概率密度).** 设  $(X, Y)$  为连续型随机变量, 其概率密度为  $f(x, y)$ , 边缘密度函数分别为  $f_X(x)$  和  $f_Y(y)$ , 若  $f_Y(y) > 0$ , 则称

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

为在  $Y = y$  的条件下  $X$  的条件概率密度. 同样, 若  $f_X(x) > 0$ , 则称

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

为在  $X = x$  条件下  $Y$  的条件概率密度.

**例 17.2.2.** 设二维正态随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为  $f(x, y)$ , 已知条件概率密度

$$f_{X|Y}(x | y) = Ae^{-\frac{2}{3}(x-\frac{y}{2})^2}, f_{Y|X}(y | x) = Be^{-\frac{2}{3}(y-\frac{x}{2})^2}$$

试求: (1) 常数  $A, B$ ; (2)  $f_X(x), f_Y(y)$ ; (3)  $f(x, y)$ .

$$(1) \text{ 令 } Ae^{-\frac{2}{3}(x-\frac{y}{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \\ \frac{2}{3}(x-\frac{y}{2})^2 = \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{\sqrt{6\pi}} \\ \mu = \frac{y}{3} \end{cases} \quad \text{由对称性知 } B = A = \frac{2}{\sqrt{6\pi}}.$$

$$(2) \text{ 易得 } \frac{f_X(x)}{f_Y(y)} = \frac{f_{X|Y}(x | y)}{f_{Y|X}(y | x)} = e^{-\frac{2}{3}[(x-\frac{y}{2})^2 - (y-\frac{x}{2})^2]} = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{e^{-\frac{y^2}{2}}}, \text{ 故}$$

$$f_X(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}, f_Y(y) = Ce^{-\frac{y^2}{2}}$$

由于标准差为 1, 则根据正态分布的概率密度知  $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , 因此  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$ .

$$(3) f(x, y) = f_{X|Y}(x | y)f_Y(y) = \frac{2}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{2}{3}(x-\frac{y}{2})^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3\pi}} e^{-\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2)}.$$

**定义 17.2.4 (二维随机变量条件分布函数 A).** 如果任给  $\varepsilon > 0$ ,  $P\{y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon\} > 0$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P\{X \leq x | y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{P\{X \leq x, y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon\}}{P\{y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon\}}$$

存在, 则称此极限为在条件  $Y = y$  下随机变量  $X$  的条件分布函数, 记为  $P\{X \leq x | Y = y\}$  或  $F_{X|Y}(x | y)$ .

$$F_{X|Y}(x | y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(x, y + \varepsilon) - F(x, y - \varepsilon)}{F_Y(y + \varepsilon) - F_Y(y - \varepsilon)} = \frac{\int_{-\infty}^x \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f(x, y) dx dy}{\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f_Y(y) dx}$$

**定义 17.2.5 (二维随机变量条件分布函数 B).** 设  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处连续,  $f_Y(y)$  连续且  $f_Y(y) > 0$ , 则称

$$F_{X|Y}(x | y) = \int_{-\infty}^x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx$$

为在  $Y = y$  的条件下  $X$  的条件分布函数. 若  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处连续,  $f_X(x)$  连续且  $f_X(x) > 0$ , 则称

$$F_{Y|X}(y | x) = \int_{-\infty}^y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy$$

为在  $X = x$  的条件下  $Y$  的条件分布函数.

#### 17.2.4 二维正态分布

**定义 17.2.6 (二维正态分布).** 若二维连续型随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}$$

则称  $(X, Y)$  服从参数为  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$  的二维正态分布, 记

$$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$$

其中  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$  均为常数, 且  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1$ .

**定理 17.2.2 (二维正态分布推出一维正态分布).** 若  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , 则

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

反之不对, 即  $X$  与  $Y$  均服从一维正态, 不能保证  $(X, Y)$  一定服从二维正态分布.

**定理 17.2.3 (独立一维正态分布推出二维正态分布).** 若  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 且相互独立, 则  $(X, Y)$  一定服从二维正态分布

$$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho).$$

**定理 17.2.4.** 若  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ , 则  $(aX + bY, cX + dY)$  服从二维正态分布, 明显  $aX + bY$  服从一维正态分布

$$aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\rho\sigma_1\sigma_2).$$

**定理 17.2.5.**  $X$  和  $Y$  相互独立的充要条件是  $\rho = 0$ .

**定理 17.2.6 (二维正态分布的条件分布).** 设二维随机变量  $(X, Y)$  服从  $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ , 则  $X$  在  $Y = y$  条件下的条件分布为正态分布, 即

$$X \sim N\left(\mu_1 + \frac{\rho\sigma_1(y - \mu_2)}{\sigma_2}, \sigma_1^2(1 - \rho^2)\right)$$

同理,  $Y$  在  $X = x$  条件下的条件分布为正态分布, 即

$$Y \sim N\left(\mu_2 + \frac{\rho\sigma_2(x - \mu_1)}{\sigma_1}, \sigma_2^2(1 - \rho^2)\right).$$

**例 17.2.3.** 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为  $f(x, y) = Ae^{-2x^2-y^2}$ ,  $-\infty < x, y < +\infty$ ,

(1) 求常数  $A$ ;

(2) 求条件概率密度  $f_{Y|X}(y | x)$ .

(1) 法一: 因为二维正态分布的概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

对比本题所给密度得  $(X, Y) \sim N\left(0, 0; \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; 0\right)$ , 因此  $A = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$ .

法二: 因为  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ , 所以

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) dx = A\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2} dx \\ &\stackrel{t=\sqrt{2}x}{=} A\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = A\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\pi} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{\pi}. \end{aligned}$$

(2) 因为  $\rho = 0$ , 所以  $X$  与  $Y$  相互独立, 所以  $X \sim N\left(0, \frac{1}{4}\right)$ ,  $Y \sim N\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ,  $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ , 并且

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-2x^2}, f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}$$

$$\text{所以 } f_{Y|X}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}, -\infty < y < +\infty.$$

## 17.2.5 卷积公式

当  $Z = h(X, Y)$ , 其中一个随机变量服从均匀分布时, 使用卷积公式将大大简化计算过程.

**例 17.2.4.** 设随机变量  $X$  和  $Y$  相互独立,  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y \sim U[0, 1]$ ,  $Z = X + Y$ , 求  $Z$  的概率密度函数  $f_Z(z)$ .

法一: 由  $X \sim N(0, 1)$  知,  $f_X(x) = \varphi(x)$ , 由  $Y \sim U[0, 1]$  知,  $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 又因为  $X$  与  $Y$  相互独立, 则

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \varphi(x), & -\infty < x < +\infty, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

下求  $f_Z(z)$ ,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{X + Y \leq z\} = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{z-1} \varphi(x) dx \int_0^1 dy + \int_{z-1}^z \varphi(x) dx \int_0^{z-x} dy \\ &= \int_{-\infty}^{z-1} \varphi(x) dx + \int_{z-1}^z (z-x)\varphi(x) dx = \Phi(z-1) + \int_{z-1}^z (z-x)\varphi(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{则 } f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \varphi(z-1) + \frac{d}{dz} \left[ z \int_{z-1}^z \varphi(x) dx - \int_{z-1}^z x\varphi(x) dx \right] = \int_{z-1}^z \varphi(z) dz = \Phi(z) - \Phi(z-1).$$

法二: 由卷积公式

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x) dx = \int_{z-1}^z \varphi(x) dx = \Phi(z) - \Phi(z-1).$$

**例 17.2.5.** 设随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $Y \sim U[-\pi, \pi]$ ,  $X, Y$  相互独立, 令  $Z = X + Y$ , 求  $f_Z(z)$ .

法一: 因为  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $Y \sim U[-\pi, \pi]$ , 所以

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \leq y \leq \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

并且  $X, Y$  相互独立, 那么

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & -\infty < x < +\infty, -\pi \leq y \leq \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

而  $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X + Y \leq z\} = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy$ , 因此

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\pi}^{\pi} dy \int_{-\infty}^{z-y} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dy \int_{-\infty}^{z-y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} d\left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right) \\ &\stackrel{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dy \int_{-\infty}^{\frac{z-y-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\left( \frac{z-y-\mu}{\sigma} \right) dy = -\frac{\sigma}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\left( \frac{z-y-\mu}{\sigma} \right) d\left( \frac{z-y-\mu}{\sigma} \right) \\ &\stackrel{u=\frac{z-y-\mu}{\sigma}}{=} \frac{\sigma}{2\pi} \int_{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}} \Phi(u) du \end{aligned}$$

$$\text{因此 } f_Z(z) = F'_Z(z) = \frac{d}{dz} \left[ \frac{\sigma}{2\pi} \int_{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}} \Phi(u) du \right] = \frac{1}{2\pi} \left[ \Phi\left( \frac{z+\pi-\mu}{\sigma} \right) - \Phi\left( \frac{z-\pi-\mu}{\sigma} \right) \right].$$

$$\text{法二: } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) dx = \int_{z-\pi}^{z+\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{2\pi} \left[ \Phi\left( \frac{z+\pi-\mu}{\sigma} \right) - \Phi\left( \frac{z-\pi-\mu}{\sigma} \right) \right].$$

## 17.3 多维混合型随机变量

### 17.3.1 二维混合型随机变量的分布

**定理 17.3.1 (二维混合型随机变量函数的分布).** 设二维随机变量  $(X, Y)$ , 其中离散型随机变量  $X$  的分布律为  $P\{X = x_i\} = p_i (i = 1, 2, \dots)$ ,  $Y$  为连续型随机变量, 则  $(X, Y)$  的函数  $Z = g(X, Y)$  分布函数

为

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{g(X, Y) \leq z\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X = x_i\} P\{g(X, Y) \leq z \mid X = x_i\}$$

**例 17.3.1.** 设随机变量  $X, Y$  相互独立, 且

$$P\{X = 0\} = P\{X = 1\} = \frac{1}{2}, \quad P\{Y \leq x\} = x, \quad 0 < x \leq 1$$

求  $Z = XY$  的分布函数.

由题意可知  $Y \in (0, 1]$ , 故  $Z = XY = [0, 1]$ , 当  $z < 0$  时,  $F_Z(z) = 0$ ; 当  $z \geq 1$  时,  $F_Z(z) = 1$ ; 当  $0 \leq z < 1$  时,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{X = 0\}P\{Z \leq z \mid X = 0\} + P\{X = 1\}P\{Z \leq z \mid X = 1\} \\ &= \frac{1}{2}P\{XY \leq z \mid X = 0\} + \frac{1}{2}P\{XY \leq z \mid X = 1\} = \frac{1}{2}P\{0 \leq z\} + \frac{1}{2}P\{Y \leq z\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}(1+z) \end{aligned}$$

$$\text{因此 } F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{1}{2}(1+z), & 0 \leq z < 1 \\ 1, & z \geq 1. \end{cases}$$

**例 17.3.2.** 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且  $X$  的分布为  $\begin{array}{c|cc} X & -1 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$ ,  $Y$  服从  $N(0, 1)$  分布, 记  $Z = XY$ , 求  $Z$  的分布函数  $F_Z(z)$ .

根据全概率公式,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{XY \leq z\} = P\{X = -1\}P\{XY \leq z \mid X = -1\} + P\{X = 1\}P\{XY \leq z \mid X = 1\} \\ &= \frac{1}{2}P\{-Y \leq z \mid X = -1\} + \frac{1}{2}P\{Y \leq z \mid X = 1\} = \frac{1}{2}P\{Y \geq -z\} + \frac{1}{2}P\{Y \leq z\} \\ &= \frac{1}{2}[1 - P\{Y < -z\}] + \frac{1}{2}\Phi(z) = \frac{1}{2}[1 - \Phi(-z)] + \frac{1}{2}\Phi(z) \\ &= \frac{1}{2}[1 - 1 + \Phi(z)] + \frac{1}{2}\Phi(z) = \Phi(z) \end{aligned}$$

**例 17.3.3 (2008 数一).** 设随机变量  $X$  和  $Y$  相互独立,  $X$  概率分布为  $P\{X = i\} = \frac{1}{3}$  ( $i = -1, 0, 1$ ),  $Y$

的概率密度为  $f_Z(z) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 记  $Z = X + Y$ .

$$(1) \text{ 求 } P\left\{Z \leq \frac{1}{2} \mid X = 0\right\};$$

$$(2) \text{ 求 } Z \text{ 的概率密度 } f_Z(z).$$

$$(1) P\left\{Z \leq \frac{1}{2} \mid X = 0\right\} = P\left\{X + Y \leq \frac{1}{2} \mid X = 0\right\} = P\left\{Y \leq \frac{1}{2} \mid X = 0\right\} = P\left\{Y \leq \frac{1}{2}\right\} = \int_0^{\frac{1}{2}} f_Y(y) dy = \frac{1}{2}.$$

(2) 记  $Z$  的分布函数为  $F_Z(z)$  则

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{X + Y \leq z\} = \sum_{i=-1}^1 P\{X = i, X + Y \leq z\} \\ &= \sum_{i=-1}^1 P\{X = i, Y \leq z - i\} = \sum_{i=-1}^1 P\{X = i\}P\{Y \leq z - i\} \\ &= \frac{1}{3}P\{Y \leq z + 1\} + \frac{1}{3}P\{Y \leq z\} + \frac{1}{3}P\{Y \leq z - 1\} \end{aligned}$$

(i) 当  $z < -1$  时,  $F_Z(z) = 0$ ;

$$(ii) \text{ 当 } -1 \leq z < 0 \text{ 时, } F_Z(z) = \frac{1}{3}P\{Y \leq z+1\} = \frac{z+1}{3};$$

$$(iii) \text{ 当 } 0 \leq z < 1 \text{ 时, } F_Z(z) = \frac{1}{3}P\{Y \leq z+1\} + \frac{1}{3}P\{Y \leq z\} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}z = \frac{z+1}{3};$$

$$(iv) \text{ 当 } 1 \leq z < 2 \text{ 时, } F_Z(z) = \frac{1}{3}P\{Y \leq z+1\} + \frac{1}{3}P\{Y \leq z\} + \frac{1}{3}P\{Y \leq z+1\} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{z-1}{3} = \frac{z+1}{3};$$

(v) 当  $z \geq 2$  时,  $F_Z(z) = 1$ .

$$\text{于是 } F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < -1 \\ \frac{z+1}{3}, & -1 \leq z < 2 \\ 1, & z \geq 2 \end{cases}, \text{ 那么 } f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 \leq z < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

### 17.3.2 随机变量与函数性质

**例 17.3.4 (2009 数一).** 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且  $X$  服从标准正态分布  $N(0, 1)$ ,  $Y$  的概率分布为  $P\{Y = 0\} = P\{Y = 1\} = \frac{1}{2}$ , 记  $F_Z(z)$  为随机变量  $Z = XY$  的分布函数, 则函数  $F_Z(z)$  的间断点个数为

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

由于  $x, y$  相互独立, 因此

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{xy \leq z\} = P\{xy \leq z \mid y = 0\}P\{y = 0\} + P\{xy \leq z \mid y = 1\}P\{y = 1\} \\ &= \frac{1}{2}[P\{xy \leq z \mid y = 0\} + P\{xy \leq z \mid y = 1\}] = \frac{1}{2}[P\{x \cdot 0 \leq z\} + P\{x \leq z\}] \end{aligned}$$

若  $z < 0$ , 则  $F_Z(z) = \frac{1}{2}\Phi(z)$ ; 若  $z \geq 0$ , 则  $F_Z(z) = \frac{1}{2}[1 + \Phi(z)]$ , 所以  $z = 0$  为间断点, 故有一个间断点, 因此选 B.

## 第 18 章

### 随机变量的数字特征

#### 18.1 数学期望与方差

##### 18.1.1 数学期望

**定义 18.1.1** (离散型随机变量的数学期望). 设离散型随机变量  $X$  的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k (k = 1, 2, \dots)$$

若级数  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$  绝对收敛, 则称级数  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$  的和为随机变量  $X$  的数学期望, 记为  $E(X)$ , 即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

不是所有的随机变量都有数学期望, 数学期望是反映随机变量  $X$  取可能值的平均值.

**定义 18.1.2** (连续型随机变量的数学期望). 设连续型随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x)$ , 若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

绝对收敛, 则称积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$  的值为随机变量  $X$  的数学期望, 记为  $E(X)$ , 即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

**例 18.1.1.** 设随机变量  $X$  的概率密度函数  $f(x) = \begin{cases} x, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$  ( $a > 0$ ), 其中  $a, b$  为待定常数, 且  $E(X^2) = 2$ , 求  $P\{|X| < \sqrt{2}\}$ .

