考研数学 方法|技巧 典型问题

第一版

黄国铭

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(\tan r-\sin r)^2}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & & & \\ \gamma & \alpha & \beta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma & \alpha & \beta \\ & & & \gamma & \alpha\end{vmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

$$p_k=\frac{\dbinom{M}{k}\dbinom{N-M}{n-k}}{\dbinom{N}{n}},\quad \begin{array}{l}k=0,1,\cdots,r\\ r=\min\{M,n\}\end{array}$$

目录

前言 i

第一部分 – 高等数学

第一章 函数、数列与极限 2

1.1 函数的基本特征 2

1.1.1 函数的主要性质 (2) 1.1.2 复合函数 (4) 1.1.3 反函数 (5)

1.1.4 函数的连续性及间断点的类型 (5) 1.1.5 渐近线方程 (7)

1.2 极限的概念、性质及存在准则 9

1.2.1 数列、函数极限的定义 (9) 1.2.2 数列与其子列极限之间的关系 (11)

1.2.3 数列、函数极限的性质 (11) 1.2.4 数列、函数极限的存在准则 (12)

1.3 计算极限值的若干方法 13

1.3.1 利用等价代换和初等变形 (13) 1.3.2 利用已知极限 (17)

1.3.3 利用函数与极限的关系 (19) 1.3.4 利用夹逼准则 (20)

1.3.5 求极限其他常用方法 (27) 1.3.6 Stolz 定理及其应用 (51)

1.4 极限典型问题 58

1.4.1 极限的存在性问题 (58) 1.4.2 极限的局部逆问题 (58)

1.4.3 无穷小量及其阶的比较 (59)

1.5 递推形式的极限 60

1.5.1 利用存在性求极限 (60) 1.5.2 写出通项求极限 (63)

1.5.3 求解线性递推关系 (67)

第二章 一元函数微分学 69

2.1 导数与微分 69

2.1.1 导数的定义与可微性质 (69)

2.1.2 反函数、用参数方程确定的函数、隐函数的导数 (74)

2.1.3 高阶导数与 Leibniz 公式 (76)

2.2 函数的可导性 81

2.2.1 含绝对值函数的可导性 (81) 2.2.2 分段函数的可导性 (83)

2.3 微分中值定理 83

2.3.1 四大基本定理 (84) 2.3.2 单中值问题 (85) 2.3.3 双中值问题 (90)

2.3.4 高阶中值问题 (93)

2.4 Taylor 展开与差商 95

2.4.1 证明中值定理 (95) 2.4.2 中值点的极限 (97) 2.4.3 无穷远处的极限 (99)

2.4.4 关于界的估计 (100) 2.4.5 差商与导数 (102)

2.5 Lagrange 插值与 Hermite 插值 104

2.5.1 Lagrange 插值 (104) 2.5.2 Hermite 插值 (105)

2.6 导数的综合应用 108

2.6.1 极值问题 (108) 2.6.2 不等式与函数凹凸性及拐点 (110)

2.6.3 导数的几何意义与曲线的曲率 (114) 2.6.4 导数不等式证明中的应用 (115)

第三章 一元函数积分学 117

3.1 不定积分 117

3.1.1 基础类型 (117) 3.1.2 隐函数类型 (137) 3.1.3 复合类型 (137)

3.2 定积分 143

3.2.1 求出不定积分后计算 (143) 3.2.2 运用定积分性质进行相关计算 (144)

3.2.3 积分作为上下限的函数 (148) 3.2.4 积分中值定理 (150)

3.2.5 定积分的几何应用 (152) 3.2.6 定积分的物理应用 (155)

3.2.7 定积分综合性问题 (157)

3.3 反常积分 179

3.3.1 反常积分的计算 (180) 3.3.2 反常积分敛散性 (184)

3.3.3 反常积分的极限 (185) 3.3.4 反常积分综合性问题 (187)

3.4 特殊构型积分补充 188

3.4.1 Euler 积分 (188) 3.4.2 Dirichlet 积分 (190)

3.4.3 Lobachevsky 积分法 (190) 3.4.4 Fresnel 积分与 Fejér 积分 (191)

3.4.5 Laplace 积分 (191)

3.5 留数定理及其应用 191

3.5.1 留数 (191) 3.5.2 留数定理 (192) 3.5.3 留数计算 (193)

3.5.4 留数定理的应用 (194)

第四章 向量代数与空间解析几何 201

4.1 向量代数 201

4.1.1 模、方向角、投影 (201) 4.1.2 数量积、向量积、混合积 (202)

4.2 空间解析几何 203

4.2.1 空间平面与直线 (203) 4.2.2 空间平面、直线的方程及位置关系 (204)

4.2.3 曲面及其方程 (204) 4.2.4 空间曲线及其方程 (208)

第五章 多元函数微分学 213

5.1 多元函数的极限与连续 213

5.1.1 多元函数的极限 (213) 5.1.2 多元函数的连续性与可微性 (214)

5.1.3 二元函数的 Taylor 展开 (217)

5.2 多元函数的偏导数 218

5.2.1 偏导数与隐函数 (218) 5.2.2 全微分形式不变性 (220)

5.2.3 复合函数微分法 (链式法则) (223) 5.2.4 高阶全微分 (228)

5.2.5 高阶偏导数 (229) 5.2.6 偏微分方程 (231)

5.3 极值 232

5.3.1 二元函数的极值 (232) 5.3.2 条件极值 (235)

5.3.3 多元函数的最值问题 (237)

5.4 方向导数与梯度 238

5.4.1 方向导数的计算 (238) 5.4.2 梯度的计算 (239)

第六章 多元函数积分学 240

6.1 重积分 240

6.1.1 重积分定义 (240) 6.1.2 重积分的计算及相关方法 (243)

6.1.3 反常二重积分与含参变量积分 (254) 6.1.4 重积分的积分中值定理 (257)

6.1.5 重积分的应用 (259)

6.2 曲线积分 265

6.2.1 两类曲线积分 (265) 6.2.2 Green 公式 (271)

6.3 曲面积分 279

6.3.1 两类曲面积分 (280) 6.3.2 Gauss 公式、Stokes 公式 (288)

6.4 多元积分学的应用与场论概述 298

6.4.1 多元积分学的应用 (298) 6.4.2 梯度、散度和旋度 (300)

6.4.3 梯度、散度、旋度的基本公式及其应用 (302)

第七章 无穷级数 304

7.1 常数项级数 304

7.1.1 常数项级数的敛散性及其判别法 (304) 7.1.2 正项级数的审敛法 (306)

7.1.3 交错级数 (307) 7.1.4 一般数项级数的判别法 (307)

7.2 幂级数 308

7.2.1 下降阶乘幂 (309) 7.2.2 幂级数的性质 (310) 7.2.3 函数展开为幂级数 (312)

7.2.4 幂级数的收敛域及和函数 (315) 7.2.5 幂级数的应用 (323)

7.3 Fourier 级数 326

7.3.1 Fourier 系数 (326) 7.3.2 周期为 $2l$ 的 Fourier 展开 (326)

7.3.3 Fourier 级数综合性问题 (328)

第八章 微分方程 330

8.1 一阶微分方程 330

8.1.1 变量分离方程 (330) 8.1.2 齐次微分方程 (331) 8.1.3 线性微分方程 (332)

8.1.4 Bernoulli 微分方程 (333) 8.1.5 恰当方程与积分因子 (334)

8.2 高阶微分方程 337

8.2.1 常系数齐次线性微分方程 (337) 8.2.2 常系数非齐次线性微分方程 (339)

8.2.3 可降阶的高阶微分方程 (342) 8.2.4 Euler 微分方程 (342)

8.2.5 二阶变系数线性微分方程 (344)

8.3 微分方程综合性问题 347

8.3.1 微分方程与函数性质 (347) 8.3.2 微分方程与积分 (348)

8.3.3 微分方程与幂级数 (355)

第二部分 – 线性代数

第九章 行列式 360

9.1 行列式的计算 360

9.1.1 行列式的定义及性质 (360) 9.1.2 行列式按行 (列) 展开定理 (363)

9.1.3 具象行列式的计算 (364) 9.1.4 抽象行列式的计算 (371)

9.2 Vandermonde 行列式与代数余子式 372

9.2.1 Vandermonde 行列式计算 (372) 9.2.2 方幂指数跳跃 (374)

9.2.3 代数余子式问题 (374)

第十章 矩阵 377

10.1 矩阵的基本运算 377

10.1.1 矩阵的概念 (377) 10.1.2 矩阵的运算 (380)

10.1.3 Carlson 不等式及其应用 (382)

10.2 伴随矩阵与逆矩阵 384
10.2.1 伴随矩阵 (384) 10.2.2 可逆矩阵 (385)
10.3 初等变换与初等矩阵 389
10.3.1 初等变换 (389) 10.3.2 初等矩阵 (391)
10.4 矩阵的秩 393
10.4.1 秩的相关不等式证明 (393) 10.4.2 秩的相关等式证明 (395)
10.4.3 秩的应用 (396)
10.5 矩阵的等价标准形 396
10.5.1 矩阵分解 (396) 10.5.2 矩阵方程 (398)
第十一章 线性方程组 401
11.1 向量组的线性相关性 401
11.1.1 向量的概念 (401) 11.1.2 向量的线性组合 (401)
11.1.3 向量组的极大无关组 (403) 11.1.4 Cramer 法则的应用 (404)
11.2 向量组的秩 405
11.2.1 向量组的线性表示 (405) 11.2.2 向量组相互表示 (407)
11.3 齐次线性方程组 408
11.3.1 齐次方程组的一般解 (408) 11.3.2 齐次方程组的基础解系 (409)
11.4 非齐次线性方程组 410
11.4.1 方程组与行列式 (410) 11.4.2 线性相关与线性无关 (411)
11.4.3 非齐次线性方程组解的讨论 (412)
11.5 方程组的同解与公共解 412
11.5.1 方程组的同解 (412) 11.5.2 方程组的公共解 (413)
第十二章 线性空间 415
12.1 线性空间与子空间 415
12.2 子空间的和与交 415
12.3 维数公式与直和分解 415
12.4 同构映射与对偶空间 415
第十三章 线性变换 416
13.1 线性变换及其矩阵 416
13.1.1 线性变换 (416) 13.1.2 过渡矩阵及其性质 (417)
13.2 矩阵的特征值与特征向量 419
13.2.1 矩阵的特征值 (419) 13.2.2 矩阵的特征向量 (421)
13.2.3 公共特征向量 (424) 13.2.4 Schmidt 正交化 (424)

13.3 矩阵相似与可对角化 425

13.3.1 矩阵的相似 (425) 13.3.2 矩阵的合同 (427) 13.3.3 可对角化 (427)

13.4 方阵的幂 429

13.4.1 利用方阵的迹求解 (429) 13.4.2 利用幂零矩阵求解 (430)

13.4.3 利用二项式展开求解 (430) 13.4.4 Cayley-Hamilton 定理 (431)

13.4.5 矩阵幂转化 (431)

第十四章 二次型 432

14.1 正定性与半正定性 432

14.1.1 正定性 (432) 14.1.2 半正定性 (435)

14.2 二次型 437

14.2.1 二次型的矩阵表示 (437) 14.2.2 惯性指数与惯性定理 (438)

14.2.3 二次型化为标准形 (440) 14.2.4 正交矩阵与正交变换 (443)

14.2.5 直角坐标变换 (448) 14.2.6 谱分解 (451) 14.2.7 正交变换的应用 (455)

第三部分 – 概率论与数理统计

第十五章 概率论的基本概念 460

15.1 随机事件及其概率 460

15.1.1 事件的运算 (460) 15.1.2 概率的性质 (461)

15.1.3 古典概率与几何概率 (462) 15.1.4 概率基本公式及条件概率 (462)

15.1.5 全概率公式和 Bayes 公式 (462)

15.2 事件的独立性 463

第十六章 随机变量及其分布 464

16.1 离散型随机变量的概率分布 464

16.1.1 离散型随机变量的分布函数 (464) 16.1.2 二项分布 (465)

16.2 连续型随机变量的概率分布 465

16.2.1 连续型随机变量概率密度 (465) 16.2.2 均匀分布 (466)

16.2.3 指数分布 (466) 16.2.4 正态分布 (467)

第十七章 多维随机变量及其分布 469

17.1 多维离散型随机变量 469

17.2 多维连续型随机变量 469

17.2.1 边缘概率密度与边缘分布函数 (469)

17.2.2 二维连续型随机变量函数的分布 (470)

17.2.3 二维随机变量条件概率密度与条件分布函数 (471)
17.2.4 二维正态分布 (472) 17.2.5 卷积公式 (473)
17.3 多维混合型随机变量 474
17.3.1 二维混合型随机变量的分布 (474) 17.3.2 随机变量与函数性质 (476)

第十八章 随机变量的数字特征 477
18.1 数学期望与方差 477
18.1.1 数学期望 (477) 18.1.2 方差 (479)
18.2 协方差与相关系数 481
18.2.1 随机变量的独立性与相关性 (481) 18.2.2 协方差 (482)
18.2.3 相关系数 (483)

第十九章 大数定律与中心极限定理 485
19.1 Chebyshev 不等式 485
19.2 大数定律 485
19.3 中心极限定理 485
19.3.1 Levy Lindeberg 定理 (485) 19.3.2 De Moivre-Laplace 定理 (486)

第二十章 数理统计的基本概念 487
20.1 统计量的数字特征 487
20.1.1 常用统计量 (487) 20.1.2 样本数字特征的性质 (488)
20.2 三大抽样分布 488
20.2.1 χ^2 分布 (488) 20.2.2 F 分布 (490) 20.2.3 t 分布 (490)
20.3 样本容量及概率 493

第二十一章 参数的点估计及其优良性 494
21.1 矩估计法 494
21.2 极大似然估计 494
21.3 估计量优良性的判定标准 496
21.3.1 无偏性 (496) 21.3.2 有效性 (496) 21.3.3 一致性 (496)

附录 A 积分表推导 497

第一部分

高等数学

第 1 章

函数、数列与极限

“迟序之数，非出神怪，有形可检，有数可推。”

——祖冲之

函数是微积分讨论的主要对象，它以极限理论为基础，在研究函数时我们总是通过函数值 $f(x)$ 的变化来看函数关系的性质，所以应该用运动变化的观点来掌握函数. 极限与函数的连续性理论是微积分的基础，如何用已知的、可求的来逼近未知的、要求的，用有限来逼近无限，在无限变化的过程中考察变量的变化趋势，从有限过渡到无限，这是本章需掌握的基本思想.

1.1 函数的基本特征

函数的基本特征包括: 定义域和值域、解析式与图像、奇偶性、单调性、零点以及渐近线等，这些基本特征可以帮助我们更好地理解和分析函数的性质和行为.

1.1.1 函数的主要性质

定义域

定义 1.1.1 (函数的概念). 设有两个变量 x 与 y，如果变量 x 在其变化范围 D 内任取一个确定的数值时，变量 y 按照一定的规则 f，总有唯一确定的数值和它对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$， x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的定义域，f 表示由 x 确定 y 的对应规则.

例 1.1.1. 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}+\arctan\dfrac{x-1}{5}$ 的定义域.

要使函数有意义，变量 x 必须同时满足 $\begin{cases}25-x^2>0\\ \left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow -4\leqslant x<5$，因此定义域为 $[-4,5)$.

单调性

定义 1.1.2 (函数的单调性). 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，对于 $\forall x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$) 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增 *(递减)*，若 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ (或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$ *单调不减 (不增)*.

定理 1.1.1 (函数的单调性判定). 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，如果在区间上有 $f'(x)\geqslant 0$(或 $f'(x)\leqslant 0$) (且不在任一子区间取恒等号)，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格单调递增 (或严格单调递减).

例 1.1.2. 由 $f'(x_0)>0$ 能否得到函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内单调递增?

不能，理由如下：利用一阶导数判断函数的单调性，需要已知导数在某区间的正负，而不是某一点导数值的正负

奇偶性

定义 1.1.3 (函数的奇偶性). 设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 D 上有定义，如果对 D 上任意点 x，均有 $f(-x)=f(x)$ (或 $f(-x)=-f(x)$)，则称函数 $f(x)$ 为*偶函数 (或奇函数)*. 奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

例 1.1.3 (1987 数二). $f(x)=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x}\ \ (-\infty<x<+\infty)$ 是

A. 有界函数　　B. 单调函数　　C. 周期函数　　D. 偶函数

由于 $|x\sin x|$ 和 $\mathrm{e}^{\cos x}$ 都是偶函数，则其乘积 $f(x)=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x}$ 为偶函数，选 D.

周期性

定理 1.1.2 (函数的周期性定理). 若函数 $f(x)$ 以 T 为周期，则

$$f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=\cdots=f(x+nT).$$

例 1.1.4 (2014 数一). 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1)\ (0\leqslant x\leqslant 2)$，求 $f(7)$.

$f(x)=\displaystyle\int 2(x-1)\mathrm{d}x=x^2-2x+C$，因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(0)=0$，可知 $C=0$，于是 $f(x)=x^2-2x$，又 $f(x)$ 的周期为 4，于是 $f(7)=f(-1+8)=f(-1)=-f(1)=1$.

有界性

定理 1.1.3 (函数的有界性定理). 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界; 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

例 1.1.5 (2004 数三). 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界

A. $(-1,0)$ B. $(0,1)$ C. $(1,2)$ D. $(2,3)$

当 $x\neq 0,1,2$ 时，$f(x)$ 连续，而

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=-\frac{\sin 3}{18},\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\frac{\sin 2}{4},\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{\sin 2}{4},\ \lim_{x\to 1} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to 2} f(x)=\infty$$

所以函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上有界.

1.1.2 复合函数

定义 1.1.4 (复合函数). 如果我们有两个函数 f 和 g，而两者的定义域分别是 D_f 和 D_g，值域分别是 I_f 和 I_g. 如果 $I_f\cap D_g\neq\varnothing$，那我们定义复合函数为

$$g\circ f:=\{(x,z)\mid(\exists y\in I_f\cap D_g)\,[y=f(x)\wedge z=g(y)]\}\,.$$

例 1.1.6 (2001 数二). 设 $f(x)=\begin{cases}1,|x|\leqslant 1\\0,|x|>1\end{cases}$，则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

A. 0 B. 1 C. $\begin{cases}1,|x|\leqslant 1\\0,|x|>1\end{cases}$ D. $\begin{cases}0,|x|\leqslant 1\\1,|x|>1\end{cases}$

因为 $f\in\{0,1\}$，所以 $f[f(x)]=1$，那么 $f\{1\}=1$，因此选 B.

定理 1.1.4. $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=\begin{cases}0, & |x|<1\\ \infty, & |x|>1\\ 1, & x=1\\ 1, & x=-1,\ n=2k\\ -1, & x=-1,\ n=2k+1.\end{cases}$

例 1.1.7. 已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+(2x)^n+x^{2n}}\ (x\geqslant 0)$, $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$，求 $f(g(x))$ 的表达式.

由推论 1.3.3 知，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1^n+1^n+(2x)^n+(x^2)^n}=\max\{1,2x,x^2\}=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<\frac{1}{2}\\ 2x, & \frac{1}{2}\leqslant x<2\\ x^2, & 2\leqslant x\end{cases}$ 又由定理 1.1.4 可得 $g(x)=\begin{cases}1, & -1\leqslant x<1\\ -x, & |x|>1\\ 0, & x=1\end{cases}$，于是 $g(x)$ 的图像如图 1.1.1 所示，那么

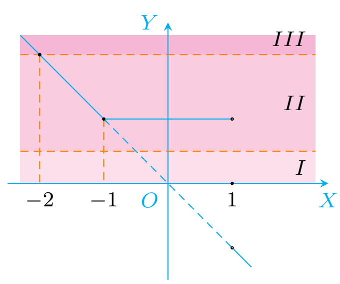

图 1.1.1

$I: x=1\Rightarrow g(1)=0\Rightarrow f(g(0))=1$

$$II:\begin{cases}-2<x<-1\\1\leqslant x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}g(x)=-x\\g(x)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x>2\\-x>1\\-1\leqslant x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(g(x))=x^2\\f(g(x))=-2x\\f(g(x))=2\end{cases}$$

$$III:\ x\leqslant -2\Rightarrow g(x)=-x\Rightarrow f(g(x))=x^2$$

综上，$f(g(x))=\begin{cases}x^2, & x\leqslant -2\\ -2x, & -2<x<-1\\ 2, & -1\leqslant x<1\\ 1, & x=1.\end{cases}$

1.1.3 反函数

定义 1.1.5 (反函数). 设 f 为一函数，其定义域为 D_f，值域为 I_f，如果存在一函数 g，其定义域和值域分别为 I_g，D_g，并对每一 $x \in D_f$ 有: $g(f(x)) = x$，则称 g 为 f 的反函数，记为 f^{-1}.

例 1.1.8. 已知 g 是 f 的反函数，则 $f(2x)$ 的反函数为

A. $y = \frac{1}{2}g(x)$ B. $y = 2g(x)$ C. $y = \frac{1}{2}g(2x)$ D. $y = 2g(2x)$

令 $y = f(2x)$，反解出 $x : x = \frac{1}{2}g(y)$，交换 x 与 y 的位置，于是 $y = \frac{1}{2}g(x)$，选 A.

例 1.1.9. 求 $y = \sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数表达式.

令 $y_1 = \sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}$，$y_2 = \sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$，那么 $y = y_1 + y_2$，又因为

$$y_1^3 + y_2^3 = (y_1+y_2)(y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2) = (y_1+y_2)\left[(y_1+y_2)^2 - 3y_1y_2\right]$$

其中 $y_1^3 + y_2^3 = x + \sqrt{1+x^2} + x - \sqrt{1+x^2} = 2x$，$y_1y_2 = \sqrt[3]{x^2-1-x^2} = -1$，因此

$$2x = y(y^2+3) \Rightarrow x = \frac{y(y^2+3)}{2}.$$

例 1.1.10. 设 $f(x) = 2023x^{2023} + x + 1$，$f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，计算极限

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f^{-1}(2023x) - f^{-1}(x)}{\sqrt[2023]{x}}.$$

设 $g(x) = f^{-1}(x)$，由定义 1.1.5，得 $f(g(x)) = x$，于是

$$x = 2023g^{2023}(x) + g(x) + 1$$

则

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f^{-1}(x)}{\sqrt[2023]{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{\sqrt[2023]{2023x^{2023} + g(x) + 1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[2023]{2023 + \frac{1}{g^{2022}(x)} + \frac{1}{g^{2023}(x)}}} = \frac{1}{\sqrt[2023]{2023}}$$

进而有

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f^{-1}(2023x)}{\sqrt[2023]{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f^{-1}(2023x)}{\sqrt[2023]{2023x}} \cdot \frac{\sqrt[2023]{2023x}}{\sqrt[2023]{x}} = \frac{\sqrt[2023]{2023}}{\sqrt[2023]{2023}} = 1$$

故原极限为 $1 - \frac{1}{\sqrt[2023]{2023}}$.

1.1.4 函数的连续性及间断点的类型

连续函数

定义 1.1.6 (函数连续). 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，若函数 $f(x)$ 在区间 I 内每一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内连续.

定义 1.1.7 (单侧连续). 若 $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处左连续; 若 $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处右连续.

定理 1.1.5 (函数连续的充要条件). $f(x)$ 在点 x_0 处连续等价于 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

第一类间断点

定义 1.1.8 (可去间断点). 如果不连续点 x_0 两侧函数的极限存在且相等，无论在 x_0 处是否定义 (若有定义，则函数值不是在这一点的左右极限)，这类间断点叫*可去间断点* (或可移间断点)，这类函数通过补充定义

$$f\left(x_0\right)=\lim_{x \to x_0^+} f(x)=\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

后可变为连续函数.

定义 1.1.9 (跳跃间断点). 如果不连续点 x_0 两侧函数的极限存在但不相等，称函数在这些点是*跳跃间断点*.

第二类间断点

所有不是第一类间断点的类型，都是第二类间断点.

定义 1.1.10 (无穷间断点). 函数在某点的左右极限至少有一个是无穷，这样的间断点就是*无穷间断点*，由此可知函数在这个间断点的某个邻域中无界. 无穷间断点的一个重要特性是它是必不可积的.

定义 1.1.11 (振荡间断点). 对于一个函数，当自变量趋于某一点时，函数值在两个常数间变动无限多次，这时函数在这一点处不存在有限极限也不是无穷. 这样的间断点是*振荡间断点*，由此可知函数在这个间断点的某个邻域中有界. 振荡间断点的一个重要特性是它可能是可积的.

例 1.1.11. 设 $f(x)=\dfrac{\left(1-2^{\frac{1}{x-1}}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{2}{x-1}}}\cdot\arctan\dfrac{[\,x+1\,]}{x+1}$，则下列关于 $f(x)$ 间断点的描述正确的是

A. $f(x)$ 有一个可去间断点，一个跳跃间断点，一个第二类间断点

B. $f(x)$ 有两个可去间断点，一个第二类间断点

C. $f(x)$ 有两个跳跃间断点，一个第二类间断点

D. $f(x)$ 有一个跳跃间断点，两个第二类间断点

因为 $x\neq -1,0,1$，下求各不连续点的左右极限值，

$$f(-1^-)=\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1-\delta\\ \delta>0}} f(x)=\frac{\left(1-2^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{e}^{-1}}{1+2^{-1}}\cdot\frac{\pi}{2},\ f(-1^+)=\lim_{x\to -1^+}=\lim_{\substack{x\to -1+\delta\\ \delta>0}} f(x)=0$$

则 $x=-1$ 为 f 的跳跃间断点;

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0-\delta\\ \delta>0}} f(x)=0,\ f(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0+\delta\\ \delta>0}} f(x)=+\infty$$

则 $x=0$ 为 f 的第二类间断点;

$$f(1^-)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1-\delta\\ \delta>0}} f(x)=\mathrm{e}\cdot\arctan\frac{1}{2},\ f(1^+)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1+\delta\\ \delta>0}} f(x)=0$$

则 $x=1$ 为 f 的跳跃间断点，故选 C.

1.1.5 渐近线方程

定义 1.1.12 (铅直渐近线). 若 $\lim\limits_{x\to\varepsilon^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\varepsilon^+}f(x)$ 至少有一个为无穷大，则称 $x=\varepsilon$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

定义 1.1.13 (水平渐近线). 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$，其中 b 为常数，则称 $y=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

定义 1.1.14 (斜渐近线). 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ 存在且不为零，同时 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b$ 也存在 (或 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ 存在且不为零，同时 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b$ 存在)，则称 $y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 斜渐近线.

