基于插值法的中值问题证明

刘冬兵，马亮亮，陈 龙

（攀枝花学院数学与计算机学院，四川攀枝花 617000）

摘 要：将插值法和中值问题联系起来，借助罗尔定理，通过构造插值多项式，简洁地证明了一些中值问题.

关键词：罗尔定理；中值问题；插值法

中图分类号：O174 **文献标志码**：A **文章编号**：1674-3563(2012)05-0028-05

DOI：10.3875/j.issn.1674-3563.2012.05.005 本文的 PDF 文件可以从 xuebao.wzu.edu.cn 获得

插值法是一种古老的数学方法，它来自生产实践，但它的基本理论和结果是在微积分产生以后才逐步完善的，且应用也日益增多，特别是计算机广泛应用以后，由于航空、造船、精密机械加工等实际问题的需要，使得插值法的应用更为广泛，并且得到了进一步的发展[1].

实际问题中的函数是多种多样的，有的表达式很复杂，有的甚至给不出数学式子，只提供了一些离散数据，譬如某些点上的函数值与导数值．由于问题的复杂性，直接研究函数 $f(x)$ 可能很困难，面对这种情况，一个很自然的想法是设法将考察的函数 $f(x)$ “简单化”[2]．本文利用数值计算方法中的插值法，借助罗尔定理，通过构造多项式函数 $p(x)$，简洁地证明了一些中值问题.

1 预备知识和引理

为了证明定理和推论，先引入一些相关的定义.

定义 1[3]（罗尔定理） 如果函数 $y=f(x)$ 满足：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

（2）在开区间 (a,b) 内可导，

（3）在区间端点处的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$，

那么在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

定义 2[4] 经过数据点 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$ 而次数不高于 n 的拉格朗日插值多项式为：$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right)y_k$.

收稿日期：2011-11-13

基金项目：攀枝花学院教研教改基金项目(JJ1118)

作者简介：刘冬兵(1972-)，男，湖南宁乡人，讲师，硕士，研究方向：微分方程数值解

定义 3[5-6] 经过两两不同节点 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$，且满足 $\begin{cases} H_{2n+1}(x_i)=y_i \\ H'_{2n+1}(x_i)=m_i \end{cases} \quad (i=0,1,2,\cdots,n)$ 的次数不超过 $2n+1$ 的 Hermite 插值多项式为：

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}\left[1-2(x-x_i)\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_k}\right]l_i^2(x)y_i+\sum_{i=0}^{n}\left(x-x_i\right)l_i^2(x)m_i .$$

2 主要结果

定理 1 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=c$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\begin{cases} f''(\xi)\geq\dfrac{8(c-d)}{(a-b)^2}, & \min\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=d \\ f''(\xi)\leq\dfrac{8(c-d)}{(a-b)^2}, & \max\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=d \end{cases}.$$

证明：由于函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $\min\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=d$（或 $\max\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=d$），所以存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=d$．作拉格朗日插值多项式：

$$p(x)=\frac{c(x-x_0)(x-b)}{(a-x_0)(a-b)}+\frac{d(x-a)(x-b)}{(x_0-a)(x_0-b)}+\frac{c(x-a)(x-x_0)}{(b-a)(b-x_0)},$$

则 $p(x)$ 与 $f(x)$ 在 a,x_0,b 三点有相同的函数值.

设 $F(x)=f(x)-p(x)$，则 $F(a)=F(x_0)=F(b)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi_1\in(a,x_0)$，$\xi_2\in(x_0,b)$，使得 $F'(\xi_1)=0$，$F'(\xi_2)=0$.

在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\in(a,b)$，使得 $F''(\xi)=0$．而 $F''(x)=f''(x)-p''(x)$，则 $f''(x)=F''(x)+p''(x)$，$f''(\xi)=F''(\xi)+p''(\xi)=p''(\xi)$.