因为  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ , 得  $\int_a^b xdx = 1 \Rightarrow b^2 - a^2 = 2$ , 又因为  $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_a^b x^3 dx \Rightarrow b^4 - a^4 = 8$ , 又因为  $0 < a < b$  解得  $a = 1, b = \sqrt{3}$ , 则

$$P\{|X| < \sqrt{2}\} = P\{-\sqrt{2} < X < \sqrt{2}\} = F(\sqrt{2}) - F(-\sqrt{2}) = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(x)dx = \int_1^{\sqrt{2}} xdx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

**定理 18.1.1 (常数的数学期望).** 设  $C$  是常数, 则有  $E(C) = C$ .

**定理 18.1.2.** 设  $X$  是一个随机变量,  $C$  是常数, 则有  $E(CX) = CE(X)$ .

**定理 18.1.3.** 设  $X, Y$  是两个随机变量, 则有  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ .

**定理 18.1.4.** 设  $X, Y$  是相互独立的随机变量, 则有  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .

**定义 18.1.3 (一维随机变量函数的数学期望).** (1) 离散型随机变量

设  $Y$  是随机变量  $X$  的函数:  $Y = g(X)$  ( $g$  连续), 若  $X$  是离散型随机变量, 其分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$$

且级数  $\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$  绝对收敛, 则

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k.$$

(2) 连续型随机变量

设  $Y$  是随机变量  $X$  的函数:  $Y = g(X)$  ( $g$  连续), 若  $X$  是连续型随机变量, 其概率密度为  $f(x)$ , 且反常积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$  绝对收敛, 则

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx.$$

**例 18.1.2.** 设随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$ , 其中  $\Phi(x)$  为标准正态分布的分布函数, 求  $E(X)$ .

对  $F(x)$  求导, 得  $f(x) = 0.3\varphi(x) + 0.35\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)$ , 因此

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left[ 0.3\varphi(x) + 0.35\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right) \right] dx = 0.3 \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx + 0.35 \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)dx \\ &= 0.3 \cdot 0 + 0.7 \int_{-\infty}^{+\infty} (2t+1)\varphi(t)dt = 1.4 \int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)dt + 0.7 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = 0.7 \end{aligned}$$

**例 18.1.3 (2019 数一).** 在区间  $(0, 2)$  上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短一段的长度为  $X$ , 较长一段的长度为  $Y$ , 令  $Z = \frac{Y}{X}$

(1) 求  $X$  的概率密度;

(2) 求  $Z$  的概率密度;

(3) 求  $E\left(\frac{X}{Y}\right)$ .

$$(1) \text{ 因为 } F_X(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \text{ 故 } f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(2) Z = \frac{Y}{X} = \frac{2-X}{X} = \frac{2}{X} - 1, \text{ 则 } F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\left\{\frac{2}{X} - 1 \leq z\right\}, \text{ 当 } z < 1 \text{ 时 } F_Z(z) = 0; \text{ 当 } z \geq 1 \text{ 时,}$$

$$F_Z(z) = P\left\{\frac{2}{X} - 1 \leq z\right\} \Rightarrow P\left\{X \geq \frac{2}{z+1}\right\} = \int_{\frac{2}{z+1}}^1 1 dx = \frac{z-1}{z+1}$$

$$\text{于是 } F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 1 \\ \frac{z-1}{z+1}, & z \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 1 \\ \frac{2}{(z+1)^2}, & z > 1. \end{cases}$$

$$(3) E\left(\frac{X}{Y}\right) = E\left(\frac{X}{2-X}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{2-x} \cdot 1 dx = \int_0^1 \frac{x}{2-x} dx = -\int_0^1 \left(1 + \frac{2}{x-2}\right) dx = 2 \ln 2 - 1.$$

**定理 18.1.5 (最值表达式).**  $\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$ ,  $\min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$ .

**例 18.1.4.** 设  $X$  与  $Y$  独立, 且  $E(X)$  和  $E(Y)$  存在, 记  $U = \max\{X, Y\}$ ,  $V = \min\{X, Y\}$ , 则  $E(UV)$

- A.  $E(U) \cdot E(V)$       B.  $E(X) \cdot E(Y)$       C.  $E(U) \cdot E(Y)$       D.  $E(X) \cdot E(V)$

当  $X \geq Y$  时,  $U = X$ ,  $V = Y$ ,  $E(UV) = E(X) \cdot E(Y)$ ; 当  $X < Y$  时,  $U = Y$ ,  $V = X$ ,  $E(UV) = E(X) \cdot E(Y)$ , 因此无论何种情况, 恒有  $E(UV) = E(X) \cdot E(Y)$ , 故选 B.

**例 18.1.5.** 设随机变量  $X$  与  $Y$  独立同分布, 已知  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 求  $Z = \min\{X, Y\}$  的数学期望.

因为  $\min\{X, Y\} = \frac{X+Y-|X-Y|}{2}$ , 所以  $E(Z) = E\left(\frac{X+Y-|X-Y|}{2}\right)$ ,  $E(X) = E(Y) = \mu$ ,

$$E(|X-Y|) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\sigma}} e^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{t}{2\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}} dt = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}} d\left(\frac{t^2}{4\sigma^2}\right) = -\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} e^{-u} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

$$\text{因此 } E(Z) = \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

## 18.1.2 方差

**定义 18.1.4 (方差).** 设  $X$  是一个随机变量, 若  $E\{[X - E(X)]^2\}$  存在, 则称其为随机变量  $X$  的方差, 记为  $D(X)$ , 即

$$D(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$$

称  $\sqrt{D(X)}$  为  $X$  的均方差或标准差, 记为  $\sigma(X)$ , 即  $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ .

(1) 离散型随机变量

设离散型随机变量  $X$ , 其分布律为  $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$ , 则方差计算公式为

$$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k - E(X)]^2 p_k.$$

## (2) 连续型随机变量

设连续型随机变量  $X$ , 其概率密度为  $f(x)$ , 则方差计算公式为

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx.$$

**定理 18.1.6 (方差与期望的联系).**  $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ .

**定理 18.1.7 (二维均匀分布的随机变量的概率密度).** 若  $(X, Y)$  在平面有界区域  $D$  上服从均匀分布, 则  $(X, Y)$  的概率密度为:

$$f(x, y) = \begin{cases} S_D^{-1}, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

**例 18.1.6.** 设  $(X, Y)$  在区域  $D : 0 < x < 1, |y| \leq x$  内服从均匀分布,

(1) 求随机变量  $X$  的边缘密度函数;

(2) 设  $Z = 2X + 1$ , 求  $D(Z)$ .

(1) 区域  $D$  的面积为  $S_D = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$ , 则  $f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \Rightarrow f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(2) 由方程与期望的关系,

$$\begin{aligned} D(X) &= E(X^2) - E^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx - \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \right)^2 \\ &= \int_0^1 2x^3 dx - \left( \int_0^1 2x^2 dx \right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } D(Z) = D(2X + 1) = 4D(X) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}.$$

**定理 18.1.8.** 若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  互相独立, 且  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ , 则

$$\sum_{i=1}^n a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right).$$

**例 18.1.7 (1998 数一).** 设两个随机变量相互独立, 且都服从均值为 0, 方差为  $\frac{1}{2}$  的正态分布, 求随机变量  $|X - Y|$  的方差.

令  $Z = X - Y$ , 由于  $X \sim N\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ,  $Y \sim N\left(0, \frac{1}{2}\right)$ , 于是  $Z \sim N\left(0, \frac{1}{2} + (-1)^2 \frac{1}{2}\right) = N(0, 1)$ , 于是

$$D(|X - Y|) = D(|Z|) = E(Z^2) - E^2(|Z|) = 1 - \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right)^2 = 1 - \frac{2}{\pi}$$

其中, 由于  $Z$  服从标准正态分布则方差为 1, 数学期望为 0, 则  $E(Z^2) = D(Z) + E^2(Z) = 1 + 0 = 1$ .

**例 18.1.8.** 设随机变量  $X \sim N(0, 1)$ , 在  $X = x$  条件下, 随机变量  $Y \sim N(x, 1)$ , 求  $Y$  的方差  $D(Y)$ .

$X \sim N(0, 1)$ ,  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $-\infty < x < +\infty$ , 当  $X = x$  时,  $f_{Y|X}(y | x) \sim N(x, 1)$ , 即当  $-\infty < x < +\infty$  时,

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2}}, \quad -\infty < y < +\infty$$

那么

$$(X, Y) \sim f(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2}} \Rightarrow f(x, y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(2x^2 - 2xy + y^2)}, -\infty < x, y < +\infty$$

已知二维正态  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$  的密度为

$$f_1(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} - \infty < x, y < +\infty.$$

对比  $f$  与  $f_1$  则有

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\ -\frac{1}{2} \cdot 2x^2 = -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\ 1 = \frac{1}{2(1-\rho^2)} \end{cases}$$

解得  $\sigma_2 = \sqrt{2}$ ,  $D(Y) = \sigma_2^2 = 2$

## 利用第二型 Euler 积分

有关第二型 Euler 积分的相关知识可参考 3.4.1 节.

**例 18.1.9.** 设  $X$  与  $Y$  相互独立, 且  $X \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $Y \sim N(0, \sigma^2)$ , 令  $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ , 求  $E(Z)$ ,  $D(Z)$ .

因为  $X \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $Y \sim N(0, \sigma^2)$ , 且  $X$  与  $Y$  相互独立, 所以

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)}$$

因此

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x^2 + y^2} f(x, y) dx dy = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x^2 + y^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi} \left(\frac{r}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 e^{-\left(\frac{r}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dr \\ &= \frac{\sqrt{2}\sigma}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \left(\frac{r}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 e^{-\left(\frac{r}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} d\left(\frac{r}{\sqrt{2}\sigma}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}\sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) d\theta = \frac{\sqrt{2}\sigma}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}\sigma}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma \end{aligned}$$

因此  $D(Z) = E(Z^2) - E^2(Z) = E(X^2 + Y^2) - \frac{\pi}{2}\sigma^2 = 2\sigma^2 - \frac{\pi}{2}\sigma^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$ .

## 18.2 协方差与相关系数

### 18.2.1 随机变量的独立性与相关性

**定义 18.2.1 (随机变量的相关性定义).** 若随机变量  $X$  和  $Y$  的相关系数  $\rho_{XY} = 0$  则称  $X$  和  $Y$  不相关, 否则称  $X$  和  $Y$  相关.

**定理 18.2.1 (独立性与相关性的判定).** 随机变量  $X$  和  $Y$  不相关, 即  $\rho_{XY} = 0 \Leftrightarrow \text{cov}(X, Y) = 0 \Leftrightarrow E(XY) = E(X)E(Y) \Leftrightarrow D(X \pm Y) = D(X) \pm D(Y) \Leftrightarrow X$  与  $Y$  相互独立.

特别地, 当  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$  时,  $X$  和  $Y$  不相关  $\Leftrightarrow X$  和  $Y$  相互独立;

当随机变量  $X$  和  $Y$  都服从  $(0,1)$  分布, 则  $X$  和  $Y$  不相关  $\Leftrightarrow X$  和  $Y$  相互独立.

### 18.2.2 协方差

**定理 18.2.2 (协方差的性质).** (1)  $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$ ,  $\text{cov}(X, X) = D(X)$ ;

(2)  $\text{cov}(aX, bY) = ab\text{cov}(X, Y)$ ,  $a, b$  是常数,  $\text{cov}(X, a) = 0$ ;

(3)  $\text{cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{cov}(X_1, Y) + \text{cov}(X_2, Y)$ ;

(4) 若  $X, Y$  相互独立, 则  $\text{cov}(X, Y) = 0$ , 反之不对.

(5)  $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ .

**例 18.2.1 (2002 数三).** 设随机变量  $X$  和  $Y$  的联合概率分布为表 ??, 求协方差  $\text{cov}(X^2, Y^2)$ .

联合概率分布表

| $X \setminus Y$ |      | -1   | 0    | 1    |
|-----------------|------|------|------|------|
|                 |      | 0    | 0.07 | 0.18 |
| 1               | 0.08 | 0.32 | 0.20 |      |

$X, Y$  的分布律分别为  $\frac{X}{P} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0.4 & 0.6 \\ \hline \end{array}$ ,  $\frac{Y}{P} \begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & 0 & 1 \\ \hline 0.15 & 0.5 & 0.35 \\ \hline \end{array}$ , 那么

$$E(X^2) = 0.6, E(Y^2) = 0.5, E(X^2Y^2) = \sum_i \sum_j x_i^2 y_j^2 p_{ij} = 0.08 + 0.20 = 0.28$$

$$\text{所以 } \text{cov}(X^2, Y^2) = E(X^2Y^2) - E(X^2)E(Y^2) = 0.28 - 0.3 = -0.02.$$

**例 18.2.2.** 设随机变量  $(X, Y)$  的概率分布为表 ?? 求

(1)  $P\{X = 2Y\}$ ; (2)  $\text{cov}(X - Y, Y)$ .

概率分布

| $X \setminus Y$ |                | 0 | 1              | 2 |
|-----------------|----------------|---|----------------|---|
|                 |                | 0 | $\frac{1}{4}$  | 0 |
| 1               | 0              |   | $\frac{1}{3}$  | 0 |
| 2               | $\frac{1}{12}$ | 0 | $\frac{1}{12}$ |   |

$$(1) P\{X = 2Y\} = P\{X = 0, Y = 0\} + P\{X = 2, Y = 1\} = \frac{1}{4}.$$

(2)  $X, Y$  的分布律分别为  $\frac{X}{P} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array}$ ,  $\frac{Y}{P} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$ , 那么

$$\text{cov}(X - Y, Y) = \text{cov}(X, Y) - \text{cov}(Y, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) - D(Y) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y^2) + E^2(Y)$$

$$\text{其中 } E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{12} = \frac{2}{3}, E(X) = \frac{1}{3} + \frac{2}{6} = \frac{2}{3}, E(Y) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1, E(Y^2) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}, \text{代入算得 } \text{cov}(X - Y, Y) = -\frac{2}{3}.$$

**定理 18.2.3 (协方差与方差).**  $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\text{cov}(X, Y)$ .

**例 18.2.3 (2011 数一).** 设随机变量  $X$  与  $Y$  的概率分布分别为  $\frac{X}{P} \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \end{array}$ ,  $\frac{Y}{P} \begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$ , 且

$$P\{X^2 = Y^2\} = 1.$$

(1) 二维随机变量  $(X, Y)$  的概率分布; (2)  $Z = XY$  的概率分布; (3)  $X$  和  $Y$  的相关系数  $\rho_{XY}$ .

|  |  |   |
|--|--|---|
|  |  | (1) 因为 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$ , 所以 $P\{X^2 \neq Y^2\} = 1 - 1 = 0$ , 于是有  |
|  |  | $\begin{cases} a_{11} = P\{X = 0, Y = -1\} = 0 \Rightarrow a_{21} = \frac{1}{3} \\ a_{22} = P\{X = 1, Y = 0\} = 0 \Rightarrow a_{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow a_{13} = 0 \Rightarrow a_{23} = \frac{1}{3} \end{cases}$ |
|  |  | (2) $Z = XY$ 的可能取值为 $-1, 0, 1$ , 且 $P\{Z = 1\} = P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{3}$   |
|  |  | $P\{Z = 0\} = P\{X = 0, Y = *\} + P\{X = *, Y = 0\} = \frac{1}{3}$  |
|  |  | 同理 $P\{Z = -1\} = \frac{1}{3}$ , 于是 $Z$ 的概率分布为 $\frac{Z}{P} \begin{array}{ c ccc } \hline & -1 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$ .                                     |
|  |  | (3) 易求得 $\text{cov}(X, Y) = 0$ , 于是 $\rho_{XY} = 0$ . $\frac{Y}{P} \begin{array}{ c ccc } \hline & -1 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$                                |

### 18.2.3 相关系数

**定义 18.2.2 (相关系数).** 对于随机变量  $X, Y$ ,  $D(X) > 0, D(Y) > 0$ , 则称  $\frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$  为随机变量  $X$  和  $Y$  的相关系数, 记作  $\rho_{XY}$ .

**定理 18.2.4 (相关系数的性质).** (1)  $|\rho_{XY}| \leq 1$ ;

(2)  $|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow$  存在  $a, b$  使得  $PY = aX + b = 1$ , 其中  $a > 0$  时,  $\rho_{XY} = 1$  (正线性相关);  $a < 0$  时,  $\rho_{XY} = -1$  (负线性相关).

**例 18.2.4.** 设随机变量  $X$  和  $Y$  的联合概率分布为表 ??, 求  $X$  和  $Y$  的相关系数  $\rho$ .

联合概率分布表

$X, Y$  的分布律分别为  $\frac{X}{P} \begin{array}{|c|cc|} \hline 0 & 0.4 & 0.6 \\ \hline \end{array}$ ,  $\frac{Y}{P} \begin{array}{|c|ccc|} \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline 0.15 & 0.5 & 0.35 \\ \hline \end{array}$ , 那么

|   |  |      |      |      |
|---|--|------|------|------|
|   |  | -1   | 0    | 1    |
| 0 |  | 0.07 | 0.18 | 0.15 |
| 1 |  | 0.08 | 0.32 | 0.20 |

$$E(X) = 0.6, E(Y) = 0.2, E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} = -0.08 + 0.20 = 0.12$$

$$\text{所以 } \text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0, \text{ 所以 } \rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = 0.$$

**例 18.2.5 (1994 数一).** 已知随机变量  $X$  和  $Y$  分布服从正态分布  $N(1, 3^2)$  和  $N(0, 4^2)$ , 且  $X$  与  $Y$  的相关系数  $\rho_{XY} = -\frac{1}{2}$ , 设  $Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$ .

