

数字图像处理-作业 3

程铭

2020 年 3 月 29 日

1 数字图像中如何计算梯度

对于一般二维函数的偏微分，我们有：

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon, y) - f(x, y)}{\epsilon} \quad (1)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \epsilon) - f(x, y)}{\epsilon} \quad (2)$$

然而图像作为二维离散函数，因此 ϵ 不能无限小，对数字图像的梯度便使用差分来代替连续函数中的微分。由于数字图像是对像素进行离散的，最小的 ϵ 即是 1 个像素单位，因此式 1,2 可以变为：

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f(x + 1, y) - f(x, y) = g_x \quad (3)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f(x, y + 1) - f(x, y) = g_y \quad (4)$$

式 3, 4 分别表示图像在点 (x, y) 处在 x 方向和 y 方向上的梯度。因此，图像的梯度即相当于相邻像素之间的差值。

式 3, 4 可以表示为:

$$\nabla F = \begin{bmatrix} gx \\ gy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\nabla f = \text{mag}(\nabla F) = \sqrt{gx^2 + gy^2} \quad (6)$$

$$\alpha(x, y) = \arctan\left(\frac{gy}{gx}\right) \quad (7)$$

其中式 6 表示矢量的幅值, 式 7 表示矢量的方向角。

式 8, 9, 10 介绍了几种梯度算子。

Sobel 算子:

$$gx = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad gy = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Prewitt 算子:

$$gx = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad gy = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Roberts 算子:

$$gx = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad gy = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

2 如何度量局部区域灰度的变化

定性而言, 在数字图像中, 物体边缘处灰度变化较大, 物体内部灰度变化较小。定量而言, 可以使用梯度来度量灰度变化。在式 8, 9, 10 中介绍了几种梯度算子, 用其对应的卷积模板, 便可以计算梯度。计算的梯度越大, 灰度变化越大。

3 如何在有噪声的情况下合理估算局部区域灰度的变化

本人认为有以下三种方法：

1. 当计算梯度时，若发现某个像素点各方向上的梯度均发生突变，可以认为该点是噪声点，而不是原始图像的内容点，因此计算灰度变化时可以忽略之。
2. 先去除噪声，再进行灰度变化的计算。去除噪声可以采用均值滤波、中值滤波、高斯滤波等算法，不同种类的噪声可以采用不同方法处理：例如，椒盐噪声可以用中值滤波算法进行处理。在处理完噪声之后，便可以计算梯度。然而，去除噪声的过程中会不可避免地造成图像模糊、细节丢失等，因此此种方法可能有较大的误差。
3. 选择合适的梯度算子。例如：Prewitt 算子对噪声有一定的抑制作用，其抑制噪声的原理是通过像素平均。