例 1.1.12. 求下列曲线的全部渐近线.

(1) $y=\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$.	(2) $y=\mathrm{e}^{x^{-2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$.
(3) $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}\cos(2\arctan x)$.	(4) $y=(2x+1)\arctan x+\dfrac{\arctan\dfrac{1}{x^2-1}}{x^2+x-2}$.
(5) $y^3=x\big(x^2-2y\big)$.	(6) $x^3-y^3=6xy$.

(1) 由 $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+}y=-\infty$，且 $\lim\limits_{x\to0^-}y=0$，所以曲线存在一条铅直渐近线 $x=-\dfrac{1}{2}$，又

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x}}{x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|}{x}\sqrt{4+\frac{1}{x}}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)=2\ln2$$

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2\ln2x\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}\ln2-2\ln2\cdot x+\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-\sqrt{4x^2+x}\ln2\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}\cdot\ln2+|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}}\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right]=\frac{1}{4}\ln2+1\end{aligned}$$

故存在一条斜渐近线方程 $y=2\ln2x+\dfrac{1}{4}\ln2+1$，同理当 $x\to-\infty$ 时，也存在一条斜渐近线方程

$$y=-2\ln2x-\frac{1}{4}\ln2-1.$$

(2) 由 $\lim\limits_{x\to-2^-}y=\dfrac{\pi}{2\mathrm{e}^4}$，$\lim\limits_{x\to-2^+}y=-\dfrac{\pi}{2\mathrm{e}^4}$，$\lim\limits_{x\to1^-}y=-\dfrac{\pi\mathrm{e}}{2}$，$\lim\limits_{x\to1^+}y=\dfrac{\pi\mathrm{e}}{2}$，$\lim\limits_{x\to0^-}y=-\infty$，故 y 的铅直渐近线为 $x=0$，因为

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{x^{-2}}\arctan\frac{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=\frac{\pi}{4}$$

故 y 的水平渐近线为 $y=\dfrac{\pi}{4}$，又因为

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=0$$

故曲线共存在两条渐近线，分别为 $x=0$ 与 $y=\dfrac{\pi}{4}$.

(3) 显然 $x=1$ 为该曲线的铅直渐近线，下求斜渐近线，

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}\cos(2\arctan x)=1\cdot-1=-1$$
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3\cos(2\arctan x)+x(x-1)^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^3+x^3-2x^2+x}{(x-1)^2}=-2$$

所以斜渐近线方程为 $y=-x-2$.

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，所以曲线 $y=f(x)$ 没有水平渐近线; 由 $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=\infty$，得 $x=-2$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线; 由

$$f(-1^-)=\lim_{x\to-1^-}f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=0,\ f(-1^+)=\lim_{x\to-1^+}f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

得 $x=-1$ 不是该曲线的铅直渐近线; 又由

$$\lim_{x\to1}f(x)=\frac{3\pi}{4}+\lim_{x\to1}\frac{\arctan\dfrac{1}{x^2-1}}{x^2+x-2}=\infty$$

得 $x=1$ 是该曲线的铅直渐近线; 下求斜渐近线，

$$k_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)\arctan x+\frac{\arctan\dfrac{1}{x^2-1}}{x^3+x^2-2x}=-\pi$$

那么

$$b_1=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}\left[(2x+1)\arctan x+\frac{\arctan\dfrac{1}{x^2-1}}{x^2+x-2}+\pi x\right]$$
$$=2\lim_{x\to-\infty}x\left(\arctan x+\frac{\pi}{2}\right)+\lim_{x\to-\infty}\arctan x+\lim_{x\to-\infty}\frac{\arctan\dfrac{1}{x^2-1}}{x^2+x-2}=-\frac{\pi}{2}-2$$

那么一条斜渐近线为 $y=-\pi x-\dfrac{\pi}{2}-2$，同理可求解另一条斜渐近线为 $y=\pi x+\dfrac{\pi}{2}-2$.

(5) 令 $k=\dfrac{y}{x}$，有

$$k^3\cdot x^3=x\big(x^2-2kx\big)\Rightarrow k^3=1-\frac{2k}{x}$$

两边取极限有

$$\lim_{x\to\pm\infty}k^3=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{2k}{x}\right)\Rightarrow\lim_{x\to\pm\infty}k^3=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-2k\cdot\frac{1}{x}\right)\Rightarrow k=1$$

令 $b=y-kx=y-x$，那么

$$(x+b)^3=x\big(x^2-2x+2b\big)\Rightarrow\frac{b^3}{x^2}+3b+\frac{3b^2}{x}=-2\frac{b}{x}-2$$

两边取极限有

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{b^3}{x^2}+3b+\frac{3b^2}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-2\frac{b}{x}-2\right)$$

解得 $b=-\dfrac{2}{3}$，于是斜渐近线方程为 $y=x-\dfrac{2}{3}$.

(6) 令 $y=tx$，代入原方程得 $\begin{cases}x=\dfrac{6t}{1-t^3}\\ y=\dfrac{6t^2}{1-t^3}\end{cases}$ 当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{6t}{1-t^3}\to\infty\Rightarrow t\to1$，并且此时 $y\to\infty$，因此

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to1}\frac{6t^2}{1-t^3}\cdot\frac{1-t^3}{6t}=\lim_{t\to1}t=1$$
$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{t\to1}\frac{6t^2-6t}{1-t^3}=6\lim_{t\to1}\frac{t(t-1)}{-(t-1)(t^2+t+1)}=-2$$

因此该曲线的斜渐近线为 $y=x-2$.

定理 1.1.6 (割线定理). (1) 设 $p>0$，$y=f(x)$ 在 $[p,+\infty)$ 上有界，若有

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=k,$$
$$\lim_{x\to+\infty}[(x+1)f(x)-xf(x+1)]=b$$

则直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

(2) 设 $q<0$，$y=f(x)$ 在 $(-\infty,q]$ 上有界，若有

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=k,$$
$$\lim_{x\to+\infty}[(x+1)f(x)-xf(x+1)]=b,$$

则直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

例 1.1.13 (2023 数一). 求曲线 $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x-1}\right)$ 的斜渐近线方程.

法一：渐近线的斜率为

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)=1$$

渐近线的截距为

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)-x\right]=\lim_{x\to\infty}x\ln\left[1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\mathrm{e}(x-1)}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

故所求斜渐近线方程为 $y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

法二：改写函数表达式为

$$y=x\ln\mathrm{e}\left[1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right]=x+x\ln\left[1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right]=x+\frac{x}{\mathrm{e}(x-1)}=x+\frac{1}{\mathrm{e}}+o(1)\ (x\to\infty)$$

所以斜渐近线方程为 $y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

法三：利用割线定理，

$$k=\lim_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)]=\lim_{x\to\infty}\left[(x+1)\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)-x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)\right]=1+\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{\mathrm{e}+x^{-1}}{\mathrm{e}+(x-1)^{-1}}$$

$$=1+\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}}{\mathrm{e}+\dfrac{1}{x-1}}=1-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)+1}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[(x+1)f(x)-xf(x+1)]=\lim_{x\to\infty}\left[(x+1)x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)-x(x+1)\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x(x+1)\ln\frac{\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}}{\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}x(x+1)\frac{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}{\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\mathrm{e}x+1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

因此该曲线的斜渐近线为 $y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

1.2 极限的概念、性质及存在准则

1.2.1 数列、函数极限的定义

数列的极限定义

定义 1.2.1 (数列极限 A). 设 $\{a_n\}$ 是一数列，如果存在常数 a，当 n 无限增大时，a_n 无限接近 (或趋近) 于 a，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛，a 称为数列 $\{a_n\}$ 的极限，或称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，

或 $a_n \to \infty$, $n \to \infty$. 当 $n \to \infty$ 时，若不存在这样的常数 a，则称数列 $\{a_n\}$ 发散或不收敛，也可以说极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在.

定义 1.2.2 (数列极限 B). 设 $\{a_n\}$ 为一数列，a 为一个常数，若对任意给定的 $\varepsilon > 0$，都存在一个正整数 N，使得当 $n > N$ 时，有 $|a_n - a| < \varepsilon$，则称 a 为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

例 1.2.1 (2003 数一). 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负整数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$，则必有

A. $a_n < b_n$ 对任意 n 成立

B. $b_n < c_n$ 对任意 n 成立

C. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 不存在

D. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在

取 $a_n = \dfrac{2}{n}$, $b_n = 1$, $c_n = \dfrac{n}{2}$，则可排除选项 A、B、C，因此选 D.

例 1.2.2 (2014 数三). 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \neq 0$，则当 n 充分大时有

A. $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$

B. $|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$

C. $a_n > a - \dfrac{1}{n}$

D. $a_n > a + \dfrac{1}{n}$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$，所以 $\forall \varepsilon > 0$，都存在一个正整数 N，使得当 $n > N$ 时，有 $|a_n - a| < \varepsilon$，即 $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$，则 $|a| - \varepsilon < |a_n| \leqslant |a| + \varepsilon$，取 $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$，得 $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$，选 A.

函数的极限定义

定义 1.2.3 (函数的极限). 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内 (点 x_0 可除外) 有定义，A 为一个常数，若对任意给定的 $\varepsilon > 0$，都存在一个正数 δ，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

定义 1.2.4 (左右极限). 若对于满足 $0 < x_0 - x < \delta$ $(0 < x - x_0 < \delta)$ 的一切 x 所对应的 $f(x)$ 都不满足 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 自 x_0 左 (右) 侧趋于 x_0 时的极限，即*左 (右) 极限*，分别记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) = A \ \left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0) = A\right)$$

类似地，可以给出当 $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ 时，$f(x)$ 的极限为 A 的定义.

例 1.2.3. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 连续，则 "$\exists x_n \in [a, +\infty)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$" 是 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 无界的

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充分必要条件

D. 既非充分也非必要条件

题目中的两个条件分别为

(i) $\exists x_n \in [a, +\infty)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$；

(ii) $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 无界，

讨论充分性，即 *(i)→(ii)*

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$ 可知对于 $\forall M>0,\exists N\in[a,+\infty)$ 使得 $|f(x_N)|>M$，故 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 无界;

讨论必要性，即 *(ii)→(i)*

因为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 无界，则对 $\forall M_1>0,\exists X_1\in[a,+\infty)$，使得 $|f(X_1)|>M_1$，且 $\exists X_2\in[X_1,+\infty)$，使得 $|f(X_2)|>|f(X_1)|$，同理可取 x_1，$\exists x_2\in[x_1,+\infty)$，使得 $|f(x_2)|>|f(x_1)|$; $\exists x_3\in[x_2,+\infty)$，使得 $|f(x_3)|>|f(x_2)|$，由此递推，得存在严格 $\nearrow$ 的数列 $\{x_n\}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$，且存在单调的 $|f(x_n)|$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)|=+\infty$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$.

1.2.2 数列与其子列极限之间的关系

定理 1.2.1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+2}=a.$

例 1.2.4 (2015 数三). 设 $\{x_n\}$ 是数列，下列命题中不正确的是

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=a$

B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1}=a$

D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

如 $x_{3n}=1+\dfrac{1}{3n}$, $x_{3n+1}=1+\dfrac{1}{3n+1}$, $x_{3n+2}=2+\dfrac{1}{3n+2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1}=1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+2}=2$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\neq 1$，故选 *D*.

例 1.2.5. 设 $x_n=(-1)^n\cdot\dfrac{n+1}{n}$，证明: 数列 $\{x_n\}$ 发散.

证 考察子列

$$x_{2n}=\frac{2n+1}{2n}=1+\frac{1}{2n}\to 1\ (n\to\infty),\ x_{2n+1}=-\frac{2n+2}{2n+1}=-1-\frac{1}{2n+1}\to -1\ \ (n\to\infty)$$

由定理 *1.2.1* 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在，即得证数列 $\{x_n\}$ 发散.

1.2.3 数列、函数极限的性质

数列极限的性质

定理 1.2.2 (数列极限的唯一性). 收敛数列的极限是唯一的，即若数列 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=b$，则 $a=b$.

定理 1.2.3 (数列极限的有界性). 设数列 $\{a_n\}$ 收敛，则数列 $\{a_n\}$ 有界，即存在常数 $M>0$，使得 $|a_n|<M\ (\forall n\in N)$.

定理 1.2.4 (数列极限的保号性). 设数列 $\{a_n\}$ 收敛，其极限为 a

(1) 若有正整数 N，使得当 $n>N$，有 $a_n>0$ (或 <0)，则 $a\geqslant 0$ (或 $\leqslant 0$).

(2) 若 $a>0$ (或 <0)，则有正整数 N，使得当 $n>N$，时，有 $a_n>0$ (或 <0).

例 1.2.6 (2017 数二). 设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则

A. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　B. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+\sqrt{|x_n|}\right)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

C. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+x_n^2\right)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　D. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

因为数列 $\{x_n\}$ 收敛，故令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则有 A 知 $\sin a=0\nRightarrow a=0$，同理 B、C 不正确，而由 D 可知 $\sin a=-a\Rightarrow a=0$，故选 D.

函数极限的性质

定理 1.2.5 (函数极限的唯一性). 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 A 必唯一.

定理 1.2.6 (函数极限的有界性). 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有界.

定理 1.2.7 (函数极限的保号性). 设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内均有 $f(x)\geqslant 0$ (或 $f(x)\leqslant 0$)，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $a\geqslant 0$ (或 $A\leqslant 0$).

定理 1.2.8 (函数极限的充要条件). (1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

证明函数 $f(x)$ 的极限不存在的方法

(1) 若 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}$ 不存在. 当 $x\to\infty$ 时，对含有 $a^x(a>0,a\neq 1)$ 或 $\arctan x$ 或 $\operatorname{arccot}x$ 的函数极限，一定要对 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 分别求极限，若两者的极限值相等,则 $x\to\infty$ 时极限存在，否则不存在.

(2) 若存在数列 $\{x_n\}:x_n\to x_0,x_n\neq x_0$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 不存在; 或有两个数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$，满足 $x_n\to x_0\,(x_n\neq x_0)\,,y_n\to y_0\,(y_n\neq y_0)$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

(3) 利用结论: 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在; 若又有 $A\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 不存在.

1.2.4　数列、函数极限的存在准则

数列极限的存在准则

定理 1.2.9 (夹逼准则). 若 $\exists N$，使得当 $n>N$ 时有 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

定理 1.2.10 (数列的单调有界准则). 若数列 $\{x_n\}$ 单调上升有上界 (或单调下降有下界)，即 $x_{n+1} \leqslant x_n$ (或 $x_{n+1} \geqslant x_n$) $(n = 1, 2, \cdots)$，并存在一个数 M (m) 使得对一切 n 有 $x_n \leqslant M$ (或 $x_n \geqslant m$)，则 $\{x_n\}$ 收敛，即存在一个数 a，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且有 $x_n \leqslant a$ (或 $x_n \geqslant a$) $(n = 1, 2, \cdots)$.

例 1.2.7 (2008 数一). 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是

A. 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　B. 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛　　D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛

若 $\{x_n\}$ 单调，$f(x)$ 单调有界，则数列 $\{f(x_n)\}$ 单调有界，因此数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛，故选 B.

函数极限的存在准则

例 1.2.8 (2000 数三). 设对任意 x，总有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x) - \varphi(x)] = 0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

A. 存在且等于零　　B. 存在但不一定为零　　C. 一定不存在　　D. 不一定存在

本题中所给条件比夹逼准则的条件弱，事实上，若 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = A$ (有限)，则必有 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x) - \varphi(x)] = 0$，反之则不然，因为当 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x) - \varphi(x)] = 0$ 时，极限 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)$ 可以都不存在，如 $g(x) = \varphi(x) = x$.

(1) 若取 $\varphi(x) = x - \dfrac{1}{x^2}$，$f(x) = x$，$g(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$，显然有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x) - \varphi(x)] = 0$，但 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在，则排除选项 A、B.

(2) 若取 $\varphi(x) = f(x) = g(x) = 1$，满足题设条件，但 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ 存在，则排除选项 C，故选 D.

1.3 计算极限值的若干方法

计算极限值的方法有很多种，常用的方法包括: 利用等价代换和初等变形、利用夹逼准则、利用 L'Hospital 法则以及利用 Taylor 展开等.

1.3.1 利用等价代换和初等变形

等价代换

当 $x \to 0$ 时，下表是常见的等价代换.

一阶	(1) $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \mathrm{e}^x - 1 \sim \ln(1+x)$		
	(2) $\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$	(3) $a^x - 1 \sim x\ln a$	(4) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$
	(5) $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \sim x$		
二阶	(6) $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$	(7) $x - \ln(1+x) \sim \dfrac{1}{2}x^2$	(8) $(1+x)^x - 1 \sim x^2$
三阶	(9) $x - \arctan x \sim \dfrac{1}{3}x^3$	(10) $\tan x - x \sim \dfrac{1}{3}x^3$	(11) $\tan x - \sin x \sim \dfrac{1}{2}x^3$
	(12) $x - \sin x \sim \dfrac{1}{6}x^3$	(13) $\arcsin x - x \sim \dfrac{1}{6}x^3$	

定理 1.3.1. 若 $f\sim g$，则 $f-g\sim f(\ln f-\ln g)$.

例 1.3.1 (第一届数学竞赛初赛). 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域 U 内有定义，对 $\forall x\in U$, $f(x)\neq g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=a>0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^g-g^f}{f-g}$.

由定理 1.3.1 可易求得该极限值为 a^a.

例 1.3.2. 求下列极限值.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

(3) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}\ (m,n\in\mathbf{N})$.

(4) $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-\cos\dfrac{x}{2}}{\left(\sin x-\sin\dfrac{x}{2}\right)\ln(1+x)}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x\ln\sin x-\sin x\ln x}{x^3\ln x}$.

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[n]{\cos 2n\pi x}}{(x-1)(x^x-1)}$.

(8) $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{n^3\sqrt[n]{2}\left(1-\cos\dfrac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+1}-n}$.

(9) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x^2-9)\ln(4+x)}{\arctan^2(x+3)}$.

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\prod\limits_{k=2}^{n}(1-\sqrt[k]{\cos x})}{(1-\cos x)^{n-1}}$.

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt[k]{\cos kx}}{x^2}$.

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n!x^n-\prod\limits_{k=1}^{n}\sin kx}{x^{n+2}}$.

(1) 原式 $=\exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\cos x}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\cos x}\cdot\dfrac{\sin x-x}{x}=\exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{6}x^3}{\frac{1}{2}x^3}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$.

(2) 原式 $=\exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\arcsin x}{x}=\exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{\arcsin x-x}{x}=\exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}=\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}$.

(3) 原式 $\xlongequal{t=x-\pi}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin m(t+\pi)}{\sin n(t+\pi)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(-1)^n\sin mt}{(-1)^n\sin nt}=(-1)^{m-n}\dfrac{m}{n}$.

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{\tan x\cdot\dfrac{\sin^2 x-3\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x}=\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{\tan x\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)}{-\dfrac{1}{2}\cos x^2}=-24$.

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-1+\left(1-\cos\dfrac{x}{2}\right)}{x\cdot\sin\dfrac{x}{2}\left(2\cos\dfrac{x}{2}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-1}{\dfrac{x^2}{2}}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x^2}{2}}=2+\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{4}$.

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x\ln x-\sin x\ln x}{x^3\ln x}+\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x\ln\sin x-x\ln x}{x^3\ln x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x-\sin x}{x^3}+\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x^2\ln x}=\dfrac{1}{6}$.

(7) 原式 $=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{n}\ln\cos 2n\pi x}{(x-1)\ln x}\xlongequal{t=x-1}-\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{n}(\cos(2n\pi t)-1)}{t\ln(t+1)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{2}(2n\pi t)^2}{t^2}=2n\pi^2$.

(8) 原式 $\xlongequal{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1}\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{n^2\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n^4}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-1}=\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{\dfrac{1}{2n^2}}{\dfrac{1}{2n^2}}=1$.

(9) 原式 $=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(x-3)(x+3)}{(x+3)^2}=-6$.

(10) 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[k]{\cos x}}=1$，即 $1-\sqrt[k]{\cos x}\sim-\ln\sqrt[k]{\cos x}=-\dfrac{1}{k}\ln\cos x\sim\dfrac{1}{k}(1-\cos x)\ (x\to 0)$，故

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\prod\limits_{k=2}^{n}\left[\dfrac{1}{k}(1-\cos x)\right]}{(1-\cos x)^{n-1}}=\frac{1}{n!}.$$

(11) 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt[k]{\cos kx}}=1$，故 $1-\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt[k]{\cos kx}\sim-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\ln\cos kx\sim\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\ln(1-\cos kx)\ (x\to 0)$，

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(1-\cos kx)}{x^2}=\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2}(kx)^2}{x^2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{4}.$$

(12) **法一：** 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n!x^n}{\prod\limits_{k=1}^{n}\sin kx}=1$，所以 $n!x^n\sim\prod\limits_{k=1}^{n}\sin kx\ (x\to 0)$.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{n!x^n\left[\ln\left(n!x^n\right)-\ln\prod\limits_{k=1}^{n}\sin kx\right]}{x^{n+2}}=n!\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\ln kx-\ln\sin kx)}{x^2}=n!\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{kx}{\sin kx}}{x^2}$$

$$=n!\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{kx}{\sin kx}-1}{x^2}=n!\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{kx-\sin kx}{kx^3}=\frac{n!}{6}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(2n+1)}{36}(n+1)!.$$

法二： 原式$=n!\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n}\sin kx}{n!x^n}}{x^2}=n!\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{kx}}{x^2}$，记 $f_n(x)=\dfrac{1-\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{kx}}{x^2}$，则有

$$f_n(x)=f_1(x)+\sum_{k=2}^{n}(f_k(x)-f_{k-1}(x))$$

两边取极限有，

$$\lim_{x\to 0}f_n(x)=\lim_{x\to 0}f_1(x)+\lim_{x\to 0}\sum_{k=2}^{n}(f_k(x)-f_{k-1}(x))=\frac{1}{6}+\lim_{x\to 0}\sum_{k=2}^{n}\frac{\left(\prod\limits_{i=1}^{k-1}-\prod\limits_{i=1}^{k}\right)\frac{\sin ix}{ix}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{6}+\lim_{x\to 0}\frac{\prod\limits_{i=1}^{k-1}\frac{\sin ix}{ix}\left(1-\frac{\sin kx}{kx}\right)}{x^2}=\frac{1}{6}+\lim_{x\to 0}\sum_{k=2}^{n}\frac{kx-\sin kx}{kx^3}=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Rightarrow\text{原式}=\frac{n(2n+1)}{36}(n+1)!.$$

初等变形

常见的裂项公式.

(1) $\dfrac{1}{n(n+k)}=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k}\right)$	(2) $\dfrac{1}{(n-k)n(n+k)}=\dfrac{1}{2k^2}\left[\left(\dfrac{1}{n-k}-\dfrac{1}{n}\right)-\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k}\right)\right]$
(3) $\dfrac{1}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{k}\left(\sqrt{n+k}-\sqrt{n}\right)$	(4) $\dfrac{2^n}{(2^n+k)(2^{n+1}+k)}=\dfrac{1}{2^n+k}-\dfrac{1}{2^{n+1}+k}$

定理 1.3.2. 若 $B\sim\tilde{B}$，且 $\exists a,b$ 使得 $\lim A-\tilde{B}=a$, $\lim\tilde{B}-B=b$，则 $\lim A-B=a+b$.

例 1.3.3. 求下列极限值.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)$.	(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\sqrt{\tan x-\sin x}}{\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt[3]{1-x^3}}$.	(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\dfrac{x}{\sqrt{n}}$.
(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.	(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$.	(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{-n}}{n(n+1)}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k\cdot k^2$.

(1) $1-\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{(k-1)(k+1)}{k^2}$ 进行变形. 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 由 $\sqrt{\tan x-\sin x}=\sqrt{\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}}\sim\sqrt{\dfrac{x^3}{2}}$，知 $1-\cos\sqrt{\tan x-\sin x}\sim\dfrac{x^3}{4}$，

又 $\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt[3]{1-x^3}=\dfrac{2x^3}{\left(\sqrt[3]{1+x^3}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^3}\cdot\sqrt[3]{1-x^3}+\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2}\sim\dfrac{2x^3}{3}$，故原式$=\dfrac{3}{8}$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\tan^2\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{n}{2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{2}\right)\ln\left(1+\tan^2\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{2}\right)\cdot\tan^2\frac{x}{\sqrt{n}}}=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

(4) $\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)=\sin^2\dfrac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}=\sin^2\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}$.

由于初等函数在有定义的地方皆连续，故

$$原极限=\sin^2\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}\right)=\sin^2\frac{\pi}{2}=1.$$

(5) 由 $\sin\pi\sqrt{1+4n^2}=\sin\pi\left(\sqrt{1+4n^2}-2n\right)=\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}$.

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)^n=\exp\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)\\&=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

(6) 因为 $(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\cdot x^k$，两边关于 x 求导，得 $n(1+x)^{n-1}=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k\cdot kx^{k-1}$，两边再同时乘以 x，并再关于 x 求导，得 $n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k\cdot k^2x^{k-1}$，令 $x=1$，得

$$n\cdot2^{n-1}+n(n+1)\cdot2^{n-2}=n(n+1)\cdot2^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k k^2$$

于是有原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{-n}}{n(n+1)}\cdot n(n+1)\cdot2^{n-2}=\dfrac{1}{4}$.

例 1.3.4. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，设

(1) $x_n=\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.	(2) $x_n=\dfrac{3}{2}\dfrac{5}{4}\dfrac{17}{16}\cdots\dfrac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}$.
(3) $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{1^3+2^3+\cdots+i^3}}$.	(4) $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i(i+1)(i+2)}$.