因为 $f''(\xi)=p''(\xi)=\dfrac{2(c-d)}{(a-x_0)(x_0-b)}=\dfrac{2(c-d)}{(\dfrac{a-b}{2})^2-(x_0-\dfrac{a+b}{2})^2}$，所以有：

$$\begin{cases} f''(\xi)\geq\dfrac{8(c-d)}{(a-b)^2}, & \min\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=d \\ f''(\xi)\leq\dfrac{8(c-d)}{(a-b)^2}, & \max\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=d \end{cases}.$$

推论 1 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\begin{cases} f''(\xi)\geq\dfrac{-8d}{(a-b)^2}, & \min\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=d \\ f''(\xi)\leq\dfrac{-8d}{(a-b)^2}, & \max\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=d \end{cases}.$$

证明：在定理 1 中令 $c=0$，可得推论 1.

定理 2 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导，且 $ab<0$，$f(a)=c$，$f(0)=d$，$f(b)=e$，

$f'(0)=f$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'''(\xi)=6\frac{f+\dfrac{d-c}{a}+\dfrac{a(e-d)+b(d-c)}{b(b-a)}}{ab}.$$

证明：作三次埃尔米特插值多项式：

$$p(x)=c-\frac{d-c}{a}(x-a)+\frac{a(e-d)+b(d-c)}{ab(b-a)}(x-a)x+\frac{f+\dfrac{d-c}{a}+\dfrac{a(e-d)+b(d-c)}{b(b-a)}}{ab}(x-a)x(x-b),$$

则 $p(x)$ 与 $f(x)$ 在 $a,0,b$ 三点有相同的函数值，在 0 点有相同的导数值.

设 $F(x)=f(x)-p(x)$，则 $F(a)=F(0)=F(b)=0$，由罗尔定理知，存在 $\xi_1\in(a,0)$，$\xi_2\in(0,b)$，使得 $F'(\xi_1)=0$，$F'(\xi_2)=0$.

由于 $F'(x)=f'(x)-p'(x)$，所以 $F'(0)=f'(0)-p'(0)=0$. 在 $[\xi_1,0]$ 和 $[0,\xi_2]$ 上应用罗尔定理，则存在 $\xi_3\in(\xi_1,0)$，$\xi_4\in(0,\xi_2)$，使得 $F''(\xi_3)=0$，$F''(\xi_4)=0$.

在 $[\xi_3,\xi_4]$ 上应用罗尔定理，存在 $\xi\in(\xi_3,\xi_4)$，使得 $F'''(\xi)=0$. 而 $F'''(x)=f'''(x)-p'''(x)$，则 $f'''(x)=F'''(x)+p'''(x)$，$f'''(\xi)=F'''(\xi)+p'''(\xi)=p'''(\xi)$，所以有：

$$f'''(\xi)=p'''(\xi)=6\frac{f+\dfrac{d-c}{a}+\dfrac{a(e-d)+b(d-c)}{b(b-a)}}{ab}.$$

推论 2　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导，且 $ab<0$，$f(a)=c$，$f(b)=e$，$f'(0)=f$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'''(\xi)=\dfrac{f+\dfrac{f(0)-c}{a}+\dfrac{a(e-f(0))+b(f(0)-c)}{b(b-a)}}{ab}$.

证明：作三次埃尔米特插值多项式：

$$p(x)=c-\frac{f(0)-c}{a}(x-a)+\frac{a(e-f(0))+b(f(0)-c)}{ab(b-a)}(x-a)x+\frac{f+\dfrac{f(0)-c}{a}+\dfrac{a(e-f(0))+b(f(0)-c)}{b(b-a)}}{ab}(x-a)x(x-b),$$

即可得推论 2.

推论 3　若函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上三阶可导，且 $f(-a)=f(0)=0$，$f(a)=c(c\neq0)$，$f'(0)=0$，则存在 $\xi\in(-a,a)$，使得 $f'''(\xi)=\dfrac{4c}{a^3}$.

证明：作三次埃尔米特插值多项式 $p(x)=\dfrac{c}{2a^3}x^2(x+a)$ 即可得推论 3.

推论 4　若函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上三阶可导，且 $f(-a)=0$，$f(a)=c(c\neq0)$，$f'(0)=0$，

则存在 $\xi\in(-a,a)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{4c}{a^3}$.