(1) 求  $Z$  的数学期望  $E(Z)$  和方差  $D(Z)$ ; (2) 求  $X$  和  $Z$  的相关系数  $\rho_{XZ}$ .

$$(1) E(Z) = \frac{1}{3}E(X) + \frac{1}{2}E(Y) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3},$$

$$D(Z) = \frac{1}{9}D(X) + \frac{1}{4}D(Y) + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \text{cov}(X, Y) = \frac{1}{9}D(X) + \frac{1}{4}D(Y) + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \rho_{XY} \sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)} = 3.$$

(2) 由协方差的性质,

$$\text{cov}(X, Z) = \text{cov}\left(X, \frac{1}{3}X + \frac{1}{2}Y\right) = \frac{1}{3}\text{cov}(X, X) + \frac{1}{2}\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{3}D(X) + \frac{1}{2} \cdot \rho_{XY} \sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)} = 0$$

所以  $\rho_{XZ} = 0$ .

**例 18.2.6 (2000 数一).** 设二维随机变量  $(X, Y)$  服从二维正态分布, 则随机变量  $\xi = X+Y$  与  $\eta = X-Y$  不相关的充分必要条件为

- A.  $E(X) = E(Y)$   
 B.  $E(X^2) - E^2(X) = E(Y^2) - E^2(Y)$   
 C.  $E(X^2) = E(Y^2)$   
 D.  $E(X^2) + E^2(X) = E(Y^2) + E^2(Y)$

因为不相关, 所以  $\rho_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow \text{cov}(\xi, \eta) = 0$ , 于是

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) = E(X^2 - Y^2) - E(X + Y)E(X - Y) = E(X^2 - Y^2) - E^2(X) + E^2(Y) = 0$$

即  $E(X^2) - E^2(X) = E(Y^2) - E^2(Y)$ , 故选 B.

**定理 18.2.5.** 当  $Y = aX + b$  时,  $\rho_{XY} = \text{sgn}(a)$ .

**例 18.2.7.** 设随机变量  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y \sim N(1, 4)$ , 且相关系数  $\rho_{XY} = 1$ , 则

- A.  $P\{Y = -2X - 1\} = 1$   
 B.  $P\{Y = 2X - 1\} = 1$   
 C.  $P\{Y = -2X + 1\} = 1$   
 D.  $P\{Y = 2X + 1\} = 1$

用排除法, 设  $Y = aX + b$ , 由  $\rho_{XY} = 1 \Rightarrow a > 0$ , 排除 A、C, 由  $E(X) = 0$ ,  $E(Y) = 1$ , 且

$$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b \Rightarrow b = 1$$

排除 B, 故选 D.

**例 18.2.8.** 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(1 - x^2 - y^2), & x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1)  $X$  与  $Y$  是否相互独立, 说明理由;

(2) 求  $\rho_{XY}$ ;

(3) 求  $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$  的概率密度.

(1) 注意到  $X$  与  $Y$  轮换对此, 那么

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{2}{\pi} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy = \frac{4}{\pi} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} [(1 - x^2) - y^2] dy \\ &= \frac{4}{\pi} \left[ (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} (1 - x^2)^{\frac{5}{2}} \right] = \frac{8}{3\pi} (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}, |x| \leqslant 1 \end{aligned}$$

故

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{8}{3\pi} (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

同理可求得

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{8}{3\pi} (1 - y^2)^{\frac{3}{2}}, & |y| \leqslant 1 \\ 0, & |y| > 1 \end{cases}$$

由于  $f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f(x, y)$ , 所以  $X$  与  $Y$  不相互独立.

(2) 由  $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X dx = \int_{-1}^1 x \cdot \frac{8}{3\pi} (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = 0$ , 且被积函数关于  $x, y$  均为奇函数,

$$E_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy = \iint_{x^2 + y^2 \leqslant 1} \frac{2}{\pi} xy (1 - x^2 - y^2) dx dy = 0$$

所以  $\text{cov}(X, Y) = EXY - EXEY = 0$ , 从而可得  $\rho_{XY} = 0$ .

(3) 当  $z < 0$  时,  $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$  的分布函数为  $F_Z(z) = 0$ . 当  $0 \leq z < 1$  时,

$$F_z(z) = P\{\sqrt{X^2 + Y^2} \leq z\} = \iint_{x^2+y^2 \leq z^2} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \frac{2}{\pi} (1 - r^2) r dr = 2z^2 - z^4$$

$$\text{当 } z \geq 1 \text{ 时, } F_Z(z) = 1, \text{ 故 } Z \text{ 的概率密度为 } f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 4z - 4z^3, & 0 < z < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

## 第 19 章

### 大数定律与中心极限定理

”对于任意一个正数，不论它多大，总有一个足够大的整数，使得它的倒数小于这个正数。”

——切比雪夫

大数定律和中心极限定理是概率论和数理统计中非常重要的两个定理，它们是统计学中的基础。

1. 大数定律：大数定律是指在独立同分布的随机变量序列中，随着样本容量的增大，样本均值会越来越接近于总体均值。换句话说，样本均值的极限等于总体均值。大数定律是统计学的基础，它保证了样本的可靠性和稳定性，使得我们可以通过样本来推断总体的特征。

2. 中心极限定理：中心极限定理是指在独立同分布的随机变量序列中，当样本容量趋近于无穷大时，样本均值的分布趋近于正态分布。也就是说，当样本容量足够大时，样本均值的分布呈现出正态分布的特征。中心极限定理是统计学中非常重要的定理，它保证了样本均值的可靠性和稳定性，使得我们可以通过样本均值来推断总体的特征，并进行统计推断。

大数定律和中心极限定理是统计学中的基本定理，它们为我们提供了理论支持和工具，使得我们可以通过样本来推断总体的特征，并进行统计推断。

#### 19.1 Chebyshev 不等式

方差可以描述随机变量的离散程度，方差越大，说明随机变量取值越分散，偏离其均值  $E(X)$  越远。具体来讲，设  $\varepsilon$  为任意正数，事件  $|X - E(X)| \geq \varepsilon$  发生的概率  $P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\}$  应该与方差  $D(X)$  关系密切， $D(X)$  越大， $P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\}$  应该越大，其关系就是下面著名的 Chebyshev 不等式。

**定理 19.1.1 (Chebyshev 不等式).** 设随机变量  $X$  的数学期望  $E(X)$  和方差  $D(X)$  均存在，则对于任意  $\varepsilon > 0$ ，不等式

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \text{ 或 } P\{|X - \mu| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

**例 19.1.1.** 设电站供电网有 10000 盏灯，夜晚每一盏灯开灯的概率都是 0.7，假定所有电灯开或关是彼此独立的，试用切比雪夫不等式估计夜晚同时开着的电灯数目在 6800 与 7200 之间的概率。

设  $X$  表示夜晚同时开着的电灯数目, 它服从参数  $n = 10000, p = 0.7$  的二项分布. 于是有

$$\begin{aligned} E(X) &= np = 10000 \times 0.7 = 7000, D(X) = npq = 10000 \times 0.7 \times 0.3 = 2100, \\ P\{6800 < X < 7200\} &= P\{|X - 7000| < 200\} \geq 1 - \frac{2100}{200^2} \approx 0.95. \end{aligned}$$

计算结果表明, 虽然有 10000 盏灯, 但是电站只要有供应 7000 盏灯的电力就能够以相当大的概率保证电量够用.

## 19.2 大数定律

大数定律是概率论中的一个基本定理, 描述了随机变量序列的均值在样本数量足够大的情况下会收敛于其数学期望的概率性现象. 大数定律是概率论和统计学中的重要定理之一, 对于理解随机现象的规律和稳定性具有重要意义.

### 19.2.1 Bernoulli 大数定律

**定理 19.2.1 (Bernoulli 大数定律).** 设  $n_A$  是  $n$  重 Bernoulli 试验中事件  $A$  发生的次数,  $p(0 < p < 1)$  是事件  $A$  在一次试验中发生的概率, 则对任意给定的正数  $\varepsilon$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{n_A}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

### 19.2.2 Chebyshev 大数定律

**定理 19.2.2 (Chebyshev 大数定律).** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  是相互独立的随机变量序列, 其数学期望与方差都存在, 且方差一致有界, 即存在正数  $M$ , 对任意  $i(i = 1, 2, \dots)$ , 有

$$D(X_i) \leq M$$

则对任意给定的正数  $\varepsilon$ , 恒有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

这一定理说明, 经过算术平均后得到的随机变量  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  在统计上具有一种稳定性, 它的取值将比较紧密地聚集在其期望附近. 这正是大数定律的含义, 在概率论中, 大数定律是随机现象的统计稳定性的深刻描述, 同时也是数理统计的重要理论基础.

Bernoulli 大数定律是 Chebyshev 大数定律的特殊情况, 即随机变量序列  $X_i \sim b(1, p)$ ,  $\sum_{i=1}^n X_i$  是  $n$  次独立重复试验中  $A$  发生的次数  $n_A$ , 即  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  为事件  $A$  发生的频率  $\frac{n_A}{n}$ , 而  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = p$ .

### 19.2.3 Khinchin 大数定律

**定理 19.2.3 (Khinchin 大数定律).** 设随机变量序列  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  相互独立且服从相同的分布, 具有数学期望  $E(X_i) = \mu, i = 1, 2, \dots$ , 则对任意给定的正数  $\varepsilon$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Khinchin 大数定律中对  $D(X_i)$  不再有要求, 即不用再验证方差  $D(X_i)$  是否存在. 因此, 它比 Chebyshev 大数定律使用更方便.

## 19.3 中心极限定理

中心极限定理是概率论和统计学中的一个基本定理, 描述了独立同分布随机变量和其均值之间的关系. 中心极限定理指出, 对于具有有限方差的独立同分布随机变量, 它们的样本均值在样本量足够大的情况下, 以接近正态分布的形式收敛.

### 19.3.1 Levy Lindeberg 定理

**定理 19.3.1 (Levy Lindeberg 中心极限定理).** 设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  相互独立, 服从同一分布, 且具有数学期望和方差:

$$E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 > 0 (i = 1, 2, \dots)$$

则对任意实数  $x$  都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant x \right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

其中  $\Phi(x)$  是标准正态分布函数.

当  $n$  充分大时,  $\sum_{i=1}^n X_i$  近似服从正态分布  $N(n\mu, n\sigma^2)$ , 而  $\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  近似  $N(0, 1)$ .

**例 19.3.1 (2022 数一).** 设  $X_1, X_2, \dots, X_{100}$  为来自总体  $X$  的简单随机样本, 其中  $P\{X = 0\} = P\{X = 1\} = \frac{1}{2}$ ,  $\Phi(x)$  表示标准正态分布函数, 则利用中心极限定理可得  $P\left\{ \sum_{i=1}^{100} X_i \leqslant 55 \right\}$  的近似值为

- A.  $1 - \Phi(1)$       B.  $\Phi(1)$       C.  $1 - \Phi(0.2)$       D.  $\Phi(0.2)$

由  $\frac{X}{P} \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} \end{array}$ ,  $E(X) = \frac{1}{2}$ ,  $D(X) = \frac{1}{4}$ , 那么  $E\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = 100E(X) = 50$ ,  $D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = 100D(X) = 25$ , 根据中心极限定理得出  $\sum_{i=1}^{100} X_i$  近似服从正态分布  $N(50, 25)$ , 将其标准化为  $\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 50}{\sqrt{25}} \sim N(0, 1)$ , 因此

$$P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 50}{\sqrt{25}} \leqslant \frac{55 - 50}{\sqrt{25}} \right\} = \Phi\left(\frac{55 - 50}{\sqrt{25}}\right) = \Phi(1)$$

故选  $B$ .

**例 19.3.2.** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  为独立同分布的随机变量序列, 且均服从参数为  $\lambda (\lambda > 1)$  的指数分布, 记  $\Phi(x)$  为标准正态分布函数, 则有

$$\text{A. } \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\lambda\sqrt{n}} \leqslant x \right\} = \Phi(x) \quad \text{B. } \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leqslant x \right\} = \Phi(x)$$

$$\text{C. } \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leqslant x \right\} = \Phi(x) \quad \text{D. } \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leqslant x \right\} = \Phi(x)$$

因为  $X \sim E(\lambda)$ , 所以  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ ,  $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ , 那么  $E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = nE(X) = \frac{n}{\lambda}$ ,  $D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = nD(X) = \frac{n}{\lambda^2}$ , 根据中心极限定理得出  $\sum_{i=1}^n X_i$  近似服从正态分布  $N\left(\frac{n}{\lambda}, \frac{n}{\lambda^2}\right)$ , 将其标准化为  $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}} \sim N(0, 1)$ , 因此

$$P = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}} \leqslant x \right\} = P \left\{ \frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leqslant x \right\} = \Phi(x)$$

故选  $C$ .

### 19.3.2 De Moivre-Laplace 定理

**定理 19.3.2 (De Moivre-Laplace 中心极限定理).** 设随机变量  $X_n$  服从参数为  $n, p$  ( $0 < p < 1$ ) 的二项分布  $X_n \sim B(n, p)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 对于任意  $x$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x \right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

## 第 20 章

### 数理统计的基本概念

“当我们正想专心工作时，我们却太老了。”

——卡尔·皮尔逊

数理统计是统计学的一个重要分支，主要研究如何利用数学方法对数据进行收集、分析和推断，从而对随机现象进行量化描述和推断。

#### 20.1 随机样本

在数理统计中，总体  $X$  的分布通常是未知的，或者在形式上是已知的但含有未知参数。那么为了获得总体的分布信息，从理论上讲，需要对总体  $X$  中的所有个体进行观察测试，但这往往是做不到的。例如，由于测试砖的耐压性的试验具有破坏性，一旦我们获得每块砖的耐压数据，这批砖也就全部报废了。所以，我们不可能对所有个体逐一观察测试，而是从总体  $X$  中随机抽取若干个个体进行观察测试。从总体中抽取若干个个体的过程叫做抽样，抽取的若干个个体称为样本，样本中所含个体的数量称为样本容量。

由上知，抽取样本是为了研究总体的性质，为了保证所抽取的样本具有代表性，抽样方法必须满足以下两个条件：

- (1) 随机性。每次抽取时，总体中每个个体被抽到的可能性均等，可以通过编号抽签的方法或利用随机数表的方法产生。
- (2) 独立性。每次抽取必须是相互独立的，即每次抽取的结果既不影响其他各次抽取的结果，也不受其他各次抽取结果的影响。

这种随机的、独立的抽样方法称为简单随机抽样，由此得到的样本称为简单随机样本。今后，如无特殊说明，样本专指简单随机样本。

**定义 20.1.1 (样本与样本值).** 设总体  $X$  的分布函数为  $F(x)$ , 若随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 且都与总体  $X$  具有相同的分布函数, 则称  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的简单随机样本, 简称为样本,  $n$  称为样本容量. 在对总体  $X$  进行一次具体的抽样并作观测之后, 得到样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的确切数值  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 称为样本观测值, 简称为样本值.

根据定义, 若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是分布函数为  $F(x)$  的总体  $X$  的容量为  $n$  的简单随机样本, 则  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的联合分布函数为  $F^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i)$ .

若总体  $X$  是离散型随机变量, 其分布律为  $P\{X = x_i\} = p_i(i = 1, 2, \dots)$ , 则  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的联合分布律为

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^n P\{X_i = x_i\} = \prod_{i=1}^n p_i.$$

若总体  $X$  是连续型随机变量, 其概率密度为  $f(x)$ , 则  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的联合概率密度为

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

**定义 20.1.2 (统计量与其观测值).** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的一个样本,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是样本观测值,  $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的函数. 如果  $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  中不含未知参数, 则称  $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为一个统计量, 而  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  称为统计量的观测值.