(1) 乘 $\dfrac{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$，$x_n=\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cos\dfrac{x}{2^3}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}\cdot\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{x}{2^k}=\dfrac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$

$$原式=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\dfrac{x}{2^n}}{\sin\dfrac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

(2) 乘 $\dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}}$，再对分子反复应用公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

$$x_n=\left(1+\frac{1}{2^{2^0}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^1}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^2}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)=\frac{1-\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}}\cdot\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right)\to2\ (n\to\infty)$$

(3) 因为 $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$，

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{i} j^3}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{i} j\right)^2}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{1}{2}i(i+1)}$$
$$= 2\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right) = 2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 2.$$

(4) $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{i(i+1)}-\frac{1}{(i+1)(i+2)}\right] = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] = \frac{1}{4}.$

例 1.3.5. 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1-\sqrt{k^2+k}}{\sqrt{k}\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\right)}$.

由 $\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1-\sqrt{k^2+k}}{\sqrt{k}\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\right)} = \prod_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k}\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\right)} = \prod_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}$，因此

$$I = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdots\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}\cdots\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} = \left(\sqrt{2}-1\right)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}{n} = 2\sqrt{2}-2.$$

例 1.3.6. 设 $\left(1+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\cdot\sqrt{3}$ (其中 a_n, b_n 均为正整数)，求 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

由二项式定理，

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\left(\sqrt{3}\right)^k = \sum_{\substack{2k\leqslant n\\ k\in\mathbb{N}}}\mathrm{C}_n^k\left(\sqrt{3}\right)^k + \sum_{\substack{2k+1\leqslant n\\ k\in\mathbb{N}}}\mathrm{C}_n^k\left(\sqrt{3}\right)^k = a_n + b_n\cdot\sqrt{3}$$

则 $\left(1-\sqrt{3}\right)^n = a_n - b_n\cdot\sqrt{3}$，联立两式解得

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(1-\sqrt{3}\right)^n}{2} \\ b_n = \dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)^n - \left(1-\sqrt{3}\right)^n}{2} \end{cases}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(1-\sqrt{3}\right)^n}{\left(1+\sqrt{3}\right)^n - \left(1-\sqrt{3}\right)^n} = \sqrt{3}.$$

1.3.2 利用已知极限

例 1.3.7 (西安电子科技大学). 求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $(a, b\geqslant 0)$.

法一：$n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}-1}}{\frac{1}{n}}+\frac{b^{\frac{1}{n}-1}}{\frac{1}{n}}\right) \to \frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$ $(n\to\infty)$，故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1}}\right\}^{n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)}$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\mathrm{e}^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}.$$

法二： 原式 $\xlongequal{x=\frac{1}{n}}\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{a^x+b^x}{2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\sqrt{ab}.$

推论 1.3.1. $a_i,p_i>0,i=1,2,\cdots,m,p=\sum\limits_{i=1}^{m}p_i$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sqrt[n]{a_i}\right)^n=\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m}a_i},\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{m}p_i\cdot\sqrt[n]{a_i}\right)^n=\sqrt[p]{\prod_{i=1}^{m}a_i^{p_i}}.$$

例 1.3.8. 求下列极限值.

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{5}}{3}\right)^n.\quad\Big|\quad(2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\sqrt[n]{64}}{3}\right)^{2n-1}.\quad\Big|\quad(3)\ \lim_{x\to0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

(1) 原式 $=\sqrt[3]{2\times3\times5}=\sqrt[3]{30}.$

(2) **法一：** 原式 $\xlongequal{2n-1=t}\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{1+1+\sqrt[\frac{t+1}{2}]{64}}{3}\right)^t=\left(\sqrt[3]{64}\right)^2=16.$

法二： 原式 $=\exp\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{x}-1\right)\ln\left(\dfrac{2+64^x}{3}\right)=\exp\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(2-x)\left(64^x-1\right)}{3}\xlongequal{L'}{}^{1}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\ln64}=16.$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a\cdot a^x+b\cdot b^x+c\cdot c^x}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt[a+b+c]{a^ab^bc^c}.$

例 1.3.9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right).$

为解决该问题，先介绍并证明一个重要的等式，

引理 1.3.1. $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n=\gamma+o(1)$，其中 $\gamma=0.577215\cdots$（称为 Euler 常数).

$|x_n-x_{n-1}|=\left|\dfrac{1}{n}-[\ln n-\ln(n-1)]\right|,n\geqslant2$ 由 *Lagrange* 中值定理

$$\ln n-\ln(n-1)=\frac{1}{\xi_n}\ (n-1<\xi_n<n)$$

$|x_n-x_{n-1}|=\dfrac{n-\xi_n}{n\cdot\xi_n}<\dfrac{1}{(n-1)^2}$，而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}|x_n-x_{n-1}|$ 收敛，x_n 也收敛.

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)=\lim_{n\to\infty}[(\ln2n+\gamma+\alpha_{2n})-(\ln n+\gamma+\alpha_n)]=\lim_{n\to\infty}(\ln2+\alpha_{2n}-\alpha_n)=\ln2$$

其中 γ 为 *Euler* 常数.

推论 1.3.2. 已知 m 为正整数，则有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{mn+1}+\frac{1}{mn+2}+\cdots+\frac{1}{(m+1)n}\right]=\ln\frac{m+1}{m}.$$

证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{mn+k}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{m+\dfrac{k}{n}}=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{m+x}=\ln\frac{m+1}{m}.$

---

[1] 该标记表示经 L'Hospital 法则得到的计算结果，关于 L'Hospital 法则可见定理 1.3.7.

例 1.3.10. 试借助 Stirling 公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}n^n \mathrm{e}^{-n+\frac{\theta_n}{12n}},\ 0 \leqslant \theta_n \leqslant 1$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\mathrm{e}^{1-\frac{1}{i}}}{(1+\frac{1}{i})^i}$.

由引理 1.3.1，得

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\frac{\mathrm{e}^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}}{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i+1}{i}\right)^i} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot n!\mathrm{e}^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}}{(n+1)^n\mathrm{e}^{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi}n\mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\mathrm{e}^{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}} = \sqrt{2\pi}\exp\lim_{n\to\infty}\left(\ln n + \frac{\theta_n}{12n} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right) = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-(1+\gamma)}$$

其中 γ 为 Euler 常数.

1.3.3 利用函数与极限的关系

定理 1.3.3 (极限值与函数式的转换). $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x),\ \alpha(x)\to 0$.

定理 1.3.4. 设 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)} = A$，$A$ 为有限常数，则

(1) 当 $g(x)\to 0$ 时，必有 $f(x)\to 0$;

(2) 当 $f(x)\to 0$，且 $A\neq 0$ 时，必有 $g(x)\to 0$.

例 1.3.11. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right) = 2$，求 $f(0)'$.

由已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right) = 2$，得 $f(x) = 2x - \dfrac{\sin x}{x} + x\cdot\alpha(x)$, $\alpha(x)\to 0\ (x\to 0)$，则有

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x - \frac{\sin x}{x} + x\cdot\alpha(x)\right) = -1$$

$$f(0)' = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(2+\frac{x-\sin x}{x^2}+\alpha(x)\right) = 2.$$

例 1.3.12. (运用两种方法) 根据假设求极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)+xf(x)}{\sin x^2} = 2$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+f(x)}{x}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{3^x-1} = 5$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{3f(x)}{1-\cos x}\right)}{\mathrm{e}^x-1} = 9$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\tan x - \sin x}$.

(1) **法一** :由已知得 $f(x) = \dfrac{-\sin 6x + x^3\cdot\alpha(x)}{x}$, $\alpha(x)\to 0$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x + x^3\cdot\alpha(x)}{x^3} = \frac{\frac{1}{6}(6x)^3}{x^3} = 36.$$

法二: $$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{6x+xf(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}+\frac{6x-\sin 6x}{x^3}\right) = 36.$$

(2) **法一：** 由已知得 $f(x)=\dfrac{2\sin x^2+\alpha(x)\cdot\sin x^2-\ln(1+2x)}{x}$，$\alpha(x)\to 0$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{2+f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+2\sin x^2+\alpha(x)\sin x^2-\ln(1+2x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2\sin x^2}{x^2}+\frac{2x-\ln(1+2x)}{x^2}\right]=4.$$

法二： 因为 $x\sim\sin x\ (x\to 0)$，所以 $\dfrac{2+f(x)}{x}=\dfrac{2x+xf(x)}{x^2}\sim\dfrac{2x+f(x)}{\sin x^2}$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{2+f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+2x)+xf(x)}{\sin x^2}+\frac{2x-\ln(1+2x)}{x^2}\right]=2+2=4.$$

(3) **法一：** 由已知得 $f(x)=\sin 2x\cdot\left[\mathrm{e}^{(5+\alpha(x))\cdot(3^x-1)}-1\right]$，$\alpha(x)\to 0$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot(5+\alpha(x))\cdot(3^x-1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot(5+\alpha(x))\cdot x\ln 3}{x^2}=10\ln 3.$$

法二： 因为 $\lim\limits_{x\to 0}(3^x-1)=0$，所以有 $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{3^x-1}\cdot(3^x-1)=0.$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin 2x}=0$，从而当 $x\to 0$ 时，$\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)\sim\dfrac{f(x)}{\sin 2x}$. 又 $3^x-1\sim x\ln 3$, $x\to 0$，再由已知

$$5=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{3^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{\sin 2x}}{x\cdot\ln 3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2\ln 3\cdot x^2}$$

故得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=10\ln 3.$

(4) **法一：** 由已知得 $f(x)=\left[\mathrm{e}^{(9+\alpha(x))(\mathrm{e}^x-1)}-1\right]\cdot\dfrac{1-\cos x}{3}\sim(9+\alpha(x))\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot x^3$, $\alpha(x)\to 0$,

且 $\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$, $x\to 0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x-\sin x}=3.$

法二： 同上例解法 2.

1.3.4 利用夹逼准则

当极限不易直接求出时，可考虑将求极限的变量，作**适当**的放大和缩小，使放大、缩小所得的新变量易于求极限，且二者的极限值相同，则原极限存在，且等于公共值.

定理 1.3.5 (夹逼准则的函数形式). 设函数 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，如果在自变量 x 的同一变化过程中，则

$$\lim g(x)=\lim h(x)=A\Rightarrow\lim f(x)=A$$

定理 1.2.9 给出了数列形式的情况.

例 1.3.13. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. (该结论可作为重要极限使用).

证法一 因为 $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}$，所以当 $n\leqslant 2$ 时，由

$$n=1+(n-1)=1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{2}{n}=1+\mathrm{C}_n^2\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2<\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$$

得 $1<\sqrt[n]{n}<\sqrt{\dfrac{2}{n}}$，于是由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

证法二 由定理 *2.6.2* 知算术-几何-调和平均值不等式*:* 设 $a_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，则有

$$\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}}\leqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$$

因为 n 可看作两个 $\sqrt{n}$ 与 $n-2$ 个 1 的乘积，所以由上述不等式有

$$\frac{2}{\frac{2}{\sqrt{n}}+n-2} \leqslant \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{n-2}} \leqslant \frac{2\sqrt{n}+n-2}{n} < 1+\frac{2}{\sqrt{n}}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\frac{2}{\sqrt{n}}+n-2}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)=1$，故由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

例 1.3.14. (要求用夹逼准则求解) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，设

(1) (东北师范大学) $x_n=\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$.

(2) $x_n=\displaystyle\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

(3) $x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\left(n^k+1\right)^{-\frac{1}{k}}+\left(n^k-1\right)^{-\frac{1}{k}}\right]$.

(4) (北京大学) $x_n=(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

(5) $x_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}$.

(6) (中国地质大学) $x_n=\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

(7) (2003 浙江省数学竞赛) $x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$.

(8) $x_n=\sqrt[n]{\displaystyle\sum_{k=1}^{m}a_k^n}$，$a_k>0$.

(1) 因为几何平均小于算术平均，故分母中的因子

$$2n=\frac{(2n-1)+(2n+1)}{2}>\sqrt{(2n-1)(2n+1)}$$

由此可知

$$0<x_n=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\to 0$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2) $\displaystyle\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$ 共有 $2n+2$ 项，最小项为 $\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}=\dfrac{1}{n+1}$，最大项为 $\dfrac{1}{n}$，因此

$$\frac{2n+2}{n+1}\leqslant\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}\leqslant\frac{2n+2}{n}$$

左右两端极限均为 2，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}=2$.

(3) 因为 $n^k<n^k+1<(n+1)^k$，所以

$$n^{-1}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}>(n+1)^{-1}\ (k=1,2,\cdots,n)$$

相加得 $\dfrac{n}{n}>\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}>\dfrac{n}{n+1}$. 令 $n\to\infty$，取极限得 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}=1$.

同理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}=1$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

(4) $1\leqslant(n!)^{\frac{1}{n^2}}\leqslant(n^n)^{\frac{1}{n^2}}=n^{\frac{1}{n}}$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ (见例 *1.3.13*)，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$.

(5) 由对数不等式

$$\frac{1}{n+1}\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n+n}\right)\leqslant x_n\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n+n-1}\right)$$

左端 $=\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\cdot\dfrac{n+3}{n+2}\cdots\dfrac{n+n}{n+n-1}\cdot\dfrac{n+n+1}{n+n}\right)=\ln\dfrac{2n+1}{n+1}\to\ln 2\ (n\to\infty)$.

同理，右端$=\ln\dfrac{2n}{n}\to\ln 2\ (n\to\infty)$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\ln 2$.

(6) 利用不等式: $\left(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < \mathrm{e}\left(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$，知

$$\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot\frac{n+1}{n} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \sqrt[n]{\mathrm{e}}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\sqrt[n]{\frac{n+1}{\mathrm{e}}}$$

故有夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(7) 因为 $\dfrac{n+k}{n^2+n}\leqslant\dfrac{n+k}{n^2+k}<\dfrac{n+k}{n^2}$, $k=1,2,\cdots,n$，所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+n}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+n}\sum_{k=1}^{n}(n+k)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{2n^2+2n}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n+k)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{2n^2}=\frac{3}{2}$$

故由夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n+k}{n^2+k}=\dfrac{3}{2}$.

(8) 记 $a_{i0}=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\{a_j\}$，则 $a_{i0}<\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^n<ma_{i0}^n$，于是 $a_{i0}<\sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^n}<\sqrt[n]{m}a_{i0}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$ 及夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^n}=a_{i0}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$.

推论 1.3.3. 设 $a_i,p_i>0$, $i=1,2,\cdots,m$, $p=\sum\limits_{i=1}^{m}p_i$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}a_i^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{m}p_ia_i^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{m}p_ia_i^n}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{\sum_{i=1}^{m}p_ia_i^x}=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{a_i\}$$

.

例 1.3.15. 求下列极限值.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n\cdot\sin^n x}$. | (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^2 n+2\cos^2 n}$. | (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+a^{2n}}$，$a$ 为常数.

(1) 原式 $=\max\{1,2\sin x\}=\begin{cases}2\sin x & ,|\sin x|>\dfrac{1}{2}\\ 1 & ,-\dfrac{1}{2}<\sin x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ \text{不存在} & ,\sin x=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\left(\cos^{\frac{2}{n}}n\right)^n}=\max\left\{1,\cos^{\frac{2}{n}}n\right\}=1.$，其中易求得 $\cos^{\frac{2}{n}}n$ 的最大值为 1.

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+\underbrace{a^n+a^n+\cdots+a^n}_{a_n}}=\max\{2,a\}$.

例 1.3.16. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{3}-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^2+k}\right)$.

因为 $\dfrac{n}{3}-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^2+k}=\dfrac{n}{3}-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^3}{n^2(n^2+k)}$，那么

$$I_1=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{3}-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n-1}{6n}=-\frac{1}{2}$$

并且 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$，于是有

$$\frac{1}{4} \leftarrow \frac{n+1}{4n} = \frac{1}{n^2(n^2+n)}\sum_{k=1}^{n} k^3 < \sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^2(n^2+k)} < \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n+1)^2}{4n^2} \to \frac{1}{4}\ (n\to\infty)$$

故由夹逼准则得原极限 $I = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$.

例 1.3.17 (第十一届数学竞赛决赛). $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(1 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{i}}\right)$.

$$原式 = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+\sqrt{i}}\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{n(n+\sqrt{i})} = \lim_{n\to\infty} n^{-3/2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{1+\frac{\sqrt{i}}{n}} := \lim_{n\to\infty} f$$

$$n^{-3/2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{1+\frac{\sqrt{n}}{n}} \leqslant f \leqslant n^{-3/2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{1+\frac{1}{n}}$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-3/2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{1+\frac{\sqrt{n}}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{-3/2}}{1+n^{-1/2}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{-3/2}}{1+n^{-1/2}}\frac{n^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-3/2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{-3/2}}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{n^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}$$

由夹逼准则，得原式$=\frac{2}{3}$，下证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i} \sim \frac{2}{3}n^{3/2}\ (n\to\infty)$.

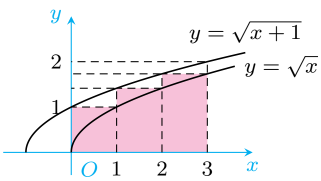

图 1.3.1

由图 1.3.1 得: 一方面

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i} < \int_0^n \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left[(n+1)^{3/2} - 1\right]$$

另一方面

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i} > \int_0^n \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}n^{3/2}$$

由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i} \sim \frac{2}{3}n^{3/2}\ (n\to\infty).$$

例 1.3.18. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{n+1}{2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n+\sqrt{i}}\right)$.

$$原式 = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{in}{n+\sqrt{i}}\right) = \lim_{n\to+\infty} n^{-3/2}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{3/2}}{n+\sqrt{i}} := \lim_{n\to+\infty} f$$

$$\frac{2}{5} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{-3/2}}{n+\sqrt{n}}\cdot\frac{2}{5}n^{5/2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{-3/2}}{n+\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} i^{3/2} \leqslant \lim_{n\to+\infty} f \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{n^{-3/2}}{n+1}\sum_{i=1}^{n} i^{3/2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{-3/2}}{n+1}\cdot\frac{2}{5}n^{5/2} = \frac{2}{5}$$

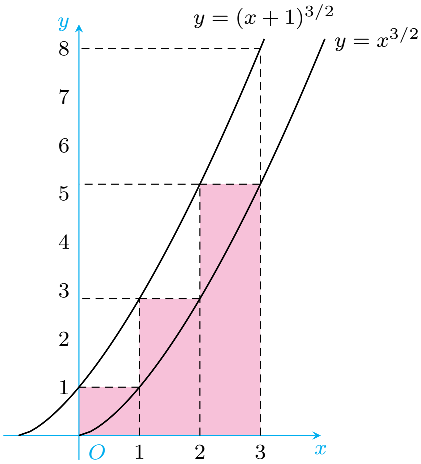

图 1.3.2

故，原式$=\frac{2}{5}$，下证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} i^{3/2}\sim\frac{2}{5}n^{5/2}\ (n\to\infty)$，由图 1.3.2 得：一方面

$$\sum_{i=1}^{n} i^{3/2}<\int_0^n (x+1)^{3/2}\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\left[(n+1)^{5/2}-1\right]$$

另一方面

$$\sum_{i=1}^{n} i^{3/2}>\int_0^n x^{3/2}\mathrm{d}x=\frac{2}{5}n^{5/2}$$

由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} i^{3/2}\sim\frac{2}{5}n^{5/2}\ (n\to\infty).$$

例 1.3.19 (第四届数学竞赛)**.** 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t.$

当 $x>1$ 时，因为

$$0\leqslant\left|\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-1}}=2\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{x}}$$

所以

$$0\leqslant\lim_{x\to+\infty}\left|\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t\right|\leqslant\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}=0$$

故由夹逼准则得原极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t=0.$

例 1.3.20 (2013 浙江省数学竞赛)**.** 设 $f_n(x)=x^n\ln x$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}f_n^{(n-1)}\left(\frac{1}{n}\right).$

因为 $f_n'(x)=nx^{n-1}\ln x+x^{n-1}=nf_{n-1}(x)+x^{n-1}$，所以

$$f_n^{(n-1)}(x)=\left[f_n'(x)\right]^{(n-2)}=\left[nf_{n-1}(x)+x^{n-1}\right]^{(n-2)}=nf_{n-1}^{(n-2)}(x)+(n-1)!x$$

经过递推可得

$$\frac{1}{n!}f_n^{(n-1)}(x)=\frac{f_{n-1}^{(n-2)}(x)}{(n-1)!}+\frac{x}{n}=\frac{f_{n-2}^{(n-3)}(x)}{(n-2)!}+\frac{x}{n-1}+\frac{x}{n}=\cdots=\frac{f_2'(x)}{2!}+x\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}=x\left(\ln x+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right)$$

于是，有 $\frac{1}{n!}f_n^{(n-1)}\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$，并且

$$\ln(n+1)-\ln 2=\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x+1}<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}<\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln n$$

所以

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{n+1}{2n}<\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}f_n^{(n-1)}\left(\frac{1}{n}\right)<0$$

由夹逼准则得原极限为 0.

夹逼准则的推广形式

当使用夹逼准则时，若放大与缩小所得之量的极限值不相等，但两者只相差一个任意小量，则夹逼准则仍然有效.

例 1.3.21. (推论 1.3.3 的连续形式) 设 $f(x)>0$，在区间 $[0,1]$ 上连续，试证

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^{n}\frac{1}{n}}=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x).$$

记 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)$，则

$$x_n:=\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^{n}\frac{1}{n}}\leqslant M$$

因为 $f(x)$ 连续，根据闭区间连续函数的性质，$\exists x_0\in[0,1]$, $s.t. f(x_0)=M$. 于是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$, $x\in[0,1]$ 时，有

$$M-\varepsilon<f(x)<M+\varepsilon$$

当 n 充分大时有 $\frac{1}{n}<\delta$, $\exists i_0$, $s.t.\left|\frac{i_0}{n}-x_0\right|<\delta$, $f\left(\frac{i_0}{n}\right)>M-\varepsilon$. 故

$$x_n:=\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^{n}\frac{1}{n}}\geqslant\sqrt[n]{\left(f\left(\frac{i_0}{n}\right)\right)^{n}\frac{1}{n}}>(M-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\to M-\varepsilon$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=M$.

例 1.3.22. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$.

法一: $\forall 0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$，有

$$0\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{2}\cdot\sin^n x\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\cdot\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)+\varepsilon$$

令 $n\to\infty$，得

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\sin^n x\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)+\varepsilon=\varepsilon$$

再由 ε 的任意性及夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=0$.

法二: 记 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$，则由

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & ,n\text{ 为正偶数}\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & ,n\text{ 为大于 1 的奇数}\end{cases}$$

其中 $n!!$ 表示不大于 n 且与 n 有相同奇偶性的数的连乘积. 得

$$I_{2k}=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

于是有

$$I_{2k}^2=\frac{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdots(2k-3)(2k-3)(2k-1)(2k-1)\cdot1}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdots(2k-4)(2k-2)(2k-2)(2k)\cdot2k}\cdot\frac{\pi}{4}$$

从而得 $\frac{1}{4k}\cdot\frac{\pi^2}{4}<I_{2k}^2<\frac{2k-1}{4k^2}\cdot\frac{\pi^2}{4}$，故 $\lim\limits_{k\to0}I_{2k}=0$. 又因为 $0\leqslant I_{2k+1}\leqslant I_{2k}$，所以 $\lim\limits_{k\to\infty}I_{2k+1}=0$，从而得 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=0$.

Wallis 公式

推论 1.3.4. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & ,n\text{ 为正偶数}\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & ,n\text{ 为大于 1 的奇数.}\end{cases}$

一般形式:

$$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & ,m,n\text{ 为正偶数}\\ \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} & ,m,n\text{ 为大于 1 的奇数}\end{cases}.$$

证 利用分部积分公式 $\int f\mathrm{d}g=fg-\int g\mathrm{d}f$，

$$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^{n-1}x\mathrm{d}\sin x=\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}\left(\sin^m x\cos^{n-1}x\right)$$

$$=-m\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m+2}x\cos^{n-2}x\mathrm{d}x=-mI_{m,n}+(n-1)I_{m+2,n-2}$$

(1) 当 n 为正偶数 $n=2k$ 时，

$$I_{m,n}=\frac{n-1}{m+1}I_{m+2,n-2}=\frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+3}I_{m+4,n-4}=\cdots=\frac{(n-1)(n-3)\cdots1}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-1)}I_{m+n,0}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(n-1)(n-3)\cdots1}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-1)}\,\dfrac{(m+n-1)!!}{(m+n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & ,\text{当 }m\text{ 也为正偶数时}\\ \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots1}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-1)}\,\dfrac{(m+n-1)!!}{(m+n)!!} & ,\text{否则}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & ,\text{当 }m\text{ 也为正偶数时}\\ \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} & ,\text{否则}\end{cases}$$

因为 $\dfrac{(n-1)(n-3)\cdots1}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-1)}=\dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n-1)!!}$.

(2) 当 n 为大于 1 的奇数 $n=2k+1$ 时 *(*不论 m 是偶数还是奇数*)* 时，

$$I_{m,n}=\frac{n-1}{m+1}I_{m+2,n-2}=\frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+3}I_{m+4,n-4}=\cdots=\frac{(n-1)(n-3)\cdots2}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-2)}I_{m+n-1,1}$$

其中 $I_{m+n-1,1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m+n-1}x\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m+n-1}x\mathrm{d}\sin x=\int_0^1 t^{m+n-1}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{m+n}$，代入上式，得

$$I_{m,n}=\frac{(n-1)(n-3)\cdots2}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-2)}\cdot\frac{1}{m+n}=\frac{(n-1)!!(m-1)!!}{(m+n)!!}.$$

综上即得欲证等式.

定理 1.3.6 (双阶乘与阶乘的转化). $(2n)!!=2^n\cdot n!$, $(2n-1)!!=\dfrac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$.

例 1.3.23. 设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$, $b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^n x\mathrm{d}x$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$.

由推论 *1.3.4* 知，$b_n=\begin{cases}\dfrac{[(n-1)!!]^2}{(2n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}\\ \dfrac{[(n-1)!!]^2}{(2n)!!}, & n\text{大于 1 的奇数}\end{cases}$，并且

$$a_n\xlongequal{x=\cos t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\cdot\sin^2 t\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{(n+2)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}\\ \dfrac{(n-1)!!}{(n+2)!!}, & n\text{ 大于 1 的奇数}\end{cases}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\begin{cases}\dfrac{[(n-1)!!]^2}{(2n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{(n+2)!!}{(n-1)!!}\cdot\dfrac{2}{\pi}=\dfrac{(n-1)!!\cdot(n+2)!!}{(2n)!!}=\dfrac{n!(n+2)}{2^n\cdot n!}=\dfrac{n+2}{2^n}\to 0, & n\text{ 为正偶数}\\ \dfrac{[(n-1)!!]^2}{(2n)!!}\cdot\dfrac{(n+2)!!}{(n-1)!!}=\dfrac{(n-1)!!\cdot(n+2)!!}{(2n)!!}=\dfrac{n!(n+2)}{2^n\cdot n!}=\dfrac{n+2}{2^n}\to 0, & n\text{ 大于 1 的奇数}\end{cases}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=0.$

1.3.5 求极限其他常用方法

下述的各种方法涉及到之后的知识点，若对知识点掌握不扎实，可暂缓阅读.