证明：作三次埃尔米特插值多项式：

$$p(x)=\frac{f(0)}{a}(x+a)+\frac{2f(0)-c}{2a^2}(x+a)x+\frac{c}{2a^3}(x+a)x(x-a),$$

即可得推论 4.

定理 3　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导，且 $f(a)=c$，$f(b)=d$，$f'(a)=e$，$f'(b)=f$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'''(\xi)=6\dfrac{f(b-a)-2(d-c)+e(b-a)}{(b-a)^3}$.

证明：作三次埃尔米特插值多项式：

$$p(x)=c+e(x-a)+\frac{(d-c)-e(b-a)}{(b-a)^2}(x-a)^2+$$

$$\frac{f(b-a)-2(d-c)+e(b-a)}{(b-a)^3}(x-a)^2(x-b),$$

则 $p(x)$ 与 $f(x)$ 在 a,b 两点有相同的函数值和导数值.

设 $F(x)=f(x)-p(x)$，则 $F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi_1\in(a,b)$，使得 $F'(\xi_1)=0$. 由于

$$F'(x)=f'(x)-p'(x)=f'(x)+e+2\frac{(d-c)-e(b-a)}{(b-a)^2}(x-a)+$$

$$\frac{f(b-a)-2(d-c)+e(b-a)}{(b-a)^3}\left[2(x-a)(x-b)+(x-a)^2\right],$$

则 $F'(a)=F'(b)=0$.

在 $[a,\xi_1]$ 和 $[\xi_1,b]$ 上应用罗尔定理. 则存在 $\xi_2\in(a,\xi_1)$. $\xi_3\in(\xi_1,b)$. 使得 $F''(\xi_2)=$ (. $F''(\xi_3)=0$. 在 $[\xi_2,\xi_3]$ 上应用罗尔定理，存在 $\xi\in(\xi_2,\xi_3)$，使得 $F'''(\xi)=0$. 而 $F'''(x)=f'''(x)-p'''(x)$，则 $f'''(x)=F'''(x)+p'''(x)$，$f'''(\xi)=F'''(\xi)+p'''(\xi)=p'''(\xi)$. 所以有 $f'''(\xi)=p'''(\xi)=6\dfrac{f(b-a)-2(d-c)+e(b-a)}{(b-a)^3}$.

推论 5　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导，且 $f(a)=a$，$f(b)=b$，$f'(a)=f'(b)=0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'''(\xi)=\dfrac{-12}{(a-b)^2}$.

证明：令 $c=a$，$d=b$，$e=f=0$，就可证明 $f'''(\xi)=\dfrac{-12}{(a-b)^2}$，即可得推论 5.

3 结　论

构造辅助函数是高等数学中的一种重要思想方法，构造辅助函数法的内涵十分丰富，没有固定的模式和方法，在数学分析中具有广泛的应用. 在教学中，通过灵活合理地构造插值多项式来简洁地证明一元函数微分学中的一些中值问题，建立起《数值计算方法》课程和《高等数学》课

程知识之间的联系，对培养学生的创造性思维有重要作用．因此，在教学中应重视这种思想方法的引导和渗透，多加训练，归纳总结，使学生切实掌握，这不仅可以提高学生的解题能力，也可以进一步提高学生的数学素质和数学应用能力．

参考文献

[1] 冯有前. 数值分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005: 9-16.

[2] 李红. 数值分析[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2003: 106-110.

[3] 同济大学应用数学系. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 138-142.

[4] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2006: 97-99.

[5] 蒋尔雄, 赵风光. 数值逼近[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2004: 30-33.

[6] 马亮亮, 田富鹏. 基于非规则 Hermite 型插值多项式的几种解法[J]. 陇东学院学报, 2010, 21(2): 13-17.

Proof of Median Problem with Interpolation Algorithm

LIU Dongbing, MA Liangliang, CHEN Long

(College of Computer, Panzhihua University; Panzhihua, China 617000)

Abstract: With combination of interpolation algorithm and median problem, some median problems were concisely proved by establishing interpolation polynomial and resorting to Rolle theorem.

Key words: Rolle Theorem; Median Problem; Interpolation Algorithm

（编辑：王一芳）