### 20.1.1 常用统计量

**定义 20.1.3 (常用统计量).** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的简单随机样本, 以下为常用统计量:

$$(1) \text{ 样本均值 } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i;$$

$$(2) \text{ 样本方差 } S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right);$$

$$(3) \text{ 样本标准差 } S = \sqrt{S^2};$$

$$(4) \text{ 样本 } k \text{ 阶原点矩 } A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k (k = 1, 2, \dots);$$

$$(5) \text{ 样本 } k \text{ 阶中心矩 } B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k (k = 2, 3, \dots); \text{ 其中 } B_1 = 0, B_2 = \frac{n-1}{n} S^2;$$

$$(6) \text{ 最小顺序统计量 } X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

$$F_{(1)}(x) = P\{\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq x\} = 1 - [1 - F(x)]^n$$

对连续型随机变量, 概率密度函数为  $f_{(1)}(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} f(x)$ ;

(7) 最大顺序统计量  $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

$$F_{(n)}(x) = P\{\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq x\} = [F(x)]^n$$

对连续型随机变量, 概率密度函数为  $f_{(n)}(x) = n[F(x)]^{n-1}f(x)$ .

### 20.1.2 样本数字特征的性质

**定理 20.1.1 (样本数字特征的性质).** (1) 若总体  $X$  的数学期望  $E(X) = \mu$ , 则  $E(\bar{X}) = E(X) = \mu$ ;

(2) 若总体  $X$  的方差为  $D(X) = \sigma^2$ , 则  $D(\bar{X}) = \frac{1}{n}D(X) = \frac{\sigma^2}{n}$ ,  $E(S^2) = D(X) = \sigma^2$ .

**例 20.1.1.** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自指数分布总体  $E(\lambda)$  的简单随机样本  $\bar{X}$  和  $S^2$  分别是样本均值和样本方差, 记统计量  $T = \bar{X} - S^2$ , 求  $E(T)$ .

$$\begin{aligned} E(T) &= E(\bar{X} - S^2) = E(\bar{X}) - E(S^2) = E(\bar{X}) - D(X), \text{ 因为 } X \sim E(\lambda), \text{ 所以 } E(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \text{ 因此} \\ E(T) &= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\lambda - 1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

**例 20.1.2.** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自  $X \sim P(\lambda)$  的简单随机样本,  $\bar{X}$  和  $S^2$  分布为样本均值和方差, 求统计量  $T = \bar{X}^2 - \frac{S^2}{n}$  的数学期望  $E(T)$ .

$$\begin{aligned} E(T) &= E\left(\bar{X}^2 - \frac{S^2}{n}\right) = E(\bar{X}^2) - E\left(\frac{S^2}{n}\right) = E(\bar{X}^2) - \frac{1}{n}E(S^2) = D(\bar{X}) + E^2(\bar{X}) - \frac{1}{n}D(X), \text{ 因为 } X \sim P(\lambda), \text{ 所以} \\ E(X) &= D(X) = \lambda, \text{ 且} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n\lambda = \lambda \\ D(\bar{X}) &= D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n\lambda = \frac{\lambda}{n} \end{aligned}$$

$$\text{因此 } E(T) = \frac{\lambda}{n} + \lambda^2 - \frac{\lambda}{n} = \lambda^2.$$

## 20.2 三大抽样分布

### 20.2.1 $\chi^2$ 分布

**定义 20.2.1 (卡方分布).** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 且都服从标准正态分布  $N(0, 1)$ , 则称统计量

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

服从自由度为  $n$  的  $\chi^2$  分布, 记为  $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ .

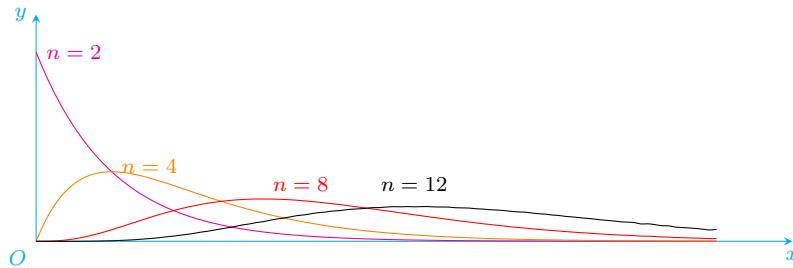


图 20.2.1

**定理 20.2.1.** 若  $X \sim \chi^2(n)$ , 则  $E(X) = n, D(X) = 2n$ .

**例 20.2.1.** 设  $X_1, x_2, \dots, X_n, X_{n+1}$  为总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本, 且有

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, T = \frac{n}{(n+1)\sigma^2} (X_{n+1} - \bar{X})^2$$

求  $T$  服从的分布, 并计算  $E(T)$  和  $D(T)$ .

**错解.** 由题意知  $X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2\right)$ , 且  $X_{n+1}$  与  $\bar{X}$  相互独立, 故  $X_{n+1} - \bar{X} \sim N\left(0, \frac{n-1}{n}\sigma^2\right)$ ,

**错因:** 不能简单的加减法, 要从期望和方差的角度进行计算.

由题意知  $X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2\right)$ , 且  $X_{n+1}$  与  $\bar{X}$  相互独立,

$$E(X_{n+1} - \bar{X}) = E(X_{n+1}) - E(\bar{X}) = \mu - \mu = 0, D(X_{n+1} - \bar{X}) = D(X_{n+1}) + D(\bar{X}) = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n+1}{n}\sigma^2$$

因此  $X_{n+1} - \bar{X} \sim N\left(0, \frac{n+1}{n}\sigma^2\right)$ , 则  $\frac{X_{n+1} - \bar{X} - 0}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma} \sim N(0, 1)$ , 两边平方有

$$\left( \frac{X_{n+1} - \bar{X} - 0}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma} \right)^2 = \frac{n}{(n+1)\sigma^2} (X_{n+1} - \bar{X})^2 = T \sim \chi^2(1)$$

故  $E(T) = 1, D(T) = 2$ .

**定理 20.2.2 (分布的可加性).** 设  $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$ , 且  $X, Y$  相互独立, 则

$$X + Y \sim \chi^2(n_1 + n_2).$$

**定理 20.2.3 ( $\chi^2$  分布上  $\alpha$  分位点).** 设  $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ , 对于给定的  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ), 满足条件

$$P\{\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)\} = \int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty} f(y) dy = \alpha$$

的点  $\chi_\alpha^2(n)$  称为  $\chi^2(n)$  分布的上  $\alpha$  分位点.

**例 20.2.2.** 已知  $(X, Y)$  的概率密度函数为  $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2y+1)}$ ,  $-\infty < x, y < +\infty$ , 求  $\frac{X^2}{(Y-1)^2}$  服从的分布及参数.

已知二维正态分布概率密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

因此  $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2xy+1)} \sim N(0, 1; 1, 1; 0)$ , 故  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y \sim N(1, 1)$  且  $X, Y$  相互独立, 那么  $\frac{X^2}{(Y-1)^2} \sim F(1, 1)$ .

**例 20.2.3.** 设  $X_1, X_2$  是来自总体  $X$  的简单随机样本, 且  $\bar{X} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 X_i$ ,  $S_2^2 = \sum_{i=1}^2 (X_i - \bar{X})^2$ ,  $Y = \sqrt{X_1 X_2}$ ,

(1) 若  $X$  服从参数为  $\frac{1}{2}$  的指数分布, 求  $EY$ ;

(2) 若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 求  $E[(\bar{X} S_2^2)^2]$ .

(1)  $EY = E(\sqrt{X_1 X_2}) = [E(\sqrt{X})]^2$ , 下求  $E\sqrt{X}$ ,

$$E\sqrt{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x} \cdot f(x) dx = \int_0^{+\infty} \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} dx \stackrel{\frac{1}{2}x=t}{=} \sqrt{2} \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt = \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

$$\text{于是 } EY = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

(2) 因为  $\bar{X}$  与  $S_2^2$  相互独立, 所以

$$\begin{aligned} E[(\bar{X} S_2^2)^2] &= E(\bar{X}^2) E(S_2^2) = [D\bar{X} + (E\bar{X})^2][D(S_2^2) + E^2(S_2^2)] \\ &= \left[\frac{1}{n} DX + E^2 X\right] \left[ (\sigma^2)^2 D\left(\frac{S_2^2}{\sigma^2}\right) + \left(\sigma^2 E\left(\frac{S_2^2}{\sigma^2}\right)\right)^2 \right] \\ &= \left(\frac{1}{2}\sigma^2 + \mu^2\right)(2\sigma^4 + \sigma^4) = 3\sigma^4\left(\frac{1}{2}\sigma^2 + \mu^2\right). \end{aligned}$$

## 20.2.2 $t$ 分布

**定义 20.2.2 ( $t$  分布).** 设随机变量  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y \sim \chi^2(n)$ , 且  $X, Y$  相互独立, 则称随机变量

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

服从自由度为  $n$  的  $t$  分布, 记为  $T \sim t(n)$ .

**定理 20.2.4.**  $t$  分布的概率密度函数  $h(t)$  为偶函数, 即  $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$ .

**定理 20.2.5.** 当  $n$  足够大时,  $t$  分布近似于  $N(0, 1)$  分布.

**定理 20.2.6 ( $t$  分布与  $F$  分布).**  $t^2 \sim F(1, n)$ .

**定义 20.2.3 ( $t$  分布上  $\alpha$  分位点).** 设  $t \sim t(n)$ , 对于给定的  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ), 满足条件

$$P\{t > t_\alpha(n)\} = \int_{t_\alpha(n)}^{+\infty} h(t) dt = \alpha$$

的点  $t_\alpha(n)$  称为  $t(n)$  分布的上  $\alpha$  分位点.

### 20.2.3 F 分布

**定义 20.2.4 (F 分布).** 设随机变量  $X \sim \chi^2(n_1)$ ,  $Y \sim \chi^2(n_2)$ , 且  $X, Y$  相互独立, 则称随机变量

$$F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$$

服从自由度为  $(n_1, n_2)$  的  $F$  分布, 记为  $F \sim F(n_1, n_2)$ .

**定理 20.2.7.** 若  $F \sim F(n_1, n_2)$ , 则有  $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$ ,  $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$ .

**定理 20.2.8 (F 分布上  $\alpha$  分位点).** 设  $F \sim F(n_1, n_2)$ , 对于给定的  $\alpha(0 < \alpha < 1)$ , 满足条件

$$P\{F > F_\alpha(n_1, n_2)\} = \int_{F_\alpha(n_1, n_2)}^{+\infty} \psi(y) dy = \alpha$$

的点  $F_\alpha(n_1, n_2)$  称为  $F(n_1, n_2)$  分布的上  $\alpha$  分位点.

常用分布及其数学期望与方差.

表 20.1: 常用分布及其数学期望与方差

| 分布名称及记号                     | 概率函数或概率密度  | 数学期望                | 方差  |
|-----------------------------|--|---------------------|---|
| (1) “0-1” 分布                | $p(x) = p^x q^{1-x}, x = 0, 1, 0 < p < 1, p + q = 1$   | $p$                 | $pq$  |
| (2) 二项分布 $B(n, p)$          | $p(x) = C_n^x p^x q^{n-x}, x = 0, 1, 2, \dots, n, 0 < p < 1, p + q = 1$  | $np$                | $npq$   |
| (3) 超几何分布 $H(n, M, N)$      | $p(x) = \frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}, x = 0, 1, \dots, \min\{n, M\}, 0 \leq n, M \leq N$  | $\frac{nM}{N}$      | $\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$                 |
| (4) 泊松分布 $\pi(\lambda)$     | $p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0$  | $\lambda$           | $\lambda$                                       |
| (5) 几何分布 $G(p)$             | $p(x) = pq^{x-1}, x = 1, 2, \dots, 0 < p < 1, p + q = 1$   | $\frac{1}{p}$       | $\frac{q}{p^2}$                                 |
| (6) 均匀分布 $U(a, b)$          | $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$  | $\frac{a+b}{2}$     | $\frac{(b-a)^2}{12}$                            |
| (7) 指数分布 $e(\lambda)$       | $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \lambda > 0$   | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$                           |
| (8) 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ | $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty, \sigma > 0$  | $\mu$               | $\sigma^2$                                      |
| (9) $\chi^2$ 分布 $\chi^2(k)$ | $f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$  | $k$                 | $2k$  |
| (10) $t$ 分布 $t(k)$          | $f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$  | 0                   | $\frac{k}{k-2}$                                 |
| (11) $F$ 分布 $F(k_1, k_2)$   | $f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)} k_1^{\frac{k_1}{2}} k_2^{\frac{k_2}{2}} \frac{x^{\frac{k_1}{2}-1}}{(k_1 x + k_2)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ | $\frac{k_2}{k_2-2}$ | $\frac{2k_2^2(k_1+k_2-2)}{k_1(k_2-2)^2(k_2-4)}$ |

**例 20.2.4.** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ( $n \geq 2$ ) 为来自总体  $N(\mu, 1)$  的简单随机样本, 及  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 则不能得出结论

- A.  $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$  服从  $\chi^2$  分布      B.  $2(X_n - X_1)^2$  服从  $\chi^2$  分布  
 C.  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  服从  $\chi^2$  分布      D.  $n(\bar{X} - \mu)^2$  服从  $\chi^2$  分布

$X_i - \mu \sim N(0, 1)$ , 由卡方分布的定义知  $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$ , A 正确;  $X_n \sim N(\mu, 1)$ ,  $X_1 \sim N(\mu, 1)$ , 标准化处理有  $\frac{X_n - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$ , 即  $\left(\frac{X_n - X_1}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi^2(1) \Rightarrow \frac{(X_n - X_1)^2}{2} \sim \chi^2(1)$ , 故选项 B 错误; 由于  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = (n-1)S^2$ , 而  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ , 则  $\frac{(n-1)S^2}{1} \sim \chi^2(n-1)$ , 即  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$ , C 正确; 由于  $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \sim N(0, 1)$ , 则  $\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right)^2 = n(\bar{X} - \mu)^2 \sim \chi^2(1)$ , D 正确.

**例 20.2.5.** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本, 则数学期望

$$E\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\left[\sum_{j=1}^n \left(nX_j - \sum_{k=1}^n X_k\right)^2\right]\right\}$$

等于

- A.  $n^3(n-1)\mu \cdot \sigma^2$       B.  $n^2(n-1)\mu \cdot \sigma^2$       C.  $n(n-1)\mu \cdot \sigma^2$       D.  $n^3(n-1)\mu \cdot \sigma$

令  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 那么  $\sum_{i=1}^n X_i = n\bar{X}$ ,

$$\sum_{j=1}^n \left(nX_j - \sum_{k=1}^n X_k\right)^2 = \sum_{j=1}^n (nX_j - n\bar{X})^2 = n^2 \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 = n^2(n-1)S^2$$

因此

$$E\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\left[\sum_{j=1}^n \left(nX_j - \sum_{k=1}^n X_k\right)^2\right]\right\} = E[n\bar{X} \cdot n^2(n-1)S^2] = n^3(n-1)E(\bar{X} \cdot S^2) \xrightarrow{\bar{X}, S^2 \text{ 相互独立}} n^3(n-1)\mu\sigma^2$$

故选 A.

**例 20.2.6.** 已知  $(X, Y)$  的概率密度函数为  $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2y+1)}$ ,  $-\infty < x, y < +\infty$ , 求  $\frac{X^2}{(Y-1)^2}$  服从的分布及参数.

已知二维正态分布概率密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}$$

因此  $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2y+1)} \sim N(0, 1; 1, 1; 0)$ , 故  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y \sim N(1, 1)$  且  $X, Y$  相互独立, 那么  $\frac{X^2}{(Y-1)^2} \sim F(1, 1)$ .

**例 20.2.7.** 设总体  $X \sim N(0, 1)$ ,  $(X_1, X_2, \dots, X_{10})$  为  $X$  的简单随机样本,

$$(1) \text{ 若 } T = \frac{1}{3} \left( \sum_{i=1}^3 X_i \right)^3 + \frac{1}{7} \left( \sum_{i=4}^{10} X_i \right)^2, \text{ 求 } T \text{ 服从的分布;}$$

$$(2) \text{ 若 } T = \frac{7 \sum_{i=1}^3 X_i^2}{3 \sum_{i=4}^{10} X_i^2}, \text{ 求 } T \text{ 服从的分布;}$$

$$(3) \text{ 若 } T = \frac{3X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{10} X_i^2}}, \text{ 求 } T \text{ 服从的分布.}$$

(1) 因为  $\sum_{i=1}^3 X_i = X_1 + X_2 + X_3 \sim N(0+0+0, 1+1+1) = N(0, 3)$ , 所以

$$\frac{1}{3} \left( \sum_{i=1}^3 X_i \right)^2 = \frac{\left( \sum_{i=1}^3 X_i \right)^2}{(\sqrt{3})^2} = \left( \frac{\sum_{i=1}^3 X_i - 0}{\sqrt{3}} \right)^2 \sim \chi^2(1)$$

$$\text{同理 } \frac{1}{7} \left( \sum_{i=4}^{10} X_i \right)^2 = \frac{\left( \sum_{i=4}^{10} X_i \right)^2}{(\sqrt{7})^2} = \left( \frac{\sum_{i=4}^{10} X_i - 0}{\sqrt{7}} \right)^2 \sim \chi^2(1), \text{ 于是 } T = \frac{1}{3} \left( \sum_{i=1}^3 X_i \right)^3 + \frac{1}{7} \left( \sum_{i=4}^{10} X_i \right)^2 \sim \chi^2(2).$$

$$(2) T = \frac{7 \sum_{i=1}^3 X_i^2}{3 \sum_{i=4}^{10} X_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^3 X_i^2}{\frac{\sum_{i=4}^{10} X_i^2}{7}} \sim F(3, 7).$$

$$(3) T = \frac{3X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{10} X_i^2}} = \frac{X_1}{\sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{10} X_i^2}{3}}} = \frac{X_1}{\sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{10} X_i^2}{9}}} \sim t(9).$$

## 20.3 正态总体的抽样分布

设总体  $X$  (不管服从什么分布, 只要均值和方差存在) 的均值为  $\mu$ , 方差为  $\sigma^2$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自  $X$  的一个样本, 样本均值  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 样本方差  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ , 则有  $E(\bar{X}) = \mu$ ,  $D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ ,  $E(S^2) = \sigma^2$ .