L'Hospital 法则

定理 1.3.7 ($\dfrac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法则)**.** 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足以下条件:

(1) 当 $x\to a$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 都是无穷小 (或无穷大);

(2) 在点 a 的某个去心邻域内，$f(x)$ 和 $g(x)$ 都是可导的，且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大),

那么 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

定理 1.3.8 ($\dfrac{*}{\infty}$ 型 L'Hospital 法则)**.** 对于 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的不定式，一般情形 (即 $\dfrac{*}{\infty}$ 型的不定式) 为: 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

(1) 在点 a 的某个去心邻域内，$f(x)$ 和 $g(x)$ 都是可导的，且 $g'(x)\neq 0$;

(2) $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大),

那么 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

每次使用 L'Hospital 法则之前，务必考察它是否属于七种不定型，否则不能用，七种不定型如下.

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$$

一旦用 L'Hospital 法则算不出结果，不等于极限不存在. 例如 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}=1$，就是如此. 这是因为 L'Hospital 法则只是充分条件，不是必要条件.

使用 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的 L'Hospital 法则时，只需要检验分母趋向无穷大即可，分子不趋向 ∞ 没有关系.

在多数需要使用 L'Hospital 法则的情境下，式子含有变限积分，变限积分的求导公式如下:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(t)\mathrm{d}t=f(\beta(x))\cdot\beta'(x)-f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x).$$

定理 1.3.9 (Heine 定理). 若 $x_n\neq x_0$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall x_n\to x_0\ (n\to\infty)$，恒有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

例 1.3.24. 求下列极限值.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}\dfrac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t$.

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(n^3-n^2+\dfrac{n}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\sqrt{1+n^6}\right]$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_1^n\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$.

(4) (中国科学院) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x^2\sin 2x}$.

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{n}\cdot\displaystyle\int_n^{n^2}\left(1+\dfrac{1}{2t}\right)^t\sin\dfrac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

(1) 将 $\dfrac{1}{n}$ 替换为 x，利用 Heine 定理把数列极限转化为函数极限，

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0^+}x\int_x^1\frac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t=\lim_{x\to 0^+}\frac{\displaystyle\int_x^1\frac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t}{t^{-1}}\xlongequal{L'}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\dfrac{\cos 2x}{4x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0^+}\cos 2x=\frac{1}{4}.$$

(2) 由 Heine 定理，将数列极限转为函数极限，并且令 $t=\dfrac{1}{x}$，那么 $t\to 0^+$，

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0^+}\left[\left(\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2t}\right)\mathrm{e}^t-\sqrt{1+\frac{1}{t^6}}\right]=\lim_{t\to 0^+}\frac{\left(1-t+\dfrac{t^2}{2}\right)\mathrm{e}^t-\sqrt{1+t^6}}{t^3}$$

$$\xlongequal{L'}\lim_{t\to 0^+}\frac{(-1+t)\mathrm{e}^t+\left(1-t+\dfrac{t^2}{2}\right)\mathrm{e}^t-\dfrac{6t^5}{2\sqrt{1+t^6}}}{3t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t-\dfrac{3t^3}{\sqrt{1+t^6}}}{3}=\frac{1}{6}.$$

(3) 为 $\dfrac{*}{\infty}$ 型，原式 $\xlongequal{L'}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\dfrac{1}{2\sqrt{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\dfrac{2\sqrt{n}}{1}=2.$

(4) 为 $\dfrac{0}{0}$ 型，原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{2x^3}\xlongequal{L'}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\mathrm{e}^{x^2}}{6x^2}=-\dfrac{1}{6}.$

(5) 为 1^∞ 型，

$$\text{原式}=\exp\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)=\exp\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left(\frac{2}{\pi}\arctan x-1\right)$$

$$\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\exp\lim_{t\to 0^+}\frac{\dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{1}{t}-1}{t}\xlongequal{L'}\exp\lim_{t\to 0^+}\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{1+\dfrac{1}{t^2}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\right]=\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}}.$$

(6) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\displaystyle\int_n^{n^2}\left(1+\dfrac{1}{2t}\right)^t\sin\dfrac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t}{n}\xlongequal{L'}\lim\limits_{n\to\infty}\left[2n\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right)^{n^2}\sin\dfrac{1}{n}-\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$，

其中

$$\lim_{n\to\infty}2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n^2}\sin\frac{1}{n}=2\exp\lim_{n\to\infty}n^2\ln\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)=2\sqrt{\mathrm{e}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n}{\sqrt{n}}=0.$$

故，原式 $=2\sqrt{\mathrm{e}}$.

例 1.3.25 (中南大学). 设 $f(x)$ 有二阶导数，在原点附近不为零，但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0, f''(0)=4$，求

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)\xlongequal{L'}\exp\lim_{x\to0}\frac{\frac{f'(x)}{x}-\frac{f(x)}{x^2}}{1+\frac{f(x)}{x}}$$，下求分子分母的极限.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0\Rightarrow f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0$$
$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\xlongequal{f(0)=0}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$$
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\xlongequal{L'}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0)=2$$

于是 $\lim_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{4-2}{1}}=\mathrm{e}^2$.

例 1.3.26 (2005 数学 (二)). 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f(0)\neq0$ ，求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}.$$

$$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}-\int_x^0 f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$，于是

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}\xlongequal{L'}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)}$$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内未必可导，不满足 *L'Hospital* 法则条件，不能继续用 *L'Hospital* 法则. 以下给出两种解法:

法一: 用积分中值定理 $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\cdot x$，其中 ξ 介于 0 与 x 之间.

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f(\xi)}{f(\xi)+f(x)}=\frac{1}{2}.$$

法二: 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=f(x)$，$\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=f(0)$.

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{F(x)+xF'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{F(x)-F(0)}{x}}{\frac{F(x)-F(0)}{x}+F'(x)}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}.$$

注意**连续不一定可导，可导必连续**，即当不满足 L'Hospital 法则条件时，可参考例题 1.3.26 中给出的两种方法.

例 1.3.27. 设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0,f'(0)\neq0$，求 $\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}f(x^2-t)\mathrm{d}t}{x^3\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t}$.

分子有

$$\int_0^{x^2}f(x^2-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x^2-t=u}-\int_{x^2}^0 f(u)\mathrm{d}u=\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u=\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t$$

分母有

$$\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t\xlongequal{xt=v}\frac{1}{x}\int_0^x f(v)\mathrm{d}v=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

于是

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}\xlongequal{L'}\lim_{x\to0}\frac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)}\xlongequal{L'}\lim_{x\to0}\frac{4xf'(x^2)}{3f(x)+xf'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{4f'(x^2)}{3\frac{f(x)}{x}+f'(x)}=\frac{4f'(0)}{4f'(0)}=1.$$

例 1.3.28. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f(0)=0, f'(0)=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t}{x^3\sin x}$.

因为 $\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t \xlongequal{x^2-t^2=u} -\dfrac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$，于是

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t}{x^4}\xlongequal{L'}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{4x^2}\xlongequal{L'}\frac{1}{4}f'(x^2)=\frac{1}{4}.$$

例 1.3.29. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，$f'(0)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^\alpha-\sin x}=\beta\neq 0$，求 α 与 β 的值.

由定理 1.3.4 知，$\lim\limits_{x\to 0^+}(x^\alpha-\sin x)=0$，即 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^\alpha}{\sin x}=1\Rightarrow\alpha=1$，所以

$$原式=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\frac{1}{6}x^3}\xlongequal{L'}\lim_{x\to 0^+}\frac{2f(x)}{x^2}\xlongequal{L'}\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{x}$$

由 $f'(0)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0$，可设 $f(x)=x^2$，故 $\alpha=1,\beta=2$.

Taylor 展开

无穷小的相关概念 在正式介绍如何用 Taylor 展开计算极限前，需要对无穷小性质做相关介绍.

定义 1.3.1 (无穷小的相关定义). (1) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，那么称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$;

(2) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，那么称 β 是比 α 同阶的无穷小，记作 $\beta\sim c\alpha$;

(3) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0, k>0$，那么称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小，记作 $\beta\sim c\alpha^k$;

(4) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，那么称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$;

(5) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，那么称 β 是比 α 低阶的无穷小.

定理 1.3.10 (等价无穷小的充要条件). β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

定理 1.3.11 (无穷小量的传递性). 设 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

定理 1.3.12 (无穷小量的加法). 设 $m>n>0$ 且 $\lim\alpha=0$，则有 $o(\alpha^m)\pm o(\alpha^n)=o(\alpha^k)\ (0<k\leqslant n)$.

证 $\lim\dfrac{o(\alpha^m)\pm o(\alpha^n)}{\alpha^k}=\lim\dfrac{o(\alpha^m)}{\alpha^m}\cdot\alpha^{m-k}\pm\lim\dfrac{o(\alpha^n)}{\alpha^n}\cdot\alpha^{n-k}=0.$

定理 1.3.13 (无穷小量的乘法). $m,n>0$ 且 $\lim\alpha=0$，则有 $o(\alpha^m)($ 或 $\alpha^m)\cdot o(\alpha^n)=o(\alpha^k)\ (0<k\leqslant m+n)$.

证 $\lim\dfrac{o(\alpha^m)\cdot o(\alpha^n)}{\alpha^k}=\lim\dfrac{o(\alpha^m)}{\alpha^m}\cdot\lim\dfrac{o(\alpha^n)}{\alpha^n}\cdot\lim\alpha^{m+n-k}=0\times 0\times 0=0$. ($\alpha^m$ 同理).

例 1.3.30. 设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)|<\dfrac{\pi}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是

A. 比 x 高阶的无穷小量

B. 比 x 低阶的无穷小量

C. 与 x 同阶但不等价的无穷小量

D. 与 x 等价的无穷小量

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\alpha(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}\neq 1$，于是当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 与 x 同阶但不等价的无穷小量，选 C.

例 1.3.31. 设 $g(x)$ 可导，且当 $x\to 0$ 时， $g(x)$ 是 x 的高阶无穷小，则当 $x\to 0$ 时，必有

A. $g'(x)$ 是无穷小量

B. $\dfrac{x}{g(x)}$ 是无穷大量

C. 若 $G'(x)=g(x)$，则 $G(x)$ 是 x 的高阶无穷小

D. $\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ 是 x^2 的高阶无穷小

由于 $g(x)$ 是 x 的高阶无穷小，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=0$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}{x^2}\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{2x}=0$$

因此 $\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ 是 x_2 的高阶无穷小，故选 D.

反例: 对于 A 选项 $g(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 此时 $g(x)$ 是 x 的高阶无穷小，但此时

$$g'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

它在 $x=0$ 附件是振荡的，极限不存在，无法使用 *L'Hospital* 法则; 对于 B 选项，$g(x)=0$，在 $g(x)\neq 0$ 的情况下是对的; 对于 C 选项 $G(x)=x^3+1$，$g(x)=3x^2$，$g(x)$ 的原函数有无数个，它们相差一个常数，而只有一个能保证 $G(x)$ 是无穷小.

例 1.3.32. 若 $x\to 0$ 时，函数 $\cos x-\dfrac{c+9x^2}{c+4x^2}$ 是 x^2 的高阶无穷小，求 c.

因为 $\cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$，且 $\dfrac{c+9x^2}{c+4x^2}=\dfrac{9}{4}-\dfrac{5}{4\left(1+\frac{4}{c}x^2\right)}=\dfrac{9}{4}-\dfrac{5}{4}\left[1-\dfrac{4}{c}x^2+o(x^2)\right]=1+\dfrac{5}{c}x^2+o(x^2)$，于是

$$\cos x-\frac{c+9x^2}{c+4x^2}=1-\frac{1}{2}x^2-\left[1+\frac{5}{c}x^2\right]+o(x^2)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{5}{c}\right)x^2+o(x^2)$$

故 $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{c}=0$，解得 $c=-10$.

符号 O 与 o 的含义 符号“$f(x)=O(1)$” 表示在所讨论过程中，“$f(x)$ 是有界量”，即 $\exists M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M$ (在此过程中保持成立); 符号“$o(1)$” 代表在所讨论过程里，它是“无穷小量”. 例如: $\alpha=o(1)$，意指: (在所讨论过程里) α 是无穷小量.

$$f(x)=O(g(x)) \text{ 代表 } \frac{f(x)}{g(x)}=O(1),\ f(x)=o(g(x)) \text{ 代表 } \frac{f(x)}{g(x)}=o(1).$$

推论 1.3.5 (Laurent 级数). 作为例题 1.3.13 的推广表达式:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1+\frac{\ln(n)}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right);$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2n}+\frac{11\mathrm{e}}{24n^2}-\frac{7\mathrm{e}}{16n^3}+\frac{2447\mathrm{e}}{5760n^4}+O\left(\frac{1}{n^5}\right);$$
$$\lim_{x\to0}x^x=1+x\ln x+\frac{1}{2}x^2\ln^2x+\frac{1}{6}x^3\ln^3x+\frac{1}{24}x^4\ln^4x+\frac{1}{120}x^5\ln^5x+O(x^6);$$
$$\lim_{x\to1}x^x=1+(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+\frac{1}{3}(x-1)^4+\frac{1}{12}(x-1)^5+O\big((x-1)^6\big).$$

例 1.3.33. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}+\frac{\mathrm{e}}{2n}\right]$.

由推论 *1.3.5* 知，极限可化为 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot\left[\frac{11\mathrm{e}}{24n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{11\mathrm{e}}{24}$.

例 1.3.34. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(2\cdot n^{\frac{1}{n}}-1\right)^n}{n^2}$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1+\frac{\ln n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$，于是原式化为

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[1+\frac{2\ln n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1+\frac{2\ln n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n^{\frac{2}{n}}}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+2\ln n+O\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{\frac{2}{n}+1}}\right]^n$$

当 $n\to\infty$ 时，$n^{\frac{2}{n}+1}\to n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$，故上式极限为 *1*.

例 1.3.35. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+2x)^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e}^2\left(x-\sqrt{1-2x}\right)}{x^2}$.

因为 $(1+2x)^{\frac{1}{x}}=(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot2}=\left(\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2}\cdot2x+\frac{11\mathrm{e}}{24}\cdot(2x)^2+o(x^2)\right)^2=\mathrm{e}^2\left(1-2x+\frac{14}{3}x^2\right)+o(x^2)$，且 $x-\sqrt{1-2x}=-1+2x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$，于是

$$I=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^2\left(1-2x+\frac{14}{3}x^2-1+2x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)}{x^2}=\frac{31}{6}\mathrm{e}^2.$$

Taylor 公式 若 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内可导，则 $\forall x,x_0\in[a,b]$，$\exists\xi$ 位于 x 与 x_0 之间，使得下式成立:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中，$R_n(x)=\dfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$ 为 Lagrange 余项.
若 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数 $f^{(n)}(x_0)$，则在 x_0 邻域内上式成立，其中 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ $(x\to x_0)$，称为 Peano 余项. 常用函数的展开式可见 7.2.3 节.

例 1.3.36. 若要使 $x\to0$ 时，$\mathrm{e}^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$ 为尽可能高阶的无穷小量，问数 a,b 应取何值? 用 x 的幂级数写出此时的等价无穷小.

用 Taylor 公式展开到 x^3 此项，有 $\mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k}{k!}+o(x^3)$，

$$\frac{1+ax}{1+bx}=\frac{1+bx+(a-b)x}{1+bx}=1+(a-b)x\left[\sum_{k=0}^{2}(-bx)^k+o(x^2)\right]=1+(a-b)\sum_{k=0}^{2}(-1)^kb^kx^{k+1}+o(x^3)$$

于是

$$\mathrm{e}^x-\frac{1+ax}{1+bx}=[1-(a-b)]x+\left[\frac{1}{2}+(a-b)b\right]x^2+\left(\frac{1}{3!}-ab^2+b^3\right)x^3+o(x^3)$$

令 x 的一、二次项系数为零，解得 $a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$，此时

$$\mathrm{e}^x-\frac{1+ax}{1+bx}=-\frac{1}{12}x^3+o(x^3)\sim-\frac{1}{12}x^3\ (x\to0).$$

例 1.3.37. 用 Taylor 展开求下列极限值.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{3-\mathrm{e}^x}{2+x}\right)^{\csc x}$. (2) $\lim\limits_{x\to0}\left(2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$. (3) $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$. (5) $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}$. (6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}\right)^{x}$. (8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{\left(\cos x-\mathrm{e}^{x^2}\right)\sin\left(x^2\right)}$. (9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-(1+x)^{\frac{\mathrm{e}}{x}}}{x^2}$.

(1) 原式 $=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{3-\mathrm{e}^x}{2+x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\mathrm{e}^x-x}{(2+x)x}}=\exp\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)}{x(2+x)}=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(2) 本题也可以用等价无穷小来写.

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=\exp\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$$
$$=\exp\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\exp\lim_{x\to0}\frac{x-\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2}=\sqrt{\mathrm{e}}.$$

(3) 要将 $\sin x$ 与 $\cos x$ 展开到四阶，与分母等价.

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^4}\ln(\cos 2x+2x\sin x)=\exp\lim_{x\to0}\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}$$
$$=\exp\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+o(x^4)+2x\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-1}{x^4}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}.$$

(4) 注意本题要将 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ 展开到二阶.

$$\text{原式}=\exp\lim_{x\to\infty}x\ln\left[\mathrm{e}^{-1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\exp\lim_{x\to\infty}x\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]$$
$$=\exp\lim_{x\to\infty}x\left[x\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-1\right]=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

(5) 原式 $=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]}=\exp\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{x^2}\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\frac{1}{x}\right]=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

(6) 本题也可以用等价无穷小来写.

$$\text{原式}=\exp\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)=\exp\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x-\ln x+\frac{\ln x}{2x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\exp\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\ln\ln x+(1-2x)\ln x+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}{2x\ln x+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}=\exp\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\ln\ln x}{\ln x}+\frac{1}{x}-2\right)=\mathrm{e}^{-1}.$$

(7) 本题也可以用等价无穷小来写.

$$\text{原式}=\exp\lim_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}\right)=\exp\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}-1\right)\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\exp\lim_{t\to0}\frac{t+2^t-1}{t}$$
$$=\exp\lim_{t\to0}\frac{t+\mathrm{e}^{t\ln2}-1}{t}=\exp\lim_{t\to0}\frac{t+t\ln2+o(t)}{t}=\mathrm{e}^{1+\ln2}=2\mathrm{e}.$$

(8) $\text{原式}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}+1-\left(1+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)\right)}{\left(\cos x-1+1-\mathrm{e}^{x^2}\right)\cdot x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)}{\left(-\dfrac{x^2}{2}-x^2+o\left(x^2\right)\right)x^2}=-\dfrac{1}{12}$

(9) 因为 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$，则

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{(1+x)^{1/x}}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}-\dfrac{\mathrm{e}}{x}\ln(1+x)\right]}{x^2}=\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}\lim_{x\to0}\frac{\exp\left[\dfrac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]-\dfrac{1}{x}\ln(1+x)}{x^2}$$
$$=\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}\lim_{x\to0}\frac{\exp\left(-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)\right)-1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)}{x^2}=\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)\right)^2}{x^2}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}}{8}.$$

例 1.3.38. 用 Taylor 展开求下列极限值.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3}\right)$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x^2}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{\sin^{-2}\left(\frac{1}{x}\right)}$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\mathrm{e}^{x^2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2\right)}{[\ln(1-x)+\ln(1+x)]\cdot\sin\dfrac{x^2}{1+x}}$.

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\displaystyle\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

(6) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-x^{\frac{2}{3}}+\displaystyle\int_0^{\sqrt[5]{x^2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t\right)^{x^{-2}}$.

(1) $\text{原式}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{x}}-\sqrt[4]{1-\dfrac{2}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{x}-1+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=\dfrac{3}{2}$.

(2) $\text{原式}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1+\dfrac{2}{3x}+\dfrac{1}{3x^3}-1-\dfrac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=-\dfrac{1}{3}$.

(3) 等价无穷小与 Taylor 展开配合使用.

$$\text{原式}\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\exp\lim_{t\to0}\frac{1}{\sin^2t}\ln\left(\sin2t^2+\cos t\right)=\exp\lim_{t\to0}\frac{\sin2t^2+\cos t-1}{t^2}=\exp\lim_{t\to0}\frac{2t^2-\dfrac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)}{t^2}=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}.$$

(4) $\text{原式}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+o\left(x^2\right)\right)}{-\left(x+\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)+x-\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}\cdot\dfrac{1+x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{x^2}{4}}{-x^2}=\dfrac{1}{4}$.

(5) 等价无穷小与 L'Hospital 法则和 Taylor 展开配合使用，要注意展开的阶数.

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x}\xlongequal{L'}\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-x\right]=\frac{1}{2}.$$

(6) **被积函数的 Taylor 展开** 若 $F(x)=f(x)+o(x^n)$，则有 $\int_0^x F(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+o(x^{n+1})$，

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&\xlongequal{x^{\frac{2}{3}}=y}\lim_{y\to0}\left(1-y+\int_0^y \mathrm{e}^{\frac12 t^2}\mathrm{d}t\right)^{y-3}=\exp\lim_{y\to0}\frac{1}{y^3}\ln\left(1-y+\int_0^y \mathrm{e}^{\frac12 t^2}\mathrm{d}t\right)\\
&=\exp\lim_{y\to0}\frac{-y+\int_0^y\left(1+\frac12 t^2+o\left(t^2\right)\right)\mathrm{d}t}{y^3}=\exp\lim_{y\to0}\frac{-y+y+\frac16 y^3+o\left(y^3\right)}{y^3}=\mathrm{e}^{\frac16}.
\end{aligned}
$$

例 1.3.39. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内可导，且 $f(0)=1,f'(0)=2$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\sin\frac1n\right)^{\frac{n}{1-f\left(\frac1n\right)}}$.

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1-f\left(\frac1n\right)}\ln\left(n\sin\frac1n\right)=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1-f\left(\frac1n\right)}\left(n\sin\frac1n-1\right)\\
&=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1-f\left(\frac1n\right)}\left[n\left(\frac1n-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-1\right]=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{6n}}{1-f\left(\frac1n\right)}\\
&=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{\frac16\cdot\frac1n}{f\left(0+\frac1n\right)-f(0)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{6f'(0)}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{12}}
\end{aligned}
$$

例 1.3.40 (2020 北京化工大学). 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\frac{\mathrm{e}}{2}x+x^2\left[\left(1+\frac1x\right)^x-\mathrm{e}\right]\right\}$.

令 $\frac1x=t$，$(t\to0^+$，$x\to+\infty)$，于是

$$
\text{原式}=\lim_{t\to0^+}\left\{\frac{\mathrm{e}}{2t}+\frac{1}{t^2}\left[(1+t)^{\frac1t}-\mathrm{e}\right]\right\}=\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}t+2\left[(1+t)^{\frac1t}-\mathrm{e}\right]}{2t^2}
$$

其中 $(1+t)^{\frac1t}=\mathrm{e}^{\frac1t\ln(1+t)}$，并且需要将 $\ln(1+t)$ 展开到三阶，即 $\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o(x^3)$，那么

$$
\frac{\ln(1+t)}{t}=1-\frac t2+\frac{t^2}{3}+o(x^2)
$$

于是 $\mathrm{e}^{\frac1t\ln(t+1)}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-\frac t2+\frac{t^2}{3}+o(x^2)}$，并且需要将 e^x 展开到二阶，这是因为对 $-\frac t2+\frac{t^2}{3}$ 平方后依旧存在 t 的二阶项，但无需展开到三阶，故

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\frac t2+\frac{t^2}{3}+o(t^2)}&=1+\left(-\frac t2+\frac{t^2}{3}+o(t^2)\right)+\frac12\left(-\frac t2+\frac{t^2}{3}+o(t^2)\right)^2\\
&=1-\frac t2+\frac{t^2}{3}+o(t^2)+\frac{t^2}{8}+o(t^2)=1-\frac t2+\frac{11t^2}{24}+o(t^2)
\end{aligned}
$$

因此

$$
\text{原式}=\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}t+2\left[\mathrm{e}\left(1-\frac t2+\frac{11t^2}{24}+o(t^2)\right)-\mathrm{e}\right]}{2t^2}=\frac{11}{24}\mathrm{e}.
$$

例 1.3.41. 设 p 是某正整数，$I_n=\frac{1}{n^p}\sum\limits_{k=1}^n k^p-\frac{n}{p+1}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

由带 Peano 余项的 Taylor 展开式 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+o\big((x-x_0)^2\big)$ 记 $h=x-x_0$ 可得

$$
f(x)-f(x-h)=f'(x)h+\frac12 f''(x)h^2+o\left(\frac{1}{h^2}\right)
$$

那么令 $f(x)=\dfrac{x^{1+p}}{1+p}$，则 $f'(x)=x^p$，$f''(x)=px^{p-1}$，于是当 $n\to\infty$ 时

$$f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p+\frac{1}{2n^2}p\left(\frac{k}{n}\right)^{p-1}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

即

$$\left(\frac{k}{n}\right)^p=n\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]-\frac{1}{2n}p\left(\frac{k}{n}\right)^{p-1}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

累加得

$$\frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n}k^p=n(f(1)-f(0))+\frac{p}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{p-1}+o(1)$$

又因为 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{p-1}=p$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\dfrac{1}{2}$.

例 1.3.42. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi n!\mathrm{e})$.