鉴于正态总体在数理统计中的重要性, 我们将不加证明地给出有关来自于正态总体样本均值及样本方差的统计量分布的结论. 这些结论将在总体参数的区间估计和假设检验问题中用到.

### 20.3.1 单正态总体的抽样分布

**定理 20.3.1 (单正态总体的抽样分布).** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自正态总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本, 样本均值为  $\bar{X}$ , 样本方差为  $S^2$ , 则

$$(1) \quad \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1);$$

$$(2) \quad \bar{X} \text{ 与 } S^2 \text{ 相互独立, 且 } \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1);$$

$$(3) \quad \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1);$$

$$(4) \quad \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n).$$

### 20.3.2 双正态总体的抽样分布

**定理 20.3.2 (双正态总体的抽样分布).** 设  $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$  与  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$  分别为来自于总体  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  和  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  的样本, 且这两个样本相互独立. 设  $\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i$ ,  $\bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i$  分别是两个样本的样本均值,

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2, \quad S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2$$

分别是两个样本的样本方差, 则有:

$$(1) \quad \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1);$$

$$(2) \quad \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1);$$

$$(3) \quad \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2), \text{ 其中 } S_w^2 = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

## 第 21 章

### 正态总体参数的区间估计与假设检验

“在波兰，没有谁能考我！”于是，传记作家问他，那谁算你的导师呢？

他丝毫不迟疑的回答：“亨利·勒贝格！”

——乔治·内曼

在统计学中，对于正态总体参数的区间估计和假设检验是非常常见的问题。正态总体是指总体服从正态分布的情况，对于正态总体的参数（如均值和方差）的区间估计和假设检验有着特定的方法和步骤。

#### 1. 正态总体参数的区间估计：

均值的区间估计：对于正态总体均值的区间估计，常用的方法是利用样本均值和样本标准差构造置信区间。当总体方差已知时，可以使用正态分布进行区间估计；当总体方差未知时，可以使用  $t$  分布进行区间估计。

方差的区间估计：对于正态总体方差的区间估计，可以使用卡方分布构造置信区间。

2. 正态总体参数的假设检验：均值的假设检验：对于正态总体均值的假设检验，常用的方法包括单样本  $t$  检验、双样本  $t$  检验、配对样本  $t$  检验等。假设检验的步骤包括设定原假设和备择假设、计算检验统计量、确定显著性水平、做出决策。

方差的假设检验：对于正态总体方差的假设检验，可以使用  $F$  检验。

3. 置信水平和显著性水平：在区间估计和假设检验中，置信水平和显著性水平是非常重要的概念。置信水平表示我们对参数估计的信心程度，通常取常见的置信水平有 95%、99% 等；显著性水平表示拒绝原假设的程度，通常取 0.05、0.01 等。

4. 统计软件的应用：对于复杂的正态总体参数的区间估计和假设检验问题，可以使用统计软件（如R、Python、SPSS等）进行计算和分析，以提高效率和准确性。

通过对正态总体参数的区间估计和假设检验的研究，我们可以更好地理解样本数据中的信息，对总体参数进行推断和判断，为决策提供统计学依据。这些方法在实际问题分析和科学研究中有着广泛的应用。

## 21.1 区间估计

区间估计是统计学中一种常用的方法, 用于估计一个参数的值在一个给定的区间内的范围. 在实际应用中, 我们往往无法得到一个参数的精确值, 而是通过收集样本数据, 利用统计方法来估计这个参数的取值范围.

### 21.1.1 区间估计的定义

**定义 21.1.1 (区间估计).** 设总体  $X$  的分布函数为  $F(x; \theta)$ , 含有未知参数  $\theta \in \Theta$  ( $\Theta$  是  $\theta$  的取值范围), 对于给定的  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ),  $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  和  $\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  ( $\underline{\theta} < \bar{\theta}$ ) 是来自  $X$  的样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  确定的两个统计量, 若对于任意  $\theta \in \Theta$  满足

$$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) < \theta < \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)\} \geq 1 - \alpha$$

则称随机区间  $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$  为参数  $\theta$  的置信水平为  $1 - \alpha$  的置信区间,  $\underline{\theta}$  和  $\bar{\theta}$  分别称为置信水平为  $1 - \alpha$  的双侧置信区间的置信下限和置信上限,  $1 - \alpha$  称为置信水平.

置信水平  $1 - \alpha$  的含义: 在随机抽样中, 若重复抽样多次 (每次的样本容量相同), 得到样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的多个样本值, 对应每个样本值都确定了一个置信区间  $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ , 每个这样的置信区间要么包含了  $\theta$  的真值, 要么不包含  $\theta$  的真值.

根据伯努利大数定律, 当抽样次数充分大时, 这些置信区间中包含  $\theta$  的真值的频率接近于置信水平 (即概率)  $1 - \alpha$ , 即在这些置信区间中包含  $\theta$  的真值的置信区间大约有  $(1 - \alpha) \times 100\%$  个, 不包含  $\theta$  的真值的置信区间大约有  $\alpha \times 100\%$  个. 例如, 给定  $\alpha = 0.05$ , 则置信水平是 0.95, 若重复抽样 10000 次, 对应每次抽样都确定了一个置信区间  $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ , 则其中大约有 9500 个置信区间包含  $\theta$  的真值, 大约有 500 个置信区间不包含  $\theta$  的真值. 也就是说, 某一置信区间中包含  $\theta$  的真值的概率是 0.95.

**例 21.1.1.** 已知某种袋装食盐的质量  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 从一批食盐中随机抽取 9 袋, 测得其质量 (单位: g) 分别为

502 503 501 503 498 502 499 500 501

已知  $\sigma = 1$ , 求总体均值  $\mu$  的置信水平为 0.95 的置信区间.

由于统计量  $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ , 按标准正态分布上  $\alpha$  分位点的定义 (见图 21.1.1), 有

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

即

$$P\{\bar{X} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\} = 1 - \alpha$$

故此置信区间为

$$(\bar{X} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}) \quad (1)$$

常缩写为  $(\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n})$ .

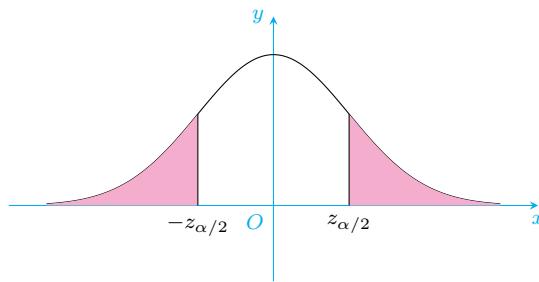


图 21.1.1

由于  $\alpha = 0.05$ , 查表知  $z_{0.025} = 1.96$ , 且由于  $\sigma = 1, n = 9, \bar{x} = 501$ , 由式 (1), 得到  $\mu$  的置信水平为 0.95 的置信区间为  $(501 \pm 1.96 \times 1/\sqrt{9})$ , 即  $(500.35, 501.65)$ .

这个区间的含义是: 若反复抽样多次, 每次抽样均确定一个置信区间, 在这些置信区间中, 包含  $\mu$  的约占 95%, 或者说某一置信区间是包含  $\mu$  的区间的可信程度为 95%. 置信区间长度的一半是 0.65, 表示用  $\bar{x} = 501$  来估计参数  $\mu$  的误差不大于 0.65, 这个误差估计的可信程度是 95%.

若给定置信水平 0.99 时, 则  $\alpha = 0.01$ , 查表知  $z_{0.005} = 2.58$ , 得到置信区间为  $(500.14, 501.86)$ . 可以看出, 当给定的置信水平越大时, 即  $1 - \alpha$  越大, 则  $\alpha$  值越小,  $z_{\alpha/2}$  越大, 从而置信区间长度  $2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  越大, 参数估计的精确程度越差.

### 21.1.2 区间估计的一般步骤

求置信区间的步骤如下:

- (1) 选择一个与样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  及  $\theta$  有关的函数  $W(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta)$ , 使得  $W$  的分布不依赖于  $\theta$  和其他未知参数, 称具有这种性质的函数  $W$  为枢轴量. 枢轴量选取的标准为:
  - (a) 必须含有要估计的参数  $\theta$ , 不含有其他未知参数;
  - (b) 尽量使用总体的已知信息.

- (2) 对于给定的置信水平  $1 - \alpha$ , 根据  $P\{a < W(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) < b\} = 1 - \alpha$ , 在枢轴量  $W$  为常用分布的情况下,  $a$  和  $b$  可由分位数表查得.

选择分位数  $a$  和  $b$  的标准是使区间  $(a, b)$  最小, 实际应用中很难实现这一点, 因此通常选取  $a$  和  $b$  使得  $P\{W(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) \leq a\} = P\{W(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) \geq b\} = \alpha/2$ .

- (3) 由  $a < W(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) < b$ , 作恒等变形后解出参数  $\theta$  的取值范围, 即为所求的置信区间  $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ .
- (4) 代入已知样本数据进行计算.

## 21.2 正态总体均值和方差的区间估计

### 21.2.1 单个正态总体参数的置信区间

正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  是最常见的分布, 下面我们讨论它的两个参数  $\mu$  和  $\sigma^2$  的置信区间. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的样本.

**定理 21.2.1 ( $\sigma^2$  已知时  $\mu$  的置信区间).**  $\sigma^2$  已知, 选择枢轴量  $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ , 得到  $\mu$  的置信水平为  $1 - \alpha$  的置信区间为  $(\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n})$ .

**定理 21.2.2 ( $\sigma^2$  未知时  $\mu$  的置信区间).**  $\sigma^2$  未知, 由于枢轴量  $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$  中含有未知参数  $\sigma$ , 故不能采用. 而  $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$  含有待估计参数  $\mu$ , 且不含有其他未知参数, 则使用  $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$  作为枢轴量 (见图 21.2.1(a)), 得

$$P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1 - \alpha$$

即

$$P\{\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)S/\sqrt{n} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)S/\sqrt{n}\} = 1 - \alpha$$

因此,  $\mu$  的置信水平为  $1 - \alpha$  的置信区间为

$$(\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)S/\sqrt{n}, \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)S/\sqrt{n})$$

常缩写为

$$(\bar{X} \pm t_{\alpha/2}(n-1)S/\sqrt{n}).$$

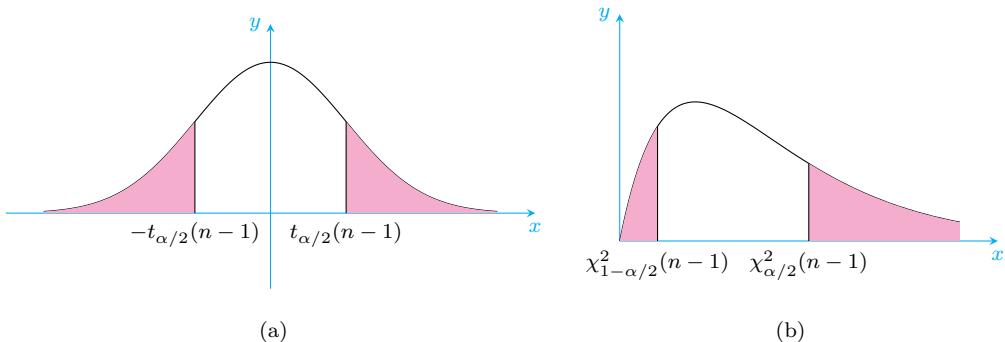


图 21.2.1

在实际中,  $\sigma^2$  未知且  $\mu$  已知的情形是极为少见的, 因此这里只讨论  $\mu$  未知时  $\sigma^2$  的置信区间.

**定理 21.2.3 ( $\mu$  未知时  $\sigma^2$  的置信区间).** 由于  $\mu$  未知, 枢轴量  $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1)$  和  $t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$  中都包含  $\mu$ , 故此不能采用, 而  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$  不含有其他未知参数, 我们采用统计量

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$  作为枢轴量 (见图 21.2.1(b)), 由

$$P \left\{ \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{\alpha/2}^2(n-1) \right\} = 1 - \alpha$$

即

$$P \left\{ (n-1)S^2 / \chi_{\alpha/2}^2(n-1) < \sigma^2 < (n-1)S^2 / \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) \right\} = 1 - \alpha$$

则方差  $\sigma^2$  的置信水平为  $1 - \alpha$  的置信区间为

$$\left( (n-1)S^2 / \chi_{\alpha/2}^2(n-1), (n-1)S^2 / \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) \right)$$

且标准差  $\sigma$  的置信水平为  $1 - \alpha$  的置信区间为

$$\left( \sqrt{(n-1)}S / \sqrt{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \sqrt{(n-1)}S / \sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right).$$

## 21.2.2 双正态总体均值差与方差比的置信区间

### 21.3 单侧置信区间

单侧置信区间是指在统计学中用于估计参数的一种区间估计方法, 只考虑了参数的一个方向. 单侧置信区间通常用于确定参数的下限或上限, 而不是同时确定参数的上限和下限.

**定义 21.3.1 (单侧置信下限).** 对于给定值  $\alpha(0 < \alpha < 1)$ ,  $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是由样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  确定的统计量, 对于任意的  $\theta \in \Theta$  满足  $P\{\theta > \underline{\theta}\} \geq 1 - \alpha$ , 称随机区间  $(\underline{\theta}, +\infty)$  为参数  $\theta$  的置信水平为  $1 - \alpha$  的单侧置信区间,  $\underline{\theta}$  称为  $\theta$  的置信水平为  $1 - \alpha$  的单侧置信下限.

**定义 21.3.2 (单侧置信上限).** 对于给定值  $\alpha(0 < \alpha < 1)$ ,  $\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是由样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  确定的统计量, 对于任意的  $\theta \in \Theta$  满足  $P\{\theta < \bar{\theta}\} \geq 1 - \alpha$ , 称随机区间  $(-\infty, \bar{\theta})$  为参数  $\theta$  的置信水平为  $1 - \alpha$  的单侧置信区间,  $\bar{\theta}$  称为  $\theta$  的置信水平为  $1 - \alpha$  的单侧置信上限.

单侧置信上限和单侧置信下限的求法与双侧置信区间的求法类似, 步骤如下:

- (1) 选择枢轴量的方法与双侧置信区间枢轴量的确定方法是相同的;
- (2) 对于给定的置信水平  $1 - \alpha$ , 若求单侧置信下限, 根据  $P\{\theta > \underline{\theta}\} \geq 1 - \alpha$ , 若求单侧置信上限, 根据  $P\{\theta < \bar{\theta}\} \geq 1 - \alpha$ , 求出分位数  $\underline{\theta}$  或者  $\bar{\theta}$ ;
- (3) 由  $\theta > \underline{\theta}$  或者  $\theta < \bar{\theta}$ , 作恒等变形后解出参数  $\theta$  的取值范围, 即所求的单侧置信区间;
- (4) 代入已知样本数据进行计算, 求出具体区间.

**例 21.3.1.** 从一批电视机中随机地抽取 6 台做寿命试验, 测得寿命 (单位: h) 为

24000 25500 30100 28530 30150 29870

设电视机的寿命服从正态分布, 求电视机平均寿命的单侧置信下限 ( $\alpha = 0.1$ ).

设电视机的寿命  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  未知, 由于  $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$  含有待估计参数  $\mu$ , 且不含有其他未知参数, 故使用  $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$  作为枢纽量, 则

$$P\left\{\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) < t_{\alpha}(n-1)\right\} = 1 - \alpha$$

即

$$P\{\mu > \bar{X} - t_{\alpha}(n-1)S/\sqrt{n}\} = 1 - \alpha$$

于是得到  $\mu$  的置信水平为  $1 - \alpha$  的单侧置信下限为

$$\bar{X} - t_{\alpha}(n-1)S/\sqrt{n}$$

根据已知数据, 得  $\bar{x} = 28025$ ,  $s = 2647.9$ ,  $n = 6$ , 由  $\alpha = 0.1$ , 查表知  $t_{\alpha}(n-1) = t_{0.1}(5) = 1.4759$ , 于是得到  $\mu$  的置信水平为 0.9 的单侧置信下限为  $28025 - 1.4759 \times 2647.9/\sqrt{6} = 26430$ .

### 21.4 假设检验

假设检验是一种统计推断方法, 用于判断关于总体参数的某种假设是否成立. 在假设检验中, 我们通常会提出一个关于总体参数的假设, 然后利用样本数据来判断这个假设是否成立.

表 21.1: 正态总体参数区间估计表

| 总体  | 参数                              | 统计量   | 双侧置信区间   |  | 单侧置信区间  |
|---|---------------------------------|---|--|--|---|
|   |                                 |   | 下限   | 上限   |   |
| $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$<br>$\sigma^2$ 已知  | $\mu$                           | $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$  | $\left( \bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \right)$  | $\left( -\infty, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha} \right)$   | $\left( \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha}, +\infty \right)$  |
| $X \sim N(\mu, \sigma^2)$<br>$\sigma^2$ 未知  | $\mu$                           | $t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$  | $\left( \bar{X} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$  | $\left( -\infty, \bar{X} + t_{\alpha}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$   | $\left( \bar{X} - t_{\alpha}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}, +\infty \right)$  |
| $X \sim N(\mu, \sigma^2)$<br>$\mu$ 未知   | $\sigma^2$                      | $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$  | $\left( \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \right)$  | $\left( 0, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)} \right)$  | $\left( \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}, +\infty \right)$   |
| $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$<br>$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$<br>$\sigma_1^2, \sigma_2^2$ 已知 | $\mu_1 - \mu_2$                 | $Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$ | $\left( \bar{X} - Y \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$   | $\left( -\infty, \bar{X} - \bar{Y} + z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$  | $\left( \bar{X} - \bar{Y} - z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, +\infty \right)$   |
| $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$<br>$Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$<br>$\sigma^2$ 未知                   | $\mu_1 - \mu_2$                 | $t = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$      | $\begin{aligned} & (\bar{X} - \bar{Y} + \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2) \\ & - 2) \cdot S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \end{aligned}$  | $\begin{aligned} & (-\infty, \bar{X} - \bar{Y} + t_{\alpha}(n_1 + n_2) \\ & - 2) \cdot S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \end{aligned}$   | $\begin{aligned} & (\bar{X} - \bar{Y} - t_{\alpha}(n_1 + n_2) \\ & - 2) \cdot S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, +\infty \end{aligned}$  |
| $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$<br>$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$<br>$\mu_1, \mu_2$ 未知           | $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ | $F = \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$  | $\begin{aligned} & \left( \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot F_{\alpha/2}^{-1}(n_1 - 1, n_2 - 1) \right) \\ & \left( \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot F_{1-\alpha/2}^{-1}(n_1 - 1, n_2 - 1) \right) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} & \left( 0, \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot F_{1-\alpha}^{-1}(n_1 - 1, n_2 - 1) \right) \\ & \left( \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot F_{\alpha}^{-1}(n_1 - 1, n_2 - 1), +\infty \right) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} & \left( \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot F_{\alpha}^{-1}(n_1 - 1, n_2 - 1) \right) \\ & \left( \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot F_{1-\alpha}^{-1}(n_1 - 1, n_2 - 1), +\infty \right) \end{aligned}$ |

### 21.4.1 假设检验的基本思想

**例 21.4.1.** 某厂生产一种袋装白糖，每袋白糖的净重是一个随机变量，服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ，机器正常工作时，均值是 0.5 (单位: kg)，标准差是 0.01 kg，某天随机地抽取 5 袋白糖，称得净重为

$$0.54 \quad 0.58 \quad 0.47 \quad 0.49 \quad 0.52$$

问当日机器是否正常工作？

由题意知，方差  $\sigma^2$  已知， $\mu$  未知，要判断机器是否正常工作，就是要判断该日生产的白糖净重的均值是否为 0.5 kg，即检验假设 “ $\mu = 0.5$ ” 是否正确。因此，提出两个相互对立的假设：

原假设  $H_0 : \mu = \mu_0 = 0.5$ ，备择假设  $H_1 : \mu \neq 0.5$ 。

如果假设  $H_0 : \mu = \mu_0 = 0.5$  为真，那么机器正常工作；如果假设  $H_1 : \mu \neq 0.5$  为真，则机器工作不正常。

在假设  $H_0 : \mu = \mu_0 = 0.5$  条件下，统计量  $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ ，由标准正态分布的分位点的定义（见图 21.1.1），知  $P_{\mu_0} \left\{ \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \geq z_{\alpha/2} \right\} = \alpha$ ，若给定  $\alpha = 0.05$ ，查表知  $z_{0.025} = 1.96$ ，代入样本数据： $n = 5, \bar{x} = 0.52$ ，则

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{0.52 - 0.5}{0.01/\sqrt{5}} = 4.47 > 1.96.$$

这说明小概率事件发生了，所以应该拒绝假设  $H_0 : \mu = \mu_0 = 0.5$ ，接受备择假设  $H_1 : \mu \neq 0.5$ ，即机器工作不正常。

**定义 21.4.1 (接收域和拒绝域).** 上述例题中，若  $z$  取值在区间  $(-1.96, 1.96)$  范围内，则接受假设  $H_0$ ，即  $|z| < z_{\alpha/2}$  称为接受域，而  $|z| \geq z_{\alpha/2}$  称为拒绝域， $z_{\alpha/2}$  称为临界值， $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$  称为检验统计量。

在根据样本作推断时，由于样本的随机性，难免会做出错误的决定。

**定义 21.4.2 (第一类错误).** 当原假设  $H_0$  为真时，而做出拒绝  $H_0$  的判断，称为犯第一类错误（拒真错误）

**定义 21.4.3 (第二类错误).** 当原假设  $H_0$  不真时，而作出接受  $H_0$  的判断，称为犯第二类错误（取伪错误）。

**定义 21.4.4 (显著性水平).** 在实际应用中，控制犯第一类错误的概率，使其不大于一个较小的正数  $\alpha (0 < \alpha < 1)$ ，称  $\alpha$  为检验的显著性水平。

**定义 21.4.5 (双边备择假设与双边假设检验).** 形如  $H_1 : \mu \neq \mu_0$  的假设，表示  $\mu$  可能大于  $\mu_0$ ，也可能小于  $\mu_0$ ，称为双边备择假设；形如  $H_0 : \mu = \mu_0$  的假设，称为双边假设检验。

在实际中，有时只关心均值是否减小。例如某机器的生产效率问题，此时我们应该关注的是生产时间，时间越短越好。对于采用新工艺来提高生产效率，生产时间是否显著缩短的问题，需要考虑如下假设检验：原假设  $H_0 : \mu \geq \mu_0$ ，备择假设  $H_1 : \mu < \mu_0$ 。

**定义 21.4.6 (单边检验).** 形如  $H_0 : \mu \geq \mu_0$  的假设称为左边检验，类似的形如  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  的假设称为右边检验。左边检验和右边检验统称为单边检验。

### 21.4.2 假设检验的解题步骤

- (1) 确定原假设  $H_0$  与备择假设  $H_1$ ;
- (2) 选择合适的检验统计量, 在原假设成立的条件下求其分布;
- (3) 根据显著性水平  $\alpha$ , 再原假设成立的条件下确定临界值和拒绝域;
- (4) 判断是否落入拒绝域, 落入拒绝域则拒绝  $H_0$ , 否则拒绝  $H_1$ .

### 21.4.3 单个正态总体的假设检验

#### $\sigma^2$ 已知, 关于 $\mu$ 的检验 ( $Z$ 检验)

设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\sigma^2$  已知, 要检验假设:

- (1) 双边检验.  $H_0 : \mu = \mu_0$ , 备择假设  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ , 由例题 21.4.1 知, 选取检验统计量为  $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ , 拒绝域为  $|z| \geq z_{\alpha/2}$ .
- (2) 右边检验.  $H_0 : \mu \leq \mu_0$ ,  $H_1 : \mu > \mu_0$ , 选择统计量  $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ , 根据标准正态分布分位点的定义 (见图 21.4.1(a)) 可知  $P_{\mu_0} \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_\alpha \right\} = \alpha$ , 则拒绝域为  $z \geq z_\alpha$ .
- (3) 左边检验.  $H_0 : \mu \geq \mu_0$ ,  $H_1 : \mu < \mu_0$ , 选取统计量  $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ , 由标准正态分布分位点的定义 (见图 21.4.1(b)) 可知  $P_{\mu_0} \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_\alpha \right\} = \alpha$ , 则拒绝域为  $z \leq -z_\alpha$ .

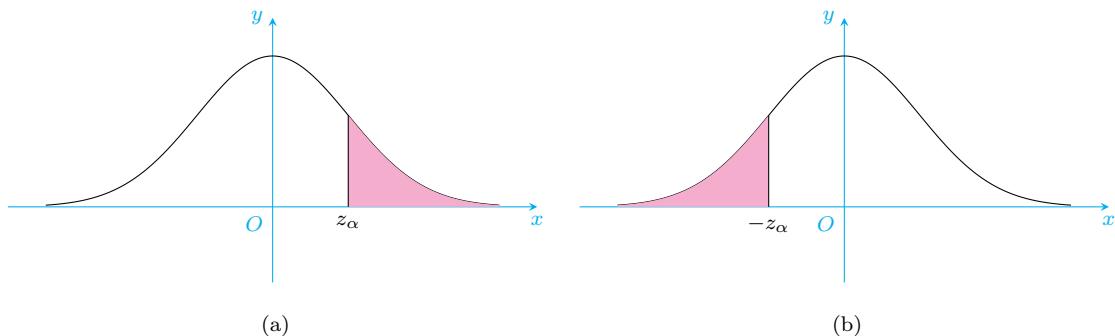


图 21.4.1

**例 21.4.2.** 设某电子产品平均寿命 5000 h 为达到标准, 现从一大批产品中抽出 5 件, 试验结果 (单位: h) 如下:

5325 4878 4638 5652 4474

假设该产品的寿命  $X \sim N(\mu, 1000)$ , 试问此批产品是否合格 (取显著性水平  $\alpha = 0.05$ )?

由题意知, 需要检验假设

$$H_0: \mu \geq 5000, H_1: \mu < 5000$$

根据已知样本数据, 得  $n = 5, \bar{x} = 4993, \sigma_0 = \sqrt{1000}$ , 则

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{5}(4993 - 5000)}{\sqrt{1000}} = -0.495$$

查表知  $z_{0.05} = 1.645$ , 由于拒绝域为  $z \leq -z_\alpha$ , 故可接受  $H_0$ , 即认为该批产品合格.

### $\sigma^2$ 未知, 关于 $\mu$ 的检验 ( $t$ 检验)

设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\mu, \sigma^2$  未知, 检验假设:

- (1) 双边检验.  $H_0: \mu = \mu_0$ , 备择假设  $H_1: \mu \neq \mu_0$ ;
- (2) 右边检验.  $H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$ ;
- (3) 左边检验.  $H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$ ;

这里以双边检验  $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$  为例求拒绝域.

若总体方差  $\sigma^2$  未知,  $Z$  检验法不能使用, 因为  $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$  中含未知参数  $\sigma$ , 不是统计量, 所以要选择其他的统计量来进行检验. 选取统计量  $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$  作为检验统计量. 由抽样分布定理知,  $\frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$ , 当原假设  $H_0$  成立时, 有

$$P_{\mu_0} \left\{ \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n-1) \right\} = \alpha$$

即得拒绝域为  $|t| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$ . 类似地, 可得单边检验的拒绝域:

- (1) 假设  $H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$ , 其检验的拒绝域为  $t \geq t_\alpha(n-1)$ ;
- (2) 假设  $H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$ , 其检验的拒绝域为  $t \leq -t_\alpha(n-1)$ .

这种利用  $t$  统计量得出的检验法称为  $t$  检验法.

**例 21.4.3.** 已知钢筋强度服从正态分布, 现测得生产出的钢筋强度 (单位: Pa) 分别为

55.5 59.0 53.5 51.5 56.0

能否认为其强度的均值为 52.0 ( $\alpha = 0.05$ )?

在  $\sigma^2$  未知的条件下, 检验假设

$$H_0: \mu = 52.0, \quad H_1: \mu \neq 52.0$$

选择统计量  $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$ , 由  $n = 5, \bar{x} = 55.1, s = 2.8151$ , 得统计量  $t$  的观测值为

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{5}(55.1 - 52.0)}{2.8151} = 2.4624$$

当  $\alpha = 0.05$ , 查  $t$  分布表得临界值  $t_{0.025}(4) = 2.776$ , 由于  $|t| = 2.4624 < 2.776 = t_{0.025}(4)$ , 所以接受假设  $H_0$ , 即认为钢筋强度的均值为 52.0.

**例 21.4.4.** 已知某种电器在正常工作条件下平均消耗电流不会超过 0.8 A. 现随机抽取 16 台这种电器进行试验, 求得平均消耗电流为 0.91 A, 消耗电流的标准差为 0.2 A. 假设电器所消耗的电流服从正态分布, 显著性水平为  $\alpha = 0.05$ , 问能否认为电器在正常工作条件下平均消耗电流不会超过 0.8 A?

根据题意, 检验假设

$$H_0 : \mu \leq 0.8, \quad H_1 : \mu > 0.8$$

由于  $\sigma$  未知, 故采用  $t$  检验法, 选择检验统计量  $t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(15)$ , 查表得  $t_{0.05}(15) = 1.753$ , 故拒绝域为  $\frac{\bar{x} - 0.8}{s/\sqrt{n}} > 1.753$ , 代入样本数据, 得  $t = \frac{\bar{x} - 0.8}{s/\sqrt{n}} = \frac{0.9 - 0.8}{0.2/\sqrt{16}} = 2$ , 因此拒绝原假设, 即认为电器在正常工作条件下平均消耗电流会超过 0.8 A.

### $\mu$ 未知, 关于 $\sigma^2$ 的检验 ( $\chi^2$ 检验)

设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu, \sigma^2$  均未知,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自  $X$  的样本, 要求检验假设  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2; H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2, \sigma_0^2$  为已知常数 (显著性水平为  $\alpha$ ).

选取  $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$  作为检验统计量, 原假设  $H_0$  成立时,  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$ , 其拒绝域的形式为  $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq k_1$  或  $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq k_2$ , 其中  $k_1, k_2$  由下式确定:

$$\text{由 } P\{\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 为真}\} = P_{\delta_0} \left\{ \left( \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq k_1 \right) \cup \left( \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq k_2 \right) \right\} = \alpha$$

为计算方便, 习惯上取  $P_{\delta_0} \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq k_1 \right\} = \frac{\alpha}{2}, P_{\delta_0} \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq k_2 \right\} = \frac{\alpha}{2}$ , 得

$$k_1 = \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1), \quad k_2 = \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$$

于是拒绝域为

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) \quad \text{或} \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1).$$

类似地可得关于方差的两个单边检验的拒绝域:

(1) 假设  $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2; H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ , 该检验的拒绝域为  $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{\alpha}^2(n-1)$ ;

(2) 假设  $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2; H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ , 该检验的拒绝域为  $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ .

以上检验法称为  $\chi^2$  检验法.

**例 21.4.5.** 某厂应用新工艺对加工好的 15 个活塞的直径进行测量, 得样本方差  $s^2 = 0.0006$ . 已知老工艺生产的活塞直径的方差为 0.0004. 问改革后活塞直径的方差是否不大于改革前的方差 (取显著性水平  $\alpha = 0.05$ )?

对方差进行右边检验, 且正态总体均值未知, 用  $\chi^2$  检验法. 设测量值  $X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma^2 = 0.0004$ . 检验假设为

$$H_0 : \sigma^2 \leq 0.0004, \quad H_1 : \sigma^2 > 0.0004$$

选择统计量  $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ , 拒绝域为  $\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2(n-1)$ . 查表得  $\chi_{0.05}^2(14) = 23.685$ , 代入样本数据, 得

$$\chi^2 = \frac{(15-1) \times 0.0006}{0.0004} = 21 < 23.685$$

故接受  $H_0$ , 即改革后活塞直径的方差不显著大于改革前的方差.

### 21.4.4 双正态总体的假设检验

双正态总体均值的检验 ( $t$  检验)

双正态总体方差的假设检验

正态总体方差的假设检验各情况表.