用 *Taylor* 公式，$\exists\theta_n\in(0,1)$，使得

$$\mathrm{e}=\mathrm{e}^x\big|_{x=1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta_n}}{(n+2)!}$$

$$原式=\lim_{n\to\infty}n\sin\left\{2\pi n!\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta_n}}{(n+2)!}\right]\right\}=\lim_{n\to\infty}n\sin\left[\frac{2\pi}{n+1}+\frac{2\pi\mathrm{e}^{\theta_n}}{(n+1)(n+2)}\right]$$

其中 $\alpha_n\xlongequal{记}\dfrac{2\pi}{n+1}+\dfrac{2\pi\mathrm{e}^{\theta_n}}{(n+1)(n+2)}\to0\ (n\to\infty)$，于是

$$原式=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{\sin\alpha_n}{\alpha_n}\cdot\alpha_n\right)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\pi n}{n+1}+\frac{n}{(n+1)(n+2)}\cdot2\pi\mathrm{e}^{\theta_n}\right]=2\pi.$$

两个函数乘积的 Taylor 展开 若 f,g 展开第一个不为 0 的项次数分别为 m,n，欲使 $f\cdot g$ 展开到 p 阶，则 f,g 分别需要展开到 $p-n,p-m$ 阶.

例 1.3.43. 将下列函数展开到指定的阶数.

(1) $\ln(1+x)\sin x$，展开到 4 阶. | (2) $\mathrm{e}^x\sin x$，展开到 3 阶. | (3) $\dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$，展开到 3 阶.

$$\begin{matrix}\ln(1+x):x^1 & x^3\\ \sin x:x^1 & x^3\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\mathrm{e}^x:1 & x^2\\ \sin x:x^1 & x^3\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\ln(1+x):x^1 & x^3\\ 1/(1-x):1 & x^2\end{matrix}$$

(1) $\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$，$\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$，所以

$$\begin{aligned}\ln(1+x)\sin x&=\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o_1\left(x^3\right)\right)\left(x-\frac{1}{6}x^3+o_2\left(x^3\right)\right)\\&=x^2-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^4+o\left(x^4\right)=\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{2}x^3+x^2+o\left(x^4\right)\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$，$\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x\sin x&=\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)\left(x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right)\\&=x-\frac{1}{6}x^3+x^2+\frac{1}{2}x^3+o\left(x^3\right)=\frac{1}{3}x^3+x^2+x+o\left(x^3\right)\end{aligned}$$

(3) $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$，$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+o(x^2)$，所以

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x)}{1-x}&=\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)(1+x+x^2+o(x^2))\\&=x+x^2+x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)=\frac{5}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+o(x^3).\end{aligned}$$

推论 1.3.6. $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 展开第一个不为 0 的项次数分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_k$，欲使 $f_1f_2\cdots f_k$ 展开到 p 阶，则 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 分别需要展开到 $p-(m_2+m_3+\cdots+m_k),p-(m_1+m_3+\cdots+m_k),\cdots,p-(m_2+m_3+\cdots+m_{k-1})$ 阶.

例 1.3.44. 试用推论 1.3.6，计算例 1.3.2(12).

需要将$\sin kx$ 展开到三阶，故 $\sin kx=kx-\frac{1}{6}(kx)^3+o(x^3)$，那么

$$\prod_{k=1}^{n}\sin kx=\prod_{k=1}^{n}\left[kx-\frac{1}{6}(kx)^3+o(x^3)\right]\ (x\to 0)$$

在上式中排列组合出 x 的阶数小于等于 $n+2$ 的项，有

$$\prod_{k=1}^{n}\sin kx=n!x^n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}n!k^2x^{n+2}+o(x^{n+2})=n!x^n-\frac{n!x^{n+2}}{6}\sum_{k=1}^{n}k^2+o(x^{n+2})\ (x\to 0)$$

$$\text{故原式}=\lim_{x\to 0}\frac{n!x^n-n!x^n+\dfrac{n!x^{n+2}}{6}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2+o\left(x^{n+2}\right)}{x^{n+2}}=\frac{n!}{6}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(2n+1)}{36}(n+1)!.$$

复合函数的 Taylor 展开 先确定外函数的展开阶数，再由各项阶数确定内函数的展开阶数.

例 1.3.45. 将下列函数展开到指定的阶数.

(1) $\sin(\sin x)$，展开到 3 阶.	(2) $\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{\sin x}$，展开到 3 阶.
(3) $\ln\cos x$，展开到 6 阶.	(4) $\frac{1}{\mathrm{e}}(1+x)^{\frac{1}{x}}$，展开到 3 阶.

(1) 先将外层函数展开到 3 阶，

$$\begin{aligned}\sin(\sin x)&=\sin x-\frac{1}{6}\sin^3x+o(\sin^3x)=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-\frac{1}{6}(x+o(x))^3+o(x^3)\\&=x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{\sin x}=\mathrm{e}^{\tan x}-1-(\mathrm{e}^{\sin x}-1)$，先将外层函数展开到 3 阶，

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\tan x}-1&=\tan x+\frac{1}{2}\tan^2x+\frac{1}{6}\tan^3x+o\left(\tan^3x\right)\\&=\left(x+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right)+\frac{1}{2}(x+o(x))^2+\frac{1}{6}(x+o(x))^3+o\left(x^3\right)\\&=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+o\left(x^3\right)\\\mathrm{e}^{\sin x}-1&=\sin x+\frac{1}{2}\sin^2x+\frac{1}{6}\sin^3x+o\left(\sin^3x\right)\\&=\left(x^3-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right)+\frac{1}{2}(x+o(x))^2+\frac{1}{6}(x+o(x))^3+o\left(x^3\right)\\&=\frac{1}{2}x^2+x+o\left(x^3\right)\end{aligned}$$

故 $\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{\sin x}=\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$.

(3) 先将外层函数展开到 6 阶，

$$\begin{aligned}\ln\cos x &= \frac{1}{2}\ln\left(1-\sin^2 x\right) = -\frac{1}{2}\left(\sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{2} + \frac{\sin^6 x}{3} + o(\sin^3 x)\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^5\right)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+0\left(x^5\right)\right)^4 + \frac{1}{3}(x+o(x))^6\right] + o\left(x^6\right)\\ &= -\frac{1}{45}x^6 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^6\right).\end{aligned}$$

(4) 原式 $= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}$，注意到 $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$，于是

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)} = 1 + \left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)\\ &+ \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)^3\\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

例 1.3.46. 计算下列极限值.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\left(\mathrm{e}^x-1\right)-\mathrm{e}^{\tan x}+1}{x^4}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(\sin x\right)-\mathrm{e}^{\cos x-1}}{\tan^2 x-\sin^2 x}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\sin^2 x\right)-6\left(\sqrt[3]{2-\cos x}-1\right)}{x^4}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 - x^4\ln^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

(1) 注意到

$$\mathrm{e}^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4),\ \tan x = x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)$$

于是

$$\begin{aligned}\tan\left(\mathrm{e}^x-1\right) &= \mathrm{e}^x - 1 + \frac{1}{3}(\mathrm{e}^x-1)^3 + o(x^4)\\ &= x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)^3+o(x^4)\\ &= x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{3}x^3\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+o(x^3)\right)^3+o(x^4)\\ &= x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)\\ &= x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{13}{24}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{\tan x}-1 = \tan x+\frac{1}{2}\tan^2 x+\frac{1}{6}\tan^3 x+\frac{1}{24}\tan^4 x+o(x^4)\\ &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)\right)^2+\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)\right)^3+\frac{1}{24}\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)\right)^4+o(x^4)\\ &= x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right)+\frac{1}{6}(x^3+o(x^4))+\frac{1}{24}(x^4+o(x^4))+o(x^4)\\ &= x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{9}{24}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

因此原式 $= \dfrac{\frac{1}{6}x^4+o(x^4)}{x^4} = \dfrac{1}{6}$.

(2) 与上题同理，注意到

$$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4),\ \sin x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)$$

$$\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4),\ \mathrm{e}^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$$

于是

$$\begin{aligned}\cos(\sin x) &= 1-\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{24}\sin^4 x+o(x^4)\\ &= 1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)^2+\frac{1}{24}\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)^4+o(x^4)\\ &= 1-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)\right)+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\\ &= 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\cos x-1} &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4++o(x^4)}\\ &= 1+\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)+o(x^4)\\ &= 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)+\frac{1}{2}x^4\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}x^2+o(x^2)\right)^2+o(x^4)\\ &= 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan^2 x-\sin^2 x &= \left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)\right)^2-\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)^2\\ &= x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)-\left(x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)\right)=x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

于是原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)-\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^4+o(x^4)\right)}{x^4+o(x^4)}=\dfrac{1}{24}$.

(3) $\ln(1+\sin^2 x)=\sin^2 x-\dfrac{1}{2}\sin^4 x+o(x^4)$，且 $\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^4)$，于是

$$\begin{aligned}\ln(1+\sin^2 x) &= \left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^2-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^4+o(x^4)\\ &= x^2\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)^2-\frac{1}{2}x^4\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)^4+o(x^4)=x^2-\frac{5}{6}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2-\cos x}-1 &= \sqrt[3]{1+(1-\cos x)}-1=\frac{1}{3}(1-\cos x)+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}(1-\cos x)^2\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{2}+o(x^4)\right)^2+o(x^4)=\frac{1}{6}x^2-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\end{aligned}$$

于是原式 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{-\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=-\dfrac{7}{12}$.

(4) **法一：**利用 *L'Hospital* 法则计算极限

$$I=\lim_{x\to\infty}x^2\left[1-\frac{1}{2x}+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\left[1-\frac{1}{2x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to 0}\left[1-\frac{t}{2}+\frac{\ln(1+t)}{t}\right]\cdot\frac{t-\frac{t^2}{2}-\ln(1+t)}{t^3}$$

$$\xlongequal{L'}\lim_{t\to 0}\frac{2-2t+\frac{2}{1+t}}{2}\cdot\frac{1-t-\frac{1}{1+t}}{3t^2}=2\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3}.$$

法二：对 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, $x\to\infty$ 进行 *Taylor* 展开，有

$$I=\lim_{x\to\infty}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-x^4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o(x^{-4})\right)^2\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-x^2\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o(x^{-3})\right)^2\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{3x}\right)^2\right]=\lim_{x\to\infty}\left(x-\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}+\frac{1}{3x}\right)\left(x-\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-6x^2+3x-1}{9x^2}=-\frac{2}{3}.$$

例 1.3.47. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x\ln(1+x)}-\dfrac{2+x}{2x^2}\right]$.

对 $\ln(1+x)$ 进行 *Taylor* 展开，有 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$，于是

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)}-\frac{2+x}{2x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{12}{2x^2(6-3x+2x^2)}-\frac{2+x}{2x^2}\right]\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{12-(2+x)(6-3x+2x^2)}{2x^2(6-3x+2x^2)}=-\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{2(6-3x+2x^2)}=-\frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

例 1.3.48. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上三阶可导，满足

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2}=a\neq 1\ f^{(k)}(x)>0,\ k=0,1,2$$

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$.

注意到

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{[f''(x)]^2-[f''(x)]^2+f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2}\\
&=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{[f''(x)]^2-f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2}=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f'(x)}{f''(x)}\right)
\end{aligned}$$

于是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{f'(x)}{f''(x)}\right)=1-a$，并且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{1}{\dfrac{f'(x)}{xf''(x)}\cdot\dfrac{xf''(x)}{f(x)}}$$

利用 *L'Hospital* 法则，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{xf''(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{f'(x)}{f''(x)}}{x}\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f'(x)}{f''(x)}\right)=1-a$$

注意到 $\dfrac{f'(x)}{xf''(x)}>0\ (0<x<+\infty)$，故由极限的保号性知，$1-a\geqslant 0$，但 $a\neq 1$，所以 $a<1$; 另一方面，对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 及 $\forall h>0$，由 *Taylor* 公式，得

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(\xi)h^2>f(x)+f'(x)h\ \xi\in(x,x+h)$$

所以 $\lim\limits_{h\to\infty}f(x+h)=+\infty$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$，于是利用 *L'Hospital* 法则，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)}\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)+xf''(x)}{f'(x)}=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{xf''(x)}{f'(x)}=1+\frac{1}{1-a}=\frac{2-a}{1-a}$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{xf''(x)}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf'(x)}{f(x)}}=\frac{1}{2-a}.$$

Lagrange 中值定理

定理 1.3.14 (Lagrange 中值定理). 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则 $\forall x_1,x_2\in[a,b],\exists\xi\in(x_1,x_2)$，使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)\cdot(x_2-x_1).$$

例 1.3.49. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos[2\ln(1+x)]}{x^2}$.

错解. 由 *Lagrange* 中值定理，$\cos x-\cos[2\ln(1+x)]=[2\ln(1+x)-x]\sin\xi$，其中 ξ 介于 x 与 $2\ln(1+x)$ 之间，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos[2\ln(1+x)]}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{[2\ln(1+x)-x]\sin\xi}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{[2x+o(x)-x]}{x}=1$$

错因： 当 $x\to 0^+$，$x<\xi<2\ln(1+x)\Rightarrow 1\leftarrow\dfrac{x}{x}<\dfrac{\xi}{x}<\dfrac{2\ln(1+x)}{x}\to 2$，左右极限值不相等，故不能由夹逼准则得 $\sin\xi\sim\xi$，同理可得 $x\to 0^-$ 情况相同.

当 $x\to 0$ 时，$\cos[2\ln(1+x)]\to 1$，于是原式可改写为

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x-1}{x^2}+\frac{1-\cos(2\ln(1+x))}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2\ln(1+x))}{x^2}=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}.$$

例 1.3.50. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{n^\beta-(n-1)^\beta}=2023$，求 α,β 的值.

A. $\alpha=-\dfrac{2022}{2023}$, $\beta=\dfrac{1}{2023}$.　　B. $\alpha=-\dfrac{2023}{2022}$, $\beta=\dfrac{1}{2022}$.

C. $\alpha=-\dfrac{2022}{2023}$, $\beta=\dfrac{1}{2022}$.　　D. $\alpha=-\dfrac{2023}{2022}$, $\beta=\dfrac{1}{2023}$.

设 $f(x)=x^\beta$，那么由 *Lagrange* 中值定理，有

$$f(n)-f(n-1)=\beta\xi_n^{\beta-1}$$

那么极限式改写为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{\beta\xi_n^{\beta-1}}=2023$，且 $\dfrac{n}{\xi_n}\to 1(n\to\infty)$，于是 $\begin{cases}\dfrac{1}{\beta}=2023\\ \alpha=\beta-1\end{cases}$ 解得选 *A*.

例 1.3.51. 用 Lagrange 中值定理求下列极限值.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$.　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{\theta}{n}\right)^n$.　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$.　(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$.　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$.

(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{6}\xi^{-\frac{5}{6}}\cdot(2x^5)=\dfrac{1}{3}$，$\xi\to x^6$.

(2) 原式 $=\exp\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\cos\dfrac{\theta}{n}=\exp\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\cos\dfrac{\theta}{n}-1\right)=\exp\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\dfrac{\theta}{n}\cdot(-\sin\xi)=e^0=1$，$\xi\to 0$.

(3) 原式 $=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}=\exp\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)-1\right]=\exp\lim\limits_{n\to\infty}\sec^2\xi=e^2$，$\xi\to\dfrac{\pi}{4}$.

(4) 先用 *Lagrange* 中值定理，再用 *Taylor* 展开.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln\sin x-2\ln(x\cos x)}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\cdot\xi}\\&=2\lim_{x\to 0}\frac{x-\dfrac{x^3}{6}-x\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)+o\left(x^3\right)}{x^2\cdot\xi}=\frac{2}{3},\ \xi\to x.\end{aligned}$$

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}}{x^2}=\dfrac{3}{2}$，$\xi\to 1$.

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\xi}\left(x^2-2+2\cos x\right)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2+2\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)\right)}{x^4}=\dfrac{1}{12}$，$\xi\to 0$.

例 1.3.52. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 二阶可微且 $f'(0)=0$，$f''(0)=1$，计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}$.

显然 f 在 $x=0$ 邻域内一阶可微，因此由 *Lagrange* 中值定理，

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{[x-\ln(1+x)]f'(\xi_x)}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi_x)}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi_x)-f'(0)}{\xi_x}\cdot\frac{\xi_x}{x}=\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2}$$

其中

$$1=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)}{x}\leqslant\lim_{x\to0+}\frac{\xi_x}{x}\leqslant\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=1$$
$$1=\lim_{x\to0-}\frac{x}{x}\leqslant\lim_{x\to0-}\frac{\xi_x}{x}\leqslant\lim_{x\to0-}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

例 1.3.53 (2011 数一). 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$.

令 $y=\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$，则 $\ln y=\dfrac{\ln(\ln(x+1))-\ln x}{e^x-1}$，而

$$\lim_{x\to0+}\ln y=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(\ln(x+1))-\ln x}{e^x-1}=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(\ln(x+1))-\ln x}{x}$$

由 *Lagrange* 中值定理，令 $f(x)=\ln x$ 那么 $f(1+\ln x)-f(x)=\dfrac{\ln(1+x)-x}{\xi_x}$，其中 ξ_x 介于 x 与 $\ln(1+x)$ 之间，于是

$$\lim_{x\to0+}\ln y=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)-x}{x\cdot\xi_x}=\lim_{x\to0+}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

当 $x<0$ 时，$\ln y=\dfrac{\ln[-\ln(1+x)]-\ln(-x)}{e^x-1}$ 同样可得 $\lim\limits_{x\to0-}\ln y=-\dfrac{1}{2}$，于是原极限为 $e^{-\frac{1}{2}}$.

例 1.3.54 (第三届数学竞赛决赛). 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}e^{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$.

对函数 $f(x)=e^{x^2}$ 在区间 $[0,x]$ $(0\leqslant x\leqslant1)$ 上应用拉格朗日中值定理，$\exists\xi\in(0,x)$，使得 $f(x)-f(0)=f'(\xi)x$，即

$$e^{x^2}-1=2\xi e^{\xi^2}x\Rightarrow1\leqslant e^{x^2}=1+2\xi e^{\xi^2}x\leqslant1+2ex$$

于是

$$\frac{n}{n^2x^2+1}\leqslant\frac{n}{n^2x^2+1}e^{x^2}\leqslant\frac{n}{n^2x^2+1}+\frac{2enx}{n^2x^2+1}$$

应用定积分的保号性，有

$$\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}e^{x^2}dx\geqslant\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}dx=\arctan nx\Big|_0^1=\arctan n$$

$$\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}e^{x^2}dx\leqslant\int_0^1\left(\frac{n}{n^2x^2+1}+\frac{2enx}{n^2x^2+1}\right)dx=\arctan nx\Big|_0^1+\frac{e}{n}\ln\left(1+n^2x^2\right)\Big|_0^1=\arctan n+\frac{e}{n}\ln\left(1+n^2\right)$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\arctan n+\dfrac{e}{n}\ln\left(1+n^2\right)\right]=\dfrac{\pi}{2}$，故由夹逼准则，等式成立.

例 1.3.55. 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left[\ln\left(x^2+x\right)-2\ln(1+x)\right]$.

法一: 利用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$，改写极限式，有

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\ln\frac{x^2+x}{(1+x)^2}=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\ln\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\ln\left(1+\frac{-x-1}{x^2+2x+1}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\cdot\frac{-x-1}{x^2+2x+1}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x+1}=-1.\end{aligned}$$

法二: 利用 *Lagrange* 中值定理: 设 $f(x)=\ln x$，则 $\exists\xi$ 介于 x^2+x 与 x^2+2x+1，使得

$$\frac{f\left(x^2+x\right)-f\left(x^2+2x+1\right)}{(x^2+x)-(x^2+2x+1)}=f'(\xi)=\frac{1}{\xi},\xi\to\infty$$

即 $\ln\left(x^2+x\right)-\ln\left(x^2+2x+1\right)=-\frac{1}{\xi}(x+1)$，所以

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\ln\left(x^2+x\right)-2\ln(1+x)\right]=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\ln\left(x^2+x\right)-\ln\left(x^2+2x+1\right)\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[-\frac{1}{\xi}(x+1)\right]=-\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{\xi}\end{aligned}$$

因为 ξ 介于 x^2+x 与 x^2+2x+1，由夹逼准则可知：

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\ln\left(x^2+x\right)-2\ln(1+x)\right]=-1$$

法三： 由 *L'Hospital* 法则可知：注意到

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x^2+x\right)-2\ln(1+x)\right]=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0$$

记 $I=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\ln\left(x^2+x\right)-2\ln(1+x)\right]$，则

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+x\right)-2\ln(1+x)}{\frac{1}{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x+1}{x^2+x}-\frac{2}{1+x}}{-\frac{1}{(x+1)^2}}\\&=-\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x+1}{x^2+x}-\frac{2x}{(1+x)x}\right](x+1)^2=-\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+x}=-1\end{aligned}$$

所以 $\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\ln\left(x^2+x\right)-2\ln(1+x)\right]=-1$.

法四： $\ln\left(x^2+x\right)$ 和 $\ln(1+x)$ 在 $x\to+\infty$ 的渐近展开式. 注意到：

$$\ln\left(x^2+x\right)=2\ln x+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right),\ \ln(1+x)=\ln x+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\ln\left(x^2+x\right)-2\ln(1+x)\right]&=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[2\ln x+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-2\left(\ln x+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=-1.\end{aligned}$$

例 1.3.56. 求极限 $I=\lim_{x\to\infty}x^2\left[\mathrm{e}^{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\mathrm{e}x}\right]$.

作变量代换：$t=\frac{1}{x}$，则有

$$I=\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{e}^{(1+t)^{t^{-1}}}-(1+t)^{\frac{\mathrm{e}}{t}}}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{e}^{(1+t)^{t^{-1}}}-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}\ln(1+t)}{t}}}{t^2}$$

令 $f(t)=(1+t)^{t^{-1}}$，$g(t)=\frac{\mathrm{e}\ln(1+t)}{t}$，则 $\lim_{t\to0}f(t)=\lim_{t\to0}g(t)=0$，由 *Lagrange* 中值定理，得

$$\mathrm{e}^{f(t)}-\mathrm{e}^{g(t)}=\mathrm{e}^{\xi}(f(t)-g(t))$$

其中 ξ 介于 $f(t)$ 与 $g(t)$ 之间，当 $t\to0$ 时，$\xi\to\mathrm{e}$，所以 $\mathrm{e}^{f(t)}-\mathrm{e}^{g(t)}\sim\mathrm{e}^{\mathrm{e}}[f(t)-g(t)]$，故

$$I=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}\lim_{t\to0}\frac{f(t)-g(t)}{t^2}=\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)}{t}-1}-\frac{\ln(1+t)}{t}}{t^2}$$

记 $\alpha(t)=\frac{\ln(1+t)}{t}-1\ (t\to0,\alpha(t)\to0)$，由 $\mathrm{e}^{\alpha(t)}$ 的 *Taylor* 展开，得

$$\mathrm{e}^{\alpha(t)}=1+\alpha(t)+\frac{1}{2!}\alpha^2(t)+o(\alpha^2(t))=\frac{\ln(1+t)}{t}+\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(1+t)-t}{t}\right]^2+o(\alpha^2(t))$$

因此

$$I=\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}\lim_{t\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{[\ln(1+t)-t]^2}{t^4}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}\lim_{t\to0}\frac{\left[-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right]^2}{t^4}=\frac{1}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}.$$

例 1.3.57. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sin x+\mathrm{e}^{\tan x}\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\tan x+\mathrm{e}^{\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}}{x^3}$

改写极限式，有

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sin x+\mathrm{e}^{\tan x}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{x}\left[\ln\left(\sin x+\mathrm{e}^{\tan x}\right)-\ln\left(\tan x+\mathrm{e}^{\sin x}\right)\right]}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\left(\sin x+\mathrm{e}^{\tan x}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\tan x}-\tan x-\left(\mathrm{e}^{\sin x}-\sin x\right)}{x^4}\\&=\exp\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\sin x+\mathrm{e}^{\tan x}\right)\cdot\lim_{x\to0}\frac{(\tan x-\sin x)f'(\xi_x)}{x^4}\end{aligned}$$

其中

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\sin x+\mathrm{e}^{\tan x}\right)=\exp\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\sin x+\mathrm{e}^{\tan x}-1\right)=\exp\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\tan x}{x}=\mathrm{e}^2$$

ξ_x 介于 $\sin x$ 与 $\tan x$ 之间，并且

$$\lim_{x\to0}\frac{(\tan x-\sin x)f'(\xi_x)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{2}x^3f'(\xi_x)}{x^4}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi_x)}{x}=\frac{1}{2}$$

这是因为 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1\to x\ (x\to0)$，以及当 $x\to0^+$ 时，

$$0\leftarrow\sin x<\xi_x<\tan x\to0$$

当 $x\to0^-$ 时，

$$0\leftarrow\tan x<\xi_x<\sin x\to0$$

于是 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(\xi_x)}{x}=1$，综上原式 $=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$.

例 1.3.58. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有三阶连续导数，且 $f'(a)\neq0$，令

$$\varphi(x)=\left[\frac{f'(x)+f'(a)}{2f(x)-2f(a)}\right]^2-\left(\frac{1}{x-a}\right)^2$$

计算极限 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$.

考虑 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的 *Taylor* 展开，

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-a)^3$$

于是

$$2f(x)-2f(a)=2f'(a)(x-a)+f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3}f'''(\xi)(x-a)^3$$

其中 ξ 介于 x 与 a 之间，同理，考虑 $f'(x)$ 在 $x=a$ 处的 *Taylor* 展开，

$$f'(x)=f'(a)+f''(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f'''(\eta)(x-a)^2$$

于是

$$f'(x)+f'(a)=2f'(a)+f''(a)(x-a)+\frac{1}{2}f'''(\eta)(x-a)^2$$

其中 η 介于 x 与 a 之间，将两式代入极限式，并通分，于是分子为

$$\begin{aligned}&(x-a)^2\left[2f'(a)+f''(a)(x-a)+\frac{f'''(\eta)}{2}(x-a)^2\right]^2-\left[2f'(a)(x-a)+f''(a)(x-a)^2+\frac{f'''(\xi)}{3}(x-a)^3\right]^2\\=&f'(a)\left[2f'''(\eta)-\frac{4}{3}f'''(\xi)\right](x-a)^4+o\big((x-a)^4\big)\end{aligned}$$

分母为

$$\left[2f'(a)+f''(a)(x-a)+\frac{f'''(\xi)}{3}(x-a)^2\right]^2(x-a)^4=4\big[f'(a)\big]^2(x-a)^4+o\big((x-a)^4\big)$$

分式求 $x\to a$ 的极限，都只考虑分子、分母中的最低次幂，并且都为 $(x-a)^4$，所以

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\lim_{x\to a}\frac{2f'''(\eta)-\dfrac{4}{3}f'''(\eta)}{4f'(a)}$$

由于 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有三阶连续导数，故 $f'''(\eta)=f'''(\xi)=f'''(a)$，于是原极限为 $\dfrac{f'''(a)}{6f'(a)}$.