表 21.2: 正态总体方差的假设检验

| 条件                           | 原假设                               | 统计量   | 对应样本函数分布   | 拒绝域                                     |
|------------------------------|-----------------------------------|---|--|---|
| 单正态总体均值和方差的假                 |                                   |   |  |   |
| 已知 $\sigma^2$                | $H_0: \mu = \mu_0$                |   |  | $ z  \geq z_{\alpha/2}$                 |
|                              | $H_0: \mu \leq \mu_0$             | $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$   | $N(0, 1)$  | $z \geq z_\alpha$                       |
|                              | $H_0: \mu \geq \mu_0$             |   |  | $z \leq -z_\alpha$                      |
| 未知 $\sigma^2$                | $H_0: \mu = \mu_0$                |   |  | $ t  \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$  |
|                              | $H_0: \mu \leq \mu_0$             | $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$  | $t(n-1)$   | $t \geq t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$        |
|                              | $H_0: \mu \geq \mu_0$             |   |  | $t \leq -t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$       |
| 未知 $\mu$                     | $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$      |   |  | $\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$    |
|                              | $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$   | $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$  | $\chi^2(n-1)$  | $\chi^2 \geq \chi_\alpha^2(n-1)$        |
|                              | $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$   |   |  | $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$    |
| 双正态总体均值和方差的假                 |                                   |   |  |   |
| 已知 $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  | $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta$     | $Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ | $N(0, 1)$  | $ z  \geq z_{\alpha/2}$                 |
|                              | $H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq \delta$  |   |  | $z \geq z_\alpha$                       |
|                              | $H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq \delta$  |   |  | $z \leq -z_\alpha$                      |
| 未知 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ | $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta$     | $t = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$               | $t(n_1 + n_2 - 2)$   | $ t  \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$  |
|                              | $H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq \delta$  |   |  | $t \geq t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$        |
|                              | $H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq \delta$  |   |  | $t \leq -t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$       |
| 未知 $\mu_1, \mu_2$            | $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$    |   |  | $F \geq F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ |
|                              | $H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ | $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$   | $\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$ | $F \geq F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)$     |
|                              | $H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ |   |  | $F \leq F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ |

## 第 22 章

### 参数的点估计及其优良性

“数学家通常是先通过直觉来发现一个定理；  
这个结果对于他首先是似然的，然后他再着手去制造一个证明。”

——哈代

在统计学中，参数的点估计是指利用样本数据来估计总体参数的值。点估计是统计推断的基础，它可以帮助我们对未知参数进行估计，并提供关于参数的一些信息。以下是关于参数的点估计及其优良性的一些基本概念：

1. 点估计的定义：点估计是指用样本数据计算出一个数值作为总体参数的估计值。常见的点估计方法包括最大似然估计、矩估计等。
2. 最大似然估计：最大似然估计是一种常用的点估计方法，它通过最大化似然函数来估计参数的值。最大似然估计的估计量具有一些优良性质，例如渐近正态性、一致性等。
3. 矩估计：矩估计是另一种常见的点估计方法，它基于样本矩来估计总体参数。矩估计的优良性质包括无偏性、一致性等。
4. 优良性质：一个好的点估计应当具有一些优良性质，例如无偏性、有效性、一致性、渐近正态性等。无偏性是指估计量的期望值等于真实参数的值，有效性是指估计量的方差最小，一致性是指估计量在样本量趋于无穷时收敛于真实参数的值，渐近正态性是指估计量在样本量趋于无穷时服从正态分布。

通过对参数的点估计及其优良性的研究，我们可以更好地理解样本数据中的信息，对总体参数进行估计，并进行统计推断。点估计是统计学中重要的概念，也是实际问题分析和决策制定中不可或缺的工具。

#### 22.1 矩估计法

设总体  $X$  的分布形式已知， $\theta$  为总体的待估参数， $X_1, X_2, \dots, X_n$  为从总体  $X$  中抽取的样本，如果总体  $X$  的数学期望  $E(X)$  存在，那么  $E(X)$  是  $\theta$  的函数。例如，在泊松分布总体  $\pi(\lambda)$  中，样本一阶矩

$E(X) = \lambda$ ; 在指数分布总体  $X \sim e(\lambda)$  中,  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ . 由于  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立且与总体  $X$  同分布, 由大数定理知, 当  $n$  越来越大时,  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  依概率收敛到  $E(X) = h(\theta)$ . 要估计  $\theta$ , 令

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$$

解方程  $h(\theta) = \bar{X}$ , 可求出  $\theta$ , 此种方法所得的估计  $\hat{\theta}$  称为未知参数  $\theta$  的矩估计.

**例 22.1.1.** 设总体  $X \sim U(a, b)$ ,  $a, b$  未知,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的样本,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是样本值, 试求  $a, b$  的矩估计量和矩估计值.

$$\text{令 } \begin{cases} E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} \\ E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{cases}, \text{ 且 } X \sim U(a, b), \text{ 那么}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, E(X^2) = D(X) + E^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\text{即 } \begin{cases} a+b = 2\bar{X} \\ b-a = 2\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2} \end{cases} \quad \text{并且 } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \text{ 解得矩估计量和矩估计值分别为}$$

$$\begin{cases} \hat{a} = \bar{X} - \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{a} = \bar{x} - \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ \hat{b} = \bar{x} + \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \end{cases}$$

**例 22.1.2.** 设总体  $X$  的分布函数为  $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x-\theta)^2}, & x \geq \theta \\ 0, & x < \theta \end{cases}$  ( $\theta > 0$  为未知数),  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本,  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 求  $\theta$  的矩估计量  $\bar{\theta}$ .

$$\text{总体 } X \text{ 的密度函数为 } f(x) = \begin{cases} 2(x-\theta)e^{-(x-\theta)^2}, & x \geq \theta \\ 0, & x < \theta \end{cases}, \text{ 那么}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{+\infty} x \cdot 2(x-\theta)e^{-(x-\theta)^2} dx = 2 \int_\theta^{+\infty} [(x-\theta)+\theta] \cdot (x-\theta)e^{-(x-\theta)^2} d(x-\theta) \\ &= 2 \int_0^{+\infty} x(x+\theta)e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx + \theta \int_0^{+\infty} e^{-x^2} d(x^2) \\ &\stackrel{x^2=t}{=} 2 \int_0^{+\infty} t e^{-t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt + \theta = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt + \theta = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) + \theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \theta \end{aligned}$$

令  $E(X) = \bar{X}$  得参数  $\theta$  的矩估计量为  $\hat{\theta} = \bar{X} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

**例 22.1.3.** 设总体  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} 2(x-\theta)e^{-(x-\theta)^2}, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases}$  ( $X_1, X_2, \dots, X_n$ ) 为来自总体  $X$  的简单随机样本.

- (1) 求参数  $\theta$  的矩估计量;  
(2) 设  $U = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ , 求  $E(U)$ .

(1) 与上题类似, 有

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot 2(x-\theta)e^{-(x-\theta)^2} dx \stackrel{x-\theta=t}{=} \int_0^{+\infty} (t+\theta) \cdot 2te^{-t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} 2t^2 e^{-t^2} dt + \theta \int_0^{+\infty} 2te^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} (t^2)^{\frac{1}{2}} e^{-t^2} d(t^2) + \theta \int_0^{+\infty} e^{-t^2} d(t^2) \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) + \theta = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \theta = \theta + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

由  $E(X) = \bar{X}$  得参数  $\theta$  的矩估计量为  $\hat{\theta} = \bar{X} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

(2) 总体  $X$  的分布函数为  $F(x) = P\{X \leq x\}$ ,

当  $x < \theta$  时,  $F(x) = 0$ ;

当  $x \geq \theta$  时,  $F(x) = \int_{-\infty}^x 2(x-\theta)e^{-(x-\theta)^2} dx = 1 - e^{-(x-\theta)^2}$ , 即

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \theta \\ 1 - e^{-(x-\theta)^2}, & x \geq \theta \end{cases}$$

$U$  的分布函数为

$$\begin{aligned} F_U(x) &= P\{U \leq x\} = 1 - P\{U > x\} = 1 - P\{X_1 > x\} P\{X_2 > x\} \cdots P\{X_n > x\} \\ &= 1 - [P\{X > x\}]^n = 1 - [1 - F(x)]^n = \begin{cases} 0, & x < \theta \\ 1 - e^{-n(x-\theta)^2}, & x \geq \theta \end{cases} \end{aligned}$$

$U$  的密度函数为

$$f_U(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \theta \\ 2n(x-\theta)e^{-n(x-\theta)^2}, & x > \theta \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} E(U) &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2nx(x-\theta)e^{-n(x-\theta)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} [n(x-\theta)^2]^{\frac{1}{2}} + \theta \right] e^{-n(x-\theta)^2} d[n(x-\theta)^2] \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} t^{\frac{1}{2}} + \theta \right) e^{-t} dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) + \theta = \frac{\sqrt{\pi n}}{2n} + \theta \end{aligned}$$

## 22.2 极大似然估计

极大似然估计法是参数估计使用的最广泛的方法, 最早由德国数学家 Gauss 在 1821 年提出, 但是此法一般归功于英国统计学家 Fisher, 因为 Fisher 于 1922 年再次提出了这个思想, 并且证明了这种方法的一些性质, 从而使得极大似然法得到更普遍的应用.

**例 22.2.1.** 设  $X_i, i = 1, 2, \dots, n$  为来自总体  $X \sim B(N, p)$  ( $0 < p < 1$ ) 的简单随机样本, 求  $p$  的极大似然估计量.

似然函数为  $L(p) = \prod_{i=1}^n C_N^{x_i} \cdot p^{x_i} \cdot (1-p)^{N-x_i}$ , 两边取对数, 得

$$\ln L(p) = \sum_{i=1}^n \ln C_N^{x_i} + \sum_{i=1}^n x_i \ln p + \sum_{i=1}^n (N - x_i) \ln(1-p)$$

令

$$\frac{d}{dp} \ln L(p) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{1-p} \left( nN - \sum_{i=1}^n x_i \right) = 0$$

解得  $p = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{nN} = \frac{\bar{X}}{N}$ , 故  $p$  的最大似然估计量为  $\hat{p} = \frac{\bar{X}}{N}$ , 其中  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

**例 22.2.2.** 设总体概率函数如下,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是样本, 试求未知参数的极大似然估计:

$$(1) p(x; \theta) = \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1}, 0 < x < 1, \theta > 0;$$

$$(2) p(x; \theta) = \theta c^\theta x^{-(\theta+1)}, x > c > 0, \theta > 1.$$

(1) 似然函数  $L(\theta) = (\sqrt{\theta})^n \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\sqrt{\theta}-1}$ , 取对数得

$$\ln L(\theta) = \frac{n}{2} \ln \theta + (\sqrt{\theta} - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

将  $\ln L(\theta)$  关于  $\theta$  求导, 并令其值为 0 即得到似然函数

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

解得  $\hat{\theta} = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i \right)^{-2}$ , 并且

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = \left( -\frac{n}{2\theta^2} - \frac{1}{4\theta^{3/2}} \sum_{i=1}^n \ln x_i \right) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = -\frac{3}{4n^3} \left( \sum_{i=1}^n \ln x_i \right)^4 < 0$$

所以  $\hat{\theta}$  是  $\theta$  的极大似然估计.

(2) 似然函数  $L(\theta) = \theta^n c^{n\theta} \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{-(\theta+1)}$ , 取对数得

$$\ln L(\theta) = n \ln \theta + n \theta \ln c - (\theta + 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

将  $\ln L(\theta)$  关于  $\theta$  求导, 并令其值为 0 即得到似然函数

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + n \ln c - \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$$

解得  $\hat{\theta} = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \ln c) \right]^{-1}$ , 并且  $\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{-n}{\theta^2} < 0$ , 所以  $\hat{\theta}$  是  $\theta$  的极大似然估计.

**例 22.2.3 (2020 数一).** 设某种元件的使用寿命  $T$  的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m} & , t \geq 0 \\ 0 & , \text{其他} \end{cases}$$

其中  $m, \theta$  为参数且大于 0,

(1) 求概率  $P\{T > t\}$  与  $P\{T > s+t \mid T > s\}$ , 其中  $s, t > 0$ ;

(2) 任取  $n$  个这种元件做寿命试验, 测得它们的寿命分别为  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , 若  $m$  已知, 求  $\theta$  的极大似然估计值  $\hat{\theta}$ .

(1) 由  $P\{T > t\} = 1 - P\{T \leq t\}$ , 所以  $P\{T > t\} = 1 - F(t) = e^{-(\frac{t}{\theta})^m}$ , 并且

$$P\{T > s+t \mid T > s\} = \frac{P\{T > s+t, T > s\}}{P\{T > s\}} = \frac{P\{T > s+t\}}{P\{T > s\}}$$

所以  $P\{T > s+t \mid T > s\} = e^{-(\frac{s+t}{\theta})^m + (\frac{s}{\theta})^m}$ ,  $s, t > 0$ ;

(2) 由  $f(t) = F'(t)$  可得概率密度函数

$$f(t) = \begin{cases} \frac{mt^{m-1}}{\theta^m} e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

对数似然函数为

$$\begin{aligned} \ln [L(\theta)] &= \ln \left[ \prod_{i=1}^n f(t_i; \theta) \right] = \ln \left[ \prod_{i=1}^n \frac{mt_i^{m-1}}{\theta^m} e^{-(\frac{t_i}{\theta})^m} \right] = \ln \left[ \frac{m^n (t_1 t_2 \cdots t_n)^{m-1}}{\theta^{mn}} \cdot e^{-\frac{1}{\theta^m} \sum_{i=1}^n t_i^m} \right] \\ &= n \ln m + (m-1) \ln \prod_{i=1}^n t_i - mn \ln \theta - \frac{1}{\theta^m} \sum_{i=1}^n t_i^m \end{aligned}$$

求导得  $\frac{d \ln [L(\theta)]}{d\theta} = -\frac{mn}{\theta} + m \frac{1}{\theta^{m+1}} \sum_{i=1}^n t_i^m = 0$ , 解得  $\frac{1}{\theta^m} \sum_{i=1}^n t_i^m = n$ , 那么  $\theta$  的极大似然估计值为  $\hat{\theta} = \sqrt[m]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m}$ .

**例 22.2.4.** 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X$  的概率密度  $f(x)$  满足  $f'(x) + \frac{x}{\sigma^2} f(x) = 0$  ( $\sigma > 0$ ),  $Y$  的分布律为  $P\{Y = -1\} = P\{Y = 1\} = \frac{1}{2}$ ,  $Z = XY$ .

(1) 求  $Z$  的概率密度  $f(z)$ ;

(2)  $X$  与  $Y$  是否相关, 说明理由;

(3)  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ , 为总体  $Z$  的简单随机样本, 求  $\sigma^2$  的极大似然估计量  $\hat{\sigma}^2$ .

(1) 由微分方程  $f'(x) + \frac{x}{\sigma^2} f(x) = 0$  ( $\sigma > 0$ ) 知  $f(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ , 又因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow C = \left( 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \right)^{-1} = \left[ \sqrt{2}\sigma \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

于是  $X$  的概率密度  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ , 即  $X \sim N(0, 1)$ , 那么  $Z$  的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{XY \leq z\} \\ &= P\{XY \leq z, Y = -1\} + P\{XY \leq z, Y = 1\} = P\{Y = -1\}P\{X \geq -z\} + P\{Y = 1\}P\{X \leq z\} \\ &= \frac{1}{2}(1 - P\{X < -z\}) + \frac{1}{2}P\{X \leq z\} = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(-\frac{z}{\sigma}\right)\right] + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

其中  $\Phi(x)$  为  $N(0, 1)$  的分布函数, 故

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}.$$

(2)  $EX = 0$ , 又因为  $E(X^2Y) = E(X^2)EY$ , 且  $EY = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0$ , 所以

$$\text{cov}(X, Z) = E(XZ) - EX \cdot EZ = E(X^2Y) - EX \cdot E(Y) = EX^2EY - EX \cdot EX \cdot EY = 0$$

故  $X$  与  $Y$  不相关.

(3) 似然函数为

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f_Z(z_i) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2\right)$$

两边取对数, 得

$$\ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2$$

令  $\frac{d}{d\sigma^2} \ln(\sigma^2) = 0$ , 解得  $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2$ , 故  $\sigma^2$  的极大似然估计量为  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2$ .

## 22.3 估计量优良性的判定标准

虽然总体分布中的参数是确定的,但是对于同一个参数,可以有许多不同的点估计.在这些估计中,我们自然地希望挑选一个最“优”的点估计,因此,有必要建立评价估计量优劣的标准.下面介绍几个常用的标准:无偏性、有效性和一致性.

### 22.3.1 无偏性

**定义 22.3.1 (无偏性).**若  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是参数  $\theta$  的估计量,其数学期望  $E(\hat{\theta})$  存在,且  $E(\hat{\theta}) = \theta$ ,则称  $\hat{\theta}$  是  $\theta$  的无偏估计量.

**例 22.3.1.**已知  $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$  存在,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的样本,试判定:

(1)  $\bar{X}$  是否为  $\mu$  的无偏估计量;

(2)  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  是否为  $\sigma^2$  的无偏估计量.

由定义可知,

(1) 因为总体  $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2, X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的样本,则

$$E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

所以  $E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \mu$ , 所以  $\bar{X}$  为  $\mu$  的无偏估计量.