定理 1.3.15. 设 f 与 g 连续，当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x),\beta(x)$ 均为无穷小，$\alpha(x)\sim\beta(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f}{g}=1$，则

$$\int_0^{\alpha(x)} f\mathrm{d}t\sim\int_0^{\beta(x)} g\mathrm{d}t.$$

利用积分等价求极限

例 1.3.59. 把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量

$$\alpha=\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t,\ \beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t,\ \gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$$

排列起来，使排列在后的是前一项的高阶无穷小量，则正确的排列次序为

A. α,β,γ　　B. α,γ,β　　C. β,α,γ　　D. β,γ,α

由定理 *1.3.15* 可知，当 $x\to 0^+$ 时，有

$$\alpha\sim\int_0^x \mathrm{d}t=x,\ \beta\sim\int_0^{x^2}\sqrt{t}\mathrm{d}t=\frac{2}{3}x^3,\ \gamma\sim\int_0^{x^{\frac{1}{2}}} t^3\mathrm{d}t=\frac{1}{4}x^2$$

因此 γ 是 α 的高阶无穷小量，β 是 γ,α 的高阶无穷小量，所以有排列 α,γ,β，选 *B*.

例 1.3.60. 求下列极限值.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{\left[x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]\int_0^{\ln(1+x)}\cos t^2\mathrm{d}t}$.　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2(\sec x-1)}-\sqrt[3]{6(x-\sin x)}}{\int_0^{x^2}\arctan\left(\mathrm{e}^{\sqrt{t}}-1\right)\mathrm{d}t}$.

(1) 分子: $\cos(\sin x)-\cos x=(x-\sin x)\sin\xi$，其中 ξ 介于 $\sin x$ 与 x 之间，当 $x\to 0^+$ 时，有 $\sin x<\xi<x$，那么

$$1\leftarrow\frac{\sin x}{x}<\frac{\xi}{x}<\frac{x}{x}\to 1\ (x\to 0)$$

即 $\xi\sim x$; 当 $x\to 0^-$，同理可得 $\xi\sim x$，于是 $\xi\sim x\ (x\to 0)$，则

$$(x-\sin x)\sin\xi\sim(x-\sin x)x\sim\frac{1}{6}x^4$$

分母: $\displaystyle\int_0^{\ln(1+x)}\cos t^2\mathrm{d}t\sim\int_0^x \mathrm{d}t=x\ (x\to 0)$，并且

$$x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sim\mathrm{e}^x\left[\ln\mathrm{e}^x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]\sim\mathrm{e}^x-x-\sqrt{1+x^2}$$

又

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^4),\ (1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$$

那么 $\mathrm{e}^x-x-\sqrt{1+x^2}=\dfrac{1}{6}x^3+o(x^4)$，因此原式 $=\dfrac{\frac{1}{6}x^4}{\frac{1}{6}x^3\cdot x}=1$.

(2) 分母: $\displaystyle\int_0^{x^2}\arctan\left(\mathrm{e}^{\sqrt{t}}-1\right)\mathrm{d}t\sim\int_0^{x^2}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{t}}-1\right)\mathrm{d}t\sim\int_0^{x^2}\sqrt{t}\mathrm{d}t\to\frac{2}{3}x^3\ (x\to 0^+)$，则考虑将分子展开到 x^3 阶，故

$$\begin{aligned}\sqrt{2(\sec x-1)}-\sqrt[3]{6(x-\sin x)}&\sim\sqrt{2(\sec x-1)}\left[\frac{1}{2}\ln 2(\sec x-1)-\frac{1}{3}\ln 6(x-\sin x)\right]\\&\sim x\left[\frac{1}{2}\ln 2(\sec x-1)-\frac{1}{3}\ln 6(x-\sin x)\right]\ (x\to 0^+)\end{aligned}$$

那么中括号中须展开到 x^2 阶，不妨先减去 $\frac{1}{2}\ln x^2$，再加 $\frac{1}{2}\ln x^2$ 即 $\left(\frac{1}{6}\ln x^6\right)$，则前项

$$\frac{1}{2}\ln 2(\sec x-1)-\frac{1}{2}\ln x^2=\frac{1}{2}\ln\frac{2(\sec x-1)}{x^2}\sim\frac{1}{2}\left[\frac{2(\sec x-1)}{x^2}-1\right]$$

又因为

$$\sec x=1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{5}{4!}x^4+o(x^5)$$

则上式化为 $\frac{5}{4!}x^2\ (x\to 0^+)$，后项有

$$\frac{1}{6}\ln x^6-\frac{1}{3}\ln 6(x-\sin x)=\frac{1}{6}\ln x^6-\frac{1}{6}\ln 36(x-\sin x)^2=-\frac{1}{6}\ln\frac{36(x-\sin x)^2}{x^6}$$

其中

$$\ln\frac{36(x-\sin x)^2}{x^6}\sim\frac{36(x-\sin x)^2-x^6}{x^6}=\frac{\left[6(x-\sin x)+x^3\right]\left[6(x-\sin x)-x^3\right]}{x^6}\ (x\to 0^+)$$

那么上式分子则要展开到 x^8 阶，于是

$$6(x-\sin x)+x^3=6\left(\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)+x^3\right)=2x^3$$

$$6(x-\sin x)-x^3=6\left(\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{5!}x^5+o(x^6)\right)-x^3=-\frac{6}{5!}x^5\ (x\to 0^+)$$

故 $-\frac{1}{6}\ln\frac{36(x-\sin x)^2}{x^6}\sim-\frac{1}{6}\cdot\frac{2x^3\cdot\left(-\frac{6}{5!}x^5\right)}{x^6}\sim\frac{2}{5!}x^2\ (x\to 0^+)$，综上原极限

$$I=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\left(\frac{5}{4!}x^2+\frac{2}{5!}x^2\right)}{\frac{2}{3}x^3}=\left(\frac{5}{4!}+\frac{2}{5!}\right)\cdot\frac{3}{2}=\frac{27}{80}.$$

利用积分定义求极限

定理 1.3.16. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

引理 1.3.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$

证 原式 $=\exp\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\sqrt[n]{n!}-\ln n\right)=\exp\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln x\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-1}.$

例 1.3.61. 求下列极限值.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{i}{n^2}}-1\right).$	(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\cos\frac{i\pi}{2n}}.$	(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i\cos\frac{i}{n}}{n^2+i}.$
(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}.$	(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right].$	(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}.$

(1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{3}\frac{i}{n^2}=\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n}=\frac{1}{3}\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{6}.$

(2) 原式 $=\frac{\pi}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{i}{n}}=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos\frac{\pi}{2}x}\xlongequal{\frac{\pi}{2}x=t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t}=\frac{1}{2}.$

(3) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\frac{i}{n}\cos\frac{i}{n}}{1+\frac{i}{n^2}} := \lim\limits_{n\to\infty} f$

$$\lim_{n\to\infty} f \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}\cos\frac{i}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cos\frac{i}{n} = \int_0^1 x\cos x\mathrm{d}x = \sin 1+\cos 1-1$$

$$\lim_{n\to\infty} f \geqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}\cos\frac{i}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cos\frac{i}{n} = \sin 1+\cos 1-1$$

由夹逼准则得，原式$=\sin 1+\cos 1-1$.

(4) 原式 $= \exp\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$，其中

$$\ln\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \ln(2n)! - 2\ln(n!) = \sum_{i=1}^{2n}\ln i - 2\sum_{i=1}^{n}\ln i = \sum_{i=1}^{n}\ln\frac{n+i}{i} = \sum_{i=1}^{n}\ln\frac{1+\frac{i}{n}}{\frac{i}{n}}$$

故，原式化为 $\exp\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\dfrac{1+\frac{i}{n}}{\frac{i}{n}} = \exp\displaystyle\int_0^1\ln\frac{1+x}{x}\mathrm{d}x = 4$，其中

$$\int_0^1\ln\frac{1+x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x} = 2\ln 2.$$

(5) 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$，则有

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{(n+1)!}\left[\frac{\ln(n+1)!}{n+1}-\frac{\ln n!}{n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\ln k-\frac{n+1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\left[\ln(n+1)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\left(-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n+1}\right) \end{aligned}$$

其中，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\dfrac{k}{n+1} = -\displaystyle\int_0^1\ln x\mathrm{d}x = 1$，综上，原式$=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(6) 注意到有 $\dfrac{2^{\frac{k}{n}}}{n+1} < \dfrac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} < \dfrac{2^{\frac{k}{n}}}{n}$，于是

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 2^x\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 2^x\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2}$$

由夹逼准则得原极限为 $\dfrac{1}{\ln 2}$.

例 1.3.62. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}k\ln(n+k)-\dfrac{n+1}{2n}\ln n\right]$.

原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}\ln(n+k)-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}\ln n\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right) = \displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x$，其中

$$\int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}\left[x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{4}.$$

例 1.3.63. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}\prod\limits_{i=1}^{2n}\left(n^2+i^2\right)^{\frac{1}{n}}$.

令 $I_n=\dfrac{1}{n^4}\prod\limits_{i=1}^{2n}\left(n^2+i^2\right)^{\frac{1}{n}}$，则

$$\ln I_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln\left(n^2+i^2\right)-\ln n^4=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\left[\ln\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)+2\ln n\right]-4\ln n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)$$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\exp\lim_{n\to\infty}I_n=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)=\exp\int_0^2\ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x\\&=\exp\left[x\ln\left(1+x^2\right)-2x+2\arctan x\right]_0^2=25\exp(2\arctan 2-4).\end{aligned}$$

例 1.3.64. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{n\dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right)^2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k}\right)^3}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{n+k}\right)\sin\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\right]\right\}$.

将待求极限分为两部分，

$$I_1=\lim_{n\to\infty}n\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right)^2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k}\right)^3}=\lim_{n\to\infty}n\frac{\left(\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[3]{n}}\right)^3\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{n\cdot\sqrt{n}}\right)^2\left(\dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k}\right)^3}=\lim_{n\to\infty}n\frac{\dfrac{1}{n^3n}\cdot\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{k}{n}}\right)^2}{\dfrac{1}{n^2n}\cdot\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[3]{\dfrac{k}{n}}\right)^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{k}{n}}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[3]{\dfrac{k}{n}}\right)^3}=\frac{\left(\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x\right)^2}{\left(\int_0^1\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x\right)^3}=\frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^3}=\frac{256}{243}$$

$$\begin{aligned}I_2&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n+k}\right)\sin\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\sin\ln 2\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}}\cdot\sin\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)-\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\ln 2}{2n}=\int_0^1\frac{\sin\ln(1+x)}{1+x}\mathrm{d}x\\&=-\int_0^1\mathrm{d}(\cos\ln(1+x))=1-\cos\ln 2\end{aligned}$$

故原极限为 $\dfrac{499}{243}-\cos\ln 2$.

推论 1.3.7. $\lim\limits_{n\to\infty}n^{j-i}\dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[i]{k}\right)^i}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[j]{k}\right)^j}=\lim\limits_{n\to\infty}n^{j-i}\dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[i]{\dfrac{k}{n}}\cdot\sqrt[i]{n}\right)^i}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[j]{\dfrac{k}{n}}\cdot\sqrt[j]{n}\right)^j}=\dfrac{\left(\dfrac{i}{i+1}\right)^i}{\left(\dfrac{j}{j+1}\right)^j}$.

例 1.3.65. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2n+1}}\left(\int_1^{\frac{1}{2n}}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y+\int_1^{\frac{3}{2n}}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y+\cdots+\int_1^{\frac{2n-1}{2n}}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right)$.

$\sqrt[n]{2}-1=2^{\frac{1}{n}}-1=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln 2}-1\sim\dfrac{1}{n}\ln 2\ (n\to\infty)$，且 $\sqrt[n]{2n+1}\to 1\ (n\to\infty)$，

$$\text{原式}=\ln 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_1^{\frac{2k-1}{2n}}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\ln 2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$$

$$= -\ln 2\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}(-y^2) = \frac{\ln 2}{2}(\mathrm{e}^{-1}-1).$$

定理 1.3.17. 对于 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$，当 $i=1$ 时，x_{i-1} 值为区间左端点; 当 $i=n$ 时，x_i 值为区间右端点.

例 1.3.66. 计算极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)\sum_{i=0}^{n-1}2^{\frac{i}{n}}\sin 2^{\frac{2i+1}{2n}}$.

原式等于 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left(2^{\frac{i+1}{n}}-2^{\frac{i}{n}}\right)\sin 2^{\frac{2i+1}{2n}}$，可以看出函数 $\sin x$ 在 $[1,2]$ 上按照下列方式划分

$$1 = 2^{\frac{0}{n}} < 2^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{2}{n}} < \cdots < 2^{\frac{n}{n}} = 2$$

其中 $\Delta x_i = 2^{\frac{i+1}{n}} - 2^{\frac{i}{n}}$, $\xi_i = 2^{\frac{2i+1}{2n}} \in \left[2^{\frac{i}{n}}, 2^{\frac{i+1}{n}}\right]$，故

$$\lim_{n\to\infty}\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)\sum_{i=0}^{n-1}2^{\frac{i}{n}}\sin 2^{\frac{2i+1}{2n}} = \int_1^2 \sin x\mathrm{d}x = \cos 2 - \cos 1.$$

利用收敛级数通项趋向零求极限

利用级数收敛的必要条件是求极限为 0 的数列极限的方法之一.

例 1.3.67. 求下列极限值

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot n!}{(2n)^n}. \quad\Big|\quad (2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{3\cdot 6\cdots(3n)}. \quad\Big|\quad (3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{11\cdot 12\cdots(n+10)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}.$$

(1) $x_n = \dfrac{5^n\cdot n!}{(2n)^n}$, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{5^{n+1}(n+1)!}{(2n+2)^{n+1}}\cdot\dfrac{(2n)^n}{5^n n!} = \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \dfrac{5}{2}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \to \dfrac{5}{2\mathrm{e}} < 1, n\to\infty$，故正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n n!}{(2n)^n}$ 收敛，从而通项 $x_n \to 0\ (n\to\infty)$.

(2) $x_n = \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{3\cdot 6\cdots(3n)}$, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{2n+1}{3n+3} \to \dfrac{2}{3} < 1\ (n\to\infty)$，故正项级数 $\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{3\cdot 6\cdots(3n)}$ 收敛，从而通项 $x_n \to 0\ (n\to\infty)$.

(3) $x_n = \dfrac{11\cdot 12\cdots(n+10)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}$, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{n+11}{3n+2} \to \dfrac{1}{3} < 1\ (n\to\infty)$，故正项级数 $\dfrac{11\cdot 12\cdots(n+10)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}$ 收敛，从而通项 $x_n \to 0\ (n\to\infty)$.

利用导数的定义

如果所求极限可凑成某个可导函数的增量，那么可利用导数的定义来求得该极限，这种方法多用于求抽象函数的不定式极限.

例 1.3.68. 若 $f(1)=0$，$f'(1)$ 存在，求极限 $I = \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)\cdot\tan 3x}{\left(\mathrm{e}^{x^2}-1\right)\cdot\sin x}$.

考虑导数的定义，有

$$I = \lim_{x\to 0}\frac{3f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2} = 3\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}$$

$$= 3f'(1)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\right) = \frac{3}{2}f'(1).$$

例 1.3.69. 求极限 $I=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x^3+9}\cdot\sqrt[3]{2x^2-17}-16}{4-\sqrt{x^3-23}\cdot\sqrt[3]{3x^2-19}}$.

记 $f(x)=\sqrt{x^3+9}\cdot\sqrt[3]{2x^2-17}$, $g(x)=\sqrt{x^3-23}\cdot\sqrt[3]{3x^2-19}$，则 $f(3)=6$, $g(3)=4$，于是

$$I=-\lim_{x\to3}\frac{\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}}{\dfrac{g(x)-g(3)}{x-3}}=-\lim_{x\to3}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

对 $f(x)$ 取对数并求导，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln f(x))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^3+9\right)+\frac{1}{3}\ln\left(2x^2-17\right)\right]=\frac{1}{2}\frac{3x^2}{x^3+9}+\frac{1}{3}\frac{4x}{2x^2-17}$$

所以 $f'(3)=\dfrac{105}{4}$，同理可得 $g'(3)=\dfrac{33}{2}$，于是 $I=-\dfrac{35}{22}$.

利用高等变形求极限

例 1.3.70. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)+\cdots+(x+\alpha_n)}-x\right]=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$.

证 先证: $A^n-B^n=(A-B)\sum\limits_{i=1}^{n}A^{i-1}B^{n-i}$，过程如下:

引理 1.3.3. $A^n-1=(A-1)\sum\limits_{i=1}^{n}A^{i-1}$. (证明略)

$$A^n-B^n=B^n\left[\left(\frac{A}{B}\right)^n-1\right]\xlongequal{A^n-1=(A-1)\sum_{i=1}^{n}A^{i-1}}B^n\left(\frac{A}{B}-1\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{A}{B}\right)^{i-1}$$
$$=(A-B)\,B^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{A}{B}\right)^{i-1}=(A-B)\sum_{i=1}^{n}A^{i-1}B^{n-i}$$

则有 $\prod\limits_{i=1}^{n}(x+\alpha_i)-x^n=\left[\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}(x+\alpha_i)}-x\right]\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}(x+\alpha)^{\frac{n-j}{n}}\right]x^{j-1}$，故

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(x+\alpha_i)-x}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}(x+\alpha_i)^{\frac{n-j}{n}}\right]x^{j-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i+\ldots+\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}(x+\alpha_i)^{\frac{n-j}{n}}\right]\cdot x^{j-1}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i+o\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+\dfrac{\alpha_i}{x}\right)^{\frac{n-j}{n}}\right]}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.$$

例 1.3.71. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n\prod\limits_{m=1}^{n}\left(1-\dfrac{1}{m}+\dfrac{5}{4m^2}\right)$.

由 *Euler* 乘积公式:

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right),\ z\in\mathbb{C}$$

将 z 替换为 $\mathrm{i}z$，并且有 $\sin\alpha=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{2\mathrm{i}}$，得

$$\frac{\sin\mathrm{i}\pi z}{\mathrm{i}\pi z}=\frac{\mathrm{e}^{\pi z}-\mathrm{e}^{-\pi z}}{2\pi z}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right),\ z\in\mathbb{C}\tag{1}$$

取 $z=1,2$，代入式 *(1)* 中，得

$$\frac{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right),\ \frac{\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}}{4\pi}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{4}{n^2}\right)\tag{2}$$

记 $x_n=\prod_{m=1}^{n}\left(1-\frac{1}{m}+\frac{5}{4m^2}\right)=\prod_{m=1}^{n}\frac{(2m-1)^2+4}{4m^2}$，式 (2) 取极限得

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{4}{k^2}\right)=\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}}{4\pi},\quad \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)=\frac{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi}\tag{3}$$

并且

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{4}{k^2}\right)&=\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{4}{4m^2}\right)\cdot\prod_{m=1}^{n}\left[1+\frac{4}{(2m-1)^2}\right]\\&=\prod_{m=1}^{n}\frac{4m^2+4}{4m^2}\cdot\prod_{m=1}^{n}\frac{(2m-1)^2+4}{(2m-1)^2}=\prod_{m=1}^{n}\frac{4\left(m^2+1\right)}{(2m-1)^2}\cdot\prod_{m=1}^{n}\frac{(2m-1)^2+4}{4m^2}\\&=4^n\prod_{m=1}^{n}\frac{m^2+1}{m^2}\cdot\prod_{m=1}^{n}\frac{m^2}{(2m-1)^2}\cdot x_n=\left(\prod_{m=1}^{n}\frac{m^2+1}{m^2}\right)\cdot\frac{4^{2n}(n!)^4}{((2n)!)^2}\cdot x_n\end{aligned}$$

由 Stirling 公式 $n!=\sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$，得

$$\frac{4^{2n}(n!)^4}{((2n)!)^2}=\pi n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

因此

$$\prod_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{4}{k^2}\right)=\left(\prod_{m=1}^{n}\frac{m^2+1}{m^2}\right)\cdot\pi\left(nx_n\right)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

当 $n\to\infty$ 时，由式 (3) 得

$$\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}}{4\pi}=\frac{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi}\cdot\pi\cdot\lim_{n\to\infty}nx_n\Rightarrow\lim_{n\to\infty}nx_n=\frac{\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi}.$$

1.3.6 Stolz 定理及其应用

Stolz 定理是求解和证明数列极限的一种重要方法，它有 $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{*}{\infty}$ 型两种形式.

数列的情况

定理 1.3.18 ($*/\infty$ 型)**.** 设数列 $\{a_n\}$ 是严格递增的无穷大量，若 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l$，($l$ 为有限或 $\pm\infty$)，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l.$$

定理 1.3.19 (0/0 型)**.** 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 都是无穷小量，且 $\{a_n\}$ 严格单调递减，若 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l$ (l 为有限或 $\pm\infty$)，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l.$$

定理 1.3.18 其实只要求分母 x_n 严格单调递增趋向无穷大，至于分子 y_n 是否趋向无穷大，无关紧要；定理 1.3.19 则是名副其实的 $\frac{0}{0}$ 型.

例 1.3.72. 计算极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k^3+k^2}$.

原式 $\xlongequal{Stolz}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum_{k=1}^{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\right)\sqrt[3]{k^3+k^2}}{n+1-1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{(n+1)^3+(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}.$

例 1.3.73. 设 $\alpha>1$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k^{\alpha}}$.

当 $\alpha>1$ 时，由基本不等式 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，得

$$n+k^{\alpha}\geqslant 2\sqrt{nk^{\alpha}}$$

所以有

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k^{\alpha}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{nk^{\alpha}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^{\alpha}}}$$

$$\xlongequal{Stolz}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\right)\dfrac{1}{\sqrt{k^{\alpha}}}}{2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n^{\alpha}}}=0$$

故由夹逼准则得原极限等于 0.

推论 1.3.8. 当 α 为正数时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k^{\alpha}}=\begin{cases}1, & 0<\alpha<1\\ \ln 2, & \alpha=1\\ 0, & \alpha>1\end{cases}$.

证 当 $\alpha=1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln 2$$

当 $\alpha\in(0,1)$ 时，注意到不等式 $1\leqslant k\leqslant n$ 时，

$$\frac{1}{n+n^{\alpha}}<\frac{1}{n+k^{\alpha}}<\frac{1}{n+1}$$

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+n^{\alpha}}<\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k^{\alpha}}<\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+1}$，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+n^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+n^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n^{\alpha-1}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n^{-1}}=1$$

由夹逼准则可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k^{\alpha}}=1$，又知当 $\alpha>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k^{\alpha}}=0$，故综上所述，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k^{\alpha}}=\begin{cases}1, & 0<\alpha<1\\ \ln 2, & \alpha=1\\ 0, & \alpha>1\end{cases}.$$

例 1.3.74. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\dfrac{1}{p+1}$ (p 为自然数).

证法一 原式 $\xlongequal{Stolz}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+n)^p}{(p+1)n^p+\dfrac{(p+1)p}{2}n^{p-1}+\cdots+1}=\dfrac{1}{p+1}$.

证法二 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^p=\displaystyle\int_0^1 x^p dx=\dfrac{1}{p+1}$.

例 1.3.75. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$.

证 令 $|x_n-x_{n-1}|:=y_n=\left|\sum\limits_{k=3}^{n}(y_k-y_{k-1})+y_1\right|\leqslant\sum\limits_{k=3}^{n}|y_k-y_{k-1}|+y_2\leqslant\sum\limits_{k=3}^{n}|x_k-x_{k-2}|+|x_2-x_1|$，于是

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{|x_n-x_{n-1}|}{n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=3}^{n}|x_k-x_{k-2}|+|x_2-x_1|}{n}\xlongequal{Stolz}\lim_{n\to\infty}\frac{|x_n-x_{n-2}|}{n-(n-1)}=0$$

由夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0.$

例 1.3.76. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n\ln n]{n!}.$

法一：(积分放缩 + 夹逼准则) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n\ln n}}=\exp\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n\ln n}$，又因为

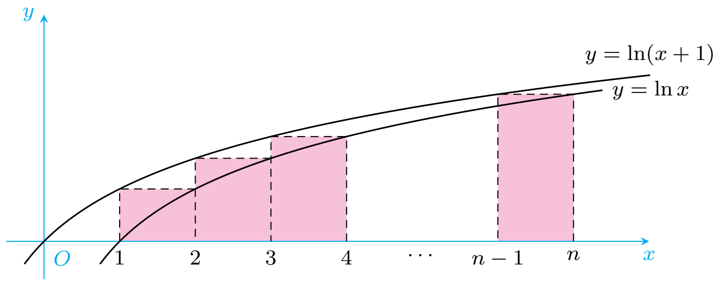

图 1.3.3

由图可知：$\displaystyle\int_1^n\ln x\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{n}\ln k\leqslant\int_1^n\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$ 则有

$$\frac{n\ln n-n+1}{n\ln n}\leqslant\frac{1}{n\ln n}\sum_{k=1}^{n}\ln k\leqslant\frac{(n+1)\ln(n+1)-n}{n\ln n}$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\ln n-n+1}{n\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\ln(n+1)-n}{n\ln n}=1$，因此有夹逼准则，原式$=\mathrm{e}$.

法二：(Stolz 定理+L'Hospital 法则) 同上得到和式：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n\ln n}\xlongequal{Stolz}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n\ln n-(n-1)\ln(n-1)}$ 下面考虑该极限值 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\ln n-(n-1)\ln(n-1)}{\ln n}$，由 Heine 定理将其连续化为函数极限：

$$I'=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x-(x-1)\ln(x-1)}{x\ln x}$$

$$I'\xlongequal{L'}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+1-\ln(x-1)-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}x\ln\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{x}{x-1}-1\right)=1\Rightarrow\text{原式}=\mathrm{e}.$$

例 1.3.77. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{2^k}{2^{k+1}-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-k}}}.$

取对数降低运算等级，故

$$I=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2^k}{2^{k+1}-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-k}}}=\exp\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{n-k}}\ln\frac{2^k}{2^{k+1}-1}$$

$$=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}\ln\frac{2^k}{2^{k+1}-1}\xlongequal{Stolz}\exp\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}-\sum\limits_{k=1}^{n-2}\right)2^{k-1}\ln\frac{2^k}{2^{k+1}}-1}{2^{n-1}-2^{n-2}}$$

$$= \exp \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-2}\ln \dfrac{2^{n-1}}{2^n-1}}{2^{n-1}-2^{n-2}} = \exp \lim_{n\to\infty} \ln \frac{1}{2-\dfrac{1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2}.$$

例 1.3.78. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n}\ln \mathrm{C}_n^k$.

Stolz 公式可重复使用,

$$\lim_{n\to\infty} S_n \xlongequal{Stolz} \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n+1}\ln \mathrm{C}_{n+1}^k - \sum\limits_{k=0}^{n}\ln \mathrm{C}_n^k}{(n+1)^2-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln \dfrac{\mathrm{C}_{n+1}^k}{\mathrm{C}_n^k}+\ln \mathrm{C}_{n+1}^{n+1}}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln \dfrac{n+1}{n-k+1}}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln k}{2n+1}$$

$$\xlongequal{Stolz} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n-\ln(n+1)}{(2n+1)-(2n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}{2} = \frac{1}{2}.$$

例 1.3.79. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\prod\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}$.

取对数,降低运算等级,有

$$I = \exp \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n(n+1)}\ln \prod_{k=0}^{\infty}\mathrm{C}_n^k = \exp \lim_{n\to\infty} \frac{2\sum\limits_{k=0}^{n}\ln \mathrm{C}_n^k}{n(n+1)} \xlongequal{Stolz} \exp \lim_{n\to\infty} \frac{2\sum\limits_{k=0}^{n+1}\ln \mathrm{C}_{n+1}^k - 2\sum\limits_{k=0}^{n}\ln \mathrm{C}_n^k}{(n+1)(n+2)-n(n+1)}$$

$$= \exp \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln \dfrac{n+1}{n-k+1}}{n+1} = \cdots = \exp \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

例 1.3.80. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\dfrac{n!\,(n-1)!\cdots 2!}{n^n\,(n-1)^{n-1}\cdots 2^2}}$.

由例题 *1.3.10* 可知,$n! = \sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}, 0<\theta_n<1$,那么

$$\text{原式} = \exp \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\ln k! - \sum\limits_{k=2}^{n}\ln k^k}{n^2} \xlongequal{Stolz} \exp \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n! - \ln n^n}{2n-1} \xlongequal{Stirling} \exp \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\sqrt{2\pi n}\mathrm{e}^{-n}+\dfrac{\theta_n}{12n}\right)}{2n-1} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

例 1.3.81. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\dfrac{\pi^2}{6}-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{n}\right)$.

记 $m = \dfrac{\pi^2}{6} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$,

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty} \frac{m-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}} \xlongequal{Stolz} \lim_{n\to\infty} \frac{m-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{n}-\left(m-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{n-1}\right)}{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n-1)^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n-1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-(n-1)^2+n^2(n-1)-n(n-1)^2}{(n-1)^2-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{1-2n} = -\frac{1}{2}.$$

例 1.3.82. $\{\mathrm{C}_n^k\}_{k=0}^n$ 为二项式系数,A_n, G_n 分别表示它们的算术平均值和几何平均值,试证:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_n} = 2,\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{G_n} = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

证 因为 $A_n=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k=\dfrac{2^n}{n+1}$, $G_n=\left(\prod\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\right)^{\frac{1}{n+1}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\ln \mathrm{C}_n^k}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2^n}{n+1}}=2$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{G_n}&=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln \mathrm{C}_n^k}{n(n+1)}\xlongequal{Stolz}\exp\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln \mathrm{C}_n^k-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln \mathrm{C}_{n-1}^k}{2n}\\
&=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln \mathrm{C}_n^k-\sum\limits_{k=1}^{n-2}\ln \mathrm{C}_{n-1}^k}{2n}=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-2}\ln\dfrac{\mathrm{C}_n^k}{\mathrm{C}_{n-1}^k}+\ln \mathrm{C}_n^{n-1}}{2n}\\
&=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-2}\ln\dfrac{n}{n-k}+\ln n}{2n}=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{n-k}{n}\right)\\
&=\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1-x)\mathrm{d}x\right]=\sqrt{\mathrm{e}}.
\end{aligned}
$$

函数极限的情况

Stolz 定理可推广到函数极限的情况.

定理 1.3.20 (∞/∞ 型). 若 $T>0$ 为常数，且满足

(1) $g(x+T)>g(x)$, $\forall x\geqslant a$;

(2) $g(x)\to+\infty\ (x\to+\infty)$，且 f,g 在 $[a,+\infty)$ 内闭有界;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$.

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$，(其中 l 为有限数，$+\infty$ 或 $-\infty$).

定理 1.3.21 ($0/0$ 型). 若 $T>0$ 为常数，且

(1) $0<g(x+T)<g(x),\forall x\geqslant a$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f=\lim\limits_{x\to+\infty}g=0$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$.

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$，(其中 l 为有限数，$+\infty$ 或 $-\infty$).

例 1.3.83. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，且内闭有界 (即 $\forall[\alpha,\beta]\subset(a,+\infty)$, f 在 $[\alpha,\beta]$ 上有界),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=l$$

其中 l 为有限数，$+\infty$ 或 $-\infty$，证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^{n+1}}=\dfrac{l}{n+1}$.

运用函数的 *Stolz* 定理，得

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(n+1)x^n+\dfrac{n(n+1)}{1\cdot2}x^{n-1}+\cdots+1}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x^n}}{(n+1)+\dfrac{n(n+1)}{1\cdot2}\dfrac{1}{x}+\cdots+\dfrac{1}{x^n}}=\frac{l}{n+1}\ (l\ \text{为}+\infty,-\infty\ \text{也成立}).
\end{aligned}
$$

Stolz 的应用

例 1.3.84. 对于数列 $x_0=a, 0<a<\dfrac{\pi}{2}, x_n=\sin x_{n-1}\ (n=1,2,\cdots)$，证明:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n=1.$$

证

(1) 因为 $0<a<\dfrac{\pi}{2}$，$x_0=a$，递推可知

$$0<x_n=\sin x_{n-1}<x_{n-1}<\frac{\pi}{2}\ (n=1,2,\cdots)$$

$\{x_n\}$ 单调递减且有下界 0，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，知 $A=\sin A\Rightarrow A=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2) 要证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{3}}x_n=1$，即证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\frac{1}{x_n^2}}=3$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}\xlongequal{Stolz}\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{x_{n-1}^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x_{n-1}}-\frac{1}{x_{n-1}^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2\sin^2 x_n-1}{x_{n-1}^2-\sin^2 x_{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin^2 x}{x^2-\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{(x+\sin x)(x-\sin x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{(2x+o(x))\left(\frac{x3}{6}+o(x^3)\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{(2+o(1))\left(\frac{1}{6}+o(1)\right)}=3.$$

得证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{3}}x_n=1$.

例 1.3.85. 设 $0<a_1<1, a_{n+1}=a_n(1-a_n)\ (\forall n\in\mathbb{N})$，证明: $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=1$.

证 由 $0<x_1<1$ 及 $x_2=x_1(1-x_1)$ 知，$0<x_2<1$，用数学归纳法可证: $\forall n\in\mathbb{N}^*:0<x_n<1$，于是 $0<\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1-x_n<1\ (n=1,2,\cdots)$，从而 $\{x_n\}\searrow 0$，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，递推关系式两边取极限，得 $A=A(1-A)$，解得 $A=0$. 令 $b_n=\dfrac{1}{x_n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$，且数列 $\{b_n\}$ 是严格单调递增，故由 *Stolz* 定理

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}(1-x_n)=1.$$

例 1.3.86. 设 $x_1>0, x_{n+1}=\ln(1+x_n)\ (n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n$.

$x_2=\ln(1+x_1)>0$，用数学归纳法可证 $\forall n\in\mathbb{N}^*:x_n>0$，又 $x_1>0, x_{n+1}=\ln(1+x_n)<x_n$，故数列 $\{x_n\}\searrow 0$，那么

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}\xlongequal{Stolz}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\ln(1+x_{n-1})}-\frac{1}{x_{n-1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}\ln(1+x_{n-1})}{x_{n-1}-\ln(1+x_{n-1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2}{\frac{1}{2}x_{n-1}^2}=2.$$

例 1.3.87. 序列 $a_{ij}=\dfrac{i+j}{i^2+j^2}$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}$.

由 Stolz ($*/\infty$ 型) 得[2]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\right)\frac{i+j}{i^2+j^2}=\lim_{n\to\infty}\left[2\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1)+k}{(n+1)^2+k^2}\right)+\frac{1}{n+1}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\dfrac{k}{n+1}}{1+\left(\dfrac{k}{n+1}\right)^2}\right)+\frac{1}{n+1}\right]=2\int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}+\ln 2.$$

例 1.3.88. 序列 $a_{ij}=\dfrac{ij}{\sqrt{i^2+j^2+ai+bj+c}}$，$a,b,c$ 为非负实数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}$.

令 $y_n=\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{ij}{\sqrt{i^2+j^2}}$，那么

$$\lim_{n\to\infty}y_n\xlongequal{\text{Stolz}}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1}\sum\limits_{j=1}^{n+1}-\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\right)\dfrac{ij}{\sqrt{i^2+j^2}}}{3n^2+3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[2\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k(n+1)}{\sqrt{k^2+(n+1)^2}}\right)+\dfrac{n+1}{\sqrt{2}}\right]}{3n^2+3n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^2}{3n^2+3n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{k/(n+1)}{\sqrt{1+(k/(n+1))^2}}=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

考虑 $\delta>0$ 的情况，令 $z_n=\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{ij}{\sqrt{(i+\delta)^2+(j+\delta)^2}}$，下证 $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n-y_n)=0$，

$$d_n=z_n-y_n=\frac{-1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(2\delta^2+2\delta i+2\delta j)\,ij}{\sqrt{(i+\delta)^2+(j+\delta)^2}\sqrt{i^2+j^2}\left(\sqrt{(i+\delta)^2+(j+\delta)^2}+\sqrt{i^2+j^2}\right)}$$

由 $\sqrt{i^2+j^2}\geqslant\sqrt{2ij}$，因此

$$|d_n|\leqslant\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(2\delta^2+2\delta i+2\delta j)\,ij}{(i^2+j^2)^{\frac{3}{2}}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta^2+\delta i+\delta j}{\sqrt{i}\sqrt{j}}$$

$$=\frac{\delta^2}{\sqrt{2}n^3}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{j}}\right)+\frac{\delta}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{j}}\right)\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i}\right)+\frac{\delta}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}\right)\left(\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{j}\right)$$

当 $n\to\infty$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{j}}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{j}=0$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=0$，令 $x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}$，且 $\xi=\max\left\{\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2},\sqrt{\dfrac{c}{2}}\right\}$，得

$$i^2+j^2\leqslant i^2+j^2+ai+bj+c\leqslant(i+\xi)^2+(j+\xi)^2$$

因此 $z_n\leqslant x_n\leqslant y_n$，两边取极限，由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

---

[2]以下的括号不为矩阵符号，

$$\left(\begin{array}{cccccccc}
 & \dfrac{1+1}{1^2+1^2} & + & \dfrac{1+2}{1^2+2^2} & + \cdots + & \dfrac{1+n}{1^2+n^2} & + & \dfrac{1+n+1}{1^2+(n+1)^2}\\
+ & \dfrac{2+1}{2^2+1^2} & + & \dfrac{2+2}{2^2+2^2} & + \cdots + & \dfrac{2+n}{2^2+n^2} & + & \dfrac{2+n+1}{2^2+(n+1)^2}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
+ & \dfrac{n+1}{n^2+1^2} & + & \dfrac{n+2}{n^2+2^2} & + \cdots + & \dfrac{n+n}{n^2+n^2} & + & \dfrac{n+n+1}{n^2+(n+1)^2}\\
+ & \dfrac{n+1+1}{(n+1)^2+1^2} & + & \dfrac{n+1+2}{(n+1)^2+2^2} & + \cdots + & \dfrac{n+1+n}{(n+1)^2+n^2} & + & \dfrac{n+1+n+1}{(n+1)^2+(n+1)^2}
\end{array}\right)$$

$$-\left(\begin{array}{cccccc}
 & \dfrac{1+1}{1^2+1^2} & + & \dfrac{1+2}{1^2+2^2} & + \cdots + & \dfrac{1+n}{1^2+n^2}\\
+ & \dfrac{2+1}{2^2+1^2} & + & \dfrac{2+2}{2^2+2^2} & + \cdots + & \dfrac{2+n}{2^2+n^2}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
+ & \dfrac{n+1}{n^2+1^2} & + & \dfrac{n+2}{n^2+2^2} & + \cdots + & \dfrac{n+n}{n^2+n^2}
\end{array}\right)=2\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1)+k}{(n+1)^2+k^2}\right]+\frac{1}{n+1}.$$

1.4 极限典型问题

这一节讨论与极限相关联的三类典型问题，即极限的存在性问题、极限的局部逆问题和无穷小量及其阶的比较.

1.4.1 极限的存在性问题

讨论极限的存在性，是高等数学中既十分典型又经常遇到的问题，在研究非初等函数的连续性与可导性，往往归结为这类问题.

例 1.4.1. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\displaystyle\int_0^{x^2}\sqrt{1+\tan^2 t}\mathrm{d}t}{2x^2} & ,x<0\\ \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\ln(1+x^2)} & ,x>0\end{cases}$$

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

利用 *L'Hospital* 法则易求得在 $x=0$ 处的左右极限值,

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\displaystyle\int_0^{x^2}\sqrt{1+\tan^2 t}\mathrm{d}t}{2x^2}\xlongequal{L'}\lim_{x\to 0^-}\frac{2x\cdot\sqrt{1+\tan^2 x^2}}{4x}=\frac{1}{2}$$

并且

$$\lim_{xto0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\ln(1+x^2)}=\frac{1}{2}$$

由 $f(0^-)=f(0^+)=\dfrac{1}{2}$，故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{1}{2}$.

1.4.2 极限的局部逆问题

如果已知函数的极限存在，但是在函数的表达式中含有一个 (或多个) 待定的参数，要求确定待定参数的值，这就是所谓的函数极限的局部逆问题.

例 1.4.2 (2018 数二). 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^x+ax^2+bx\right)^{x^{-2}}=1$，则

A. $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-1$ B. $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=-1$ C. $a=\dfrac{1}{2}$, $b=1$ D. $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=1$

由题设条件 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^x+ax^2+bx\right)^{x^{-2}}=\exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\mathrm{e}^x+ax^2+bx\right)=1$，于是有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^x+ax^2+bx\right)}{x^2}=0$，即

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^x+ax^2+bx\right)}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+ax^2+bx+1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+ax^2+bx+1+o(x^2)}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{2}+a\right)+\frac{b+1}{x}+\frac{2}{x^2}\right]=0\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}+a=0\\1+b=0\end{cases}\end{aligned}$$

故解得选 *B*.

例 1.4.3 (2018 数一). 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=\mathrm{e}$，求 k.

$\exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin kx}\ln\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)=\exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\tan x)-\ln(1+\tan x)}{\sin kx}=\exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\tan x}{\xi_x\cdot\sin kx}=\mathrm{e}$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\tan x}{\xi_x\cdot\sin kx}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{\xi_x k}=1\Rightarrow k=-2$$

其中 $\xi_x\to 1\ (x\to 0)$.

例 1.4.4. 试确定常数 A,B,C，使下式当 $x\to 0$ 时成立:

$$\frac{\mathrm{e}^{\sin x}}{\sin x}=\frac{1+Bx+Cx^2}{x+Ax^2}+o\left(x^2\right).$$

将所给等式两边同时乘以 $(1+Ax)\sin x$，并注意到 $x\to 0$ 时，$(1+Ax)\sin x\cdot o\left(x^2\right)=o\left(x^3\right)$，得

$$(1+Ax)\mathrm{e}^{\sin x}=\frac{\sin x}{x}\left(1+Bx+Cx^2\right)+o\left(x^3\right)$$

将 $\mathrm{e}^{\sin x}$, $\dfrac{\sin x}{x}$ 分别展开到 x 的三阶，于是有

$$\mathrm{e}^{\sin x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right),\quad \frac{\sin x}{x}=1-\frac{1}{6}x^2+o\left(x^2\right)$$

代入上式，得

$$\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)(1+Ax)=\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)\left(1+Bx+Cx^2\right)+o\left(x^3\right)$$

$$(A+1-B)x+\left(A-C+\frac{2}{3}\right)x^2+\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{6}\right)x^3=o\left(x^3\right)$$

欲使上式成立，必须有 $\begin{cases}A+1-B=0\\ A-C+\dfrac{1}{3}=0\\ \dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{6}=0\end{cases}$，联立解得 $A=-\dfrac{1}{4}$, $B=\dfrac{3}{4}$, $C=\dfrac{5}{12}$.

1.4.3　无穷小量及其阶的比较

有关无穷小量的概念可参考定义 1.3.1.

例 1.4.5 (2019 数一). 当 $x\to 0$ 时，若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 k 等于

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

由于当 $x\to 0$ 时，$x-\tan x\sim-\dfrac{1}{3}x^3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}=-\dfrac{1}{3}$，所以 $k=3$，选 C.

例 1.4.6. 设 $x\to 0$ 时，$\mathrm{e}^{x\cos x^2}-\mathrm{e}^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

因为 $\mathrm{e}^{x\cos x^2}-\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\left[\mathrm{e}^{x\left(\cos x^2-1\right)}-1\right]\sim x\left(\cos x^2-1\right)\sim-\dfrac{1}{2}x^5$，所以 $n=5$，故选 A

例 1.4.7 (2001 数二). 设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln\left(1+x^2\right)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $\mathrm{e}^{x^2}-1$ 高阶的无穷小，则正整数 n

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

因为 $(1-\cos x)\ln\left(1+x^2\right)\sim\dfrac{1}{2}x^4$, $x\sin x^n\sim x^{n+1}$, $\mathrm{e}^{x^2}-1\sim x^2$，由题意知 $4>n+1>2$，解得 $n=2$，故选 B.

1.5 递推形式的极限

有些数列，常常是利用递推的形式给出的，如何计算这类数列的极限，是本节的重点. 此类问题在各类考试中比较常见，需多加注意.

1.5.1 利用存在性求极限

假若用某种方法证明了递推数列的极限存在，则在递推公式里取极限，便可得到极限值 A 应满足的方程，解此方程，可求得极限值 A.

定理 1.5.1 (单调有界准理)**.** 若 $x_n\nearrow$ 有上界，或 $x_n\searrow$ 有下界，则 $\{x_n\}$ 收敛.

判断单调性的通常方法有:

(1) $\forall n\in\mathbb{N}: x_{n+1}-x_n\begin{cases}\geqslant 0, & x_n\nearrow,\\ \leqslant 0, & x_n\searrow.\end{cases}$

(2) $\forall n\in\mathbb{N}: \dfrac{x_{n+1}}{x_n}\begin{cases}\geqslant 1, & x_n\nearrow,\\ \leqslant 1, & x_n\searrow.\end{cases}$

(3) 若 $x_{n+1}=f(x_n)$, $f'(x)\geqslant 0$，则 $\begin{cases}x_1\leqslant x_2, & x_n\nearrow,\\ x_1\geqslant x_2, & x_n\searrow.\end{cases}$

定理 1.5.2 (压缩映射)**.** 对于任一数列 $\{x_n\}$ 而言，若存在常数 r，使得 $\forall n\in\mathbb{N}$，恒有

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant r|x_n-x_{n-1}|,\ 0<r<1$$

则数列 $\{x_n\}$ 收敛；特别地，若数列 $\{x_n\}$ 利用递推公式给出: $x_{n+1}=f(x_n)\ (n=1,2,\cdots)$，其中 f 为某一可微函数，且 $\exists r\in\mathbb{R}$，使得

$$|f'(x)|\leqslant r<1$$

则数列 $\{x_n\}$ 收敛. 若上式只在某区间 D 上成立，则必须验证数列 $\{x_n\}$ 是否保持在区间 D 内.

定理 1.5.3 (不动点迭代)**.** 求解非线性方程 (组) 的一类常见的数值解法. 例如，单个方程的求根问题 $f(x)=0$ 总可以等价地写成 $x=\phi(x)$，其中 $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个辅助函数，满足该式的点 x 称为不动点. 如果给定初始点 $x(0)$，就可以考虑如下的不动点迭代法:

$$x^{(k+1)}=\phi\left(x^{(k)}\right)\ (k=0,1,\cdots)$$

函数 ϕ 亦称为**迭代函数**.

如果迭代函数 ϕ 是一个闭区间上的压缩映射 (或者迭代函数连续可微，且导数的绝对值在该闭区间上严格小于 1)，则不动点迭代法产生的序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛到 ϕ 在区间上的不动点.

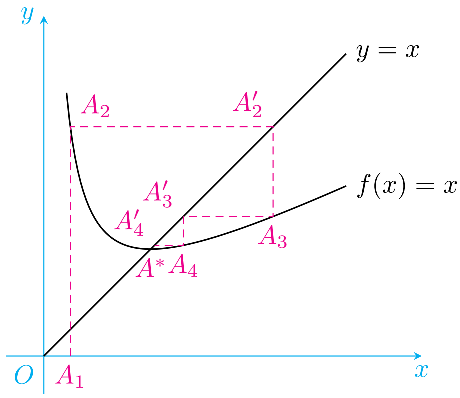

图 1.5.1

例 1.5.1. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_0=1$, $x_{n+1}=\sqrt{2x_n}\ (n=0,1,2,\cdots)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限值.

证法一 $x_n=\sqrt{2x_{n-1}}=\sqrt{2\sqrt{2x_{n-2}}}=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=2^{1-\frac{1}{2^n}}\to 2\ (n\to\infty)$.

证法二 显然 $1\leqslant x_0<2$，假设 $1\leqslant x_k<2$，则 $1\leqslant x_{k+1}=\sqrt{2x_k}<\sqrt{2\cdot 2}=2$，故由数学归纳法知，$\forall n\in\mathbb{N}:1\leqslant x_n<2$，又由 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\sqrt{2x_n}}{x_n}=\sqrt{\dfrac{2}{x}}>1$，知 $\{x_n\}\nearrow$，所以由单调有界原理得 $\{x_n\}$ 收敛，不妨记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则在递推公式里取极限，有 $A=\sqrt{2A}\Rightarrow A=0,2$，而由 $x_n\geq 1$，知 $A\geqslant 1$，故取 $A=2$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

证法三 令 $f(x)=\sqrt{2x}\ (x>0)$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}>0\ (x>0)$，于是当 $x>0$ 时，$f(x)\nearrow$，从而有 $x_n>x_{n-1}$，可得 $x_{n+1}=f(x_n)>f(x_{n-1})=x_n$，而 $x_1=\sqrt{2}>x_0=1$，故有 $x_1<x_2<\cdots$，即 $\{x_n\}\nearrow$，其余证法同证法 *2*.

证法四 如证法 *2*，已有 $1\leqslant x_n<2$，对 $f(x)=\sqrt{2x}$，有

$$|f'(x)|=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}<1$$

满足压缩映射条件，其余证法同证法 *2*.

证法五 由递推关系式两边取对数，得 $\ln x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\ln x_n+\dfrac{1}{2}\ln 2$，令 $b_n=\ln x_n$，则

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}\ln 2,\ b_0=0$$

记 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\ln 2$，则 $b_{n+1}=f(b_n)$，又由特征方程 $x=f(x)$，解得特征根 $x=\ln 2$，所以

$$b_n-\ln 2=\left(\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{2}\ln 2\right)-\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2\right)=\frac{1}{2}(b_{n-1}-\ln 2)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot(b_0-\ln 2)=-\ln 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-\ln 2)=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

推论 1.5.1. 一般地，设 $a,x_0>0,x_{n+1}=\sqrt{ax}\ (n=0,1,2,\cdots)$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

例 1.5.2. 已知 $x_1=\sqrt{6}$, $x_n=\sqrt{6+x_{n-1}}\ (n=2,3,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 有极限，并求其值.

证法一 用数学归纳法可证: $0<x_n<3\ (n=1,2,\cdots)$，
因为 $x_{n+1}x-n=\sqrt{6+x_n}-\sqrt{6+x_{n-1}}=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{6+x_n}+\sqrt{6+x_{n-1}}}$，所以 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号，又 $x_2=\sqrt{6+\sqrt{6}}>\sqrt{6}=x_1$，所以 $x_{n+1}>x_n$，即 $\{x_n\}\nearrow 3$，由单调有界准则知，$\{x_n\}$ 收敛.

证法二 先假设数列 $\{x_n\}$ 收敛，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则由递推关系式两边取极限，得 $A=\sqrt{6+A}$，解得 $A=3,-2$，因为 $x_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，所以 $A=3$，下证数列 $\{x_n\}$ 收敛于 3.
记 $q=\dfrac{1}{\sqrt{6}+3}$，则有

$$|x_n-3|=\left|\sqrt{6+x_{n-1}}-3\right|=\frac{|x_{n-1}-3|}{\sqrt{6+x_{n-1}}+3}<q\cdot|x_{n-1}-3|<\cdots<q^{n-1}\cdot|x_1-3|$$

而由 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，故由极限的定义或者夹逼准则，可得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

例 1.5.3. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{2(x_n-1)}, (n=0,1,2,\cdots)$，且 $x_0>1$，证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

因为 $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{2(x_n-1)}=\dfrac{x_n^2-1+1}{2(x_n-1)}=\dfrac{(x_n-1)(x_n+1)+1}{2(x_n-1)}=1+\dfrac{x_n-1}{2}+\dfrac{1}{2(x_n-1)}\geqslant 2\ (n=1,2,\cdots)$，

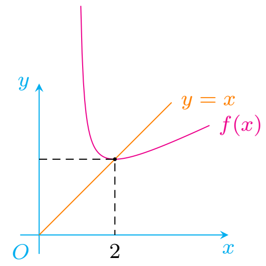

图 1.5.2

*法一：*令 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x-1)}$，则

$$f'(x)=\frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{(x-1)^2}\right]$$

所以 $|f'(x)|=\left|\dfrac{1}{2}\left[1-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right]\right|<\dfrac{1}{2}<1$，表明 $x_{n+1}=f(x_n)$ 是一压缩映像，所以 $\{x_n\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，不妨记为 A，对 $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{2(x_n-1)}$ 两边取极限，有 $A=\dfrac{A^2}{2(A-1)}\Rightarrow A=2$，由极限的保序性可得 $A=2$，即原数列极限为 2.