(2) 因为  $D(\bar{X}) = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$ , 所以

$$E(\bar{X}^2) = D(\bar{X}) + E^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2, \quad E(X_i^2) = D(X_i) + E^2(X_i) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) - E(\bar{X}^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mu^2 + \sigma^2) - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \end{aligned}$$

所以  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  不是  $\sigma^2$  的无偏估计量.

由例题 22.3.1 可以看出,如果在  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  前面乘以系数  $\frac{n}{n-1}$ ,就修正成为  $\sigma^2$  的无偏估计量.由此也解释了在定义样本方差时,我们之所以选择  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ,而不是  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  形式,是因为  $S^2$  是  $\sigma^2$  的无偏估计量.

### 22.3.2 有效性

同一个参数可以有多个无偏估计量,那么选择哪一个为好呢?设参数  $\theta$  有两个无偏估计量  $\hat{\theta}_1$  和  $\hat{\theta}_2$ ,在样本容量  $n$  相同的情况下,若  $\hat{\theta}_1$  的观测值都集中在  $\theta$  的真值附近,而  $\hat{\theta}_2$  的观测值较远离  $\theta$  的真值,

很显然  $\hat{\theta}_1$  作为  $\theta$  的估计更合适. 即  $\hat{\theta}_1$  的方差较  $\hat{\theta}_2$  的方差小, 我们认为  $\hat{\theta}_1$  较  $\hat{\theta}_2$  要好, 由此有如下的定义.

**定义 22.3.2 (有效性).** 设  $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$  与  $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$  都是参数  $\theta$  的无偏估计量, 若  $D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2)$ , 则称  $\hat{\theta}_1$  较  $\hat{\theta}_2$  更有效.

### 22.3.3 一致性

无偏性和有效性都是在假设样本容量  $n$  固定的条件下讨论的. 由于估计量是样本的函数, 它依赖样本容量  $n$ , 自然地, 我们希望一个好的估计量, 当  $n$  越来越大时, 它与参数的真值几乎一致, 这就是估计量的一致性或称之为相合性.

**定义 22.3.3 (一致性).** 设  $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为参数  $\theta$  的估计量, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  概率收敛于  $\theta$ , 即对于任意  $\varepsilon > 0$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\right\} = 1$$

则称  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的相合估计量.

# 第 A 章

## 积分表推导

### A.1 含有 $ax + b$ 的积分

i.  $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C.$

ii.  $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C.$

iii.  $\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \int \frac{ax+b}{ax+b} dx - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln |ax+b| + C.$

iv. 
$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{ax+b} dx &= \int \left( \frac{1}{a}x - \frac{b}{a^2} \right) dx + \frac{b^2}{a^2} \int \frac{dx}{ax+b} \\ &= \frac{1}{a} \int x dx - \frac{b}{a^2} \int dx + \frac{b^2}{a^2} \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{2a}x^2 - \frac{b}{a^2}x + \frac{b^2}{a^3} \ln |ax+b| + C. \end{aligned}$$
$$\begin{array}{r} \frac{\frac{1}{a}x - \frac{b}{a^2}}{|x^2|} \\ ax+b \\ \frac{x^2 + \frac{b}{a}x}{-\frac{b}{a}x} \\ \hline -\frac{b}{a}x - \frac{b^2}{a^2} \\ \hline \frac{b^2}{a^2} \end{array}$$

v. 设  $\frac{1}{x(ax+b)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{ax+b} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{b} \\ B = -\frac{a}{b} \end{cases}$ , 于是  $\int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{1}{b} \int \frac{dx}{x} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{ax+b}$ , 故  
$$\int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{1}{b} \ln|x| - \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C = \frac{1}{b} \ln \left| \frac{x}{ax+b} \right| + C.$$

vi. 设  $\int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = \frac{A}{x} + \int \left( \frac{B}{x} + \frac{C}{ax+b} \right) dx$ , 等式两边同时求导, 并对比等式两边分子的系数, 得

$$\begin{cases} Ba + C = 0 \\ -Aa + Bb = 0 \\ -Ab = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{b} \\ B = -\frac{a}{b^2} \\ C = \frac{a^2}{b^2} \end{cases}$$

于是

$$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} - \frac{a}{b^2} \ln|x| + \frac{a}{b^2} \ln|ax+b| + C.$$

vii. 设  $\int \frac{dx}{x(ax+b)^2} = \frac{A}{ax+b} + \int \left( \frac{B}{ax+b} + \frac{C}{x} \right) dx$ , 等式两边同时求导, 并对比等式两边分子的系数, 得

$$\begin{cases} Ba + Ca^2 = 0 \\ -Aa + Bb + 2Cab = 0 \\ Cb^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{b} \\ B = -\frac{a}{b^2} \\ C = \frac{1}{b^2} \end{cases}$$

于是

$$\int \frac{dx}{x(ax+b)^2} = \frac{1}{b(ax+b)} - \frac{1}{b^2} \ln |ax+b| + \frac{1}{b^2} \ln |x| + C = \frac{1}{b(ax+b)} + \frac{1}{b^2} \ln \left| \frac{x}{ax+b} \right| + C.$$

## A.2 含有 $\sqrt{ax+b}$ 的积分

- i.  $\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{1}{a} \int \sqrt{ax+b} d(ax+b) = \frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}} + C.$
- ii.  $\int x\sqrt{ax+b} dx \stackrel{ax+b=z^2}{=} \frac{2}{a^2} \int z^2(z^2-b)dz = \frac{2}{a^2} \int (z^4 - bz^2)dz = \frac{2z^5}{5a^2} - \frac{2b}{3a^2}z^3 + C = \frac{2}{5a^2}(ax+b)^{\frac{5}{2}} - \frac{2b}{3a^2}(ax+b)^{\frac{3}{2}} + C.$
- iii.  $\int x^2\sqrt{ax+b} dx \stackrel{ax+b=z^2}{=} \frac{2}{a^3} \int z^2(z^2-b)^2 dz = \frac{2}{a^3} \left( \frac{1}{7}z^7 - \frac{2b}{5}z^5 + \frac{b^3}{3}z^3 \right) + C = \frac{2}{7a^3}(ax+b)^{\frac{7}{2}} - \frac{2b}{5}(ax+b)^2 + \frac{b^2}{3}(ax+b)^{\frac{3}{2}} + C.$
- iv.  $\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}} dx \stackrel{ax+b=z^2}{=} \frac{2}{a^2} \int (z^2-b)dz = \frac{2}{3a^2}z^3 - \frac{2b}{a^2}z + C = \frac{2}{3a^2}(ax+b)^{\frac{3}{2}} - \frac{2b}{a^2}(ax+b)^{\frac{1}{2}} + C.$
- v.  $\int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}} dx \stackrel{ax+b=z^2}{=} \frac{2}{a^3} \int (z^2-b)^2 dz = \frac{2}{5a^3}(ax+b)^{\frac{5}{2}} - \frac{4b}{3a^3}(ax+b)^{\frac{3}{2}} + \frac{2b^2}{a^3}(ax+b)^{\frac{1}{2}} + C.$
- vi.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} \stackrel{ax+b=z^2}{=} 2 \int \frac{dz}{z^2-b} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b}} \right| + C & , b > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-b}} \arctan \sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C & , b < 0 \end{cases}.$
- vii.  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} \stackrel{ax+b=z^2}{=} 2a \int \frac{dz}{(z^2-b)^2} = -\frac{a}{b} \left( \frac{z}{z^2-b} + \int \frac{dz}{z^2-b} \right) = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}.$
- viii.  $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x} dx \stackrel{ax+b=z^2}{=} 2 \int \frac{z^2}{z^2-b} dz = 2 \int dz + 2b \int \frac{dz}{z^2-b} = 2\sqrt{ax+b} + b \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}.$
- ix.  $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2} dx = \int \sqrt{ax+b} d\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{ax+b}}{x} - \frac{a}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}.$

## A.3 含有 $x^2 \pm a^2$ 的积分

- i.  $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} \stackrel{x=a\tan t}{=} \frac{1}{a} \int dt = \frac{t}{a} + C = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$
- ii.  $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

## A.4 含有 $ax^2 + b$ ( $a > 0$ ) 的积分

- i.  $\int \frac{dx}{ax^2 + b} = \begin{cases} \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^2 + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan \sqrt{\frac{a}{b}}x + C & (b > 0). \\ \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^2 - \left(\sqrt{\frac{-b}{a}}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax} - \sqrt{-b}}{\sqrt{ax} + \sqrt{-b}} \right| + C & (b < 0). \end{cases}$
- ii.  $\int \frac{x}{ax^2 + b} dx = \frac{1}{2a} \int \frac{d(ax^2 + b)}{ax^2 + b} = \frac{1}{2a} \ln |ax^2 + b| + C.$
- iii.  $\int \frac{x^2}{ax^2 + b} dx = \frac{1}{a} \int \frac{ax^2 + b}{ax^2 + b} dx - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{ax^2 + b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{ax^2 + b}.$
- iv.  $\int \frac{dx}{x(ax^2 + b)} = \frac{1}{b} \int \frac{dx}{x} - \frac{a}{b} \int \frac{x}{ax^2 + b} dx = \frac{1}{b} \ln |x| - \frac{1}{2b} \ln |ax^2 + b| + C.$

$$\text{v. } \int \frac{dx}{x^2(ax^2+b)} = \frac{1}{b} \int \frac{dx}{x^2} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{ax^2+b} - \frac{1}{bx} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{ax^2+b}.$$

$$\text{vi. } \int \frac{dx}{x^3(ax^2+b)}$$

$$\text{vii. } \int \frac{dx}{(ax^2+b)^2}$$

### A.5 含有 $ax^2 + b + c$ ( $a > 0$ ) 的积分

---

## 索引

---

- $n$  阶差商, 105  
Abel 定理, 330  
Cauchy 不等式, 114  
Cauchy 定理, 87  
Cauchy-Schwarz 不等式, 176  
Darboux 定理, 87  
Dirichlet 定理, 196  
Dirichlet 收敛定理, 347  
Dirichlet 积分等式, 197  
Euler 积分, 188  
Fourier 展开, 348  
Fresnel 积分等式, 197  
Frink 判别法, 328  
Frullani 积分定理, 192  
Gauss 公式, 301  
Gauss 判别法, 327  
Green 公式, 283  
Heine 定理, 29  
Hesse 矩阵与极值定理, 242  
Jensen 不等式, 115  
Kummer 判别法, 327  
L'Hospital 法则, 28  
Lagrange 中值定理, 42  
Lagrange 定理, 86  
Lagrange 恒等式, 209  
Lagrange 插值多项式, 107  
Laplace 积分等式, 198  
Leibniz 定理, 325  
Lobachevsky 积分法, 197  
p-级数, 320  
Raabe 判别法, 327  
Raabe 判别法的极限形式, 327  
Rolle 定理, 86  
Stokes 积分法, 308  
Taylor 展开式, 82  
一阶差商, 104  
三重积分分部积分公式, 299  
不动点迭代, 63  
不收敛, 10  
不等分积分与极限式, 50  
两点三次 Hermite 插值, 110  
二元函数取极值的充分条件, 241  
二元函数取极值的必要条件, 241  
二元函数的 Taylor 展开唯一性, 224  
二重外积公式, 209  
二重积分中值定理, 269  
二重积分分部积分公式, 288  
二阶差商, 105  
二阶常系数线性齐次微分方程的通解结构, 360  
偶倍奇零性, 293  
偶函数, 3  
全微分的形式不变性, 228  
共面条件, 210  
减法无穷小代换, 15  
几何级数, 320  
函数, 3, 4  
函数 Stolz 定理, 57  
函数极限的保号性, 13  
函数极限的充要条件, 13  
函数极限的唯一性, 13  
函数极限的有界性, 13  
函数的单调性判定, 3  
函数的可导性与连续性, 76  
函数的周期性定理, 4  
函数的夹逼准则, 14  
函数的有界性定理, 3  
函数的极限, 11  
函数连续的充要条件, 6  
分式极限的关系, 21  
分离性定理, 115  
分部和公式, 329  
切平面方程, 212  
初等函数, 4  
割线定理, 9  
加法性质, 68  
区间再现公式, 151  
单调函数, 3  
单调有界准则, 62

- 单调递减, 3  
 单调递增, 3  
 压缩映射, 63  
 双阶乘与阶乘的转化, 28  
 反函数, 5  
 反函数的导数, 76  
 反常积分的区间再现公式, 185  
 发散, 10  
 取整函数, 4  
 变换性质, 68  
 可去间断点, 6  
 右极限, 11  
 右连续, 6  
 含参变量积分求导公式, 268  
 含绝对值函数的可导性, 84  
 周期函数, 4  
 周期函数的定积分公式, 150  
 因变量, 3  
 均值不等式, 113  
 均方逼近, 351  
 基本初等函数, 4  
 复合函数, 4  
 奇偶次项幂级数的收敛半径, 330  
 奇函数, 3  
 子列极限定理, 12  
 定义域, 3  
 定积分与极限式, 48  
 对数平均不等式 (ALG), 112  
 对称区间上的积分公式, 148  
 对称性质, 196  
 导数, 72  
 左右导数, 75  
 左极限, 11  
 左连续, 6  
 差商与导数的关系, 105  
 带 Lagrange 余项的 Taylor 展开, 98  
 常数项级数, 319  
 常数项级数收敛, 319  
 常系数线性齐次递推定理, 70  
 幂级数的性质, 331  
 幂级数的运算性质, 330  
 平面图形面积公式, 156  
 平面曲线弧长公式, 157
- 拐点, 116  
 拐点存在的必要条件, 116  
 振荡间断点, 7  
 收敛, 10  
 数列极限的保号性, 13  
 数列极限的唯一性, 12  
 数列极限的有界性, 12  
 数列的 Stolz 定理, 53  
 数列的单调有界准则, 14  
 数列的夹逼准则, 14  
 数列的极限, 10  
 斜渐近线, 7  
 方向导数与 Hamilton 算符, 315
- 方向导数与梯度的关系, 248  
 方向导数的计算, 248  
 旋转体的体积公式, 157  
 旋转体的侧面积公式, 156  
 无界, 3  
 无穷小量的乘法, 32  
 无穷小量的传递性, 32  
 无穷小量的加法, 32  
 无穷间断点, 7  
 曲率, 117  
 曲率的计算公式, 117  
 最小正周期, 4  
 有界, 3  
 极限值与函数式的转换, 20  
 根值审敛法, 321  
 正项级数收敛的充要条件, 320  
 比值审敛法, 321  
 比较审敛法, 320  
 比较审敛法的极限形式, 320  
 水平渐近线, 7  
 法线方程, 213
- 物体的质心, 273  
 物体的质量, 272  
 用参数方程确定的函数的导数, 77  
 留数定理, 199  
 积分判别法, 321  
 积分因子, 357  
 积分因子的存在性定理, 359  
 移位性质, 68  
 空间曲线绕直线旋转的曲面方程, 211  
 第一型余元公式, 196  
 第一型曲面积分化为二重积分, 293  
 第一型递推性质, 196  
 第一积分中值定理, 153  
 第一类曲线积分化为定积分, 279  
 第二型余元公式, 195  
 第二型倍元公式, 195  
 第二型曲面积分的分部积分公式, 300  
 第二型递推性质, 195  
 第二积分中值定理, 155  
 第二类曲线积分化为定积分, 281  
 等价无穷小的充要条件, 32  
 等价积分, 46  
 算子特性, 364  
 线轴夹角余弦平方和公式, 210  
 线面夹角余弦平方和公式, 210  
 绝对值函数, 4
- 自变量, 3  
 调和级数, 320  
 路径无关, 287  
 跳跃间断点, 6  
 转动惯量, 274  
 轮换对称性, 279  
 轴对称性, 279  
 连续, 6

- 通解公式, 355
- 重积分的对称性, 262
- 重节点差商, 104
- 铅直渐近线, 7
- 阶乘与阶乘幂, 328
- 隐函数存在定理, 227
- 隐函数的导数, 77
- 高阶常系数线性齐次微分方程通解结构, 361
- 高阶幂展开式, 133

---

## 参考文献

---

- [1] Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解第四版 1
- [2] Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解第四版 2
- [3] Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解第四版 3
- [4] Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解第四版 4
- [5] Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解第四版 5
- [6] Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解第四版 6
- [7] 常微分方程第三版
- [8] 常微分方程学习辅导与习题解答
- [9] 大学生数学竞赛教程
- [10] 高等代数典型问题与方法
- [11] 高等数学竞赛题解析教程 (2022)
- [12] 高等数学一题多解 300 例
- [13] 高等数学证明题 500 例解析
- [14] 全国大学生数学竞赛辅导
- [15] 数学大辞典
- [16] 数学分析中的典型问题与方法（第三版）
- [17] 线性代数、概率论与数理统计证明题 500 例解析
- [18] 线性代数第二版