法二：$x_{n+1}-x_n=\dfrac{x_n^2}{2(x_n-1)}-x_n=-\dfrac{x_n(x_n-2)}{2(x_n-1)}<0$，则 $\{x_n\}\searrow$，同法一可得数列极限为 2.

*法三：*取[3] $A=2$，则 $A=\dfrac{A^2}{2(A-1)}$，作

$$|x_{n+1}-A|-\left|\frac{x_n^2}{2(x_n-1)}-\frac{A^2}{2(A-1)}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{x_n^2-1+1}{x_n-1}-\frac{A^2-1+1}{A-1}\right|=\frac{1}{2}\left|x_n+1+\frac{1}{x_n-1}-(A+1)-\frac{1}{A-1}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|x_n-A+\frac{1}{x_n-1}-\frac{1}{A-1}\right|<|x_n-A|$$

因此

$$|x_{n+1}-A|<\frac{1}{2}|x_n-A|<\cdots<\frac{1}{2^{n+1}}|x_0-A|\to 0\ \ (n\to\infty)$$

故由夹逼准则（或数列极限的定义）可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

例 1.5.4. (试用三种方法求) 设 $x_1>0$, $x_{n+1}=\dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}$ (c为常数)，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

法一：（用单调有界准则）若 $x_1=\sqrt{c}$，则 $x_n=\sqrt{c}\ (\forall n\in\mathbb{N})$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$，若 $x_1>\sqrt{c}$，因 $f(x):=\dfrac{c(1+x_n)}{c+x}=c-\dfrac{c(c-1)}{c+x}$ 严格 $\nearrow$，故 $\forall n\in\mathbb{N}: x_n>\sqrt{c}\Rightarrow x_{n+1}=\dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}=f(x_n)>f\left(\sqrt{c}\right)=\sqrt{c}$，由 $x_1>\sqrt{c}$ 可递推出 $x_n\sqrt{c}$，又因为 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{c-x_n^2}{c+x_n}<0$，知 x_n 严格 $\nearrow$，故 $\{x_n\}$ 收敛，同理可证，当 $0<x_1<\sqrt{c}$ 时，$x_n\nearrow\sqrt{c}$，综上，$\{x_n\}$ 单调有界，极限存在，令递推式 $\dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}$ 两边取极限，得极限为 $\sqrt{c}$.

法二：（用压缩映射）因为 $x_n>0$，且 $x>0$ 时，$f'(x)=\left[\dfrac{c(1+x)}{c+x}\right]'=\dfrac{c(c-1)}{(c+x)^2}>0$，又 $c>1$ 知

$$0<f'(x)=\frac{c(c-1)}{(c+x)^2}\leqslant\frac{c(c-1)}{c^2}=1-\frac{1}{c}<1\ (\forall x>0)$$

故 $x_{n+1}=f(x_n)$ 为压缩映射，$\{x_n\}$ 收敛，同上由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$.

*法三：*显然对一切 $x_n>0$，令 $f(x)=\dfrac{c(1+x)}{c+x}=x$，知不动点 $x^*=\sqrt{c}$，而 $f\nearrow$ 保证了 x_n 位于不动点 x^* 的同一侧，且

$$\left[x-\frac{c(1+x)}{c+x}\right](x-\sqrt{c})=\frac{cx+x^2-c-cx}{c+x}(x-\sqrt{c})=\frac{x+\sqrt{c}}{c+x}\left(x+\sqrt{c}\right)^2>0$$

意味着 x_n 向 x^* 步步靠近，根据不动点迭代法知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$.

例 1.5.5. 设 $a,x_0>0$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$ $(n=0,1,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其值.

[3]由图 1.5.2 可知在 $x>1$ 处有一个不动点 $x=2$.

证法一 由算术平均数大于几何平均数得 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{a}\,(n=0,1,2,\cdots)$，于是 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{a}{x_n^2}\right)\leqslant 1$，即 $x_{n+1}\leqslant x_n$，从而数列 $\{x_n\}\searrow\sqrt{a}$，故数列收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则由递推关系式两边取极限解得 $A=\pm\sqrt{a}$，因为 $x_n\geqslant\sqrt{a}$，所以极限为 $\sqrt{a}$.

证法二 由已知 $x_n>0$，且

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)-x_n=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n}-x_n\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{a}{\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)}-\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{-\left(x_{n-1}^2-a\right)^a}{x_{n-1}\cdot\left(x_{n-1}^2+a\right)}<0\,(n\geqslant 2)$$

所以 $\{x_n\}\searrow 0$，同解法 *1*，可求得极限值为 $\sqrt{a}$.

证法三 由 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{a}\,(n=0,1,2,\cdots)$，所以 $x_{n+1}-\sqrt{a}=(x_n-\sqrt{a})\cdot\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\sqrt{a}}{x_n}\right)$，反复利用该递推公式，得

$$x_{n+1}-\sqrt{a}=(x_1-\sqrt{a})\cdot\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{\sqrt{a}}{x_1}\right)\left(1-\frac{\sqrt{a}}{x_2}\right)\cdots\left(1-\frac{\sqrt{a}}{x_n}\right)$$

于是 $|x_{n+1}-\sqrt{a}|\leqslant\dfrac{1}{2^n}\cdot|x_1-\sqrt{a}|$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$，由夹逼准则得 $\left|\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}-\sqrt{a}\right|=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

推论 1.5.2. 一般地，设 $a,x_1>0,m\in\mathbf{N}^*$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{m}\left[(m-1)\,x_n+\dfrac{a}{x_n^{m-1}}\right]$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt[m]{a}$.

例 1.5.6. 设 $a,x_0>0,x_{n+1}=\dfrac{x_n\left(x_n^2+3a\right)}{3x_n^2+a}\,(n=0,1,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限值.

令 $f(x)=\dfrac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$，则 $f'(x)=\dfrac{3\left(x^2-a^2\right)^2}{(3x^2+a)^2}\geqslant 0,x_{n+1}=f(x_n)$，

若 $x_0\geqslant\sqrt{a}$，则 $x_1=f(x_0)\geqslant f\left(\sqrt{a}\right)=\sqrt{a}$，由 $x_n\geqslant\sqrt{a}$ 可得 $x_{n+1}=f(x_n)\geqslant f\left(\sqrt{a}\right)=\sqrt{a}$，于是由数学归纳法得 $\forall n\in\mathbb{N},x_n\geqslant\sqrt{a}$，又 $x_1=\dfrac{x_0\left(x_0^2+3a\right)}{3x_0^2+a}\leqslant x_0$，由 $f'(x)\geqslant 0$ 得 $x_2=f(x_1)\leqslant f(x_0)=x_1$，反复利用此关系，即得 $x_{n+1}\leqslant x_n$，于是数列 $\{x_n\}\searrow\sqrt{a}$，故数列 $\{x_n\}$ 收敛，

若 $0<x_0<\sqrt{a}$，则类似上面可证得 $\forall n\in\mathbb{N},0<x_n<\sqrt{a}$ 且 $x_{n+1}\geqslant x_n$，于是数列 $\{x_n\}\nearrow\sqrt{a}$，故数列 $\{x_n\}$ 收敛，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，易得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

推论 1.5.3. 一般地，设 $k\geqslant 2,k\in\mathbb{N}^*,x_0>0$，令 $x_{n+1}=\dfrac{x_n^k+\sum\limits_{i=1}^{[k/2]}\mathrm{C}_k^{2i}\cdot x_n^{k-2i}\cdot a^i}{\sum\limits_{i=0}^{[(k-1)/2]}\mathrm{C}_k^{2i+1}\cdot x_n^{k-2i-1}\cdot a^i}\,(n=0,1,\cdots)$，则数列 $\{x_n\}$ k 阶收敛于 $\sqrt{a}$.

事实上，因为 $\dfrac{x_{n+1}-\sqrt{a}}{x_{n+1}+\sqrt{a}}=\left(\dfrac{x_n-\sqrt{a}}{x_n+\sqrt{a}}\right)^k=\cdots=\left(\dfrac{x_1-\sqrt{a}}{x_1+\sqrt{a}}\right)^{k^n}$，所以有

$$x_{n+1}-\sqrt{a}=2\sqrt{a}\frac{\gamma^{k^n}}{1-\gamma^{k^n}}\to 0\,(n\to\infty)$$

且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\sqrt{a}}{(x_n-\sqrt{a})^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}+\sqrt{a}}{(x_n+\sqrt{a})^k}=\frac{1}{(2\sqrt{a})^{k-1}}.$$

1.5.2 写出通项求极限

利用不动点求通项

在前小节介绍了不动点迭代法，下文将介绍如何运用不动点解决两种类型的数列通项问题.

例 1.5.7. 已知 $a_{n+1}=\dfrac{a\cdot a_n+b}{c\cdot a_n+d}\ (c\neq 0)$，且 $ad-bc\neq 0$，a,b,c,d 都是常数，求通项 a_n.

设 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (c,ad-bc\neq 0)$，$\{a_n\}$ 满足递归关系 $a_{n+1}=f(a_n)$，且初始值 $a_1\neq f(a_1)$.

(1) 若 f 有两相异的不动点 p,q，则 $\dfrac{a_{n+1}-p}{a_{n+1}-q}=k\cdot\dfrac{a_n-p}{a_n-q}$，其中 $k=\dfrac{a-pc}{b-qc}$，即 $\left\{\dfrac{a_n-p}{a_n-q}\right\}$ 是以 k 为公比的等比数列，由此解得

$$a_n=\frac{(a_1q-pq)\,k^{n-1}-(a_1p-pq)}{(a_1-p)\,k^{n-1}-(a_1-q)}.$$

(2) 若 f 只有一个不动点 p，则 $\dfrac{1}{a_{n+1}-p}=\dfrac{1}{a_n-p}+k$，其中 $k=\dfrac{2c}{a+d}$，即 $\left\{\dfrac{1}{a_n-p}\right\}$ 是以 k 为公差的等差数列，由此解得

$$a_n=\frac{a_1-p}{(ka_1-pk)\,n+1-ka_1+pk}+k.$$

例 1.5.8. 已知 $a_{n+1}=\dfrac{a\cdot a_n^2+b}{2a\cdot a_n+c}\ (a\neq 0)$，$a,b,c$ 都是常数，求通项 a_n.

设递归函数为 $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{2ax+c}$，那么

1. 若 f 有两相异的不动点 p,q，即 $p=\dfrac{ap^2+b}{2ap+c}$，$q=\dfrac{aq^2+b}{2aq+c}$，则

$$a_{n+1}-p=\frac{a\cdot an^2+b}{2a\cdot a_n+c}-p=\frac{a\cdot a_n^2+b-2apa_n-pc}{2a\cdot a_n+c}=\frac{a\cdot a_n^2-2apa_n+ap^2}{2a\cdot a_n+c}=\frac{a(a-p)^2}{2a\cdot a_n+c}$$

同理 $a_{n+1}-q=\dfrac{a\,(a_n-q)^2}{2a\cdot a_n+c}$，两式相除，得

$$\frac{a_{n+1}-p}{a_{n+1}-q}=\left(\frac{a_n-p}{a_n-q}\right)^2=\left(\frac{a_{n-1}-p}{a_{n-1}-q}\right)^{2^2}=\cdots=\left(\frac{a_1-p}{a_1-q}\right)^{2^{n-1}}$$

由此解得，$a_n=\dfrac{q\,(a_1-p)^{2^{n-1}}-p\,(a_1-q)^{2^{n-1}}}{(a_1-p)^{2^{n-1}}-(a_1-q)^{2^{n-1}}}$.

2. 若 f 有两相同的不动点 p，易得 $p=-\dfrac{c}{2a}$，由 $a_{n+1}-p=a_{n+1}+\dfrac{c}{2a}=\dfrac{a\cdot a_n^2+b}{2a\cdot a_n+c}+\dfrac{c}{2a}$，令 $b_n=a_n+\dfrac{c}{2a_n}$，化简可得 $b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n$，即 $b_n=\left(a_1+\dfrac{c}{2a}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，由此解得

$$a_n=\left(a_1+\frac{c}{2a}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{c}{2a}.$$

例 1.5.9. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=2,x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}\ (n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证法一 记 $f(x)=2+\dfrac{1}{x}$，则 $x_{n+1}=f(x_n)$，由 $f(x)=x$ 解得不动点为 $p=1+\sqrt{2},q=1-\sqrt{2}$，于是

$$\frac{x_n-p}{x_n-q}=\frac{q}{p}\cdot\frac{x_{n-1}-p}{x_{n-1}-q}=\cdots=\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}\cdot\frac{x_1-p}{x_2-q}$$

而 $\left|\dfrac{q}{p}\right|=\left|\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right|<1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-p}{x_n-q}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1+\sqrt{2}$.

证法二 假设数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则由递推关系式两边取极限解得 $a=1\pm\sqrt{2}$，又因为

$$x_{n+1}=\frac{1}{x_n}+2>2$$

所以 $a\geqslant 2$，故取 $a=1+\sqrt{2}$，下证数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，

$$|x_n-a|=\left|\left(2+\frac{1}{x_n-1}\right)-\left(2+\frac{1}{a}\right)\right|=\left|\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{a}\right|=\frac{|x_{n-1}-a|}{ax_{n-1}}<\frac{|x_{n-1}-a|}{4}$$
$$<\frac{1}{4^2}\,|x_{n-2}-a|<\ldots<\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot|x_1-a|=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot\left|1-\sqrt{2}\right|=\frac{\sqrt{2}-1}{4^{n-1}}$$

所以由夹逼准则或极限的定义得 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-a)=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1+\sqrt{2}$.

推论 1.5.4. 一般地，设 $a,b,x_1>0, x_n=a+\dfrac{b}{x_{n-1}}\ (n=2,3,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{a+\sqrt{4b+a^2}}{2}$.

例 1.5.10. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{C\left(1+x_n\right)}{C+x_n}, n=1,2,\cdots$，$C>1$ 为常数，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

法一： 由递推关系式 $x_n=\dfrac{C\left(1+x_{n-1}\right)}{C+x_{n-1}}$ 得

$$x_n+\sqrt{C}=\sqrt{C}\cdot(1+\sqrt{C})\cdot\frac{x_{n-1}+\sqrt{C}}{x_{n-1}+C},$$

$$\frac{1}{x_n+\sqrt{C}}=\frac{1}{C+\sqrt{C}}\cdot\frac{x_{n-1}+C}{x_{n-1}+\sqrt{C}}=\frac{1}{C+\sqrt{C}}+\frac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\cdot\frac{1}{x_{n-1}+\sqrt{C}}$$

所以

$$\frac{1}{x_n+\sqrt{C}}-\frac{1}{2\sqrt{C}}=\frac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\cdot\left(\frac{1}{x_{n-1}+\sqrt{C}}-\frac{1}{2\sqrt{C}}\right)=\cdots=\left(\frac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{x_1+\sqrt{C}}-\frac{1}{2\sqrt{C}}\right)$$

因为 $\left|\dfrac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\right|<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\right)^{n-1}=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n+\sqrt{C}}=\dfrac{1}{2\sqrt{C}}$，
故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+\sqrt{C}\right)=2\sqrt{C}$，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{C}$.

法二： 因为 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，$C>1$，且

$$x_{n+2}-x_{n+1}=\frac{C\left(1+x_{n+1}\right)}{C+x_{n+1}}-x_{n+1}=\frac{C-x_{n+1}^2}{C+x_{n+1}}=\frac{C-\left(\dfrac{C\left(1+x_n\right)}{C+x_n}\right)^2}{C+\dfrac{C\left(1+x_n\right)}{C+x_n}}=\frac{(C-1)\left(C-x_n^2\right)}{\left(C+2x_n+1\right)\left(C+x_n\right)}$$

所以 $\dfrac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}=\dfrac{\dfrac{(C-1)\left(C-x_n^2\right)}{\left(C+2x_n+1\right)\left(C+x_n\right)}}{\dfrac{C-x_n^2}{C+x_n}}=\dfrac{C-1}{C+2x_n+1}>0$，于是 $x_{n+2}-x_{n+1}$ 与 $x_{n+1}-x_n$ 同号，从而知 $\{x_n\}$ 为单调递增数列，又由 $0<x_{n+1}=\dfrac{C\left(1+x_n\right)}{C+x_n}<\dfrac{C\left(1+x_n\right)}{1+x_n}=C$，可知数列 $\{x_n\}$ 有界，从而由单调有界原理知数列 $\{x_n\}$ 收敛，不妨记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，则由递推关系式两边取极限得 $l=\dfrac{C(1+l)}{C+l}$，解得 $l=\pm\sqrt{C}$，而由 $x_n>0$，知 $l\geqslant0$，故取 $l=\sqrt{C}$，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{C}$.

法三： 假设数列 $\{x_n\}$ 收敛，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则由递推关系式两边取极限，得 $A=\dfrac{C(1+A)}{C+A}$，解得 $A=\pm\sqrt{C}$，又因为 $x_n>0$，所以 $A\geqslant0$，故 $A=\sqrt{C}$，以下证明数列 $\{x_n\}$ 收敛且以 $\sqrt{C}$ 为极限，因为

$$\begin{aligned}\left|x_n-\sqrt{C}\right|&=\left|\frac{C\left(1+x_{n-1}\right)}{C+x_{n-1}}-\sqrt{C}\right|=\left|\frac{(C-\sqrt{C})\cdot\left(x_{n-1}-\sqrt{C}\right)}{C+x_{n-1}}\right|<\frac{C-\sqrt{C}}{C}\cdot\left|x_{n-1}-\sqrt{C}\right|\\&<\left(\frac{C-\sqrt{C}}{C}\right)^{n-1}\cdot\left|x_1-\sqrt{C}\right|\end{aligned}$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{C-\sqrt{C}}{C}\right)^{n-1}=0$，所以由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_n-\sqrt{C}\right|=0$，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{C}$.

法四： 令 $f(x)=\dfrac{C(1+x)}{C+x}$，则由 $f(x)=x$ 求得 $f(x)$ 的不动点 $x_1=\sqrt{C},x_2=-\sqrt{C}$，于是

$$x_n-\sqrt{C}=\frac{(C-\sqrt{C})\cdot\left(x_{n-1}-\sqrt{C}\right)}{C+x_{n-1}},\ x_n+\sqrt{C}=\frac{(C+\sqrt{C})\cdot\left(x_{n-1}+\sqrt{C}\right)}{C+x_{n-1}}$$

从而

$$\frac{x_n-\sqrt{C}}{x_n+\sqrt{C}}=\frac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\cdot\frac{x_{n-1}-\sqrt{C}}{x_{n-1}+\sqrt{C}}=\cdots=\left(\frac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\right)^{n-1}\cdot\frac{x_1-\sqrt{C}}{x_1+\sqrt{C}}$$

故由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\right)^{n-1}=0$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-\sqrt{C}}{x_n+\sqrt{C}}=0$，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{C}$.

利用生成函数求通项

生成函数又称为“母函数”，当想要了解某数列 $\{a_n\}_0^\infty$ 时，通常设为 $f(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$，即只通过一个参数 t 表示整个数列。

定理 1.5.4 (加法性质). 若 $f(t)$ 是 $\{a_n\}_0^\infty$ 的生成函数，$g(t)$ 是 $\{b_n\}_0^\infty$ 的生成函数，则 $\alpha f(t)+\beta g(t)$ 是 $\{\alpha a_n+\beta b_n\}_0^\infty$ 的生成函数.

$$\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n+\beta\sum_{n=0}^{\infty}b_nt^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)t^n.$$

定理 1.5.5 (移位性质). 若 $f(t)$ 是 $\{a_n\}_0^\infty$ 的生成函数，则 $t^mf(t)$ 是 $\{a_{n-m}\}_m^\infty$ 的生成函数.

$$t^m\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=\sum_{n=m}^{\infty}a_{n-m}t^n.$$

定理 1.5.6 (变换性质). 显然 $f(ct)$ 是序列 $a_0,ca_1,c^2a_2,\cdots$ 的生成函数，特别地 $1,c,c^2,c^3,\cdots$ 的生成函数是 $\dfrac{1}{1-ct}$，在数列里每隔一项取项时，有以下常用的技巧:

$$\begin{aligned}\frac{f(t)+f(-t)}{2}&=a_0+a_2t^2+a_4t^4+\cdots\\ \frac{f(t)-f(-t)}{2}&=a_1t+a_3t^3+a_5t^5+\cdots\end{aligned}$$

利用单位复根，可以推广到每隔 $m-1$ 取第 m 项: 令 $\omega=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/m}=\cos\left(\dfrac{2\pi}{m}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{2\pi}{m}\right)$，有

$$\sum_{n\leqslant 0,n\bmod m=r}a_nt^n=\frac{1}{m}\sum_{0\leqslant k\leqslant m}\omega^{-kr}f\left(\omega^kt\right)\ (0\leqslant r<m).$$

例 1.5.11. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_0=a,x_1=b,x_{n+1}=\dfrac{x_n+x_{n-1}}{2},n=1,2,3,\cdots$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

令 $f(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_nt^n$，则

$$\begin{aligned}f(t)&=\sum_{n=0}^{\infty}x_nt^n=a+bt+\sum_{n=2}^{\infty}x_nt^n=a+bt+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}t^n\\&=a+bt+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\sum_{n=2}^{\infty}x_{n-1}t^{n-1}+\frac{1}{2}t^2\sum_{n=2}^{\infty}x_{n-2}t^{n-2}=a+bt+\frac{1}{2}t\sum_{n=0}^{\infty}x_{n+1}t^{n+1}+\frac{1}{2}t^2\sum_{n=0}^{\infty}x_nt^n\\&=a+bt+\frac{1}{2}t\left(f(t)-a\right)+\frac{1}{2}t^2f(t)\end{aligned}$$

即 $f(t)=\dfrac{a+bt-\frac{1}{2}at}{1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t}=\dfrac{2a+2bt-at}{2-t-t^2}=\dfrac{2a+2bt-at}{(2+t)(1-t)}=\dfrac{A}{2+t}+\dfrac{B}{1-t}$，比较系数，

解得 $A=\dfrac{4a-3b}{3}$，$B=\dfrac{2b+a}{3}$，那么

$$f(t)=\frac{4a-3b}{3}\cdot\frac{1}{2+t}+\frac{2b+a}{3}\cdot\frac{1}{1-t}=\frac{4a-3b}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^nt^n+\frac{2b+a}{3}\sum_{n=0}^{\infty}t^n$$

从而 $x_n=\dfrac{4a-3b}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+\dfrac{2b+a}{3}\to\dfrac{2b+a}{3}\ (n\to\infty)$.

推论 1.5.5. 一般地，设 $x_0,x_1>0,x_{n+1}=kx_n+lx_{n-1}\,(n=1,2,\cdots)$，其中 $k,l>0$ 且 $k+l=1$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{x_1+lx_0}{1+l}$.

1.5.3 求解线性递推关系

定义 1.5.1. 一个常系数的 k 阶线性齐次递推关系是形如

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

的递推关系，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 是实数，$c_k \neq 0$.

这个定义中的递推关系是线性的，因为它的右边是数列前项的倍数之和；这个递推关系是齐次的，因为所出现的各项都是 a_j 的倍数.

求解常系数线性齐次递推关系

求解常系数线性齐次递推关系的基本方法是寻找形如 $a_n = r^n$ 的解，其中 r 是常数，注意 $a_n = r^n$ 是递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ 的解，当且仅当

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \ldots + c_k r^{n-k}$$

当等式的两边除以 r^{n-k} 并且从左边减去右边时，可得到等价的方程

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0.$$

因此，数列 $\{x_n\}$ 以 $a_n = r^n$ 作为解，当且仅当 r 是这后一个方程的解. 这个方程叫做该递推关系的特征方程，方程的解叫做这个递推关系的特征根.

定理 1.5.7 (常系数线性齐次递推定理). 设 c_1 和 c_2 是实数，假设 $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ 有两个不相等的根 r_1 和 r_2，那么数列 $\{x_n\}$ 是递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ 的解，当且仅当 $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ ，其中 α_1 和 α_2 是常数.

例 1.5.12. 设 $a_0 = 2, a_1 = 7$，且数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项.

由递推关系得特征方程为 $r^2 - r - 2 = 0$，解得根为 $r_1 = 2, r_2 = -1$，因此数列 $\{a_n\}$ 是递推关系解当且仅当

$$a_n = \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2 \cdot (-1)^n$$

$\alpha_{1,2}$ 均是常数，由初始条件得 $\begin{cases} a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ a_1 = 7 = \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases}$，所以

$$a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n.$$

定理 1.5.8. 设 c_1 和 c_2 是实数，$c_2 \neq 0$，假设 $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ 只有一个根 r_0，数列 $\{a_n\}$ 是递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ 的解，当且仅当 $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$，其中 α_1 和 α_2 是常数.

例 1.5.13. 求具有初始条件 $a_0 = 1$ 和 $a_1 = 6$ 的递推关系 $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ 的解.

$r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow r = 3$，因此递推关系的解为 $a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$，又由初始条件可解得 $\alpha_1 = 1 = \alpha_2$，因此解为 $a_n = 3^n + n \cdot 3^n$.

定理 1.5.9. 设 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 是实数，假设特征方程

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$$

有 k 个不相等的根 $r_1, r_2, \cdots, r_k$，那么数列 $\{a_n\}$ 是递推关系

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

的解，当且仅当

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n$$

$n = 0, 1, 2, \cdots$，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 是常数.

某些具有非线性递推关系的数列可化为线性形式处理.

例 1.5.14. 设 $x_0 = 1, x_1 = \mathrm{e}, x_{n+1} = \sqrt{x_n x_{n-1}}\,(n = 1, 2, \cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

由已知可得出 $x_n > 0\,(n = 1, 2, \cdots)$，且 $\ln x_{n+1} = \frac{1}{2}(\ln x_n - \ln x_{n-1})$，令 $a_n = \ln x_n$，则

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}\ (n = 1, 2, \cdots)$$

即化为例 1.5.11，最后解得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \mathrm{e}^{2/3}$.